

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის  
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების  
ფაკულტეტის „მოდელირებისა და მართვის  
საინჟინრო-სამეცნიერო ცენტრი“

თამაზ ოზაძე, არჩილ ფრანგიშვილი

უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური  
მოდელირება  
მონოგრაფია

თბილისი

2019

წიგნი უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკურ მოდელირებაში, მოიცავს შესაბამის მათემატიკურ აპარატს: ევკლიდური ველის თეორია, ტენზორული აღრიცხვა, დეფორმაციისა და ძაბვის თეორია. განხილულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ძირითადი კანონები: მასის შენახვის კანონი, უწყვეტობის განტოლება, წონასწორობისა და დინამიკის განტოლებები კოშის ფორმით, მოძრაობის რაოდენობისა და მისი მომენტის შენახვის კანონები ინტეგრალური ფორმით. განხილულია სითხეებისა და გაზის დინამიკის მოდელირების მეთოდები. ერთიანი მიდგომითაა მოცემული დეფორმირებადი ელასტიური გარემოს დინამიკისა და წონასწორობის მათემატიკური მოდელირების თავისებურებები. განხილულია ნოლისა და რივლინ-ერიკსენის თეორემები.

წიგნი განკუთვნილია ტექნიკური უნივერსიტეტის ბაკალავრიატის, მაგისტრატურისა და დოქტორანტურის ნიჭიერი სტუდენტებისათვის და მკვლევარებისათვის. მას ქართულ ენაზე ანალოგი არა აქვს.

რეცენზენტი. პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2019

ISBN 978-9941-8-1683-3

c

ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.

წიგნს ვუძღვნით  
დიდი ქართველი  
ჰიდროდინამიკოსის  
პროფესორ  
თეიმურაზ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის  
ნათელ ხსოვნას

### წინასიტყვაობა

უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, ბაზური საგანია ინჟინერ-მექანიკოსების აღზრდისათვის. მისი შესწავლისათვის მიზანშეწონილია სტუდენტს გავლილი ჰქონდეს ჰიდრაულიკის და მასალათა გამძლეობის საინჟინრო კურსები. ასევე, სტუდენტი უნდა ფლობდეს ტექნიკური უნივერსიტეტის ზოგადი ფიზიკისა და საინჟინრო მათემატიკის კურსებს.

უწყვეტ გარემოთა დინამიკა მათემატიკური ფიზიკის მნიშვნელოვანი ნაწილია და მოიცავს შესაბამის მათემატიკურ აპარატს: ველის თეორია, ტენზორული აღრიცხვა, დეფორმაციისა და ძაბვის თეორია. განხილულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ძირითადი კანონები: მასის შენახვის კანონი, უწყვეტობის განტოლება, წონასწორობისა და დინამიკის განტოლებები კოშის ფორმით, მოძრაობის რაოდენობისა და მისი მომენტის შენახვის კანონები ინტეგრალური ფორმით. განხილულია სითხეებისა და გაზის დინამიკის მოდელირების კლასიკური მეთოდები.

მონოგრაფიაში, ერთიანი მიდგომითაა მოცემული დეფორმირებადი ელასტიური გარემოს დინამიკისა და წონასწორობის მათემატიკური მოდელირების თავისებურებები. განხილულია ნოლის და რივლინ-ერიკსენის თეორემები, დრეკადობის თეორიისა და ჰიდროდინამიკის ამოცანების დასმის თავისებურებანი.

წიგნი საშუალებას იძლევა, დამოუკიდებლად იქნას შესწავლილი დაინტერესებული მკითხველის მიერ, რადგან ყოველ თეორიულ მასალას, თან ახლავს შესაბამისი ამოცანები და სავარჯიშოები ამოხსნებით.

უწყვეტ გარემოთა დინამიკა წარმოადგენს ფუნდამენტს, ისეთი საგნების შესასწავლად, როგორცაა: სამშენებლო მექანიკა, დრეკადობის თეორია, პლასტიკურობის თეორია, ცოცვადობის თეორია, კომპოზიტების მექანიკა, ფილებისა და გარსების თეორია, ჰიდროდინამიკა, გაზის დინამიკა, აეროდინამიკა, აფეთქების თეორია, საფრენი აპარატების დინამიკა, დრონების პროექტირება და გათვლის მეთოდები, წყალქვეშა გემების პროექტირება, ასტროფიზიკა, სისხლის ჰიდროდინამიკა, ოკეანეთა ჰიდროდინამიკა, ატმოსფეროს ჰიდროდინამიკა და კლიმატოლოგია, სეისმომედეგობა, ტალღების თეორია . . .

მონოგრაფია სრულიად ახალ მიდგომას გვთავაზობს უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მოდელირებისათვის, თუმცა, სიმარტივისათვის, განხილულია დრეკადობის წრფივი თეორია და ნიუტონური სითხეების მოდელირება. აქვე მოცემულია არაწრფივი უწყვეტი გარემოს რეოლოგიური თანადობების აგების წესიც. განხილულია რეინერის დრეკადი სხეული და რეინერ-რივლინის სითხეების მოდელირება. დამტკიცებულია ნოლის თეორემა და განხილულია რივლინ-ერიკსენის თეორემა.

## შესავალი

უწყვეტ გარემო წარმოადგენს რეალური დეფორმირებადი ობიექტის იდეალიზირებულ სახეს, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ რეალური მასალების, სითხეებისა და გაზების დინამიკის მაკროსკოპიული თვისებები.

რეალურად, ყველა ნივთიერება შედგება ატომებისა და მოლეკულებისაგან, რომლებიც განუწყვეტელ მშფოთვარე მოძრაობაში იმყოფებიან. ასეთი მოლეკულების რიცხვი მეტად დიდია, მართლაც  $1\text{სმ}^3$  მოცულობაში მოლეკულების რიცხვი  $10^{24}$  რიგისაა, ამასთან ერთად, მათ შორის არსებული ელექტრომაგნიტური ურთიერთქმედების ძალები იშვიათადაა ბოლომდე ცნობილი. ამიტომ, **მოლეკულურ დონეზე** მიმდინარე, კვანტური პროცესებიდან გამომდინარე, რეალური ობიექტების დეფორმაციების შესწავლა არაა პრაქტიკულად გამართლებული. მართლაც, მოლეკულურ დონეზე მიმდინარე პროცესებიდან გამომდინარე, რომ ავაგოთ მათემატიკური მოდელი  $1\text{სმ}^3$  მოცულობის მასალის დეფორმაციების შესასწავლად, დაგვჭირდებოდა ლაგრანჟის  $6N$  დიფერენციალური განტოლება, სადაც  $N=10^{24}$  (თითოეული მოლეკულისათვის გვაქვს 3 სივრცული კოორდინატა და სიჩქარის სამი კომპონენტი ანუ 6 განტოლება). ასეთი მაღალი რიგის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნა, თანამედროვე კომპიუტერებითაც კი რთულია, ცდომილებათა დაგროვების გამო.

არსებობს **სტატისტიკური მექანიკის მიდგომა**, როცა ცდილობენ შეისწავლონ მოლეკულათა დიდი ჯგუფების გასაშუალებული ალბათური მახასიათებლები, რათა გაამარტივონ დინამიკის განტოლებათა სისტემა. თუმცა, მოლეკულათა რთული ფორმის შემთხვევაში, მათ შორის არსებული ურთიერთქმედების ძალების განსაზღვრა შეუძლებელია პრაქტიკული სიზუსტით და მიღებული განტოლებებიც საკმაოდ რთულია გამოსაკვლევად.

აქედან გამომდინარე, პრაქტიკაში გამოიყენება **ფენომენოლოგიური მიდგომა**, რომლის ფუნდამენტშიც არის **უწყვეტი გარემოს ცნება**. უწყვეტი გარემო არის მცირე ნაწილაკებისაგან შემდგარი აბსტრაქტული

**სუბსტანცია**, რომელიც ავსებს სივრცის იმ ნაწილს, რაც უკავია შესასწავლ სხეულს, სითხეს ან გაზს. **უწყვეტი გარემოს ნაწილაკი** არის შესასწავლი უწყვეტი გარემოს (სხეულის, სითხის ან გაზის) ზომებთან შედარებით მეტად მცირე და მოლეკულის ზომებთან შედარებით, მეტად დიდი ნაწილი. ასე, რომ ფენომენოლოგიური მიდგომისას ჩვენ უგულებელვყოფთ სხეულის მასალის ატომურ-მოლეკულურ სტრუქტურას და ვაგებთ მის შესაბამის, აბსტრაქტულ უწყვეტ გარემოს, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის მათემატიკური აპარატი. ფენომენოლოგიური მიდგომისას, დეფორმირებადი გარემოს მოძრაობის შესასწავლად, განვიხილავთ გარემოს დინამიკის მაკროსკოპიულ განმსაზღვრელ პარამეტრებს, რომელთა შორისაც ექსპერიმენტებისა და არსებული შენახვის კანონებიდან გამომდინარე, ამყარებენ რაოდენობრივ კავშირებს, რომლებსაც მივყავართ შესაბამის მათემატიკურ მოდელებამდე. ფიზიკური არსიდან გამომდინარე, ადგენენ განმსაზღვრელი პარამეტრების საწყის და სასაზღვრო პირობებს, რაც საშუალებას იძლევა, შევისწავლოთ უწყვეტი გარემოს დინამიკა მათემატიკური ფიზიკის მეთოდებით.

ამრიგად, უწყვეტ გარემოთა მექანიკის **პირველი ჰიპოთეზაა: უწყვეტობის ჰიპოთეზა** - უწყვეტი გარემო შედგება აბსტრაქტული ბუნების უწყვეტი მატერიალური ნაწილებისაგან;

**მეორე ჰიპოთეზაა სივრცის ჰიპოთეზა: კლასიკური უწყვეტი გარემოს დინამიკის შესწავლა ხდება ევკლიდურ ან ფსევდოევკლიდურ სივრცეში** (ელექტრო-მაგნიტური გარემოს შემთხვევაში), თუმცა, როცა საქმე გვაქვს გარემოს დინამიკის მაღალ სიჩქარეებთან, ვიყენებთ რიმანის გეომეტრიის სივრცეს და შესაბამისად, განვიხილავთ **რელატივისტურ უწყვეტ გარემოთა მექანიკას**;

**მესამე ჰიპოთეზაა აბსოლუტური დროის ჰიპოთეზა:** დრო ერთნაირად მიდის ყველა კოორდინატთა სისტემაში რომელშიც არ უნდა განვიხილოთ უწყვეტი გარემოს დინამიკა. ეს ჰიპოთეზა ძალაშია, თუ გარემოს მოძრაობის სიჩქარე გაცილებით ნაკლებია სინათლის სიჩქარეზე ანუ ამ წიგნში, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ **არარელატივისტურ გარემოთა მოდელებას**.

## I თავი. ველის თეორია ევკლიდურ სივრცეში

ველი მატერიის არსებობის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ფორმაა. მათემატიკურ ფიზიკაში დიდი ადგილი უკავია ველის თეორიას. განიხილება როგორც გრავიტაციული, ასევე, ელექტროსტატიკური, წნევათა, სიჩქარეთა, ტემპერატურათა ველი და მათი საერთო თვისებები.

### 1.1. სკალარული და ვექტორული სიდიდეები

მათემატიკურ ფიზიკაში განიხილება ორი ტიპის სიდიდე: სკალარული და ვექტორული.

სკალარული ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ხასიათდება მხოლოდ საკუთარი რიცხვითი მნიშვნელობით.

სკალარული სიდიდეების მაგალითებია: დრო, გავლილი გზა, მასა, სიმკვრივე, მუშაობა, სიმძლავრე, ენერგია და ა.შ. მათზე სრულდება არითმეტიკული ოპერაციები (შეკრება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა) ისე, როგორც ჩვეულებრივ რიცხვებზე.

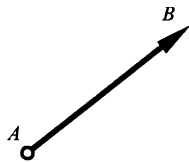
ვექტორული ეწოდება სიდიდეს, რომელიც ხასიათდება როგორც საკუთარი რიცხვითი მნიშვნელობით (ვექტორის სიგრძე), ასევე, მიმართულებით სივრცეში.

ვექტორული სიდიდეების მაგალითებია: გადაადგილება, სიჩქარე, აჩქარება, ძალა, წონა და ა.შ.

ვექტორულ სიდიდეებს გამოსახავენ მუქი ასოებით ან ასოს ზემოდან ახატავენ ვექტორის სიმბოლოს. მაგალითად:  $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \vec{P}$  ... ზოგჯერ კი, უბრალოდ, ზემოდან ხაზით გამოსახავენ:  $\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}, \bar{F}, \bar{P}$ .

$\overline{AB}$  ვექტორის სიგრძე  $|\overline{AB}|$  სკალარული სიდიდეა და ის ყოველთვის არაუარყოფითი ( $|\overline{AB}| \geq 0$ ) სიდიდეა.

ნახაზზე ვექტორებს გამოსახავენ შესაბამისი მიმართულების მონაკვეთის საშუალებით, რომლის სიგრძეც მასშტაბში შესაბამეა ამ ვექტორის სიგრძეს (შესაბამისი მექანიკური სიდიდის რიცხვით მნიშვნელობას) ნახ.1.1. ზოგჯერ ვექტორის სიგრძეს გამოსახავენ იმავე ასოებით ვექტორის ნიშნის გარეშე ანუ წერენ  $|\overline{AB}| = AB$ .



ნახ. 1.1.  $\overline{AB}$  ვექტორის გეომეტრიული გამოსახვა

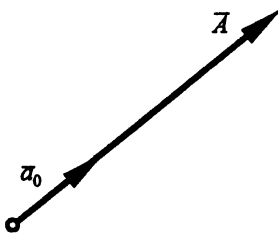
ორ ვექტორს ეწოდებათ ტოლი, თუ მათი სიგრძეებიც ერთნაირია და მიმართულებებიც. ამ შემთხვევაში წერენ  $\vec{A} = \vec{B}$ , რაც იმას ნიშნავს რომ  $A = B$ ,  $\overline{A} \uparrow \uparrow \overline{B}$ .

თუ ორი ვექტორი სიდიდით ტოლია, მაგრამ მათი მიმართულებები პარალელურ წრფეებზეა, ხოლო მიმართულება საპირისპირო, მაშინ წერენ რომ  $A = B$ ,  $\overline{A} \updownarrow \overline{B}$  და მაშასადამე  $\vec{A} = -\vec{B}$ .

ერთ სიბრტყეში მდებარე ვექტორებს კომპლანარულს უწოდებენ. თუ ორი ვექტორი ერთ სიბრტყეშია და პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ  $\vec{A} \parallel \vec{B}$  მაშინ მათ კოლინეარულს უწოდებენ.

ასეთი ვექტორები შეიძლება იყვნენ ერთი მიმართულების ან საპირისპირო მიმართულების.

$\vec{a}_0$  ვექტორს ეწოდება  $\vec{A}$  ვექტორის მიმმართველი ერთეულოვანი ვექტორი ანუ ორტა, თუ მას იგივე მიმართულება აქვს რაც  $\vec{A}$  ვექტორს და მისი სიგრძე ერთის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში  $\vec{a}_0 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ .



ნახ. 1.2.  $\vec{A}$  ვექტორი და მისი  $\vec{a}_0$  ორტა

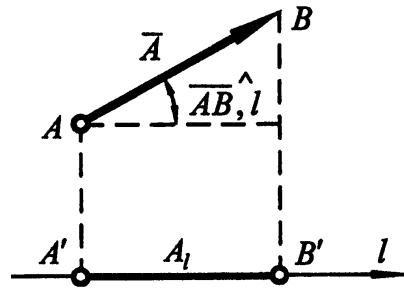
ვექტორი შეგვიძლია გამოვსახოთ ორტის საშუალებით შემდეგნაირად:  
 $\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{a}_0 = A \cdot \vec{a}_0$ .

### ვექტორის პროექცია რიცხვით ღერძზე (წრფეზე) და სიბრტყეზე

რიცხვითი ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელზედაც არჩეულია დადებითი მიმართულება, სათავე და მასშტაბი.



მოცემული  $\overline{AB}$  ვექტორის გეგმილი  $l$  რიცხვით ღერძზე ეწოდება  $A'B'$  მონაკვეთს, სადაც  $A'$  და  $B'$  ამ ვექტორის ბოლოების ორთოგონალური გეგმილებია ამ ღერძზე ნახ. 1.3.

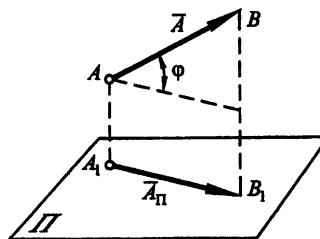


ნახ. 1.3.  $\overline{AB}$  ვექტორის გეგმილი  $l$  რიცხვით ღერძზე

ცხადია, რომ  $A'B' = |\overline{AB}| \cdot \cos(\overline{AB} \wedge l)$ . ვექტორის გეგმილი ღერძზე, შეიძლება იყოს უარყოფითი ან დადებითი, რაც დამოკიდებულია ვექტორის მიმართულებასა და ღერძის მიმართულებას შორის არსებული კუთხის სიდიდეზე.

მოცემული  $\overline{AB}$  ვექტორის გეგმილი  $\Pi$  სიბრტყეზე ეწოდება  $\overline{A'B'}$  ვექტორს, რომელიც მიიღება ამ ვექტორის ბოლოების ორთოგონალური დაგეგმილებით  $\Pi$  სიბრტყეზე ნახ. 1.4. გეგმილის  $\overline{A'B'}$  ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$|\overline{A'B'}| = |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$$



ნახ. 1.4. ვექტორის გეგმილი სიბრტყეზე

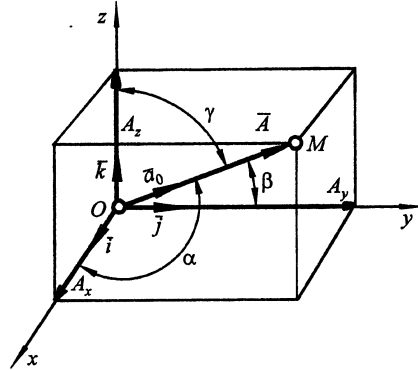
### ვექტორის კოორდინატები

ითვლება რომ  $\overline{A} = \overline{OM}$  ვექტორი მოცემულია, თუ ვიცით მისი სიგრძე და მიმართულება სივრცეში (ანუ ვექტორსა და საკოორდინატო ღერძების

დადებით მიმართულებებს შორის არსებული  $\alpha, \beta, \gamma$  კუთხეების მიმმართველი კოსინუსები) ნახ. 1.5.

$$\cos \alpha = \cos(x, \overline{OM}), \quad \cos \beta = \cos(y, \overline{OM}),$$

$$\cos \gamma = \cos(z, \overline{OM}).$$



ნახ. 1.5.  $\overline{A} = \overline{OM}$  ვექტორის კოორდინატები და მიმმართველი კუთხეების კოსინუსები

როგორც ნახ. 1.5 გვიჩვენებს,  $\overline{A} = \overline{OM}$  ვექტორის კოორდინატები მოიცემა ფორმულებით:

$$A_x = |\overline{A}| \cdot \cos \alpha$$

$$A_y = |\overline{A}| \cdot \cos \beta$$

$$A_z = |\overline{A}| \cdot \cos \gamma$$

ცხადია რომ, შეგვიძლია ვექტორი წარმოვადგინოთ ორტების ბაზისის საშუალებით:

$$\overline{A} = A_x \cdot \overline{i} + A_y \cdot \overline{j} + A_z \cdot \overline{k}.$$

მოცემული ვექტორი შეგვიძლია, აგრეთვე, წარმოვადგინოთ მისი კოორდინატებით საკოორდინატო ღერძებზე:

$$\overline{A} = (A_x, A_y, A_z);$$

ნახ. 1.5.-დან ცხადია, რომ ვექტორის სიგრძე შეგვიძლია გამოვითვალოთ ფორმულით:

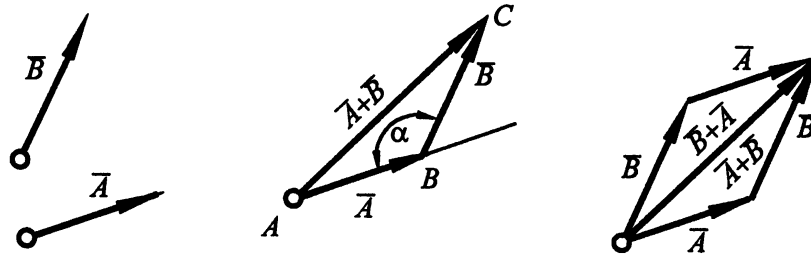
$$|\overline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

მიმმართველი კუთხეების კოსინუსები კი წარმოადგენენ მოცემული ვექტორის ორტის კოორდინატებს:

$$\overline{a_0} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

## ვექტორების შეკრება

ორი  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  ვექტორის ჯამი ეწოდება ვექტორს, რომლის სათავეც ემთხვევა  $\vec{A}$  ვექტორის სათავეს, ხოლო ბოლო ემთხვევა  $\vec{B}$  ვექტორის ბოლოს ნახ. 1.6.



ნახ. 1.6. ვექტორების შეკრების სამკუთხედისა და პარალელოგრამის წესი

ამ ნახაზებიდან ჩანს რომ,  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ . ადვილი მისახვედრია, რომ ორი ვექტორის ჯამის სიგრძის გამოთვლა ხორციელდება კოსინუსების თეორემით. მართლაც  $\triangle ABC$  - დან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ რადგან  $\alpha = \pi - (\vec{A} \wedge \vec{B})$  გვექნება ფორმულა:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha} = \\ = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{B})}.$$

## ვექტორის გამრავლება სკალარზე

ვექტორის გამრავლება რაიმე  $\lambda$  სკალარზე იწვევს ვექტორის სიგრძის გაზრდას  $\lambda$ -ჯერ თუ  $|\lambda| > 1$  და იწვევს მისი სიგრძის შემცირებას თუ,  $|\lambda| < 1$ . ამასთან თუ  $\lambda < 0$ , მაშინ ვექტორის მიმართულება საპირისპიროთი იცვლება.

მაგალითად, თუ გვაქვს  $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$  ვექტორი, მაშინ  $\lambda \cdot \vec{A} = (\lambda \cdot A_x, \lambda \cdot A_y, \lambda \cdot A_z)$ ; შესაბამისად,  $|\lambda \cdot \vec{A}| = |\lambda| \cdot \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ მაგალითისათვის

$5 \cdot \vec{A} = (5 \cdot A_x, 5 \cdot A_y, 5 \cdot A_z)$  და შესაბამისად

$$|5 \cdot \vec{A}| = 5 \cdot \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში, ვექტორის სიგრძე გაიზრდება 5-ჯერ, მიმართულება კი არ შეიცვლება. თუ  $\lambda = \frac{1}{2}$  მაშინ, ვექტორის სიგრძე შემცირდება 2-ჯერ.

ორი  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  ვექტორის კოლინეარობის (პარალელობის) პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ უნდა არსებობდეს ისეთი  $\lambda$  რიცხვი, რომლისთვისაც ადგილი ექნება ტოლობას  $\vec{A} = \lambda \cdot \vec{B}$ , რაც იმას ნიშნავს რომ  $A_x = \lambda \cdot B_x$ ;  $A_y = \lambda \cdot B_y$ ;  $A_z = \lambda \cdot B_z$ .

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ ვექტორების შესაბამისი კომპონენტების ფარდობები უნდა იყოს  $\lambda$  სიდიდის ტოლი ანუ  $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z} = \lambda$ .

### ვექტორების სკალარული ნამრავლი

ორი  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება სკალარულ სიდიდეს, რომელიც მიიღება ამ ვექტორების სიგრძეთა გამრავლებით მათ შორის კუთხის კოსინუსზე. ეს განსაზღვრება ფორმულებით ასე ჩაიწერება:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{B}).$$

ცხადია რომ სკალარული ნამრავლისათვის გვაქვს ფორმულები:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 1, \vec{A} \cdot \vec{B} = AB \text{ при } \vec{A} \uparrow \uparrow \vec{B};$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = -1, \vec{A} \cdot \vec{B} = -AB \text{ при } \vec{A} \uparrow \downarrow \vec{B};$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 0, \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \text{ при } \vec{A} \perp \vec{B};$$

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = 1, \vec{A} \cdot \vec{B} = A^2 \text{ при } \vec{A} = \vec{B}.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

თუ გავიხსენებთ ვექტორის წარმოდგენას ორტების საშუალებით  $\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}$ ;  $\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$  და გავითვალისწინებთ ორტების სკალარული ნამრავლის თვისებებს, მივიღებთ რომ სკალარული ნამრავლი შეგვიძლია გამოვსახოთ კოორდინატებითაც.

მართლაც,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}) \cdot (B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}).$$

ამ ნამრავლის გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z.$$

აქედან გამომდინარე, ორი ვექტორის ორთოგონალობის (ურთიერთ-პერპენდიკულარობის) პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია ანუ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z = 0.$$

ასევე, სკალარული ნამრავლის ორნაირი განსაზღვრა საშუალებას გვაძლევს ჩავწეროთ რომ

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\vec{A} \wedge \vec{B}) = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z.$$

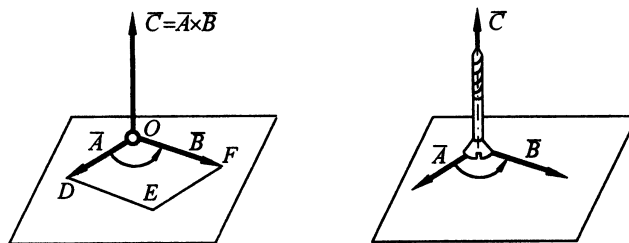
თუ გავითვალისწინებთ ვექტორის სიგრძის გამოსახულებას კოორდინატების საშუალებით  $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ , მაშინ მივიღებთ ორ ვექტორს შორის არსებული კუთხის კოსინუსისათვის ფორმულას:

$$\cos(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|} = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}.$$

### ვექტორების ვექტორული ნამრავლი

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ეწოდება ვექტორს, რომლის სიგრძეც უდრის ამ ვექტორების სიგრძეთა ნამრავლს გამრავლებულს მათ შორის არსებული კუთხის სინუსზე, ხოლო მიმართულება განისაზღვრება ისე რომ, ის პერპენდიკულარულია საწყის ვექტორებზე გამავალი სიბრტყისა და როცა დავყურებთ ნამრავლი ვექტორის ბოლოდან პირველი თანამრავლიდან მეორესკენ მიმავალ მცირე კუთხეს, ის უნდა ბრუნავდეს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით ნახ. 1.7. ანუ თუ გვაქვს ვექტორული ნამრავლი  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ , მაშინ

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\vec{A} \wedge \vec{B}) = S_{\Delta ODEF}$$

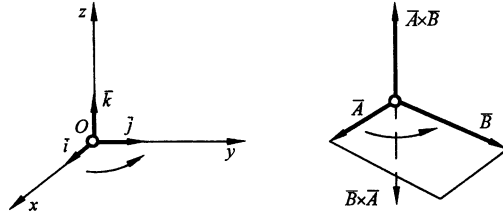


ნახ. 1.7. ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებისათვის

ვექტორული ნამრავლის სიდიდე, ამ ვექტორებზე როგორც გვერდებზე აგებული პარალელოგრამის  $S_{\Delta ODEF}$  ფართობის ტოლია.

მიმართულების განსაზღვრიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



ნახ. 1.8. ვექტორული ნამრავლის თვისებები

ერთეულოვანი  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ვექტორებისათვის გვექნება ფორმულები:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ვექტორების წარმოდგენას ორტების საშუალებით  $\vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k}$ ;  $\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$ , მივიღებთ რომ

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k},$$

რაც გვაძლევს ვექტორული ნამრავლის წარმოდგენას ორტების ბაზისის მიმართ. ამ წარმოდგენას, ზოგჯერ მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის საშუალებითაც წერენ:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

ამ ჩანაწერის გაშლა ლაპლასის თეორემის საფუძველზე პირველი სტრიქონის მიმართ, გვაძლევს ვექტორული ნამრავლის წარმოდგენას მეორე რიგის დეტერმინანტებით:

$$(\vec{A} \times \vec{B})_x = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}; \quad (\vec{A} \times \vec{B})_y = \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix}; \quad (\vec{A} \times \vec{B})_z = \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}.$$

ამოცანა 1. მოცემულია ორი ვექტორი:  $\vec{a}(1; 5; -2)$  და  $\vec{b}(2; 4; -3)$ . იპოვეთ  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

ამოხსნა:  $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2 \cdot (1; 5; -2) + 3 \cdot (2; 4; -3) = (2 \cdot 1; 2 \cdot 5; 2 \cdot (-2)) + (3 \cdot 2; 3 \cdot 4; 3 \cdot (-3)) = (2; 10; -4) + (6; 12; -9) =$

$$= (2 + 6; 10 + 12; -4 - 9) = (8; 22; -13).$$

**ამოცანა 2.** მოცემულია ორი ვექტორი:  $\vec{a}(1; y; -2)$  და  $\vec{b}(2; 4; z)$ . იპოვეთ  $y$  და  $z$ , თუ ცნობილია რომ ეს ვექტორები კოლინეარულია (პარალელური).

**ამოხსნა:** ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობაა:  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$  რაც იმას ნიშნავს, რომ  $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$  ანუ  $\frac{1}{2} = \frac{y}{4} = \frac{-2}{z}$ . აქედან ცხადია, რომ  $y = 2$ ;  $z = -4$ .

**ამოცანა 3.** მოცემულია ორი ვექტორი:  $\vec{a}(1; 3m; -2)$  და  $\vec{b}(2; 4; 2m)$ . იპოვეთ  $m$ , თუ ცნობილია რომ ეს ვექტორები ორთოგონალურები არიან (ურთიერთპერპენდიკულარული).

**ამოხსნა:** ორი ვექტორის პერპენდიკულარობის (ორთოგონალობის პირობას), აქვს სახე:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  ანუ  $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ  $1 \cdot 2 + 3m \cdot 4 + (-2) \cdot 2m = 0$  ანუ  $8m = -2$  ე.ი.  $m = -0.25$ .

**სამი ვექტორის ვექტორულ-სკალარული ნამრავლი (შერეული ნამრავლი)**

ვექტორების შერეულ ნამრავლს უწოდებენ  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  ნამრავლს, სადაც ფრჩხილებში მოთავსებული ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი, სკალარულად მრავლდება მესამე ვექტორზე. სამი ვექტორის ვექტორულ-სკალარული ნამრავლი წარმოადგენს სკალარულ სიდიდეს, რომელიც გამოსახავს ამ ვექტორებზე, როგორც გვერდებზე, აგებული პარალელეპიპედის მოცულობას. მის გამოთვლას აწარმოებენ შემდეგი დეტერმინანტის საშუალებით:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

**P.S.** შერეულ ნამრავლში თუ რომელიმე ორი თანამამრავლი კოლინეარულია, მაშინ ეს სამი ვექტორი კომპლანარულია (ერთ სიბრტყეში დევს) და შესაბამისად, შერეული ნამრავლი ნულის ტოლია; მამრავლთა ციკლური გადაადგილებით, შერეული ნამრავლი არ იცვლება.

## სამი ვექტორის ვექტორულ-ვექტორული ნამრავლი

ასეთი დასახელება აქვს სამი ვექტორის შემდეგი სახის ნამრავლს:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ . ამ ნამრავლს, ზოგჯერ ორმაგ ვექტორულ ნამრავლსაც უწოდებენ და ის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

### 1.2. სკალარული ველი ევკლიდეს სივრცეში. სკალარული ველის გრადიენტი

ევკლიდური სივრცის  $D \subset \mathbb{R}^3$  ქვესივრცელს ეწოდება  $f = f(x, y, z)$  ფუნქციით განსაზღვრული სკალარული ველი, თუ  $D$  სივრცელის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრულია  $f = f(x, y, z)$  ფუნქცია ანუ  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . ამ ფუნქციას  $D$  სკალარული ველის პოტენციალი ეწოდება. სკალარული ველის  $f(x, y, z)$  პოტენციალის მაგალითებია: ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი, გრავიტაციული ველის პოტენციალი, წნევათა ველის პოტენციალი . . .

თუ სკალარულ ველს შეესაბამება ცალსახა  $f(x, y, z)$  პოტენციალი, მაშინ იმ წერტილების სივრცელს, სადაც მოცემული ფუნქცია ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას, სკალარული ველის დონის ზედაპირები (ეკვიპოტენციალური ზედაპირები) ეწოდებათ. დონის ზედაპირები განისაზღვრება განტოლებით:  $f(x, y, z) = C$ , სადაც  $C$  - მუდმივი რიცხვია. თუ ამ მუდმივს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მივიღებთ დონის ზედაპირების ერთობლიობას. სკალარული ველის ყოველ წერტილზე გადის ერთადერთი დონის ზედაპირი. დონის ზედაპირის ყოველ წერტილში გვაქვს სკალარული ველის ერთნაირი პოტენციალი ანუ შესაბამისი ფიზიკური მოვლენა ერთნაირად მიმდინარეობს დონის ზედაპირის ყოველ წერტილში.

მაგალითად, თუ გვაქვს სკალარული ტემპერატურული ველი  $T(x, y, z)$ , მაშინ მისი დონის წირები იქნება იზოთერმული ზედაპირები  $T(x, y, z) = C$  ანუ ის ზედაპირები, რომლის ყოველ წერტილში ტემპერატურა ერთნაირია.



თუ გვაქვს უწყვეტი გარემოს წნევათა სკალარული ველი  $p(x, y, z)$ , მაშინ მისი დონის ზედაპირები იქნება იზობარული ზედაპირები  $p(x, y, z) = C$  ანუ ის ზედაპირები, რომლის ყოველ წერტილში წნევა ერთნაირია.

სკალარული ველის შესწავლისათვის, ხშირად, განიხილავენ სკალარული  $\varphi(x, y, z)$  ველის წარმოებულს, მოცემული  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართულებით, რომელიც პრაქტიკულად, გვიჩვენებს ამ ველის  $\varphi(x, y, z)$  პოტენციალის ცვლილების სიჩქარეს, მოცემული მიმართულებით და ის მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{l}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{l}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{l}, z). \quad (1.1)$$

**P.S.** ცხადია, რომ სკალარული ველის წარმოებული, მოცემული ვექტორის მიმართულებით, დამოკიდებულია წერტილის კოორდინატებზე რომლებშიც ითვლება კერძო წარმოებულები და  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართველ კოსინუსებზე.

### სკალარული ველის გრადიენტი

სკალარული  $\varphi(x, y, z)$  ველის გრადიენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც ჩაიწერება ამ ველის, კოორდინატების მიხედვით კერძო წარმოებულებით, შემდეგი სახით:

$$\text{grad } \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (1.2)$$

აქ იგულისხმება, რომ  $\varphi(x, y, z)$  სკალარული ველი ცალსახაა და უწყვეტი, თავის პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად.

სკალარული ველის გრადიენტით მოცემული ველი უკვე ვექტორული ველია და მისი სიგრძე, ველის ყოველ წერტილში, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}. \quad (1.3)$$

ცხადია, რომ  $\vec{l}$  ვექტორის მიმართველი ერთეულოვანი  $\vec{l}_0$  ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\vec{l}_0 = \cos(\vec{l}, x)\vec{i} + \cos(\vec{l}, y)\vec{j} + \cos(\vec{l}, z)\vec{k}, \quad (1.4)$$

მაშინ, ადვილი მისახვედრია რომ (1.1) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{l}_0, \quad (1.5)$$

მაგრამ  $|\vec{l}_0| = 1$ , მაშინ (1.5) ტოლობიდან სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = |\text{grad } \varphi| \cdot \cos(\text{grad } \varphi, \vec{l}_0) = \text{გეგმილი}_l(\text{grad } \varphi). \quad (1.6)$$

(1.6) ტოლობიდან ნათლად ჩანს, რომ სკალარული ველის წარმოებული მოცემული მიმართულებით, ამ წერტილში გამოთვლილი გრადიენტის გეგმილის ტოლია მოცემული ვექტორის მიმართულებაზე. სკალარული ველის წარმოებულის მაქსიმალური  $|\text{grad } \varphi|$  მნიშვნელობა მიიღწევა მაშინ, როცა კოსინუსი ერთის ტოლია და მაშასადამე, როცა  $\vec{l}_0$  ვექტორის მიმართულება სკალარული ველის გრადიენტის მიმართულებას ემთხვევა.

რადგან მიმართულებით წარმოებული გვიჩვენებს სკალარული ველის ცვლილების სიჩქარეს ამ მიმართულებით, შეგვიძლია დავასკვნათ რომ, სკალარული ველის გრადიენტის მიმართულება შეესაბამება სკალარული ველის ცვლილების მაქსიმალურ სიჩქარეს.

განვიხილოთ სკალარული ველის ცვლილების სიჩქარე დონის წირის  $\vec{s}$  მხების მიმართულებით, მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \text{grad } \varphi \cdot \vec{s}_0$ , სადაც  $\vec{s}_0$  დონის წირის მხების მიმართველი ვექტორია. რადგან ვექტორული ველი დონის წირის გასწვრივ არ იცვლება, ცხადია, რომ  $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ  $\text{grad } \varphi \cdot \vec{s}_0 = 0$ .

P.S. ე.ი. სკალარული ველის გრადიენტი, დონის წირის პერპენდიკულარულია მოცემულ წერტილში ანუ აქვს დონის წირის ნორმალის მიმართულება.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული  $q$  წერტილოვანი მუხტის ველის  $\varphi = \frac{q}{r}$  პოტენციალის დონის წირები და გრადიენტი, სადაც  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  მანძილია კოორდინატთა სათავიდან მოცემულ  $(x, y, z)$  წერტილამდე, სადაც პოტენციალის სიდიდე ითვლება.

**ამოხსნა.** ელექტროსტატიკური ველის დონის ზედაპირების საპოვნელად, ჩავწეროთ დონის ზედაპირების განტოლება

$$\varphi = \frac{q}{r} = C \Rightarrow r = \frac{q}{C} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{C}, \quad (1.7)$$

(1.7) განტოლება გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{q^2}{C^2}. \quad (1.8)$$

ამრიგად, მივიღეთ დონის ზედაპირების ერთობლიობა, რომელიც გეომეტრიულად კონცენტრული სფეროს ზედაპირებს წარმოადგენენ საერთო ცენტრით იმ წერტილში სადაც ველის წარმომქმნელი მუხტია.

მოცემული სკალარული  $\varphi = \frac{q}{r}$  ველის გრადიენტის საპოვნელად, ვისარგებლოთ (1.2) ფორმულით:  $grad \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ . მაშინ გვექნება, რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = -q \frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = -q \frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = -q \frac{z}{r^3}. \quad (1.9)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$grad \varphi = -\frac{q}{r^3} (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) = -\frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ  $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{r}_0$  არის  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორის მიმართული ვექტორი, საბოლოოდ გვექნება, რომ

$$\operatorname{grad} \varphi = -\frac{q}{r^2} \vec{r}_0. \quad (1.11)$$

ცხადია, რომ

$$|\operatorname{grad} \varphi| = \frac{q}{r^2}, \quad \vec{r}_0 = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j} + \frac{z}{r} \vec{k}.$$

### სკალარული ველის გრადიენტის თვისებები

$$1. \operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi; \quad (1.12)$$

$$2. \operatorname{grad}(\varphi \cdot \psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi; \quad (1.13)$$

$$3. \operatorname{grad}F(\varphi) = F'(\varphi) \operatorname{grad}\varphi. \quad (1.14)$$

### 1.3. ვექტორული ველი. ვექტორული ველის პოტენციალი. ვექტორული ველის ძალწირები. გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი. ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ წირზე

ევკლიდური სივრცის  $D \subset \mathbb{R}^3$  ქვესიმრავლეს ეწოდება  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  ვექტორ-ფუნქციით განსაზღვრული ვექტორული ველი თუ,  $D$  სიმრავლის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრულია  $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$  ვექტორი ანუ  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . ვექტორული ველის მაგალითებია: მოძრავი სითხის სიჩქარეთა ველი, დეფორმირებულ სხეულში წერტილთა გადაადგილებათა ვექტორული ველი . . .

ვექტორული ველი შეგვიძლია ჩავწეროთ საკოორდინატო ღერძების ორტების მიმართ შემდეგი ფორმით:

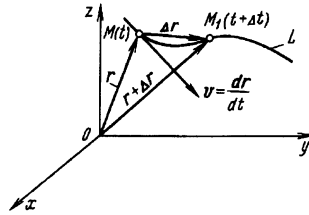
$$\vec{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z) \vec{i} + f_y(x, y, z) \vec{j} + f_z(x, y, z) \vec{k}. \quad (1.15)$$

სადაც  $f_x(x, y, z)$  არის  $\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორ-ფუნქციის გეგმილი აბსცისთა ღერძზე,  $f_y(x, y, z)$  - გეგმილია ორდინატთა ღერძზე, ხოლო  $f_z(x, y, z)$  აპლიკატის ღერძზე.

იგულისხმება, რომ ვექტორული ველის კომპონენტები უწყვეტია თავის კერძო წარმოებულებთან ერთად.

## სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულო

განვიხილოთ სკალარული  $t$  არგუმენტის  $r(t)$  ვექტორ-ფუნქცია. მექანიკაში სკალარულ  $t$  არგუმენტად, როგორც წესი, განიხილება დრო; ხოლო  $r(t)$  აღნიშნავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ მოძრავი, მატერიალური  $M$  წერტილის გადაადგილების ვექტორს.



ნახ. 1.9. სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულო

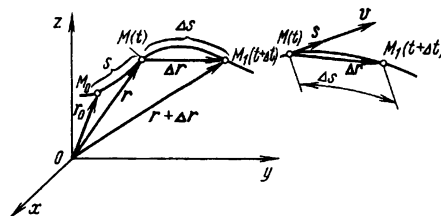
ვექტორის გოდოგრაფი ეწოდება ამ ვექტორის ბოლოს მიერ შემოწერილ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს. ნახ. 1.9 -ზე გადაადგილების  $r(t)$  ვექტორის გოდოგრაფს წარმოადგენს  $M$  წერტილის მოძრაობის  $L$  ტრაექტორია.

გადაადგილების  $r(t)$  ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულო  $M$  წერტილში, სკალარული  $t$  არგუმენტით განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$v = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

ესაა სიჩქარის ვექტორი მოცემულ  $M$  წერტილში. ცხადია, რომ სიჩქარის მიმართულება გადაადგილების გოდოგრაფის მოცემულ წერტილში, მხების მიმართულებას ემთხვევა ნახ. 1.9.

გადაადგილების რადიუს-ვექტორის დროზე დამოკიდებულება შეიძლება მოცემული იყოს ნატურალური პარამეტრის (გადაადგილების ტრაექტორიის  $s$  რკალის) საშუალებით ნახ. 1.10



ნახ. 1.10. გადაადგილების დამოკიდებულება რკალის სიგრძეზე

ვთქვათ, რკალის სიგრძის ათვლის წერტილია  $M_0$ , ხოლო რკალის სიგრძე არის დროის ფუნქცია ანუ გვაქვს დამოკიდებულება  $r[s(t)]$ . მაშინ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესიდან გამომდინარე მივიღებთ რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = sv,$$

სადაც  $v = \frac{ds}{dt}$  სიჩქარის სიდიდეა, ხოლო  $s = \frac{dr}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s}$  წარმოადგენს მხების მიმართულების ერთეულოვან ვექტორს ტრაექტორიის მოცემულ წერტილში, რადგან როცა  $\Delta s \rightarrow 0$  მაშინ გოდოგრაფის  $\Delta r$  მკვეთი მიისწრაფის ამ წერტილში მხების მდგომარეობისაკენ და მათი სიგრძეებიც უტოლდებიან ანუ  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta s} = 1$ .

### ვექტორული ველის პოტენციალი

$\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორულ ველს ეწოდება პოტენციალური, თუ არსებობს ისეთი  $\varphi(x, y, z)$  სკალარული ველი, რომლის გრადიენტული ველიც ემთხვევა მოცემულ ვექტორულ ველს ანუ თუ გვაქვს, შემდეგი ტოლობა:

$$\vec{f}(x, y, z) = \text{grad}\varphi(x, y, z). \quad (1.16)$$

**თეორემა.**  $\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორული ველის პოტენციალურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

### ვექტორული ველის ცირკულაცია და წირითი ინტეგრალი

$\vec{f}(x, y, z)$  ვექტორული ველის  $G_L$  ცირკულაცია  $L$  კონტურის გასწვრივ, ეწოდება შემდეგი სახის წირით ინტეგრალს:

$$G_L = \oint f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz, \quad (1.18)$$

სადაც  $L$  კონტურის გავლა მარჯვენა კოორდინატთა სისტემაში, უნდა ხდებოდეს საათის ისრის მიმართულების საწინააღმდეგოდ.

თუ  $L$  კონტური არაა შეკრული, მაშინ (1.18) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგარ ინტეგრალს  $\vec{f}$  ვექტორული ველის წირით ინტეგრალს უწოდებენ და ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$u = \int \vec{f} \cdot \vec{dr}, \quad (1.19)$$

სადაც  $\vec{dr}$  მოცემულ ინტეგრირების  $AB$  წირზე მოძრავი წერტილის რადიუს-ვექტორია ანუ  $\vec{dr} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$ .

თუ  $\vec{f}$  ძალაა, მაშინ (1.19) არის ის მუშაობა, რომელიც უნდა შეასრულოს ამ ძალამ წერტილის გადასაადგილებლად  $AB$  წირზე.

### ვექტორული ველის ძალწირები

ისეთ წირებს, რომლის ყოველ წერტილში მხების მიმართულება ემთხვევა ამ წერტილში განსაზღვრული  $\vec{f}$  ვექტორული ველის მიმართულებას,  $\vec{f}$  ვექტორული ველის ძალწირები ეწოდებათ.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ვექტორული ველის ძალწირებისათვის გვექნება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}. \quad (1.20)$$

### ვექტორული ველის გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი

$\vec{f}$  ვექტორული ველის გრიგალი ანუ როტორი  $rot \vec{f}$  ეწოდება ვექტორულ ველს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$rot \vec{f} = \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.21)$$

ამ ფორმულას ზოგჯერ წერენ დეტერმინანტის საშუალებითაც:

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}. \quad (1.22)$$

**P.S.** თუ სითხის სიჩქარის ვექტორული ველის გრიგალი ნულის ტოლია, მაშინ მის დინება უგრიგალოა ანუ ფენა ფენას მიჰყვება და არ ხდება ფენების ერთმანეთში არევა. ასეთ შემთხვევაში სითხის დინება პოტენციალურია ანუ  $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ დინება პოტენციალურია, მაშინ ის უგრიგალოც იქნება ანუ მაშინ  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ . მართლაც  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = 0$  ამ ტოლობის შემოწმება მკითხველისათვის მიმინდია.

**ამოცანა.** დაამტკიცეთ, რომ უგრიგალო მოძრაობის შემთხვევაში სითხის სიჩქარის ცირკულაცია ნებისმიერი შეკრული წირისათვის ნულის ტოლია.

**ამოხსნა.** უგრიგალო დინების შემთხვევაში  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს რომ ადვილი აქვს ველის პოტენციალურობისათვის არსებულ (1.17) აუცილებელ და საკმარის პირობებს. მაშასადამე არსებობს ისეთი  $\varphi$  ფუნქცია, რომ  $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . მაშინ ცხადია, რომ ადვილი ექნება ტოლობას:

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi. \quad (1.23)$$

მაშინ (1.19) წირითი ინტეგრალი  $AB$  წირის გასწვრივ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$u = \int d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A). \quad (1.24)$$

**P.S.** ეს იმას ნიშნავს, რომ სითხის პოტენციალური დინების სიჩქარეთა ველის ცირკულაცია არაა დამოკიდებული  $AB$  წირზე და დამოკიდებულია მხოლოდ მისი ბოლოების კოორდინატებზე.

თუ ეს კონტური შეკრულია ანუ  $A$  და  $B$  წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ცირკულაცია ნულის ტოლია.



ამოცანა. სითხის მოძრაობის აჩქარების კოორდინატები მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z. \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z \end{cases} \quad (1.25)$$

დაამტკიცეთ, რომ თუ სითხის სიჩქარეთა ველი პოტენციალურია, მაშინ აჩქარებათა ვექტორული ველიც პოტენციალური იქნება.

დამტკიცება. რადგან სიჩქარეთა ველი პოტენციალურია, გვექნება რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:  $\vec{v} = \text{grad } \varphi$  ანუ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტები გამოისახება პოტენციალის კერძო წარმოებულებით. ამის გათვალისწინებით (1.25) განტოლებებში შემავალი წარმოებულების გარდაქმნით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}$$

მაშინ გვექნება, რომ

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\text{რადგან } \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$a_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (1.27)$$

$$a_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.28)$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ აჩქარების ვექტორული ველიც პოტენციალურია და ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\vec{a} = grad \left( \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (1.29)$$

ცხადია, რომ აჩქარებათა ველის პოტენციალია  $\Phi = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$  ფუნქცია და ადგილი აქვს ტოლობას:  $\vec{a} = grad \Phi$ , რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**ამოცანა.** სითხის უკუმშვადობის პირობა ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.30)$$

გამოიყვანეთ სიჩქარეთა ველის პოტენციალის დიფერენციალური განტოლება, თუ დინება პოტენციალურია.

**ამოხსნა.** რადგან დინება პოტენციალურია  $\vec{v} = grad \varphi$  ანუ  $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  და  $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ . მაშინ (1.30) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.31)$$

ამ განტოლებას **ლაპლასის განტოლება** ეწოდება და მას ზოგჯერ მოკლედ ასე ჩაწერენ:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1.32)$$

ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ლაპლასის განტოლებას, **ჰარმონიულ ფუნქციებს** უწოდებენ.

**ამოცანა.** მოცემულია ვექტორული ველი:

$$\vec{f} = 2x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

იპოვეთ ამ ველის ძალწირები.

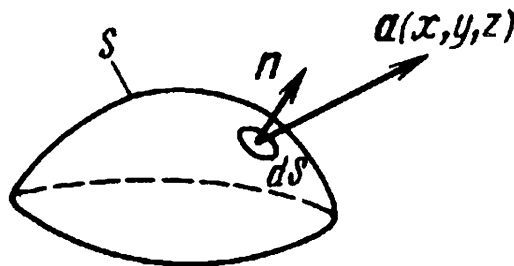
ამოხსნა. ვექტორული ველის ძალწირების დიფერენციალური განტოლება  $\frac{dx}{f_x} = \frac{dy}{f_y} = \frac{dz}{f_z}$ , ჩვენი ამოცანის პირობებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:  $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z}$ . მისი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნები იქნება:  $y^2 = \frac{C}{x}$  და  $z^2 = C_1 x$ . ამ ვექტორულ ველს აქვს განსაკუთრებული წერტილი, რადგან როცა  $x \rightarrow 0$  მაშინ  $y \rightarrow \infty$  თუ  $C \neq 0$ .

### 1.3.1. ვექტორული ველის ნაკადი. დივერგენცია. გაუსის ფორმულა

მოცემული  $\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორული ველის ნაკადი  $S$  ზედაპირის ფართობი ეწოდება სკალარს, რომელიც წარმოიდგინება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით:

$$\Pi = \iint a_n ds = \iint \vec{a} \cdot \vec{n} ds, \quad (1.33)$$

სადაც  $a_n$  არის  $\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორის გეგმილი  $S$  ზედაპირის ნორმალზე. ნორმალი აირჩევა შესაბამისი მიმართულებით ნახ. 1.9.



ნახ. 1.9. ვექტორული ველის ნაკადი

ვექტორული ველის ნაკადს აქვს ფიზიკური აზრი. თუ განვიხილავთ სითხის მოძრაობის სიჩქარეთა ვექტორულ ველს, მაშინ ამ ველის  $\Pi$  ნაკადი შეესაბამება დროის ერთეულში  $S$  ზედაპირის ფართობი გამავალი სითხის რაოდენობას. თუ ეს რაოდენობა დადებითია, მაშინ ამ ფართობი გამოდის უფრო მეტი სითხე, ვიდრე შედის რაც იმას ნიშნავს რომ ფართის შიგნით გვაქვს სითხის წყარო. თუ უარყოფითია, მაშინ ფართის შიგნით გვაქვს უარყოფითი წყარო ანუ დრენაჟი.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ განვიხილავთ სითხის მოძრაობის სიჩქარის ვექტორულ  $\vec{v}$  ველს, მაშინ  $S$  ზედაპირით შემოფარგლული  $V$  მოცულობის შემთხვევაში, ამ ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადი, სითხის  $V$  მოცულობის ცვლილების სიჩქარის ტოლია ანუ

$$\Pi = \iint v_n ds = \iint \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \dot{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \oiint \vec{v} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.34)$$

**მაგალითი.** იპოვეთ წერტილის რადიუს-ვექტორის ნაკადი წრიული ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართში, თუ ცილინდრის ქვედა ზედაპირი ძევს  $OXY$  სიბრტყეში და მისი ცენტრი მდებარეობს კოორდინატთა სათავეში, ცილინდრის ფუძის რადიუსია  $R$  და სიმაღლე  $H$ .

**ამოხსნა.** ცილინდრის სრულ პირეულში ნაკადი გამოითვლება (1.33) ფორმულით, სადაც უნდა გავითვალისწინოთ, რომ

$$\Pi_{\text{სრული}} = \Pi_{\text{გვერდითი}} + \Pi_{\text{ქვედა}} + \Pi_{\text{ზედა}}. \quad (1.35)$$

უნდა გავითვალისწინოთ, რომ გვერდითი ზედაპირის ნორმალის პერპენდიკულარულია  $OZ$  ღერძის, ამიტომ მისი ყოველი წერტილის რადიუს-ვექტორის  $r_n$  გეგმილი ნორმალის მიმართულებაზე იქნება ცილინდრის  $R$  რადიუსის ტოლი ანუ  $r_n = R$ . მაშინ ცხადია, რომ

$$\Pi_{\text{გვერდითი}} = \iint r_n ds = R \cdot \iint ds = R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H. \quad (1.36)$$

ცილინდრის ქვედა ზედაპრზე ცილინდრის წერტილების რადიუს-ვექტორები პერპენდიკულარულია ამ ზედაპირის გარე ნორმალის, ამიტომ ამ რადიუს-ვექტორის გეგმილი გარე ნორმალზე ნულის ტოლია და შესაბამისად:

$$\Pi_{\text{ქვედა}} = 0. \quad (1.37)$$

ცილინდრის ზედა ზედაპირის წერტილების რადიუს-ვექტორების გეგმილები მისი ნორმალის მიმართულებით ცილინდრის სიმაღლის ტოლია, მაშასადამე

$$\Pi_{\text{ზედა}} = \iint H ds = H \cdot \iint ds = H \cdot \pi R^2. \quad (1.38)$$

საბოლოოდ მივიღებთ რომ, ცილინდრის სრული პირეულში რადიუს-ვექტორის სკალარული ველის ნაკადი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\Pi_{სრული} = \Pi_{გვერდითი} + \Pi_{ქვედა} + \Pi_{ზედა} = 2\pi R^2 H + 0 + H \cdot \pi R^2 = 3\pi R^2 H. \quad (1.39)$$

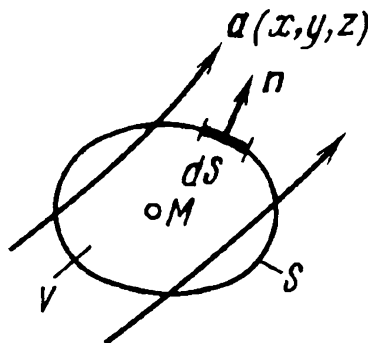
### ვექტორული ველის დივერგენცია

$\vec{a}(x, y, z)$  ვექტორული ველის დივერგენცია მოცემულ  $M$  წერტილში (ნახ. 1.10) ეწოდება ამ წერტილის გარემომცველი  $V$  მოცულობის არის შემომფარგლავი  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადის  $V$  მოცულობასთან ფარდობის ზღვარს, როცა მოცულობა მიისწრაფის ნულისაკენ ანუ

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\dot{V}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{m}{\rho}\right)'}{\frac{m}{\rho}} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}. \quad (1.40)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ვექტორული ველის დივერგენცია მოცემულ წერტილში, ამ წერტილის მიდამოს მოცულობის, ფარდობითი ცვლილების სიჩქარის ტოლია.

თუ განვიხილავთ სითხის სიჩქარეთა ვექტორულ ველს, მაშინ რადგან  $V = \frac{m}{\rho}$  სადაც  $\rho$  მოცემულ  $V$  მოცულობაში მოთავსებული სითხის სიმკვრივეა, ხოლო  $m$  მისი მუდმივი მასა, მაშინ მივიღებთ რომ დივერგენცია მოცემულ წერტილში არის ამ წერტილში სითხის სიმკვრივის ცვლილების ფარდობითი სიჩქარე.



ნახ. 1.10. ვექტორული ველის დივერგენცია

ვექტორული ველის დივერგენცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.41)$$

### გაუსის ფორმულა

ვექტორული ველის დივერგენციასა და ნაკადს შორის კავშირს ამყარებს გაუსის ფორმულა:

$$\oint \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad (1.42)$$

რომელიც ამბობს: მოცემული შეკრული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის ნაკადი ტოლია, ამ ზედაპირით შემოსაზღვრული  $V$  მოცულობითი ინტეგრალს ვექტორული ველის დივერგენციიდან.

ამოცანა. გაუსის ფორმულის საშუალებით გარდაქმნით ზედაპირული ინტეგრალი:  $\oint (\operatorname{gradu} \cdot \vec{n}) ds$ .

$$\text{ამოხსნა. } \oint (\operatorname{gradu} \cdot \vec{n}) ds = \iiint \operatorname{div}(\operatorname{gradu}) dV = \iiint \Delta u dV.$$

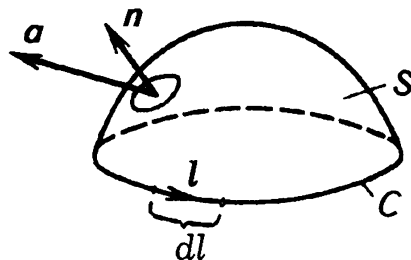
P.S. თუ  $u$  არის სითხის სიჩქარეთა ველის პოტენციალი, მაშინ მისი სიჩქარეთა ვექტორული ველის შეკრული ზედაპირის გამჭოლი ნაკადი ნულის ტოლია, რადგან მაშინ პოტენციალი ჰარმონიული ფუნქციაა.

ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორული ველის როტორის შეკრული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ნაკადი ნულის ტოლია.

$$\text{ამოხსნა. } \oint (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \iiint \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) dV = \iiint 0 dV = 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

### 1.3.2. სტოქსის ფორმულა. დივერგენციის თვისებები

ვექტორულ ანალიზში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია (ნახ. 1.11).  
სტოქსის თეორემას:



ნახ. 1.11. სტოქსის თეორემა

$\vec{a}$  ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ  $C$  წირზე, ამ წირზე მოჭიმული  $S$  ზედაპირის გამჭოლი ვექტორული ველის როტორის ნაკადის ტოლია ანუ

$$\oint \vec{a} \cdot \vec{l} dl = \iint \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n} ds. \quad (1.43)$$

განვიხილოთ დივერგენციის, როტორისა და გრადიენტის ზოგადი თვისებები, რომლებიც განსაზღვრებიდან გამომდინარე ადვილი დასამტკიცებელია და მკითხველისთვის მიგვინდია სავარჯიშოდ:

1.  $\text{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{div} \vec{a} + \text{div} \vec{b};$
2.  $\text{div}(U(x, y, z) \cdot \vec{a}) = U \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} U;$
3.  $\text{div}(\text{grad} U) = \Delta U;$
4.  $\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot} \vec{a} + \text{rot} \vec{b};$
5.  $\text{rot}(U(x, y, z) \cdot \vec{a}) = \text{grad} U \times \vec{a} + U \text{rot} \vec{a};$
6.  $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b};$
7.  $\text{div}(\text{grad} f) = \Delta f;$
8.  $\text{div}(\text{rot} \vec{v}) = 0;$
9.  $\text{rot}(\text{grad} f) = 0;$
10.  $\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}.$

### 1.3.3. ჰამილტონის $\nabla$ ოპერატორი და მისი თვისებები

ჰამილტონის  $\nabla$  ოპერატორი, სიმბოლური ვექტორული ოპერატორია, რომელიც შეიცავს კერძო წარმოებულებს კოორდინატა ღერძების მიმართულებით:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.44)$$

ამ ოპერატორის საშუალებით, შედარებით მარტივად ჩაიწერება ველის ოპერატორები:

$$\mathbf{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.45)$$

$$\mathbf{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.46)$$

$$\mathbf{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (1.47)$$



## II თავი. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

რადგან ვიხილავთ უწყვეტ გარემოთა კლასიკური მოდელების აგების ტექნიკას, აუცილებელია ვექტორული და ტენზორული ანალიზის მეთოდების სრულყოფილი ათვისება.

ტენზორული ალგებრა და ტენზორული ანალიზი - უწყვეტ გარემოთა მექანიკის შესწავლის, ბუნებრივი მათემატიკური აპარატია, რადგან იძლევა საშუალებას, რომ გამოვყოთ შესასწავლი პროცესების ის ძირითადი არსი, რაც არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე.

ისტორიულად ჩამოყალიბდა ტენზორული აღრიცხვის გადმოცემის ორნაირი მიდგომა. პირველი მიდგომისას, ტენზორებს წარმოადგენენ როგორც ისეთ ობიექტებს, რომლებზედაც სრულდება გარკვეული ფორმალური ოპერაციები, მეორე ტიპის მიდგომისას კი, ტენზორებზე განსაზღვრული ოპერაციები, დაიყვანება მათი კომპონენტების გარდაქმნის ფორმაზე. ჩვენ გამოვიყენებთ პირველი ტიპის მიდგომას, თუმცა, გზადაგზა, აღვნიშნავთ მეორე ტიპის მიდგომის თავისებურებებსაც.

### 2.1. ტენზორები

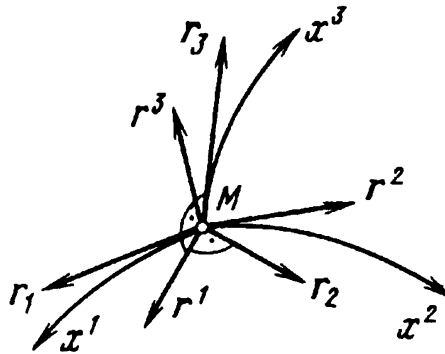
ვთქვათ, სამგანზომილებიან ევკლიდურ  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში მოცემულია სამი წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორისაგან შემდგარი ბაზისი  $e_i$ , რომელსაც ძირითად ბაზისს ვუწოდებთ. ძირითადი ბაზისის ორადული ბაზისი ეწოდება, ისეთ  $e^j$  ბაზისს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j \quad (2.1)$$

სადაც მარცხენა მხარეს მოცემულია ძირითადი ბაზისის ვექტორების სკალარული ნამრავლები, ხოლო მარჯვენა მხარეს დგას  $\delta_i^j$  კრონეკერის სიმბოლო და  $i, j = \overline{1,3}$ . როგორც ვიცით, კრონეკერის სიმბოლო წარმოადგენს ერთეულოვანი მატრიცის სიმბოლურ ჩანაწერს ანუ

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

ძირითადი ბაზისის  $e_i$  ვექტორთა სისტემა, საზოგადოდ, არაა ორთოგონალური (კოორდინატთა ღერძები საერთო წვეროს მქონე არაორთოგონალური მრუდი წირებია, ხოლო ძირითადი ბაზისის ვექტორები, ამ საერთო წვეროდან გამოსული ერთეულოვანი სიგრძის, შესაბამისი ღერძის მრუდი წირის მხები მიმართულების ვექტორებია (ნახ. 2.1). მართლაც, ვთქვათ მოცემული წერტილის რადიუს-ვექტორია  $r = r(x^1; x^2; x^3)$ , მაშინ  $\frac{\partial r}{\partial x^i} = r_i \equiv e_i$ .



ნახ. 2.1.  $a$  ვექტორის კოვარიანტული ბაზისი  $r_i = e_i$

რაც შეეხება, ორადული ბაზისის ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას  $e^j$ , ისინი გამოისახება ძირითადი ბაზისის ელემენტების საშუალებით შემდეგნაირად:

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}; \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}; \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}. \quad (2.3)$$

(2.3) ფორმულების მნიშვნელში დგას ძირითადი ბაზისის ვექტორების შერეული ნამრავლი, რომელიც ცხადია ნულისგან განსხვავებულია, რადგან ძირითადი ბაზისის ვექტორები დაშვების თანახმად არაა კომპლანარული. ასევე, რადგან ძირითადი ბაზისის ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, წრფივად დამოუკიდებელი იქნება ორადული ბაზისის ვექტორთა სისტემაც.

განსაზღვრის თანახმად, ადვილი მისახვედრია რომ, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შემთხვევაში, ორადული ბაზისი - ემთხვევა ძირითად ბაზისს.

### 2.1.1. ვექტორი, როგორც პირველი რანგის ტენზორი

ვექტორი შეგვიძლია განვსაზღვროთ, როგორც სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ელემენტი  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , რომელიც ერთადერთი გზით წარმოდგინება ძირითადი  $\mathbf{e}_i$  ბაზისის ან შესაბამისი  $\mathbf{e}^j$  ორადული ბაზისის მიმართ შემდეგი ფორმით:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a} = a_j \mathbf{e}^j = a_1 \mathbf{e}^1 + a_2 \mathbf{e}^2 + a_3 \mathbf{e}^3. \quad (2.5)$$

ამ ფორმულებში გამოვიყენეთ ეინშტეინის შეთანხმება ყრუ ინდექსით შეჯამებადობის შესახებ ანუ როცა სიმბოლურ ჩანაწერში ინდექსი ორჯერ მეორდება, იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება, ისე, როგორც (2.4) და (2.5) ფორმულებშია.

ადვილი მისახვედრია, რომ (2.4) წარმოდგენიდან გამომდინარე, ადვილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^1 = a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^1 = a^i \delta_i^1 = a^1. \quad (2.6)$$

ანალოგიურად, მივიღებთ რომ

$$a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2; \quad a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^3 \quad \text{ანუ} \quad a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i. \quad (2.7)$$

ასევე, მივიღებთ რომ

$$a_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j. \quad (2.8)$$

ამრიგად, შეგვიძლია ვექტორი წარმოვადგინოთ ორნაირად:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i) \mathbf{e}_i = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}^j. \quad (2.9)$$

ვექტორის  $a^i$  კომპონენტებს კონტრავარიანტულს უწოდებენ (ძირითადი ბაზისის მიმართ), ხოლო  $a_j$  კომპონენტებს - კოვარიანტულს (ორადული ბაზისის მიმართ). როგორც ვხედავთ, ვექტორის კომპონენტები მოიცემა ერთი თავისუფალი ინდექსის საშუალებით, ამიტომ მას პირველი რანგის ტენზორს უწოდებენ.

ეხლა, გამოვიყენოთ (2.9) ფორმულები ბაზისური ვექტორებისათვის, მაშინ მივიღებთ რომ ადვილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$e_i = g_{ik} e^k; \quad (2.10)$$

$$e^i = g^{ij} e_j; \quad (2.11)$$

სადაც  $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ ;  $g^{ij} = e^i \cdot e^j$ .  $g_{ij}$  და  $g^{ij}$  რიცხვებს, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტებს უწოდებენ. ცხადია, რომ მეტრიკული ტენზორების მატრიცა სიმეტრიულია სკალარული ნამრავლის კომუტაციურობის გამო.

მაშასადამე, ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$e^i = g^{ij} e_j = g^{ij} g_{jk} e^k = g_k^i e^k = \delta_k^i e^k; \quad (2.12)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (2.13)$$

მივიღეთ რომ, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების კონტრავარიანტული და კოვარიანტული მატრიცები ურთიერთშებრუნებული მატრიცებია.

ვექტორი შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხვანაირადაც. ვთქვათ, გადავდივართ  $e_l$  ბაზისიდან სხვა  $e_{l'}$  ბაზისზე, მაშინ გვექნება, რომ

$$e_{l'} = A_{l'}^l e_l; \quad e_l = A_l^{l'} e_{l'}. \quad (2.14)$$

სადაც  $A_{l'}^l$  ძველი ბაზისიდან ახალზე გადასვლის მატრიცაა, ხოლო  $A_l^{l'}$  - ახალი ბაზისიდან ძველზე გადასვლის მატრიცა.

ვექტორი ეწოდება სამ  $a_l$  რიცხვს (კოვარიანტული კომპონენტები), რომლებიც  $e_l$  ბაზისიდან სხვა  $e_{l'}$  ბაზისზე გადასვლისას გარდაიქმნება ფორმულებით:  $a_{l'} = A_{l'}^l a_l$ ; ან სამ  $a^l$  რიცხვს (კონტრავარიანტული კომპონენტები), რომლებიც კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, იცვლებიან შემდეგი ფორმულებით:  $a^{l'} = A_l^{l'} a^l$ .

ცხადია, რომ ვექტორის ეს ორი განსაზღვრება, დიდად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, თუმცა, ტენზორების განსაზღვრისას გამოგვადგება.

### 2.1.2. ტენზორის ცნება. მაღალი ვალენტობის ტენზორები

განვიხილოთ სამგანზომილებიანი ვექტორული  $\mathbb{R}^3$  სივრცის ნებისმიერი ორი ვექტორი  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$ . ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წესი, რომელიც ამ ორ ვექტორს, ერთადერთი სახით შეუსაბამებს ცხრაგანზომილებიანი  $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  სივრცის, რაღაც  $\mathbf{ab}$  ელემენტს, რომელსაც ამ ორი ვექტორის დიადური (ტენზორული) ნამრავლი (ან უბრალოდ დიადა) ეწოდება. დავუშვათ, რომ ეს შესაბამისობა არის ორადწრფივი ანუ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}; \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a}(\lambda_1 \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{b}_2) = \lambda_1 \mathbf{a} \mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathbf{a} \mathbf{b}_2. \quad (2.16)$$

$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  ახალი ცხრაგანზომილებიანი სივრცის ბაზისი  $\mathbf{D}$ , შედგება საწყისი ვექტორული სივრცის ბაზისური ვექტორების დიადური ნამრავლებისაგან (ბაზისური დიადიკა):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$  სივრცის ელემენტებს მეორე რანგის ტენზორები ეწოდება. (ზოგჯერ ამბობენ რომ ეს ტენზორები ორვალენტიანია).

მეორე რანგის ტენზორი (ვექტორის ანალოგიურად) წარმოიდგინება, როგორც ბაზისური  $\mathbf{D}$  დიადიკის ელემენტების წრფივი კომბინაცია.

მაგალითად, თუ გვაქვს მეორე რანგის რაიმე  $\mathbf{T}$  ტენზორი, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T^{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + T^{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \dots + T^{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.18)$$

$T^{ij}$  რიცხვებს, მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები ეწოდება.

ზემოთ განხილული ვექტორებისაგან შედგენილი დიადა მეორე რანგის ტენზორის კერძო შემთხვევაა, მართლაც

$$\mathbf{ab} = a^i \mathbf{e}_i b^j \mathbf{e}_j = a^i b^j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j; \quad (2.19)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ დიადას კონტრავარიანტული კომპონენტებია რიცხვები, რომლებიც მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$c^{ij} = a^i b^j. \quad (2.20)$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ტენზორები და მათ შორის ვექტორებიც გამოისახება გამუქებული სიმბოლოებით:  $T, \varepsilon, \sigma, a, \dots$ , ხოლო შესაბამისი კომპონენტები, ჩვეულებრივი შრიფტით:  $T^{ij}; \varepsilon^{ij}; \sigma^{ij}; a^i \dots$

ტენზორის ვალენტობა (რანგი) განისაზღვრება შინაარსიდან გამომდინარე ან „თავისუფალი“ (არაგანმეორებადი) ინდექსების რაოდენობით.

მაგალითად, უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში ფართოდ გამოიყენება მექანიკური ძაბვის  $\sigma$  და დეფორმაციის  $\varepsilon$  ტენზორები. მათი შესაბამისი კონტრავარიანტული კომპონენტები აღინიშნება  $\sigma^{ij}$  და  $\varepsilon^{ij}$  სიმბოლოებით. გადაადგილების ვექტორს აღვნიშნავთ  $u$  ასოთი, ხოლო სიჩქარის ვექტორს  $v$  ასოთი. მათი შესაბამისი კონტრავარიანტული კომპონენტები იქნება:  $u^i$  და  $v^i$ .

ანალოგიურად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ მაღალი რანგის ტენზორებიც. ამისათვის, საჭირო იქნება განვიხილოთ შესაბამისი ბაზისური პოლიადები: ტრიადები  $e_i e_j e_k$ , ტეტრადები  $e_i e_j e_k e_l$  და ა.შ. მათი წრფივი კომბინაციები გვაძლევს შესაბამისად მესამე რანგის ტენზორს:

$$E = E^{ijk} e_i e_j e_k; \quad (2.21)$$

მეოთხე რანგის ტენზორს:

$$M = M^{ijkl} e_i e_j e_k e_l. \quad (2.22)$$

სამვალენტიანი ტენზორები წარმოადგენენ 27 განზომილებიანი სივრცის ელემენტებს, ხოლო ოთხვალენტიანი ტენზორები - 81 განზომილებიანი სივრცის და ა.შ. ტერმინები რანგი და ვალენტობა არიან ეკვივალენტური. სკალარი განიხილება, როგორც ნულ-რანგის ტენზორი.

### 2.1.3. ტენზორის კომპონენტები. მეტრიკული ტენზორი

განვიხილოთ მეორე რანგის ტენზორი  $\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  და გამოვიყენოთ (2.10) ფორმულა ანუ  $\mathbf{e}_i = g_{ik} \mathbf{e}^k$ . მაშინ, მივიღებთ რომ  $\mathbf{a} = a^{ij} g_{ik} \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k$ . მაშასადამე, ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}^k$  დიადიკური ბაზისის წრვივი კომბინაცია ანუ

$$\mathbf{a} = a^{ij} g_{ik} \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k = a^j_{.k} \mathbf{e}_j \mathbf{e}^k, \quad (2.23)$$

სადაც

$$a^j_{.k} = a^{ij} g_{ik}. \quad (2.24)$$

$a^j_{.k}$  კოეფიციენტებს უწოდებენ  $\mathbf{a}$  ტენზორის შერეულ კომპონენტებს (ერთჯერ კოვარიანტული და ერთჯერ კონტრავარიანტული).  $a^{ij}$  კომპონენტებს კი ორჯერ კონტრავარიანტული ეწოდებათ.

ამრიგად, ნებისმიერი მეორე რანგის (ვალენტობის) ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ოთხი სხვადასხვა ფორმით:

$$\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = a^j_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}^i = a^j_i \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j. \quad (2.25)$$

ეს ფორმულები არის ერთვალენტიანი ტენზორებისათვის (ვექტორები) ადრე განხილული (2.4)-(2.5) ფორმულების  $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_j \mathbf{e}^j$  ანალოგიური.

ცხადია რომ, მართკუთხა დეკარტული კოორდინატების შემთხვევაში, ძირითადი და მისი ორადული ბაზისი ერთმანეთს ემთხვევა. აქედან გამომდინარე, დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა. ამიტომ, ასეთ შემთხვევაში, კომპონენტების ინდექსები შეგვიძლია ვწეროთ ან სულ ზედა (კონტრავარიანტული) ან სულ ქვედა (კოვარიანტული).

ერთი და იმავე ტენზორის სხვადასხვა ტიპის კომპონენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია (2.24) ფორმულის ანალოგიური დამოკიდებულებებით:

$$a^{ij}g_{jk} = a^i_k; \quad a^{ij}g^k_j = a^{ik}; \quad a_{ij}g^{jk} = a_i^k; \quad a_{ij}g^j_k = a_{ik}; \quad \dots \quad (2.26)$$

ამრიგად, მოცემული ტენზორის კომპონენტების გამრავლება მეტრიკული ტენზორის შესაბამის კომპონენტებზე, იწვევს მოცემული ტენზორის კომპონენტებში ინდექსის აწევ-დაწევას.

$g = g^{ij}e_i e_j$  ტენზორს მეტრიკული ტენზორი ეწოდება. ამ ტენზორის დასახელება შემოსულია რიმანის გეომეტრიიდან და ის დაკავშირებულია ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის გამოთვლასთან. მართლაც, განვიხილოთ ორი „უსასრულოდ მახლობელი“ წერტილი  $A(x^1; x^2; x^3)$  და  $B(x^1 + dx^1; x^2 + dx^2; x^3 + dx^3)$ . მათი შემაერთებელი უსასრულოდ მცირე ვექტორი იქნება  $dr = dx^i e_i$ . ამ ვექტორის სიგრძის კვადრატი იქნება წირითი ელემენტი  $ds^2 = dr dr = dx^i e_i dx^j e_j = g_{ij} dx^i dx^j = g^{ij} dx_i dx_j$ . ამრიგად, მეტრიკული ტენზორი განსაზღვრავს განსახილველი სივრცის გეომეტრიას და ევკლიდური სივრცის შემთხვევაში, ის კრონეკერის სიმბოლოს ტოლია ანუ  $g_{ij} = \delta_{ij}$ .

## 2.2. ოპერაციები ტენზორებზე. ტენზორული ნამრავლი. სიმეტრირება და ალტერნირება

ა) ტენზორების შეკრება. შეკრების ოპერაცია განიმარტება მხოლოდ ერთნაირი ვალენტობის ტენზორებისათვის. ორი ტენზორის ჯამის კომპონენტები რომ ვიპოვოთ, ისინი უნდა ჩავწეროთ კომპონენტებში ერთნაირი ფორმით და შევკრიბოთ შესაბამისი კომპონენტები ანუ თუ  $a = a^{ij} e_i e_j$  და  $b = b^{ij} e_i e_j$ , მაშინ

$$a + b = (a^{ij} + b^{ij}) e_i e_j. \quad (2.27)$$

ასე რომ, ორი ტენზორის ჯამის ვალენტობა შესაკრებთა ვალენტობების ტოლია და ჯამის კომპონენტები, მიიღება შესაკრებთა შესაბამისი კომპონენტების შეჯამებით.

ბ) ტენზორის გამრავლება რიცხვზე. ნებისმიერი ფორმით ჩაწერილი ტენზორი შეგვიძლია გავამრავლოთ რიცხვზე. შედეგად მივიღებთ იგივე ვალენტობის ტენზორს, ხოლო მისი კომპონენტები იქნება მოცემული რიცხვის და ტენზორის კომპონენტების ნამრავლები ანუ თუ გვაქვს



მოცემული ტენზორი  $E = E^{ijk} e_i e_j e_k$ , მაშინ მისი ნამრავლი  $\lambda$  რიცხვზე იქნება ახალი ტენზორი:

$$\lambda E = \lambda E^{ijk} e_i e_j e_k. \quad (2.28)$$

გ) ამ ორი ოპერაციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ორი ტენზორის სხვაობის ოპერაციაც. ორი ერთნაირი ვალენტობის ტენზორის სხვაობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$a - b = a + (-b). \quad (2.29)$$

დ) ორი ტენზორის ტენზორული ნამრავლი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი ტენზორი:

$$A = A^{i_1 i_2 \dots i_m} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} \text{ და } B = B_{j_1 j_2 \dots j_n} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_n}. \quad (2.30)$$

მაშინ მათი ტენზორული ნამრავლი იქნება ახალი  $C$  ტენზორი, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$C = AB = A^{i_1 i_2 \dots i_m} B_{j_1 j_2 \dots j_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_n}. \quad (2.31)$$

მაშასადამე, ორი ტენზორის ტენზორული ნამრავლის ვალენტობა თანამამრავლთა ვალენტობების ჯამი იქნება ანუ თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობა აქ იქნება  $m + n$ . რადგან გვაქვს პოლიადური ბაზისი, ტენზორული ნამრავლი არაა კომუტაციური ანუ თანამამრავლების რიგს აქვს მნიშვნელობა, ისევე, როგორც მატრიცებში.

მაგალითები: 1. თუ გვაქვს ორი მეორე რანგის ტენზორი რომელთა კომპონენტებია  $a_{ij}$  და  $b_{mn}$ , მაშინ მათი ტენზორული ნამრავლი მოგვცემს მეოთხე რანგის ტენზორს კომპონენტებით  $C_{ijmn} = a_{ij} b_{mn}$ .

2. თუ გვაქვს მეორე რანგის ტენზორი კომპონენტებით  $M^{ij}$  და პირველი რანგის ტენზორი კომპონენტებით  $v_k$ , მაშინ მათი ტენზორული ნამრავლი იქნება მესამე რანგის  $W = Mv$  ტენზორი და მისი კომპონენტები იქნება:  $W^{ij}_{\cdot k} = M^{ij} v_k$ .

ე) სიმეტრირება და ალტერნირება. მეორე რანგის ტენზორს  $a = a^{ij} e_i e_j$  ეწოდება სიმეტრიული, თუ მისი კომპონენტები

აკმაყოფილებენ  $a^{ij} = a^{ji}$  პირობას და ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ ადგილი აქვს პირობას  $a^{ij} = -a^{ji}$ .

ცხადია, რომ თუ ტენზორი ერთდროულად სიმეტრიულიცაა და ანტისიმეტრიულიც, მაშინ ის ნულოვანი ტენზორია, რომლის ყველა კომპონენტი ნულოვანია.

**თეორემა.** ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მისგან წარმოქმნილი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილების ჯამის სახით.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ მეორე რანგის რაიმე  $\mathbf{a} = a^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორი. მაშინ მისგან წარმოქმნილი  $\mathbf{a}_s = \frac{1}{2}(a^{ij} + a^{ji}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორი იქნება სიმეტრიული, ხოლო  $\mathbf{a}_a = \frac{1}{2}(a^{ij} - a^{ji}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ტენზორი ანტისიმეტრიული, რაც ადვილი შესამოწმებელია. ამავე დროს, ცხადია რომ  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_a$ . რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ტენზორიდან მისი სიმეტრიული ნაწილის გამოყოფას სიმეტრირებას უწოდებენ, ხოლო ანტისიმეტრიული ნაწილის გამოყოფას - ალტერნირებას.

### 2.2.1. ტენზორების სკალარული ნამრავლი

ტენზორების სკალარული ნამრავლი, წარმოადგენს ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განზოგადებას.

მოცემული ორი

$$\mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_n} \text{ და } \mathbf{B} = B^{j_1 j_2 \dots j_m} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_m} \quad (2.32)$$

ტენზორის სკალარული ნამრავლი (ნახვევი) განსაზღვრის თანახმად არის:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} B^{j_1 j_2 \dots j_m} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_{n-1}} (\mathbf{e}_{i_n} \cdot \mathbf{e}_{j_1}) \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_m} \quad (2.33)$$

ანუ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{i_1 i_2 \dots i_n} B^{j_1 j_2 \dots j_m} g_{i_n j_1} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_{n-1}} \mathbf{e}_{j_2} \dots \mathbf{e}_{j_m}. \quad (2.34)$$

ტენზორების სკალარული ნამრავლის ტენზორის რანგი, ორი ერთეულით ნაკლებია თანამამრავლთა რანგების ჯამზე ანუ  $m + n - 2$ .

თანამამრავლთა რიგს აქვს მნიშვნელობა ანუ ორი ტენზორის სკალარული ნამრავლი, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური.

მაგალითები.

1. ორი  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$  ვექტორის, როგორც პირველი რანგის ტენზორების სკალარული ნამრავლი იქნება რიცხვი ანუ სკალარი:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i e_i b^j e_j = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = a_j b^j. \quad (2.35)$$

2. მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი ვექტორზე იქნება პირველი რანგის ტენზორი ანუ ვექტორი:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = T^{kl} e_k e_l \cdot a^i e_i = T^{kl} a^i g_{li} e_k = T^{kl} a_l e_k. \quad (2.36)$$

3. ვექტორის სკალარული ნამრავლი მეორე რანგის ტენზორზე იქნება პირველი რანგის ტენზორი ანუ ვექტორი :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = a^i e_i \cdot T^{kl} e_k e_l = a^i T^{kl} g_{ik} e_l = a_k T^{kl} e_l. \quad (2.37)$$

4. ორი მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი იქნება მეორე რანგის ტენზორი:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^{mn} e_m e_n \cdot B^{kl} e_k e_l = A^{mn} B^{kl} g_{nk} e_m e_l \quad (2.38)$$

ანუ

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^m_k B^{kl} e_m e_l. \quad (2.39)$$

ანალოგიურად, მივიღებთ რომ

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = B^{lk} A_k^m e_l e_m. \quad (2.40)$$

ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი არის სკალარი; მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი ვექტორზე არის ვექტორი; ორი მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი არის მეორე რანგის ტენზორი.

უნდა აღინიშნოს, რომ ტენზორის სკალარული ნამრავლი მარცხნიდან ან მარჯვნიდან მეტრიკულ ტენზორზე, თვით ამ ტენზორის ტოლია.

მართლაც, განვიხილოთ შემდგომი მაგალითები.

5. ვექტორის ნამრავლი მეტრიკულ ტენზორზე მარცხნიდან და მარჯვნიდან (კომუტაციურია):

$$ა) \mathbf{g} \cdot \mathbf{a} = g^{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \cdot a^j \mathbf{e}_j = g^{ik} a^j \mathbf{e}_i g_{kj} = g^{ik} a_k \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i = \mathbf{a}; \quad (2.41)$$

$$ბ) \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} = a^k \mathbf{e}_k \cdot g^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a^k g^{ij} \mathbf{e}_j g_{ki} = a_i g^{ij} \mathbf{e}_j = a^j \mathbf{e}_j = \mathbf{a}. \quad (2.42)$$

### 2.2.2. ტენზორის ახარისხება

როგორც უკვე ვიცით, ორი მეორე რანგის ტენზორის სკალარული ნამრავლი, ისევ მეორე რანგის ტენზორია. თუ, განვიხილავთ მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორის ნამრავლს თავის თავზე, მაშასადამე, მივიღებთ ახალ მაგრამ ისევ მეორე რანგის  $\mathbf{T}^2$  ტენზორს, რომელსაც საწყისი ტენზორის კვადრატი ეწოდება. თუ ტენზორის კვადრატს გავამრავლებთ კიდევ ერთხელ  $\mathbf{T}$  ტენზორზე, მივიღებთ ტენზორის კუბს ანუ  $\mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^3$  და ა.შ. შეგვიძლია გამოვითვალოთ მეორე რანგის ტენზორის ხარისხები.

მაგალითები.

1. მეორე რანგის ტენზორის კვადრატი.

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = T^{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \cdot T^{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = T^{mn} T^{kl} g_{nk} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l = T^{mn} T_n^{\cdot l} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_l. \quad (2.43)$$

2. მეორე რანგის ტენზორის კუბი.

$$\mathbf{T}^3 = T^{in} T_{\cdot i}^k T_{\cdot k}^m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n. \quad (2.44)$$

ტენზორების სკალარული ნამრავლის ცნებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების შემდეგნაირად ინტერპრეტირება. თუ მოცემული გვაქვს მეორე რანგის რაიმე ტენზორი  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  და მას მარცხნიდან სკალარულად გავამრავლებთ  $\mathbf{e}^m$ , ხოლო მარჯვნიდან  $\mathbf{e}^n$  -ზე, მაშინ მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$T^{mn} = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^n. \quad (2.45)$$

ანალოგიურად,

$$T_{ij} = e_i \cdot T \cdot e_j; \quad T_i^j = e_i \cdot T \cdot e^j; \quad T^i_j = e^i \cdot T \cdot e_j. \quad (2.46)$$

ამ ფორმულებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$T = (e^i \cdot T \cdot e^j) e_i e_j. \quad (2.47)$$

ტენზორების სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს ყველა იმ თვისებას, რასაც ვექტორების სკალარული ნამრავლი, გარდა იმისა, რომ ტენზორების სკალარული ნამრავლი, საზოგადოდ არაა კომუტაციური.

### 2.2.3. ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი. ტენზორის კვალი

ორი  $A$  და  $B$  ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლი (ორმაგი ნახვევი) ეწოდება ტენზორს  $A : B$ , რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$\begin{aligned} A : B &= A^{i_1 i_2 \dots i_m} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} : B_{j_1 j_2 \dots j_n} e^{j_1} e^{j_2} \dots e^{j_n} = \\ &= A^{i_1 i_2 \dots i_m} B_{j_1 j_2 \dots j_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{m-2}} (e_{i_{m-1}} \cdot e^{j_2}) (e_{i_m} \cdot e^{j_1}) e^{j_3} e^{j_4} \dots e^{j_n}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

ორი ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლის რანგი (ვალენტობა) ოთხი ერთეულით ნაკლებია მათ ტენზორულ ნამრავლთან შედარებით.

აქედან გამომდინარე, ცხადია რომ, ორმაგი სკალარული ნამრავლის პოვნა რომ შეიძლებოდეს, აუცილებელია რომ თანამამრავლ ტენზორთა რანგი არ იყოს ორზე ნაკლები.

მაგალითები.

1. მეორე რანგის ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი:

$$A : B = A^{ij} e_i e_j : B^{mn} e_m e_n = A^{ij} B^{mn} g_{in} g_{jm} = A^i_m B^m_i. \quad (2.49)$$

ანალოგიურად,

$$B : A = B^i_m A^m_i. \quad (2.50)$$

2. მეორე რანგის ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლი თავის თავზე:

$$T : T = T^i_m T^m_i. \quad (2.51)$$

ორივე შემთხვევაში, მეორე რანგის ტენზორის ორმაგი სკალარული ნამრავლი, წარმოადგენს სკალარს.

განსაზღვრება.  $T$  ტენზორის კვალი (პირველი ინვარიანტი) ეწოდება ამ ტენზორის ორმაგ სკალარულ ნამრავლს მეტრიკულ ტენზორზე ანუ

$$Sp T = T : g. \quad (2.52)$$

3. გამოვთვალოთ მეორე რანგის ტენზორის კვალი:

$$Sp T = T : g = T^{ij} e_i e_j : g^{mn} e_m e_n = T^{ij} g^{mn} g_{in} g_{jm} = T^i_m g_i^m = T_j^j. \quad (2.53)$$

ტენზორის კვალის პოვნის ოპერატორი  $Sp T$  წრფივია ანუ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$Sp(T_1 + T_2) = Sp T_1 + Sp T_2; \quad (2.54)$$

$$Sp(\lambda T) = \lambda Sp T. \quad (2.55)$$

სადაც  $\lambda$  ნამდვილი რიცხვია, ხოლო  $T_1$  და  $T_2$  ერთნაირი ვალენტობის ტენზორებია.

#### 2.2.4. ტენზორის ნახვევის ოპერაცია

1. ტენზორის ნახვევი ორი ინდექსით:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს შემდეგი ტენზორი:

$$T = T^{i_1 i_2 \dots i_5}_{i_3 i_4} e_{i_1} e_{i_2} e^{i_3} e^{i_4} e_{i_5}. \quad (2.56)$$

ამ ტენზორიდან  $i_2$  და  $i_3$  ინდექსების გატოლებით  $\alpha$ -სთან და შესაბამისად, ამ ინდექსით შეჯამებით მიღებულ ტენზორს:

$$T^{i_1 i_2 \dots i_5}_{i_3 i_4} e_{i_1} (e_{i_2} e^{i_3}) e^{i_4} e_{i_5} = T^{i_1 \alpha \dots i_5}_{\alpha i_4} e_{i_1} e^{i_4} e_{i_5}; \quad (2.57)$$

ეწოდება  $T$  ტენზორის ნახვევი  $i_2$  და  $i_3$  ინდექსებით.

რომელიმე ორი პარამეტრით ტენზორის ნახვევით მიღებული ახალი ტენზორის რანგი, ორით ნაკლებია საწყისი ტენზორის რანგთან შედარებით.

2. ორი ტენზორის ნახვევი:

განვიხილოთ ორი მეორე რანგის ტენზორის ტენზორული ნამრავლი:

$$ab = a^{ij}e_i e_j b_{mn}e^m e^n = a^{ij}b_{mn}e_i(e_j e^m)e^n; \quad (2.58)$$

ამ ტენზორულ ნამრავლზე თუ გამოვიყენებთ ნახვევის ოპერაციას  $j$  და  $m$  ინდექსებით, მივიღებთ ამ ტენზორების სკალარულ ნამრავლს:

$$a \cdot b = a^{ij}b_{mn}e_i g_j^m e^n = a^{ij}b_{mn}g_j^m e_i e^n = a^{ij}b_{jn}e_i e^n. \quad (2.59)$$

ამრიგად, ორი ტენზორის ნახვევის ოპერაცია იძლევა მათ სკალარულ ნამრავლს.

ანალოგიურად, ორი ტენზორის ორმაგი ნახვევის ოპერაცია იძლევა მათ ორმაგ სკალარულ ნამრავლს.

### 2.2.5. ფსევდოტენზორები. ტენზორების ვექტორული ნამრავლი

ტენზორის ცნება უზრუნველყოფს მის ინვარიანტობას კოორდინატთა სისტემის ცვლილების მიმართ, რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მათემატიკურ ფიზიკაში.

განვიხილოთ, ფსევდოტენზორის ცნება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორთონორმირებული ბაზისი  $e_1, e_2, e_3$ . ამ კოორდინატთა სისტემაში განვიხილოთ ბაზისური პოლიადის წრფივი კომბინაცია:

$$T = T^{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}; \quad (2.60)$$

ჩავთვალოთ, რომ ახალ  $e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$  სისტემაზე გადასვლისას,  $T$  მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$T = T^{i_1' i_2' \dots i_n'} e_{i_1'} e_{i_2'} \dots e_{i_n'}; \quad (2.61)$$

თუ, კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას მარჯვენა (მარცხენა) სისტემა გადადის მარჯვენა (მარცხენა) სისტემაში და თუ მარჯვენა სისტემა იცვლება მარცხენა სისტემით ან პირიქით, მაშინ  $T$  გადადის

$$-T^{i_1' i_2' \dots i_n'} e_{i_1'} e_{i_2'} \dots e_{i_n'}; \quad (2.62)$$

კომბინაციაში (განსხვავებაა ნიშანში). ასეთ შემთხვევაში  $T$ -ს  $n$  რანგის ფსევდოტენზორს უწოდებენ.

ფსევდოტენზორის კომპონენტები მარჯვენა სისტემიდან მარცხენაზე გადასვლისას იცვლიან ნიშანს, ამიტომ მათ ფსევდოსკალარებს უწოდებენ.

ფსევდოტენზორები ინვარიანტული არიან კოორდინატთა სისტემის ბრუნვის მიმართ, მაგრამ არ არიან ინვარიანტული კოორდინატთა სისტემის არეკვლის გარდაქმნის მიმართ.

მაგალითები.

1. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი, თავისი განსაზღვრებიდან გამომდინარე, არის პირველი რანგის ფსევდოტენზორი;
2. ლევი-ჩივიტას, მესამე რანგის ფსევდოტენზორი:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k; \quad (2.63)$$

რომლის  $\varepsilon_{ijk}$  კომპონენტებსაც ლევი-ჩივიტას სიმბოლოებს უწოდებენ.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{თუ } i, j, k \text{ წარმოადგენს ლუწ გადანაცვლებას} \\ 0, \text{თუ } i, j, k \text{ ინდექსებიდან რომელიმე ორი ემთხვევა} \\ \text{ერთმანეთს} \\ -1, \text{თუ } i, j, k \text{ წარმოადგენს კენტ გადანაცვლებას} \end{cases}. \quad (2.64)$$

ფსევდოტენზორებზე ოპერაციები განისაზღვრება ისევე, როგორც ტენზორებზე. თუ ოპერაცია ბინარულია და ერთ-ერთი ფსევდოტენზორია, მაშინ შედეგიც ფსევდოტენზორი იქნება.

3. ორი საბაზისო ვექტორის ვექტორული ნამრავლი ფსევდოტენზორია :

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{kij} \mathbf{e}^k. \quad (2.65)$$

4. ორი ტენზორის ვექტორული ნამრავლი ფსევდოტენზორია:

$$\mathbf{T} \times \mathbf{U} = T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} U^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \mathbf{e}_{\alpha_1} \mathbf{e}_{\alpha_2} \dots \mathbf{e}_{\alpha_{m-1}} (\mathbf{e}_{\alpha_m} \times \mathbf{e}_{\beta_1}) \mathbf{e}_{\beta_2} \dots \mathbf{e}_{\beta_n}. \quad (2.66)$$

(2.63) ფორმულიდან გამომდინარე, (2.66) ფორმულის ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება უდრის  $\varepsilon_{k\alpha_m\beta_1} \mathbf{e}^k$ .

### 2.3. მეორე რანგის ტენზორების ალგებრა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორი:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T^i_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j. \quad (2.67)$$



განსაზღვრება. თუ ნებისმიერი  $\mathbf{a}$  ვექტორისათვის და მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}^*; \quad (2.68)$$

მაშინ  $\mathbf{T}^*$  მეორე რანგის ტენზორს, მოცემული  $\mathbf{T}$  ტენზორის შეუღლებული ტენზორი ეწოდება.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ რადგან  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = T^{ik} a_k \mathbf{e}_i$  და  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = S^{ki} a_k \mathbf{e}_i$ ; მოცემული  $\mathbf{T}$  ტენზორის  $\mathbf{T}^*$  შეუღლებული ტენზორი იქნება:

$$\mathbf{T}^* = T^{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T_{ji} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j = T_j{}^i \mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = T_i{}^j \mathbf{e}^i \mathbf{e}_j. \quad (2.69)$$

ცხადია, რომ შეუღლებული ტენზორის შეუღლებული, საწყისი ტენზორის ტოლია ანუ

$$(\mathbf{T}^*)^* = \mathbf{T}. \quad (2.70)$$

განსაზღვრება. მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორს თვითშეუღლებული ეწოდება, თუ  $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}$ .

თვითშეუღლებული მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა სიმეტრიულია ანუ  $T^{ij} = T^{ji}$ .

განსაზღვრება. მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორს ეწოდება ანტისიმეტრიული, თუ  $\mathbf{T}^* = -\mathbf{T}$ .

შესაბამისად, ანტისიმეტრიული ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ  $T^{ij} = -T^{ji}$  განტოლებებს.

შეუღლებული ტენზორის ცნებაზე დაყრდნობით, შეგვიძლია ნებისმიერი მეორე რანგის ტენზორი წარმოვადგინოთ მისი სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული ნაწილების ჯამის ფორმით:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*). \quad (2.71)$$

### 2.3.1. მეორე რანგის ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები

განვიხილოთ მეორე რანგის  $\mathbf{T}$  ტენზორი.

განსაზღვრება. თუ არანულოვანი  $\mathbf{a}$  ვექტორისა და  $\lambda$  რიცხვისათვის ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}; \quad (2.72)$$

მაშინ  $\mathbf{a}$  ვექტორს  $\mathbf{T}$  ტენზორის მთავარი ვექტორი ეწოდება, მის მიმართულებას - მთავარი მიმართულება, ხოლო  $\lambda$  რიცხვს - მთავარი მნიშვნელობა (მახასიათებელი რიცხვი).

განტოლება (2.72) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{g}) \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (2.73)$$

თუ (2.73) განტოლებას გადავწერთ კომპონენტებში, მაშინ მივიღებთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$(T^i_j - \lambda \delta_j^i) a^j = 0; \quad (2.74)$$

$\mathbf{a}$  ვექტორის კომპონენტების მიმართ, რომლის არანულოვანი ამონახსნების არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი ანუ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას:

$$\lambda^3 - J_1(\mathbf{T})\lambda^2 + J_2(\mathbf{T})\lambda - J_3(\mathbf{T}) = 0, \quad (2.75)$$

სადაც  $J_1(\mathbf{T})$ ;  $J_2(\mathbf{T})$  და  $J_3(\mathbf{T})$  არ იცვლებიან კოორდინატთა სხვა სისტემაზე გადასვლისას და მათ  $\mathbf{T}$  ტენზორის ინვარიანტებს უწოდებენ და გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\begin{cases} J_1(\mathbf{T}) = Sp \mathbf{T} \\ J_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} [(Sp \mathbf{T})^2 - Sp(\mathbf{T}^2)] \\ J_3(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} Sp(\mathbf{T}^3) - \frac{1}{2} Sp \mathbf{T} \cdot Sp(\mathbf{T}^2) + \frac{1}{6} (Sp \mathbf{T})^3 \end{cases}; \quad (2.76)$$

თუ გავითვალისწინებთ რომ:

$$Sp \mathbf{T} = T^i_i; \quad Sp(\mathbf{T}^2) = T_i^k T_k^i; \quad Sp(\mathbf{T}^3) = T_i^k T_k^l T_l^i. \quad (2.77)$$

დეკარტული ბაზისისათვის გვექნება ფორმულები:

$$Sp \mathbf{T} = T_{ii}; \quad Sp(\mathbf{T}^2) = T_{ik} T_{ik}; \quad Sp(\mathbf{T}^3) = T_{ik} T_{kj} T_{ji}. \quad (2.78)$$

ამრიგად, ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები არიან (2.75) მახასიათებელი განტოლების ფესვები  $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ .

ინვარიანტები, მთავარი მნიშვნელობების საშუალებით შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; J_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1; J_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \quad (2.79)$$

(2.76) განტოლებათა სისტემიდან შეგვიძლია ამოვხსნათ  $Sp \mathbf{T}; Sp(\mathbf{T}^2)$  და  $Sp(\mathbf{T}^3)$ , მაშინ (2.79) ფორმულებიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$Sp \mathbf{T} = J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; \quad (2.80)$$

$$Sp(\mathbf{T}^2) = J_1^2 - 2J_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad (2.81)$$

$$Sp(\mathbf{T}^3) = 3J_3 - 3J_1J_2 + J_1^3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3. \quad (2.82)$$

### 2.3.2. დეკარტული ტენზორების ალგებრა

სწორხაზოვანი მართკუთხა დეკარტული კოორდინატების შემთხვევაში, ძირითადი და მისი ორთონორმალური ბაზისი ერთმანეთს ემთხვევა. აქედან გამომდინარე, დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული, კოვარიანტული და შერეული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა. ასეთ შემთხვევაში, კომპონენტების ინდექსები შეგვიძლია ვწეროთ ან სულ ზედა (კონტრავარიანტული) ან სულ ქვედა (კოვარიანტული). ჩვენ გამოვიყენებთ ქვედა ანუ კოვარიანტულ ინდექსებს. მითუმეტეს, რომ არარელატივისტური უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური მოდელირებისათვის, დეკარტული ტენზორების აპარატი სავსებით საკმარისია. თუმცა, ჩვენ შევისწავლით არადეკარტული ტენზორების ანალიზსაც.

ა) დეკარტული ტენზორების შეკრება-გამოკლება. დეკარტული ტენზორების შეკრება-გამოკლება სრულდება მხოლოდ ერთნაირი რანგის ტენზორებზე, შესაბამისი კომპონენტების შეკრება-გამოკლებით და შედეგად მიიღება იგივე რანგის ტენზორი:

$$A_{ijk} \pm B_{ijk} = T_{ijk}; \quad (2.83)$$

ბ) დეკარტული ტენზორის ნამრავლი სკალარზე(რიცხვზე). სკალარზე გამრავლებისას, ტენზორის ყველა კომპონენტი მრავლდება ამ რიცხვზე და შედეგში იგივე რანგის ტენზორი მიიღება:

$$\lambda A_{ij} = B_{ij}. \quad (2.84)$$

გ) დეკარტული ტენზორების ტენზორული (გარე) ნამრავლი. ორი ტენზორის ტენზორული ანუ გარე ნამრავლი არის ტენზორი, რომლის კომპონენტებიც მიიღება პირველი თანამამრავლის ყველა კომპონენტის გადამრავლებით, მეორე თანამამრავლის ყველა კომპონენტზე. ტენზორული ნამრავლის რანგი, თანამამრავლი ტენზორების რანგების ჯამის ტოლია:

**მაგალითები.**

1.  $a_i b_j = T_{ij}$ ;
2.  $v_i F_{jk} = E_{ijk}$ ;
3.  $D_{ij} T_{km} = M_{ijkm}$ ;
4.  $\sigma_{ij} \varepsilon_{kmn} = \Omega_{ijkmn}$ .

სწორედ ეს ოპერაცია გვადლევს საშუალებას ორი ვექტორიდან მივიღოთ დიადა.

დ) დეკარტული ტენზორების ნახვევის ოპერაცია. ტენზორის რომელიმე ორი ინდექსით ნახვევის ოპერაცია ეწოდება ისეთ ოპერაციას, რომლის დროსაც ერთმანეთს უტოლდება ეს ორი ინდექსი, აღინიშნება ერთნაირი ასოთი და ხდება შეჯამება ამ ცვლადით. შედეგად, მიიღება ტენზორი, რომლის რანგიც ორი ერთეულით ნაკლებია საწყისი ტენზორის რანგზე:

**მაგალითები.**

1.  $T_{ij}$  ტენზორის ნახვევი იქნება:  
 $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ ;
2.  $u_i v_j$  დიადის ნახვევი იქნება:  
 $u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ ;
3.  $E_{ij} F_k$  ტენზორის ნახვევები იქნება:  
 $E_{ij} F_j = a_i$ ;  
 $E_{ij} F_i = b_j$ ;

$$E_{ii}F_k = c_k;$$

ე) დეკარტული ტენზორების სკალარული(შიდა ნამრავლი) ნამრავლი. ორი ტენზორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება ისეთ ნახვევის ოპერაციას ამ ტენზორების ტენზორულ ნამრავლზე, რომლის დროსაც უტოლდებიან ერთმანეთს ორი ინდექსი სხვადასხვა თანამამრავლებიდან.

მაგალითები.

1.  $a_i b_j$  საწყისი დიადა. სკალარული(შიდა) ნამრავლი:  
 $a_i b_i$ ;

2.  $a_i B_{jk}$  საწყისი დიადა. სკალარული(შიდა) ნამრავლები:  
 $a_i B_{ik} = f_k$  და  $a_i B_{ji} = h_j$ ;

3.  $E_{ij} E_{km}$  საწყისი დიადა. სკალარული(შიდა) ნამრავლი:  
 $E_{ij} E_{jm} = B_{im}$  ანუ  $E^2$ ;

ვ) დეკარტული ტენზორების ორმაგი სკალარული მანრავლი. როცა ორჯერ ხდება ნახვევის ოპერაცია მეოტხე ან უფრო მაღალი რანგის ტენზორზე.

მაგალითები.

1.  $E_{ij} F_{km}$  საწყისი დიადა. ორმაგი სკალარული(შიდა) ნამრავლი:  
 $E_{ij} F_{ij}$  ანუ  $E:F$ .

2.  $E_{ij} E_{km} E_{pq}$  საწყისი დიადა. სამმაგი სკალარული ნამრავლი:  
 $E_{ij} E_{jm} E_{mq}$  ანუ  $E^3$ .

ზ) დეკარტული ტენზორების ვექტორული ნამრავლი. ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის კომპონენტების საშუალებით, ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$  ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i. \quad (2.85)$$

ასევე, შეგვიძლია სიმბოლურად გამოვსახოთ სამი ვექტორის შერეული ნამრავლიც  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda$  სიმბოლური აღნიშვნებით კომპონენტებით:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k c_k = \lambda. \quad (2.86)$$

მეორე რანგის ტენზორს შეესაბამება კომპონენტებისაგან შედგენილი მატრიცა. აქედან გამომდინარე, მათზე მოქმედებებს გააჩნიათ შესაბამისი მატრიცული ინტერპრეტაცია.

**2.3.2.1. მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები**

სივრცის რომელიმე წერტილში განსაზღვრული, ნებისმიერი სიმეტრიული  $T_{ij}$  ტენზორისა და ამ წერტილში განსაზღვრული მიმართულებისათვის, რომელიც მოიცემა  $n_j$  ერთეულოვანი ვექტორით, არსებობს ვექტორი რომელიც მოიცემა მათი სკალარული (შიდა) ნამრავლით:

$$v_i = T_{ij}n_j; \quad (2.87)$$

აქ  $T_{ij}$  შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წრფივი ვექტორული ოპერატორი, რომელიც  $n_j$  მიმართულებას შეუსაბამებს  $v_i$  ვექტორს. თუ მიმართულება ისეთია, რომ  $v_i$  ვექტორი პარალელურია  $n_i$  მიმართულების, მაშინ მოიძებნება ისეთი სკალარი  $\lambda$ , რომ ადგილი ექნება შემდეგ განტოლებას:

$$T_{ij}n_j = \lambda n_i. \quad (2.88)$$

ასეთ შემთხვევაში,  $n_i$  მიმართულებას ეწოდება  $T_{ij}$  ტენზორის მთავარი მიმართულება (მთავარი ღერძი). თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $n_i = \delta_{ij}n_j$ ; მაშინ (2.88) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_i = 0; \quad (2.89)$$

მივიღეთ სამი განტოლება ოთხი  $n_i$  და  $\lambda$  უცნობით; რომელიც შეესაბამება ნებისმიერ მთავარ მიმართულებას. ამ სისტემას შეგვიძლია მივცეთ ჩვეული ფორმა:

$$\begin{cases} (T_{11} - \lambda)n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 = 0 \\ T_{21}n_1 + (T_{22} - \lambda)n_2 + T_{23}n_3 = 0. \\ T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + (T_{33} - \lambda)n_3 = 0 \end{cases} \quad (2.90)$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი  $\lambda$  რიცხვისათვის არსებობს ტრიავიალური(ნულოვანი) ამონახსნი  $n_i = 0$ ; თუმცა ჩვენი მიზანია, ვიპოვოთ არატრიავიალური ამონახსნები. რადგან სისტემა (2.90) ერთგვაროვანია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია მოვითხოვოთ

$n_i n_i = 1$  პირობის შესრულება (ანუ ვითხოვთ, რომ მთავარი მიმართულების ვექტორის სიგრძე იყოს ერთის ტოლი).

იმისათვის, რომ (2.90) სისტემას ჰქონდეს არატრივიალური ამონახსნები, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მისი მთავარი დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი ანუ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ განტოლებას:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (2.91)$$

თუ ამ დეტერმინანტს გავშლით და დავალაგებთ  $\lambda$  რიცხვის ხარისხების მიხედვით, მივიღებთ  $T_{ij}$  ტენზორის მახასიათებელ განტოლებას:

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 + J_2 \lambda - J_3 = 0. \quad (2.92)$$

მახასიათებელი განტოლების კოეფიციენტები ინვარიანტულია კოორდინატთა გარდაქმნების მიმართ, რის გამოც, მათ მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტებს უწოდებენ. ინვარიანტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$J_1 = Sp T_{ij} = tr T_{ij} = T_{ii}. \quad (2.93)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ij}). \quad (2.94)$$

$$J_3 = |T_{ij}| = \det T_{ij}. \quad (2.95)$$

(2.92) განტოლების სამ ფესვს, რომელსაც აღვნიშნავთ შემდეგნაირად:  $\lambda_1$ ;  $\lambda_2$ ;  $\lambda_3$  და მათ ტენზორის მთავარ მნიშვნელობებს უწოდებენ.

ნამდვილკომპონენტებიანი სიმეტრიული ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვებია. თუ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მთავარ ღერძებში, კომპონენტებისაგან შემდგარ მატრიცას აქვს დიაგონალური ფორმა:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

თუ  $\lambda_1 = \lambda_2$  მაშინ ტენზორის დიაგონალური სახე არაა დამოკიდებული ამ მნიშვნელობების შესაბამის მიმართულებებზე და საპოვნელია მხოლოდ  $\lambda_3$ -ის შესაბამისი მთავარი მიმართულება. თუ ყველა მთავარი მნიშვნელობა ერთმანეთის ტოლია  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ , მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი მიმართულებაა. თუ, მთავარი მნიშვნელობები განსხვავებულია, მაშინ მათ ნუმერაციას ისე ირჩევენ რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3. \quad (2.97)$$

$Ox_1x_2x_3$  კოორდინატთა სისტემიდან მთავარი ღერძების  $Ox_1^*x_2^*x_3^*$  სისტემაზე გადასვლის მატრიცას 2.1 აქვს შემდეგი ფორმა:

ცხრილი 2.1

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1^*$	$a_{11} = n_1^1$	$a_{12} = n_2^1$	$a_{13} = n_3^1$
$x_2^*$	$a_{21} = n_1^2$	$a_{22} = n_2^2$	$a_{23} = n_3^2$
$x_3^*$	$a_{31} = n_1^3$	$a_{32} = n_2^3$	$a_{33} = n_3^3$

სადაც  $n_i^j$  არის  $j$ -ური მთავარი მიმართულების მიმართული კოსინუსები.

იმისათვის, რომ მეორე რანგის  $T$  ტენზორის კომპონენტები გადავიყვანოთ მთავარ ღერძებზე (მთავარი მიმართულებებით)  $T^*$ , საჭიროა გამოვიყენოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T; \quad (2.98)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}; \quad (2.99)$$

მთავარ ღერძებზე გადასვლის მატრიცაა, პირველ სტრიქონში გვაქვს  $\lambda_1$  მთავარი მნიშვნელობის შესაბამისი მთავარი მიმართულების ვექტორის



კომპონენტები, მეორე სტრიქონში  $\lambda_2$ -ის შესაბამისი მთავარი მიმართულების ვექტორის კომპონენტები და მესამე სტრიქონში  $\lambda_3$ -ის შესაბამისი ვექტორის კომპონენტები, ხოლო  $A^T$  - მისი ტრანსპონირებული მატრიცაა.

### 2.3.2.2. მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის ხარისხები. ჰამილტონ-კელის თეორემა

გამოვითვალეთ  $T_{ij}$  ტენზორის ხარისხები. მატრიცული ინტერპრეტაციიდან გამომდინარე, ან ტენზორების სკალარული ნამრავლის ფორმულის ბაზაზე გვაქვს, რომ ამ ტენზორის კვადრატის  $T^2$  კომპონენტები იქნება:

$$T_{ij}T_{jk} = C_{ik}; \quad (2.98)$$

ამ ტენზორის კუბის  $T^3$  კომპონენტები იქნება:

$$T_{ij}T_{jk}T_{km} = M_{im}. \quad (2.99)$$

თუ, მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის შესაბამისი მატრიცა მიყვანილია დიაგონალურ სახეზე, მაშინ მისი ხარისხები გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

როგორც ვხედავთ მეორე რანგის ტენზორს და მისი ნატურალური ხარისხის მატრიცებს აქვთ საერთო მთავარი ღერძები.

ტენზორის ყველა მთავარი მნიშვნელობა აკმაყოფილებს მახასიათებელ (2.92) განტოლებას. აქედან გამომდინარე, თუ მატრიცებზე ოპერაციებსაც გავიხსენებთ, მივიღებთ რომ თვით  $T$  ტენზორიც აკმაყოფილებს მახასიათებელ განტოლებას ანუ ადგილი აქვს შემდეგ განტოლებას:

$$T^3 - J_1T^2 + J_2T - J_3E = \mathbf{0}. \quad (2.101)$$

ამ განტოლებას ჰამილტონ-კელის განტოლებას უწოდებენ, ხოლო დამტკიცებულ თეორემას - ჰამილტონ-კელის თეორემას. ცხადია, რომ  $E$  ერთეულოვანი ტენზორია, რომლის კომპონენტებიც კრონეკერის სიმბოლოა, ხოლო  $0$ -ნულ მატრიცაა (ყველა ელემენტი ნულოვანია).

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ მოცემული გვაქვს  $T$  ტენზორი და მასასადამე, მისი კომპონენტების მატრიცა  $T_{ij}$ ; ჩვენ ადვილად ვიპოვით ამ ტენზორის კვადრატის კომპონენტების  $T_{ij}T_{jk}$  მატრიცასაც მათი გადამრავლებით მატრიცული წესით, ხოლო ტენზორის კუბის კომპონენტებს ადვილად გამოვსახავთ ჰამილტონ-კელის განტოლებიდან:

$$T^3 = J_1 T^2 - J_2 T + J_3 E. \quad (2.102)$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ  $T$  ტენზორზე, მაშინ მივიღებთ რომ

$$T^4 = J_1 T^3 - J_2 T^2 + J_3 T \quad (2.103)$$

თუ (2.103) განტოლებაში შევიტანთ  $T^3$  მნიშვნელობას, მივიღებთ რომ

$$T^4 = (J_1 - J_2) T^2 + (J_3 - J_1 J_2) T + J_1 J_3 E. \quad (2.104)$$

ამრიგად, თუ გავაგრძელებთ პროცესს, მივიღებთ რომ  $T$  ტენზორის ნებისმიერი ხარისხი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც,  $T^2$ ,  $T$  და  $E$  ტენზორების წრფივი კომბინაცია, სადაც კოეფიციენტები იქნებიან  $T$  ტენზორის ინვარიანტების უწყვეტი ფუნქციები:

$$(T_{ij})^n = \varphi_0(J_1; J_2; J_3) \cdot E + \varphi_1(J_1; J_2; J_3) \cdot T_{ij} + \varphi_2(J_1; J_2; J_3) \cdot (T_{ij})^2. \quad (2.105)$$

### 2.3.3. ნოლის თეორემა. რივლინ-ერიკსენის თეორემა

**ნოლის თეორემა.** თუ გვაქვს ფუნქციონალური დამოკიდებულება ნებისმიერ ორ სიმეტრიულ ტენზორს შორის  $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij})$ , სადაც  $f$  უწყვეტია თავის წარმოებულებთან ერთად, მაშინ ამ ფუნქციის ყველაზე ზოგადი სახის წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2. \quad (2.106)$$

სადაც  $M_i = \psi(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon})$ .

**დამტკიცება.** გავშალოთ  $\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij})$  მარჯვენა ნაწილის მატრიც-ფუნქცია ტეილორის მწკრივად  $\varepsilon_{ij}$ -ს მიმართ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 (\varepsilon_{ij})^2 + \varphi_3 (\varepsilon_{ij})^3 + \dots \quad (2.107)$$

სადაც  $\varphi_i$  სკალარული მატრიცებია. თუ გავითვალისწინებთ (2.105) განტოლებას, რომელიც საშუალებას იძლევა, რომ  $(\varepsilon_{ij})^n$  იქნას წარმოდგენილი შესაბამისი სახით, მივიღებთ რომ

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2, \quad (2.108)$$

სადაც  $M_i = \psi(J_{1\varepsilon}, J_{2\varepsilon}, J_{3\varepsilon})$ . რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**ნოლის თეორემა** ფუნდამენტური თეორემაა, რომელიც განსაზღვრავს უწყვეტ გარემოთა რეოლოგიური განტოლების შესაძლო ზოგად სახეს.

არსებობს ამ თეორემის განზოგადებებებიც, როცა სიმეტრიული ტენზორი დამოკიდებულია რამდენიმე სხვა სიმეტრიულ ტენზორზე. მაგალითად, როცა გვაქვს ორი დამოუკიდებელი ცვლადი ადგილი აქვს რივლინ-ერიკსენის შემდეგ თეორემას:

**რივლინ-ერიკსენის თეორემა.**

თუ გვაქვს იზოტროპული ფუნქცია  $H = f(T; P)$  სადაც  $H$ ,  $T$  და  $P$  მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორებია, მაშინ ამ ფუნქციის ყველაზე ზოგადი სახის წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$H = M_0 \delta_{ij} + M_1 T + M_2 P + M_3 T^2 + M_5 P^2 + M_6 (T \cdot P + P \cdot T) + M_7 (T^2 \cdot P + P \cdot T^2) + M_8 (T \cdot P^2 + P^2 \cdot T) + M_9 (T^2 \cdot P^2 + P^2 \cdot T^2).$$

სადაც  $M_i = \psi(J_{1T}, J_{2T}, J_{3T}, J_{1P}, J_{2P}, J_{3P})$ .

### 2.3.4. დეკარტული ტენზორული ველი და სიმბოლური აღნიშვნები

ტენზორული ველი  $D$  სივრცის ნებისმიერ  $x \in D$  წერტილს, დროის ნებისმიერ  $t \in [0; \tau]$  მომენტში შეუსაბამებს  $T(x, t)$  ტენზორს. ტენზორულ ველს ეწოდება უწყვეტი, თუ უწყვეტია  $T(x, t)$  ტენზორული ველის ყველა კომპონენტის ფუნქცია. ტენზორულ ველს ეწოდება სტაციონარული, თუ ტენზორული ველი დამოკიდებულია მხოლოდ სივრცით  $x \in D$  კოორდინატზე და არაა დამოკიდებული დროზე.

ორთოგონალურ სწორხაზოვან დეკარტულ კოორდინატთა სისტემაში  $x \in D$  ვექტორი შეგვიძლია ჩავწეროთ სიმბოლურ ან ინდექსურ აღნიშვნებში:

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i; \quad (2.109)$$

შესაბამისად, სკალარული ველი შეგვიძლია გამოვსახოთ ორნაირად:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) \text{ ან } \varphi = \varphi(x_i, t); \quad (2.110)$$

ვექტორული ველი:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \text{ ან } v_i = v_i(\mathbf{x}, t); \quad (2.111)$$

მეორე რანგის ტენზორის ველი:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \text{ ან } T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{x}, t). \quad (2.112)$$

ინდექსური აღნიშვნები ფართოდ გამოიყენება წარმოებულების აღსანიშნავადაც, კერძოდ, წარმოებული  $x_i$  ცვლადით, აღინიშნება როგორც შესაბამისი ფუნქციის ქვედა ინდექსი მძიმის შემდეგ:

მაგალითები.

1.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}$  ;
2.  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$ ;
3.  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$  ;
4.  $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$ ;
5.  $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}$ .

ინდექსური აღნიშვნები ფართოდ გამოიყენება ველის ფუნქციებისათვისაც:

$$1. \text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \varphi_{,i} ; \quad (2.113)$$

$$2. \text{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = v_{i,i} ; \quad (2.114)$$

$$3. \text{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j} ; \quad (2.115)$$

$$4. \nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi = \varphi_{,ii} . \quad (2.116)$$

ინდექსური აღნიშვნებით სტოქსის ინტეგრალური თეორემა, იმის შესახებ, რომ ნებისმიერი, წერტილში მოჭიმვადი შეკრული  $C$  წირის გასწვრივ აღებული წირითი ინტეგრალი, მოცემული  $F$  ვექტორული ფუნქციიდან, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ზედაპირული ინტეგრალი, ამ წირზე მოჭიმული ორმხრივი  $S$  ზედაპირის გასწვრივ,  $F$  ფუნქციის როტორის ნორმალური მდგენელიდან, ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\oint_C F_i dx_i = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} dS. \quad (2.117)$$

გაუსის თეორემა დივერგენციის შესახებ, რომ მოცულობითი ინტეგრალი მოცემული  $\mathbf{v}$  ვექტორული ფუნქციის დივერგენციიდან, გამოითვლება როგორც ამ მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირის გასწვრივ აღებული ზედაპირული ინტეგრალი, ამ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გამჭოლი ნაკადიდან, ასევე, მარტივად ჩაიწერება ინდექსური აღნიშვნებით:

$$\iiint_V v_{i,i} dv = \iint_S v_i n_i dS. \quad (2.118)$$

#### 2.4. არადეკარტული ტენზორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულები. რიჩის ლემა

როცა საქმე გვაქვს მრუდწირულ კოორდინატებთან, ტენზორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, რაც იწვევს შესაბამის შინაარსობლივ გართულებას. განვიხილოთ  $\mathbf{a}(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორული ველი და მისი წარმოდგენა როგორც ძირითად  $\mathbf{e}_i$ , ასევე, ორადულ  $\mathbf{e}^i$  ბაზისში:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = a_j \mathbf{e}^j. \quad (2.119)$$

$\mathbf{a}$  ვექტორის წარმოებულები  $\xi^n$  ცვლადით იქნება:

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \frac{\partial a^i}{\partial \xi^n} e_i + a^i \frac{\partial e_i}{\partial \xi^n}; \quad (2.120)$$

ან

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^n} e^j + a_j \frac{\partial e^j}{\partial \xi^n}. \quad (2.121)$$

$\frac{\partial e_i}{\partial \xi^n}$  წარმოებულები გავშალოთ  $e_k$  ბაზისში:

$$\frac{\partial e_i}{\partial \xi^n} = G_{in}^k e_k; \quad (2.122)$$

სადაც  $G_{in}^k$  გაშლის კოეფიციენტებს კრისტოფელის მეორე გვარის სიმბოლოებს უწოდებენ. მათთვის ცხადია რომ ადგილი აქვს განტოლებას:

$$G_{in}^k = \frac{\partial e_i}{\partial \xi^n} \cdot e^k. \quad (2.123)$$

მაშინ (2.120) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტულ წარმოებულს აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \left( \frac{\partial a^i}{\partial \xi^n} + a^m G_{mn}^i \right) e_i. \quad (2.124)$$

მეორე მხრივ, თუ ანალოგიურად ვიმოქმედებთ (2.121) ფორმულიდან, მივიღებთ რომ კოვარიანტული ვექტორის კოვარიანტულ წარმოებულს აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial a}{\partial \xi^n} = \left( \frac{\partial a_i}{\partial \xi^n} - a_l G_{ik}^l \right) e^i. \quad (2.125)$$

გაწარმოების შედეგად, ტენზორის რანგი ერთით იზრდება, ამასთან, თუ საქმე გვაქვს არა მრუდწირულ კოორდინატებთან, არამედ, დეკარტულ კოორდინატებთან, მაშინ კრისტოფელის სიმბოლოები ნულის ტოლია და ორივე წარმოებული ერთნაირი იქნება.

მეორე რანგის  $A = A^{mn} e_m e_n$  კონტრავარიანტული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებულები ანალოგიურად გამოითვლება და გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^k} = \left( \frac{\partial A^{mn}}{\partial \xi^k} + A^{ln} G_{lk}^m + A^{ml} G_{lk}^n \right) e_m e_n; \quad (2.126)$$

მეორე რანგის კოვარიანტული  $A = A_{mn}e^m e^n$  ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული იქნება:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi^k} = \left( \frac{\partial A_{mn}}{\partial \xi^k} - A_{ln} G_{mk}^l - A_{ml} G_{nk}^l \right) e^m e^n. \quad (2.127)$$

ამ ფორმულების საშუალებით, უშუალოდ შემოწმებით მტკიცდება რიჩის ლემა.

**რიჩის ლემა.** მეტრიკული ტენზორის კოვარიანტული წარმოებული ნულის ტოლია ანუ  $g_{,k}^{ij} = 0$  და  $g_{ij,k} = 0$ .

რაც იმას ნიშნავს, რომ ნამრავლის გაწარმოებისას, თუ ერთ-ერთი თანამამრავლი მეტრიკული ტენზორია, ის შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ.

**უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მათემატიკური მოდელების აგებისათვის, სავსებით საკმარისია დეკარტული ტენზორების მათემატიკური აპარატი.** ამიტომ ტენზორული ანალიზის საკითხებში უფრო ჩაღრმავება, ამ ეტაპზე არაა მიზანშეწონილი.

**მრუდწირული კოორდინატების და შესაბამისად, არადეკარტული ტენზორების აუცილებლობა** თავს იჩენს რთული ფორმის გარსების შესწავლისას, ან რელატივისტური კოსმოლოგიური მოდელების შესწავლისას, რაც ცალკე კვლევის ობიექტია და ამ წიგნში არ განიხილება.

**ამოცანები ამოხსნებით.**

**2.1.** დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში იპოვეთ: ა) მოცემული  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$  ვექტორის მიმმართველი ვექტორი. ბ) ორი წერტილის  $A(1; 0; 3)$  და  $B(0; 2; 1)$ . შემაერთებელი  $\overline{AB}$  ვექტორის ორტა.

**ამოხსნა.** ა) მოცემული  $\mathbf{v}$  ვექტორის სიგრძე იქნება:

$$v = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7.$$

მაშინ  $\mathbf{v}$  ვექტორის მიმმართველი ვექტორი იქნება:

$$\frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}}{7} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

ბ)  $\overline{AB} = (0 - 1; 2 - 0; 1 - 3) = (-1; 2; -2),$

მაშინ  $|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$  ხოლო ორტა იქნება  $\frac{\overline{AB}}{3} = \frac{-i+2j-2k}{3}$

ანუ ორტა იქნება ვექტორი:  $-\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k.$

**2.2.** ჩაწერეთ გაშლილად მოცემულ ტენზორის კომპონენტები: ა)  $a_{ii}; B_{2jj}; C_{i1i}.$  ბ)  $T_{1j}a_j; n_i x_{2i}.$

**ამოხსნა.** ა)  $a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33};$

$$B_{2jj} = B_{211} + B_{222} + B_{233};$$

$$C_{i1i} = C_{111} + C_{212} + C_{313}.$$

ბ)  $T_{1j}a_j = T_{11}a_1 + T_{12}a_2 + T_{13}a_3;$

$$n_i x_{2i} = n_1 x_{21} + n_2 x_{22} + n_3 x_{23}.$$

**2.3.** ჩაწერეთ გაშლილად განტოლებათა სისტემა:  $a_{ij}x_j = b_i.$

**ამოხსნა.**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

**2.4.** სამგანზომილებიან სივრცეში გამოთვალეთ ტოლობების მნიშვნელობა კრონეკერის სიმბოლოს კომპონენტების მეშვეობით: ა)  $\delta_{ii};$  ბ)  $\delta_{ij}\delta_{ij};$  გ)  $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk};$  დ)  $\delta_{ij}\delta_{jk};$  ე)  $\delta_{ij}A_{ik}.$

**ამოხსნა.** ა)  $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3;$

ბ)  $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = 3;$

გ)  $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} = 3;$

დ)  $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} = \delta_{ik};$

ე)  $\delta_{ij}A_{ik} = A_{jk}.$

**2.5.** ლევი-ჩივიტას ტენზორისათვის აჩვენეთ, რომ: ა)  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij} = 6;$  ბ)  $\epsilon_{ijk}a_ja_k = 0.$

**ამოხსნა.** ა)  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij} = \epsilon_{1jk}\epsilon_{k1j} + \epsilon_{2jk}\epsilon_{k2j} + \epsilon_{3jk}\epsilon_{k3j};$



ეხლა შევაჯამოთ  $j$  ინდექსით და ამოვწეროთ მხოლოდ არანულოვანი წევრები:  $\varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31} + \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32} + \varepsilon_{13k}\varepsilon_{k13} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23}$ ;

ეხლა შევაჯამოთ  $k$  ინდექსის მიხედვით და ამოვწეროთ მხოლოდ არანულოვანი წევრები:

$$\varepsilon_{321}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{312} = 6;$$

ბ)  $\varepsilon_{ijk}a_ja_k = \varepsilon_{i1k}a_1a_k + \varepsilon_{i2k}a_2a_k + \varepsilon_{i3k}a_3a_k = \varepsilon_{i12}a_1a_2 + \varepsilon_{i13}a_1a_3 + \varepsilon_{i21}a_2a_1 + \varepsilon_{i23}a_2a_3 + \varepsilon_{i31}a_3a_1 + \varepsilon_{i32}a_3a_2$ ; მაშინ მივიღებთ, რომ

თუ,  $i = 1$  მაშინ  $\varepsilon_{ijk}a_ja_k = \varepsilon_{123}a_2a_3 + \varepsilon_{132}a_3a_2 = 0$ ;

თუ,  $i = 2$  მაშინ  $\varepsilon_{ijk}a_ja_k = \varepsilon_{213}a_1a_3 + \varepsilon_{231}a_3a_1 = 0$ ;

თუ,  $i = 3$  მაშინ  $\varepsilon_{ijk}a_ja_k = \varepsilon_{312}a_1a_2 + \varepsilon_{321}a_2a_1 = 0$ .

**2.6.** დაამტკიცეთ, რომ თუ  $A_{ij} = A_{ji}$  და  $B_{ij} = -B_{ji}$ ; მაშინ  $A_{ij}B_{ij} = 0$ .

**ამოხსნა.**  $A_{ij}B_{ij} = -A_{ji}B_{ji} \Rightarrow A_{ij}B_{ij} + A_{ji}B_{ji} = A_{ij}B_{ij} + A_{pq}B_{pq} = 0$ . რადგან აქ ყველა ინდექსი მუხჯია ანუ მეორდება და შეჯამების ინდექსია, მათი შეცვლა კი სხვა იდექსებით არაფერს ცვლის ანუ  $A_{pq}B_{pq} = A_{ij}B_{ij}$ . ამიტომ  $2A_{ij}B_{ij} = 0 \Rightarrow A_{ij}B_{ij} = 0$  რ.დ.გ.

**2.7.** აჩვენეთ, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტი

$$\det A_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

შეგვიძლია გამოვსახოთ ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორით შემდეგი სახით:  $\det A_{ij} = \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$ .

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი ჩაიწერება ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის საშუალებით ანუ

$$[abc] = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \text{ ეხლა თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:}$$

$a_i = A_{1i}$ ;  $b_i = A_{2i}$  და  $c_i = A_{3i}$  მაშინ მივიღებთ რომ დეტერმინანტი შეგვიძლია ჩავწეროთ  $\det A_{ij} = \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$  ფორმით რ.დ.გ.

**2.8.** იპოვეთ მოცემული მეორე რანგის  $T$  ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი მიმართულებები, თუ მისი კომპონენტების მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**ამოხსნა.** მთავარი მნიშვნელობების საპოვნელად  $T$  ტენზორისათვის, შევადგინოთ (2.91) მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \text{ ანუ}$$

$[(3 - \lambda)^2 - 1](1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda) = 0$ . მაშასადამე, გვაქვს სამი მთავარი მნიშვნელობა:  $\lambda_1 = 1$ ;  $\lambda_2 = 2$  და  $\lambda_3 = 4$ .

ვიპოვოთ თითოეული მთავარი მნიშვნელობის შესაბამისი მთავარი მიმართულების ერთეულოვანი ვექტორები.

$\lambda_1 = 1$  მნიშვნელობის საპოვნელ განტოლებათა სისტემას (2.90) ექნება სახე:

$$\begin{cases} 2n_1^{(1)} - n_2^{(1)} = 0 \\ -n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} = 0 \\ (n_1^{(1)})^2 + (n_2^{(1)})^2 + (n_3^{(1)})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} = 0 \\ n_3^{(1)} = \pm 1 \end{cases}.$$

$\lambda_2 = 2$  მნიშვნელობის საპოვნელ განტოლებათა სისტემას (2.90) ექნება სახე:

$$\begin{cases} n_1^{(2)} - n_2^{(2)} = 0 \\ -n_1^{(2)} + n_2^{(2)} = 0 \\ (n_1^{(2)})^2 + (n_2^{(2)})^2 + (n_3^{(2)})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_2^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3^{(2)} = 0 \end{cases}.$$

$\lambda_3 = 4$  მნიშვნელობის საპოვნელ განტოლებათა სისტემას (2.90) ექნება სახე:

$$\begin{cases} -n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0 \\ -n_1^{(3)} - n_2^{(3)} = 0 \\ (n_1^{(3)})^2 + (n_2^{(3)})^2 + (n_3^{(3)})^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(3)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_2^{(3)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_3^{(3)} = 0 \end{cases}$$

ამრიგად, მივიღეთ რომ მოცემული მეორე რანგის ტენზორის მთავარ ღერძებზე გადამყვანი (2.99) მატრიცა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.9.** აჩვენეთ, რომ 2.8 ამოცანის  $T$  ტენზორი შეიძლება მივიყვანოთ დიაგონალურ სახეზე, თუ მოვახდენთ კოორდინატთა სისტემის გადაყვანას მთავარ მიმართულებების ღერძებზე ფორმულით:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T.$$

**ამოხსნა.**

$$\begin{aligned} (T^*_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ამრიგად, მეორე რანგის ტენზორი მივიყვანეთ დიაგონალურ სახეზე.

**2.10. ჰამილტონ-კელის თეორემიდან** გამომდინარე, იპოვეთ მეორე რანგის  $B$  ტენზორის მეოთხე ხარისხის კომპონენტების  $B^4$  მატრიცა, თუ მოცემულია, რომ

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**ამოხსნა.**  $B$  ტენზორის მახასიათებელ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0. \quad \text{ჰამილტონ-კელის}$$

თეორემის თანახმად, მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორის კომპონენტების მატრიცა, აკმაყოფილებს მის მახასიათებელ განტოლებას ანუ  $\mathbf{B}^3 - 2\mathbf{B}^2 - 6\mathbf{B} + 9\mathbf{E} = 0$ . თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ  $\mathbf{B}$  ტენზორზე მივიღებთ, რომ  $\mathbf{B}^4 = 2\mathbf{B}^3 + 6\mathbf{B}^2 - 9\mathbf{B}$ . თუ ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში შევიტანთ  $\mathbf{B}^3$ -ის მნიშვნელობას ჰამილტონ-კელის განტოლებიდან, მივიღებთ რომ  $\mathbf{B}^4 = 10\mathbf{B}^2 + 3\mathbf{B} - 18\mathbf{E}$ .

მაშასადამე, მივიღებთ რომ

$$((\mathbf{B}^4)_{ij}) = 10 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

$$((\mathbf{B}^4)_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 81 & 0 \\ 7 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

### III თავი. მექანიკური ძაბვის თეორია

უწყვეტ გარემოში ძაბვის დასახასიათებლად, საჭიროა განვიხილოთ რამდენიმე დამხმარე ცნება.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული უწყვეტი გარემო.

**განსაზღვრება.** ერთგვაროვანი ეწოდება მასალას, რომლის ყველა წერტილს ერთნაირი თვისება აქვს (ერთი მასალისგან შედგება).

ცხადია, რომ თუ მასალა სხვადასხვა ადგილებზე შეიცავს სხვადასხვა ნივთიერებების ჩანართს, ის არ იქნება ერთგვაროვანი.

**განსაზღვრება.** მასალას ეწოდება იზოტროპული მოცემული თვისების მიმართ, თუ ეს თვისება თანაბრად ვრცელდება ყველა მიმართულებით. მასალას ეწოდება ანიზოტროპული მოცემული თვისების მიმართ, თუ ეს თვისება სხვადასხვანაირად ვლინდება მიმართულების არჩევის მიხედვით.

ერთგვაროვანი, უწყვეტი გარემოს მოცემულ წერტილში,  $V$  მოცულობის ერთეულში მოქცეული მასალის  $m$  რაოდენობის რიცხობრივ მაჩვენებლად განიხილება  $\rho$  სიმკვრივის ცნება. აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ წერტილის ქვეშ ჩვენ გვესმის მასალის მცირე ნაწილაკი.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \quad (3.1)$$

მასური სიმკვრივის  $\rho$  მაჩვენებელი სკალარული სიდიდეა და მისი განზომილებაა  $\frac{\text{კილოგრამი}}{\text{მეტრი}^3} = \frac{\text{კგ}}{\text{მ}^3}$ .

სხეულთა ურთიერთქმედების რიცხობრივად დასახასიათებლად შემოდის ძალის ცნება. ჩვენ განვიხილავთ მასურ და ზედაპირულ ძალებს.

**განსაზღვრება.** მასური ეწოდება ძალას, რომელიც მოქმედებს მოცემული სხეულის(მასის) ყველა წერტილზე.

**მაგალითი.** მასური ძალებია გრავიტაციული და იერციის ძალები.

მასურ ძალებს აღვნიშნავთ  $b_i$  სიმბოლოთი (ძალა რომელიც მოქმედებს მასის ერთეულზე ანუ მისი განზომილებაა  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{კილოგრამი}} = \frac{\text{ნ}}{\text{კგ}}$ ) ან  $p_i$

სიმბოლოთი (ძალა რომელიც მოქმედებს მოცულობის ერთეულზე ანუ მისი განზომილებაა  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{მეტრი}^3} = \frac{N}{m^3}$ ). ეს ძალები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი ფორმულით:

$$\rho b_i = p_i. \quad (3.2.)$$

**განსაზღვრება.** იმ ძალებს, რომლებიც მოქმედებენ საზღვრის ან რაიმე შიდა ზედაპირის ელემენტზე, **ზედაპირულ ძალებს** უწოდებენ.

**მაგალითი.** ზედაპირული ძალის მაგალითია ორი სხეულის შეხებისას წარმოქმნილი კონტაქტური ურთიერთქმედების ძალები.

ზედაპირულ ძალას აღნიშნავენ  $f_i$  სიმბოლოთი (ერთეულ ფართზე მოსული ძალაა ანუ მისი განზომილებაა  $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{მეტრი}^2} = \frac{N}{m^2}$ ).

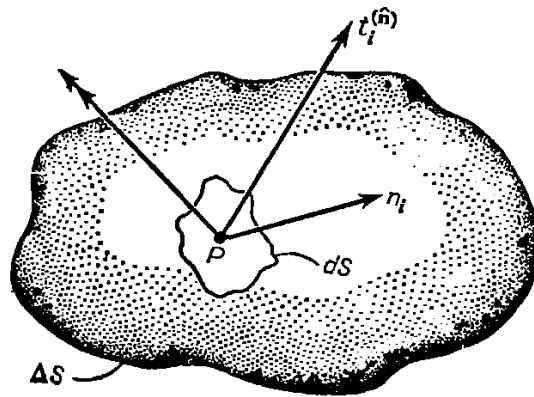
### 3.1. მექანიკური ძაბვის ტენზორი

განვიხილოთ უწყვეტი გარემო (მასალა), რადგან ძალის მოქმედება მასალის შიგნით, წერტილიდან წერტილს გადაეცემა, თითოეულ წერტილში გვაქვს გარკვეული ზემოქმედება. მის დასახასიათებლად, სხეულის შიგნით გამოვყოთ ამწერტილზე გამავალი რაიმე  $\Delta S$  ზედაპირი, რომლის ნორმალური მიმართველი ვექტორიც აღვნიშნოთ  $n$  ასოთი. ცხადია, რომ იმის მიხედვით, თუ როგორაა მიმართული  $\Delta S$  ზედაპირი გვექნება შესაბამისი საშუალო ძალა  $\Delta f_i$ . მოცემულ  $P$  წერტილში ზემოქმედების დასახასიათებლად, განვიხილოთ კოშის დამაბულობის პრინციპი, რომლის თანახმად:  $\Delta S$  ზედაპირის ფართის ერთეულზე მოქმედი საშუალო  $\Delta f_i$  ძალის ფარდობის ზღვარი არსებობს, როცა  $\Delta S$  მიისწრაფის ნულისაკენ და საშუალო ძალის მომენტის ზღვარი კი  $P$  წერტილის მიმართ ნულისკენ მიისწრაფის ანუ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S} = \frac{df_i}{dS} = t_i^{(n)}. \quad (3.3)$$

$t_i^{(n)}$  ვექტორს ძაბვის ვექტორს უწოდებენ ნახ. 3.1. რა თქმა უნდა არსებობს მოდელები, სადაც მომენტების ჯამს მიეწერება გარკვეული

არანულოვანი მნიშვნელობა და იგება შესაბამისი მომენტური თეორიები, თუმცა, ჩვენ ასეთ თეორიებს არ განვიხილავთ.

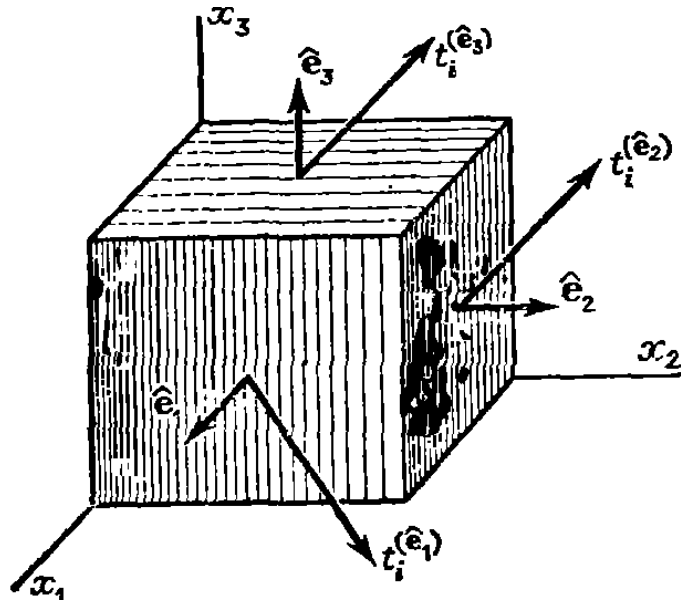


ნახ. 3.1. კოშის პრინციპი და ძაბვის ვექტორი

ამრიგად, კოშის პრინციპის თანახმად, უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ  $P$  წერტილს და ამ წერტილზე გამავალ ზედაპირს, რომლის მოგეზულობას ახასიათებს მისი ერთეულოვანი სიგრძის  $\mathbf{n}$  ნორმალი, შეესაბამება ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი. მოცემულ წერტილზე გამავალი ყველა შესაძლო ზედაპირების ერთობლიობას შეესაბამება  $t_i^{(n)}$  ძაბვის ვექტორებისა და შესაბამისი  $\mathbf{n}$  ნორმალების სიმრავლე, რომლებიც განსაზღვრავენ ამ წერტილში დამაბულ მდგომარეობას. აღმოჩნდა, რომ მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, არაა აუცილებელი ყველა შესაძლო  $t_i^{(n)}$ ;  $\mathbf{n}$  წყვილების განხილვა. მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, საკმარისია ამ წერტილზე გამავალ სამ ურთიერთპერპენდიკულარულ ზედაპირზე გვექონდეს მოცემული ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი.

მოცემულ წერტილში დამაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად, ავირჩიოთ ამ წერტილზე გამავალი და საკოორდინატო ღერძების პერპენდიკულარული სამი სიბრტყე ნახ. 3.2

საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურ ზედაპირებზე მოქმედი ძაბვის ვექტორები გავშალოთ საბაზისო ვექტორთა სისტემის მიმართ. მაშინ მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:



ნახ. 3.2. წერტილში ძაბვის შესწავლის სქემა

$$\begin{cases} \mathbf{t}^{(e_1)} = t_1^{(e_1)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_1)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_1)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_1)} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t}^{(e_2)} = t_1^{(e_2)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_2)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_2)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_2)} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{t}^{(e_3)} = t_1^{(e_3)} \mathbf{e}_1 + t_2^{(e_3)} \mathbf{e}_2 + t_3^{(e_3)} \mathbf{e}_3 = t_i^{(e_3)} \mathbf{e}_i \end{cases} \quad (3.4)$$

უწყვეტი გარემოს წერტილში განსაზღვრული ძაბვის ვექტორის ცხრა კომპონენტი, წარმოადგენს ძაბვის მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს:

$$t_j^{(e_i)} = \sigma_{ij}. \quad (3.5)$$

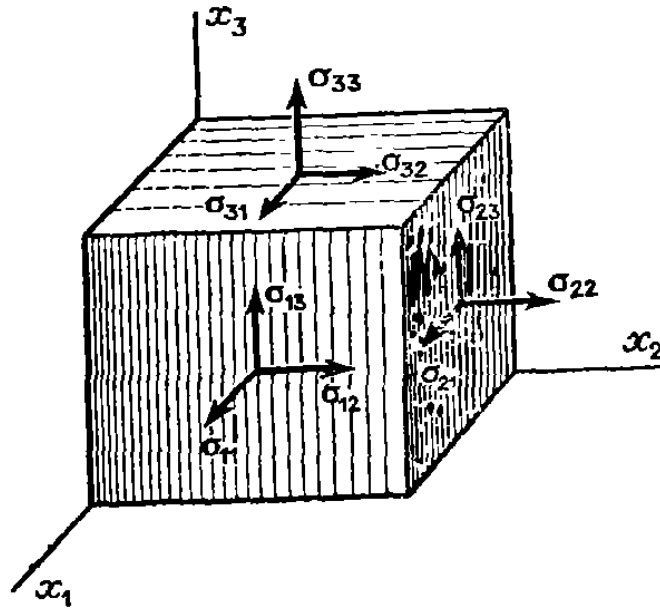
ძაბვის ტენზორის მატრიცულ წარმოდგენას აქვს შემდეგი სახე:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

ნახ. 3.3 მოცემულია ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მიმართულე-ბები.  $\sigma_{11}$ ;  $\sigma_{22}$ ;  $\sigma_{33}$  კომპონენტებს ნორმალური ძაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი მიმართული არიან შესაბამისი ზედაპირის ნორმალური მიმართულებით, ხოლო  $\sigma_{12}$ ;  $\sigma_{13}$ ;  $\sigma_{21}$ ;  $\sigma_{23}$ ;  $\sigma_{31}$ ;  $\sigma_{32}$  კომპონენტებს მხები ძაბვები(ძვრის ძაბვები) ეწოდებათ.



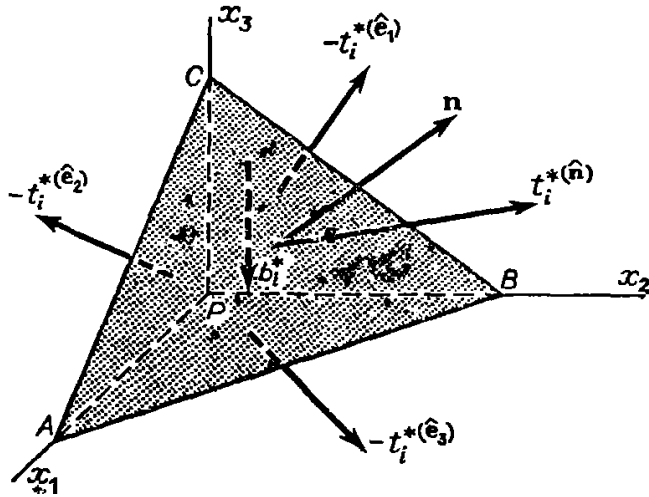
$\sigma_{ij}$  არის ძალა, რომელიც მიმართულია  $j$ -ური ღერძის მიმართულებით და მოქმედებს  $i$ -ური ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში.



ნახ. 3.3. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მიმართულებები

### 3.2. კავშირი ძაბვის ტენზორსა და ძაბვის ვექტორს შორის

სხეულის ნებისმიერ  $P$  წერტილში, კავშირი ძაბვის ტენზორის  $\sigma_{ij}$  კომპონენტებსა და ამ წერტილზე გამავალ ნებისმიერი მოგეზულობის ზედაპირზე მოქმედ ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორს შორის, შეიძლება ვიპოვოთ ძალთა წონასწორობის ან მოძრაობის რაოდენობის განტოლებიდან იმ ელემენტარული ტეტრაედრისათვის, რომლის წვეროც მოთავსებულია  $P$  წერტილში. ტეტრაედრის ფუძედ ავირჩიოთ ზედაპირი რომლის ნორმალია  $n_i$ ; ხოლო დანარჩენი სამი წახნაგი პერპენდიკულარულია კოორდინატთა ღერძების ნახ. 3.4.



ნახ. 3.4. უწყვეტი გარემოს ელემენტარული ტეტრაედრი

ვთქვათ, ტეტრაედრის  $ABC$  ფუძის ფართობია  $dS$ . მაშინ გვერდითი წახნაგების ფართობები, როგორც ფუძის გეგმილები კოორდინატთა სიბრტყეებზე იქნება:  $CPB$  წახნაგისათვის  $dS_1 = dSn_1$ ;  $APC$  წახნაგისათვის  $dS_2 = dSn_2$  და  $BPA$  წახნაგისათვის  $dS_3 = dSn_3$  ანუ

$$dS_i = dS(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) = dS \cos(\mathbf{n}; \mathbf{e}_i) = dSn_i. \quad (3.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ ტეტრაედრზე მოქმედ ძალებს, რაც აღნიშნულია ნახ. 3.4-ზე და აგრეთვე, მასურ ძალებს, მაშინ მივიღებთ ტეტრაედრის წონასწორობის განტოლებას:

$$t_i^{*(n)} dS - t_i^{*(e_1)} dS_1 - t_i^{*(e_2)} dS_2 - t_i^{*(e_3)} dS_3 + \rho b_i^* dV = 0. \quad (3.8)$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა ტეტრაედრის წირითი ზომები მიისწრაფის ნულისაკენ, დავინახავთ, რომ მასური ძალები უფრო სწრაფად მცირდება ზედაპირულ ძალებთან შედარებით. მაშასადამე, (3.8) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$t_i^{(n)} dS = t_i^{(e_1)} dSn_1 + t_i^{(e_2)} dSn_2 + t_i^{(e_3)} dSn_3 = t_i^{(n_j)} n_j dS. \quad (3.9)$$

თუ (3.9) განტოლებას შევკვეცავთ  $dS$ -ზე და გავითვალისწინებთ, რომ  $t_j^{(e_i)} = \sigma_{ji}$ ; მივიღებთ, რომ

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j. \quad (3.10)$$

### 3.3. ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა. უწყვეტი გარემოს წონასწორობის განტოლებები კოშის ფორმით

უწყვეტი  $V$  მოცულობის გარემოს წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მასზე მოქმედი  $t_i^{(n)}$  ზედაპირული ძალების და მასური  $b_i$  ძალების ტოლქმედი, შესაბამის ნაკრებ მომენტთან ერთად იყოს ნულის ტოლი.

ზედაპირული და მასური ძალების შეჯამებას მივყევართ შემდეგ ინტეგრალურ თანადობამდე:

$$\int_S \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (3.11)$$

გადავწეროთ (3.11) განტოლება კომპონენტებში, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = 0. \quad (3.12)$$

თუ (3.12) განტოლებაში შევითანოთ  $t_i^{(n)}$ -ის მნიშვნელობას  $\sigma_{ji} n_j$  და ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავქმნით გაუსის ფორმულით, მივიღებთ წონასწორობის განტოლებას ინტეგრალური ფორმით

$$\int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV = \int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV = 0. \quad (3.13)$$

რადგან (3.13) განტოლება სრულდება ნებისმიერი  $V$  მოცულობისთვის, ცხადია რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს ნულის ტოლი ანუ უწყვეტი გარემოს წონასწორობის განტოლებას კოშის ფორმით, აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0. \quad (3.14)$$

განტოლება (3.14) ჩაწერილია ინდექსური ფორმით და მისი გაშლილი ჩაწერა იძლევა შემდეგი სახის განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0. \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

კოშის პრინციპის თანახმად, ჩვენ უგულებელვყავით განაწილებული მომენტების არსებობა, მაშინ უწყვეტი გარემოს წონასწორობისათვის საჭიროა, რომ კოორდინატთა სათავის მიმართ მოდებული ძალების მომენტების ჯამიც იყოს ნულის ტოლი ანუ

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV = 0. \quad (3.16)$$

გადავწეროთ (3.16) განტოლება ინდექსურ აღნიშვნებში:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0. \quad (3.17)$$

თუ (3.17) განტოლებაში შევიტანთ  $t_k^{(n)}$ -ის მნიშვნელობას  $\sigma_{pk} n_p$  მივიღებთ რომ

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk} n_p dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0.$$

ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავქმნით გაუსის ფორმულით, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk} n_p dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV = 0.$$

გარდავქმნათ წარმოებულის გამოსახულება, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \int_V (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{pk})_{,p} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV &= \int_V \varepsilon_{ijk} [x_{j,p} \sigma_{pk} + x_j (\sigma_{pk,p} + \rho b_k)] dV = \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk} \delta_{jp} \sigma_{pk} dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

გარდაქმნებისას, ჩვენ გავითვალისწინეთ წონასწორობის განტოლება  $\sigma_{pk,p} + \rho b_k = 0$ .

ამრიგად, მომენტების ნულთან ტოლობამ მოგვცა შემდეგი განტოლება:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0. \quad (3.19)$$

ამ განტოლებიდან კი ცხადია, რომ

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (3.20)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მექანიკური ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია.

### 3.4. მთავარი ძაბვები და ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები

$P$  წერტილში ძაბვის ტენზორის კომპონენტები მოიცემა  $(\sigma_{ij})$  მატრიცით, ხოლო ძაბვის  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$  ვექტორი შეესაბამება  $n_j$  ვექტორს ანუ ძაბვის ტენზორის ზემოქმედებით უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ წერტილში მოდებულ  $n_j$  ვექტორს შეესაბამება გარკვეული მიმართულების  $t_i^{(n)}$  ძაბვის ვექტორი.

**განსაზღვრება.** უწყვეტ გარემოში მოცემული  $P$  წერტილისათვის, ისეთ  $n_i$  მიმართულებებს, რომელთათვისაც ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი კოლინეარულია  $n_i$  მიმართულების, მთავარი მიმართულებები (მთავარი ღერძები) ეწოდებათ.

მთავარი მიმართულებებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ კოლინეარობის პირობას:

$$t_i^{(n)} = \sigma n_i; \quad (3.21)$$

სადაც  $\sigma$  რიცხვებს მთავარ ძაბვებს უწოდებენ.

როგორც უკვე ვიცით,  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j$  და  $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$  მაშასადამე,  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$ . ასევე, ვიცით რომ  $n_i = \delta_{ij}n_j$ ; თუ შევიტანთ ამ გამოსახულებებს (3.21) განტოლებაში, მივიღებთ რომ

$$\sigma_{ij}n_j = \sigma\delta_{ij}n_j; \quad (3.22)$$

თუ (3.22) განტოლებაში მარჯვენა მხარეს გადმოვიტანთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანთ საერთო მამრავლს, გვექნება შემდეგი ერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა მთავარი მიმართულებებისა და მთავარი მნიშვნელობების საპოვნელად:

$$(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0. \quad (3.23)$$

(3.23) განტოლებათა სისტემა შეიცავს ოთხ უცნობს, სამი მიმმართველი ვექტორის კოორდინატები  $n_j$  და ერთი მთავარი ძაბვა  $\sigma$ .

ამ განტოლებას ყოველთვის აქვს ტრივიალური ანუ ნულოვანი ამონახსნი, მაგრამ ჩვენ მხოლოდ არატრივიალური ამონახსნები

გვანტერესებს. არატრიალური ამონახსნების არსებობისათვის კი აუცილებელია და საკმარისი ამ სისტემის მთავარი დეტერმინანტის ნულთან ტოლობა ანუ ადგილი აქვს შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას:

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0. \quad (3.24)$$

ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ გაშლილად:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (3.25)$$

(3.25) განტოლების გაშლა გვადლევს მახასიათებელ განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0; \quad (3.26)$$

სადაც

$$J_1 = \sigma_{ii}; J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}); J_3 = \det(\sigma_{ij}). \quad (3.27)$$

$J_1$ ;  $J_2$  და  $J_3$  კოეფიციენტებს ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები ეწოდებათ. რადგან ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია, მის მახასიათებელ განტოლებას ყოველთვის აქვს ნამდვილი სამი ფესვი.

(3.26) განტოლების  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$  და  $\sigma_3$  ფესვებს, მთავარ ძაბვებს უწოდებენ. თითოეულ მათგანს შეესაბამება  $n_j^{(k)}$  მთავარი მიმართულება (მთავარი ღერძი), რომელთა საპოვნელადაც უნდა ამოიხსნას შესაბამისი განტოლებათა სისტემა:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)} \delta_{ij}) n_j^{(k)} = 0. \quad (3.28)$$

შედეგია ნორმირებისათვის უმატებენ ხოლმე პირობას:  $n_i n_i = 1$ .

### 3.5. ძაბვის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად

ზოგჯერ, მიზანშეწონილია ძაბვის ტენზორის დაშლა ორ შესაკრებად, რომელთაგან ერთს ეწოდება სფერული (ჰიდროსტატიკური) ნაწილი, ხოლო მეორეს - დევიატორი.

**განსაზღვრება.** ძაბვის ტენზორის სფერული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომლის კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცა არის დიაგონალური და დიაგონალის ელემენტები უდრის მოცემული ტენზორის კვალის მესამედს ანუ  $\sigma_M = \frac{\sigma_{ii}}{3}$  საშუალო ნორმალური ძაბვას.

ცხადია, რომ ძაბვის ტენზორის სფერულ ნაწილს აქვს შემდეგი კომპონენტების მატრიცა:

$$\sigma_M \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \sigma_M & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_M & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_M \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

შესაბამის დევიატორს აქვს კომპონენტების შემდეგი სახის მატრიცა:

$$(s_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_M & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_M & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_M \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

სხვანაირად, რომ ვთქვათ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} + s_{ij}. \quad (3.31)$$

### 3.6. ძაბვის ვექტორის დაშლა ნორმალურ და მხებ მდგენელებად

ზოგჯერ, საჭიროა ძაბვის ვექტორის დაშლა მოცემული ზედაპირის ნორმალურ და მხებ მდგენელებად ნახ. 3.5. განვიხილოთ ძაბვის  $t_i^{(n)}$  ვექტორი. ძაბვის ვექტორი მოქმედებს მოცემული  $n$  ნორმალის მქონე ზედაპირზე, თუმცა მისი მიმართულება საზოგადოდ, არაა ზედაპირის მართობული. ნორმალური ძაბვის ვექტორის მისაღებად, ძაბვის ვექტორი უნდა დავაგეგმილოთ ნორმალის მიმართულებაზე ანუ ზედაპირის მიმართ ნორმალის გასწვრივ ძაბვის ვექტორის მდგენელი იქნება:

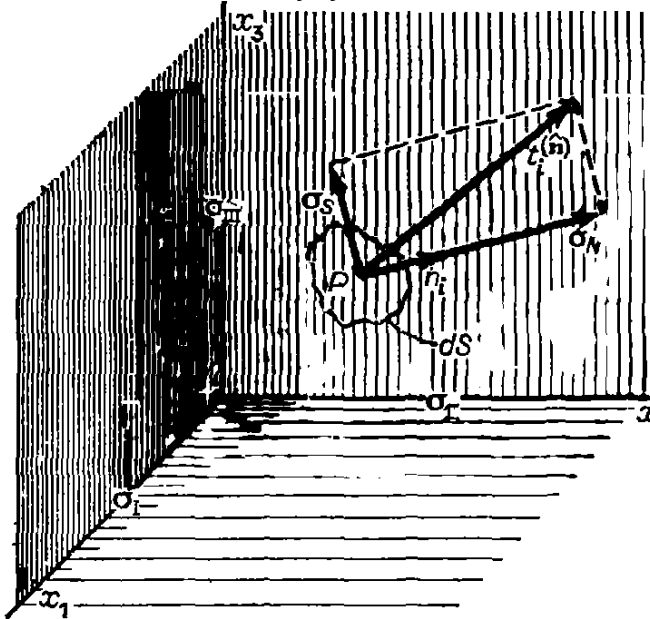
$$\sigma_N = t_i^{(n)} n_i. \quad (3.32)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j; \quad (3.33)$$

მაშინ, მივიღებთ რომ ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი იქნება:

$$\sigma_N = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (3.34)$$



ნახ. 3.5. ძაბვის ვექტორის დაშლა ზედაპირის ნორმალურ და მხებ მდგენელებად

მაშინ, ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელის კვადრატი იქნება:

$$\sigma_S^2 = t_i^{(n)} t_i^{(n)} - \sigma_N^2. \quad (3.35)$$

თუ განვიხილავთ ძაბვის ვექტორს, ძაბვის ტენზორის მთავარი მიმართულებების კოორდინატა სისტემაში ნახ. 3.5, მაშინ მივიღებთ რომ

$$t_1^{(n)} = \sigma_1 n_1; \quad t_2^{(n)} = \sigma_2 n_2; \quad t_3^{(n)} = \sigma_3 n_3; \quad (3.36)$$

მაშინ (3.32) ფორმულიდან, გვექნება ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2. \quad (3.37)$$

შესაბამისად, მხები მდგენელის კვადრატი იქნება შემდეგი სახის:

$$\sigma_S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2. \quad (3.38)$$



**ამოცანები ამოხსნებით.**

**3.1.** ძაბვის ტენზორს მოცემულ  $P$  წერტილში შეესაბამება კომპონენტების  $A$  მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ } P \text{ წერტილში ძაბვის } t_i^{(n)} \text{ ვექტორი იმ}$$

ზედაპირისათვის, რომლის ნორმალიცაა  $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ .

**ამოხსნა.** ძაბვის ვექტორი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, ძაბვის ვექტორი იქნება:  $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j}$ .

**3.2.** უწყვეტი გარემოს ნებისმიერ წერტილში დამაბული მდგომარეობა მოიცემა ძაბვის ტენზორის კომპონენტების შემდეგი მატრიცით:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ ძაბვის ვექტორი } P(2; 1; \sqrt{3})$$

წერტილში, ამ წერტილში ცილინდრული  $x_2^2 + x_3^2 = 4$  ზედაპირისადმი გავლებული მხები ფართისათვის.

**ამოხსნა.** ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მატრიცას  $P(2; 1; \sqrt{3})$  წერტილში ექნება სახე:

$$(\sigma_{ij}^{(P)}) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

ცილინდრული ზედაპირისადმი ნორმალური ვექტორის საპოვნელად ვიპოვოთ ამზედაპირის გრადიენტი:

$\text{grad}\varphi = \text{grad}(x_2^2 + x_3^2 - 4) = (0; 2x_2; 2x_3)$ . ამ ვექტორის მნიშვნელობა  $P(2; 1; \sqrt{3})$  წერტილში ექნება:  $(0; 2; 2\sqrt{3})$ . მაშინ, მისი მიმართველი

ერთეულოვანი ვექტორი იქნება:  $(0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ . მაშასადამე, უკვე შეგვიძლია ვიპოვოთ საძიებელი ძაბვის ვექტორის კომპონენტებიც:

$$t_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

ძაბვის ვექტორი იქნება:  $\frac{5}{2} \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ .

**3.3.** როგორი კომპონენტები უნდა ქონდეს მასური ძალის ვექტორს, რომ სისტემა იყოს წონასწორობაში, თუ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი მატრიცით:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}?$$

**ამოხსნა.** წონასწორობის განტოლებათა სისტემაში

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 = 0 \end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ მოცემული ტენზორის სახეს, მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} 3x_2 + 10x_2 + 0 + \rho b_1 = 0 \\ 0 + 0 + 2 + \rho b_2 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \rho b_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -\frac{13x_2}{\rho} \\ b_2 = -\frac{2}{\rho} \\ b_3 = 0 \end{cases}.$$

**3.4.** ძაბვის ტენზორის კომპონენტებს მოცემულ წერტილში  $Ox_1x_2x_3$  დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აქვს კომპონენტების შემდეგი მატრიცა:

$A = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . იპოვეთ მთავარი ძაბვები და ძაბვის ტენზორის მთავარი ღერძების მიმართულელები  $Ox'_1x'_2x'_3$  სისტემისთვის.

**ამოხსნა.** მთავარი ძაბვები განისაზღვრება მახასიათებელი განტოლებიდან:

$$\begin{vmatrix} 3 - \sigma & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0. \text{ ლაპლასის თეორემიდან გამომდინარე, დეტერმინანტი გავშალეთ პირველი სტრიქონის მიხედვით:}$$

$(3 - \sigma)(\sigma^2 - 4) - (-\sigma - 2) + (2 + \sigma) = (\sigma + 2)(\sigma - 1)(\sigma - 4) = 0.$

მაშასადამე, მთავარი ძაბვებია  $\sigma_1 = -2; \sigma_2 = 1; \sigma_3 = 4.$

თითოეული  $\sigma_{(k)}$  მთავარი ძაბვისათვის, ვიპოვოთ შესაბამისი მთავარი  $n_j^{(k)}$  მიმართულელება ანუ ამოვხსნათ შესაბამისი განტოლებათა სისტემა:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0.$$

$\sigma_1 = -2$  ამ მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი ღერძის საპოვნელად გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{pmatrix} 3 - \sigma_1 & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_1 & 2 \\ 1 & 2 & -\sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \text{ ანუ } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^{(1)} \\ n_2^{(1)} \\ n_3^{(1)} \end{pmatrix} = 0; \text{ გადავწეროთ}$$

ეს მატრიცული განტოლება წრფივ განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\begin{cases} 5n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} = 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5n_1^{(1)} + n_2^{(1)} + n_3^{(1)} = 0 \\ n_1^{(1)} + 2n_2^{(1)} + 2n_3^{(1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(1)} = 0 \\ n_2^{(1)} = -n_3^{(1)} \end{cases}$$

რადგან ვეძებთ მთავარი ღერძის მიმართველ ვექტორს (მისი სიგრძე ერთეულოვანია), გვაქვს დამატებითი პირობა  $n_i n_i = 1$ , მაშინ  $n_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  და  $n_3^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  ანუ გვაქვს შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმართველი ვექტორი:  $(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ .

ანალოგიურად ვიპოვოთ  $\sigma_2 = 1$  მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი. გვექნება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2n_1^{(2)} + n_2^{(2)} + n_3^{(2)} = 0 \\ n_1^{(2)} - n_2^{(2)} + 2n_3^{(2)} = 0 \\ n_1^{(2)} + 2n_2^{(2)} - n_3^{(2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^{(2)} = -n_3^{(2)} \\ n_1^{(2)} = -n_2^{(2)} \end{cases} \text{ რადგან ვეძებთ მთავარი}$$

ღერძის მიმმართველ ვექტორს (მისი სიგრძე ერთეულოვანია), გვაქვს დამატებითი პირობა  $n_i n_i = 1$ , მაშინ  $n_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $n_2^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  და  $n_3^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  ანუ გვაქვს შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი:  $(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}})$ .

ანალოგიურად ვიპოვოთ  $\sigma_3 = 4$  მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი. გვექნება განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} -n_1^{(3)} + n_2^{(3)} + n_3^{(3)} = 0 \\ n_1^{(3)} - 4n_2^{(3)} + 2n_3^{(3)} = 0 \\ n_1^{(3)} + 2n_2^{(3)} - 4n_3^{(3)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_2^{(3)} = n_3^{(3)} \\ n_1^{(3)} = 2n_2^{(3)} \end{cases} \text{ რადგან ვეძებთ მთავარი}$$

ღერძის მიმმართველ ვექტორს (მისი სიგრძე ერთეულოვანია), გვაქვს დამატებითი პირობა  $n_i n_i = 1$ , მაშინ  $n_1^{(3)} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$ ;  $n_2^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$  და  $n_3^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$  ანუ გვაქვს შესაბამისი მთავარი ღერძის მიმმართველი ვექტორი:  $(-\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}})$ .

**3.5.** აჩვენეთ, რომ თუ კოორდინატთა  $Ox_1x_2x_3$  სისტემიდან გადავალთ მთავარი მიმართულებების  $Ox'_1x'_2x'_3$  სისტემაზე, მაშინ წინა ამოცანის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა მიიღებს შესაბამის დიაგონალურ სახეს.

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით, ახალ სისტემაზე გადასვლისას მიღებული  $A^*$  მატრიცა დაკავშირებულია ტენზორის კომპონენტების საწყის  $A$  მატრიცთან შემდეგი ფორმულით:  $A^* = \mathcal{A}A\mathcal{A}^T$ ; სადაც  $\mathcal{A}$  მთავარი მიმართულებების კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცაა ანუ წინა მაგალითის შემთხვევაში:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \text{ ამ მატრიცაში პირველი სტრიქონი, პირველი}$$

მთავარი ძაბვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების მიმართველი ვექტორის კოორდინატებია; მეორე სტრიქონისა - მეორესი და ა.შ.

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ მივიღეთ}$$

მოცემული ტენზორის კომპონენტების მატრიცის მთავარ მიმართულებებში გადაყვანის შედეგად მიღებული დიაგონალური ფორმა:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ როგორც ვხედავთ დიაგონალზე მოცემული ტენზორის}$$

მთავარი ძაბვების მნიშვნელობებია განლაგებული.

**3.6.** გამოთვალეთ ტენზორის ინვარიანტები ცნობილი (3.27) ფორმულების დახმარებით, თუ მისი კომპონენტების მატრიცაა (პირველი მეთოდი):

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ მთავარი ძაბვები და მათი საშუალებით}$$

გამოთვლილი ინვარიანტები (მეორე მეთოდი) შეადარეთ ფორმულებით გამოთვლილს.

**ამოხსნა.**

**პირველი მეთოდი.** ძაბვის ტენზორის ინვარიანტების გამოსათვლელი (3.27) ფორმულებით ვაწარმოთ გამოთვლა:

$$J_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 6 + 6 + 8 = 20;$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}[(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - \sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2 - \sigma_{33}^2 - 2\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{13}^2 - 2\sigma_{23}^2] = (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2) = 36 + 48 + 48 - 9 = 123;$$

$$J_3 = \det(\sigma_{ij}) = 36 \cdot 8 + 0 + 0 - 0 - 72 - 0 = 216.$$

**მეორე მეთოდი.** ვიპოვოთ მთავარი ძაბვები. ამისათვის უნდა ამოვხსნათ შემდეგი მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{vmatrix} 6 - \sigma & -3 & 0 \\ -3 & 6 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 8 - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

$$(6 - \sigma)^2(8 - \sigma) + 0 + 0 - 0 - 0 - 9(8 - \sigma) = 0;$$

$$(8 - \sigma)((6 - \sigma)^2 - 9) = 0;$$

$$(8 - \sigma)(3 - \sigma)(9 - \sigma) = 0.$$

ამრიგად, მთავარი ძაბვებია:  $\sigma_1 = 9$ ;  $\sigma_2 = 8$ ;  $\sigma_3 = 3$ . მაშინ მივიღებთ, რომ

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 9 + 8 + 3 = 20;$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 72 + 24 + 27 = 123;$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 9 \cdot 8 \cdot 3 = 216.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე მეთოდით ერთნაირი შედეგები მივიღეთ.

**3.7. მოცემულია ტენზორის კომპონენტების მატრიცა:**

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

დაშალეთ ეს ტენზორი სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად. აჩვენეთ, რომ დევიატორის პირველი ინვარიანტი ნულის ტოლია.

ამოხსნა. საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება  $\sigma_M = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{12+9+3}{3} = 8$ ; მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\sigma_{ij} = \sigma_M \delta_{ij} + s_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \text{ დევიატორის პირველი ინვარიანტი იქნება:}$$

$$J_{1s} = 4 + 1 + (-5) = 0.$$

ძაბვის დევიატორის პირველი ინვარიანტი ყოველთვის ნულის ტოლია.

## IV თავი. უწყვეტი გარემოს კინემატიკა

უწყვეტი გარემო აღწერის ორი მეთოდი არსებობს. ეს არის ლაგრანჟის და ეილერის მეთოდები. ორივე ეს მეთოდი იდენტურ შედეგს იძლევა, თუმცა, ამოცანიდან გამომდინარე, ზოგჯერ ხელსაყრელია ლაგრანჟის მიდგომა და ზოგჯერ ეილერის.

### 4.1. მოძრაობის აღწერის ლაგრანჟის და ეილერის წესი

კლასიკური მექანიკის თვალსაზრისით, უწყვეტი გარემოს ყოველი წერტილი (ნაწილაკი) ინდივიდუალიზირებულია, ანუ განირჩევა სხვა წერტილებისაგან. თითოეულ ინდივიდუალურ(მატერიალურ) წერტილს შეესაბამება სამი რიცხვი ( $\xi_1; \xi_2; \xi_3$ ). ამ სამ რიცხვს, მატერიალური წერტილის (ნაწილაკის) ლაგრანჟის კოორდინატებს უწოდებენ. ლაგრანჟის კოორდინატები წარმოადგენენ მოცემული ნაწილაკის ინდივიდუალურ „სახელს“. როგორც წესი, ეს იმ წერტილის კოორდინატებია, სადაც მატერიალური ნაწილაკი იმყოფებოდა დროის საწყის მომენტში.

უწყვეტ გარემოთა მოძრაობისა და მასში მიმდინარე პროცესების აღწერა ხდება შესაბამისი განმსაზღვრელი პარამეტრების (სიჩქარეების, წნევის, ტემპერატურის და ა.შ.) ველების საშუალებით. თუ ეს პარამეტრები განიხილება როგორც ლაგრანჟის ( $\xi_1; \xi_2; \xi_3$ ) კოორდინატების და  $t$  დროის ფუნქცია, მაშინ მოძრაობის შესწავლის შესაბამის მეთოდს ლაგრანჟულს ანუ მატერიალურს უწოდებენ. ამ მიდგომისას ყველა პროცესი დაკავშირებულია კონკრეტულ ინდივიდუალურ ნაწილაკთან და მთავარ კინემატიკურ მახასიათებელს წარმოადგენს უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი:

$$x_i = f_i(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t). \quad (4.1)$$

ლაგრანჟის კოორდინატებში, უწყვეტი გარემოს ნაწილაკების სიჩქარე და აჩქარება განისაზღვრება კერძო წარმოებულებით:

$$\mathbf{v}(\xi; t) = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi; t)}{\partial t}; \quad \mathbf{a}(\xi; t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\xi; t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi; t)}{\partial t}; \quad (4.2)$$



სადაც  $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ .

არსებობს ეილერის მიდგომა. ამ შემთხვევაში, უწყვეტი გარემოს მოძრაობას და მიმდინარე პროცესებს სწავლობენ სივრცის  $(x_1; x_2; x_3)$  მოცემულ წერტილებში  $t$  დროის მიხედვით.

ეილერის ცვლადებში, მოცემული  $A(x_1; x_2; x_3; t)$  სიდიდის ინდივიდუალური წარმოებული დროის მიხედვით, წარმოადგენ რთული ფუნქციის სრულ წარმოებულს:

$$\frac{dA(x;t)}{dt} = \frac{\partial A(x;t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial A(x;t)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial A(x;t)}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial A(x;t)}{\partial x_3}. \quad (4.3)$$

სადაც  $v(x; t) = (v_1; v_2; v_3)$  სიჩქარის ვექტორია.

მაგალითად, აჩქარების ვექტორი ეილერის კოორდინატებში მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$a(x; t) = \frac{\partial v(x;t)}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v(x;t)}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v(x;t)}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v(x;t)}{\partial x_3}. \quad (4.4)$$

ეილერის და ლაგრანჟის მიდგომები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. თუ რაიმე პროცესი აღწერილია ერთ-ერთ მათგანში, მეორეზე გადასვლა ხდება მარტივი პროცედურების საშუალებით.

იმისათვის, რომ ლაგრანჟის ცვლადებიდან გადავიდეთ ეილერის ცვლადებზე, საჭიროა მოძრაობის (4.1) კანონი ამოვხსნათ ლაგრანჟის კოორდინატების მიმართ ანუ ვიპოვოთ ფუნქციები:

$$\xi_i = \varphi_i(x_1; x_2; x_3; t). \quad (4.5)$$

მაშინ ნებისმიერი  $A(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t)$  სიდიდისათვის, რომელიც ლაგრანჟის ცვლადებშია მოცემული, ეილერის ცვლადებში მისი გამოსახულება იქნება შესაბამისი რთული ფუნქცია:

$$A(\varphi_1(x; t); \varphi_2(x; t); \varphi_3(x; t); t). \quad (4.6)$$

იმისათვის, რომ ეილერის ცვლადებიდან გადავიდეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე, საჭიროა ამოვხსნათ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i(x_1; x_2; x_3; t); \quad i = \overline{1,3}. \quad (4.7)$$

საწყისი პირობებით:

$$x_i|_{t=0} = \xi_i; \quad i = \overline{1,3}. \quad (4.8)$$

ამრიგად, მიიღება  $x_i = f_i(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t)$  მოძრაობის კანონი ლაგრანჟის კოორდინატებში.

მაშინ ნებისმიერი  $B(x_1; x_2; x_3; t)$  სიდიდისათვის ეილერის ცვლადებში, თუ შევიტანთ მიღებული მოძრაობის კანონიდან მნიშვნელობებს მივიღებთ ამ გამოსახულებას ლაგრანჟის ცვლადებში:

$$B(f_1(\xi; t); f_2(\xi; t); f_3(\xi; t); t). \quad (4.9)$$

**მაგალითები.**

1. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის კანონი მოცემულია ლაგრანჟის კოორდინატებში:

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right); \quad x_2 = \xi_2 \left(1 + \frac{2t}{\tau}\right); \quad x_3 = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right);$$

ა) იპოვეთ სიჩქარისა და აჩქარების ველები ლაგრანჟის კოორდინატებში;

ბ) სადაა ის ნაწილაკი დროის  $t = 3\tau$  მომენტში, რომელიც  $t = \tau$  მომენტში იყო  $(a; b; c)$  წერტილში ?

**ამოხსნა.**

ა) (4.2) ფორმულებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ სიჩქარეთა ველი იქნება:

$$v_1 = \frac{\partial x_1(\xi; t)}{\partial t} = \frac{\xi_1}{\tau}; \quad v_2 = \frac{\partial x_2(\xi; t)}{\partial t} = \frac{2\xi_2}{\tau}; \quad v_3 = \frac{\partial x_3(\xi; t)}{\partial t} = \frac{2\xi_3 t}{\tau}.$$

აჩქარებათა ველი კი მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$a_1 = \frac{\partial v_1(\xi; t)}{\partial t} = 0; \quad a_2 = \frac{\partial v_2(\xi; t)}{\partial t} = 0; \quad a_3 = \frac{\partial v_3(\xi; t)}{\partial t} = \frac{2\xi_3}{\tau}.$$

ბ) დროის  $t = \tau$  მომენტში გვაქვს შემდეგი განტოლებები:

$$a = 2\xi_1; \quad b = 3\xi_2; \quad c = 2\xi_3 \Leftrightarrow \xi_1 = \frac{a}{2}; \quad \xi_2 = \frac{b}{3}; \quad \xi_3 = \frac{c}{2};$$

მაშინ დროის  $t = 3\tau$  მომენტში გვექნება, რომ

$$x_1 = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) = \frac{a}{2}(1 + 3) = 2a;$$

$$x_2 = \xi_2 \left(1 + \frac{2t}{\tau}\right) = \frac{b}{3}(1 + 6) = \frac{7b}{3};$$

$$x_3 = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right) = \frac{c}{2}(1 + 9) = 5c.$$

მაშასადამე, დროის  $t = 3\tau$  მომენტში საძიებელი წერტილის კოორდინატები იქნება:  $(2a; \frac{7b}{3}; 5c)$ .

2. ლაგრანჟის ცვლადებში ინდივიდუალური ნაწილაკების მოძრაობა მოცემულია განტოლებებით:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2(e^t - 1);$$

$$x_2 = \xi_1(e^{-t} - 1) + \xi_2;$$

$$x_3 = \xi_3.$$

ჩაწერეთ ეს მოძრაობა ეილერის ცვლადებში.

**ამოხსნა.**

თუ, მეორე განტოლებიდან განვსაზღვრავთ  $\xi_2$  ცვლადს და ჩავსვამთ პირველ განტოლებაში და მას ამოვხსნით  $\xi_1$  ცვლადის მიმართ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\xi_1 = \frac{-x_1 + x_2(e^t - 1)}{1 - e^t - e^{-t}};$$

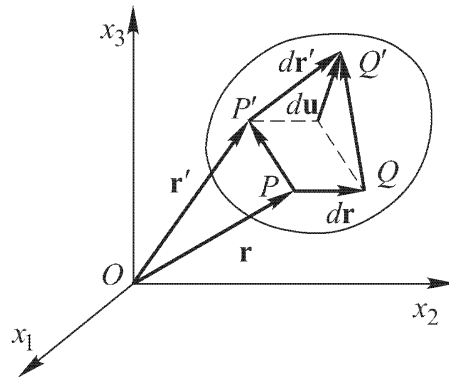
$$\xi_2 = \frac{x_1(e^{-t} - 1) - x_2}{1 - e^t - e^{-t}};$$

$$\xi_3 = x_3.$$

## 4.2. დეფორმაციის ტენზორი

**განსაზღვრება.** მყარი სხეულის ფორმისა და მოცულობის ცვლილებას გარე ძალების ან ტემპერატურის მოქმედების შედეგად დეფორმაცია ეწოდება.

განვიხილოთ დეფორმირებადი მყარი სხეული დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ნახ. 4.1.



ნახ. 4.1. დეფორმირებადი მყარი სხეული დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში

გვაქვს კოორდინატთა  $x_i$  სისტემა. გამოვყოთ სხეულის უსასრულოდ მცირე მოცულობის ელემენტი, რომელიც შეიცავს  $P$  წერტილს  $\mathbf{r}(x_1; x_2; x_3)$  რადიუს-ვექტორით. ვთქვათ, სხეული უძრავია არჩეული კოორდინატთა სისტემის მიმართ. გარე ძალის მოდების შედეგად, სხეული დეფორმირდება და  $P$  წერტილი გადადის სხვა  $P'$  წერტილში, რომელიც ხასიათდება  $\mathbf{r}'$  რადიუს-ვექტორით და შესაბამისი  $(x'_1; x'_2; x'_3)$  კოორდინატებით.  $P$  წერტილის გადაადგილებას:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}' - \mathbf{r}; \quad u_i(\mathbf{r}) = x'_i - x_i; \quad (4.10)$$

გადაადგილების ვექტორს, დეფორმაციას უწოდებენ. დეფორმაცია არის  $P$  წერტილის კოორდინატების ფუნქცია ანუ სხვა წერტილში, ის შეიძლება სხვა სიდიდის იყოს.  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  დამოკიდებულების მოცემა, მთლიანად ახასიათებს სხეულის დეფორმაციას ყველა წერტილში.

განვიხილოთ სხეულის დეფორმაცია  $P$ -ს მახლობელ  $Q(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$  წერტილში. დეფორმაციის შედეგად  $Q$  წერტილი გადავა  $Q'$  წერტილში. საზოგადოდ,  $Q$  წერტილის დეფორმაცია არ უდრის  $P$  წერტილის დეფორმაციას. როგორც ნახ. 4.1-დან ჩანს, ამ ორი წერტილის დეფორმაციები დაკავშირებული არიან შემდეგი განტოლებით:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) + d\mathbf{u}; \quad u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + du_i. \quad (4.11)$$

$du$  ვექტორს ფარდობით გადაადგილებას უწოდებენ. ;  $u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$  გავშალოთ ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები  $dx_i$  ცვლადების მიმართ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u_i(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = u_i(\mathbf{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k + \dots \quad (4.12)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრში იგულისხმება შეჯამება  $k$  ინდექსით. თუ სხეულის დეფორმაციები აკმაყოფილებენ (4.12) განტოლებას, მაშინ ამბობენ რომ ადგილი აქვს ერთგვაროვან წრფივ დეფორმაციებს. ამ გაშლის  $dx_i$  ცვლადების მიმართ არაწრფივი წევრების გათვალისწინება, საჭიროა მხოლოდ სასრული სიდიდის დეფორმაციების შესწავლისას. კლასიკური დრეკადობის თეორია კი, ემყარება წრფივ დამოკიდებულებას და განიხილავს, მხოლოდ უსასრულოდ მცირე დეფორმაციებს.

**განსაზღვრება.** დრეკადი ეწოდება სხეულს, რომელიც გარე ძალის მოქმედების მოხსნის შემდეგ, უბრუნდება საწყის მდგომარეობას (მოცულობას და ფორმას).

თუ გავითვალისწინებთ (4.11) და (4.12) განტოლებებს, მივიღებთ რომ

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = A_{ik} dx_k; \quad A_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (4.13)$$

მეორე რანგის  $A_{ik}$  ტენზორს ფარდობითი დეფორმაციების ტენზორს უწოდებენ. ეს ტენზორი ახასიათებს მოცულობის გამოყოფილ ნაწილში  $Q$  წერტილის დეფორმაციას  $P$  წერტილის მიმართ.  $A_{ik}$  ტენზორის კომპონენტები დამოკიდებულია სივრცით კოორდინატებზე და დროზე. მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, ფარდობითი დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:  $A_{ik} \ll 1$ . დავშალოთ ეს ტენზორი სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ ნაწილებად:

$$A_{ik} = \frac{1}{2}(A_{ik} + A_{ki}) + \frac{1}{2}(A_{ik} - A_{ki}) = \varepsilon_{ik} + \varphi_{ik}. \quad (4.14)$$

ამ ტენზორის სიმეტრიულ ნაწილს  $\varepsilon_{ik}$  დეფორმაციის ტენზორი ეწოდება:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \quad (4.15)$$

$A_{ik}$  ტენზორის ანტისიმეტრიულ ნაწილს  $\varphi_{ik}$  ბრუნვის ტენზორს უწოდებენ.

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right); \quad \varphi_{ik} = -\varphi_{ki}. \quad (4.16)$$

#### 4.2.1. ბრუნვის ტენზორი

განვიხილოთ ბრუნვის ტენზორის მექანიკური შინაარსი. დავუშვათ, რომ დეფორმაციის ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია. მაშინ (4.13), (4.14) განტოლებებიდან გამომდინარე, ფარდობითი გადაადგილების ვექტორი მთლიანად განისაზღვრება ბრუნვის ტენზორით ანუ

$$du_i = \varphi_{ik} dx_k. \quad (4.17)$$

$\varphi_{ik}$  ტენზორის კომპონენტები განისაზღვრება შემდეგი მატრიცის კომპონენტებით:

$$(\varphi_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

რადგან  $\varphi_{ik}$  ანტისიმეტრიული ტენზორია, ამ მატრიცაში მხოლოდ სამი კომპონენტია დამოუკიდებელი:

$$\varphi_{32} = -\varphi_{23} = \varphi_1; \quad \varphi_{13} = -\varphi_{31} = \varphi_2; \quad \varphi_{21} = -\varphi_{12} = \varphi_3. \quad (4.19)$$

მაშინ ფარდობითი გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებით:

$$du_1 = -\varphi_3 dx_2 + \varphi_2 dx_3; \quad (4.20)$$

$$du_2 = \varphi_3 dx_1 - \varphi_1 dx_3; \quad (4.21)$$

$$du_3 = -\varphi_2 dx_1 + \varphi_1 dx_2. \quad (4.22)$$

თუ მობრუნების კუთხისათვის შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\boldsymbol{\varphi}$  აღნიშვნას, მაშინ (4.20)-(4.22) განტოლებები შეგვიძლია ჩავწეროთ ვექტორულად:

$$d\mathbf{u} = [\boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r}]. \quad (4.23)$$

როგორც თეორიული მექანიკიდანაა ცნობილი, სწორედ ასე ჩაიწერება მყარი სხეულის მცირე  $\varphi$  კუთხით მობრუნება. ასე რომ, ნახ. 4.1-დან გამომდინარე, (4.23) აღწერს  $Q$  წერტილის შემცველი ნაწილაკის მობრუნებას  $P$  წერტილის გარშემო მცირე  $\varphi$  კუთხით.

მაშასადამე, ბრუნვის ტენზორის კომპონენტები აღწერენ არა დეფორმაციას, არამედ, მისი მყარი სხეულივით მობრუნებას.

ცხადია რომ,

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -\varphi_3 = -\frac{1}{2} \text{rot}_3 \mathbf{u}; \quad (4.24)$$

$$\varphi_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = -\varphi_1 = -\frac{1}{2} \text{rot}_1 \mathbf{u}; \quad (4.25)$$

$$\varphi_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = -\varphi_2 = -\frac{1}{2} \text{rot}_2 \mathbf{u}. \quad (4.26)$$

ვექტორული აღნიშვნებით (4.24)-(4.26) განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}. \quad (4.27)$$

მაშასადამე, ბრუნვის ტენზორის კომპონენტები გადაადგილების ვექტორის როტორის ტოლია.

#### 4.2.2. დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი ღერძები

ვთქვათ, ბრუნვის ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, ასეთ შემთხვევაში, გადაადგილების ვექტორი მთლიანად განისაზღვრება დეფორმაციის ტენზორით:

$$du_i = \varepsilon_{ik} dx_k. \quad (4.28)$$

დეფორმაციის ტენზორი, როგორც ნებისმიერი სიმეტრიული ტენზორი, შეგვიძლია მივიყვანოთ მთავარ ღერძებზე. მაშასადამე, არსებობს ისეთი კოორდინატთა  $(x_1^0; x_2^0; x_3^0)$  სისტემა, რომელშიდაც

დეფორმაციის ტენზორს შეესაბამება კომპონენტების დიაგონალური მატრიცა.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^0 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

$x_i^0$  საკოორდინატო ღერძებს მთავარ ღერძებს უწოდებენ, ხოლო  $\varepsilon_{11}^0$ ;  $\varepsilon_{22}^0$ ;  $\varepsilon_{33}^0$  მნიშვნელობებს - მთავარ დეფორმაციებს.

დეფორმაციები მთავარ ღერძებში ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$du_1^0 = \varepsilon_{11}^0 dx_1^0; \quad du_2^0 = \varepsilon_{22}^0 dx_2^0; \quad du_3^0 = \varepsilon_{33}^0 dx_3^0. \quad (4.30)$$

აქ  $du_i^0$  არის  $dx_i^0$  მონაკვეთის დეფორმაცია. ყველა დეფორმაცია მიმართულია მთავარი ღერძების მიმართულებით. აქედან ნათლად ჩანს, რომ მთავარი დეფორმაციები აღწერს მოცულობის ელემენტის ლოკალურ გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციას მთავარი ღერძების მიმართულებით.

**განსაზღვრება.** გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციას სამი ურთიერთპერპენდიკულარული მიმართულებით სუფთა დეფორმაცია ეწოდება.

თუ მოცემულ ელემენტარულ,  $P$  წერტილის შემცველ მოცულობაში, ბრუნვის ტენზორის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, მაშინ შესაძლებელია დეფორმაციის მთავარი ღერძების პოვნა ისე, რომ ამ მოცულობისთვის გვექნება სუფთა დეფორმაცია. თუ ბრუნვის ტენზორის კომპონენტები არ უდრის ნულს, მაშინ გვექნება  $P$  წერტილის გარშემო ბრუნვაც.

მაშასადამე, უწყვეტი გარემოს მოცულობის რომელიმე ელემენტის დეფორმაცია დაიყვანება: სუფთა დეფორმაციაზე ანუ გაჭიმვა-შეკუმშვის ოპერაციაზე მთავარი ღერძების მიმართულებით და ამ მთავარი კოორდინატთა სისტემის მობრუნებაზე მცირე კუთხით  $P$  წერტილის გარშემო.



### 4.2.3. მოცულობის ცვლილება დეფორმაციისას

ბრუნვის ტენზორი იწვევს უწყვეტი გარემოს მოცულობის ელემენტის მყარ ბრუნვას მოცულობის ცვლილების გარეშე. მაშასადამე, მოცულობის ცვლილების გამოწვევა შეუძლია მხოლოდ სუფთა დეფორმაციას. ამიტომ განვიხილოთ სუფთა დეფორმაცია მთავარ ღერძებში.

გამოვყოთ მოცულობის მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის მცირე ელემენტი. მისი საწყისი მოცულობა იქნება:

$$\Delta V_0 = \Delta x_1^0 \Delta x_2^0 \Delta x_3^0. \quad (4.31)$$

დეფორმაციისას, პარალელეპიპედის წიბოები მიიღებენ ნაზრდებს და მათი სიგრძე გახდება:

$$\Delta x_i^{0'} = \Delta x_i^0 + du_i^0. \quad (4.32)$$

დეფორმაციის წრფივობიდან გამომდინარე, წიბოს წაგრძელება იქნება

$$du_i^0 = \varepsilon_{ii}^0 \Delta x_i^0. \quad (4.33)$$

(ამ ფორმულაში არ ხდება შეჯამება).

თუ შევიტანთ (4.33) მნიშვნელობას (4.32) განტოლებებში, მივიღებთ რომ

$$\Delta x_i^{0'} = (1 + \varepsilon_{ii}^0) \Delta x_i^0. \quad (4.34)$$

მაშინ ცხადია, რომ მოცულობის ახალი მნიშვნელობა იქნება:

$$\Delta V_0' = (1 + \varepsilon_{11}^0)(1 + \varepsilon_{22}^0)(1 + \varepsilon_{33}^0) \Delta V_0. \quad (4.35)$$

რადგან საქმე გვაქვს მცირე დეფორმაციებთან ანუ  $|\varepsilon_{ik}^0| \ll 1$ , თუ უგულებელვყოფთ კვადრატულ და უფრო მაღალი რიგის მცირე სიდიდეებს, მივიღებთ რომ

$$\Delta V_0' = (1 + \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0) \Delta V_0. \quad (4.36)$$

მაშინ მოცულობის ფარდობითი ცვლილებისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\frac{\Delta V_0' - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \varepsilon_{11}^0 + \varepsilon_{22}^0 + \varepsilon_{33}^0 = \text{tr } \varepsilon_{ii}^0. \quad (4.37)$$

ცხადია რომ, მოცულობის ფარდობითი ცვლილება არაა დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე ანუ დეფორმაციის ტენზორის კვალი (დიაგონალური ელემენტების ჯამი) ინვარიანტია:

$$\text{tr } \varepsilon_{ii}^0 = \varepsilon_{ii}. \quad (4.38)$$

მაშასადამე, მოცულობის ელემენტის ფარდობითი ცვლილების საპოვნელად, არაა სავალდებულო მისი მთავარ ღერძებზე მიყვანა. გარდავქმნათ მოცულობის ფარდობითი ცვლილების ფორმულა (4.37):

$$\frac{\Delta V_0' - \Delta V_0}{\Delta V_0} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{u}. \quad (4.39)$$

მაშასადამე, უწყვეტი გარემოს ელემენტარული ნაწილის მოცულობის ფარდობითი ცვლილება მოიცემა დეფორმაციის ტენზორის დიაგონალური ელემენტებით, ხოლო არადიაგონალური ელემენტები აღწერენ ძვრის დეფორმაციებს ანუ ფორმის ცვლილებას.

#### 4.2.4. წრფივი დეფორმაციების გეომეტრიული თვისებები

**თეორემა 1.** წრფივი დეფორმაციისას, ერთ სიბრტყეში მდებარე წერტილები გადადიან ისევ ერთ, მხოლოდ სხვა სიბრტყეში.

**დამტკიცება.** მართლაც, სიბრტყის განტოლებას მთავარ ღერძებში აღწერს შემდეგი განტოლება:

$$ax_1^0 + bx_2^0 + cx_3^0 + d = 0. \quad (4.40)$$

წრფივი დეფორმაციის შემდეგ ახალი კოორდინატები გამოისახება ძველით შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1^{0'} = x_1^0 + \varepsilon_{11}^0 x_1^0; \quad x_2^{0'} = x_2^0 + \varepsilon_{22}^0 x_2^0; \quad x_3^{0'} = x_3^0 + \varepsilon_{33}^0 x_3^0. \quad (4.41)$$

მაშინ, დეფორმაციის შემდეგ წერტილთა კოორდინატები დააკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{a}{1+\varepsilon_{11}^0} x_1^{0'} + \frac{b}{1+\varepsilon_{22}^0} x_2^{0'} + \frac{c}{1+\varepsilon_{33}^0} x_3^{0'} + d = 0. \quad (4.42)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

**თეორემა 2.** ერთ წრფეზე მდებარე წერტილები, წრფივი დეფორმაციისას ისევ ერთ თუმცა სხვა წრფეზე გადალაგდებიან.

**თეორემა 3.** დეფორმაციამდე ორი პარალელური სიბრტყე, წრფივი დეფორმაციისას, ისევ პარალელურ სიბრტყეებად რჩებიან.

ამრიგად, წრფივი დეფორმაცია უჭიმად ღუნვას წარმოადგენს ანუ **ჰომეომორფიზმია**.

#### 4.2.5. ტემპერატურული დეფორმაცია

სხეულის დეფორმაცია ხდება არა მხოლოდ გარე ძალების ზემოქმედების შედეგად, არამედ, ტემპერატურის ცვლილების გამოც. ვთქვათ, უწყვეტი გარემოს განსახილველ ელემენტარულ მოცულობაში ტემპერატურა ერთნაირია ანუ ტემპერატურული ველი ერთგვაროვანია. ვთქვათ, საწყისი ტემპერატურა იყო  $T_0$ ; ხოლო ტემპერატურის ცვლილების შემდეგ, მისი ტემპერატურა გახდა  $T$  ანუ ტემპერატურის ცვლილებაა  $\Delta T = T - T_0$ . ელემენტის შიგნით ტემპერატურის ერთგვაროვნების გამო ტემპერატურული ძაბვები არ წარმოიქმნება და ხდება მხოლოდ ამ მოცულობის ტემპერატურული გაფართოება ან შეკუმშვა. თუ ტემპერატურის ფარდობითი ცვლილება მცირეა  $\left| \frac{\Delta T}{T_0} \right| \ll 1$ ; მაშინ მოცულობის ელემენტის დეფორმაცია შეგვიძლია ჩავთვალოთ ტემპერატურის პროპორციულად ანუ

$$du_i^T = \varepsilon_{ik}^T dx_k; \quad \varepsilon_{ik}^T = \alpha_{ik} \Delta T. \quad (4.43)$$

ფარდობითი დეფორმაციის ტენზორის როლს ასრულებს  $\varepsilon_{ik}^T$ ; რომელსაც სითბური გაფართოების ტენზორს უწოდებენ.  $\alpha_{ik}$  კოეფიციენტებს, წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებს უწოდებენ. შესაბამისად, სითბური დეფორმაცია ხდება მობრუნების გარეშე და ის იწვევს სითბურ გაფართოება-შეკუმშვას დეფორმაციის მთავარი ღერძების მიმართულებით.

მთავარ ღერძებში  $\alpha_{ik}$  სითბური გაფართოების ტენზორის მატრიცას აქვს დიაგონალური სახე:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33}^0 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

თუ სხეული იზოტროპულია, მაშინ  $\alpha_{11}^0 = \alpha_{22}^0 = \alpha_{33}^0 = \alpha$  მაშინ მასალის ელემენტში სფერო გადადის ისევ სფეროში.

იზოტროპული მასალისათვის სითბური გაფართოების ტენზორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varepsilon_{ik}^T = \alpha \delta_{ik} \Delta T. \quad (4.45)$$

ფარდობითი დეფორმაციის ვექტორის კომპონენტებისათვის გვექნება განტოლებები:

$$du_i = \alpha \Delta T dx_i. \quad (4.46)$$

ამრიგად, ნებისმიერი  $l$  სიგრძის მონაკვეთისათვის გვექნება:

$$\Delta l = \alpha \Delta T l. \quad (4.47)$$

შესაბამისად, მოცულობის ფარდობითი ცვლილება სითბური დეფორმაციისას იქნება:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{ii}^T = \alpha \delta_{ii} \Delta T = 3\alpha \Delta T. \quad (4.48)$$

$\beta = 3\alpha$  მოცულობითი გაფართოების კოეფიციენტი.

#### 4.2.6. დეფორმაციის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად

დეფორმაციის  $\varepsilon_{ij}$  ტენზორი მეორე რანგის სიმეტრიული ტენზორია. შესაბამისად, მისი სფერული ნაწილი იქნება:

$$(\varepsilon_M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_M & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_M & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_M \end{pmatrix}; \quad (4.49)$$

$$\text{სადაც } \varepsilon_M = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}.$$

შესაბამისად, დეფორმაციის ტენზორი დაიშლება სფერული და დევიატორული ნაწილების ჯამის სახით:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_M \delta_{ij} + d_{ij}. \quad (4.50)$$

### 4.3. დეფორმაციათა თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები

თუ მოცემული გვაქვს დეფორმაციის ტენზორის ცხადი სახის დამოკიდებულება გადაადგილების კომპონენტებზე, მაშინ მოცემული ექვსი დამოუკიდებელი განტოლებიდან:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (4.51)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის საშუალებით, უნდა ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორის სამი კომპონენტი. სისტემა განუსაზღვრელია და საზოგადოდ, მას ყოველთვის როდი აქვს ამონახსნი. ყველაფერი დამოკიდებულია დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებზე. მაშასადამე, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები გარკვეულ დამატებით პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ, რომ არსებობდეს ერთადერთი ამონახსნი გადაადგილებების მიმართ.

**თეორემა.** იმისათვის რომ (4.51) განტოლებიდან, არსებობდეს გადაადგილების ვექტორისთვის ერთადერთი ამონახსნი, აუცილებელია და ცალადბმული არისათვის საკმარისიც, რომ დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებდნენ სენ-ვენანის შემდეგ პირობებს:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_k} = 0. \quad (4.52)$$

აქ გვაქვს 81 განტოლება საიდანაც, მხოლოდ ექვსია დამოუკიდებელი.

ამ ექვს დამოუკიდებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (4.58)$$

#### 4.4. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განმსაზღვრელი პარამეტრები. მატერიალური წარმოებულები

როგორც უკვე ვიცით, უწყვეტი გარემოს მოძრაობა შეგვიძლია აღვწეროთ მატერიალურ (ლაგრანჟის) კოორდინატებში:

$$x_i = x_i(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t); \quad (4.59)$$

ან, ამოვხსნათ ეილერის სივრცული კოორდინატების მიმართ:

$$\xi_i = \xi_i(x_1; x_2; x_3; t). \quad (4.60)$$

(4.60) შებრუნებული ფორმულების არსებობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავდებოდეს ნულისაგან ანუ

$$I = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| \neq 0. \quad (4.61)$$

თუ მოცემული გვაქვს უწყვეტი გარემოს რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრი ლაგრანჟის კოორდინატებში, მაგალითად სიმკვრივე  $\rho$ ,

$$\rho = \rho(\xi_1; \xi_2; \xi_3; t), \quad (4.62)$$

მაშინ, მისი გამოსახვისათვის ეილერის კოორდინატებში, საკმარისია (4.60) ფორმულებიდან ჩავსვათ კოორდინატების შესაბამისი გამოსახულებები და მაშინ სიმკვრივე იქნება:

$$\rho = \rho(\xi_1(x_1; x_2; x_3; t); \xi_2(x_1; x_2; x_3; t); \xi_3(x_1; x_2; x_3; t); t). \quad (4.63)$$

ინდივიდუალურ ნაწილაკში ნებისმიერი თვისების ცვლილების სიჩქარეს, ამ თვისების მატერიალურ (ინდივიდუალურ) წარმოებულს უწოდებენ დროით ანუ ეს სიჩქარეა ნაწილაკთან ერთად მოძრავ კოორდინატთა სისტემაში. ნაწილაკის მყისიერი კოორდინატა  $x_i$  შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ნაწილაკის თვისება. ნაწილაკის მყისიერი კოორდინატის დროით წარმოებულს მხისიერ შიჩქარეს უწოდებენ. ამრიგად, ნაწილაკის მყისიერი სიჩქარე იქნება;

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i. \quad (4.64)$$

საზოგადოდ, თუ  $A_{ij...}$  არის უწყვეტი გარემოს რაიმე სკალარული, ვექტორული ან ტენზორული მახასიათებელი რიმელიც ლოკალურ ლაგრანჟის ცვლადებში შეიძლება დწერილ იქნას შემდეგი ფორმულით :

$$A_{ij...} = A_{ij...}(\xi; t); \quad (4.65)$$

მაშინ ამ სიდიდის ინდივიდუალური (ლაგრანჟის, მატერიალური) წარმოებული დროით, იქნება:

$$\frac{dA_{ij...}}{dt} = \frac{\partial A_{ij...}(\xi; t)}{\partial t}. \quad (4.66)$$

თუ, რომელიმე თვისება მოცემულია სივრცულ (ეილერის) კოორდინატებში,

$$A_{ij...} = A_{ij...}(\mathbf{x}; t); \quad (4.67)$$

მაშინ მისი მატერიალური წარმოებული გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{dA_{ij...}(\mathbf{x}; t)}{dt} = \frac{\partial A_{ij...}(\mathbf{x}; t)}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij...}(\mathbf{x}; t)}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}. \quad (4.68)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილის მეორე წევრს კონვექტიურ წევრს უწოდებენ, რადგან ის გამოწვეულია მოცემული თვისების ველში ნაწილაკის მოძრაობით. თუ გავითვალისწინებთ (4.64) ფორმულას, მაშინ (4.68) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{dA_{ij...}(\mathbf{x}; t)}{dt} = \frac{\partial A_{ij...}(\mathbf{x}; t)}{\partial t} + \frac{\partial A_{ij...}(\mathbf{x}; t)}{\partial x_k} v_k. \quad (4.69)$$

ამ (4.69) ფორმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შემოვიღოთ მატერიალური წარმოებულის ოპერატორი შემდეგი სახით:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad (4.70)$$

რომელიც გამოიყენება სივრცულ (ეილერის) ცვლადებში მოცემული, განმსაზღვრელი პარამეტრების ინდივიდუალური წარმოებულის გამოსათვლელად დროით.

თუ, მოცემული გვაქვს კავშირი სივრცულ და ლაგრანჟის კოორდინატებს შორის  $u_i$  გადაადგილების საშუალებით:  $x_k = u_k + \xi_k$ ; მაშინ სიჩქარე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{du_i}{dt}; \quad (4.71)$$

რადგან  $\xi_k$  ლაგრანჟის კოორდინატებში არაა დამოკიდებული დროზე.

თუ გადაადგილება მოცემულია ეილერის კოორდინატებში:

$$u_i = u_i(\mathbf{x}, t); \quad (4.72)$$

მაშინ სიჩქარე იქნება:

$$v_i(\mathbf{x}, t) = \frac{du_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}. \quad (4.73)$$

ამ ფორმულაში სიჩქარე გამოსახულია არაცხადი სახით.

$v_i = v_i(\mathbf{x}, t)$  გამოსახავს სიჩქარეთა ვექტორულ ველს. სიჩქარის წარმოებულს დროით  $\mathbf{a}$  აჩქარება ეწოდება. ლაგრანჟის კოორდინატებში აცქარება იქნება:

$$a_i = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i(\xi; t)}{\partial t}. \quad (4.74)$$

ეილერის (სივრცულ) კოორდინატებში, აჩქარება გამოისახება შემდეგი ფორმულით:

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k}. \quad (4.75)$$

**განსაზღვრება.** წირს რომელსაც შემოწერს სივრცეში მოძრავი ნაწილაკი ტრაექტორია ეწოდება.



განსაზღვრება. წირებს რომლის ყოველ წერტილშიც, სიჩქარის ვექტორს მხების მიმართულება აქვს დენის წირები ეწოდებათ.

განსაზღვრება. უწყვეტი გარემოს მოძრაობას ეწოდება დამყარებული (სტაციონარული), თუ სიჩქარეთა ველი არაა დამოკიდებული დროზე ანუ  $\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} = 0$ .

დამყარებული დინებისას, დენის წირები და ტრაექტორია ერთმანეთს ემთხვევა.

#### 4.4.1. დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი და გრიგალი

მყისიერ სიჩქარეთა ველის, სივრცული გრადიენტი იძლევა სიჩქარეთა ველის გრადიენტის ტენზორს  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ . ეს ტენზორი შეგვიძლია დავშალოთ სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ ნაწილებად:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}. \quad (4.76)$$

სიმეტრიულ  $\dot{\epsilon}_{ij}$  ტენზორს, დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს უწოდებენ, ხოლო ანტისიმეტრიულ  $\dot{\omega}_{ij}$  ტენზორს კი - გრიგალის ტენზორს.

დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის დიაგონალური ელემენტები შეესაბამება მთავარი ღერძების მიმართულებით გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციების ცვლილების სიჩქარეს, ხოლო მისი არადიაგონალური წევრები, აღწერს ძვრის დეფორმაციების ცვლილების სიჩქარეებს ანუ მთავარი ღერძების საწყისი მართი კუთხეების ცვლილების სიჩქარეს.

რაც შეეხება გრიგალის ტენზორს, ის აღწერს ნაწილაკის „მყარი მობრუნების“ სიჩქარეს. გრიგალის ტენზორთან ასოცირებულ ვექტორს

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} v_{k,j}; \quad (4.77)$$

სიჩქარის გრიგალის ვექტორი ეწოდება ანუ  $\Omega = \frac{1}{2} rot v$ .

#### 4.4.2. მოცულობითი ინტეგრალის წარმოებული დროით, როცა ინტეგრების მოცულობა დროის ფუნქციაა

უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში ხშირად გამოიყენება ინდივიდუალური მოცულობის ცნება ანუ ისეთი მოცულობის, რომლის შემადგენელი ნაწილაკები არ იცვლება. ასეთი მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირის გამჭოლი ნივთიერების ნაკადი ნულის ტოლია; თუმცა მოძრაობისას მისი მოცულობა და ფორმა იცვლება - დეფორმირდება.

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე  $f(\mathbf{r}; t)$  ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია სივრცით კოორდინატებზე და დროზე. განვიხილოთ ამ ფუნქციიდან ინტეგრალის, დროის მიხედვით წარმოებული როცა ინტეგრების მოცულობა  $V(t)$  დროზეა დამოკიდებული:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}; t) dV = \int_V \left( \frac{df}{dt} dV + f \frac{d}{dt} dV \right). \quad (4.78)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ დეკარტულ კოორდინატებში მოცულობა მოიცემა შემდეგი ფორმულით :

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3; \quad (4.79)$$

მაშინ, ადვილად გარდავექმნით ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრს:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} dV &= d \frac{dx_1}{dt} dx_2 dx_3 + d \frac{dx_2}{dt} dx_1 dx_3 + d \frac{dx_3}{dt} dx_2 dx_1 = \\ &= dv_1 dx_2 dx_3 + dv_2 dx_1 dx_3 + dv_3 dx_2 dx_1 = \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV. \end{aligned} \quad (4.80)$$

მაშინ (4.78) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}; t) dV = \int_V \left( \frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (4.81)$$

ეს ფორმულა ნათლად გვიჩვენებს, თუ როგორ უნდა ვიპოვოთ მატერიალური წარმოებული დროით, მოცულობითი ინტეგრალიდან, როცა ინტეგრების მოცულობა განიცდის დეფორმაციას.

ამოცანები ამოხსნებით.

1. მოცემულია მოძრაობის აღწერა სივრცულ კოორდინატებში (ეილერის):

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 e^t + \xi_3 (e^t - 1) \\ x_2 = \xi_3 (e^t - e^{-t}) + \xi_2; \\ x_3 = \xi_3 \end{cases} \quad (*)$$

დაამტკიცეთ, რომ ასეთი გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან და აღწერეთ მოძრაობა ლაგრანჟის ცვლადებში.

ამოხსნა. ამ გარდაქმნის იაკობიანს აქვს შემდეგი სახე:

$$I = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^t - 1 \\ 0 & 1 & e^t - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^t \neq 0. \quad \text{რ.დ.გ.} \quad \text{რადგან} \quad \text{იაკობიანი}$$

განსხვავებულია ნულისაგან, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ (\*) სისტემიდან ლაგრანჟის ცვლადები:

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 e^{-t} - x_3 (1 - e^{-t}) \\ \xi_2 = x_2 - x_3 (e^t - e^{-t}) \\ \xi_3 = x_3 \end{cases} .$$

2. მოცემულია სიჩქარეთა ველი: 
$$\begin{cases} v_1 = \frac{x_1}{1+t} \\ v_2 = \frac{2x_2}{1+t} \\ v_3 = \frac{3x_3}{1+t} \end{cases}$$
 იპოვეთ შესაბამის აჩქარებათა

ველი.

ამოხსნა.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{x_1}{1+t} \right) = \frac{d}{dt} (x_1) \frac{1}{1+t} + x_1 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = v_1 \frac{1}{1+t} + x_1 \left( -\frac{1}{(1+t)^2} \right) = \\ &= \frac{x_1}{(1+t)^2} - \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{2x_2}{1+t} \right) = \frac{d}{dt} (2x_2) \frac{1}{1+t} + 2x_2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = \\ &= 2v_2 \frac{1}{1+t} + 2x_2 \left( -\frac{1}{(1+t)^2} \right) = \\ &= \frac{4x_2}{(1+t)^2} - \frac{2x_2}{(1+t)^2} = \frac{2x_2}{(1+t)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{dv_3}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{3x_3}{1+t} \right) = \frac{d}{dt} (3x_3) \frac{1}{1+t} + 3x_3 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{1+t} \right) = \\
 &= 3v_3 \frac{1}{1+t} + 3x_3 \left( -\frac{1}{(1+t)^2} \right) = \\
 &= \frac{9x_3}{(1+t)^2} - \frac{3x_3}{(1+t)^2} = \frac{6x_3}{(1+t)^2}.
 \end{aligned}$$

3. დინება მოცემულია სიჩქარეთა შემდეგი ველით:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = A(x_1 x_2 - x_3^2) e^{-Bt} \\ v_3 = A(x_2^2 - x_1 x_3) e^{-Bt} \end{cases}$$

იპოვეთ ამ მოძრაობისთვის  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  გრადიენტი. გამოთვალეთ დეფორმაციის ტენზორისა და გრიგალის ტენზორის კომპონენტები დროის  $t = 0$  მომენტში  $P(1; 0; 3)$  წერტილში.

ამოხსნა.

$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix} A e^{-Bt}$ ; გამოვთვალოთ ეს ტენზორი დროის  $t = 0$  მომენტში  $P(1; 0; 3)$  წერტილში. მაშინ, ამ წერტილში გვექნება სიჩქარის გრადიენტის ველი:

$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix}$ . დავშალოთ ეს ტენზორი სიმეტრიულ (დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი) და ანტისიმეტრიულ (გრიგალის ტენზორი) ნაწილებად:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & -6A \\ -3A & 0 & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1.5A \\ 0 & A & -3A \\ -1.5A & -3A & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.5A \\ 0 & 0 & -3A \\ -1.5A & 3A & 0 \end{pmatrix}.$$

მაშასადამე, დეფორმაციის სიჩქარის  $\dot{\epsilon}_{ij}$  ტენზორის კომპონენტებია:

$$(\dot{\epsilon}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1.5A \\ 0 & A & -3A \\ -1.5A & -3A & -A \end{pmatrix}; \dot{\omega}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.5A \\ 0 & 0 & -3A \\ -1.5A & 3A & 0 \end{pmatrix}$$

ხოლო,  $\dot{\omega}_{ij}$  გრიგალის ტენზორის კომპონენტებია.

## V თავი. უწყვეტ გარემოთა დინამიკის ძირითადი კანონები

უწყვეტ გარემოთა დინამიკის მოდელირებისათვის გამოიყენება ხუთი ძირითადი კანონი: 1. მასის შენახვის კანონი; 2. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი (დინამიკის განტოლება); 3. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი; 4. ენერჯის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის პირველი კანონი); 5. ენტროპიის შენახვის კანონი (თერმოდინამიკის მეორე კანონი).

### 5.1. უწყვეტობის განტოლება

უწყვეტობის განტოლება გამოსახავს მასის მუდმივობის კანონს, უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის. მოძრავ გარემოში, გამოვყოთ რაიმე ინდივიდუალური  $V$  მოცულობა, რომლის შიგნით მოთავსებული  $\rho$  სიმკვრივის მასალის მასაა:

$$M = \int_V \rho dV. \quad (5.1)$$

ცხადია, რომ რადგან მოცულობის შემომსაზღვრელი ზედაპირის გამჭოლი მასის ნაკადი ნულის ტოლია (ინდივიდუალური მოცულობაა), მის შიგნით მოთავსებულის მასის სიდიდე არ იცვლება ანუ

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho dV \right) = 0. \quad (5.2)$$

თუ გამოვიყენებთ (4.81) ფორმულას, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\int_V \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (5.3)$$

რადგან, ეს განტოლება უნდა სრულდებოდეს უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის, ცხადია რომ აუცილებელია ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ნულთან ტოლობა ანუ

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.4)$$

ამ განტოლებას, უწყვეტობის განტოლებას უწოდებენ.

თუ გამოვიყენებთ (4.70) ფორმულას სიმკვრივის მატერიალური წარმოებულისათვის (5.4) ფორმულაში, მაშინ გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (5.5)$$

თუ დივერგენციას გადავწერთ ინდექსური აღნიშვნებით, მივიღებთ უწყვეტობის განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho v_{k,k} = 0. \quad (5.6)$$

ცხადია, რომ ეს განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (5.7)$$

ანუ შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (5.8)$$

თუ მოძრაობა დამყარებულია, მაშინ  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  და მუდმივი  $\rho$  სიმკვრივის პირობებში გვექნება  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  ანუ უკუმში უწყვეტი გარემო. უკუმში გარემოს სიჩქარეთა ველი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \varphi_{k,j} \quad (5.9)$$

ანუ  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}$ ; რაც იმას ნიშნავს რომ, უკუმში მასალების სიჩქარეთა ველს გააჩნია  $\boldsymbol{\varphi}$  ვექტორული პოტენციალი.

## 5.2. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი ემყარება ნიუტონის მეორე კანონს და ამბობს, რომ: უწყვეტი გარემოს რომელიმე ინდივიდუალური ნაწილის მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე უდრის გარემოს ამ ნაწილზე მოქმედი ყველა ძალების ჯამს.

ეს კანონი ინტეგრალური ფორმით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho v_i dV \right) = \int_S t_i^{(n)} ds + \int_V \rho b_i dV. \quad (5.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ ; მაშინ გაუსის თეორემის თანახმად გარდავქმნით ზედაპირულ ინტეგრალს მოცულობით ინტეგრალად ანუ (5.10) განტოლების მარჯვენა ნაწილი გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V \rho b_i dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV. \quad (5.11)$$

ეხლა გარდავქმნათ (5.10) განტოლების მარცხენა ნაწილი. თუ გამოვიყენებთ ფუნქციიდან ინტეგრალის, დროის მიხედვით წარმოებულის ფორმულას როცა ინტეგრების მოცულობა  $V(t)$  დროზეა დამოკიდებული (4.81), მივიღებთ რომ :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho v_i dV \right) = \int_V \left( \frac{d(\rho v_i)}{dt} + (\rho v_i) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad (5.12)$$

თუ მარჯვენა მხარის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გარდავქმნით და გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას, მაშინ გვექნება:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho v_i dV \right) = \int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} + v_i \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \right) dV = \int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dV. \quad (5.13)$$

თუ (5.13) და (5.11) მნიშვნელობებს შევიტანთ (5.10) განტოლებაში, გვექნება, რომ

$$\int_V \left( \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dV = \int_V (\sigma_{ji,j} + \rho b_i) dV. \quad (5.14)$$

თუ გადავიტანთ ერთ მხარეს და მოვაქცევთ ერთი მოცულობითი ინტეგრალის ქვეშ, მივირებთ რომ

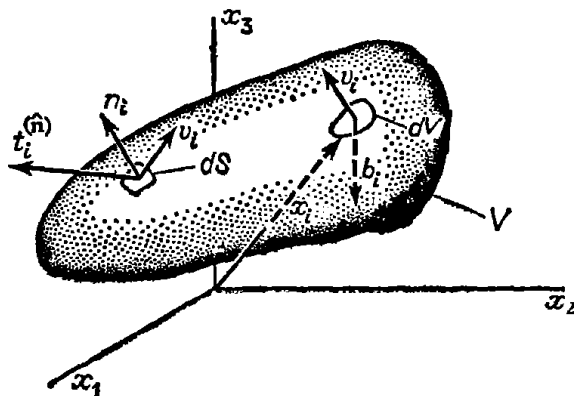
$$\int_V \left( \sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right) dV = 0. \quad (5.15)$$

რადგან ეს ტოლობა სამართლიანია უწყვეტი გარემოს ნებისმიერი ინდივიდუალური მოცულობისათვის, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს ნულის ტოლი და მაშასადამე, მივიღეთ დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (5.16)$$

### 5.3. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი გავუტოლოთ სხეულის მოძრაობის რაოდენობის ვექტორის მომენტს რაიმე არჩეული წერტილის მიმართ ნახ. 5.1.



ნახ. 5.1. უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტი

მაგალითად, ნახ. 5.1-ზე გამოსახული სხეულისათვის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები მომენტი კოორდინატა სათავის წერტილის მიმართ იქნება:

$$N_i(t) = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \text{ ანუ } \mathbf{N} = \int_V \rho (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dV; \quad (5.17)$$

სადაც  $x_j$  არის  $dV$  მოცულობის ელემენტის რადიუს-ვექტორი.

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი:

რაიმე წერტილის მიმართ, უწყვეტი გარემოს მოცულობის ელემენტის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების სიჩქარე უდრის მოცულობის ამ ელემენტზე მოქმედი ზედაპირული და მასური ძალების ნაკრებ მომენტს ანუ ინდექსურ აღნიშვნებში გვაქვს განტოლება

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^{(n)} dS + \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j b_k dV = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j v_k dV \right); \quad (5.18)$$

ან სიმბოლურ აღნიშვნებში, შემდეგი განტოლება:



$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}^{(n)} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \left( \int_V \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dV \right). \quad (5.19)$$

ეს განტოლებები ძალაშია მხოლოდ ისეთი მასალებისათვის, სადაც ნიუტონის მესამე კანონი მოქმედებს და განაწილებული მომენტები არ გვაქვს. ეს განტოლებები არ არიან დამოუკიდებელი. მაგალითად, თუ ვიცით რომ ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია, მაშინ ეს განტოლებები ემთხვევა დინამიკის განტოლებებს.

#### 5.4. ენერჯის შენახვის კანონი. თერმოდინამიკის პირველი კანონი

თუ საქმე გვაქვს მხოლოდ მექანიკურ პროცესებთან, მაშინ ენერჯის შენახვის კანონის მისაღებად, საჭიროა დინამიკის (5.16) განტოლებები სკალარულად გავამრავლოთ  $v_i$  ვექტორზე და შედეგიდან ავიღოთ მოცულობითი ინტეგრალი ანუ ჩავწეროთ განტოლება:

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \int_V v_i \sigma_{ji,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.20)$$

ინტეგრალი მარცხენა მხარეში წარმოადგენს კინეტიკური ენერჯის ცვლილების სიჩქარეს, მართლაც

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{\rho v_i v_i}{2} dV \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV \right) = \frac{dK}{dt}. \quad (5.21)$$

შევნიშნავთ, რომ  $v_i \sigma_{ji,j} = (v_i \sigma_{ji})_{,j} - v_{i,j} \sigma_{ji}$ . ამას გარდა,  $v_{i,j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}$  და  $\dot{\omega}_{ij} \sigma_{ij} = 0$ . მაშინ (5.20) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{dK}{dt} + \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_V (v_i \sigma_{ji})_{,j} dV + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.22)$$

თუ გავიხსენებთ, რომ  $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  და (5.22) ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველ ინტეგრალს გარდავქმნით ზედაპირულ ინტეგრალად გაუსის თეორემით, მივიღებთ თერმოდინამიკის პირველ კანონს:

$$\frac{dK}{dt} + \int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV = \int_S v_i t_i^{(n)} dS + \int_V \rho v_i b_i dV. \quad (5.23)$$

ამრიგად, უწყვეტი გარემოს მთლიანი მექანიკური ენერჯის ცვლილების სიჩქარე უდრის ზედაპირული და მასური ძალების ჯამურ სიმძლავრეს.

$\int_V \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ji} dV$  ინტეგრალს შინაგანი მექანიკური ენერჯიის ცვლილების სიჩქარეს უწოდებენ.

თერმომექანიკური უწყვეტი გარემოსათვის  $U$  შინაგანი ენერჯიის ცვლილების სიჩქარეს გამოხატავენ ფორმულით:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_V \rho u dV \right) = \int_V \rho \dot{u} dV; \quad (5.24)$$

სადაც  $u$ -ს, კუთრ შინაგან ენერჯიას უწოდებენ.

ვთქვათ  $c_i$  ახასიათებს დროის ერთეულში სითბურ ნაკადს, ფართის ერთეულში სითბოგამტარობის გამო, ხოლო  $z$  დროის ერთეულში, მასის ერთეულიდან გამოსხივებული სითბური მუდმივია. მაშინ უწყვეტ გარემოზე სითბოს მიწოდების სიჩქარე იქნება:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S c_i n_i dS + \int_V \rho z dV. \quad (5.25)$$

თერმომექანიკური კონტინუუმის ენერჯიის ცვლილების კანონი ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta W}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}. \quad (5.26)$$

თუ ამ ფორმულაში ყველა სიდიდეს გამოვსახავთ შესაბამისი ინტეგრალებით და გამოვიყენებთ გაუსის ფორმულას, მივიღებთ რომ

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z. \quad (5.27)$$

ეს განტოლება ამბობს, რომ შინაგანი ენერჯიის ცვლილების სიჩქარე უდრის, ძაბვის სიმძლავრისა და უწყვეტ გარემოზე გადაცემული სითბური ნაკადის ჯამს.

## 5.5. თერმოდინამიკის მეორე კანონი. ენტროპია. კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა

მდგომარეობის პარამეტრების ცვლილებისას, ადგილი აქვს თერმოდინამიკულ პროცესს. თერმოდინამიკული მდგომარეობის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის კავშირს ამყარებს მდგომარეობის განტოლება. ნებისმიერ პარამეტრს, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება

მდგომარეობის სხვა პარამეტრების საშუალებით მდგომარეობის ფუნქცია ეწოდება.

როგორც უკვე ვნახეთ, თერმოდინამიკის პირველი კანონი პოსტულირებს მექანიკური და სითბური ენერჯიის ერთმანეთში გადასვლის შესაძლებლობას. თუმცა, თერმოდინამიკის პირველი კანონი, ღიად ტოვებს საკითხს: **შეუქცევადია თერმოდინამიკული პროცესი, თუ არა ?** ყველა რეალური პროცესი შეუქცევადია, თუმცა, ზოგჯერ ენერჯიის დისიპაციის პროცესი იმდენად მცირეა, რომ პროცესი შეგვიძლია ჩავთვალოთ შექცევადად. შეუქცევადობის ძირითადი პრინციპი პოსტულირებულია თერმოდინამიკის მეორე კანონში, რომელიც აწესებს შეზღუდვას ენტროპიაზე.

თერმოდინამიკის მეორე კანონი პოსტულირებს **ორი მდგომარეობის ფუნქციის არსებობას**. ესენია  $T$  აბსოლუტური ტემპერატურა და  $s$  ენტროპია.

აბსოლუტური ტემპერატურა დადებითი სიდიდეა, რომელიც წარმოადგენს მხოლოდ ემპირიული ტემპერატურის ფუნქციას.

ენტროპია ადიტიური ფუნქციაა ანუ სისტემის ენტროპია, მისი შემადგენელი ნაწილების ენტროპიების ჯამის ტოლია. უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში განიხილავენ კუთრ  $s$  ენტროპიას(მასის ერთეულზე), ამიტომ სისტემის მთლიანი  $S$  ენტროპია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$S = \int_V \rho s dV. \quad (5.28)$$

ენტროპია შეიძლება შეიცვალოს გარე სამყაროსთან ურთიერთქმედებით ან უწყვეტი გარემოს შიგნით მიმდინარე პროცესების გამო. ამიტომ წერენ, რომ

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}; \quad (5.29)$$

სადაც  $ds^{(e)}$  არის ენტროპიის გარე სამყაროსთან ურთიერთობის შედეგად მიღებული ცვლილება, ხოლო  $ds^{(i)}$  დაკავშირებულია სისტემის შიდა პროცესებთან. პოსტულირდება, რომ  $ds^{(i)} \geq 0$ ; ტოლობას აქვს ადგილი მხოლოდ შექცევადი პროცესებისათვის.

თუ შექცევადი პროცესისას, უწყვეტი გარემოს მასის ერთეულზე მოსულ სითბოს რაოდენობას აღვნიშნავთ  $dq$  -თი, მაშინ

$$ds^{(e)} = \frac{dq}{T}. \quad (5.30)$$

თერმოდინამიკის მეორე კანონი:

მოცემული  $V$  მოცულობის უწყვეტი გარემოს სრული ენტროპიის ცვლილების სიჩქარე, არ შეიძლება იყოს ნაკლები, ვიდრე მოცულობის საზღვარზე გავლით შემოსული ენტროპიისა და მოცულობის შიგნით გარე წყაროების ზემოქმედებით წარმოქმნილი ენტროპიების ჯამისა.

ეს კანონი აღიწერება კლაუზიუს-დიუგემის შემდეგი უტოლობით:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_V \rho s dV \right) \geq \int_V \rho e dV - \int_S \frac{c_i n_i}{T} dS; \quad (5.31)$$

სადაც  $e$  ენტროპიის გარე წყაროების სიმძლავრეა, მოსული მასის ერთეულზე.

ეს უტოლობა ძალაშია ნებისმიერი  $V$  მოცულობისათვის, ამიტომ, თუ ზედაპირულ ინტეგრალს გარდავქმნით მოცულობით ინტეგრალად, შეგვიძლია ჩავწეროთ კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა ლოკალური ფორმით:

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left( \frac{c_i}{T} \right)_{,i} \geq 0. \quad (5.32)$$

## 5.6. უწყვეტი გარემოს დინამიკის განმსაზღვრელი ძირითადი განტოლებების შესახებ

ჩვენ უკვე გამოვიყვანეთ უწყვეტ გარემოთა დინამიკის ძირითადი განტოლებები, რომლებიც სრულდება ნებისმიერი თერმოდინამიკური უწყვეტი მასალებისათვის. ეხლა ჩამოვაცალიბოთ ერთად, ყველა ეს განტოლება და დავსახოთ მათემატიკური მოდელირების შემდგომი ეტაპები.

ა) უწყვეტობის განტოლება:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)_{,i} = 0; \quad (5.33)$$

ბ) დინამიკის განტოლებები კოშის ფორმით:

$$\sigma_{j,i,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i; \quad (5.34)$$

გ) ენერჯიის განტოლება:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z. \quad (5.35)$$

თუ დავუშვებთ, რომ  $b_i$  მასური ძალები და  $z$  სითბოს განაწილებული წყაროები ცნობილია, მაშინ (5.33)-(5.35) ხუთი განტოლება შეიცავს თოთხმეტ უცნობ ფუნქციას, რომლებიც დამოკიდებული არიან სივრცით კოორდინატებზე და დროზე.

უცნობებია:  $\rho$  სიმკვრივე, სიჩქარის სამი  $v_i$  მდგენელი (ან გადაადგილების ვექტორის სამი კომპონენტი),  $\sigma_{ij}$  სიმეტრიული ძაბვის ტენზორის ექვსი კომპონენტი, სითბური ნაკადის ვექტორის სამი  $c_i$  მდგენელი და  $u$  შინაგანი ენერჯიის სიმკვრივე.

ამასთან ერთად, უნდა სრულდებოდეს კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა ენტროპიის არაუარყოფითობის შესახებ:

$$\frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left( \frac{c_i}{T} \right)_{,i} \geq 0. \quad (5.36)$$

ეს უტოლობა გვიმატებს კიდევ ორ უცნობს: ენტროპიის  $s$  სიმკვრივე და  $T$  აბსოლუტური ტემპერატურა.

მაშასადამე, უკვე გვაქვს 16 უცნობი და 5 განტოლება, რაც იმას ნიშნავს რომ სისტემის ჩასაკეტად საჭიროა, კიდევ 11 განტოლება. 6 მათგანი იქნება განმსაზღვრელი განტოლებები, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სისტემის ფიზიკურ თვისებებს. დარჩენილი 5 განტოლებიდან 3 იქნება სითბოგამტარობის დამახასიათებელი, ხოლო 2 თერმოდინამიკური მდგომარეობის დამახასიათებელი (კალორიული განტოლება, ენტროპიის განტოლება).

განმსაზღვრელი განტოლებები ამყარებენ კავშირს მასალის კინემატიკურ, თერმოდინამიკურ და სტატიკურ პარამეტრებს შორის,

რომლებიც აღწერს მასალის რეაქციას მექანიკურ და თერმოდინამიკურ ზემოქმედებაზე. რეალური მასალები სხვადასხვა ტიპის ზემოქმედებისას რთულად რეაგირებენ და შეუძლებელია ყველა შესაძლო სიტუაციის ზედმიწევნით გადმოცემა. აქედან გამომდინარე, პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად, ადგენენ გარკვეულ იდეალიზირებულ მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც მოქმედებენ გარკვეული ძაბვებისა და ტემპერატურების დიაპაზონში, რაც საშუალებას იძლევა შესწავლილი იქნას რთული პროცესები.

იზოთერმული პროცესების შესწავლისას, ტემპერატურა მუდმივია და მაშინ ამოცანა სრულად მექანიკური ხდება.

განმსაზღვრელი განტოლებების დასადგენად, იყენებენ ფიზიკურ ექსპერიმენტებს და ექსპერიმენტების შედეგების სტატისტიკური დამუშავების მეთოდებს.

### **5.6.1. გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება. წრფივი და არაწრფივი რეგრესია. ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე**

გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, საშუალებას გვაძლევს ოპტიმალურად მივუახლოვდეთ ექსპერიმენტების შედეგად მიღებულ წერტილებს და ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც „საუკეთესო“ იქნება ყველა სხვა წირთან შედარებით წინასწარ არჩეულ ფუნქციათა კლასში. ფუნქციათა კლასის შერჩევა ხდება ექსპერიმენტული წერტილების სიბრტყეზე დატანის სურათიდან გამომდინარე. თუ, ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული წერტილები თავს იყრის გარკვეული წრფის მახლობლობაში, მაშინ საძიებელ ფუნქციათა კლასი იქნება წრფივი  $y = a \cdot x + b$  ფუნქციათა სიმრავლე და მაშინ, მისი პოვნის მეთოდს წრფივ რეგრესიას უწოდებენ; ხოლო, თუ საძიებელ  $f(x)$  ფუნქციათა კლასი არაწრფივია, მაშინ მისი პოვნის მეთოდს არაწრფივ რეგრესიას უწოდებენ.

განვიხილოთ წრფივი რეგრესიის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი დეტალურად.

**ამოცანა.** ვთქვათ გვაქვს რაიმე სიდიდის გაზომვის ექსპერიმენტული შედეგები მოცემული ცხრილით:

X	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	..	X <sub>n</sub>
y	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	..	y <sub>n</sub>

სამიებელი გვაქვს ანალიზური დამოკიდებულება  $y = f(x) = ax + b$

**ამოხსნა:** ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ყოველი  $(x_i, y_i)$  ექსპერიმენტული წერტილისათვის განიხილავენ  $r_i$  გადახრას თეორიულ (წრფივი ფუნქციის)  $f(x_i) = ax_i + b$  მნიშვნელობასა და შესაბამის ექსპერიმენტულ  $y_i$  მნიშვნელობას შორის:

$$r_i = ax_i + b - y_i. \quad (5.37)$$

გაუსის კრიტერიუმის თანახმად, საუკეთესოდ ითვლება ის  $f(x) = ax + b$  მიახლოება, რომლის დროსაც გადახრების კვადრატების ჯამი იქნება უმცირესი ანუ ვეძებთ  $a$  და  $b$  კოეფიციენტების ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც მინიმალურია შემდეგი ჯამი:

$$G(a, b) = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2. \quad (5.38)$$

როგორც ვხედავთ წრფივი რეგრესიის ამოცანა დაიყვანება მრავალი ცვლადის  $G(a, b)$  ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე.

როგორც ვიცით, ურუცნობიანი ფუნქციის მინიმუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა ფერმას თეორემა. აქედან გამომდინარე, ექსტრემუმის წერტილის საპოვნელად, გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

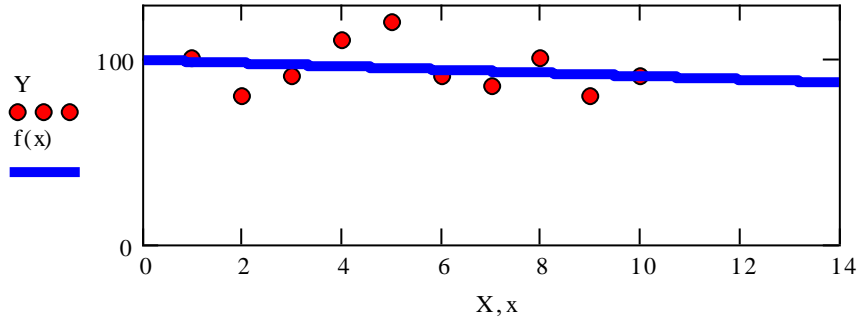
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1^2}{\partial a} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial G_1^2}{\partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.39)$$

სისტემა (5.39) ადვილიად გარდაიქმნება წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემად:

$$\left\{ \begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n X_i &= \sum_{i=1}^n X_i y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b \cdot n &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \right. \quad (5.40)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გვაძლევს მინიმუმის წერტილს  $(a_{\min}, b_{\min})$  და მაშასადამე, ერთობლიობაში საუკეთესო  $f(x) = ax + b$  მიახლოებას ექსპერიმენტების შედეგად მიღებულ ცხრილთან.

გრაფიკულად, გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგნაირად:



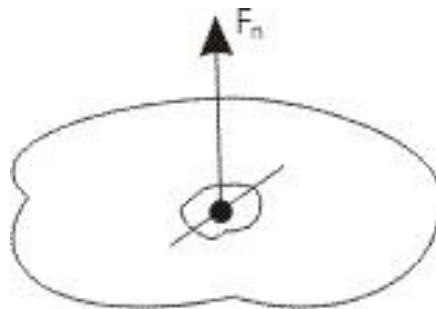
ნახ. 5.1. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი

უწყვეტი წრფე იძლევა ერთობლიობაში, ექსპერიმენტების წერტილების საუკეთესო მიახლოებას.

### 5.6.2. დამოკიდებულება ძელის გაჭიმვისას ძაბვებსა და მცირე დეფორმაციებს შორის (ჰუკის კანონი)

**განსაზღვრება:** მექანიკური ძაბვა  $\sigma$  არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის  $\vec{n}$  ნორმალის მიმართულებით  $S$  ფართის ერთეულზე მოქმედი  $F_n$  ძალის სიდიდით.

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \tag{5.41}$$

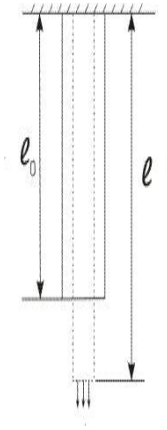


ნახ. 5.2. მექანიკური ძაბვა

**განსაზღვრება:** ძელის ფარდობით  $\epsilon$  წაგრძელებას დეფორმაციას უწოდებენ. ძელის გაჭიმვის დეფორმაცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:



$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}. \quad (5.42)$$



ნახ. 5.3. ძელის დეფორმაცია

როგორც ვიცით, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ( $\varepsilon \ll 1$ ) დრეკადი სხულების უმრავლესობა ემორჩილება ჰუკის წრფივ კანონს, რომელსაც აქვს შემდეგი ფორმა.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (5.43)$$

სადაც  $E$  იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან დეფორმაციას ანუ საწყისი სიგრძის გაორმაგებას:

$$\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0. \quad (5.44)$$

ჰუკის კანონს, ზოგჯერ წერენ დეტალურადაც, შემდეგი ფორმით:

$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l-l_0}{S}. \quad (5.45)$$

ეხლა, წრფივი რეგრესიის მეთოდიდან გამომდინარე, დავადგინოთ ჰუკის კანონის სახე მოცემული მასალისათვის, თუ, მოცემული გვაქვს ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის, კავშირის დადგენისათვის ჩატარებული ექსპერიმენტების შედეგები ცხრილი 5.1.

ცხრილი 5.1

$\sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$\varepsilon$	0.0	0.001	0.0015	0.002	0.003	0.0036	0.004	0.005	0.0057	0.007

შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე და დავადგინოთ  $\sigma = f(\varepsilon)$  კავშირი, წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ ვეძებთ  $f$  ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, საძიებელ სიდიდეებს შორის ანალიზური დამოკიდებულებისათვის ცხრილი 5.1-დან გამომდინარე ისე, რომ ვეძებთ ეს დამოკიდებულება წრფივ  $\sigma = f(\varepsilon) = a\varepsilon + b$  ფუნქციათა შორის.

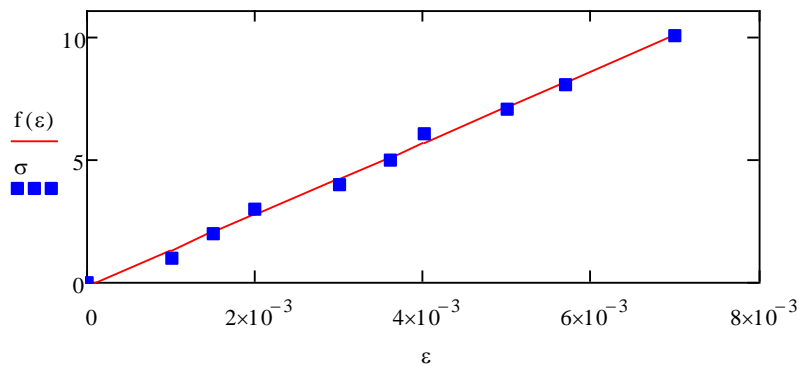
$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0.0015 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.0036 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.0057 \\ 0.007 \end{pmatrix} \quad \sigma := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$b := \text{intercept}(\varepsilon, \sigma)$$

$$b = -0.138$$

$$a := \text{slope}(\varepsilon, \sigma) \quad a = 1444.374$$

$$f(\varepsilon) := a \cdot \varepsilon + b$$



ნახ. 5.4. ჰუკის კანონი ექსპერიმენტში გამოკვლეული მასალისათვის. უწყვეტი წირი შეესაბამება თეორიულ მრუდს, ხოლო დისკრეტულად გაზნეული წერტილები - ექსპერიმენტების შედეგებს

ამ გათვლებიდან გამომდინარე, ჰუკის კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma = 1444.4\varepsilon - 0.1. \quad (5.46)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ 0.1 მცირე სიდიდეა ძაბვის სხვა მნიშვნელობებთან შედარებით, მაშინ შეგვიძლია მოცემული სიზუსტის ფარგლებში ის უგულებელვყოთ და მივიღოთ ჰუკის კანონი  $\sigma = 1444.4\varepsilon$  სახით. მაშინ ჩვენი მონაცემებიდან გამომდინარე, გვექნება რომ იუნგის მოდული იმ მასალისათვის, რომლისგანაცაა დამზადებული ექსპერიმენტში განხილული ძელი უდრის  $E = 1444.4\text{ნ/მ}^2$ .

ეხლა, ექსპერიმენტის მონაცემებიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ იუნგის მოდულის მნიშვნელობა  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  სტატისტიკური მეთოდით. ცხრილი 5.1-დან გამომდინარე გვექნება შემდეგი ცხრილი 5.2:

ცხრილი 5.2

$\sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$\varepsilon$	0.0	0.001	0.0015	0.002	0.003	0.0036	0.004	0.005	0.0057	0.007
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	-	1000	1333.3	1500	1333.3	1388.9	1500	1400	1403.5	1428.6

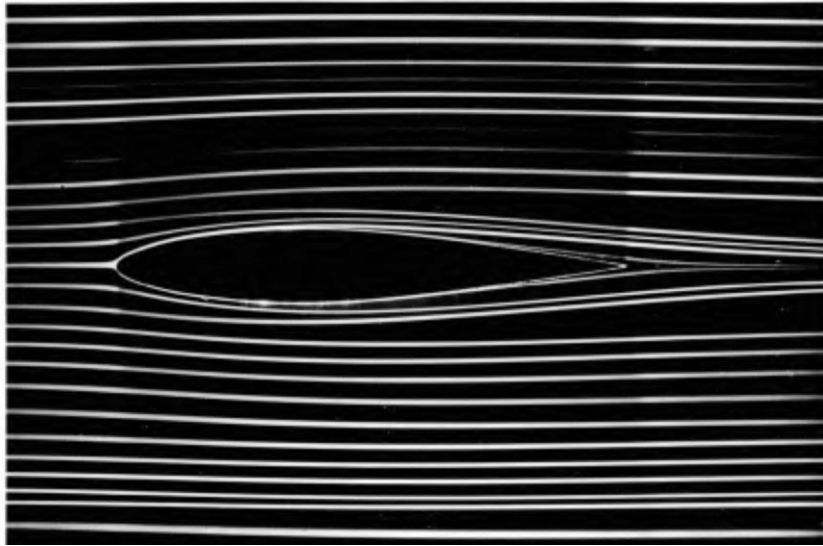
ვპოულობთ იუნგის მოდულის საშუალო მნიშვნელობას და საშუალო კვადრატულ გადახრას, რაც საშუალებას გვაძლევს ჩავწეროთ, რომ  $E = 1228.8 \pm 431\text{ნ/მ}^2$ . ასე რომ, წრფივი რეგრესიით მიღებული მნიშვნელობა  $E = 1444.4\text{ნ/მ}^2$  ეკუთვნის სტატისტიკური მეთოდით მიღებულ შუალედს  $(1228.8 - 431; 1228 + 431)$  ანუ  $1444.4 \in (797; 1659)$ .

### 5.6.3. სიჩქარის ეპიურის აგება ნიუტონური სითხეებისათვის

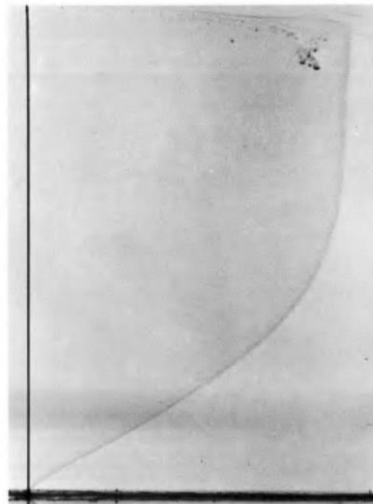
დრეკადობის ჰუკის კანონის ანალოგიურად, ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს წრფივი დამოკიდებულება სითხის სიჩქარესა და საყრდენი კედლიდან მანძილს შორის. ბლანტი, ნიუტონური სითხეები (წყალი, ნავთი, ზეთი, ბენზინი, . . .) კედელს ეკვრიან სიბლანტის გამო და რაც უფრო შორდებიან კედელს, მით უფრო იზრდება ლამინარული (ფენები არ ერევა ერთმანეთს ნახ. 5.5) ნაკადის სასაზღვრო ფენის მოძრაობის სიჩქარეც ნახ. 5.6.

**განსაზღვრება.** ლამინარული ეწოდება სითხის ისეთ დინებას, როცა ფენა ფენას მიჰყვება და არ ხდება ფენების ერთმანეთში არევა.

**განსაზღვრება.** სასაზღვრო ფენი ეწოდება კედლისა და სითხის შეხების ზონაში თხელ ფენას, სადაც სიბლანტეს გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს სიჩქარეთა ველის განაწილებაზე.



ნახ. 5.5. ფრთის პროფილის ლამინარული გარსდენის სურათი



ნახ. 5.6. სიჩქარეთა ველის ეპიურა ფირფიტის სასაზღვრო ფენში

როგორც ნახ. 5.6-დან ჩანს, კედლის (ფირფიტის) მახლობლობაში (ლამინარულ სასაზღვრო ფენში) სიჩქარე წრფივად იზრდება, ხოლო როცა გასცდება, სასაზღვრო ფენის ეპიურა ხდება თითქმის ვერტიკალური ანუ სიჩქარე მუდმივ რეჟიმზე გადის და სითხის სიბლანტის გავლენა თითქმის ქრება.

ვთქვათ, გავზომეთ  $\nu$  სიჩქარეები ექსპერიმენტულად, ფირფიტადან  $y$  დაშორების მიხედვით ერთ კვეთში და გვაქვს ცხრილი 5.3.

ცხრილი 5.3

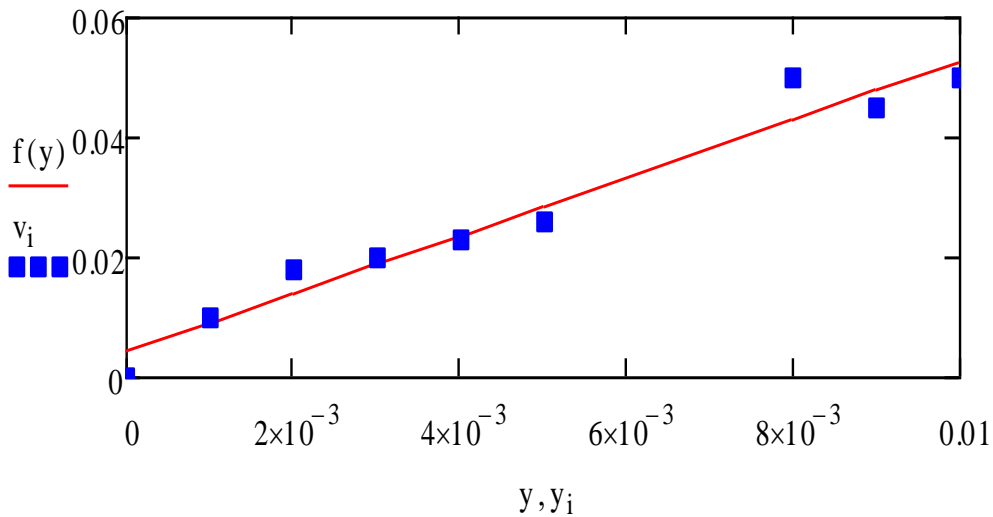
$\nu$	0	0.01	0.018	0.020	0.023	0.026	0.05	0.045	0.05
$y$	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.008	0.009	0.01

შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე და დავადგინოთ  $v = f(y)$  კავშირი, წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ ვეძებთ  $f$  ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, საძიებელ სიდიდეებს შორის ანალიზური დამოკიდებულებისათვის ცხრილი 5.3-დან გამომდინარე ისე, რომ ვეძებთ ეს დამოკიდებულება წრფივ  $v = f(y) = ay + b$  ფუნქციათა შორის.

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.008 \\ 0.009 \\ 0.01 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.018 \\ 0.020 \\ 0.023 \\ 0.026 \\ 0.05 \\ 0.045 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$a := \text{slope}(y, v) \quad a = 4.843 \quad b := \text{intercept}(y, v) \quad b = 0.004$$

$$f(y) := a \cdot y + b \quad i := 0 \dots 8$$



ნახ. 5.7. ნიუტონური სითხის სიჩქარეთა ეპიურა ფირფიტის სასაზღვრო ფენში უწყვეტი წირი შეესაბამება თეორიულ მრუდს, ხოლო დისკრეტულად გაზნეული წერტილები - ექსპერიმენტების შედეგებს

ამრიგად, მივიღეთ სითხის კედლის სიახლოვეს მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება:  $v = 4.8y + 0.004$ . ამ შემთხვევაშიც 0.004 გაცილებით

ნაკლებია სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობაზე. ამიტომ შეგვიძლია ის უგულვებელვყოთ, მითუმეტეს, რომ სითხის სიჩქარე ნულია ფირფიტის გასწვრივ ანუ როცა  $y = 0$ . მაშინ გვექნება დამოკიდებულება  $v = 4.8y$ .

**ამოცანები ამოხსნებით.**

1. ჩაწერეთ უწყვეტობის განტოლება უგრიგალო უწყვეტი გარემოსათვის.

**ამოხსნა.** უგრიგალო უწყვეტი გარემოსათვის  $rot v = 0$ , მაშინ სიჩქარეთა ველი ყოფილა პოტენციალური ანუ რაღაც  $\varphi$  სკალარული ველის გრადიენტული ველი. მაშინ  $v_i = \varphi_{,i}$ ; ასეთ შემთხვევაში, უწყვეტობის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \varphi_{,ii} = 0 \text{ ანუ } \frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta \varphi = 0.$$

2. აჩვენეთ რომ  $v_i = \frac{Ax_i}{r^3}$ ; სადაც  $r^2 = x_i x_i$  ფუნქცია აკმაყოფილებს უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლებას.

**ამოხსნა.** უკუმში სითხის უწყვეტობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:  $v_{i,i} = 0$ . ჩვენ შემთხვევაში  $v_i = \frac{Ax_i}{r^3}$ . გამოვითვალათ  $v_{i,k}$  მაშინ გვექნება:

$$\begin{aligned} v_{i,k} &= \left( \frac{Ax_i}{r^3} \right)_{,k} = (Ax_i)_{,k} \frac{1}{r^3} + (Ax_i) \left( \frac{1}{r^3} \right)_{,k} = Ax_{i,k} \frac{1}{r^3} - (Ax_i) \frac{1}{r^6} (r^3)_{,k} = \\ &= A \delta_{ik} \frac{1}{r^3} - (Ax_i) \frac{1}{r^6} (3r^2) \frac{x_k}{r}. \text{ მაშინ, ცხადია რომ} \\ v_{i,i} &= A \delta_{ii} \frac{1}{r^3} - (Ax_i) \frac{1}{r^6} (3r^2) \frac{x_i}{r} = A \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0. \text{ რ.დ.გ.} \end{aligned}$$

3. უწყვეტი გარემოს რომელიღაც წერტილში, მოცემულია დეფორმაციის სიჩქარისა და ძაბვების ტენზორის კომპონენტები:

$$\left( \dot{\epsilon}_{ij} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \left( \sigma_{ij} \right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \text{ იპოვეთ ამ წერტილში ძაბვების } \lambda \text{ სიმძლავრე: } \lambda = \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}.$$

**ამოხსნა.** დეფორმაციის ტენზორის ყოველი ელემენტი მრავლდება ძაბვის ტენზორის შესაბამის ელემენტზე და იკრიბება. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ:  $\lambda = \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij} = 4 + 0 - 4 + 0 - 6 + 14 - 4 + 14 + 40 = 58$ .

4. აჩვენეთ, რომ თუ  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$  მაშინ ძაბვების სიმძლავრე იქნება:

$$\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}.$$

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით  $v_{i,j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij} \Leftrightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = v_{i,j} - \dot{\omega}_{ij}$  მაშინ ძაბვების სიმძლავრე იქნება:  $\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\sigma_{ij} - \dot{\omega}_{ij}\sigma_{ij}$ .

რადგან  $\dot{\omega}_{ij}$  ანტისიმეტრიული ტენზორია, ხოლო  $\sigma_{ij}$  - სიმეტრიული, მათი ნამრავლი იქნება ანტისიმეტრიული. მაშასადამე მთავარ დიაგონალზე ნულოვანი ელემენტებია, ხოლო მთავარი დიაგონალის სიმეტრიულად მდგარი ელემენტები იქნება ურთიერთმოპირადპირე, რაც იმას ნიშნავს რომ  $\dot{\omega}_{ij}\sigma_{ij} = 0$  ნამრავლის ელემენტების ჯამი ნულის ტოლია. მაშასადამე, გვექნება რომ  $\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\sigma_{ij} = v_{i,j}(-p\delta_{ij}) = -pv_{i,i}$ .

თუ გავითვალისწინებთ უწყვეტობის განტოლებას:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{i,i} = 0; \text{ მაშინ გვექნება, რომ } v_{i,i} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}; \text{ რაც იმას ნიშნავს, რომ}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}\sigma_{ij} = v_{i,j}\sigma_{ij} = v_{i,j}(-p\delta_{ij}) = -pv_{i,i} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt}. \text{ რ.დ.გ.}$$

## VI თავი. უწყვეტ გარემოთა დინამიკის კლასიკური მათემატიკური მოდელები

საინჟინრო პრაქტიკაში, ფართო გამოყენება აქვს რთული ფორმისა და სტრუქტურის მასალებს. მანქანათმშენებლობასა და სამშენებლო საქმეში შეუძლებელია ახალი დანადგარების, ხელსაწყოებისა თუ, ნაგებობების აშენება, მათი წინასწარი მოდელირებისა და სხვადასხვა რეჟიმში მუშაობის შესწავლის გარეშე. უწყვეტ გარემოთა დინამიკა საშუალებას იძლევა, მყარ მათემატიკურ ფუნდამენტზე იქნას აგებული, დრეკადობის თეორიის, ჰიდროაეროდინამიკისა და რთული რეოლოგიის მქონე მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელები, ძაბვების, დეფორმაციების და ტემპერატურის სხვადასხვა რეჟიმების გათვალისწინებით, რაც საშუალებას იძლევა სულ სხვა ეტაპზე ავიყვანოთ რთული საინჟინრო ობიექტების პროექტირებისა და საინჟინრო გაანგარიშების ამოცანების გადაწყვეტის საქმე.

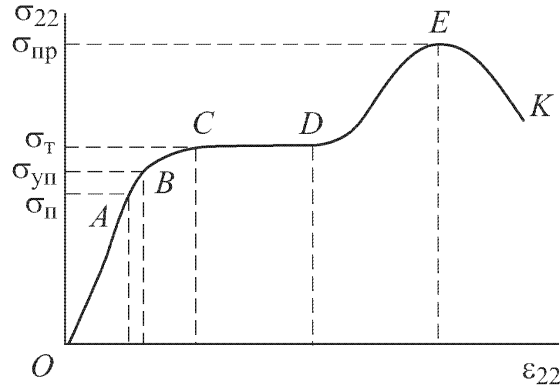
### 6.1. ჰუკის განზოგადებული კანონი

მასალის მექანიკური მუშაობის განმსაზღვრელი განტოლებები, როგორც წესი, დგინდება ექსპერიმენტების საშუალებით. ჩვენ უკვე განვიხილეთ **წრფივი დრეკადი** მასალის რეოლოგიური განტოლების (ჰუკის კანონი) აგების მეოთხედი.

**განსაზღვრება.** დრეკადი ეწოდება მასალას, რომელიც გარე ძალების მოქმედების შეწყვეტის შემდეგ სრულად აღიდგენს საწყის მდგომარეობას.

საზოგადოდ, მასალების დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა სხვადასხვანაირ სურათს იძლევა. დიდი მნიშვნელობა აქვს კავშირს ძელის გამჭიმავ ძაბვასა და მის დეფორმაციას შორის ანუ **დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დიაგრამას** ნახ. 6.1.





ნახ. 6.1. მასალის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დიაგრამა

ამ დიაგრამაზე, გრაფიკის **OA** ნაწილი შეესაბამება **წრფივ დეფორმაციას** (ჰუკის კანონი) ანუ წრფივია დამოკიდებულება ძელზე წარმოებულ ძაბვასა და ძელის ფარდობით წაგრძელებას შორის. **A** წერტილს **პროპორციულობის ზღვარს** უწოდებენ.

თუ ძაბვის სიდიდეს გავზრდით, მაშინ გრაფიკის **AB** ნაწილი, ძაბვა-დეფორმაციის არაწრფივ კავშირს გვიჩვენებს (აღარ სრულდება ჰუკის კანონი) თუმცა, ძაბვის მოხსნის შემდეგ, სხეული აღიდგენს საწყის მდგომარეობას ანუ ჯერ ისევ დრეკადია დეფორმაცია (**არაწრფივი დეფორმაცია**). ასეთ შემთხვევაში, **B** წერტილს **დრეკადობის ზღვარს** უწოდებენ.

თუ ისევ გავზრდით ძაბვას, მაშინ გადავალთ არადრეკად **BC** ზონაში და გარკვეული ძაბვის მიღწევისას, გრაფიკულად, **C** წერტილიდან იწყება მასალის **დენადობა** ანუ დეფორმაცია იზრდება ძაბვის გაზრდის გარეშე. ასეთ დეფორმაციას **CD** **პლასტიკურს** უწოდებენ. პლასტიკური მასალებია: **ოქრო, ალუმინი, სპილენძი . . .** მაგრამ არსებობენ მასალები, რომლებსაც დიაგრამაზე **CD** პლასტიკური უბანი არა აქვთ ან ძალიან მოკლე აქვთ ანუ ისინი იმსხვრევიან. ასეთი მასალებია: **მინა, ბეტონი, თუჯი . . .** მსხვრევადი მასალები უძლებენ, მხოლოდ მცირე დეფორმაციებს.

ძაბვის შემდგომი გაზრდისას, ძელის დეფორმაცია ხდება არაერთგვაროვანი, წარმოიქმნება ეგრეთწოდებული „ყელი“ შევიწროვება და გარკვეული ძაბვისას რომელსაც **სიმტკიცის ზღვარს** ვუწოდებთ **E** წერტილია გრაფიკზე, ხდება ძელის რღვევა ანუ გაწყვეტა.

**განსაზღვრება.** ძაბვის იმ მნიშვნელობას, რომლის ატანაც შეუძლია ნაკეთობას ექსპლუატაციისას, პლასტიკური დეფორმაციების გამოწვევის გარეშე, **დასაშვები ძაბვა** ეწოდება.

იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ მოსალოდნელი ზარალი, ცდილობენ ისე დააპროექტონ ნაგებობები, რომ დასაშვები ძაბვა რამდენჯერმე მცირე იყოს პროპორციულობის ზღვარზე.

**განსაზღვრება.** რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ მეტია პროპორციულობის კოეფიციენტი დასაშვებ ძაბვაზე, **სიმტკიცის მარაგი** ეწოდება.

მასალის ხარისხისა, ძაბვების ხასიათისა და ნაგებობის მნიშვნელობიდან გამომდინარე, სიმტკიცის მარაგს ირჩევენ [2;10] დიაპაზონში.

**დრეკადობის კლასიკური თეორია** შეესაბამება სწორედ იმ დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობას, რომელიც შეესაბამება დიაგრამის **OA** წრფივ ნაწილს.

დრეკადობის თეორიაში, სხეულის დაძაბულ - დეფორმირებული მდგომარეობის აღწერა, ხდება ჰუკის განზოგადებული კანონის საშუალებით, რომელსაც ტენზორულად ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (6.1)$$

სადაც  $\sigma_{ij}$  და  $\varepsilon_{mn}$  სიმეტრიული ტენზორებია. აქედან გამომდინარე, 81  $B_{ijmn}$  კოეფიციენტიდან მხოლოდ 36 იქნება დამოუკიდებელი. თუ დავუშვებთ, რომ უწყვეტი გარემო არის იზოტროპული, მაშინ კოეფიციენტების მატრიცას ერთნაირი წევრები ექნება დეკარტის კოორდინატების სამივე მიმართულებით და თუ კოორდინატთა სისტემის ღერძებს ციკლურად გადავაადგილებთ, აგრეთვე გამოვიყენებთ არეკვლისა და მობრუნების გარდაქმნებს, მივიღებთ რომ დამოუკიდებელი კოეფიციენტების რაოდენობა იქნება 2.  $B_{ijmn}$  მატრიცას **დრეკადობის კოეფიციენტების მატრიცას** უწოდებენ.

თუ უწყვეტი გარემო არაა იზოტროპული, მაშინ მას **ანიზოტროპულს** უწოდებენ. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ იზოტროპულ მასალებს.

იზოტროპული დრეკადი მასალისათვის ჰუკის კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (6.2)$$

სადაც  $\varepsilon_{kk} = J_{1\varepsilon}$  დეფორმაციის ტენზორის პირველი ინვარიანტია.

(6.2) განტოლებათა სისტემა წრფივია და თუ ამოვხსნით დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მიმართ, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}. \quad (6.3)$$

სადაც  $\sigma_{kk} = J_{1\sigma}$  ძაბვის ტენზორის პირველი ინვარიანტია.

თუ გვაქვს ძელის გაჭიმვა  $x_1$  ღერძის მიმართულებით, მაშინ შეგვიძლია შემოვიტანოთ ტექნიკური მუდმივები  $E$  და  $\nu$ , რომლებიც წარმოადგენენ კოეფიციენტებს შემდეგ ფორმულებში:

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}. \quad (6.4)$$

ამ ფორმულაში  $E$ -ს უწოდებენ იუნგის მუდმივას, ხოლო  $\nu$ -ს პუასონის კოეფიციენტს.

ამ მუდმივების საშუალებით შეგვიძლია გამოვსახოთ ჰუკის კანონი შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right). \quad (6.5)$$

თუ ამოვხსნით დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მიმართ, მაშინ გვექნება

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}. \quad (6.6)$$

### 6.1.1. დრეკადობის თეორიის სტატიკური და დინამიკური ამოცანების დასმა

დრეკადობის თეორიის სტატიკური ამოცანების დასმისას გამოიყენება შემდეგი განტოლებები, რომლებიც უნდა სრულდებოდეს უწყვეტი გარემოს ყველა შიგა წერტილში:

ა) წონასწორობის განტოლება:

$$\sigma_{j,i} + \rho b_i = 0; \quad (6.7)$$

ბ) ჰუკის კანონი:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (6.8)$$

გ) კავშირი დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს შორის:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6.9)$$

ამას გარდა, უწყვეტი გარემოს შემომსაზღვრელ ზედაპირზე, უნდა სრულდებოდეს სასაზღვრო პირობები ძაბვებზე ან გადაადგილებებზე:

დრეკადობის თეორიის ამოცანების კლასიფიკაცია წარმოებს ამ სასაზღვრო პირობების მიხედვით:

- 1.) მთელ საზღვარზე მოცემულია გადაადგილებები;
- 2.) მთელ საზღვარზე მოცემულია ძაბვები (ზედაპირული ძალები);
- 3.) საზღვრის ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები და მეორე ნაწილზე ძაბვები.

სამივე ამოცანის განხილვისას, იგულისხმება რომ მასური ძალები ცნობილია უწყვეტი გარემოს ყველა შიგა წერტილისათვის.

პირველი ამოცანის განხილვისას, როცა საზღვრის ყველა წერტილში მოცემულია გადაადგილებები, გამოყავთ ნავიე-კოშის განტოლებები გადაადგილებების მიმართ. ამისათვის, (6.9) განტოლებები უნდა ჩავსვათ (6.8) ფორმულებში, მივიღებთ რომ

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{1}{2} (u_{k,k} + u_{k,k}) + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (6.10)$$

შედეგი შევიტანოთ წონასწორობის განტოლებებში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + \mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + \rho b_i = 0 \quad (6.11)$$

ანუ

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0. \quad (6.12)$$

(6.12) განტოლებებს ნავიე-კოშის განტოლებებს უწოდებენ. ზოგჯერ კი ლამეს განტოლებებს.

მეორე ტიპის ამოცანების განხილვისას, როცა მთელ საზღვარზე მოცემულია ზედაპირული ძალები  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$ ; ცდილობენ გამოიყვანონ დიფერენციალური განტოლება ძაბვებისათვის ბელტრამი-მიჩელას განტოლებები. ამისათვის იყენებენ სენ-ვენანის პირობებს დეფორმაციების თავსებადობის შესახებ, ჰუკის კანონს და წონასწორობის განტოლებებს.

ბელტრამი-მიჩელას განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0. \quad (6.13)$$

ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნისას ვეძებთ ძაბვების ტენზორის ისეთ კომპონენტებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (6.13) და (6.7) განტოლებებს არის შიგნით და  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  პირობებს საზღვრის წერტილებში.

მესამე ტიპის ანუ შერეული ამოცანების ამოხსნისას, ერთდროულად ეძებენ (6.7),(6.8),(6.9) განტოლებათა სისტემების ამონახსნს ანუ ძაბვებს და გადაადგილებებს არის შიგნით ისე, რომ საზღვრის ნაწილზე სრულდება  $t_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$  პირობები, ხოლო მეორე ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები.

დინამიკური ამოცანების განხილვისას, წონასწორობის განტოლება იცვლება დინამიკის განტოლებით ანუ

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (6.14)$$

შესაბამისად, სასაზღვრო პირობებთან ერთად, უნდა განვიხილოთ საწყისი პირობებიც.

ამ შემთხვევაში გადაადგილებებისათვის გვაქვს ნავიე-კოშის (ლამეს) განტოლებები შემდეგი ფორმით:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (6.15)$$

ამ განტოლებებთან ერთად, ამონახსნები უნდა აკმაყოფილებდნენ როგორც საწყისი პირობებს, ასევე, სასაზღვრო პირობებს.

## 6.2. ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი

სითხეების (გაზების) დინამიკას შეისწავლის ჰიდროაეროდინამიკა. ისევე, როგორც დრეკადი მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაეროდინამიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის (აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად.

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = H_{ijmn} \dot{\epsilon}_{mn}. \quad (6.16)$$

სადაც  $\dot{\epsilon}_{mn}$  დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია, ხოლო  $H_{ijmn}$  მუდმივთა მატრიცაა, რომლებიც ახასიათებენ, მოცემული სითხის (აირის) მექანიკურ თვისებებს. საზოგადოდ, მუდმივთა მატრიცა შეიცავს 81 მუდმივს, თუმცა, იზოტროპული, ერთგვაროვანი სითხეებისათვის, როგორცაა: წყალი, ზეთი, მაზუთი . . . ამ მუდმივთა მატრიცას სიმეტრიის თვისებებიდან გამომდინარე, დაიყვანენ ორ დამოუკიდებელ  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  მუდმივზე.

ასეთ შემთხვევაში, ნიუტონის რეოლოგიურ კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (6.17)$$

სადაც  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  სითხის (გაზის) სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3} (3\lambda^* + 2\mu^*) \dot{\epsilon}_{ii} = -p + \chi^* \dot{\epsilon}_{ii}. \quad (6.18)$$

სადაც  $\chi^*$  სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტია. თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ  $\chi^* = 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3} \sigma_{ii} = -p \quad (6.19)$$

რაც იმას ნიშნავს რომ, ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში, ჰიდროსტატიკური წნევა, საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

რეოლოგიური (6.17) კანონის გარდა, იზოტროპული, ნიუტონური სითხეების მათემატიკური მოდელის ასაგებად საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის კანონი (უწყვეტობის განტოლება), ენერჯის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.

### 6.2.1. იზოტროპული ნიუტონური სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელები

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i; \quad (6.20)$$

სადაც  $v_i$  სითხის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0. \quad (6.21)$$

ენერჯის შენახვის კანონს აქვს სახე:

$$U = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z; \quad (6.22)$$

სადაც  $U$  სითხის შინაგანი ენერჯიაა,  $c_i$  სითხური ნაკადის ვექტორის კომპონენტები, რომელიც გადის ფართის ერთეულში, სითხოვამტარობის ხარჯზე დროის ერთეულში,  $z$  ერთეულ დროში გამოსხივებული სითხური მუდმივია გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება (დგინდება ექსპერიმენტებით).

$$p = p(\rho; T). \quad (6.23)$$

თუ საჭიროა სითბური ეფექტების გათვალისწინებაც, მაშინ მოცემულ განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$c_i = -kT_{,i}; \quad (6.24)$$

სადაც  $k$  სითბოგამტარობის კოეფიციენტია.

კალორიული განტოლებაც ემყარება ექსპერიმენტებს:

$$U = U(\rho; T). \quad (6.25)$$

მივიღეთ 16 განტოლება 16 უცნობით ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხეებისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც სითხის მიკვრის პირობებს უწოდებენ:

$$v_i|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.26)$$

#### ა) ნავიე-სტოქს-დიუგემის განტოლება

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითბური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება მათი უგულებელყოფა.

თუ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის ფორმულიდან მოსულ კინემატიკურ თანადობებს

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (6.27)$$

შევიტანთ ნიუტონის რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ რომ



$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k})\delta_{ij} + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i}).\end{aligned}\quad (6.28)$$

შევიტანოთ ეს ფორმულა დინამიკის განტოლებებში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,jj} + v_{j,ij}) + \rho b_i. \quad (6.29)$$

ანუ საბოლოოდ, გვექნება ნავიე-სტოქს-დიუგემის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის შემდეგი სახით:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*)v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i. \quad (6.30)$$

ბ) თუ სითხე უკუმშია, მაგალითად წყალი, მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (6.31)$$

უკუმში სითხეებისათვის (6.30) დინამიკის განტოლება გარდაიქმნება და მას ნავიე-სტოქსის განტოლებას უწოდებენ უკუმში ბლანტი სითხეებისათვის.

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i. \quad (6.32)$$

### 6.3. რეინერის დრეკადი მასალის მათემატიკური მოდელი

რთული რეოლოგიის მასალებისათვის ხშირად იყენებენ რეინერის ელასტიკური მასალის მათემატიკურ მოდელს (კომპოზიტები, მრავალფაზიანი მასალები და ა. შ.), რომელსაც აქვს სახე:

დინამიკის განტოლება:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (6.33)$$

კინემატიკური თანადობები:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.34)$$

რეინერის რეოლოგიური განტოლება:

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}; \quad (6.35)$$

სადაც  $\varphi_i$  დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვარიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

ამ ფუნქციების კონკრეტული სახე დგინდება ხანგრძლივი და მძიმე ექსპერიმენტების შედეგად.

სასაზღვრო და საწყისი პირობები აქ დაისმის ისეთივე სახით, როგორც წრფივად-დრეკადი მასალების შემთხვევაში.

#### 6.4. რეინერ-რივლინის სითხის მათემატიკური მოდელი

თუ ნოლის თეორემას გამოვიყენებთ რთული რეოლოგიის მქონე სითხეებისათვის  $\sigma_{ij} = f(\dot{\varepsilon}_{ij})$ ; მაშინ მივიღებთ ყველაზე ზოგადი სითხის რეოლოგიურ განტოლებას:

$$\sigma_{ij} = \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \dot{\varepsilon}_{ij} + \psi_2 \dot{\varepsilon}_{ik} \dot{\varepsilon}_{kj}; \quad (6.36)$$

სადაც  $\psi_i = \psi_i(I_1 \dot{\varepsilon}; I_2 \dot{\varepsilon}; I_3 \dot{\varepsilon})$ .

**განსაზღვრება.** სითხეებს, რომლებიც ემორჩილებიან (6.36) რეოლოგიურ კანონს რეინერ-რივლინის ბლანტი სითხეები ეწოდებათ.

ნიუტონური სითხეები წარმოადგენენ რეინერ-რივლინის სითხის კერძო შემთხვევას, როცა  $\psi_2 = 0$  და  $\psi_1 = const$ ;  $\psi_0 = -p$ .

რეინერ-რივლინის მოდელში არსებული მეორე რიგის წევრი იძლევა საშუალებას შევადგინოთ ისეთი სითხეების მათემატიკური მოდელები, რომელთაც ახასიათებთ დილატაციის თვისება ანუ ფხვიერი, სითხით გაჟღენთილი მასალების თვისება მოძრაობისას „ისუნთქონ-იბუყბუყონ“ სიჩქარის პერპენდიკულარული მიმართულებით.

რეინერ-რივლინის სითხეებისათვის, ასევე, დაისმის საწყისი პირობები და სასაზღვრო მიკვრის პირობები.

### 6.5. რთული რეოლოგიური მასალების კლასიფიკაცია

უფრო რთული რეოლოგიის მქონე ელასტიური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, იყენებენ რივლინის რეოლოგიურ კანონს. რივლინმა დაუშვა, რომ რთული რეოლოგიის მასალა თავის თავში აერთიანებს როგორც დრეკად, ასევე, სიბლანტის თვისებებს ანუ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}). \quad (6.37)$$

რივლინ-ერიკსენის თეორემის თანახმად, (6.37) რეოლოგიურ კანონს, ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევაში, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \psi_0 \delta_{ij} + \psi_1 \varepsilon_{ij} + \psi_2 \dot{\varepsilon}_{ij} + \psi_3 (\varepsilon_{ij})^2 + \psi_4 (\dot{\varepsilon}_{ij})^2 + \psi_5 (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij}) + \\ & + \psi_6 (\varepsilon_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{ij}^2) + \psi_7 (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \varepsilon_{ij}) + \psi_8 (\varepsilon_{ij}^2 \dot{\varepsilon}_{ij}^2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^2). \end{aligned} \quad (6.38)$$

**ტრუსდელმა** იგივე მეთოდების საშუალებით ააგო **ჰიპოდრეკადი** მასალი მათემატიკური მოდელი:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\varepsilon}_{ij}; \sigma_{ij}). \quad (6.39)$$

მასალებისათვის, რომელთაც ახასიათებთ ბლანტი-ელასტიურობა (ცოცვადობა, მასალები მეხსიერებით), შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = f(t; \varepsilon_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}). \quad (6.40)$$

ასეთი მასალებისათვის რეოლოგიურ კანონს ჩაწერენ შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijmn}(t - \tau) \frac{d\varepsilon_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (6.41)$$

სადაც  $C_{ijmn}(t)$  ფუნქციას, მასალის რელაქსაციის ფუნქციას უწოდებენ.

ზოგჯერ, (6.41) რეოლოგიური განტოლების ნაცვლად, იყენებენ შემდეგ ფორმულას:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t Q_{ijmn}(t - \tau) \frac{d\sigma_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (6.42)$$

სადაც  $Q_{ijmn}(t)$  ცოცვადობის ფუნქციაა.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ზოგადია ტრუსდელის რეოლოგიური კანონი:

$$F(t; \sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; \dot{\sigma}_{ij}; \dot{\varepsilon}_{ij}; \ddot{\sigma}_{ij}; \ddot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad (6.43)$$

რეოლოგიური კანონის დადგენა ხდება ექსპერიმენტის მეშვეობით, რასაც წინ უძღვის პროცესებისა და მასალების მეცნიერული ანალიზი. ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება კი ხდება სტატისტიკის მეთოდებით.

**ამოცანები ამოხსნებით.**

1. იპოვეთ ჰუკის კანონის შებრუნებული კანონი ანუ დეფორმაციები გამოსახეთ ძაბვებით.

**ამოხსნა.** ჰუკის კანონს აქვს სახე:  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ . თუ  $i = j$  მაშინ

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ii}; \text{ მაშასადამე, } 2\mu \varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} = \sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \text{ ანუ}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk}. \text{ დეფორმაციები გამოვსახეთ ძაბვებით.}$$

2. გამოიყვანეთ ნავიე-კოშის განტოლებები.

**ამოხსნა.** ჰუკის კანონის თანახმად,  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$ ; რადგან  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  მივიღებთ, რომ  $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ . თუ ამ ფორმულას შევიტანთ დინამიკის განტოლებაში მივიღებთ, რომ

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0. \text{ მივიღეთ ნავიე-კოშის განტოლებები (ლამეს განტოლებები).}$$

## ლიტერატურა

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954.
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
5. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел, пер. с англ., Мир, Москва, 1956.
6. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, пер. с болгарского, Мир, Москва, 1979.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986.
8. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956.
9. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004.
10. Roahe P.J. Computational fluid dynamics, Albuquerque, New Mexico, 1976.
11. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and computational aspects of convective heat transfer, New York, 1984.
12. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая фэродинамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
13. Хемш М., Нилсен Дж. Аэродинамика ракет, том 1, том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
14. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Данилов А.Н. и др. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пос., Москва, 1985.
15. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, Москва, 1976.
16. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, Москва, 1979.
17. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость, Москва, 1980.
18. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред, I том, МГТУ им. Баумана, Москва, 2004.
19. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике, ч.V, Харьков, 1972.

შინაარსი

		ბმ.
წინასიტყვაობა		3
შესავალი		5
I თავი	ველის თეორია ევკლიდურ სივრცეში	7
	1.1 სკალარული და ვექტორული სიდიდეები	7
	1.2 სკალარული ველი ევკლიდეს სივრცეში. სკალარული ველის გრადიენტი	16
	1.3 ვექტორული ველი. ვექტორული ველის პოტენციალი. ვექტორული ველის ძალწირები. გრიგალის ცნება და მისი ჰიდროდინამიკური შინაარსი. ვექტორული ველის ცირკულაცია შეკრულ წირზე	20
	1.3.1 ვექტორული ველის ნაკადი. დივერგენცია. გაუსის ფორმულა	27
	1.3.2 სტოქსის ფორმულა. დივერგენციის თვისებები	30
	1.3.3 ჰამილტონის ოპერატორი და მისი თვისებები	31
ლიტერატურა		32
II თავი	ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები	33
	2.1 ტენზორები	33
	2.1.1 ვექტორი, როგორც პირველი რანგის ტენზორი	35
	2.1.2 ტენზორის ცნება. მაღალი ვალენტობის ტენზორები	37
	2.1.3 ტენზორის კომპონენტები. მეტრიკული ტენზორი	39
	2.2 ოპერაციები ტენზორებზე. ტენზორული ნამრავლი. სიმეტრირება და ალტერნირება	40
	2.2.1 ტენზორების სკალარული ნამრავლი	42
	2.2.2 ტენზორის ახარისხება	44

	2.2.3	ტენზორების ორმაგი სკალარული ნამრავლი. ტენზორის კვალი	45
	2.2.4	ტენზორის ნახვევის ოპერაცია	46
	2.2.5	ფსევდოტენზორები. ტენზორების ვექტორული ნამრავლი	47
	2.3	მეორე რანგის ტენზორების ალგებრა	48
	2.3.1	მეორე რანგის ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები	49
	2.3.2	დეკარტული ტენზორების ალგებრა	51
	2.3.2.1	მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის მთავარი მიმართულებები და მთავარი მნიშვნელობები. ინვარიანტები	54
	2.3.2.2	მეორე რანგის სიმეტრიული დეკარტული ტენზორის ხარისხები. ჰამილტონ-კელის თეორემა	57
	2.3.3	ნოლის თეორემა. რივლინ-ერიკსენის თეორემა.	58
	2.3.4	დეკარტული ტენზორული ველი და სიმბოლური აღნიშვნები	60
	2.4	არადეკარტული ტენზორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წარმოებულები. რიჩის ლემა	61
ამოცანები ამოხსნებით			63
III თავი	მექანიკური ძაბვის თეორია		69
	3.1	მექანიკური ძაბვის ტენზორი	70
	3.2	კავშირი ძაბვის ტენზორსა და ძაბვის ვექტორს შორის	73
	3.3	ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობა. უწყვეტი გარემოს წონასწორობის განტოლებები კოშის ფორმით	75
	3.4	მთავარი ძაბვები და ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები	77

	3.5	ძაბვის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად	79
	3.6	ძაბვის ვექტორის დაშლა ნორმალურ და მხებ მდგენელებად	79
ამოცანები ამოხსნებით			81
IV თავი	უწყვეტი გარემოს კინემატიკა		88
	4.1	მოძრაობის აღწერის ლაგრანჟის და ეილერის წესი	88
	4.2	დეფორმაციის ტენზორი	91
	4.2.1	ბრუნვის ტენზორი	94
	4.2.2	დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი ღერძები	95
	4.2.3	მოცულობის ცვლილება დეფორმაციისას	97
	4.2.4	წრფივი დეფორმაციების გეომეტრიული თვისებები	98
	4.2.5	ტემპერატურული დეფორმაცია	99
	4.2.6	დეფორმაციის ტენზორის დაშლა სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად	100
	4.3	დეფორმაციათა თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები	101
	4.4	უწყვეტი გარემოს მოძრაობის განმსაზღვრელი პარამეტრები. მატერიალური წარმოებულები	102
	4.4.1	დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორი და გრიგალი	105
	4.4.2	მოცულობითი ინტეგრალის წარმოებული დროით, როცა ინტეგრების მოცულობა დროის ფუნქციაა	106
ამოცანები ამოხსნებით			107
V თავი	უწყვეტ გარემოთა დინამიკის ძირითადი კანონები		109
	5.1	უწყვეტობის განტოლება	109



	5.2	უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების კანონი	110
	5.3	უწყვეტი გარემოს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების კანონი	112
	5.4	ენერგიის შენახვის კანონი. თერმოდინამიკის პირველი კანონი	113
	5.5	თერმოდინამიკის მეორე კანონი. ენტროპია. კლაუზიუს-დიუგემის უტოლობა	114
	5.6	უწყვეტი გარემოს დინამიკის ძირითადი განმსაზღვრელი განტოლებების შესახებ	116
	5.6.1	გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება. წრფივი და არაწრფი რეგრესია. ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	118
	5.6.2	დამოკიდებულება ძელის გაჭიმვისას ძაბვებსა და მცირე დეფორმაციებს შორის (ჰუკის კანონი)	120
	5.6.3	სიჩქარის ეპიურის აგება ნიუტონური სითხეებისათვის	123
ამოცანები ამოხსნებით			126
VI თავი	უწყვეტ გარემოთა დინამიკის კლასიკური მათემატიკური მოდელები		128
	6.1	ჰუკის განზოგადებული კანონი	128
	6.1.1	დრეკადობის თეორიის სტატიკური და დინამიკური ამოცანების დასმა	131
	6.2	ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი	134
	6.2.1	იზოტროპული ნიუტონური სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელი	135
	6.3	რეინერის დრეკადი მასალის მათემატიკური მოდელი	137
	6.4	რეინერ-რივლინის სითხის მათემატიკური მოდელი	138
	6.5	რთული რეოლოგიური მასალების კლასიფიკაცია	139

ამოცანები ამოხსნებით	140
ლიტერატურა	141