სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის

ფაკულტეტი

ხელნაწერის უფლებით

მაია კრაწაშვილი

მაქსველის სისტემისა და მისი ინტეგრო-დიფერენციალური ანალოგების გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

ავტორეფერატი

თბილისი, 2019

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: **თემურ ჯანგველაძე**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
პროფესორი,
ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი.ვეკუას სახელობის
გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი
მეცნიერი თანამშრომელი

თემურ ჩილაჩავა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი

ექსპერტები: **ზურაბ გეგეჭკორი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ასოცირებული პროფესორი

დაზმირ შულაია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
პროფესორი

ოფიციალური რეცენზენტები: **რომეო გალდავა**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ასოცირებული პროფესორი

ჰამლეტ მელაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი
ნიკო მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი
მათემატიკის ინსტიტუტის ინფორმატიკის
განყოფილების გამგე

დისერტაციის დაცვა შედგება 2020 წლის 18 იანვარს 14:00 საათზე სსიპ სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე.
მისამართი: ანა პოლიტკოვსკაიას ქ. №26, VII სართული, საპრეზენტაციო ოთახი №712.

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი,
გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულების
ასოცირებული პროფესორი ციალა ძიძიგური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება
თემის აქტუალობა

გამოყენებით მათემატიკაში ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანად იკვეთება პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მოდელირება, ხოლო შემდეგ თანამედროვე პროგრამული პაკეტების საშუალებით მათი გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა.

ამგვარი ამოცანების რიცხვს მიეკუთვნება გარემოში ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესები. ცნობილია, რომ აღნიშნულ პროცესებს თან ახლავს სითბური ენერგიის გამოყოფა, რაც იწვევს გარემოს გამტარიანობის ცვლილებას და გავლენას ახდენს დიფუზიის პროცესზე, ვინაიდან გარემოს ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი, თავის მხრივ არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე. ეჭვგარეშეა, რომ დიფუზიის ასეთი ამოცანებისთვის მათემატიკური მოდელების აგებას, შემდეგ მათ გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება.

მრავალი გამოყენებითი ამოცანის, ისევე როგორც ზემოთ ნახსენები პროცესების მოდელირებისას, მიიღება არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური, ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და განტოლებათა სისტემები. ძირითადად ამ სისტემების თავისებურება გამოხატულია ერთმანეთთან ძლიერად დაკავშირებული სხვადასხვა რიგის განტოლებებით, რაც თავის მხრივ განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას ყოველი კონკრეტული სისტემისთვის რამეთუ ზოგადი თეორია ჯერჯერობით ამგვარი წრფივი მოდელებისთვისაც კი არასრულადაა განვითარებული. ბუნებრივად იბადება მსგავსი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის აუცილებლობის საკითხი, რაც თავის მხრივ შესაბამისი სირთულეების დაძლევასთან არის დაკავშირებული. ძირითადად კვლევისთვის საჭირო და მოსახერხებელი ყოველი კონკრეტული მეთოდის თავისებურება ვლინდება შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების და მათი დისკრეტული ანალოგებისთვის აუცილებელი აპრიორული შეფასებების მიღებასა და მათ შემდგომ გამოყენებაში.

შესასწავლი მოდელების სირთულე განაპირობებს როგორც თეორიული ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების და თანამედროვე დაპროგრამების ენების

ბაზაზე შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის ფართო გამოყენებას. იქ სადაც სრულყოფილი თეორიული გამოკვლევა ვერ ხერხდება, მნიშვნელოვანი როლი უნდა ითამაშოს რიცხვითმა ექსპერიმენტებმა, რომელთა ჩატარება მოითხოვს კომპიუტერული მეცნიერებების შესაბამისი დარგების გამოყენებას.

აღსანიშნავია, რომ შესასწავლი პროცესის მათემატიკური აღწერა ხორციელ-დება დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებით. დიფუზიის მრავალი პროცესის აღმწერი არაწრფივი მოდელი არის მრავალი მეცნიერის კვლევის ობიექტი. ამ სისტემების შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისებრივი და სტრუქტურული მახასიათებლების დადგენა, დისკრეტული ანალოგების გამოკვლევა და რიცხვითი ალგორითმების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე გამოთვლითი მათემატიკის მეტად აქტუალურ ნაწილს.

განსახილველი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელები პირველად შემოთავაზებულ იქნა შრომაში Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear parabolic problems (Russian). Differencial'nye Uravnenyia, 1983, V.19, p.1197-1207. English translation: Differential Equations, 1983, V.19, p.887-895. აღნიშნული მოდელები წარმოიშვნენ ერთის მხრივ რეალური დიფუზიური პროცესების აღწერისას, ხოლო მეორეს მხრივ – არაწრფივი პარაბოლური ტიპის ცნობილი განტოლებების განზოგადებისას, რომელთა შეს-წავლას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი. ამ განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ძირითადი დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულებთან გვხვდება არაწრფივი კოეფიციენტები, რომლებიც დამოკიდებულია სივრცითი და დროითი ცვლადების მიმართ საძიებელი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულებიდან აღებულ ინტეგრალებზე.

მრავალი მეცნიერის აქტუალურ კვლევის საგანს წარმოადგენს ასევე სხვადასხვა ბუნების დიფუზიური ამოცანების მოდელირება და მათემატიკური ასპექტები, რომლებიც დაკავშირებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მდგრადობის, არსებობის, ერთადერთობის თეორემებთან და ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხებთან.

რეალური ფიზიკური ამოცანების შესწავლა თანამედროვე კომპიუტერების გარეშე წარმოუდგენელია. არწრფივი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების განვითარება და მათ ბაზაზე სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისთვის გამოთვლითი ექსპერიმენტების აუცილებლობა ნათელია.

კვლევის ობიექტი და მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს ზემოთ აღნიშნული მოდელების შესწავლა. კერძოდ, დაგეგმილი იყო ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის აღმწერი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენცია-ლური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, სარეალიზაციო ალგორითმების შედგენა, პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ამოხსნა.

მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები

როგორც უკვე აღინიშნა, მრავალი პროცესის მათემატიკური აღწერისას მიიღება დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელები. უმეტეს შემთხვევაში ეს მოდელები არაწრფივია, რაც ართულებს მათთვის დასმული საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას. ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი არაწრფივი ევოლუციური მოდელი წარმოიშობა ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას. გარკვეულ დაშვებებში მაქსველის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია რედუცირებულ იქნას არაწრფივ პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალურ მოდელებზე. სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანები არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი მაქსველის სისტემების სხვადასხვა შემთხვევისათვის. ასევე შესწავლილია ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევისა და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები. აღნიშნული პრობლემატიკა ძირითადად განპირობებულია რეალური ფიზიკური ამოცანებით, თუმცა მათი გარკვეული ნაწილი ბუნებრივი მათემატიკური

განზოგადების შედეგიცაა. აღნიშნული დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისათვის შესწავლილია როგორც საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისებრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლები, ასევე მიახლოებითი ამოხსნის ნახევრად-დისკრეტული და სრულიად დისკრეტული ანალოგები. შესწავლილი ალგორითმების საფუძველზე შექმნილია პროგრამული პაკეტები, რომელთა გამოყენებითაც ჩატარებულია მრავალრიცხოვანი რიცხვითი ექპერიმენტი და მიღებული შედეგების ანალიზი. კვლევები განხორციელებულია სხვადასხვა სახის არაწრფივობებისთვის ანალიზისა და კომპიუტერული მეცნიერებების შესაბამისი დარგების გამოყენებით. რიცხვითი გათვლები შესრულებულია სხვადასხვა ტესტური ამოცანისათვის და ჩატარებულია მიღებული შედეგების ანალიზი.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში [2 - 4, 9, 11, 13, 14, 16] და მოხსენებული იყო საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენ-ციებზე როგორც საქართველოში, ასევე საზღვარგარეთ. კერძოდ, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამო-ყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების გაფართოებულ სხდომებზე (თბილისი, 2014-2017 წწ.); საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მეხუთე და მეექვსე საერთაშორისო კონფერენციებზე (ბათუმი, 2014 და 2015 წწ.) [8, 10]; ინდუსტრიული და გამოყენებითი მათემატიკის საზოგადოების (SIAM) საერთაშორისო კონფერენციაზე (ალაბამა, აშშ, 2015წ.; ბოსტონი, აშშ, 2016წ.) [6, 7, 12]; საერთაშორისო კონფერენცია მათემატიკასა და ინჟინერიაში (ICOME-2017, სტამბოლი, თურქეთი, 2017) [5, 15]; მე-4 საერთაშორისო კონფერენცია წმინდა და გამოყენებით მეცნიერებებში: განახლებადი ენერგია (ICPAS-2017, სტამბოლი, თურქეთი, 2017) [1]. დისერტაციის თემასთან დაკავშირებით 2016 წელს მოპოვებულია გრანტი დოქტორანტებისთვის, რომელიც წარმატებით დასრულდა 2018 წელს. გრანტის ფარგლებში კვლევის ძირითადი შედეგების გაცნობა

განხორციელდა 2017 წლის მაისსა და ნოემბერში საერთაშორისო კონფერენციებზე ICOME-2017 და ICPAS-2017 ქალაქ სტამბოლი, თურქეთი.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

დისერტაცია შეიცავს 112 ნაბეჭდ გვერდს. იგი შედგება შესავალის, სამი თავის, 10 პარაგრაფის, რეზიუმესა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისაგან.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი

პირველ თავში განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური აღწერა ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. პირველ პარაგრაფში მაქსველის სისტემის საფუძველზე მოცემულია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. შედეგად მიღებულია არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა. მეორე პარაგრაფში მოცემულია დიფუზიური ამოცანების ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. განხილულია შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების გლობალური ამონახსნების არსებობის საკითხები. კერძოდ, აგებულია ისეთი არაწრფივი სისტემები და მისი ანალიზური ამონახსნების მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ აღნიშნულ სისტემებს საზოგადოდ გლობალური ამონახსნები არა აქვთ. ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანის ამონახსნისთვის შეისწავლება ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

ამ პარაგრაფში გამოკვლევა ჩატარებულია შემდეგ სისტემაზე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right], \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F\left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{2}$$

სადაც a და F თავიანთი არგუმენტების ცნობილი, ხოლო U, V და S კი უცნობი ფუნქციებია.

მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვა დარგების მრავალი გამოყენებითი პრობლემა მოდელირდება (1), (2) სახის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებით. კერძოდ, თუ

$$F\left(S,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial x}\right)=b(S)+c(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{3}$$

სადაც b და c თავიანთი არგუმენტის მოცემული ფუნქციებია, მაშინ (1) - (3) სისტემა წარმოადგენს მაქსველის სისტემის ვარიანტს, რომლითაც აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

აღნიშნული და მისი მსგავსი სისტემები წარმოიშობა აგრეთვე მრავალი განსხვავებული ბუნების ფიზიკური პროცესის აღწერისას.

თუ (2) განტოლების ნაცვლად (1) სისტემას მივუერთებთ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{\partial S}{\partial t}=b(S)+c(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[d(S)\frac{\partial S}{\partial x}\right], \tag{4}$$

სადაც d ასევე თავისი არგუმენტის მოცემული ფუნქციაა, მაშინ (1), (4) სისტემით კვლავ აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში, სადაც (4) განტოლებაში შემავალი მეორე შესაკრები შეესაბამება ჯოულის სითბოგამოყოფას, ხოლო მესამე კი სითბოგამტარობის ეფექტს.

ამავე პარაგრაფში ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანისთვის შესწავლილია ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

აღნიშნულ ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{5}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0, \tag{6}$$

$$U(1,t)=\psi_1, \qquad V(1,t)=\psi_2,$$

$$U(x,0)=U_0(x), \ \ V(x,0)=V_0(x), \ \ S(x,0)=S_0(x)>0,$$

სადაც $\alpha,\beta,\gamma \in R, \ \alpha \neq 0, \ a,b \in R^+, \ \psi_1 = const > 0, \ \psi_2 = const > 0.$

ახლა გადავიდეთ დისერტაციის პირველი თავის ძირითადი თეორემების ჩამოყალიბებაზე.

თეორემა 1. *თუ* $2\alpha+\beta-\gamma>0$, $\beta \neq \gamma$, *მაშინ (5), (6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი*

$$\left(\psi_1 x, \qquad \psi_2 x, \qquad \left(\frac{({\psi_1}^2+{\psi_2}^2)b}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}}\right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება თანაფარდობა

$$a(\gamma-\beta)\left[\frac{b}{a}(\psi_1^2+\psi_2^2)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2.$$

როგორც მიღებული პირობიდან ჩანს, თუ γ < β, მაშინ ზემოთ მოყვანილი (5), (6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი არის ყოველთვის წრფივად მდგრადი.

ვთქვათ, $\gamma > \beta$ და $\beta-\alpha-1 \neq$ განვიხილოთ სიდიდე

$$\psi_s = \left[\frac{\pi^2}{\gamma-\beta} a^{\frac{\gamma-\alpha-1}{\beta-\gamma}} b^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta-\gamma}}\right]^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}},$$

მაშინ როცა $\psi \in (0,\psi_s)$, სადაც $\psi=\psi_1^2+\psi_2^2$, (5), (6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, ხოლო როცა $\psi > \psi_s$ იგი არამდგრადია. როცა $\psi=\psi_s$, მაშინ ჩნდება ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის შესაძლებლობა. მცირე შეშფოთებებმა შეიძლება სტაციონარული ამონახსნი გადაიყვანოს დროით პერიოდულ რხევებში.

ამავე პარაგრაფში (5) სისტემის ერთი კერძო შემთხვევისთვის

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial U}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -S + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \tag{7}$$

დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2. *(6), (7) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი*

$$\left(\psi_1 x,\ \psi_2 x,\ {\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right),$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ *სივრცის ნორმის აზრით და ასიმპტოტურ ყოფაქცევას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.*

თუ (5) განტოლებათა სისტემისთვის (6) პირობების ნაცვლად განვიხილავთ შემდეგ საწყის-სასაზღვრო პირობებს:

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$

$$S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \psi_1, \qquad S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \psi_2, \tag{8}$$

$$U(x,0) = U_0(x),\ V(x,0) = V_0(x),\ S(x,0) = S_0(x) > 0,$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3. *თუ* $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, *მაშინ (5), (8) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი*

$$\left(\psi_1\left[\frac{({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)b}{a}\right]^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \qquad \psi_2\left[\frac{({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)b}{a}\right]^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \qquad \left[\frac{({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)b}{a}\right]^{\frac{1}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება თანაფარდობა

$$(\gamma - \beta) b^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} a^{\frac{3\alpha-\gamma+1}{2\alpha+\beta-\gamma}} ({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} < \frac{\pi^2}{4}.$$

თუ (7) სისტემისთვის სასაზღვრო პირობებს მარჯვენა საზღვარზე ჩავანაცვლებთ მეორე გვარის სასაზღვრო პირობებით, ანუ თუ განვიხილავთ ასეთ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას:

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$

$$S\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \psi_1, \qquad S\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \psi_2, \tag{9}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad S(x,0) = S_0(x) > 0,$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 4. *(7), (9) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი*

$$\left(\psi_1\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)^{-\frac{1}{3}}x, \qquad \psi_2\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)^{-\frac{1}{3}}x, \qquad \left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ *სივრცის ნორმის აზრით და ასიმპტოტურ ყოფაქცევას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.*

მესამე პარაგრაფში კვლავ განხილულია (5), (6) საწყის-სასაზღვრო ამოცანა და შესწავლილია მისი მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი. (5) განტოლებათა სისტემა $E = S^{1/2}$ აღნიშვნის საშუალებით მიიყვანება შემდეგ განტოლებათა სისტემამდე:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{a}{2}E^{2\beta-1} + \frac{b}{2}E^{2\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right].\end{gathered} \tag{10}$$

მიღებული (6), (10) ამოცანისთვის აგებულია შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$\begin{gathered}u_t = (e^{2\alpha}u_{\bar{x}})_x, \quad v_t = (e^{2\alpha}v_{\bar{x}})_x, \\ e_t = -\frac{a}{2}e^{2\beta-1} + \frac{b}{2}e^{2\gamma-1}\left(u_{\bar{x}}^2 + v_{\bar{x}}^2\right), \\ u_0^j = v_0^j = 0, \quad u_N^j = \psi_1, \quad v_N^j = \psi_2, \quad j = 0,1,\dots,M, \\ u_i^0 = U_0(x_i), \quad v_i^0 = V_0(x_i), \quad e_i^0 = \left[S_0\left(x_{i+1/2}\right)\right]^{1/2}, \quad i = 0,1,\dots,N.\end{gathered} \tag{11}$$

დავუშვათ (5), (6) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი. ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ ასეთ ამონახსნზე (11) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებაა $O(\tau +$

h^2). დამტკიცებულია აგებული (11) სხვაობიანი სქემის კრებადობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 5. *თუ* $\beta \geq 1/2$, $\alpha = \gamma$, $|\alpha| \leq 1/2$, *მაშინ (11) სხვაობიანი სქემა კრებადია (6), (10) ამოცანის ამონახსნისკენ* $O(\tau + h^2)$ *რიგით ბადურ ფუნქციათა* L_{2h} *სივრცეში.*

მეოთხე პარაგრაფი ეძღვნება აგებული არაწრფივი (11) სხვაობიანი სქემის რიცხვითი რეალიზაციის საკითხებს. აღწერილია ერთი მარტივი საიტერაციო პროცესის ალგორითმიზაცია, რომელიც ყოველ იტერაციაზე დაიყვანება ჩვეულებრივი ფაქტორიზაციის მეთოდის ორჯერად გამოყენებაზე. გამოყენებულ იქნა განხილული სქემების რეალიზაციის სხვა მიდგომაც. ეს უკანასკნელი ალგორითმი დაფუძნებულია ნიუტონის მეთოდის მოდიფიკაციაზე, რის საშუალებითაც სხვაობიანი ამოცანები მიიყვანება სამწერტილოვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ბლოკურ სისტემამდე. ამ უკანასკნელის ამოხსნა კი ხორციელდება მატრიცული ფაქტორიზაციის მეთოდის საშულებით. ტესტური გამოთვლები ჩატარებულია დიფუზიური ამოცანის ზუსტ ამონახსნებზე, რომლებიც ადასტურებენ შემოთავაზებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების ეფექტურობას.

თეორემა 1-ის პირობებში ჩატარებულმა რიცხვითმა ექსპერიმენტებმა გვიჩვე-ნეს მიახლოებითი ამონახსნის სტაციონარული ამონახსნისკენ მისწრაფება. შესატყვისი გრაფიკული ილუსტრაციები მოცემულია პირველი თავის მეოთხე პარაგრაფში (ნახ. 1.4.1 - 1.4.4). ანალოგიური სურათები მიიღება თეორემა 3-ის შემთხვევაშიც. რაც შეეხება გლობალურად მდგრადობის დებულებებს (თეორემები 2 და 4), აქ ჩატარებულმა მიახლოებითმა გამოთვლებმა როგორც მოსალოდნელი იყო მოგვცა სტაციონარული ამონახსნისკენ მიახლოებითი ამონახსნის მისწრაფების ბუნებრივი სურათი (იხ. მესამე თავის მეოთხე პარაგრაფში მოყვანილი ნახ. 3.3.5 - 3.3.16). მეოთხე პარაგრაფის ბოლოს ასევე მოყვანილია ჰოფის ბიფურკაციის ამსახველი გრაფიკული ილუსტრაციები (ნახ. 1.4.9 და 1.4.10).

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში მოყვანილია მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა

სისტემამდე. ამავე პარაგრაფში განხილულია მათი ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. აღსანიშნავია, რომ მაქსველის განტოლებათა სისტემისთვის აღნიშნული რედუქცია პირველად ჩატარებულ იქნა შემდეგ ნაშრომში Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear parabolic problems (Russian). Differencial'nye Uravnenyia, 1983, V.19, p.1197-1207. შედეგად მიღებულ იქნა არაწრფივ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა ახალი კლასი, რომლის მიმართაც სამეცნიერო ინტერესი ახლაც ყოველდღიურად იზრდება. ამავე თავში გამოკვლეულია ერთი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის და შესაბამისი წყაროს წევრებიანი სისტემის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. მითითებულია სტაბილიზაციის ასიმპტოტური ყოფაქცევის რიგები.

განვიხილოთ მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქ-ცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე. დავუშვათ, ელექტრომაგნიტური ველი ვრცელდება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტა-რობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. კვაზისტაციონარულ მიახლოებაში მაქსველის შესაბამის განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot(\nu_m rotH), \tag{12}$$

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu_m (rotH)^2, \tag{13}$$

სადაც $H = (H_1, H_2, H_3)$ – მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორია, θ – ტემპერატურა, c_v და ν_m – ახასიათებენ შესაბამისად გარემოს სითბოტევადობას და ელექტროგამტარობას. (12) სისტემით აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში, (13) განტოლებით კი ტემპერატურის ცვლილება ჯოულის სითბოგამოყო-ფის ხარჯზე.

თუ $c_v = c_v(\theta)$ და $\nu_m = \nu_m(\theta)$, მაშინ (13) განტოლების დროითი ცვლადით ინტეგრებისა და (12) სისტემაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ [32]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot\left[a\left(\int_0^t |rotH|^2 d\tau\right) rotH\right], \tag{14}$$

სადაც $a(S)$ კოეფიციენტი განისაზღვრება c_v და v_m ფუნქციების საშუალებით.

აღნიშნული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი რთულია და მისი გამოკვლევა ჯერჯერობით მხოლოდ კერძო კლასებისთვის ხერხდება.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ორკომპონენტიანია $H = (0, U, V)$, სადაც $U = U(x,t)$, $V = V(x,t)$ – დროისა და ერთი სივრცული ცვლადის სკალარული ფუნქციებია. ამ შემთხვევაში $rotH = \left(0, -\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$, და (14) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right) \frac{\partial U}{\partial x}\right] = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right) \frac{\partial V}{\partial x}\right] = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

თუ სხეულის გასწვრივ ტემპერატურას ჩავთვლით მუდმივს, კერძოდ, დამოკიდებულს დროზე და დამოუკიდებელს სივრცითი ცვლადებისგან, მაშინ როცა $H = (0, U, V)$, მივიღებთ (15) სისტემის ანალოგიურ სისტემას:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} - a\left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx\, d\tau\right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial t} - a\left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx\, d\tau\right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

მეორე პარაგრაფში განხილულია (15) და (16) სისტემების შესაბამისი წყაროს წევრებიანი შემდეგი სისტემები:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right) \frac{\partial U}{\partial x}\right] + g(U) = f_1(x,t), \tag{17}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]+g(V)=f_2(x,t)$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+g(U)=f_1(x,t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=+g(V)=f_2(x,t). \tag{18}$$

სადაც $a = a(S)$, g, f_1, f_2 თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

შესწავლილია (17) და (18) სისტემებისთვის დასმული შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის

$$U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0,\quad t\geq 0, \tag{19}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\quad x\in[0,1] \tag{20}$$

ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 6. *თუ $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული ფუნქცია და $U_0, V_0 \in L_2(0,1)$, მაშინ (17), (19), (20) და (18) - (20) ამოცანების ამონახსნისათვის $L_2(0,1)$ ნორმაში სამართლიანია შემდეგი შეფასება*

$$\|U\|+\|V\|\leq Ce^{-a_0 t}.$$

ამავე თავის მესამე პარაგრაფში შესწავლილია ზემოთ აღნიშნული (17), (19), (20) და (18) - (20) ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 7. *თუ $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (17), (19), (20) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.*

ასევე მოყვანილია (16) - (18) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემაც.

თეორემა 8. *თუ* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0,\ a'(S) \geq 0,\ a''(S) \leq 0,\ g$ *არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (18) - (20) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.*

დისერტაციის მესამე თავში შემუშავებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების გამოყენებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტები აქაც ადასტურებენ როგორც თეორემების დასკვნების სანდოობას, ასევე აღნიშნული ალგორითმების ეფექტურობას.

მესამე თავში წინა თავში განხილული არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისთვის აგებულია ნახევრად-დისკრეტული მოდელები და სხვაობიანი სქემები. დამტკიცებულია მათი მდგრადობისა და კრებადობის თეორემები. მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ალგორითმების აღწერა და ჩატარებული მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტის გრაფიკული ილუსტრაციები.

გავეცნოთ მესამე თავის შინაარსს უფრო დაწვრილებით.

პირველ პარაგრაფში შემდეგი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური ამოცანებისთვის:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right] + g(U) = f_1(x,t),\\
\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right] + g(V) = f_2(x,t),\\
U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0,\\
U(x,0) = U_0(x),\ \ V(x,0) = V_0(x)
\end{gathered} \tag{21}$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a\left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) = f_1(x,t), \tag{22}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a\left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(V) = f_2(x,t),$$

$$U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0,$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x).$$

აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელები:

$$\frac{du_i}{dt} - \left\{a\left(\int_0^t \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2\right] d\tau\right) u_{\bar{x},i}\right\}_x + g(u_i) = f_1(x,t),$$

$$\frac{dv_i}{dt} - \left\{a\left(\int_0^t \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2\right] d\tau\right) v_{\bar{x},i}\right\}_x + g(v_i) = f_2(x,t), \tag{23}$$

$$i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$u_0(t) = u_N(t) = v_0(t) = v_N(t) = 0,$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, v_i(0) = V_{0,i}, i = 0,1,\dots,N$$

და

$$\frac{du_i}{dt} - a\left(h\int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2\right] d\tau\right) u_{\bar{x}x,i} + g(u_i) = f_1(x,t),$$

$$\frac{dv_i}{dt} - a\left(h\int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2\right] d\tau\right) v_{\bar{x}x,i} + g(v_i) = f_2(x,t), \tag{24}$$

$$i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$u_0(t) = u_N(t) = v_0(t) = v_N(t) = 0,$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, v_i(0) = V_{0,i}, i = 0,1,\dots,N.$$

ნაჩვენებია შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 9. *თუ* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g *არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (21) და (22) ამოცანებს გააჩნიათ საკმაოდ გლუვი ამონახსნი მაშინ (23) და (24) სქემები მდგრადია და მათი ამონახსნები* $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{N-1}(t)\big)$, $v(t) = \big(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{N-1}(t)\big)$ *იკრიბებიან* $U(t) = \big(U_1(t), U_2(t), \ldots, U_{N-1}(t)\big)$, $V(t) = \big(V_1(t), V_2(t), \ldots, V_{N-1}(t)\big)$ *ფუნქციებისკენ შესაბამისად, როცა* $h \to 0$ *და* $L_2(0,1)$ *ნორმის დისკრეტული ანალოგისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას*

$$\|u(t) - U(t)\|_h + \|v(t) - V(t)\|_h \leq Ch.$$

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია კრებადობის თეორემა (21) და (22) ამოცანების შესაბამისი შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემებისთვის:

$$\begin{gathered}
u_{t,i}^j - \left\{ a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2 \right] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + g\left(u_i^{j+1}\right) = f_{1,i}^j, \\
v_{t,i}^j - \left\{ a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2 \right] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + g\left(u_i^{j+1}\right) = f_{2,i}^j, \\
i = 1,2,\ldots,N-1; \quad j = 0,1,\ldots,M-1, \\
u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad i = 0,1,\ldots,M, \\
u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\ldots,N
\end{gathered} \tag{25}$$

და

$$\begin{gathered}
u_{t,i}^j - a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^{N} \left[\left(u_{\bar{x},\ell}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},\ell}^k\right)^2 \right] \right) u_{\bar{x}x,i}^{j+1} + g\left(u_i^{j+1}\right) = f_{1,i}^j, \\
v_{t,i}^j - a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^{N} \left[\left(u_{\bar{x},\ell}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},\ell}^k\right)^2 \right] \right) v_{\bar{x}x,i}^{j+1} + g\left(v_i^{j+1}\right) = f_{2,i}^j,
\end{gathered} \tag{26}$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1; \quad j = 0,1,\ldots,M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad i = 0,1,\ldots,M,$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

თეორემა 10. *თუ $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (21) და (22) ამოცანებს გააჩნიათ საკმაოდ გლუვი ამონახსნი, მაშინ (25) და (26) სხვაობიანი სქემები მდგრადია და მათი ამონახსნი $u^j = (u_1^j, u_2^j, \ldots, u_{N-1}^j)$, $v^j = (v_1^j, v_2^j, \ldots, v_{N-1}^j)$, მიისწრაფის $U^j = (U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{N-1}^j)$, $V^j = (V_1^j, V_2^j, \ldots, V_{N-1}^j)$ ფუნქციებისკენ შესაბამისად, როცა $\tau \to 0$, $h \to 0$ და $L_2(0,1)$ ნორმის დისკრეტული ანალოგისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:*

$$\left\| u^j - U^j \right\|_h \leq C(\tau + h), \qquad \left\| v^j - V^j \right\|_h \leq C(\tau + h), \qquad j = 1,2,\ldots,M.$$

მესამე თავის ბოლო, მესამე პარაგრაფში მოყვანილია ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების შესაბამისი სხვაობიანი სქემების რეალიზაცია და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგად მიღებული გრაფიკული ილუსტრაციები. არაწრფივობის კოეფიციენტისათვის აღებულია შემდეგი სახის კონკრეტული ფუნქცია $a(S) = (1+S)^p$, $0 < p \leq 1$. მოყვანილია რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები $p = 1$ შემთხვევისათვის.

აქვე აღვნიშნავთ, რომ მაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის შესწავლისთვის ჩატარებულია მრავალრიცხოვანი გამოთვლითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა სახის სასაზღვრო პირობისა და განსხვავებული p მაჩვენებლის შემთხვევისთვის. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები გვიჩვენებს, რომ საწყის ეტაპზე მაგნიტური ველის შეღწევის პროცესი როცა $p \to 1$, თვისობრივად განსხვავდება $p = 1$ ანუ $a(S)$ ფუნქციის წრფივი შემთხვევისგან, თუმცა გააჩნია ანალოგიური ასიმპტოტური ხასიათი დროის დიდი მნიშვნელობებისთვის. დასაწყისში გარემოს სასაზღვრო ზოლში მაგნიტური ველის ენერგიის დიდი ნაწილი გამოიყოფა სითბური ენერგიის სახით, შემდეგ კი სითბოგამტარობის სტრუქტურა იწვევს ტემპერატურის თანდათან გათანაბრებას. ერთთან ახლოს მყოფი ხარისხის მაჩვენებლისთვის ველის გავრცელება მიმდინარეობს შედარებით ნელა.

პარამეტრთა სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ჩატარებული გამოთვლები გვაძლევენ შემოთავაზებული ალგორითმების ეფექტურობას და ადასტურებენ თეორიული გამოკვლევების შედეგებს ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევისათვის.

მთლიანობაში, რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები საშუალებას იძლევა აღიწეროს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის ზოგიერთი ძირითადი თვისება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობაც ხასიათდება სპეციალური არაწრფივობით.

დისერტაციის დასასრულს მოცემულია რეზიუმე, რომელშიც შეჯამებულია დისერტაციის ძირითადი შედეგები. პირველ და მესამე თავებში მოყვანილია სხვადასხვა პროგრამული კოდების ფრაგმენტები, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულ იქნა მრავალრიცხოვანი რიცხვითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა ტიპის ამოცანისა და ამოცანებში შემავალი შესაბამისი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნე-ლობებისათვის. რიცხვითი ექსპერიმენტებისათვის სარეალიზაციო ალგორითმების დასაპროგრამებლად გამოყენებულ იქნა ისეთი თანამედროვე პროგრამირების ენები და პროგრამული პაკეტები როგორებიცაა C++, Mathcad, Matlab, Maple.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოყვანილია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. Jangveladze T., Chilachava T., Kratsashvili M. Convergence analysis for finite difference scheme of one nonlinear integro-differential model with source term. *4th International Conference on Pure and Applied Sciences (Renewable Energy), ICPAS 2017, Book of Abstracts,* p.48.
2. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. Uniqueness of solution ad fully discrete scheme to nonlinear integro-differential averaged model with source terms. *Miskolc Mathematical Notes,* 2018, V.19, N2, p.907-921.
3. Jangveladze T., Kratsashvili M. Some properties of solution and finite difference scheme for one nonlinear partial differential model based on Maxwell system. *Mem. Differential Equations Math. Phys.,* 2018, V.73, p.83-92.
4. Jangveladze T., Kiguradze Z. Kratsashvili M. Correctness of the initial-boundary value problem and discrete analogs for one nonlinear parabolic integro-differential equation. *International Journal of Pure Mathematics*, 2017, N4, p.7-11.
5. Jangveladze T., Kiguradze Z. Kratsashvili M. Some properties of solution and finite difference scheme for integro-differential model with source terms based on Maxwell system. *International Conference on Mathematics and Engineering, ICOME-2017, Book of Abstracts,* 2017, p.277.
6. Jangveladze T., Kratsashvili M. On the stability of stationary solution and numerical approximation for one nonlinear model. *SIAM Annual Meeting (AN16), AN16 Annual Meeting Abstracts,* 2016, p.22.
7. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. One nonlinear model based on Maxwell system. *39th Annual SIAM Southeastern Atlantic Section Conference, Abstracts Book*, (2015), p.39.
8. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. Asymptotic behavior of solution and semi-discrete scheme for one nonlinear averaged integro-differential equation with source term. *VI International Conference of the GMU,* 2015, p.123-124.
9. Jangveladze T., Kratsashvili M. Asymptotic behavior of solution and semi-discrete difference scheme for one nonlinear integro-differential equation with source term. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2014, V.28, p.50-53.
10. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On one nonlinear model describing electromagnetic field diffusion process. V International Conference of the GMU, 2014, p.108.
11. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On one two-dimensional model based on Maxwell system. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2015, V.29, p.64-67.
12. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On two dimensional nonlinear integrodifferential equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance. SIAM Annual Meeting (AN16), AN16 Annual Meeting Abstracts, 2016, p.25.

13. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one nonlinear partial integro-differential equation. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2016, V.30, p.47-50.

14. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one system of nonlinear partial integro-differential equations with source terms. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2017, V.31, p.75-78.

15. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one nonlinear parabolic averaged integro-differential equation. International Conference on Mathematics and Engineering, ICOME-2017, Book of Abstracts, 2017, p.133.

16. Kratsashvili M. On finite difference scheme for one integro-differential model with source terms based on Maxwell system. Bulletin of TICMI, 2017, V.21, N1, p.21-32.

Sokhumi State University

Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy

with the right of manuscript

Maia Kratsashvili

Investigation and Approximate Solution of the Maxwell System and its Integro-Differential Analogs

Submitted for the PhD degree in Mathematics

Author's Abstract

Tbilisi, 2019

Scientific advisers: **Temur Jangveladze**
Doctor of Physics and Mathematics. Professor of Georgian Technical University
Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Main Scientific Researcher of I.Vekua Institute of Applied Mathematics

Temur Chilachava
Doctor of Physics and Mathematics. Professor of Sokhumi State University

Experts: **Zurab Gegechkori**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Sokhumi State University

Dazmir Shulaia
Doctor of Physics and Mathematics. Professor of Georgian Technical University

Official Reviewers: **Romeo Galdava**
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Sokhumi State University

Hamlet Meladze
Doctor of Physics and Mathematics, Professor
Head of Department of Informatics of Niko Muskhelishvili Institute of Computational Mathematics

Dissertation will be presented at 18 January, 2020 at 14:00 at the session of the Dissertation Council of the Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy of the LEPL Sokhumi State University
Address: 26 Ana Politkovskaya Str., VII floor, 712 Presentation Room

Academic Secretary of the Dissertation Board,
Associate Professor Tsiala Dzidziguri

General Description of the Work

Actuality of the Topic

One of the most important tasks in applied mathematics is the mathematical modeling of practical problems and then their investigation and numerical solution by modern software packages.

To such problems belong the process of electromagnetic field penetration into a substance. It is well known that these processes are accompanied by the release of thermal energy, which causes changes in the permeability of the medium and affects the diffusion process since the coefficient of conductivity of the medium significantly depends on temperature. So, there is no doubt that the mathematical modeling, investigation and numerical solution have great importance for such kinds of diffusion problems.

Mathematical simulation of the mentioned process like many other applied problems leads to nonlinear partial differential and integro-differential equations and systems of those equations. The main characteristic of those systems is that they contain equations of a different order, which are strongly connected with each other. These circumstances require tailoring methods of investigation for each particular model, as the general theory even for such linear systems is not yet fully developed. Naturally, there arises the necessity of solving those problems numerically which itself requires to overcome significant difficulties as well. Naturally, there arises the necessity of solving those problems numerically which itself requires to overcome significant difficulties as well. In fact, the main peculiarity of the required and recommended specific investigation methods is associated with obtaining and then applying the a-priory estimates which are necessary for the initial-boundary value problems as well as to construct and investigate discrete analogs and algorithms of approximate solution for the above-mentioned.

The complexity of the investigated models leads to the use of appropriate software in both theoretical and computational mathematics and modern programming languages. Where comprehensive theoretical studies are not possible, numerical experiments play an important role, requiring the use of appropriate fields of computer science.

It is noteworthy that in the mathematical description of the studying process the differential and integro-differential models arise. The nonlinear model describing many diffusion processes is the object of research interests for many scientists. The most important part of modern computational mathematics is to determine the structural and qualitative characteristics of the solution of corresponding initial-boundary value problems for the above-mentioned systems as well as to study discrete analogs and numerical algorithms.

Nonlinear differential and integro-differential equations and their systems describing various processes of diffusion were and still are the object of research for many scientists. Establishing of qualitative and structural characteristics of initial-boundary value problems of those systems, constructing of discrete analogs and investigation of numerical algorithms are actual and quickly developing parts of modern computational mathematics and informatics.

Considered integro-differential models at first was proposed in the following work Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear parabolic problems (Russian). Differencial'nye Uravnenyia, 1983, V.19, p.1197-1207. English translation: Differential Equations, 1983, V.19, p.887-895. Mentioned and similar models were arisen on one hand – while describing diffusion processes, and on the other hand – discussing well known nonlinear parabolic type problems, which are studied in lots of scientific works. The particularity of those equations and systems of equations is that coefficients with high order derivatives are nonlinear, which depend on integrals with respect to time and space variables from unknown functions and their derivatives.

Modeling and mathematical aspects of different kind diffusion problems, which are connected with the stability, existence, theorems of uniqueness and asymptotic behavior of solutions of the initial-boundary value problems are actual topics of many scientists.

To study the real applied problems without modern computers is unimaginable. It is also obvious that numerical experiments are necessary for simulation of nonlinear problems and for developing methods of solutions.

The Object and Purpose of the Study

The goal of the dissertation is to study the above-mentioned models. In particular, the study of some properties, construction and investigation of corresponding discrete analogs, compiling realization algorithms and software and numerical solution for nonlinear partial differential and integro-differential systems describing diffusion processes of electromagnetic field penetration were planned.

Scientific Novelty and Main Results

As already has been mentioned, in the mathematical description of many processes, the differential and integro-differential models arise. Most of the cases those models are nonlinear that complicates the study of initial-boundary value problems posed for them. One important nonlinear evolutionary model is obtained in the mathematical modeling of processes of electromagnetic field propagation. In some assumptions, the corresponding system of Maxwell equations can be reduced to the nonlinear parabolic type integro-differential models. In the present work, the initial-boundary value problems for a nonlinear partial differential system of the Maxwell equations for different cases are investigated. The questions of the asymptotic behavior of solutions and the approximate solution are also studied. The aforementioned problems mainly are conditioned by real physical problems, but part of them is the result of natural mathematical generalization as well. The quantitative and qualitative characteristics of solutions of initial-boundary value problems as well as construction and investigation of semi-discrete and fully discrete analogs for the approximate solution for the above-mentioned differential and integro-differential models are studied. Based on the studied algorithms, the software packages are created for carrying out various numerical experiments and analysis of obtained results. The investigations are fulfilled for different cases of nonlinearity, applying the corresponding methods and fields of analysis and computer sciences. Numerical calculations for different test problems are fulfilled and analysis of the obtained results is carried out.

Approbation of the Work

The main results of the dissertation have been published in the following papers [2 - 4, 9, 11, 13, 14, 16] and have been reported at international scientific conferences both in Georgia and abroad. In particular, at the Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University (Tbilisi, 2014-2017); At the V and VI International Conferences of the Georgian Mathematical Union (Batumi, 2014 and 2015) [8, 10]; At the International Conference on the Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM) (Alabama, USA, 2015; Boston, USA, 2016) [6, 7, 12]; International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017, Istanbul, Turkey, 2017) [5, 15]; 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Energy (ICPAS-2017, Istanbul, Turkey, 2017) [1]. In 2016, the author of the doctoral thesis was awarded for a doctoral grant fellow, which was successfully completed in 2018. The main findings of the grant were presented at the international conferences ICOME-2017 and ICPAS-2017 in Istanbul, Turkey in May and November 2017.

The Volume and Structure of the Dissertation

The dissertation contains 112 printed pages. It consists of an introduction, three chapters, ten sections, a resume and a list of used literature.

Summary of the work

In the first chapter, the mathematical modeling of the process of penetrating the electromagnetic field in the substance the coefficient of electro-conductivity of which depends on temperature is considered. In the first section, based on the Maxwell system statement of the general diffusion problem is given. As a result, the system of nonlinear partial differential equations is obtained. The second section describes some mathematical peculiarity of diffusion problems. The existence of a global solution to the corresponding initial-boundary value problems is discussed. In particular, examples of nonlinear systems and its analytical solutions are constructed, which show that these systems, in general, do not have global solutions. In the same chapter for one diffusion problem, the large time behavior of the solution is studied. The possibility of Hopf bifurcation is established.

In this section, the following system is considered:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right], \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F\left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{2}$$

where a and F are known functions of their arguments, and U, V and S are unknown functions.

Many applied problems in science and technology are modeled by (1), (2) systems of nonlinear differential equations. In particular, if

$$F\left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = b(S) + c(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{3}$$

where b and c are the given functions of their argument, then (1) - (3) represents the variant of the system of Maxwell equations, which describes the propagation of a magnetic field in a medium, the coefficient of electrical conductivity of which depends on temperature.

Above-mentioned system and systems like that also arise in description of different kinds of physical processes.

If instead of equation (2) to the system (1) the following equation is attached

$$\frac{\partial S}{\partial t} = b(S) + c(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[d(S)\frac{\partial S}{\partial x}\right], \tag{4}$$

where d is also known function of its argument, then system (1), (4) again simulates the process of penetration of a magnetic field into a substance. In equation (8), the second term corresponds to the Joule heating, and the third to the heat conduction effect.

In the same section, for one diffusion problem, the large time behavior of the solution is studied. The possibility of the appearance of a Hopf type bifurcation is established.

The mentioned problem has the following form:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -aS^{\beta} + bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{5}$$

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$

$$U(1,t) = \psi_1, \qquad V(1,t) = \psi_2, \tag{6}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \;\; V(x,0) = V_0(x), \;\; S(x,0) = S_0(x) > 0,$$

where $\alpha, \beta, \gamma \in R,\ \alpha \neq 0,\ a, b \in R^+,\ \psi_1 = const > 0,\ \psi_2 = const > 0.$

Let us proceed to the formulation of the main theorems of the first chapter.

Theorem 1. *If* $2\alpha + \beta - \gamma > 0, \beta \neq \gamma$, *then stationary solution of problem (5), (6)*

$$\left(\psi_1 x, \qquad \psi_2 x, \qquad \left(\frac{\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)b}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}}\right)$$

is linearly stable if and only if the following inequality is fulfilled

$$a(\gamma - \beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2.$$

As the last inequality shows, if γ < β, then stationary solution of above-mentioned problem (5), (6) is always stable. Suppose that, $\gamma > \beta$ and $\beta - \alpha - 1 \neq 0$. Consider the value

$$\psi_s = \left[\frac{\pi^2}{\gamma - \beta} a^{\frac{\gamma-\alpha-1}{\beta-\gamma}} b^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta-\gamma}}\right]^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}},$$

then when $\psi \in (0, \psi_s)$, where $\psi = \psi_1^2 + \psi_2^2$, the stationary solution of problem (5), (6) is linearly stable, and when $\psi > \psi_s$ it becomes unstable. When $\psi = \psi_s$, there is a possibility of the appearance of a Hopf type bifurcation. Small perturbations can transfer the stationary solution into time-periodic oscillations.

In the same section, for one particular case of system (5)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial U}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -S + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2, \tag{7}$$

The following theorem is proved.

Theorem 2. *Stationary solution of problem (5), (6)*

$$\left(\psi_1 x,\ \psi_2 x,\ {\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right),$$

is globally stable in the norm of the space $L_2(0,1)$ *and the asymptotic behavior has an exponential character.*

If, for system (5), instead of (6) consider the following initial-boundary conditions:

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$
$$S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \psi_1, \qquad S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \psi_2, \tag{8}$$
$$U(x,0) = U_0(x),\ V(x,0) = V_0(x),\ S(x,0) = S_0(x) > 0,$$

then the following theorem is valid.

Theorem 3. *If* $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, *then stationary solution of problem (5), (8)*

$$\left(\psi_1\left[\frac{({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)b}{a}\right]^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \quad \psi_2\left[\frac{({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)b}{a}\right]^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \quad \left[\frac{({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)b}{a}\right]^{\frac{1}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right)$$

is linearly stable if and only if the following inequality is fulfilled

$$(\gamma - \beta) b^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} a^{\frac{3\alpha-\gamma+1}{2\alpha+\beta-\gamma}} ({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2)^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} < \frac{\pi^2}{4}.$$

If for the system (7) the boundary conditions at the right boundary is substituted with the second kind boundary conditions, i.e., consider the following initial-boundary value problem:

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$

$$S\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=1} = \psi_1, \qquad S\frac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=1} = \psi_2, \tag{9}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \;\; V(x,0) = V_0(x), \;\; S(x,0) = S_0(x) > 0,$$

then the following theorem is valid.

Theorem 4. *Stationary solution of problem (7), (9)*

$$\left(\psi_1\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)^{-\frac{1}{3}}x, \qquad \psi_2\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)^{-\frac{1}{3}}x, \qquad \left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

is globally stable in the norm of the space $L_2(0,1)$ *and the asymptotic behavior has an exponential character.*

In the third section the initial boundary value problem (5), (6) is considered and its approximate solution is studied. Introducing the following notation $E = S^{1/2}$ the system (5) can be rewritten in the form:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{a}{2}E^{2\beta-1} + \frac{b}{2}E^{2\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{10}$$

For the obtained problem (6), (10), the following implicit difference scheme is constructed:

$$u_t = (e^{2\alpha}u_{\bar{x}})_x, \quad v_t = (e^{2\alpha}v_{\bar{x}})_x,$$

$$e_t = -\frac{a}{2}e^{2\beta-1} + \frac{b}{2}e^{2\gamma-1}(u_{\bar{x}}^2 + v_{\bar{x}}^2),$$

$$u_0^j = v_0^j = 0, \quad u_N^j = \psi_1, \quad v_N^j = \psi_2, \quad j = 0,1.\dots,M, \tag{11}$$

$$u_i^0 = U_0(x_i), \quad v_i^0 = V_0(x_i), \quad e_i^0 = \left[S_0(x_{i+1/2})\right]^{1/2}, \quad i = 0,1,\dots,N.$$

Suppose a problem (5), (6) has enough smooth solution. It is not difficult to show that on such a solution the approximation error of the scheme (11) is $O(\tau + h^2)$. The following convergence theorem for the scheme (11) is proved.

Theorem 5. *If* $\beta \geq 1/2$, $\alpha = \gamma$, $|\alpha| \leq 1/2$, *then difference scheme (11) converges to the solution of problem (6), (10) in discrete analogues of the norms of the space* L_{2h}.

The fourth section is devoted to the questions of the numerical realization of the constructed non-linear scheme (11). Algorithmization of one simple iterative process is described, which at each iteration leads to the double use of the ordinary tridiagonal matrix algorithm. Another approach to the implementation of the considered schemes was also applied. This latter algorithm is based on the use of a modified version of Newton's method, with which the difference problems are reduced to a block tridiagonal linear system. The solution to this last is carried out using a block tridiagonal matrix algorithm. The corresponding test calculations confirm the effectiveness of the proposed numerical solution algorithms.

Numerical experiments carried out in conditions of Theorem 1 showed the convergence of the approximate solution to the stationary one. The corresponding graphic illustrations are given in the fourth section of the first chapter (Figs. 1.4.1 - 1.4.4). The similar pictures are obtained for Theorem 3 as well. As to the statement for the global stability (Theorems 2 and 4), the numerical experiments carried in that case gave the expected natural picture of the convergence of the approximate solution to a stationary solution (see Figs. 3.3.5 - 3.3.16 in chapter four). Graphical illustrations depicting Hopf's bifurcation are also provided at the end of the fourth section (Figs. 1.4.9 and 1.4.10).

The first section of the second chapter discusses the reduction of the Maxwell system of differential equations to the system of integro-differential equations. In the same section, some of their mathematical properties are given. One must note that the above-mentioned reduction for the Maxwell system was first proposed in the work Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear parabolic problems (Russian). Differencial'nye Uravnenyia, 1983, V.19, p.1197-

1207. As a result, a new class of nonlinear integro-differential equations has been adopted, to which scientific interest is still increasing. In the same chapter, the large time behavior of solutions for one integro-differential model and for the corresponding system with source terms is investigated. The rates of asymptotic stabilization behavior are indicated.

Consider the reductions of the system of Maxwell differential equations to the system of integro-differential equations. Suppose that the electromagnetic field propagates in a substance whose electrical conductivity coefficient depends on temperature. In the quasistationary approximation, the corresponding Maxwell system has the form:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot(\nu_m rotH), \tag{12}$$

$$c_\nu \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu_m (rotH)^2, \tag{13}$$

where $H = (H_1, H_2, H_3)$ is vector of magnetic field intensity, θ is temperature, c_ν and ν_m characterize the heat capacity and electrical conductivity of the medium. Equations (12) and (13) describe the propagation of the magnetic field in the medium and change of the temperature due to Joule heating correspondingly.

If $c_\nu = c_\nu(\theta)$ and $\nu_m = \nu_m(\theta)$, then after integrating the equation (13) with respect to time and substituting it in system (12), we get

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot\left[a\left(\int_0^t |rotH|^2 d\tau\right) rotH\right], \tag{14}$$

Where coefficient $a(S)$ is defined by functions c_ν and ν_m.

Above-mentioned integro-differential model is complex and can be studied only for particular classes.

Consider the case when vector of the magnetic field has two components $H = (0, U, V)$, where $U = U(x,t)$, $V = V(x,t)$ are functions of time and one spatial variable. In that case $rotH = \left(0, -\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$, and system (14) takes the following form:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]=0,\\
&\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Assuming temperature is constant along the substance, i.e. dependent on time, but independent of spatial variables, then if $H=(0,U,V)$, and then we get a system analogical to (15):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,\\
&\frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

The second section discusses the following system with source terms corresponding to (15) and (16) systems:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+g(U)=f_1(x,t),\\
&\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]+g(V)=f_2(x,t)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+g(U)=f_1(x,t),\\
&\frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=+g(V)=f_2(x,t).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

where $a=a(S)$, g, f_1, f_2 are given functions of their arguments.

Large time behavior of solution of the following initial-boundary value problem posed for systems (17) and (18) is studied

$$U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{19}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad x \in [0,1]. \tag{20}$$

In particular, the following theorem is proved.

Theorem 6. *if* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, g *is positively defined function and* $U_0, V_0 \in L_2(0,1)$, *then for the solution of problems (17), (19), (20) and (18) - (20) the following estimation is valid in the norm of the space* $L_2(0,1)$

$$\|U\| + \|V\| \leq Ce^{-a_0 t}.$$

In the third section of the same chapter, the question of the uniqueness of solutions of problems (17), (19), (20) and (18) - (20) is discussed. In particular, the following theorem has been proved.

Theorem 7. *If* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g *is positively defined and monotonically growing function and problem (17), (19), (20) has a sufficiently smooth solution, than it is unique.*

The uniqueness theorem for problem (16) - (18) is also given.

Theorem 8. *If* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g *is positively defined and monotonically growing function and problem (18) - (20) has a sufficiently smooth solution, than it is unique.*

Numerical experiments carried out by using approximate solution algorithms developed in the third chapter of the dissertation also confirm both the validity of the theorem conclusions and the effectiveness of the mentioned algorithms.

In the third chapter for the systems of nonlinear integro-differential equations discussed in the previous chapter, semi-discrete models and difference schemes are constructed. The theorems of stability and convergence have been proved. A description of implementation algorithms and graphical illustrations of various numerical experiments are performed.

Let's get acquainted with the content of the third chapter in more detail.

In the first section for the following nonlinear integro-differential problems:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+g(U)=f_1(x,t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]+g(V)=f_2(x,t), \tag{21}$$

$$U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0,$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x)$$

and

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+g(U)=f_1(x,t),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+g(V)=f_2(x,t), \tag{22}$$

$$U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0,$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x).$$

the corresponding semi-discrete models are constructed:

$$\frac{du_i}{dt}-\left\{a\left(\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)u_{\bar{x},i}\right\}_x+g(u_i)=f_1(x,t),$$

$$\frac{dv_i}{dt}-\left\{a\left(\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)v_{\bar{x},i}\right\}_x+g(v_i)=f_2(x,t), \tag{23}$$

$$i = 1,2, \dots, N-1,$$

$$u_0(t) = u_N(t) = v_0(t) = v_N(t) = 0,$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, v_i(0) = V_{0,i}, i = 0,1, \dots, N$$

and

$$\frac{du_i}{dt} - a\left(h\int_0^t \sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)u_{\bar{x}x,i} + g(u_i) = f_1(x,t),$$

$$\frac{dv_i}{dt} - a\left(h\int_0^t \sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)v_{\bar{x}x,i} + g(v_i) = f_2(x,t), \tag{24}$$

$$i = 1,2, \dots, N-1,$$

$$u_0(t) = u_N(t) = v_0(t) = v_N(t) = 0,$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, v_i(0) = V_{0,i}, i = 0,1, \dots, N.$$

The validity of the following theorem is shown.

Theorem 9. *If* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g *is positively defined and monotonically growing function and problem (18) - (20) has a sufficiently smooth solution, then schemes (23) and (24) are stable and when* $h \to 0$, *their solution* $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t)\right)$, $v(t) = \left(v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N-1}(t)\right)$ *converges to the functions* $U(t) = \left(U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N-1}(t)\right)$, $V(t) = \left(V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N-1}(t)\right)$ *correspondingly and in discrete analogue of the norms of the space* $L_2(0,1)$ *the following estimation holds*

$$\|u(t) - U(t)\|_h + \|v(t) - V(t)\|_h \leq Ch.$$

In the second section, the convergence theorem for the following implicit difference scheme, corresponding to problems (21) and (22), is proved:

$$u_{t,i}^j - \left\{a\left(\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)u_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}_x + g\left(u_i^{j+1}\right) = f_{1,i}^j, \tag{25}$$

$$v_{t,i}^{j} - \left\{ a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2 \right] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + g\left(u_i^{j+1}\right) = f_{2,i}^{j},$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1; \quad j = 0,1,\ldots,M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad i = 0,1,\ldots,M,$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\ldots,N$$

and

$$u_{t,i}^{j} - a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^{N} \left[\left(u_{\bar{x},\ell}^{k}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},\ell}^{k}\right)^2 \right] \right) u_{\bar{x}x,i}^{j+1} + g\left(u_i^{j+1}\right) = f_{1,i}^{j},$$

$$v_{t,i}^{j} - a\left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^{N} \left[\left(u_{\bar{x},\ell}^{k}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},\ell}^{k}\right)^2 \right] \right) v_{\bar{x}x,i}^{j+1} + g\left(v_i^{j+1}\right) = f_{2,i}^{j}, \quad (26)$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1; \quad j = 0,1,\ldots,M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad i = 0,1,\ldots,M,$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

Theorem 10. *If* $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g *is positively defined and monotonically growing function and problem (21) - (22) has a sufficiently smooth solution, then schemes (23) and (24) are stable and when* $\tau \to 0$, $h \to 0$, *their solution* $u(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{N-1}(t)\right)$, $v(t) = \left(v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{N-1}(t)\right)$ *converges to the functions* $U(t) = \left(U_1(t), U_2(t), \ldots, U_{N-1}(t)\right)$, $V(t) = \left(V_1(t), V_2(t), \ldots, V_{N-1}(t)\right)$ *correspondingly, and in discrete analogue of the norms of the space* $L_2(0,1)$ *the following estimations hold:*

$$\left\| u^j - U^j \right\|_h \leq C(\tau + h), \qquad \left\| v^j - V^j \right\|_h \leq C(\tau + h), \qquad j = 1,2,\ldots,M.$$

The last, third paragraph of chapter three deals with the realization of the different schemes corresponding to the integro-differential models and graphical illustrations which are obtained from the numerical experiments. For the nonlinearity coefficient the following specific function is taken $a(S) = (1 + S)^p$, $0 < p \leq 1$. The results of numerical experiments for $p = 1$ are given.

Note that, to study the process of diffusion of a magnetic field, numerical experiments were carried out for various boundary conditions and for different values of exponent p. The results of numerical experiments show that at the initial stage, when $p \to 1$, the process of penetration of the magnetic field is different from the case $p = 1$, i.e. when the linear case of function $a(S)$ is considered, although it has a similar large time asymptotic behavior. In the beginning, a significant part of the magnetic field energy is released as heat in the near-boundary zone, and later the conductivity structure leads to equalization of the temperature. With the exponent close to one, the field penetration is rather slow.

The numerical experiments carried out for different values of parameters, show the efficiency of the proposed algorithms and confirm the results of the theoretical studies for the asymptotic behavior of the solutions.

In general, the results of numerical experiments allow describing some of the main properties of the penetration process of an electromagnetic field into a substance, the electrical conductivity of which is characterized by a special type of non-linearity.

At the end of the dissertation is given a resume, which outlines the main results of the thesis. In the first and third chapters, the snapshots of various software codes are presented that were applied for carrying out various numerical experiments fulfilled on different types of problems and for the different values of input parameters of those problems. Modern programming languages and software packages such as C ++, Mathcad, Matlab, Maple have been used for the implementation of the algorithms.

The main results of the thesis are given in the following publications:

1. Jangveladze T., Chilachava T., Kratsashvili M. Convergence analysis for finite difference scheme of one nonlinear integro-differential model with source term. 4th International Conference on Pure and Applied Sciences (Renewable Energy), ICPAS 2017, Book of Abstracts, p.48.
2. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. Uniqueness of solution ad fully discrete scheme to nonlinear integro-differential averaged model with source terms. Miskolc Mathematical Notes, 2018, V.19, N2, p.907-921.
3. Jangveladze T., Kratsashvili M. Some properties of solution and finite difference scheme for one nonlinear partial differential model based on Maxwell system. Mem. Differential Equations Math. Phys., 2018, V.73, p.83-92.
4. Jangveladze T., Kiguradze Z. Kratsashvili M. Correctness of the initial-boundary value problem and discrete analogs for one nonlinear parabolic integro-differential equation. International Journal of Pure Mathematics, 2017, N4, p.7-11.
5. Jangveladze T., Kiguradze Z. Kratsashvili M. Some properties of solution and finite difference scheme for integro-differential model with source terms based on Maxwell system. International Conference on Mathematics and Engineering, ICOME-2017, Book of Abstracts, 2017, p.277.
6. Jangveladze T., Kratsashvili M. On the stability of stationary solution and numerical approximation for one nonlinear model. SIAM Annual Meeting (AN16), AN16 Annual Meeting Abstracts, 2016, p.22.
7. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. One nonlinear model based on Maxwell system. 39th Annual SIAM Southeastern Atlantic Section Conference, Abstracts Book, (2015), p.39.
8. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. Asymptotic behavior of solution and semi-discrete scheme for one nonlinear averaged integro-differential equation with source term. VI International Conference of the GMU, 2015, p.123-124.
9. Jangveladze T., Kratsashvili M. Asymptotic behavior of solution and semi-discrete difference scheme for one nonlinear integro-differential equation with source term. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2014, V.28, p.50-53.
10. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On one nonlinear model describing electromagnetic field diffusion process. V International Conference of the GMU, 2014, p.108.
11. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On one two-dimensional model based on Maxwell system. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2015, V.29, p.64-67.
12. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On two dimensional nonlinear integrodifferential equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance. SIAM Annual Meeting (AN16), AN16 Annual Meeting Abstracts, 2016, p.25.

13. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one nonlinear partial integro-differential equation. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2016, V.30, p.47-50.
14. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one system of nonlinear partial integro-differential equations with source terms. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math., 2017, V.31, p.75-78.
15. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one nonlinear parabolic averaged integro-differential equation. International Conference on Mathematics and Engineering, ICOME-2017, Book of Abstracts, 2017, p.133.
16. Kratsashvili M. On finite difference scheme for one integro-differential model with source terms based on Maxwell system. Bulletin of TICMI, 2017, V.21, N1, p.21-32.