

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

გამოყენებითი მათემატიკის სადოქტორო პროგრამა

მაია კრაწაშვილი

მაქსველის სისტემისა და მისი ინტეგრო-დიფერენციალური
ანალოგების გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა

ინფორმატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

თბილისი, 2019

ანოტაცია. მრავალი პროცესის მათემატიკური აღწერისას მიიღება დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელები. უმეტეს შემთხვევაში ეს მოდელები არაწრფივია, რაც ართულებს მათთვის დასმული საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას. ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი არაწრფივი ევოლუციური მოდელი წარმოიშობა ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას. გარკვეულ დაშვებებში მაქსველის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია რედუცირებულ იქნას არაწრფივ პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალურ მოდელებზე. სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანები არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი მაქსველის სისტემების სხვადასხვა შემთხვევისათვის. ასევე შესწავლილია ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევისა და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები. აღნიშნული პრობლემატიკა ძირითადად განპირობებულია რეალური ფიზიკური ამოცანებით, თუმცა მათი გარკვეული ნაწილი ბუნებრივი მათემატიკური განზოგადების შედეგაცაა. აღნიშნული დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისათვის შესწავლილია როგორც საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისებრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლები, ასევე მიახლოებითი ამოხსნის ნახევრად-დისკრეტული და სრულიად დისკრეტული ანალოგები. შესწავლილი ალგორითმების საფუძველზე შექმნილია პროგრამული პაკეტები, რომელთა გამოყენებითაც ჩატარებულია მრავალრიცხოვანი რიცხვითი ექსპერიმენტი და მიღებული შედეგების ანალიზი. კვლევები განხორციელებულია სხვადასხვა სახის არაწრფივობებისთვის ანალიზისა და კომპიუტერული მეცნიერებების შესაბამისი დარგების გამოყენებით. რიცხვითი გათვლები შესრულებულია სხვადასხვა ტესტური ამოცანისათვის და ჩატარებულია მიღებული შედეგების ანალიზი.

Sokhumi State University

Mathematic and Computer Sciences
PhD Program of Applied Mathematics

Investigation and Approximate Solution of the Maxwell System and its Integro-Differential Analogs

Maia Kratsashvili

DISERTATION

Submitted for the PhD degree in Applied Mathematics

Scientific advisers:

Doctor of Physics and Mathematics,

Professor **Temur Jangveladze**

Doctor of Physics and Mathematics,

Professor **Temur Chilachava**

Tbilisi, 2019

Abstract. In the mathematical description of many processes, the differential and integro-differential models arise. Most of the cases those models are nonlinear that complicates the study of initial-boundary value problems posed for them. One important nonlinear evolutionary model is obtained in the mathematical modeling of processes of electromagnetic field propagation. In some assumptions, the corresponding system of Maxwell equations can be reduced to the nonlinear parabolic type integro-differential models. In the present work, the initial-boundary value problems for a nonlinear partial differential system of the Maxwell equations for different cases are investigated. The questions of the asymptotic behavior of solutions and the approximate solution are also studied. The aforementioned problems mainly are conditioned by real physical problems, but part of them is the result of natural mathematical generalization as well. The quantitative and qualitative characteristics of solutions of initial-boundary value problems as well as construction and investigation of semi-discrete and fully discrete analogs for the approximate solution for the above-mentioned differential and integro-differential models are studied. Based on the studied algorithms, the software packages are created for carrying out various numerical experiments and analysis of obtained results. The investigations are fulfilled for different cases of nonlinearity, applying the corresponding methods and fields of analysis and computer sciences. Numerical calculations for different test problems are fulfilled and analysis of the obtained results is carried out.

როგორც ავტორი წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომისა, ვაცხადებ, რომ ნაშრომში ასახულია საკუთარი ორიგინალური ნამუშევარი. მასში სათანადო წესების შესაბამისად ციტირებულია სხვა ავტორების მიერ აქამდე გამოქვეყნებული, გამოსაქვეყნებლად მიღებული ან დასაცავად წარდგენილი მასალები.

უდიდესი მადლიერებით მინდა აღვნიშნო დისერტაციის სამეცნიერო ხელმძღვანელის, პროფ. თემურ ჯანგველაძის მიერ დისერტაციის დამუშავების პროცესში გაწეული მხარდაჭერა. ასევე მსურს გამოვხატო ჩემი ღრმა პატივისცემა სამეცნიერო ხელმძღვანელის, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადოქტორო პროგრამა „გამოყენებითი მათემატიკის“ ხელმძღვანელის, პროფ. თემურ ჩილაჩავას მიმართ სადისერტაციო ნაშრომის მომზადებაში შეტანილი წვლილისათვის. უცილობლად ხაზგასასმელია აკადემიური დოქტორის მიხეილ გაგოშიძის მიერ (სოხუმის უნივერსიტეტის ინფორმატიკის სადოქტორო პროგრამის პირველი კურსდამთავრებული) ალგორითმების კომპიუტერული რეალიზაციის პროცესში გაწეული კონსულტაციები.

მაია კრაწაშვილი

2019 წელი

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი.....	2
თავი I - მაქსველის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური ერთი კერძო სისტემის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა	19
§ 1.1. ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის ზოგადი ამოცანა	19
§ 1.2. სტაციონარული ამონახსნის მდგრადობის შესახებ	23
§ 1.3. სხვაობიანი სქემების მდგრადობა და კრებადობა	35
§ 1.4. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები.....	39
თავი II - მაქსველის დიფერენციალური განტოლებების რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე და ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას	48
§ 2.1. მაქსველის დიფერენციალური განტოლებების რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე	48
§ 2.2. ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას.....	54
§ 2.3. ამონახსნის ერთადერთობა	57
თავი III - ნახევრად-დისკრეტული და სასრულ-სხვაობიანი სქემების მდგრადობა და კრებადობა.....	61
§ 3.1. ნახევრად-დისკრეტული სქემების მდგრადობა და კრებადობა	61
§ 3.2. სხვაობიანი სქემების მდგრადობა და კრებადობა	71
§ 3.3. სხვაობიანი სქემების რეალიზაცია და გრაფიკული ილუსტრაციები.....	82
დასკვნა	98
ლიტერატურა	100

შესავალი

გამოყენებით მათემატიკაში ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანად იკვეთება პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მოდელირება, ხოლო შემდეგ თანამედროვე პროგრამული პაკეტების საშუალებით მათი გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა.

ამგვარი ამოცანების რიცხვს მიეკუთვნება გარემოში ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესები. ცნობილია, რომ აღნიშნულ პროცესებს თან ახლავს სითბური ენერჯის გამოყოფა, რაც იწვევს გარემოს გამტარიანობის ცვლილებას და გავლენას ახდენს დიფუზიის პროცესზე, ვინაიდან გარემოს ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი, თავის მხრივ არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე. ექვგარეშეა, რომ დიფუზიის ასეთი ამოცანებისთვის მათემატიკური მოდელების აგებას, შემდეგ მათ გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება.

მრავალი გამოყენებითი ამოცანის, ისევე როგორც ზემოთ ნახსენები პროცესების მოდელირებისას, მიიღება არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური, ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და განტოლებათა სისტემები. ძირითადად ამ სისტემების თავისებურება გამოხატულია ერთმანეთთან ძლიერად დაკავშირებული სხვადასხვა რიგის განტოლებებით, რაც თავის მხრივ განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას ყოველი კონკრეტული სისტემისთვის რამეთუ ზოგადი თეორია ჯერჯერობით ამგვარი წრფივი მოდელებისთვისაც კი არასრულადაა განვითარებული. ბუნებრივად იბადება მსგავსი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის აუცილებლობის საკითხი, რაც თავის მხრივ შესაბამისი სირთულეების დამლევასთან არის დაკავშირებული. ძირითადად კვლევისთვის საჭირო და მოსახერხებელი ყოველი კონკრეტული მეთოდის თავისებურება ვლინდება შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების და მათი დისკრეტული ანალოგებისთვის აუცილებელი აპრიორული შეფასებების მიღებასა და მათ შემდგომ გამოყენებაში.

შესასწავლი მოდელების სირთულე განაპირობებს როგორც თეორიული ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების და თანამედროვე დაპროგრამების ენების ბაზაზე შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის ფართო გამოყენებას. იქ სადაც

სრულყოფილი თეორიული გამოკვლევა ვერ ხერხდება, მნიშვნელოვანი როლი უნდა ითამაშოს რიცხვითმა ექსპერიმენტებმა, რომელთა ჩატარება მოითხოვს კომპიუტერული მეცნიერებების შესაბამისი დარგების გამოყენებას.

აღსანიშნავია, რომ შესასწავლი პროცესის მათემატიკური აღწერა ხორციელდება დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებით. დიფუზიის მრავალი პროცესის აღმწერი არაწრფივი მოდელი არის მრავალი მეცნიერის კვლევის ობიექტი. ამ სისტემების შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისებრივი და სტრუქტურული მახასიათებლების დადგენა, დისკრეტული ანალოგების გამოკვლევა და რიცხვითი ალგორითმების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე გამოთვლითი მათემატიკის მეტად აქტუალურ ნაწილს.

ნაშრომის ძირითად მიზანს სწორედ ასეთი მოდელების შესწავლა წარმოადგენდა. კერძოდ, დაგეგმილი იყო ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის აღმწერი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, სარეალიზაციო ალგორითმების შედგენა, პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ამოხსნა.

სხვადასხვა სახის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები შეისწავლება მრავალ ნაშრომში (იხ. მაგალითად, [4, 5, 13, 21, 27, 32, 38, 42, 43, 45 - 47, 49, 50, 53 - 56, 61 - 65, 67, 68, 70 - 72, 76 - 79, 87, 93 - 96, 99]). განსახილველი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელები პირველად შემოთავაზებულია [32] შრომაში. აღნიშნული მოდელები წარმოიშვნენ ერთის მხრივ რეალური დიფუზიური პროცესების აღწერისას, ხოლო მეორეს მხრივ – არაწრფივი პარაბოლური ტიპის ცნობილი განტოლებების განზოგადებისას, რომელთა შესწავლას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი (იხ. მაგალითად, [20, 27, 42, 55, 68, 76] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). ამ განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ძირითადი დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულებთან გვხვდება არაწრფივი კოეფიციენტები, რომლებიც დამოკიდებულია სივრცითი და დროითი ცვლადების მიმართ საძიებელი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულებიდან აღებულ ინტეგრალებზე.

სხვადასხვა ბუნების დიფუზიური ამოცანების მოდელირება და მათემატიკური ასპექტები, რომლებიც დაკავშირებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მდგრადობის, არსებობის, ერთადერთობის თეორემებთან და ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხებთან, შესწავლილია მრავალ სამეცნიერო ნაშრომში (იხ. მაგალითად, [1 - 3, 7, 10 - 12, 15, 18, 20, 26, 27, 37, 40, 42, 67, 68, 76, 102, 107]).

რეალური ფიზიკური ამოცანების შესწავლა თანამედროვე კომპიუტერების გარეშე წარმოუდგენელია. არწრფივი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების განვითარება და მათ ბაზაზე სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისთვის გამოთვლითი ექსპერიმენტების აუცილებლობა ნათელია. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები განხილულია [1, 2, 6, 8, 9, 16, 22, 25, 28, 29, 33, 38, 40, 42, 55, 68, 76, 89, 90, 92, 115] და მრავალ სხვა ნაშრომში.

ჩვენ განვიხილავთ მაქსველის განტოლებათა სისტემაზე დაფუძნებულ ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკურ მოდელს ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსველის სისტემის და მისი მსგავსი მოდელების გამოკვლევას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი (იხ. მაგალითად, [7, 10 - 12, 14, 17 - 21, 23, 24, 26, 30, 31, 32, 34 - 36, 38, 39, 42 - 45, 48 - 54, 58 - 60, 66, 69, 76, 83 - 87, 91, 100, 102 - 107, 109 - 113]). ასევე მათი რიცხვითი ამოხსნის საკითხები განხილულია [1, 2, 4 - 6, 8, 13, 22, 25, 29, 38, 40 - 42, 44, 46, 47 - 51, 53 - 57, 62 - 65, 73 - 75, 77 - 81, 94 - 99, 101, 108, 114] შრომებში.

დისერტაცია შედგება შესავალის, სამი თავის, 10 პარაგრაფის, რეზიუმესა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისაგან.

პირველ თავში განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური აღწერა ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. პირველ პარაგრაფში მაქსველის სისტემის საფუძველზე მოცემულია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. შედეგად მიღებულია არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა. მეორე პარაგრაფში მოცემულია დიფუზიური ამოცანების ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. განხილულია შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო

ამოცანების გლობალური ამონახსნების არსებობის საკითხები. კერძოდ, აგებულია ისეთი არაწრფივი სისტემა და მისი ანალიზური ამონახსნების მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ აღნიშნულ სისტემებს საზოგადოდ გლობალური ამონახსნები არა აქვთ. ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანის ამონახსნისთვის შეისწავლება ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

ამ პარაგრაფში გამოკვლევა ჩატარებულია შემდეგ სისტემაზე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(S) \frac{\partial U}{\partial x} \right], \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(S) \frac{\partial V}{\partial x} \right], \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F \left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (0.2)$$

სადაც a და F თავიანთი არგუმენტების ცნობილი, ხოლო U, V და S კი უცნობი ფუნქციებია.

მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვა დარგების მრავალი გამოყენებითი პრობლემა მოდელირდება (0.1), (0.2) სახის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებით. კერძოდ, თუ

$$F \left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = b(S) + c(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (0.3)$$

სადაც b და c თავიანთი არგუმენტის მოცემული ფუნქციებია, მაშინ (0.1) - (0.3) სისტემა წარმოადგენს მაქსველის სისტემის ვარიანტს, რომლითაც აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

აღნიშნული და მისი მსგავსი სისტემები წარმოიშობა აგრეთვე მრავალი განსხვავებული ბუნების ფიზიკური პროცესის აღწერისას [12, 18, 26, 83, 102].

თუ (0.2) განტოლების ნაცვლად (0.1) სისტემას მივუერთებთ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{\partial S}{\partial t} = b(S) + c(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[d(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right], \quad (0.4)$$

სადაც d ასევე თავისი არგუმენტის მოცემული ფუნქციაა, მაშინ (0.1), (0.4) სისტემით კვლავ აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში, სადაც (0.4) განტოლებაში შემავალი მეორე შესაკრები შეესაბამება ჯოულის სითბოგამოყოფას, ხოლო მესამე კი სითბოგამტარობის ეფექტს. (0.1), (0.4) ტიპის სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა ჩატარებულია ნაშრომებში [1, 11, 29, 30, 42, 69, 98].

ამავე პარაგრაფში ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანისთვის შესწავლილია ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

აღნიშნულ ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -aS^\beta + bS^\gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (0.5)$$

$$U(0, t) = V(0, t) = 0,$$

$$U(1, t) = \psi_1, \quad V(1, t) = \psi_2, \quad (0.6)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x) > 0,$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$, $a, b \in R^+$, $\psi_1 = const > 0$, $\psi_2 = const > 0$.

ახლა გადავიდეთ დისერტაციის პირველი თავის ძირითადი თეორემების ჩამოყალიბებაზე.

თეორემა 0.1. თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, $\beta \neq \gamma$, მაშინ (0.5), (0.6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}} \right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება თანაფარდობა

$$a(\gamma - \beta) \left[\frac{b}{a} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2.$$

როგორც მიღებული პირობიდან ჩანს, თუ $\gamma < \beta$, მაშინ ზემოთ მოყვანილი (0.5), (0.6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი არის ყოველთვის წრფივად მდგრადი.

ვთქვათ, $\gamma > \beta$ და $\beta - \alpha - 1 \neq 0$. განვიხილოთ სიდიდე

$$\psi_s = \left[\frac{\pi^2}{\gamma - \beta} a^{\frac{\gamma - \alpha - 1}{\beta - \gamma}} b^{\frac{\alpha - \beta + 1}{\beta - \gamma}} \right]^{\frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha - 1}},$$

მაშინ როცა $\psi \in (0, \psi_s)$, სადაც $\psi = \psi_1^2 + \psi_2^2$, (0.5), (0.6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, ხოლო როცა $\psi > \psi_s$ იგი არამდგრადია. როცა $\psi = \psi_s$, მაშინ ჩნდება ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის შესაძლებლობა. მცირე შეშფოთებებმა შეიძლება სტაციონარული ამონახსნი გადაიყვანოს დროით პერიოდულ რხევებში.

ამავე პარაგრაფში (0.5) სისტემის ერთი კერძო შემთხვევისთვის

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -S + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \tag{0.7}$$

დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 0.2. (0.6), (0.7) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$(\psi_1 x, \psi_2 x, \psi_1^2 + \psi_2^2),$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით და ასიმპტოტურ ყოფაქცევას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

თუ (0.5) განტოლებათა სისტემისთვის (0.6) პირობების ნაცვლად განვიხილავთ შემდეგ საწყის-სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{aligned} U(0, t) &= V(0, t) = 0, \\ S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \psi_1, & S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \psi_2, \end{aligned} \tag{0.8}$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x) > 0,$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 0.3. თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, მაშინ (0.5), (0.8) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 \left[\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right]^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \quad \psi_2 \left[\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right]^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \quad \left[\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right]^{\frac{1}{2\alpha+\beta-\gamma}} \right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება თანაფარდობა

$$(\gamma - \beta) b^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} a^{\frac{3\alpha-\gamma+1}{2\alpha+\beta-\gamma}} (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} < \frac{\pi^2}{4}.$$

თუ (0.7) სისტემისთვის სასაზღვრო პირობებს მარჯვენა საზღვარზე ჩავანაცვლებთ მეორე გვარის სასაზღვრო პირობებით, ანუ თუ განვიხილავთ ასეთ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას:

$$U(0, t) = V(0, t) = 0,$$

$$S \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi_1, \quad S \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi_2, \quad (0.9)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x) > 0,$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 0.4. (0.7), (0.9) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{-\frac{1}{3}} x, \quad \psi_2 (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{-\frac{1}{3}} x, \quad (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{\frac{1}{3}} \right)$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით და ასიმპტოტურ ყოფაქცევას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

მესამე პარაგრაფში კვლავ განხილულია (0.5), (0.6) საწყის-სასაზღვრო ამოცანა და შესწავლილია მისი მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი. (0.5) განტოლებათა სისტემა $E = S^{1/2}$ აღნიშვნის საშუალებით მიიყვანება შემდეგ განტოლებათა სისტემამდე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E^{2\alpha} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E^{2\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0, \quad (0.10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{a}{2} E^{2\beta-1} + \frac{b}{2} E^{2\gamma-1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right].$$

მიღებული (0.6), (0.10) ამოცანისთვის აგებულია შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$\begin{aligned}
u_\tau &= (e^{2\alpha} u_x)_x, & v_\tau &= (e^{2\alpha} v_x)_x, \\
e_\tau &= -\frac{a}{2} e^{2\beta-1} + \frac{b}{2} e^{2\gamma-1} (u_x^2 + v_x^2), \\
u_0^j &= v_0^j = 0, & u_N^j &= \psi_1, & v_N^j &= \psi_2, & j &= 0, 1, \dots, M,
\end{aligned}
\tag{0.11}$$

$$u_i^0 = U_0(x_i), \quad v_i^0 = V_0(x_i), \quad e_i^0 = [S_0(x_{i+1/2})]^{1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

დავუშვათ (5), (6) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი. ძნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ ასეთ ამონახსნზე (0.11) სქემის აპროქსიმაციის ცდომილებაა $O(\tau + h^2)$. დამტკიცებულია აგებული (0.11) სხვაობიანი სქემის კრებადობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 0.5. თუ $\beta \geq 1/2$, $\alpha = \gamma$, $|\alpha| \leq 1/2$, მაშინ (0.11) სხვაობიანი სქემა კრებადია (0.6), (0.10) ამოცანის ამონახსნისკენ $O(\tau + h^2)$ რიგით ბადურ ფუნქციათა L_{2h} სივრცეში.

მეოთხე პარაგრაფი ეძღვნება აგებული არაწრფივი (0.11) სხვაობიანი სქემის რიცხვითი რეალიზაციის საკითხებს. აღწერილია ერთი მარტივი საიტერაციო პროცესის ალგორითმიზაცია, რომელიც ყოველ იტერაციაზე დაიყვანება ჩვეულებრივი ფაქტორიზაციის მეთოდის ორჯერად გამოყენებაზე. მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმად გამოყენებულია [56] შრომაში შემოთავაზებული მიდგომის ანალოგი. ტესტური გამოთვლები ჩატარებულია დიფუზიური ამოცანის ზუსტ ამონახსნებზე, რომლებიც ადასტურებენ შემოთავაზებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების ეფექტურობას.

თეორემა 0.1-ის პირობებში ჩატარებულმა რიცხვითმა ექსპერიმენტებმა გვიჩვენეს მიახლოებითი ამონახსნის სტაციონარული ამონახსნისკენ მისწრაფება. შესატყვისი გრაფიკული ილუსტრაციები მოცემულია პირველი თავის მეოთხე პარაგრაფში (ნახ. 1.4.1 - 1.4.4). ანალოგიური სურათები მიიღება თეორემა 0.3-ის შემთხვევაშიც. რაც შეეხება გლობალურად მდგრადობის დებულებებს (თეორემები 0.2 და 0.4), აქ ჩატარებულმა მიახლოებითმა გამოთვლებმა როგორც მოსალოდნელი იყო მოგვცა სტაციონარული ამონახსნისკენ მიახლოებითი ამონახსნის მისწრაფების ბუნებრივი სურათი (იხ. მესამე თავის მეოთხე პარაგრაფში მოყვანილი ნახ. 3.3.5 -

3.3.16). მეოთხე პარაგრაფის ბოლოს ასევე მოყვანილია ჰოფის ბიფურკაციის ამსახველი გრაფიკული ილუსტრაციები (ნახ. 1.4.9 და 1.4.10).

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში მოყვანილია მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე. ამავე პარაგრაფში განხილულია მათი ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. აღსანიშნავია, რომ მაქსველის განტოლებათა სისტემისთვის აღნიშნული რედუქცია პირველად [32] ნაშრომში იქნა ჩატარებული. შედეგად მიღებულ იქნა არაწრფივ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა ახალი კლასი, რომლის მიმართაც სამეცნიერო ინტერესი ახლაც ყოველდღიურად იზრდება [4, 5, 13, 21, 38, 42, 43, 45, 46, 49, 50, 54 - 56, 61 - 65, 70 - 72, 77 - 79, 87, 93 - 96, 99]. ამავე თავში გამოკვლეულია ერთი ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა მოდელის და შესაბამისი წყაროს წევრებიანი სისტემის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. მითითებულია სტაბილიზაციის ასიმპტოტური ყოფაქცევის რიგები.

განვიხილოთ მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე. დავუშვათ, ელექტრომაგნიტური ველი ვრცელდება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. კვაზისტაციონარულ მიახლოებაში მაქსველის შესაბამის განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე [69, 83]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot}(v_m \text{rot} H), \quad (0.12)$$

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = v_m (\text{rot} H)^2, \quad (0.13)$$

სადაც $H = (H_1, H_2, H_3)$ – მაგნიტური ველის დამახლოების ვექტორია, θ – ტემპერატურა, c_v და v_m – ახასიათებენ შესაბამისად გარემოს სითბოტევადობას და ელექტროგამტარობას. (0.12) სისტემით აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში, (0.13) განტოლებით კი ტემპერატურის ცვლილება ჯოულის სითბოგამოყოფის ხარჯზე.

თუ $c_v = c_v(\theta)$ და $v_m = v_m(\theta)$, მაშინ (0.13) განტოლების დროითი ცვლადით ინტეგრებისა და (0.12) სისტემაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ [32]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot \left[a \left(\int_0^t |rotH|^2 d\tau \right) rotH \right], \quad (0.14)$$

სადაც $a(S)$ კოეფიციენტი განისაზღვრება c_v და v_m ფუნქციების საშუალებით.

აღნიშნული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი რთულია და მისი გამოკვლევა ჯერჯერობით მხოლოდ კერძო კლასებისთვის ხერხდება. (0.14) ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის სხვადასხვა ვარიანტები განხილულია [4, 5, 21, 32, 42, 43, 70 - 72, 78, 79, 87] შრომებში.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ორკომპონენტია $H = (0, U, V)$, სადაც $U = U(x, t)$, $V = V(x, t)$ – დროისა და ერთი სივრცული ცვლადის სკალარული ფუნქციებია. ამ შემთხვევაში $rotH = \left(0, -\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x} \right)$, და (0.14) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (0.15)$$

ინტეგრო-დიფერენციალური (0.14) მოდელის გამოკვლევა $H = (0, 0, U)$ შემთხვევისთვის ჩატარებული იყო [32] შრომაში. კერძოდ, ამ შრომაში დამტკიცებულია პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემა ერთგანზომილებიანი სივრცითი ცვლადის შემთხვევაში, როცა $a(S) = 1 + S$.

ერთგანზომილებიანი ვარიანტი $a(S) = (1 + S)^p$, $0 < p \leq 1$ შემთხვევისთვის შესწავლილია [21] შრომაში. ამ შრომაში პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისთვის დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები $L_{2p+2}(0, T; W_{2p+2}^1(0, 1))$ სივრცეში.

მრავალგანზომილებიანი სივრცული ცვლადების შემთხვევები განხილულია [42, 43] შრომებში.

თუ სხეულის გასწვრივ ტემპერატურას ჩავთვლით მუდმივს, კერძოდ, დამოკიდებულს დროზე და დამოუკიდებელს სივრცითი ცვლადებისგან, მაშინ როცა $H = (0, U, V)$, მივიღებთ (0.15) სისტემის ანალოგიურ სისტემას [72]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \tag{0.16}$$

ზემოთ მიღებული (0.16) სისტემის გამოკვლევა, როგორც ეს [72] სადისერტაციო ნაშრომშია აღნიშნული, რთულია და მოითხოვს დამოუკიდებელ შესწავლას. ავტორმა (0.16) ტიპის მოდელებს გასაშუალებული მოდელები უწოდა. ერთი განტოლების შემთხვევაში ამონახსნის ასიმპტოტურ ყოფაქცევას სხვა საკითხებთან ერთად ეხება [43] ნაშრომი.

(0.15) და (0.16) ტიპის სისტემებისა და განტოლებების შესწავლას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი (იხ. მაგალითად, [4, 5, 13, 21, 32, 38, , 43, 45 - 47, 49, 50, 53. 54, 56, 61 - 65, 70 - 72, 77 - 79, 87, 93 - 96, 99]). სხვადასხვა სახის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა და რიცხვით ამოხსნის საკითხების აღწერა შედარებით ვრცელი სახით მოცემულია მონოგრაფიებში [42], [55]. აქვე აღვნიშნავთ, რომ ამ ნაშრომებში საკმაო ყურადღება ეთმობა მაქსველის სისტემებს და მასზე ციტირებებს.

მეორე პარაგრაფში განხილულია (0.15) და (0.16) სისტემების შესაბამისი წყაროს წევრებიანი შემდეგი სისტემები:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + g(U) &= f_1(x, t), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g(V) &= f_2(x, t) \end{aligned} \tag{0.17}$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) = f_1(x, t),$$

(0.18)

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = +g(V) = f_2(x, t).$$

სადაც $a = a(S)$, g , f_1 , f_2 თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

შესწავლილია (0.17) და (0.18) სისტემებისთვის დასმული შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის

$$U(0, t) = U(1, t) = V(0, t) = V(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (0.19)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (0.20)$$

ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 0.6. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული ფუნქცია და $U_0, V_0 \in L_2(0, 1)$, მაშინ (0.17), (0.19), (0.20) და (0.18) - (0.20) ამოცანების ამონახსნისათვის $L_2(0, 1)$ ნორმაში სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|U\| + \|V\| \leq C e^{-a_0 t}.$$

ამავე თავის მესამე პარაგრაფში შესწავლილია ზემოთ აღნიშნული (0.17), (0.19), (0.20) და (0.18) - (0.20) ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 0.7. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (0.17), (0.19), (0.20) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

ასევე მოყვანილია (0.16) - (0.18) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემაც.

თეორემა 0.8. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (0.18) - (0.20) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

დისერტაციის მესამე თავში შემუშავებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების გამოყენებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტები აქაც ადასტურებენ როგორც თეორემების დასკვნების სანდოობას, ასევე აღნიშნული ალგორითმების ეფექტურობას.

მესამე თავში წინა თავში განხილული არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისთვის აგებულია ნახევრად-დისკრეტული მოდელები და სხვაობიანი სქემები. დამტკიცებულია მათი მდგრადობისა და კრებადობის თეორემები. მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ალგორითმების აღწერა და ჩატარებული მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტის გრაფიკული ილუსტრაციები.

გავეცნოთ მესამე თავის შინაარსს უფრო დაწვრილებით.

პირველ პარაგრაფში შემდეგი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური ამოცანებისთვის:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + g(U) &= f_1(x, t), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g(V) &= f_2(x, t), \end{aligned} \quad (0.21)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = V(0, t) = V(1, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x)$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) = f_1(x, t), \quad (0.22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dt \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(V) = f_2(x, t),$$

$$U(0, t) = U(1, t) = V(0, t) = V(1, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x).$$

აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელები:

$$\frac{du_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2 \right] d\tau \right) u_{\bar{x},i} \right\}_x + g(u_i) = f_1(x, t),$$

$$\frac{dv_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2 \right] d\tau \right) v_{\bar{x},i} \right\}_x + g(v_i) = f_2(x, t),$$

(0.23)

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0(t) = u_N(t) = v_0(t) = v_N(t) = 0,$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, v_i(0) = V_{0,i}, i = 0, 1, \dots, N$$

და

$$\frac{du_i}{dt} - a \left(h \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2 \right] d\tau \right) u_{\bar{x},i} + g(u_i) = f_1(x, t),$$

$$\frac{dv_i}{dt} - a \left(h \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} \left[(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2 \right] d\tau \right) v_{\bar{x},i} + g(v_i) = f_2(x, t),$$

(0.24)

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$u_0(t) = u_N(t) = v_0(t) = v_N(t) = 0,$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, v_i(0) = V_{0,i}, i = 0, 1, \dots, N.$$

ნაჩვენებია შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 0.9. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (0.21) და (0.22)

ამოცანებს გააჩნიათ საკმაოდ გლუვი ამონახსნები $U = U(x, t)$, $V = V(x, t)$ მაშინ (0.23)

და (0.24) სქემები მდგრადია და მათი ამონახსნები $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t))$,

$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N-1}(t))$ იკრიბებიან $U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N-1}(t))$,

$V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N-1}(t))$ ფუნქციებისკენ შესაბამისად, როცა $h \rightarrow 0$ და $L_2(0, 1)$

ნორმის დისკრეტული ანალოგისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u(t) - U(t)\|_h + \|v(t) - V(t)\|_h \leq Ch.$$

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია კრებადობის თეორემა (0.21) და (0.22)

ამოცანების შესაბამისი შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემებისთვის:

$$\begin{aligned} u_{\tau,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + g(u_i^{j+1}) &= f_{1,i}^j, \\ v_{\tau,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + g(v_i^{j+1}) &= f_{2,i}^j, \end{aligned} \quad (0.25)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

და

$$\begin{aligned} u_{\tau,i}^j - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N [(u_{\bar{x},\ell}^k)^2 + (v_{\bar{x},\ell}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} + g(u_i^{j+1}) &= f_{1,i}^j, \\ v_{\tau,i}^j - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N [(u_{\bar{x},\ell}^k)^2 + (v_{\bar{x},\ell}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} + g(v_i^{j+1}) &= f_{2,i}^j, \end{aligned} \quad (0.26)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M,$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

თეორემა 0.10. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (0.21) და (0.22) ამოცანებს გააჩნიათ საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x, t), V = V(x, t)$, მაშინ (0.25) და (0.26) სქემები მდგრადია და მათი ამონახსნი $u^j = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{N-1}^j)$, $v^j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_{N-1}^j)$, მიისწრაფის $U^j = (U_1^j, U_2^j, \dots, U_{N-1}^j)$, $V^j = (V_1^j, V_2^j, \dots, V_{N-1}^j)$ ფუნქციებისკენ შესაბამისად, როცა $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ და $L_2(0, 1)$ ნორმის დისკრეტული ანალოგისათვის ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\|u^j - U^j\|_h \leq C(\tau + h), \quad \|v^j - V^j\|_h \leq C(\tau + h), \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

მესამე თავის ბოლო, მესამე პარაგრაფში მოყვანილია ინტეგრირ-დიფერენციალური მოდელების შესაბამისი სხვაობიანი სქემების რეალიზაცია და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგად მიღებული გრაფიკული ილუსტრაციები. არაწრფივობის კოეფიციენტისათვის აღებულია შემდეგი სახის კონკრეტული ფუნქცია $a(S) = (1 + S)^p$, $0 < p \leq 1$. მოყვანილია რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები $p = 1$ შემთხვევისათვის.

აქვე აღვნიშნავთ, რომ მაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის შესწავლისთვის ჩატარებულია მრავალრიცხოვანი გამოთვლითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა სახის სასაზღვრო პირობისა და განსხვავებული p მაჩვენებლის შემთხვევისთვის. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები გვიჩვენებს, რომ საწყის ეტაპზე მაგნიტური ველის შეღწევის პროცესი როცა $p \rightarrow 1$, თვისობრივად განსხვავდება $p = 1$ ანუ $a(S)$ ფუნქციის წრფივი შემთხვევისგან, თუმცა გააჩნია ანალოგიური ასიმპტოტური ხასიათი დროის დიდი მნიშვნელობებისთვის. დასაწყისში გარემოს სასაზღვრო ზოლში მაგნიტური ველის ენერგიის დიდი ნაწილი გამოიყოფა სითბური ენერგიის სახით, შემდეგ კი სითბოგამტარობის სტრუქტურა იწვევს ტემპერატურის თანდათან გათანაბრებას. ერთთან ახლოს მყოფი ხარისხის მაჩვენებლისთვის ველის გავრცელება მიმდინარეობს შედარებით ნელა.

პარამეტრთა სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ჩატარებული გამოთვლები გვაძლევენ შემოთავაზებული ალგორითმების ეფექტურობას და ადასტურებენ თეორიული გამოკვლევების შედეგებს ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევისათვის.

მთლიანობაში, რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები საშუალებას იძლევა აღიწეროს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის ზოგიერთი ძირითადი თვისება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობაც ხასიათდება სპეციალური არაწრფივობით.

დისერტაციის დასასრულს მოცემულია რეზიუმე, რომელშიც შეჯამებულია დისერტაციის ძირითადი შედეგები. პირველ და მესამე თავებში მოყვანილია სხვადასხვა პროგრამული კოდების ფრაგმენტები, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულ იქნა მრავალრიცხოვანი რიცხვითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა ტიპის ამოცანისა და ამოცანებში შემავალი შესაბამისი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის. რიცხვითი ექსპერიმენტებისათვის სარეალიზაციო ალგორითმების დასაპროგრამებლად გამოყენებულ იქნა ისეთი თანამედროვე პროგრამირების ენები და პროგრამული პაკეტები როგორებიცაა C++, Mathcad, Matlab, Maple.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში [47 - 49, 54, 60, 62, 63, 65] და მოხსენებული იყო საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე როგორც საქართველოში, ასევე საზღვარგარეთ. კერძოდ, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების გაფართოებულ სხდომებზე (თბილისი, 2014-2017 წწ.); საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მეხუთე და მეექვსე საერთაშორისო კონფერენციებზე (ბათუმი, 2014 და 2015 წწ.) [53, 59]; ინდუსტრიული და გამოყენებითი მათემატიკის საზოგადოების (SIAM) საერთაშორისო კონფერენციაზე (ალაბამა, აშშ, 2015წ.; ბოსტონი, აშშ, 2016წ.) [51, 52, 61]; საერთაშორისო კონფერენცია მათემატიკასა და ინჟინერიაში (ICOME-2017, სტამბოლი, თურქეთი, 2017) [50, 64]; მე-4 საერთაშორისო კონფერენცია წმინდა და გამოყენებით მეცნიერებებში: განახლებადი ენერჯია (ICPAS-2017, სტამბოლი, თურქეთი, 2017) [46]. დისერტაციის თემასთან დაკავშირებით 2016 წელს მოპოვებულია გრანტი დოქტორანტიზისთვის, რომელიც წარმატებით დასრულდა 2018 წელს. გრანტის ფარგლებში კვლევის ძირითადი შედეგების გაცნობა განხორციელდა 2017 წლის მაისსა და ნოემბერში საერთაშორისო კონფერენციებზე ICOME-2017 და ICPAS-2017 ქალაქ სტამბოლი, თურქეთი.

თავი I - მაქსველის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური ერთი კერძო სისტემის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა

პირველ თავში მოცემულია ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის მათემატიკური აღწერა. ველის გავრცელება განხილულია ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსველის კერძოწარმოებულებიანი სისტემაზე დაყრდნობით მოყვანილია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. ამავე თავში განხილულია ამოცანის ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. შესწავლილია ერთი დიფუზიური მოდელის ამონახსნის მდგრადობის საკითხი. დადგენილია ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის წარმოშობის შესაძლებლობა. ჩატარებულია თეორიული კვლევების დამადასტურებელი რიცხვითი ექსპერიმენტები.

§ 1.1. ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის

პროცესის ზოგადი ამოცანა

განვიხილოთ ფიზიკური პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს ცვლად ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებულ გამტარ გარემოში. გამტარი შემოსაზღვრულია დიელექტრიკით.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ელექტრომაგნიტური ველისა და დენის დამაბულობის ვექტორები აკმაყოფილებენ მაქსველის შემდეგ განტოლებათა სისტემას [69]:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mu H}{\partial t} = \operatorname{rot} E, \quad (1.1.1)$$

$$\operatorname{div} \mu H = 0, \quad (1.1.2)$$

$$\frac{4\pi}{c} \sigma E = \operatorname{rot} H, \quad (1.1.3)$$

სადაც $E = (E_1, E_2, E_3)$ ელექტრული, ხოლო $H = (H_1, H_2, H_3)$ კი მაგნიტური ველის დამაბულობის ვექტორებია, μ მაგნიტური შეღწევადობა, σ – გარემოს გამტარიანობა. c მუდმივი, როგორც მიღებულია, აღნიშნავს სინათლის სიჩქარეს ვაკუუმში.

ომის კანონი, რომელიც გათვალისწინებულია (1.1.3) ტოლობაში, აკავშირებს E ვექტორს დენის სიმკვრივის J ვექტორთან შემდეგი დამოკიდებულებით

$$J = \sigma E \quad (1.1.4)$$

ვაკუმუმურ გარემოში, (1.1.1) - (1.1.3) დამოკიდებულებებთან ერთად სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho,$$

სადაც ρ მუხტების განაწილებაა.

თუ დროის რომელიმე მომენტში მაგნიტური ველი სოლენოიდურია, ე.ი. $\operatorname{div} \mu H = 0$, მაშინ (1.1.2) შესრულდება ავტომატურად. მართლაც, (1.1.1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mu H = 0.$$

ვიგულისხმობთ, რომ გარემოსთვის, სადაც მიმდინარეობს დიფუზიური პროცესი, $\mu = 1$ და ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე – $\sigma = \sigma(\theta)$. ჩავთვალოთ, რომ ეს დამოკიდებულება ხარისხოვანია, რადგან ბუნებაში უფრო მეტად ზუსტად ეს შემთხვევები გვხვდება (მაგალითად, მეტალებისთვის $\sigma \cong \theta^{-1}$, ერთგვაროვანი პლაზმისთვის $\sigma \cong \theta^{3/2}$ და სხვ.)

ტემპერატურის განსასაზღვრავად უნდა გამოვიყენოთ სითბოს ბალანსის განტოლება. თუ უგულვებელვყოფთ სითბოგამტარობის ეფექტს, ტემპერატურის ცვლილება განისაზღვრება ჯოულის სითბოგამოყოფით და გავითვალისწინებთ რა (1.1.4) განტოლებას, გვექნება

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = EJ = \sigma E^2, \quad (1.1.5)$$

სადაც c_v – გარემოს კუთრი სითბოტევადობაა. ამ დროს სითბოტევადობის კოეფიციენტი შეიძლება დამოკიდებული იყოს ტემპერატურაზე (უმეტეს შემთხვევაში ხარისხოვანი წესით).

ზემოთ მოყვანილი (1.1.1), (1.1.3), (1.1.5) განტოლებები ქმნიან ჩაკეტილ სისტემას ელექტრომაგნიტური ველისა და ტემპერატურის განსასაზღვრავად შესაბამის საწყის-სასაზღვრო პირობებში.

საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმა ზოგად შეთხვევაში და აგრეთვე სხვადასხვა გარემოს საზღვრებზე შეთანხმებულობის პირობების დადგენა დაწვრილებით განხილულია [56] ნაშრომში.

შევნიშნოთ, რომ (1.1.5) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma E^2, \quad (1.1.6)$$

სადაც ε გარემოს კუთრი შინაგანი ენერჯიაა და $d\varepsilon = c_v d\theta$.

მათემატიკური თვალსაზრისით (1.1.1), (1.1.3), (1.1.6) სისტემის შესწავლის სირთულე განპირობებულია შემდეგი ორი ფაქტორით:

პირველი – როგორც ამ თავის შესავალში იყო აღნიშნული, ელექტროგამტარობის კოეფიციენტის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე არაწრფივი ხასიათისაა.

მეორე – გამტარი გარემოდან ვაკუუმურ სივრცეში გადასვლისას იცვლება განტოლების სახე. მართლაც, გამოვრიცხავთ რა (1.1.1) და (1.1.3) ტოლობებიდან H ვექტორს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = -\text{rot rot } E,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ გამტარში ($\sigma > 0$) უნდა ამოიხსნას პარაბოლური, ხოლო ვაკუუმში ($\sigma = 0$) კი ელიფსური ამოცანა.

წრფივი დიფუზიური ამოცანის ($\sigma = \sigma(x)$) ამონახსნის არსებობის, ერთადერთობის და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები განხილულია მრავალ ნაშრომში. ამასთან, [67] შრომაში დაშვებულია გარემოს მოძრაობა მაგნიტო-ჰიდროდინამიკური მიახლოების ფარგლებში. ამ ნაშრომებში ხდება ამოცანის კლასიკური ჩამოყალიბებიდან განზოგადებულ დასმაზე გადასვლა. მოთხოვნა იმისა, რომ საძიებელი ფუნქციები აკმაყოფილებდნენ (1.1.2) განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს, იცვლება იმ მოთხოვნით, რომ ისინი ეკუთვნოდნენ სპეციალურ

ფუნქციონალურ კლასებს. შესაბამისი ამოცანები (1.1.1), (1.1.3) განტოლებებისთვის მოიცემა ვარიაციული ფორმით, კერძოდ, ვარიაციული უტოლობების სახით.

დავუშვათ, რომ სხეული მოთავსებულია ცვლად მაგნიტურ ველში. აღწეროთ ველის განაწილება სხეულის შიგნით.

განვიხილოთ მაქსველის განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს [69]:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = \text{rot} E, \quad (1.1.7)$$

$$\text{div} H = 0, \quad (1.1.8)$$

$$\frac{4\pi}{c} J = \text{rot} H, \quad (1.1.9)$$

$$J = \sigma E. \quad (1.1.10)$$

განვსაზღვროთ (1.1.10) ტოლობიდან E სიდიდე და ჩავსვათ (1.1.9) განტოლებაში. მივიღებთ

$$E = \rho \frac{c}{4\pi} \text{rot} H,$$

სადაც $\rho = \frac{1}{\sigma}$ – სხეულის წინააღობაა. მიღებული ტოლობის (1.1.7) განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} \text{rot}(\rho \text{rot} H) = 0. \quad (1.1.11)$$

შეაღწევს რა ნივთიერებაში ცვლადი მაგნიტური ველი, იგი მასში აღძრავს ცვლად ელექტრულ ველს, რის შედეგადაც წარმოიქმნება დენი. ამის შემდეგ ხდება სხეულის θ ტემპერატურის ზრდა, რომელიც გავლენას ახდენს ρ წინააღობაზე. ტემპერატურის ცვლილება იწვევს წინააღობის ხარისხოვანი დამოკიდებულებით ცვლილებას. ასე, რომ ტემპერატურის დიდი ცვლილებისას აუცილებლად უნდა გავითვალისწინოთ $\rho = \rho(\theta)$ დამოკიდებულება. ბოლო არსებითი შეზღუდვა რაც უნდა გაკეთდეს პროცესის აღწერისას, მდგომარეობს იმაში, რომ სხეულის ტემპერატურის ცვლილება, რომელიც გამოწვეულია J დენის მოქმედებით, უნდა ემორჩილებოდეს ჯოულ-ლენცის კანონს, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2, \quad (1.1.12)$$

სადაც ρ_0 – ნივთიერების სიმკვრივეა, c_v კი – კუთრი სითბოტევადობა, რომლებიც საზოგადოდ დამოკიდებული არიან ტემპერატურაზე. (1.1.12) განტოლება არ ითვალისწინებს სითბოს გადაცემის პროცესს სითბოგამტარობის ან გამოსხივების საშუალებით. არ განიხილება აგრეთვე მთელი რიგი ფიზიკური ეფექტები. მიუხედავად ამისა, მათემატიკური თვალსაზრისით, (1.1.11), (1.1.12) განტოლებები საკმაოდ რთულია.

თუ გავითვალისწინებთ (1.1.10) – (1.1.12) ტოლობებს მივიღებთ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot}(v_m \text{rot} H), \quad (1.1.13)$$

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = v_m (\text{rot} H)^2, \quad (1.1.14)$$

სადაც, c_v და v_m კოეფიციენტები ახასიათებენ შესაბამისად გარემოს სითბოტევადობას და ელექტროგამტარობას და როგორც უკვე აღვნიშნეთ, საზოგადოდ დამოკიდებულნი არიან ტემპერატურაზე.

§ 1.2. სტაციონარული ამონახსნის

მდგრადობის შესახებ

ამ პარაგრაფში შეისწავლება წინა პარაგრაფში განხილული სისტემების ზოგიერთი თავისებურება, მათ შორის სტაციონარული ამონახსნების წრფივი და გლობალური მდგრადობის საკითხები.

როგორც აღინიშნა, ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის აღმწერ (1.1.13), (1.1.14) კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში არ არის გათვალისწინებული ზოგიერთი ფიზიკური გარემოება.

შედარებით ზოგადი მოდელის მისაღებად, განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ორკომპონენტია $H = (0, U, V)$, სადაც

$U = U(x, t)$, $V = V(x, t)$ – დროისა და ერთი სივრცული ცვლადის სკალარული ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში

$$\operatorname{rot}H = \left(0, -\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

და (1.1.13), (1.1.14) სისტემის ანალოგიური მოდელი, სივრცით ერთგანზომილებიანი და ორკომპონენტიანი მაგნიტური ველის შემთხვევაში, სადაც გათვალისწინებულია სხვადასხვა ფიზიკური პროცესი, შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი ზოგადი განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(P(S) \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(P(S) \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(Q(S) \frac{\partial S}{\partial x} \right) + F \left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

სადაც P , Q და F არიან თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციები.

მრავალი დიფუზიური ამოცანის მათემატიკური მოდელირებისას ვლელულობთ (1.2.1) სახის სისტემას. კერძოდ, თუ:

$$Q(S) = 0,$$

$$F \left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = G(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right],$$

სადაც G არის მოცემული ფუნქცია, მაშინ (1.2.1) სისტემა, აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

თუ:

$$Q(S) \neq 0,$$

$$F \left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -T(S) + R(S) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (1.2.2)$$

სადაც T ასევე მოცემული ფუნქციაა, მაშინ (1.2.1), (1.2.2) სისტემა აღწერს იმავე პროცესს, ოღონდ სითბოგამტარობის ეფექტის გათვალისწინებით.

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S^\alpha \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$U(0, t) = V(0, t) = 0, \quad U(1, t) = \psi_1, \quad V(1, t) = \psi_2, \quad (1.2.4)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x) > 0, \quad (1.2.5)$$

სადაც ψ_1 და ψ_2 არიან დადებითი მუდმივები, ხოლო $U_0(x)$, $V_0(x)$, $S_0(x)$ – კი მოცემული ფუნქციები.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $U_0(x) = \psi_1 x$, $V_0(x) = \psi_2 x$ და $S_0(x) = S_0$, მაშინ, როცა $\alpha \neq 1$ (1.2.3) - (1.2.5) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$U(x, t) = \psi_1 x, \quad V(x, t) = \psi_2 x, \quad (1.2.6)$$

$$S(x, t) = [S_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)(\psi_1^2 + \psi_2^2)t]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

როგორც (1.2.6) ფორმულებიდან ჩანს, დროის სასრული მომენტისთვის, კერძოდ, როცა

$$t_0 = \frac{S_0^{1-\alpha}}{(\alpha-1)(\psi_1^2 + \psi_2^2)}$$

და $\alpha > 1$, მაშინ $S(x, t)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია.

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ (1.2.3) - (1.2.5) ამოცანას საზოგადოდ გლობალური ამონახსნი არ გააჩნია.

აღნიშნული ამოცანების გარკვეული კლასებისთვის ცალსახად ამოხსნადობის საკითხები შესწავლილია [12, 18, 102] შრომებში.

შევნიშნოთ, რომ თუ (1.2.4), (1.2.5) დამოკიდებულებებს დავუმატებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (1.2.7)$$

მაშინ მოყვანილი (1.2.3) ფორმულებით განსაზღვრული U , V და S წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნსაც:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= S^\alpha \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

(1.2.4), (1.2.5), (1.2.7) საწყის-სასაზღვრო პირობებით.

აქედან ვასკვნით, რომ როცა $\alpha > 1$, მაშინ საზოგადოდ არც (1.2.4), (1.2.5), (1.2.7), (1.2.8) ამოცანას გააჩნია გლობალური ამონახსნი.

გადავიდეთ ზოგიერთი შემთხვევისათვის სტაციონარული ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის საკითხების გამოკვლევაზე.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -aS^\beta + bS^\gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right],\end{aligned}\tag{1.2.9}$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma \in R, a, b \in R^+$.

დავსვათ $Q_t = (0,1) \times (0,t)$ არეში (1.2.9) სისტემისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t) = V(0,t) = 0, \quad U(1,t) = \psi_1 > 0, \quad V(1,t) = \psi_2 > 0,\tag{1.2.10}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad S(x,0) = S_0(x) > 0.\tag{1.2.11}$$

აღვნიშნოთ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი (U_s, V_s, S_s) ფუნქციებით. ადვილი საჩვენებელია, რომ როცა $\beta \neq \gamma$, მაშინ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი სტაციონარული ამონახსნი, რომელსაც აქვს სახე

$$U_s = \psi_1 x, \quad V_s = \psi_2 x, \quad S_s = \left[\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right]^{\frac{1}{\beta-\gamma}}.\tag{1.2.12}$$

ამ პარაგრაფში ჩვენს მთავარ მიზანს წარმოადგენს (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის (1.2.12) სტაციონარული ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის საკითხების შესწავლა.

აღნიშნული კუთხით მსგავსი ამოცანების გამოკვლევა პირველად ჩატარებულია [23] ნაშრომში. მსგავს გამოკვლევებს მიეძღვნა ასევე შემდეგი შრომები [42, 44, 48, 51, 58, 100].

ვთქვათ, (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_s + u(x, t), \\ V(x, t) &= V_s + v(x, t), \\ S(x, t) &= S_s + s(x, t), \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

სადაც $u(x, t)$, $v(x, t)$, $s(x, t)$ მცირე შეშფოთებებია.

(1.2.9) სისტემის გაწრფივების შედეგად ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha_s \frac{\partial s}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \gamma_s \frac{\partial s}{\partial x} + \beta_s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \nu_s s + \eta_s \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_s \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

სადაც:

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha \psi_1 \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}}, & \beta_s &= \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}}, \\ \gamma_s &= \alpha \psi_2 \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}}, & \nu_s &= (\gamma - \beta) \frac{b^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}}{a^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}} (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}, \\ \eta_s &= 2\psi_1 b \left[\frac{b}{a} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}, & \mu_s &= 2\psi_2 b \left[\frac{b}{a} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}. \end{aligned}$$

დავუშვათ, (1.2.14) სისტემის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u(x, t) = u(x)e^{\omega t}, \quad v(x, t) = v(x)e^{\omega t}, \quad s(x, t) = s(x)e^{\omega t}, \tag{1.2.15}$$

მაშინ მივიღებთ ამოცანას საკუთრივ რიცხვებზე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა შემდეგი სისტემისთვის:

$$\begin{aligned}
\omega u &= \alpha_s \frac{ds}{dx} + \beta_s \frac{d^2 u}{dx^2}, \\
\omega v &= \gamma_s \frac{ds}{dx} + \beta_s \frac{d^2 v}{dx^2}, \\
\omega s &= v_s s + \eta_s \frac{du}{dx} + \mu_s \frac{dv}{dx}.
\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

უკანასკნელი სისტემის ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი ფორმით:

$$u(x) = u_0 e^{ikx}, \quad v(x) = v_0 e^{ikx}, \quad s(x) = s_0 e^{ikx}.$$

ამ ტოლობების (1.2.16) განტოლებებში ჩასმით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
\omega u_0 e^{ikx} &= \alpha_s i k e^{ikx} s_0 - \beta_s e^{ikx} k^2 u_0, \\
\omega v_0 e^{ikx} &= \gamma_s i k e^{ikx} s_0 - \beta_s e^{ikx} k^2 v_0, \\
\omega s_0 e^{ikx} &= v_s s_0 e^{ikx} + \eta_s i k u_0 e^{ikx} + \mu_s i k v_0 e^{ikx}.
\end{aligned}$$

აქედან კი გვაქვს:

$$\begin{aligned}
u_0(\omega + \beta_s k^2) - \alpha_s i k s_0 &= 0, \\
v_0(\omega + \beta_s k^2) - \gamma_s i k s_0 &= 0, \\
u_0 i k \eta_s + v_0 \mu_s i k + s_0(v_s - \omega) &= 0.
\end{aligned}$$

ცხადია, რომ მიღებულ სისტემას ექნება არატრივიალური ამონახსნი თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega, k) &= \begin{vmatrix} \omega + \beta_s k^2 & 0 & -i k \alpha_s \\ 0 & \omega + \beta_s k^2 & -i k \gamma_s \\ i k \eta_s & i k \mu_s & v_s - \omega \end{vmatrix} = \\
&= (\omega + \beta_s k^2)^2 (v_s - \omega) - (\omega + \beta_s k^2) k^2 \alpha_s \eta_s - (\omega + \beta_s k^2) \mu_s \gamma_s k^2 = 0,
\end{aligned}$$

ანუ

$$(\omega + \beta_s k^2)[(\omega + \beta_s k^2)(v_s - \omega) - k^2 \alpha_s \eta_s - k^2 \mu_s \gamma_s] = 0.$$

აქედან ვღებულობთ

$$k^2(\beta_s v_s - \beta_s \omega - \alpha_s \eta_s - \mu_s \gamma_s) - \omega^2 + \omega v_s = 0. \tag{1.2.17}$$

($\omega + \beta_s k^2 = 0$ შემთხვევა ტრივიალურია).

(1.2.17) ტოლობა k პარამეტრისთვის გვაძლევს ორ k_1 და k_2 მნიშვნელობას, ამასთან

$$k_1 = -k_2.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (1.2.16) სისტემის არატრივიალური ამონახსნია:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{ik_1\alpha_s}{\omega + \beta_s k_1^2} (S_1 e^{ik_1 x} - S_2 e^{-ik_1 x}), \\ v(x) &= \frac{ik_1\gamma_s}{\omega + \beta_s k_1^2} (S_1 e^{ik_1 x} - S_2 e^{-ik_1 x}), \\ s(x) &= S_1 e^{ik_1 x} + S_2 e^{-ik_1 x}. \end{aligned} \tag{1.2.18}$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.2.10) სასაზღვრო პირობებს, (1.2.13) და (1.2.15) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$u(0) = u(1) = 0.$$

აქედან კი (1.2.18) ტოლობების გათვალისწინებით ვღებულობთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= 0, \\ S_1 e^{ik_1} - S_2 e^{-ik_1} &= 0. \end{aligned}$$

უკანასკნელ სისტემას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნი მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{ik_1} & -e^{-ik_1} \end{vmatrix} = e^{ik_1} - e^{-ik_1} = 2i \sin k_1 = 0$$

საიდანაც გვაქვს

$$k_{1n} = \pi n, \quad n \in Z.$$

გადავწეროთ (1.2.17) ტოლობა შემდეგი სახით

$$\omega_n^2 + P_n(\beta_s, k_n, \nu_s) \omega_n + L_n(\beta_s, k_n, \nu_s, \eta_s, \mu_s, \gamma_s) = 0,$$

სადაც

$$\begin{aligned} P_n(\beta_s, k_n, \nu_s) &= \beta_s k_n^2 - \nu_s, \\ L_n(\beta_s, k_n, \nu_s, \eta_s, \mu_s, \gamma_s) &= -\beta_s \nu_s k_n^2 + \alpha_s \eta_s k_n^2 + \mu_s \gamma_s k_n^2. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი n სიდიდისათვის $Re(\omega_n) < 0$. მარტივი საჩვენებელია რომ, როცა $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, მაშინ $L_n(\beta_s, k_n, \nu_s, \eta_s, \mu_s, \gamma_s) > 0$.

ამრიგად, ამონახსნის წრფივად მდგრადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი შემდეგი პირობის შესრულება

$$P_n = \beta_s k_n^2 - \nu_s = \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}} \pi^2 n^2 -$$

$$-(\gamma - \beta) \frac{b^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}}{a^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}} (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}} > 0,$$

ანუ

$$a(\gamma - \beta) \left[\frac{b}{a} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2, \quad (n = 1).$$

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.2.1. თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, $\beta \neq \gamma$, მაშინ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}} \right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$a(\gamma - \beta) \left[\frac{b}{a} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2.$$

შენიშვნა. უკანასკნელი უტოლობიდან ჩანს, რომ როცა $\gamma < \beta$, მაშინ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია.

ვთქვათ, $\gamma > \beta$, $\beta - \alpha - 1 \neq 0$ და განვიხილოთ სიდიდე

$$\psi_s = \left[\frac{\pi^2}{\gamma - \beta} \frac{\gamma - \alpha - 1}{a^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\gamma}}} \frac{\alpha - \beta + 1}{b^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\gamma}}} \right]^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}},$$

რომლისთვისაც გვექნება

$$P_1(\psi_s, \alpha, \beta, \gamma) = 0, P_n(\psi_s, \alpha, \beta, \gamma) > 0, n = 2, 3, \dots$$

თუ დამატებით დავუშვებთ, რომ $\beta - \alpha - 1 < 0$, მაშინ როცა $\psi \in (0, \psi_s)$, $\psi = \psi_1^2 + \psi_2^2$, სიდიდისთვის ვღებულობთ $P_n(\psi, \alpha, \beta, \gamma) > 0, n \in Z_0$.

ამრიგად, თუ $\psi \in (0, \psi_s)$, მაშინ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, თუ $\psi > \psi_s$ მაშინ არამდგრადი. თუ $\psi = \psi_s$, მაშინ გვაქვს $Re(\omega_1) = 0$, და $Im(\omega_1) \neq 0$. ე.ი. ჩნდება ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის შესაძლებლობა [82]. ანუ მცირე შეშფოთებებმა სტაციონარული ამონახსნი შეიძლება გადაიყვანოს დროით პერიოდულ რხევებში.

ახლა გადავიდეთ (1.2.9) - (1.2.11) ამოცანის ერთი კერძო შემთხვევისთვის სტაციონარული ამონახსნის გლობალური მდგრადობის საკითხის შესწავლაზე.

განვიხილოთ შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -S + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

რომლის შესაბამისი სტაციონარული ამონახსნია:

$$U_s = \psi_1 x, \quad V_s = \psi_2 x, \quad S_s = \psi_1^2 + \psi_2^2.$$

ვთქვათ:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= U(x, t) - \psi_1 x, \\ w(x, t) &= V(x, t) - \psi_2 x, \\ z(x, t) &= S(x, t) - (\psi_1^2 + \psi_2^2), \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

სადაც $(U(x, t), V(x, t), S(x, t))$ არის (1.2.10), (1.2.11), (1.2.19) ამოცანის ამონახსნი.

გავაწარმოთ (1.2.20) ტოლობები t ცვლადით. (1.2.19) სისტემის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (1.2.21)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -z(x,t) - (\psi_1^2 + \psi_2^2)z + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2.$$

გავამრავლოთ (1.2.21) სისტემის პირველი განტოლება y ფუნქციაზე და ვაინტეგრირებთ $[0, 1]$ სეგმენტზე. ნაწილობითი ინტეგრებითა და (1.2.10) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 y^2 dx &= yS \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_0^1 - \int_0^1 S \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} dx \\ &= - \int_0^1 \left(S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + S \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 \right) dx. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

ანალოგიურად, (1.2.21) ტოლობების მეორე განტოლობიდან გვექნება

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 w^2 dx = - \int_0^1 \left(S \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + S \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 \right) dx. \quad (1.2.23)$$

ასევე გავამრავლოთ (1.2.21) სისტემის მესამე განტოლება სკალარულად z ფუნქციაზე. მარტივი გარდაქმნების შედეგად ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 z^2 dx &= \int_0^1 \left(-z^2 - (\psi_1^2 + \psi_2^2)z + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) z \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-z^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 S - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 z \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 S - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 z \right) dx. \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ:

$$\begin{aligned} \int_0^1 -(\psi_1^2 + \psi_2^2) \psi_1 \frac{\partial y}{\partial x} dx &= -(\psi_1^2 + \psi_2^2) \psi_1 \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x} dx \\ &= -(\psi_1^2 + \psi_2^2) \psi_1 y \Big|_0^1 = 0, \\ \int_0^1 -(\psi_1^2 + \psi_2^2) \psi_2 \frac{\partial w}{\partial x} dx &= -(\psi_1^2 + \psi_2^2) \psi_2 \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial x} dx \end{aligned}$$

$$= -(\psi_1^2 + \psi_2^2)\psi_2 w|_0^1 = 0,$$

მაშინ (1.2.22), (1.2.23), (1.2.24) ტოლობების შეკრება მოგვცემს

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (y^2 + w^2 + z^2) dx \\ &= \int_0^1 \left(-z^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 S - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 z \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 S - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 z \right. \\ & \quad \left. - S \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - S \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 - S \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - S \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-z^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 z - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 z - z \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 \right. \\ & \quad \left. - (\psi_1^2 + \psi_2^2) \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 - z \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 - (\psi_1^2 + \psi_2^2) \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-z^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + \frac{\partial y}{\partial x} \psi_1 z - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 (\psi_1^2 + \psi_2^2) + \frac{\partial w}{\partial x} \psi_2 z \right) dx \\ &\leq \int_0^1 \left(-z^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \psi_1^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \psi_2^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \psi_1^2 + \frac{1}{4} z^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \psi_1^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \psi_2^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \psi_2^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} z^2 \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(z^2 + 2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \psi_2^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \psi_1^2 \right) dx. \end{aligned}$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (y^2 + w^2 + z^2) dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(z^2 + 2\psi_2^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2\psi_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right) dx.$$

პუნკარეს უტოლობის გათვალისწინებით

$$\int_0^1 (y^2 + w^2) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx,$$

ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 (y^2 + w^2 + z^2) dx \leq -c \int_0^1 (y^2 + w^2 + z^2) dx, \quad (1.2.25)$$

სადაც C დადებითი მუდმივია.

გრონუოლის უტოლობისა და (1.2.20) პირობის გათვალისწინებით (1.2.25)-დან გამომდინარეობს შეფასება

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [y^2(x, t) + w^2(x, t) + z^2(x, t)] dx \\ & \leq e^{-ct} \int_0^1 [(U_0(x) - \psi_1 x)^2 + (V_0(x) - \psi_2 x)^2 + (S_0(x) - (\psi_1^2 + \psi_2^2))^2] dx. \end{aligned}$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.2.2. (1.2.10), (1.2.11), (1.2.19) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$(\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \psi_1^2 + \psi_2^2)$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. ამასთან, მდგრადობას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

განვიხილოთ (1.2.9) სისტემისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0, t) = V(0, t) = 0,$$

$$S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi_1, \quad S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi_2, \quad (1.2.26)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x) > 0.$$

აღნიშნულ (1.2.9), (1.2.26) ამოცანასაც გააჩნია ერთადერთი სტაციონარული ამონახსნი და ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი თეორემების სამართლიანობა:

თეორემა 1.2.3. თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, მაშინ (1.2.9), (1.2.26) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \quad \psi_2 \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}} x, \quad \left(\frac{(\psi_1^2 + \psi_2^2)b}{a} \right)^{\frac{1}{2\alpha+\beta-\gamma}} \right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$(\gamma - \beta) b^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} a^{\frac{3\alpha-\gamma+1}{2\alpha+\beta-\gamma}} (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}} < \frac{\pi^2}{4}.$$

თეორემა 1.2.4. თუ $\alpha = 1$, მაშინ (1.2.19), (1.2.26) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{-\frac{1}{3}} x, \quad \psi_2 (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{-\frac{1}{3}} x, \quad (\psi_1^2 + \psi_2^2)^{\frac{1}{3}} \right)$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. ამასთან, მდგრადობას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

§ 1.3. სხვაობიანი სქემების მდგრადობა და კრებადობა

განვიხილოთ $Q_T = \Omega \times [0, T]$ არეში შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -aS^\beta + bS^\gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

$$U(0,t) = V(0,t) = 0, \quad U(1,t) = \psi_1, \quad V(1,t) = \psi_2,$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \tag{1.3.2}$$

$$S(x,0) = S_0(x) > s_0 = \text{const} > 0,$$

სადაც $a \geq 0$ და $b > 0$ მოცემული მუდმივებია.

შევსწავლოთ (1.3.1), (1.3.2) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის საკითხი.

თუ შემოვიღებთ შემეგ აღნიშვნას $E = S^{1/2}$, მაშინ (1.3.1), (1.3.2) ამოცანა მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E^{2\alpha} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(E^{2\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0, \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{a}{2} E^{2\beta-1} + \frac{b}{2} E^{2\gamma-1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right],$$

$$U(0, t) = V(0, t) = 0, \quad U(1, t) = \psi_1, \quad V(1, t) = \psi_2, \quad (1.3.4)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad E(x, 0) = [S_0(x)]^{1/2}.$$

მოვახდინოთ Q_T არის დისკრეტიზაცია. დავყოთ $[0, 1]$ და $[0, T]$ შუალედები შესაბამისად N და M ტოლ ნაწილებად და შემოვიღოთ აღნიშვნები [92]:

$$h = \frac{1}{N}, \quad \tau = \frac{T}{M}, \quad x_i = ih, \quad t_j = j\tau, \quad u_i^j = u(x_i, t_j),$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \omega_h^* = \{x_i = (i - 1/2)h, \quad i = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M\}, \quad \bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \omega_{h\tau}^* = \omega_h^* \times \omega_\tau,$$

$$u_x = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad u_i = u_i^{j+1}, \quad u_\tau = \frac{u_i - u_i^j}{\tau}.$$

შემოვიტანოთ სტანდარტული სკალარული ნამრავლები და ნორმები [92]:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h,$$

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}, \quad \|u\| = (u, u]^{1/2}.$$

ავაგოთ (1.3.3), (1.3.4) ამოცანის შესაბამისი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_\tau^j = (e^{2\alpha} u_{\bar{x}})_x, \quad v_\tau^j = (e^{2\alpha} v_{\bar{x}})_x, \quad (1.3.5)$$

$$e_\tau^j = -\frac{a}{2} e^{2\beta-1} + \frac{b}{2} e^{2\gamma-1} (u_{\bar{x}}^2 + v_{\bar{x}}^2),$$

$$u_0^j = v_0^j = 0, \quad u_N^j = \psi_1, \quad v_N^j = \psi_2, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (1.3.6)$$

$$u_i^0 = U_0(x_i), \quad v_i^0 = V_0(x_i), \quad e_i^0 = [S_0(x_{i+1/2})]^{1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

სადაც u და v ბადური ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, ხოლო e ბადური ფუნქცია კი - $\omega_{h\tau}^*$ ბადეზე.

აქ და შემდეგშიც უინდექსო ჩანაწერში ვგულისხმობთ, რომ ბადური ფუნქციები აღებულნი არიან (x_i, t_{j+1}) წერტილში.

მნელი არ არის იმის ჩვენება, რომ (1.3.5), (1.3.6) სქემის აპროქსიმაცია (1.3.3), (1.3.4) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ რიგის.

ცდომილებებისთვის $Z = u - U$, $W = v - V$ და $R = e - E$ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$Z_t^j = (e^{2\alpha} u_{\bar{x}} - E^{2\alpha} U_{\bar{x}})_x + \phi_1, \quad (1.3.7)$$

$$W_t^j = (e^{2\alpha} v_{\bar{x}} - E^{2\alpha} V_{\bar{x}})_x + \phi_2, \quad (1.3.8)$$

$$R_t^j = -\frac{a}{2}(e^{2\beta-1} - E^{2\beta-1}) + \frac{b}{2}(e^{2\gamma-1} u_{\bar{x}}^2 - E^{2\gamma-1} U_{\bar{x}}^2 + e^{2\gamma-1} v_{\bar{x}}^2 - E^{2\gamma-1} V_{\bar{x}}^2) + \phi_3, \quad (1.3.9)$$

სადაც $\phi_k = O(\tau + h^2)$, $k = 1, 2, 3$.

დავუშვათ, რომ $\alpha = \gamma$ და $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. გავამრავლოთ სკალარულად (1.3.7) - (1.3.9) ტოლობები შესაბამისად $2\tau Z$, $2\tau W$ და $\frac{2}{b}\tau R$ სიდიდეებზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სხვაობიანი ანალოგისა და შემდეგი ტოლობების გამოყენებით:

$$2\tau(r_t, r) = \|r\|^2 - \|r^j\|^2 + \tau^2 \|r_t\|^2,$$

$$2\tau(R_t, R) = \|R\|^2 - \|R^j\|^2 + \tau^2 \|R_t\|^2,$$

სადაც r და R ნებისმიერი ბადური ფუნქციებია, მივიღებთ:

$$\|Z\|^2 - \|Z^j\|^2 + \tau^2 \|Z_t\|^2 = -2\tau[(e^\delta, u_{\bar{x}}^2] - (e^\delta + E^\delta, u_{\bar{x}} U_{\bar{x}}] + (E^\delta, U_{\bar{x}}^2] - (\phi_1, Z)],$$

$$\|W\|^2 - \|W^j\|^2 + \tau^2 \|W_t\|^2 = -2\tau[(e^\delta, v_{\bar{x}}^2] - (e^\delta + E^\delta, v_{\bar{x}} V_{\bar{x}}] + (E^\delta, V_{\bar{x}}^2] - (\phi_2, W)],$$

$$\frac{1}{b}(\|R\|^2 - \|R^j\|^2 + \tau^2 \|R_t\|^2) = -\frac{a}{b}\tau(e^{2\beta-1} - E^{2\beta-1})(e - E) + \tau((e^\delta - e^{\delta-1}E, u_{\bar{x}}^2]$$

$$-(E^{\delta-1}e - E^\delta, U_{\bar{x}}^2] + (e^\delta - e^{\delta-1}E, v_{\bar{x}}^2] - (E^{\delta-1}e - E^\delta, V_{\bar{x}}^2]) + \frac{2\tau}{b}(\phi_3, R).$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნა $2\alpha = \delta$.

ამ ტოლობების შეკრებით და მარტივი გარდაქმნების შედეგად, თუ დავუშვებთ, რომ $\beta \geq 1/2$. მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned}
& \|Z\|^2 - \|Z^j\|^2 + \|W\|^2 - \|W^j\|^2 + \frac{\tau}{b} \left(\|R\|^2 - \|R^j\|^2 \right) \\
& \leq -2\tau \left[\left(\frac{e^\delta + e^{\delta-1}E}{2} u_{\bar{x}}^2 + \frac{E^\delta + E^{\delta-1}e}{2} U_{\bar{x}}^2, 1 \right) \right. \\
& \left. - (e^\delta + E^\delta, u_{\bar{x}} U_{\bar{x}}) + \left(\frac{e^\delta + e^{\delta-1}E}{2} v_{\bar{x}}^2 + \frac{E^\delta + E^{\delta-1}e}{2} V_{\bar{x}}^2, 1 \right) \right. \\
& \left. - (e^\delta + E^\delta, v_{\bar{x}} V_{\bar{x}}) + (\phi_1, Z) - (\phi_2, W) - \frac{1}{b} (\phi_3, R) \right] \tag{1.3.10} \\
& \leq -2\tau \left\{ \left([(e^\delta + e^{\delta-1}E)(E^\delta + E^{\delta-1}e)]^{\frac{1}{2}} - e^\delta - E^\delta, |u_{\bar{x}}| |U_{\bar{x}}| \right) \right. \\
& \left. + \left([(e^\delta + e^{\delta-1}E)(E^\delta + E^{\delta-1}e)]^{\frac{1}{2}} - e^\delta - E^\delta, |v_{\bar{x}}| |V_{\bar{x}}| \right) \right. \\
& \left. - (\phi_1, Z) - (\phi_2, W) - \frac{1}{b} (\phi_3, R) \right\}.
\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}
& (e^\delta - e^{\delta-1}E)(E^\delta - E^{\delta-1}e) - (e^\delta + E^\delta)^2 \\
& = 2e^\delta E^\delta + e^{\delta+1}E^{\delta-1} + e^{\delta-1}E^{\delta+1} - e^{2\delta} - 2e^\delta E^\delta - E^{2\delta} \\
& = (e^{\delta+1} - E^{\delta+1})(E^{\delta-1} - e^{\delta-1}). \tag{1.3.11}
\end{aligned}$$

რადგან $|\delta| \leq 1$, ამიტომ

$$(e^{\delta+1} - E^{\delta+1})(E^{\delta-1} - e^{\delta-1}) \geq 0.$$

უკანასკნელი უტოლობისა და (1.3.10), (1.3.11) თანაფარდობების გამოყენებით საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
& \|Z\|^2 + \|W\|^2 + \frac{1}{b} \|R\|^2 \\
& \leq \|Z^j\|^2 + \|W^j\|^2 + \frac{1}{b} \|R^j\|^2 + 2\tau \left((\phi_1, Z) + (\phi_2, W) + \frac{1}{b} (\phi_3, R) \right),
\end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$\|Z\| + \|W\| + \|R\| = O(\tau + h^2)$$

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.3.1. თუ $\beta \geq 1/2$, $\alpha = \gamma$, $|\alpha| \leq 1/2$ მაშინ (1.3.5), (1.3.6) სხვაობიანი სქემა კრებადია (1.3.3), (1.3.4) ამოცანის გლუვი ამონახსნისკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცეში და კრებადობის სიჩქარეა $O(\tau + h^2)$.

§ 1.4. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები

ამ პარაგრაფში შეისწავლება წინა პარაგრაფში აგებული არაცხადი სქემის რიცხვითი ამოხსნის საკითხები. აგრეთვე მოცემულია გრაფიკები, რომლებიც წარმოადგენენ ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების ილუსტრაციებს. აღნიშნული ექსპერიმენტები ადასტურებენ მიღებულ თეორიულ შედეგებს.

აღვწერთ ზოგადი პროცესი, რომლის საშუალებითაც ხდება მიმდინარე თავის მესამე პარაგრაფში აგებული სქემების რიცხვითი რეალიზაცია. პროცესი აღვწერთ შემდეგი არაცხადი სქემის მაგალითზე:

$$\begin{aligned} u_t^j &= (e^{2\alpha} u_x)_x, & v_t^j &= (e^{2\alpha} v_x)_x, \\ e_t^j &= -\frac{a}{2} e^{2\beta-1} + \frac{b}{2} e^{2\gamma-1} (u_x^2 + v_x^2). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

როგორც წინა პარაგრაფში, ასევე აქაც უინდექსო ჩანაწერში ვგულისხმობთ, რომ ბადური ფუნქციები აღებული არიან (x_i, t_{j+1}) წერტილში.

განვიხილოთ (1.4.1) სქემის რიცხვითი ამოხსნისთვის შემდეგი პროცესი:

I ბიჯი – (1.4.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებში e ბადური ფუნქცია ავიღოთ j შრეზე. შედეგად u და v ფუნქციების მიმართ მივიღებთ სამწერტილოვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომელსაც ამოვხსნით ფაქტორიზაციის მეთოდის გამოყენებით;

II ბიჯი – პირველ ბიჯზე ნაპოვნი u და v ბადური ფუნქციები ჩავსვათ (1.4.1) სისტემის მესამე განტოლებაში და

$$e = e^j - \frac{a\tau}{2}(e^j)^{2\beta-1} + \frac{b\tau}{2h^2}(e^j)^{2\gamma-1}[(u - u_{i-1})^2 + (v - v_{i-1})^2]$$

ტოლობის საშუალებით გამოვითვალოთ e ბადური ფუნქციის მნიშვნელობას;

III ბიჯი – წინა ბიჯზე მიღებული e ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა ჩავსვათ (1.4.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებში, შემდეგ კი კვლავ ფაქტორიზაციის მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ u და v ფუნქციები და ა.შ.

ქვემოთ მოყვანილია C++ ენაზე დაწერილი პროგრამული კოდის ფრაგმენტები, რომლებიც გამოიყენება ზემოთ აღწერილ ალგორითმში ფაქტორიზაციის მეთოდის დასაპროგრამებლად.

```
#include "MethodsMath.h"
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
/* ფაქტორიზაციის მეთოდი
x - მასივი რომელიც უნდა დაბრუნდეს
m - მასივის სიგრძე
a - სამდიაგონალური მატრიცის ქვედა დიაგონალი
c - სამდიაგონალური მატრიცის ცენტრალური დიაგონალი
b - სამდიაგონალური მატრიცის ზედა დიაგონალი
k, niu - მარცხენა და მარჯვენა საზღვარი
y[0] = k[0]*y[1] + niu[0]
y[m] = k[1]*y[m-1] + niu[1]
f - მარჯვენა მხარე
*/
```

ზემოთ მოყვანილი პროგრამული კოდის ფრაგმენტი აღწერს ცვლადებს, რომლებიც გამოიყენება სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ ალგებრულ

განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად ფაქტორიზაციის მეთოდით. ქვემოთ კი მოყვანილია აღნიშნული მეთოდის შესაბამისი ფუნქცია.

```
void MethodsMath::Factorization(long double *x, int m, long double a, long double c, long
double b, long double *k, long double *niu, long double *f)
{
    int i;
    long double *alfa = new long double[m+1];
    long double *beta = new long double[m+1];
    alfa[1] = k[0];
    beta[1] = niu[0];
    for(i=1; i<m; i++)
    {
        x[i] = 0;
    }
    for(i=0; i<m+1; i++)
    {
        alfa[i+1] = b / (c-a*alfa[i]);
        beta[i+1] = (a*beta[i]-f[i]) / (c-a*alfa[i]);
    }
    x[m] = (k[1]*beta[m]+niu[1]) / (1-k[1]*alfa[m]);
    for(i=m-1; i>=0; i--)
    {
        x[i] = alfa[i+1] * x[i+1] + beta[i+1];
    }
    delete alfa;
    delete beta;
};
```

როგორც ვხედავთ I, II და III ბიჯების თანამიმდევრული შესრულებით ვღებულობთ იტერაციულ პროცესს. აღნიშნული პროცესი შევწყვიტოთ მაშინ, როდესაც ორი მეზობელი იტერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციების სხვაობის მოდული არ გახდება წინსწარ დასახელებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე ნაკლები.

გამოყენებულ იქნა განხილული სქემის რეალიზაციის სხვა მიდგომაც, რომელიც შემოთავაზებული იყო [56] შრომაში. ეს უკანასკნელი ალგორითმი დაფუძნებულია ნიუტონის მეთოდის მოდიფიკაციაზე, რის საშუალებითაც სხვაობიანი ამოცანები მიიყვანება სამწერტილოვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა

ბლოკურ სისტემამდე. ამ უკანასკნელის ამოხსნა კი ხორციელდება მატრიცული ფაქტორიზაციის მეთოდის საშუალებით [92].

გამოყენებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების ეფექტურობას ადასტურებს აგებული კერძო ამონახსნებისთვის ჩატარებული შესაბამისი ტესტური გამოთვლები.

გადავიდეთ თეორიული შედეგების დამადასტურებელ გრაფიკული ილუსტრაციების განხილვაზე.

პირველი თავის მეორე პარაგრაფში დასმული იყო შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x} \right), & \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -aS^\beta + bS^\gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$$U(0, t) = V(0, t) = 0, \quad U(1, t) = \psi_1, \quad V(1, t) = \psi_2, \quad (1.4.3)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad S(x, 0) = S_0(x) > 0.$$

როგორც აღნიშნულ პარაგრაფში ვნახეთ, თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, მაშინ (1.4.2), (1.4.3) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი უტოლობა:

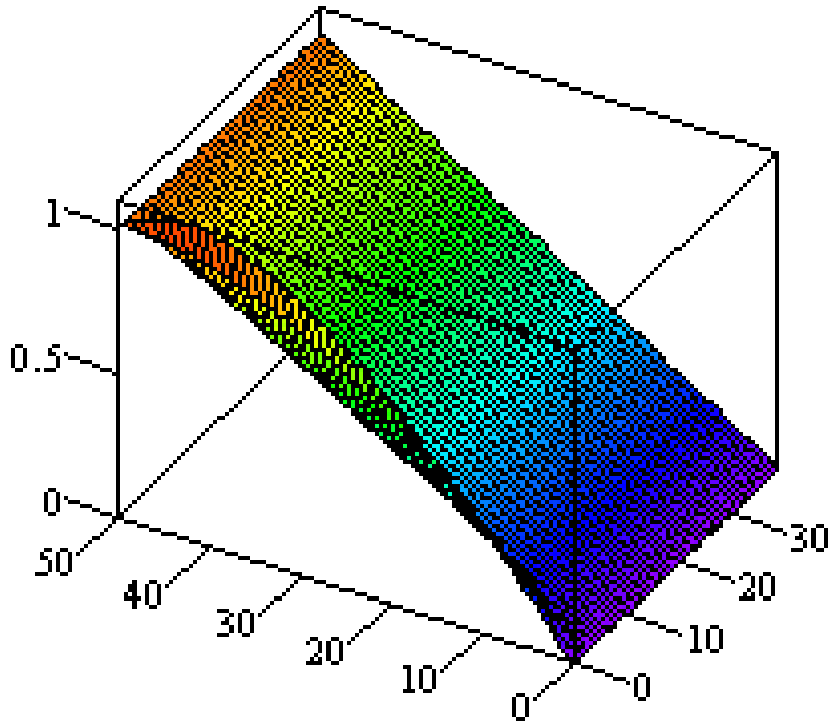
$$a(\gamma - \beta) \left[\frac{b}{a} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right]^{\frac{\beta - \alpha - 1}{\beta - \gamma}} < \pi^2. \quad (1.4.4)$$

ვთქვათ, $\gamma = 1/2$ და $\beta = 1$, ე.ი. $\gamma - \beta < 0$. მაშასადამე, სამართლიანია (1.4.4) უტოლობა და შესაბამისად ადგილი აქვს წრფივად მდგრადობას.

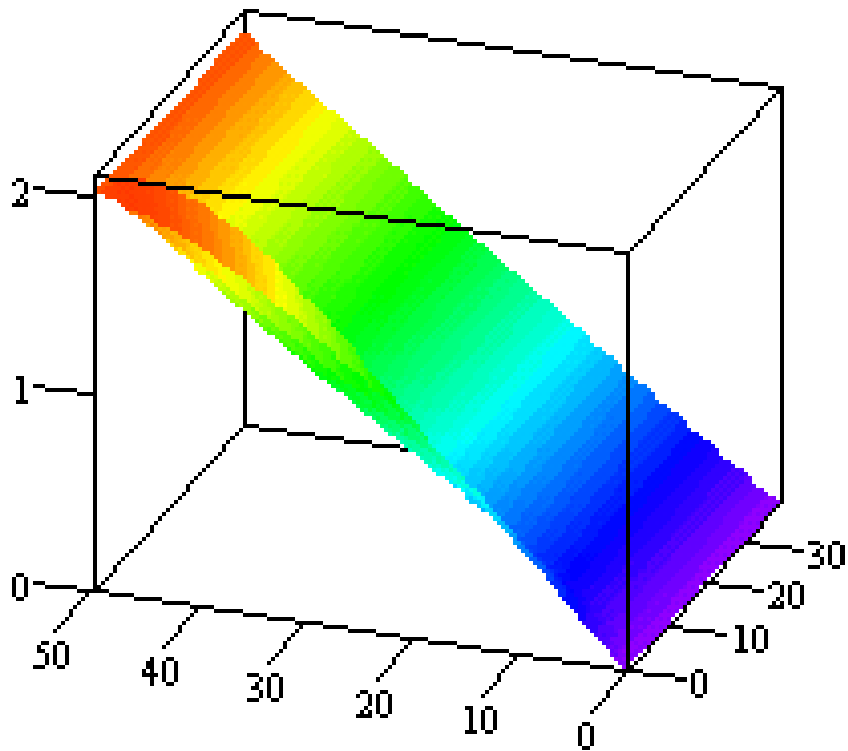
თუ დავუშვებთ, რომ $a = b = 1$, $\alpha = 1/2$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$ და

$$U_0(x) = \psi_1 x + \sin(\pi x), \quad V_0(x) = \psi_2 x + \cos(2\pi x) - 1, \quad S_0(x) = 1,$$

მაშინ გვაქვს შემდეგი სურათი (ნახ. 1.4.1 და 1.4.2):

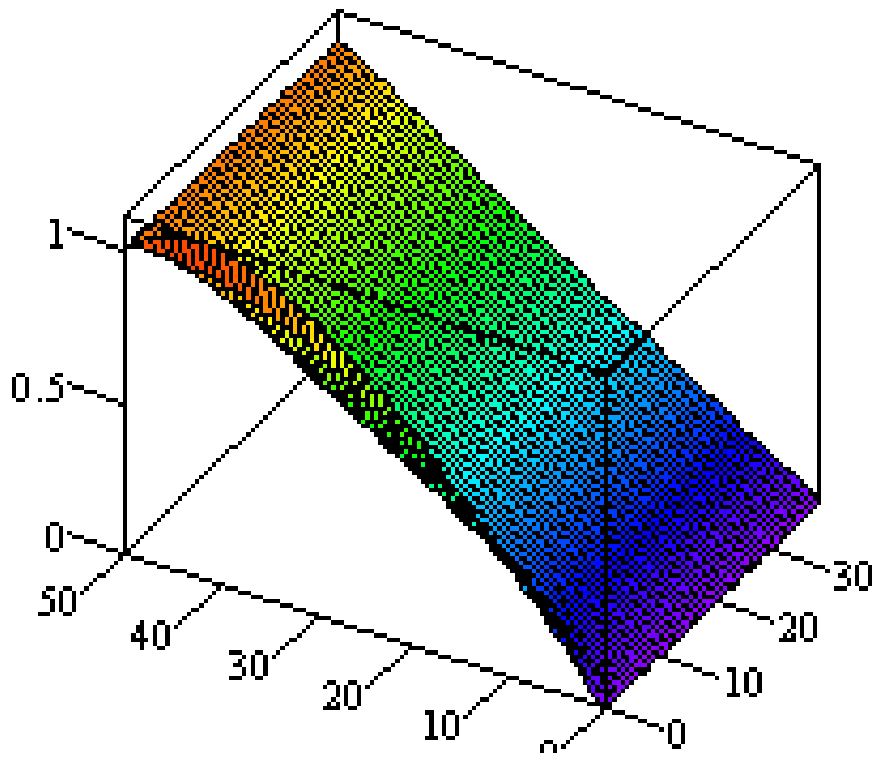


ნახ. 1.4.1. U ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

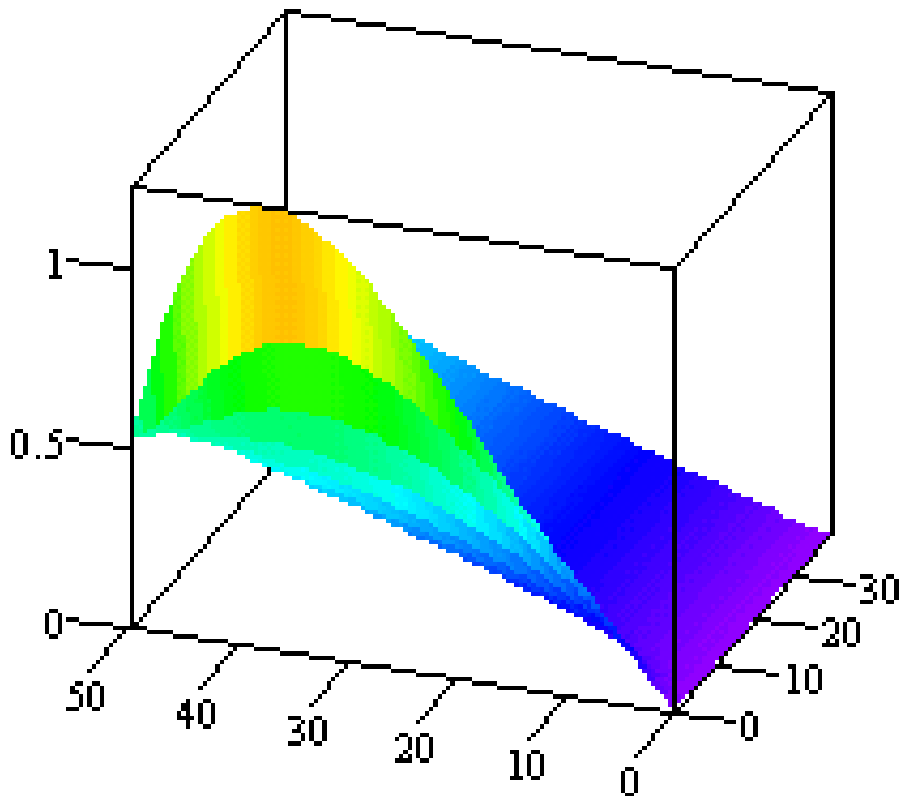


ნახ. 1.4.2. V ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

დავუშვათ, რომ $a = b = 1$, $\alpha = \gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 1/2$. ე.ი. $\gamma - \beta > 0$, მაგრამ (1.4.4) უტოლობა მაინც სამართლიანია და იგივე საწყისი ფუნქციების შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი სურათი (ნახ. 1.4.3 და 1.4.4):



ნახ. 1.4.3. U ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

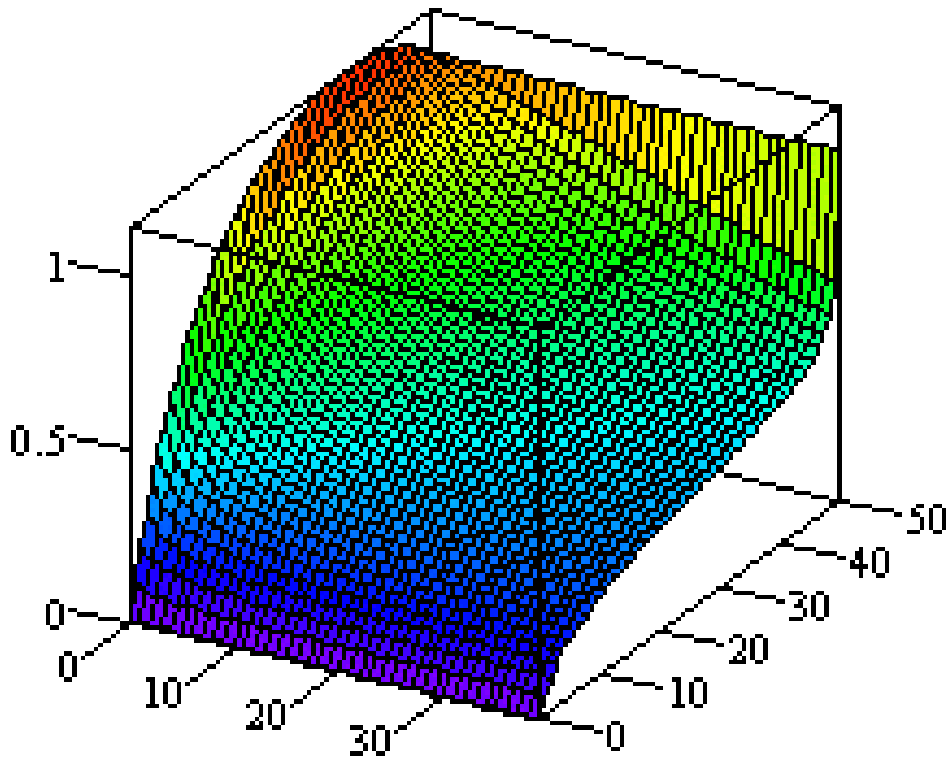


ნახ. 1.4.4. V ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

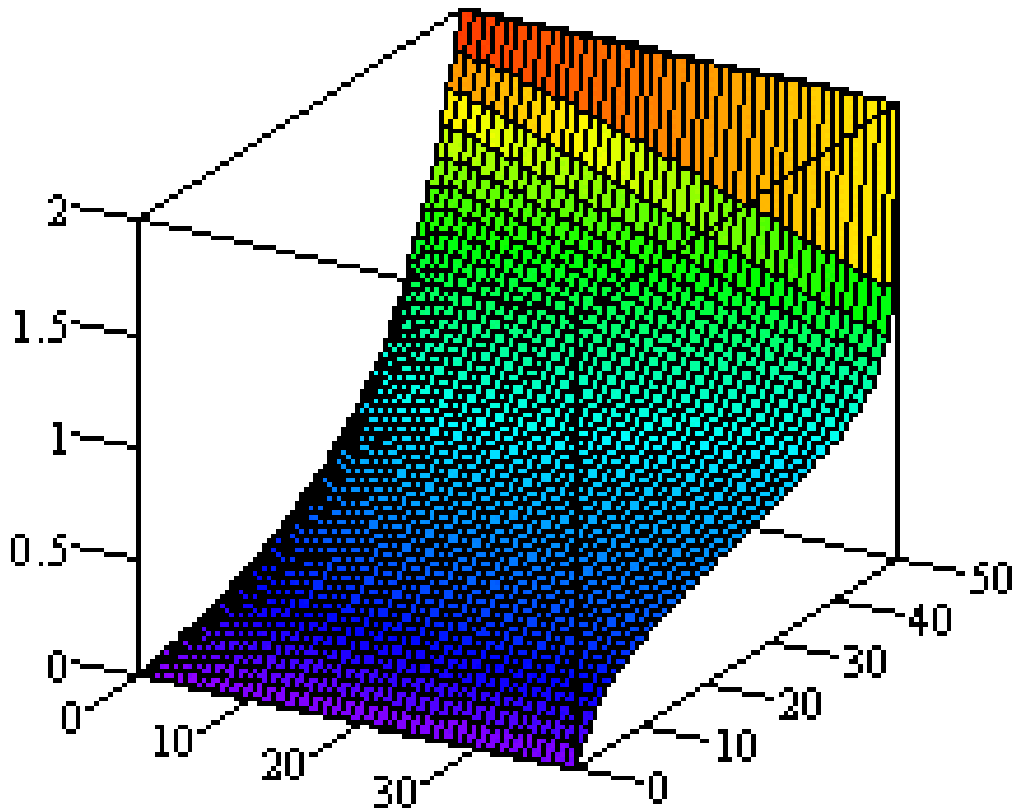
ვთქვათ, $a = b = 1$, $\alpha = -0.8$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$, და

$$U_0(x) = \psi_1 x + 1 - x^2, \quad V_0(x) = \psi_2 x + (1 - x)(e^x - e^{-x}), \quad S_0(x) = 1.$$

ამ შემთხვევაში (1.4.4) უტოლობა ირღვევა და შესაბამისად გვაქვს შემდეგი სურათი (ნახ. 1.4.5 და 1.4.6):

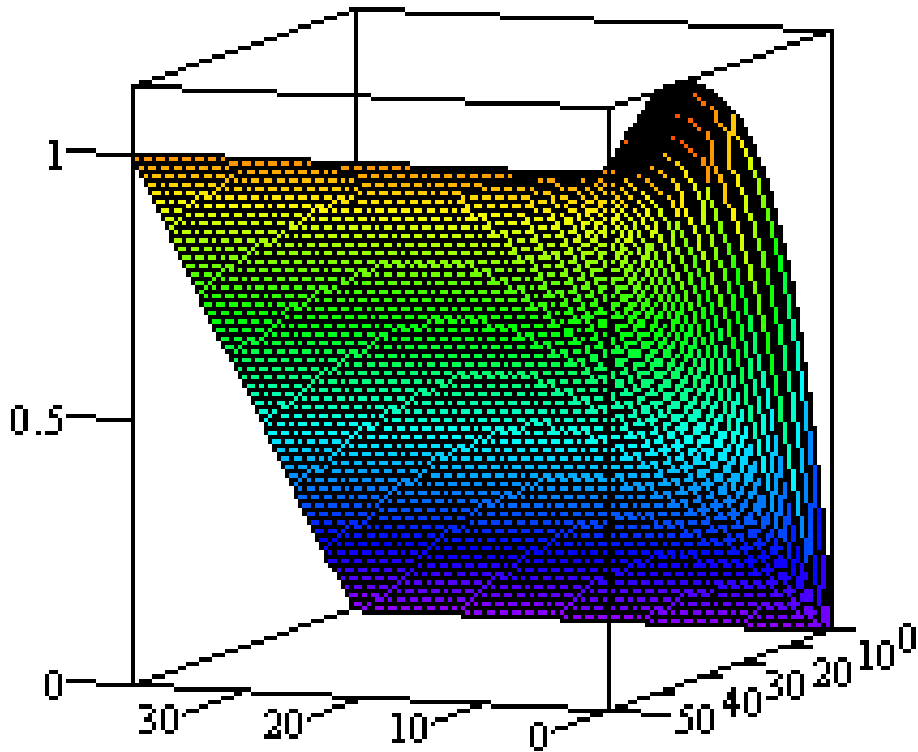


ნახ. 1.4.5. U ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

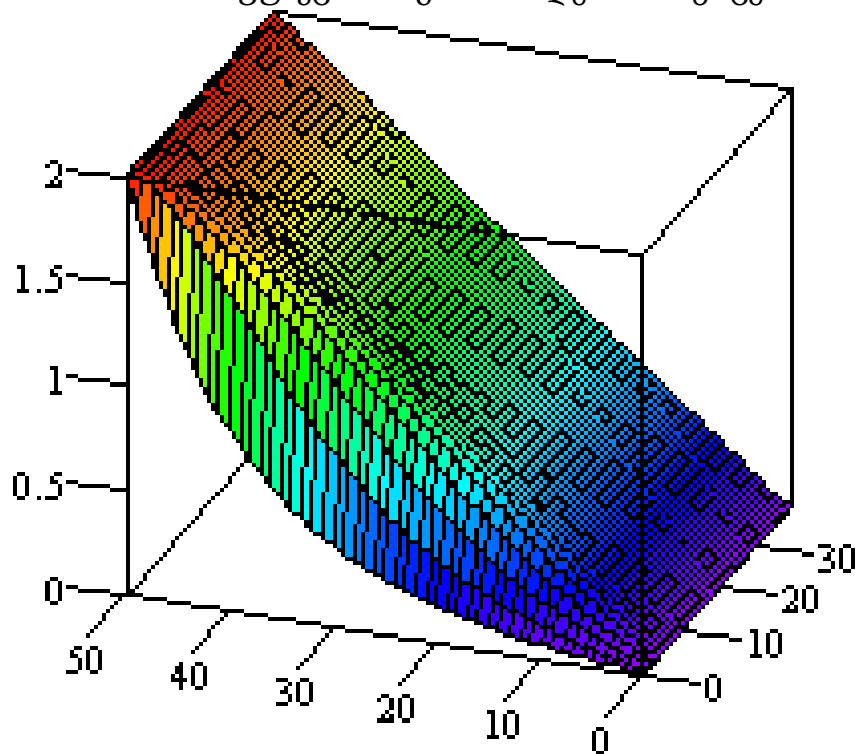


ნახ. 1.4.6. V ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

აქვე მოვიყვანოთ გლობალური მდგრადობის დამადასტურებელი სურათი. თუ $a = b = \alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$, თეორემა 1.2.2-ის თანახმად ადგილი აქვს გლობალურად მდგრადობას. შესატყვისი გრაფიკული ილუსტრაციები მოყვანილია 1.4.7 და 1.4.8 ნახაზებზე.

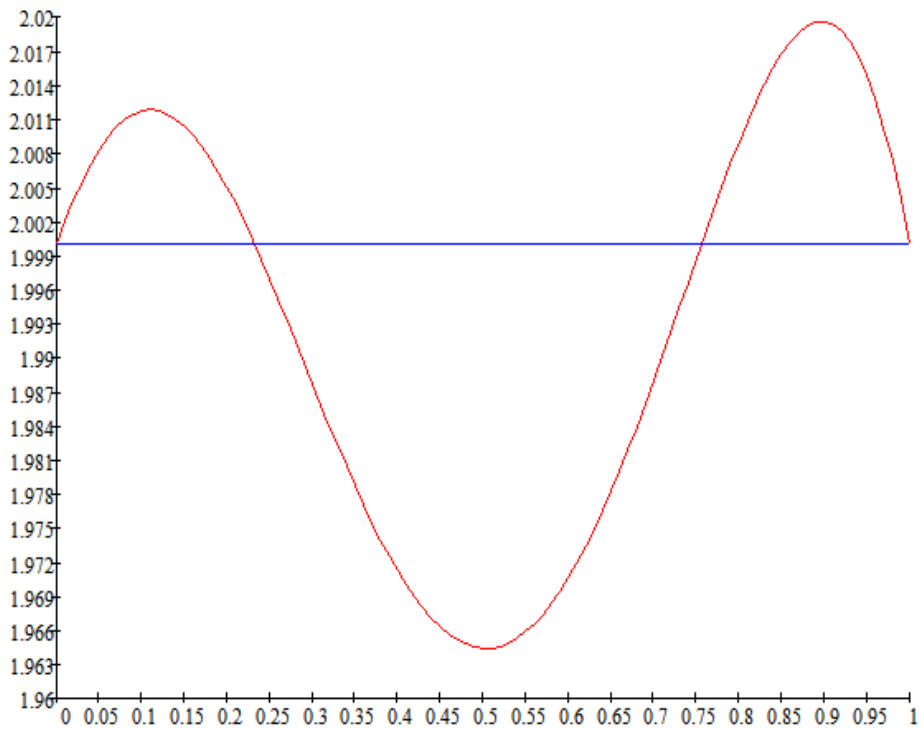


ნახ. 1.4.7. U ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

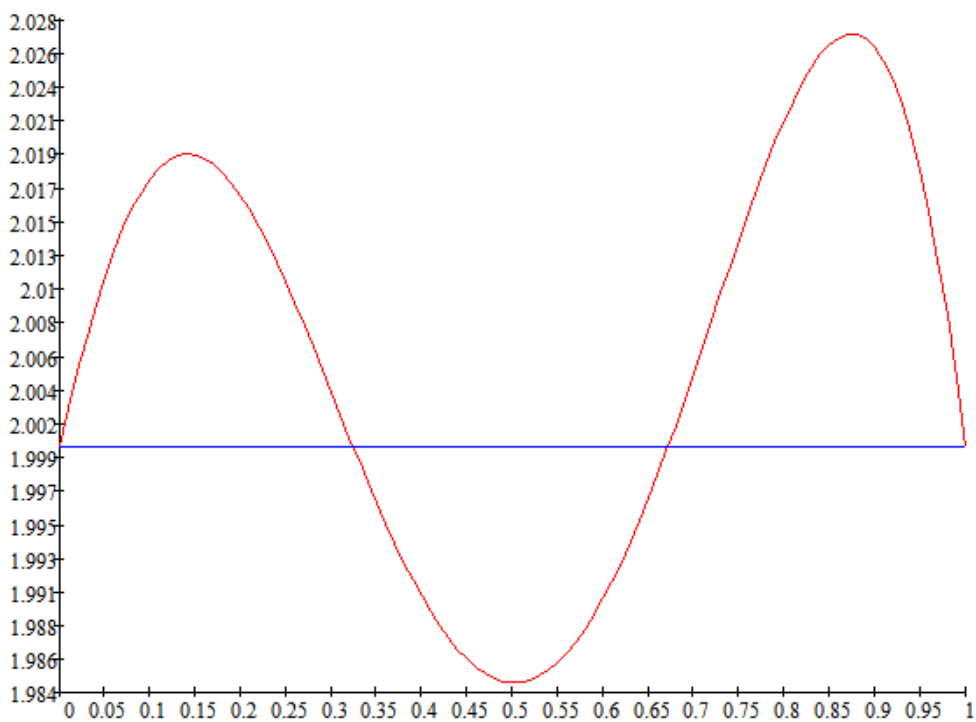


ნახ. 1.4.8. V ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

ნაჩვენები იყო ასევე ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წამოშობის შესაძლებლობა პარამეტრების გარკვეული სახით შერჩევის შემთხვევაში. ქვემოთ მოცემულია ამ თეორიული შედეგების გრაფიკული ილუსტრაციები (ნახ. 1.4.9 და 1.4.10).



ნახ. 1.4.9. U ფუნქცია.



ნახ. 1.4.10. V ფუნქცია.

თავი II - მაქსველის დიფერენციალური განტოლებების რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე და ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას

წინამდებარე თავში განიხილება მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქციის პროცედურა ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე. ამავე თავში შესწავლილია ერთი ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის და შესაბამისი წყაროს წევრებიანი მოდელის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ასიმპტოტური ყოფაქცევის, ანუ სტაბილიზაციის რიგები.

§ 2.1. მაქსველის დიფერენციალური განტოლებების რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე

მოვიყვანოთ მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ სახემდე. დავუშვათ, რომ სხეული მოთავსებულია ცვლად მაგნიტურ ველში. აღვწეროთ ველის განაწილება ამ სხეულის შიგნით. განვიხილოთ მაქსველის განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს [69]:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot} E, \quad (2.1.1)$$

$$\operatorname{div} H = 0, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{4\pi}{c} J = \operatorname{rot} H, \quad (2.1.3)$$

$$J = \sigma E, \quad (2.1.4)$$

სადაც გამოყენებული ცვლადები იგივე ფიზიკური სიდიდეებია რაც (1.1.7) - (1.1.10) განტოლებებში. როგორც პირველი თავის პირველ პარაგრაფში აღინიშნა, (2.1.1) - (2.1.4) სისტემა მიიყვანება შემდეგ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot}(\rho \operatorname{rot} H) = 0, \quad (2.1.5)$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2, \quad (2.1.6)$$

სადაც ρ სხეულის წინააღობაა, ρ_0 – ნივთიერების სიმკვრივეა, c_v კი – კუთრი სითბოტევადობა, რომლებიც საზოგადოდ დამოკიდებულნი არიან ტემპერატურაზე.

გადავიდეთ (2.1.5), (2.1.6) სისტემის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე რედუქციის საკითხზე, რომელიც როგორც ზემოთაც აღინიშნა, პირველად განხორციელდა [32] ნაშრომში.

გადავწეროთ (2.1.6) განტოლება შემდეგი სახით

$$\rho_0(\theta) \frac{c_v}{\rho(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = J^2.$$

თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$S(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \rho_0(\xi) \frac{c_v}{\rho(\xi)} d\xi,$$

მაშინ მივიღებთ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = J^2.$$

დავუშვათ, რომ პროცესი იწყება დროის $t = 0$ მომენტში, რომელსაც შეესაბამება სხეულის θ_0 ტემპერატურა.

ამ განტოლების $[0, t]$ შუალედზე ინტეგრებით მივიღებთ

$$S[\theta(x, t)] = \int_0^t J^2 d\tau.$$

ფიზიკური თვალსაზრისით c_v და ρ ფუნქციები არის დადებითი, ამიტომ $S(\theta)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია. აქედან გამომდინარე ცალსახად განისაზღვრება მისი შებრუნებული $\theta = \phi(S)$ ფუნქცია, რომელიც $S(\theta)$ ფუნქციასთან დაკავშირებულია $\phi[S(\theta)] = \theta$ თანაფარდობით. ამრიგად, შეიძლება ჩაიწეროს, რომ

$$\theta(x, t) = \phi \left(\int_0^t J^2 d\tau \right).$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.1.3) განტოლებას, გვექნება

$$J = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H.$$

ანუ

$$\theta(x, t) = \phi \left(\int_0^t \left| \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H \right|^2 d\tau \right).$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (2.1.5) განტოლებაში, როგორც $\rho = \rho(\theta)$ ფუნქციის არგუმენტი, რის შედეგადაც მივიღებთ:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} \operatorname{rot} \left\{ \rho \left[\phi \left(\int_0^t \left| \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H \right|^2 d\tau \right) \right] \operatorname{rot} H \right\} = 0,$$

$$\operatorname{div} H = 0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$a(S) = \frac{c^2}{4\pi} \rho(\phi(S)), \quad W = \frac{c}{4\pi} H,$$

მაშინ სისტემა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{rot} \left[a \left(\int_0^t |\operatorname{rot} W|^2 d\tau \right) \operatorname{rot} W \right] = 0, \quad (2.1.7)$$

$$\operatorname{div} W = 0.$$

თუ განვიხილავთ ბრტყელ ველს $W(0, U, V)$, სადაც $U = U(x, t)$ და $V = V(x, t)$ ფუნქციები დამოკიდებულია ერთ სივრცით ცვლადზე, მაშინ

$$\operatorname{rot} W = \left(0, -\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

ხოლო

$$\text{rot}(a(S)\text{rot}W) = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(S) \frac{\partial U}{\partial x} \right), -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(S) \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right)$$

და შესაბამისად (2.1.7) ვექტორული დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

აღვნიშნოთ, რომ (2.1.7) სახის განტოლებები პირველად განხილული იყო [32] ნაშრომში, სადაც შესწავლილი იყო საწყის-სასაზღვრო ამოცანების განზოგადებული ამონახსნების არსებობა და ერთადერთობა. არაწრფივობის უფრო ზოგადი შემთხვევები და (2.1.7) ტიპის მოდელის განზოგადებებისთვის გარკვეული საწყის-სასაზღვრო ამოცანების კორექტულობის საკითხი შესწავლილია [21, 42, 43] შრომებში.

დავუშვათ, რომ ρ_0 და c_ν სიდიდეები მუდმივებია. განვიხილოთ $a(S)$ და $\rho(\theta)$ ფუნქციების მაგალითები [71, 72] (ქვემოთ მოყვანილ ოთხივე მაგალითში c_0 და c_1 სიდიდეები აღნიშნავენ დადებით მუდმივებს).

თუ $\rho(\theta) = \theta^\alpha$, $\alpha > 1$, მაშინ $a(S) = c_1(c_0 - S)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. ამრიგად, $\rho(\theta)$ წინალობის ხარისხოვან ზრდას მიყვავართ მხოლოდ სასრულ შუალედზე განსაზღვრულ $a(S)$ კოეფიციენტამდე.

თუ $\rho(\theta) = \theta$, მაშინ $a(S) = c_1 e^{c_0 S}$. აქედან ჩანს, რომ წრფივი ზრდა გვაძლევს მაჩვენებლიან $a(S)$ ფუნქციას. ტემპერატურის ზრდისას წინალობის წრფივი ზრდა დამახასიათებელია მეტალებისთვის.

თუ $\rho(\theta) = \theta^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, მაშინ $a(S) = c_1(c_0 + S)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ და $\rho(\theta)$ ფუნქციის ზრდა გვაძლევს $a(S)$ კოეფიციენტის ხარისხოვან ზრდას.

თუ $\rho(\theta) = \theta^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, მაშინ $a(S) = c_1(c_0 + S)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$. მაშასადამე, კლებადი $\rho(\theta)$ ფუნქციიდან ვღებულობთ კლებად $a(S)$ ფუნქციას. ეს არის ზოგადი ფაქტი, თუ ρ_0 და

c_v სიდიდეები მუდმივებია. მართლაც, დავუშვათ, რომ როცა $\theta \geq \theta_0$, მაშინ $\rho(\theta)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ განსაზღვრების თანახმად

$$\frac{da}{dS} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dS} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{d\rho/d\theta}{dS/d\theta} = \frac{c^2}{4\pi\rho c_v} \rho(\theta) \rho'(\theta).$$

აქედან ნათლად ჩანს, რომ $a(S)$ ფუნქცია იზრდება და კლებულობს $\rho(\theta)$ ფუნქციასთან ერთად.

ახლა გადავიდეთ ე.წ. გასაშუალებული მოდელის მიღებაზე, რომელიც კვლავ აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელებას გარემოში [72].

ჯოულ-ლენცის (2.1.6) კანონი წარმოადგენს სითბოს გამოყოფის [69] ლოკალურ კანონს

$$dQ = \int_{\Omega} JE \, dx dt. \quad (2.1.9)$$

აქ dQ – სითბური ენერჯის ნაკადია დროის dt შუალედში, სხეულის მთელ მოცულობაში, რომელიც უკავია $\Omega \subset R^3$ არეს. ჯოულ-ლენცის კანონი არ ითვალისწინებს სითბოს გადაცემის პროცესს სხეულის შიგნით. ეს კი სამართლიანია, თუ ჩავთვლით ტემპერატურას მუდმივს სხეულის გასწვრივ, ე.ი. დამოკიდებულს დროზე, მაგრამ დამოუკიდებელს სივრცითი ცვლადებისგან. ამრიგად, ამ შემთხვევაში შეიძლება დავუშვათ, რომ $\theta = \theta(t)$. ამ დაშვებაში $dQ = mc_v d\theta$, სადაც m – ნივთიერების მასაა, მაშინ (2.1.9) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$mc_v(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \int_{\Omega} JE dx.$$

ომის კანონის გამოყენებით $E = \rho(\theta)J$, და გამორიცხვის მეთოდის გამოყენებით, ვღებულობთ (2.1.7) სისტემის შემდეგნაირ ანალოგს [72]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{rot} \left[a \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_0^t \int_{\Omega} |\operatorname{rot} W|^2 dx dt \right) \operatorname{rot} W \right] = 0,$$

$$\operatorname{div} W = 0.$$

აქ $|\Omega|$ სხეულის მოცულობაა. Ω არეზე გასაშუალების გამო ამ განტოლების $a(S)$ კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ t ცვლადზე და ამიტომ იგი შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\frac{\partial W}{\partial t} - a \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_0^t \int_{\Omega} |\text{rot } W|^2 dx d\tau \right) \text{rot rot } W = 0. \quad (2.1.10)$$

ბრტყელი ველისთვის $W = W(0, U, V)$, სადაც $U = U(x, t)$ და $V = V(x, t)$ ერთი სივრცული ცვლადის ფუნქციებია, (2.1.10) ვექტორული ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

სადაც $\Omega = [0, 1]$.

ზემოთ მიღებული (2.1.10), (2.1.11) განტოლებების გამოკვლევა, როგორც ეს [72] შრომაშია აღნიშნული, რთულია და მოითხოვს დამოუკიდებელ შესწავლას.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (2.1.7) და (2.1.10) განტოლებებში არ არის გათვალისწინებული მრავალი ფიზიკური ეფექტი. ამოცანის უფრო ზოგადად დასმისთვის, პირველ რიგში, აუცილებელია სხეულის სითბოგამტარობის გათვალისწინება. ამ შემთხვევაში გაჩნდება დამატებით შესაკრები, რომელიც ითვალისწინებს სითბოგამტარობის პროცესს და იგი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2 + \nabla(\chi \nabla \theta),$$

სადაც χ – სითბოგამტარობის კოეფიციენტია, რომელიც საზოგადოდ, აგრეთვე დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

ინტეგრო-დიფერენციალური (2.1.8) და (2.1.11) მოდელების გამოკვლევა $H = (0, 0, U)$ შემთხვევისთვის, როგორც ზემოთაც აღინიშნა, პირველად ჩატარებული იყო [32, 43] შრომებში. კერძოდ, [32] შრომაში დამტკიცებულია პირველი საწყის-

სასაზღვრო ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის არსებობის თეორემა ერთგანზომილებიანი სივრცითი ცვლადის შემთხვევაში, როცა $a(S) = 1 + S$.

ერთგანზომილებიანი ვარიანტი $a(S) = (1 + S)^p$, $0 < p \leq 1$ შემთხვევისთვის შესწავლილია [21] შრომაში. ამ შრომაში პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისთვის დამტკიცებულია $L_{2p+2} \left(0, T; \overset{\circ}{W}_{2p+2}^1(0,1) \right)$ სივრცეში ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები.

ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი სივრცული ცვლადების შემთხვევა ამ მოდელებისა და მათი გარკვეული განზოგადებებისათვის შესწავლილია მრავალ ნაშრომში (იხ. მაგალითად, [4, 5, 42, 43, 55, 70 - 72, 78, 79, 87] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები).

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს (2.1.8) და (2.1.11) მოდელების შესაბამისი წყაროს წევრებიანი შემდეგი განტოლებათა სისტემების გამოკვლევა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + g(U) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g(V) = 0$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(V) = 0,$$

სადაც $a = a(S)$, g , f_1 , f_2 თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

§ 2.2. ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას

განვიხილოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(S) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + g(U) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(S) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g(V) = 0, \quad (2.2.1)$$

სადაც

$$S(x, t) = \int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau, \quad (2.2.2)$$

a და g თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია. უსასრულო $(0,1) \times (0, \infty)$ არეში (2.2.1), (2.2.2) არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის დავსვათ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0, t) = U(1, t) = V(0, t) = V(1, t) = 0, t \geq 0, \quad (2.2.3)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0,1], \quad (2.2.4)$$

სადაც $U_0 = U_0(x)$ და $V_0 = V_0(x)$ თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია.

შემდეგ მსჯელობებში გამოყენებულია $L_2(0,1)$ სივრცის შემდეგი ბუნებრივი სკალარული ნამრავლი და შესაბამისი ნორმა:

$$(r, q) = \int_0^1 r \cdot q \, dx, \quad \|r\| = (r, r)^{\frac{1}{2}}.$$

გამოვიკვლიოთ (2.2.1) - (2.2.4) ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.2.1. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული ფუნქცია და $U_0, V_0 \in L_2(0,1)$, მაშინ (2.2.1) - (2.2.4) ამოცანის ამონახსნისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|U\| + \|V\| \leq C e^{-a_0 t}.$$

შენიშვნა. აქ და შემდეგშიც C აღნიშნავს დადებით მუდმივს, რომელიც არ არის დამოკიდებული t დროზე.

დამტკიცება. გავამრავლოთ (2.2.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლება $U(x, t)$ და $V(x, t)$ ფუნქციებზე შესაბამისად და ვაინტეგრეთ (0,1) არეზე. ნაწილობითი

ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით და (2.2.3) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + \int_0^1 a(S) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 g(U) U dx = 0,$$

საიდანაც $a(S)$ და $g(U)$ ფუნქციებზე შეზღუდვების გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|^2 + a_0 \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 \leq 0.$$

აქედან ჰუნკარეს უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} \|U\|^2 + 2a_0 \|U\|^2 \leq 0.$$

უკანასკნელი უტოლობის e^{2t} ფუნქციაზე გამრავლება გვაძლევს

$$\frac{d}{dt} (e^{2a_0 t} \|U\|^2) \leq 0,$$

საიდანაც ვღებულობთ შემდეგ შეფასებას

$$\|U\| \leq C e^{-a_0 t}. \quad (2.2.5)$$

ანალოგიურად,

$$\|V\| \leq C e^{-a_0 t}. \quad (2.2.6)$$

მაშასადამე, (2.2.5) და (2.2.6) შეფასებებიდან გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1-ის სამართლიანობა.

ახლა განვიხილოთ საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ერთგანზომილებიანი ორკომპონენტიანი მაგნიტური ველის შემთხვევაში გასაშუალებული მოდელისთვის წყაროს წევრებით:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a(S) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - a(S) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(V) = 0, \quad (2.2.7)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = V(0, t) = V(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2.8)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.2.9)$$

სადაც

$$S(t) = \int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau \quad (2.2.10)$$

და $a, g, U_0 = U_0(x)$ და $V_0 = V_0(x)$ კვლავ თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია.

თუ ჩავატარებთ ანალოგიურ მსჯელობას როგორც (2.2.1) - (2.2.4) ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლისას, მაშინ მივიღებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 2.2.2. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და $U_0, V_0 \in L_2(0,1)$, მაშინ (2.2.7) - (2.2.10) ამოცანის ამონახსნისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|U\| + \|V\| \leq C e^{-a_0 t}.$$

§ 2.3. ამონახსნის ერთადერთობა

წინამდებარე პარაგრაფში განიხილება (2.2.1) - (2.2.4) და (2.2.7) - (2.2.10) ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. გადავწეროთ (2.2.1), (2.2.2) სისტემა შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + g(U) = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g(V) = 0$$

და დავსვათ მისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0, t) = V(0, t) = 0, \quad U(1, t) = \psi_1, \quad V(1, t) = \psi_2, \quad t \geq 0, \quad (2.3.2)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0,1], \quad (2.3.3)$$

სადაც $\psi_1 = \text{Const} \geq 0$, $\psi_2 = \text{Const} \geq 0$, ხოლო a, g, U_0, V_0 კი კვლავ თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

შევისწავლოთ (2.3.1) - (2.3.3) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

თეორემა 2.3.1. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (2.3.1) - (2.3.3) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დავუშვათ, არსებობს (2.3.1) - (2.3.3) ამოცანის ორი განსხვავებული ამონახსნი (U_1, V_1) და (U_2, V_2) . განვიხილოთ სხვაობები: $Z = U_1 - U_2$ და $W = V_1 - V_2$. აღნიშნული სხვაობებისთვის (2.3.1) - (2.3.3) ამოცანიდან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U_1}{\partial x} \right. \\ & \left. - a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U_2}{\partial x} \right\} + g(U_1) - g(U_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V_1}{\partial x} \right. \\ & \left. - a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V_2}{\partial x} \right\} + g(V_1) - g(V_2) = 0, \end{aligned}$$

$$Z(0, t) = W(0, t) = Z(1, t) = W(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.3.5)$$

$$Z(x, 0) = 0, \quad W(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (2.3.6)$$

გავამრავლოთ (2.3.4) სისტემის პირველი განტოლება Z ფუნქციაზე და მიღებული ტოლობა ვაინტეგრირებთ $(0,1)$ არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის და (2.3.5) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z\|^2 + \int_0^1 \left\{ a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U_1}{\partial x} \right. \\ & \left. - a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U_2}{\partial x} \right\} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$+ \int_0^1 [g(U_1) - g(U_2)](U_1 - U_2) dx = 0.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned} & \left\{ a \left(\int_0^t \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 d\tau \right) \frac{\partial U_1}{\partial x} - a \left(\int_0^t \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 d\tau \right) \frac{\partial U_2}{\partial x} \right\} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \\ &= \int_0^1 a' \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right]^2 d\tau \right) \\ & \quad \times \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) d\tau \right)^2 d\xi \\ &+ \int_0^1 a \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right]^2 d\tau \right) d\xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

ამ ტოლობის (2.3.7) ტოლობაში ჩასმით, g ფუნქციის დადებითად განსაზღვრულობისა და მონოტონურად ზრდადობის გათვალისწინებით, მიღებული უტოლობის $(0, t)$ შუალედზე ინტეგრებით და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leq 2 \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 a \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right]^2 d\tau \right) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 d\xi d\tau dx \\ &+ \int_0^1 a \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right]^2 d\tau \right) \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) d\tau \right)^2 d\xi \\ &\quad - \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 a'' \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right]^2 d\tau \right) \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right]^2 \\ &\quad \times \left(\int_0^t \left[\frac{\partial U_2}{\partial x} + \xi \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) d\tau \right)^2 d\xi d\tau = 0. \end{aligned}$$

უკანასკნელი უტოლობიდან, $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0, a'(S) \geq 0, a''(S) \leq 0$
შეზღუდვების მხედველობაში მიღებით, გვექნება

$$\|z(t)\|^2 \leq 0.$$

მაშასადამე, $U_1 \equiv U_2$. ამრიგად, თეორემა 2.3.1 ამონახსნის ერთადერთობის
შესახებ დამტკიცებულია.

აქვე აღვიშნავთ, რომ ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე მიიღება
ერთადერთობის შემდეგი თეორემა (2.3.7) - (2.3.10) ამოცანისთვისაც.

თეორემა 2.3.2. თუ $a = a(S) \geq a_0 = Const > 0, a'(S) \geq 0, a''(S) \leq 0, g$ არის
დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (2.3.7) - (2.3.10)
ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

თავი III - ნახევრად-დისკრეტული და სასრულ- სხვაობიანი სქემების მდგრადობა და კრებადობა

წინამდებარე თავში განიხილება ნახევრად-დისკრეტული და სასრულ-სხვაობიანი სქემების მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები როგორც არაგასაშუალებელი, ასევე გასაშუალებელი სისტემისათვის. კერძოდ, აგებულია არაცხადი ნახევრად-დისკრეტული და სრულად დისკრეტული სქემები და დამტკიცებულია მათი მდგრადობა და კრებადობა კრებადობის რიგების დაფიქსირებით. ამავე თავის ბოლო პარაგრაფში მოყვანილია რიცხვითი გათვლების სარეალიზაციო ალგორითმები და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები.

§ 3.1. ნახევრად-დისკრეტული სქემების მდგრადობა და კრებადობა

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანები:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + g(U) = f_1(x, t), \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[a \left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + g(V) = f_2(x, t),$$

$$U(0, t) = V(0, t) = U(1, t) = V(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.1.3)$$

და

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(U) = f_1(x, t), \quad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - a \left(\int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(V) = f_2(x, t),$$

$$U(0, t) = V(0, t) = U(1, t) = V(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.1.5)$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.1.6)$$

სადაც $\psi_1 = Const \geq 0$, $\psi_2 = Const \geq 0$, ხოლო a , g , f_1 , f_2 , U_0 , V_0 კი თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

შევისწავლოთ (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული სქემების მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები. დავყოთ $[0, 1]$ შუალედი N ტოლ ნაწილად და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$h = \frac{1}{N}, \quad x_i = ih, \quad u_i = u(x_i, t),$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \omega_h^* = \{x_i = (i - 1/2)h, \quad i = 1, 2, \dots, N\}.$$

შემოვიტანოთ სკალარული ნამრავლები და შესაბამისი ნორმები:

$$(r, q)_h = h \sum_{i=1}^{N-1} r_i q_i, \quad (r, q]_h = h \sum_{i=1}^N r_i q_i,$$

$$\|r\|_h = (r, r)_h^{1/2}, \quad \|[r]\|_h = (r, r]_h^{1/2}.$$

აღვნიშნოთ (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანების ამონახსნების მნიშვნელობები (x_i, t) წერტილში $U_i = U_i(t)$, $V_i = V_i(t)$ ფუნქციებით, ხოლო შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელის ამონახსნები კი - $u_i = u_i(t)$, $v_i = v_i(t)$ ფუნქციებით.

განვიხილოთ (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანებისთვის შემდეგი ნახევრად-დისკრეტული ანალოგები:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) u_{\bar{x},i} \right\}_x + g(u_i) &= f_1(x, t), \\ \frac{dv_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) v_{\bar{x},i} \right\}_x + g(v_i) &= f_2(x, t), \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$u_0(t) = v_0(t) = u_N(t) = v_N(t) = 0, \quad (3.1.8)$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, \quad v_i(0) = U_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.1.9)$$

და შესაბამისად

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} - a \left(h \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] dt \right) u_{\bar{x},i} + g(u_i) &= f_1(x, t), \\ \frac{dv_i}{dt} - a \left(h \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] dt \right) v_{\bar{x},i} + g(v_i) &= f_2(x, t), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$u_0(t) = v_0(t) = u_N(t) = v_N(t) = 0, \quad (3.1.11)$$

$$u_i(0) = U_{0,i}, \quad v_i(0) = U_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.1.12)$$

მაშასადამე, მივიღეთ კოშის ამოცანა ჩვეულებრივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისთვის, რომელთა რიცხვითი ამოხსნა შესაძლებელია შესაბამისი მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდების გამოყენებით. აღვნიშნავთ, რომ ამ მიმართულებით, 2018 წელს, საინტერესო ნაშრომი იქნა გამოქვეყნებული ამერიკელი მეცნიერების მიერ [99].

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.1.1. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანებს გააჩნიათ საკმაოდ გლუვი ამონახსნები, მაშინ (3.1.7) - (3.1.9) და (3.1.10) - (3.1.12) სქემები მდგრადია და მათი ამონახსნები $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N-1}(t))$, მიისწრაფიან შესაბამისად $U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_{N-1}(t))$, $V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_{N-1}(t))$ ფუნქციებისკენ, როცა $h \rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\|u(t) - U(t)\|_h + \|v(t) - V(t)\|_h \leq Ch.$$

შენიშვნა. აქ C აღნიშნავს დადებით მუდმივს, რომელიც არ არის დამოკიდებული h და t სიდიდეებზე.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემა (3.1.7) - (3.1.9) სქემისათვის. ანალოგიურად მოხდება კრებადობის დამტკიცება (3.1.10) - (3.1.12) სქემის შემთხვევაში. გავამრავლოთ (3.1.7) სისტემის განტოლებები სკალარულად $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{N-1}(t))$ და $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N-1}(t))$ ფუნქციებზე შესაბამისად. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის დისკრეტული ანალოგის გამოყენებით და (3.1.8) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_h^2 + h \sum_{i=1}^N a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) (u_{\bar{x},i})^2 + h \sum_{i=1}^{N-1} g(u_i) u_i = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_h^2 + h \sum_{i=1}^N a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) (v_{\bar{x},i})^2 + h \sum_{i=1}^{N-1} g(v_i) v_i = 0,$$

აქედან, $a(S)$ ფუნქციაზე დადებული შეზღუდვის მხედველობაში მიღებით, ვღებულობთ შემდეგი უტოლობების სამართლიანობას:

$$\|u(t)\|_h^2 + \int_0^t \|u_{\bar{x}}\|_h^2 d\tau + h \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} g(u_i) u_i d\tau \leq C,$$

$$\|v(t)\|_h^2 + \int_0^t \|v_{\bar{x}}\|_h^2 d\tau + h \int_0^t \sum_{i=1}^{N-1} g(v_i) v_i d\tau \leq C.$$

(3.1.13)

მიღებული (3.1.13) აპრიორული შეფასებებიდან, თუ გავითვალისწინებთ $g(r)$ ფუნქციის დადებითად განსაზღვრულობას, გამომდინარეობს (3.1.7) - (3.1.9) სქემის მდგრადობა და გლობალური ამოხსნადობა.

უწყვეტი (3.1.1) - (3.1.3) ამოცანის $U = U(x, t)$ და $V = V(x, t)$ ამონახსნისთვის გვაქვს:

$$\frac{dU_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) U_{\bar{x},i} \right\}_x + g(U_i) = \psi_{1,i}(t),$$

$$\frac{dV_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) V_{\bar{x},i} \right\}_x + g(V_i) = \psi_{2,i}(t),$$

(3.1.14)

$$i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

$$U_0(t) = U_N(t) = V_0(t) = V_N(t) = 0, \quad (3.1.15)$$

$$U_i(0) = U_{0,i}, \quad V_i(0) = V_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.1.16)$$

სადაც

$$\psi_{k,i}(t) = O(h), \quad k = 1, 2.$$

ვთქვათ, $z_i(t) = u_i(t) - U_i(t)$ და $w_i(t) = v_i(t) - V_i(t)$. (3.1.7) - (3.1.9) და (3.1.14) - (3.1.16) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} & \frac{dz_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) u_{\bar{x},i} \right. \\ & \left. - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) U_{\bar{x},i} \right\}_x + g(u_i) - g(U_i) = -\psi_{1,i}(t), \\ & \frac{dw_i}{dt} - \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) v_{\bar{x},i} \right. \\ & \left. - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) V_{\bar{x},i} \right\}_x + g(v_i) - g(V_i) = -\psi_{2,i}(t). \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

$$z_0(t) = z_N(t) = w_0(t) = w_N(t) = 0,$$

$$z_i(0) = w_i(0) = 0.$$

გავამრავლოთ (3.1.17) სისტემის პირველი განტოლება სკალარულად $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_{N-1}(t))$ ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის დისკრეტული ანალოგის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|_h^2 + h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) u_{\bar{x},i} \right. \\ & \left. - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) U_{\bar{x},i} \right\} z_{\bar{x},i} \end{aligned}$$

$$+h \sum_{i=1}^{M-1} (g(u_i) - g(U_i))(u_i - U_i) = -h \sum_{i=1}^{N-1} \psi_{1,i} z_i.$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_h^2 + h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) v_{\bar{x},i} \right. \\ & \quad \left. - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) V_{\bar{x},i} \right\} w_{\bar{x},i} \\ & + h \sum_{i=1}^{M-1} (g(v) - g(V_i))(v_i - V_i) = -h \sum_{i=1}^{N-1} \psi_{2,i} w_i. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ $g(r)$ ფუნქციის მონოტონურად ზრდადობას, უკანასკნელი ორი ტოლობიდან გვექნება

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|z\|_h^2 + \|w\|_h^2) + h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) u_{\bar{x},i} \right. \\ & \quad \left. - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) U_{\bar{x},i} \right\} z_{\bar{x},i} + h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) v_{\bar{x},i} \right. \\ & \quad \left. - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) V_{\bar{x},i} \right\} w_{\bar{x},i} \leq -h \sum_{i=1}^{N-1} (\psi_{1,i} z_i + \psi_{2,i} w_i). \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ გამოვიყენებთ შემდეგ ტოლობას

$$\varphi(y) - \varphi(z) = \int_0^1 \frac{d}{d\xi} \varphi[z + \mu(y - z)] d\xi,$$

(3.1.18) უტოლობის მარცხენა მხარე შესაძლებელია შეფასდეს შემდეგნაირად

$$\left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) u_{\bar{x},i} - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) U_{\bar{x},i} \right\} (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ a \left(\int_0^t [(u_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) v_{\bar{x},i} - a \left(\int_0^t [(U_{\bar{x},i})^2 + (V_{\bar{x},i})^2] d\tau \right) V_{\bar{x},i} \right\} (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\
& = \int_0^1 \frac{d}{d\xi} a \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] d\xi (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \\
& + \int_0^1 \frac{d}{d\xi} a \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \quad \times [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})] d\xi (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \quad \times \int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})] (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \} d\tau \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] d\xi (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \\
& \quad + \int_0^1 a \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \quad \times (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) d\xi (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \\
& \quad + 2 \int_0^1 a' \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \quad \times \int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})] (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \} d\tau \\
& \quad \times \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})] d\xi (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \} d\xi \\
& \quad + \int_0^1 a \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) d\xi (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \times \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})](u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})](v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \} d\tau \right)^2 d\xi \\
& + \int_0^1 a \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \times \left[(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})^2 \right] d\xi.
\end{aligned}$$

უკანასკნელი ტოლობის (3.1.18) თანაფარდობაში ჩასმით, მიღებული ტოლობის $(0, t)$ არეზე ინტეგრებით და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned}
& \|z\|_h^2 + \|w\|_h^2 + 2h \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 a \left(\int_0^{\tau'} \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau' \right) \\
& \times \left[(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})^2 \right] d\xi d\tau \\
& + 2h \sum_{i=1}^N \int_0^1 a' \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau \right) \\
& \times \left(\int_0^t \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})](u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})](v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \} d\tau \right)^2 d\xi \\
& - 2h \sum_{i=1}^N \int_0^1 \int_0^t a'' \left(\int_0^{\tau'} \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \} d\tau' \right) \\
& \times \left\{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})]^2 + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})]^2 \right\} \\
& \times \left(\int_0^{\tau'} \{ [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})](u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) + [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})](v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \} d\tau' \right)^2 d\xi d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq -2h \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^t (\psi_{1,i} z_i + \psi_{2,i} w_i) d\tau.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან, $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$ პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_h^2 + \|w(t)\|_h^2 &\leq \int_0^t (\|z(\tau)\|_h^2 + \|w(\tau)\|_h^2) d\tau \\ &+ \int_0^t (\|\psi_1\|_h^2 + \|\psi_2\|_h^2) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

გრონუოლის უტოლობის გამოყენებით (3.1.19) შეფასებიდან ვღებულობთ თეორემა 3.1.1-ის სამართლიანობას.

როგორც უკვე აღინიშნა, (3.1.10) - (3.1.12) სქემის კრებადობის დამტკიცება მოხდება ანალოგიური მსჯელობის საფუძველზე, სადაც დამტკიცების პროცესში გამოსაყენებელ ძირითად ტოლობას ეწეება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} &\left\{ a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N [(u_{\bar{x},\ell})^2 + (v_{\bar{x},\ell})^2] d\tau \right) u_{\bar{x},i} \right. \\ &- a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N [(U_{\bar{x},\ell})^2 + (V_{\bar{x},\ell})^2] d\tau \right) U_{\bar{x},i} \left. \right\} (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \\ &+ \left\{ a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N [(u_{\bar{x},\ell})^2 + (v_{\bar{x},\ell})^2] d\tau \right) v_{\bar{x},i} \right. \\ &- a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N [(U_{\bar{x},\ell})^2 + (V_{\bar{x},\ell})^2] d\tau \right) V_{\bar{x},i} \left. \right\} (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{d\xi} a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\ &\quad \times [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] d\xi (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \frac{d}{d\xi} a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\
& \quad \times [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})] d\xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\
& \times h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})](u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell}) + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})](v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell}) \right\} d\tau \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i} + \xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})] d\xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \\
& \quad + \int_0^1 a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\
& \quad \times (u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) d\xi(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i}) \\
& \quad + 2 \int_0^1 a' \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\
& \times h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})](u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell}) + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})](v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell}) \right\} d\tau \\
& \quad \times [V_{\bar{x},i} + \xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})] d\xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\
& \quad + \int_0^1 a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\
& \quad \times (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) d\xi(v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \right\} d\tau \right) \\
& \quad \times \frac{d}{dt} \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})](u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell}) \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})](v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})d\tau \Big)^2 d\xi \\
& + \int_0^1 a \left(h \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell} + \xi(u_{\bar{x},\ell} - U_{\bar{x},\ell})]^2 + [V_{\bar{x},\ell} + \xi(v_{\bar{x},\ell} - V_{\bar{x},\ell})]^2 \} d\tau \right) \\
& \times \left[(u_{\bar{x},i} - U_{\bar{x},i})^2 + (v_{\bar{x},i} - V_{\bar{x},i})^2 \right] d\xi.
\end{aligned}$$

აღვნიშნოთ, რომ (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანების მაიხლოებითი ამოხსნისას შესაძლებელია გამოყენებულ იყოს შესწავლილი (3.1.7) - (3.1.9) და (3.1.10) - (3.1.12) ნახევრად-დისკრეტული სქემები თუ მოვახდენთ დროთი წარმოებულებისა და ინტეგრალების ბუნებრივ დისკრეტიზაციას. შემდეგი პარაგრაფი სწორედ ამ საკითხების შესწავლას ეძღვნება.

§ 3.2. სხვაობიანი სქემების მდგრადობა

და კრებადობა

განვიხილოთ კვლავ (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანები და შევისწავლოთ მათთვის სასრულ-სხვაობიანი სქემების მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები.

დავყოთ $[0, T]$ შუალედი M ტოლ ნაწილად, მოვახდინოთ $Q_T = (0, 1) \times (0, T)$ არის დისკრეტიზაცია და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{T}{M}, \quad t_j = j\tau, \quad u_i^j = u(x_i, t_j), \quad u_{\tau,i}^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \\
\omega_\tau &= \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M\}, \quad \bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \omega_{h\tau}^* = \omega_h^* \times \omega_\tau,
\end{aligned}$$

შევუსაბამოთ (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანებს შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემები:

$$u_{\tau,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + g(u_i^{j+1}) = f_{1,i}^j \quad (3.2.1)$$

$$v_{t,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{x,i}^k)^2 + (v_{x,i}^k)^2] \right) v_{x,i}^{j+1} \right\}_x + g(v_i^{j+1}) = f_{2,i}^j,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.2.2)$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.2.3)$$

და

$$u_{t,i}^j - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N [(u_{x,\ell}^k)^2 + (v_{x,\ell}^k)^2] \right) u_{x,x,i}^{j+1} + g(u_i^{j+1}) = f_{1,i}^j,$$

$$v_{t,i}^j - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N [(u_{x,\ell}^k)^2 + (v_{x,\ell}^k)^2] \right) v_{x,x,i}^{j+1} + g(v_i^{j+1}) = f_{2,i}^j, \quad (3.2.4)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$u_0^j = u_N^j = v_0^j = v_N^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.2.5)$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \quad v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.2.6)$$

მსგავსად ნახევრად-დისკრეტული სქემების შემთხვევებისა, დავამტკიცოთ კრებადობა და მდგრადობა (3.1.1) - (3.1.3) ამოცანის შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი (3.2.1) - (3.2.3) სქემისათვის. (3.2.4) - (3.2.6) სქემის კრებადობის დასამტკიცებლად მსჯელობა ჩატარდება ანალოგიურად.

თეორემა 3.2.1. თუ $a = a(S) \geq a_0 = \text{Const} > 0$, $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, g არის დადებითად განსაზღვრული და მონოტონურად ზრდადი ფუნქცია და (3.1.1) - (3.1.3) და (3.1.4) - (3.1.6) ამოცანებს გააჩნიათ საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x, t)$, $V = V(x, t)$, მაშინ (3.2.1) - (3.2.3) და (3.2.4) - (3.2.6) სქემები მდგრადია და მათი ამონახსნი $u^j = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_{N-1}^j)$, $v^j = (v_1^j, v_2^j, \dots, v_{N-1}^j)$, მიისწრაფის შესაბამისად $U^j = (U_1^j, U_2^j, \dots, U_{N-1}^j)$, $V^j = (V_1^j, V_2^j, \dots, V_{N-1}^j)$ ფუნქციებისკენ, როცა $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\|u^j - U^j\|_h \leq C(\tau + h), \quad \|v^j - V^j\|_h \leq C(\tau + h), \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3.2.7)$$

დამტკიცება. თუ (3.2.1) სისტემის პირველ და მეორე განტოლებებს სკალარულად გავამრავლებთ შესაბამისად u და v ფუნქციებზე, გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და პუნკარეს უტოლობის სხვაობიან ანალოგებს, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ შემდეგ აპრიორულ შეფასებებს:

$$\|u^m\|_h^2 + \sum_{j=1}^m \|u_x^j\|_h^2 \tau \leq C, \quad \|v^m\|_h^2 + \sum_{j=1}^m \|v_x^j\|_h^2 \tau \leq C, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს (3.2.1) - (3.2.3) სქემის მდგრადობა და ამოხსნადობა [76].

ახლა დავამტკიცოთ (3.2.1) - (3.2.3) სქემის კრებადობა. $U = U(x, t)$ და $V = V(x, t)$ ფუნქციებისთვის გვაქვს:

$$U_{t,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{x,i}^k)^2 + (V_{x,i}^k)^2] \right) U_{x,i}^{j+1} \right\}_x + g(U_i^{j+1}) = f_{1,i}^j - \psi_{1,i}^j,$$

$$V_{t,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{x,i}^k)^2 + (V_{x,i}^k)^2] \right) V_{x,i}^{j+1} \right\}_x + g(V_i^{j+1}) = f_{2,i}^j - \psi_{2,i}^j, \quad (3.2.8)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$U_0^j = U_N^j = V_0^j = V_N^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.2.9)$$

$$U_i^0 = U_{0,i}, \quad V_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.2.10)$$

სადაც

$$\psi_{k,i}^j = O(\tau + h), \quad k = 1, 2.$$

ცდომილებებისთვის $z_i^j = u_i^j - U_i^j$ და $w_i^j = v_i^j - V_i^j$, (3.2.1) - (3.2.3) და (3.2.8) - (3.2.10) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$z_{t,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{x,i}^k)^2 + (v_{x,i}^k)^2] \right) u_{x,i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{x,i}^k)^2 + (V_{x,i}^k)^2] \right) U_{x,i}^{j+1} \right\}_x$$

$$+g(u_i^{j+1}) - g(U_i^{j+1}) = -\psi_{1,i}^j, \quad (3.2.11)$$

$$w_{\tau,i}^j - \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x$$

$$+g(v_i^{j+1}) - g(V_i^{j+1}) = -\psi_{2,i}^j,$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1; \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$z_0^j = z_N^j = w_0^j = w_N^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (3.2.12)$$

$$z_i^0 = w_i^0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.2.13)$$

გავამრავლოთ (3.2.10) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად $z^{j+1} = (z_1^{j+1}, z_2^{j+1}, \dots, z_{N-1}^{j+1})$ და $w^{j+1} = (w_1^{j+1}, w_2^{j+1}, \dots, w_{N-1}^{j+1})$ ფუნქციებზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სხვაობიანი ანალოგისა და (3.2.12) პირობების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\|z^{j+1}\|_h^2 - (z^{j+1}, z^j) + \tau h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} z_{\bar{x},i}^{j+1} \quad (3.2.14)$$

$$+ h \sum_{i=1}^{N-1} (g(u_i^{j+1}) - g(U_i^{j+1})) (u_i^{j+1} - U_i^{j+1}) = -\tau (\psi_1^j, z^{j+1}).$$

ანალოგიურად,

$$\|w^{j+1}\|_h^2 - (w^{j+1}, w) + \tau h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} w_{\bar{x},i}^{j+1}$$

$$+ h \sum_{i=1}^{N-1} (g(v_i^{j+1}) - g(V_i^{j+1})) (v_i^{j+1} - V_i^{j+1}) = -\tau (\psi_2^j, w^{j+1}).$$

თუ გავითვალისწინებთ $g(r_i^{j+1})$ ფუნქციის მონოტონურად ზრდადობას, უკანასკნელი ორი ტოლობის შეკრება გვაძლევს

$$\begin{aligned}
& \|z^{j+1}\|_h^2 - (z^{j+1}, z^j) + \|w^{j+1}\|_h^2 - (w^{j+1}, w^j) \\
& + \tau h \sum_{i=1}^N a \left\{ \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} \right. \\
& \quad \left. - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} z_{\bar{x},i}^{j+1} \\
& + \tau h \sum_{i=1}^N \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} \right. \\
& \quad \left. - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} w_{\bar{x},i}^{j+1} \leq -\tau(\psi_1^j, z^{j+1}) - \tau(\psi_2^j, w^{j+1}).
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}
& \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(U_{\bar{x},i}^k)^2 + (V_{\bar{x},i}^k)^2] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& = \int_0^1 \frac{d}{d\mu} a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \left\{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \right\} \right) \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})] d\mu (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \int_0^1 \frac{d}{d\mu} a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \left\{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \right\} \right) \\
& \quad \times [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})] d\mu (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \left\{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)](u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k) + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)](v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k) \} \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})] d\mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \int_0^1 a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right) (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) d\mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& \quad + 2 \int_0^1 a' \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right) \\
& \quad \times \tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)](u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k) + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)](v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k) \} \\
& \quad \times [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})] d\mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \int_0^1 a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right) (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) d\mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& \quad = 2 \int_0^1 a' \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right) \\
& \quad \times \tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)](u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k) + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)](v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k) \} \\
& \times \{ [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})](u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) + [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})] d\mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \} d\mu \\
& \quad + \int_0^1 \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right) \\
& \quad \times [(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2] d\mu \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right) \xi_i^{j+1}(\mu) \xi_{t,i}^j(\mu) d\mu \\
& \quad + \int_0^1 a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \} \right)
\end{aligned}$$

$$\times \left[(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2 \right] d\mu,$$

სადაც

$$\xi_i^{j+1}(\mu) = \tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)](u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k) + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)](v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k) \},$$

$$\xi_i^0(\mu) = 0$$

და შესაბამისად,

$$\xi_{\tau,i}^j(\mu) = [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})](u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) + [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})](v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}).$$

შემდეგი აღნიშვნის შემოტანით

$$s_i^{j+1}(\mu) = \tau \sum_{k=1}^{j+1} \{ [U_{\bar{x},i}^k + \mu(u_{\bar{x},i}^k - U_{\bar{x},i}^k)]^2 + [V_{\bar{x},i}^k + \mu(v_{\bar{x},i}^k - V_{\bar{x},i}^k)]^2 \}$$

და წინა ტოლობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})$$

$$+ \left\{ a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} - a \left(\tau \sum_{k=1}^{j+1} [(u_{\bar{x},i}^k)^2 + (v_{\bar{x},i}^k)^2] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\} (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})$$

$$= 2 \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) \xi_i^{j+1} \xi_{\tau,i}^j d\mu + \int_0^1 a(s_i^{j+1}(\mu)) [(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2] d\mu.$$

ამ ტოლობის (3.2.15) თანაფარდობაში ჩასმით ვღებულობთ

$$\|z^{j+1}\|_h^2 - (z^{j+1}, z^j) + \|w^{j+1}\|_h^2 - (w^{j+1}, w^j) + 2\tau h \sum_{i=1}^M \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) \xi_i^{j+1} \xi_{\tau,i}^j d\mu$$

$$+ \tau h \sum_{i=1}^N \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) [(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2] d\mu \quad (3.2.16)$$

$$= -\tau(\psi_1^j, z^{j+1}) - \tau(\psi_2^j, w^{j+1}).$$

$a(S) \geq a_0 = Const > 0$ პრირობის და შემდეგი თანაფარდობების გათვალისწინებით

$$s_i^{j+1}(\mu) \geq 0,$$

$$(r^{j+1}, r^j) = \frac{1}{2} \|r^{j+1}\|_h^2 + \frac{1}{2} \|r^{j+1}\|_h^2 - \frac{1}{2} \|r^{j+1} - r^j\|_h^2,$$

$$\tau \xi_i^{j+1} \xi_{t,i}^j = \frac{1}{2} (\xi_i^{j+1})^2 - \frac{1}{2} (\xi_i^j)^2 + \frac{\tau^2}{2} (\xi_{t,i}^j)^2,$$

ზემოთ აღნიშნული (3.2.16) ტოლობიდან გვექნება

$$\begin{aligned} & \|z^{j+1}\|_h^2 + \frac{1}{2} \|z^{j+1} - z^j\|_h^2 - \frac{1}{2} \|z^{j+1}\|_h^2 - \frac{1}{2} \|z^j\|_h^2 \\ & + \|w^{j+1}\|_h^2 + \frac{1}{2} \|w^{j+1} - w^j\|_h^2 - \frac{1}{2} \|w^{j+1}\|_h^2 - \frac{1}{2} \|w^j\|_h^2 \\ & + h \sum_{i=1}^N \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) [(\xi_i^{j+1})^2 - (\xi_i^j)^2] d\mu + \tau^2 h \sum_{i=1}^N \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) (\xi_{t,i}^j)^2 d\mu \\ & + \tau h \sum_{i=1}^N [(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2] \leq -\tau(\psi_1^j, z^{j+1}) - \tau(\psi_2^j, w^{j+1}). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

მიღებული (3.2.17) შეფასებიდან ვაკვნით, რომ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|z^{j+1}\|_h^2 - \frac{1}{2} \|z^j\|_h^2 + \frac{\tau^2}{2} \|z_t^j\|_h^2 + \frac{1}{2} \|w^{j+1}\|_h^2 - \frac{1}{2} \|w^j\|_h^2 + \frac{\tau^2}{2} \|w_t^j\|_h^2 \\ & + h \sum_{i=1}^N \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) [(\xi_i^{j+1})^2 - (\xi_i^j)^2] d\mu + \tau(\|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2 + \|w_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2) \\ & \leq \frac{\tau}{2} (\|\psi_1^j\|_h^2 + \|\psi_2^j\|_h^2) + \frac{\tau}{2} (\|z^{j+1}\|_h^2 + \|w^{j+1}\|_h^2). \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

პუნკარეს უტოლობის დისკრეტული ანალოგის [92]

$$\|r^{j+1}\|_h^2 \leq \|r_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2,$$

გამოყენებით (3.2.18) თანაფარდობიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} & \|z^{j+1}\|_h^2 - \|z^j\|_h^2 + \tau^2 \|z_t^j\|_h^2 + \|w^{j+1}\|_h^2 - \|w^j\|_h^2 + \tau^2 \|w_t^j\|_h^2 \\ & + 2h \sum_{i=1}^N \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) [(\xi_i^{j+1})^2 - (\xi_i^j)^2] d\mu \\ & + \tau(\|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2 + \|w_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2) \leq \tau(\|\psi_1^j\|_h^2 + \|\psi_2^j\|_h^2). \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

მიღებული (3.2.19) დამოკიდებულებების აჯამებით $j = 0$ -დან $j = n - 1$ -მდე, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} & \|z^n\|_h^2 + \tau^2 \sum_{j=0}^{m-1} \|z_t^j\|_h^2 + \|w^n\|_h^2 + \tau^2 \sum_{j=0}^{m-1} \|w_t^j\|_h^2 \\ & + 2h \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \int_0^1 a'(s_i^{j+1}(\mu)) [(\xi_i^{j+1})^2 - (\xi_i^j)^2] d\mu \\ & + \tau \sum_{j=0}^{m-1} (\|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2 + \|w_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2) \leq \tau \sum_{j=0}^{m-1} (\|\psi_1^j\|_h^2 + \|\psi_2^j\|_h^2). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $s_i^{j+1}(\mu) \geq s_i^j(\mu)$ და $a'(S) \geq 0$, $a''(S) \leq 0$, უკანასკნელი უტოლობის მეორე ხაზზე მყოფი წევრისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} a'(s_i^{j+1}(\mu)) [(\xi_i^{j+1})^2 - (\xi_i^j)^2] = a'(s_i^1(\mu)) (\xi_i^1)^2 - a'(s_i^1(\mu)) (\xi_i^0)^2 \\ & + a'(s_i^2(\mu)) (\xi_i^2)^2 - a'(s_i^2(\mu)) (\xi_i^1)^2 + \dots + a'(s_i^n(\mu)) (\xi_i^n)^2 - a'(s_i^n(\mu)) (\xi_i^{n-1})^2 \\ & = a'(s_i^n(\mu)) (\xi_i^n)^2 + \sum_{j=1}^{m-1} [a'(s_i^j(\mu)) - a'(s_i^{j+1}(\mu))] (\xi_i^j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

საბოლოოდ, უკანასკნელი შეფასებისა და (3.2.20) უტოლობის მხედველობაში მიღებით ვასკვნით რომ

$$\begin{aligned} & \|z^m\|_h^2 + \tau^2 \sum_{j=0}^{m-1} \|z_t^j\|_h^2 + \|w^m\|_h^2 + \tau^2 \sum_{j=0}^{m-1} \|w_t^j\|_h^2 \\ & + \tau \sum_{j=0}^{m-1} (\|z_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2 + \|w_{\bar{x}}^{j+1}\|_h^2) \leq \tau \sum_{j=0}^{m-1} (\|\psi_1^j\|_h^2 + \|\psi_2^j\|_h^2). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

მიღებული (3.2.21) შეფასებიდან გამომდინარეობს (3.2.7) შეფასებები და მაშასადამე თეორემა 3.2.1 დამტკიცებულია.

როგორც აღვინიშნეთ, (3.2.4) - (3.2.6) სქემის კრებადობის დამტკიცება შესაძლებელია ანალოგიური მსჯელობით. ქვემოთ მოყვანილია დამტკიცებისათვის საჭირო ძირითადი ტოლობა:

$$\begin{aligned}
& \left\{ a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N [(u_{\bar{x},\ell}^k)^2 + (v_{\bar{x},\ell}^k)^2] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} \right. \\
& - a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N [(U_{\bar{x},\ell}^k)^2 + (V_{\bar{x},\ell}^k)^2] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \left. \right\} (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \left\{ a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N [(u_{\bar{x},\ell}^k)^2 + (v_{\bar{x},\ell}^k)^2] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} \right. \\
& - a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N [(U_{\bar{x},\ell}^k)^2 + (V_{\bar{x},\ell}^k)^2] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \left. \right\} (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& = \int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\mu} a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \} \right) \right. \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})] \left. \right\} d\mu (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\mu} a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \} \right) \right. \\
& \quad \times [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})] \left. \right\} d\mu (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \} \right) \\
& < \tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{i=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 (u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k) + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \} \\
& \quad \times [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})] d\mu (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \int_0^1 a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \} \right) \\
& \quad \times (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) d\mu (u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + 2 \int_0^1 a' \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \} \right) \\
& \times \tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)] (u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k) + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)] (v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})]d\mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \\
& + \int_0^1 a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \right\} \right) \\
& \quad \times (v_{\bar{x},\ell}^{j+1} - V_{\bar{x},\ell}^{j+1})d\mu(v_{\bar{x},\ell}^{j+1} - V_{\bar{x},\ell}^{j+1}) \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \right\} \right) \\
& \times \tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)](u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k) + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)](v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k) \right\} \\
& \times \{ [U_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})](u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1}) + [V_{\bar{x},i}^{j+1} + \mu(v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})](v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1}) \} d\mu \\
& + \int_0^1 a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \right\} \right) \\
& \quad \times [(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2] d\mu \\
& = 2 \int_0^1 a' \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \right\} \right) \xi^{j+1}(\mu) \xi_{\tau}^j(\mu) d\mu \\
& + \int_0^1 a \left(\tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)]^2 + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)]^2 \right\} \right) \\
& \quad \times [(u_{\bar{x},i}^{j+1} - U_{\bar{x},i}^{j+1})^2 + (v_{\bar{x},i}^{j+1} - V_{\bar{x},i}^{j+1})^2] d\mu,
\end{aligned}$$

სადაც

$$\xi^{j+1}(\mu) = \tau h \sum_{k=1}^{j+1} \sum_{\ell=1}^N \left\{ [U_{\bar{x},\ell}^k + \mu(u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k)](u_{\bar{x},\ell}^k - U_{\bar{x},\ell}^k) + [V_{\bar{x},\ell}^k + \mu(v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k)](v_{\bar{x},\ell}^k - V_{\bar{x},\ell}^k) \right\},$$

და

$$\xi^0(\mu) = 0.$$

§ 3.3. სხვაობიანი სქემების რეალიზაცია და გრაფიკული ილუსტრაციები

სიმარტივისთვის განვიხილოთ $a(S) = 1 + S$ შემთხვევა. მაშინ წინა პარაგრაფში მოყვანილი (3.2.1) - (3.2.3) სქემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{1}{h} \left\{ A_i^{j+1} \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - A_{i-1}^{j+1} \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h} \right\} &= f_{1,i}^j, \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} - \frac{1}{h} \left\{ A_i^{j+1} \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h} - A_{i-1}^{j+1} \frac{v_i^{j+1} - v_{i-1}^{j+1}}{h} \right\} &= f_{2,i}^j, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

სადაც

$$A_i^j = 1 + \tau \sum_{k=1}^j \left[\left(\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h} \right)^2 + \left(\frac{v_i^k - v_{i-1}^k}{h} \right)^2 \right]. \quad (3.3.2)$$

(3.3.1) და (3.3.2) ტოლობების მატრიცული ფორმით ჩაწერისათვის განვმარტოთ შემდეგი ვექტორები

$$\mathbf{u}^j = \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ \vdots \\ u_{N-1}^j \end{bmatrix}$$

და ანალოგიურად \mathbf{v}^j , f_1^j , და f_2^j ვექტორები. ასევე განვმარტოთ სამდიაგონალური სიმეტრიული $(N-1) \times (N-1)$ განზომილების \mathbf{T} მატრიცი შემდეგნაირად

$$\mathbf{T}_{rs}^i = \begin{cases} -\frac{1}{h^2} A_{r-1}^i, & s = r-1, \\ \frac{1}{h^2} (A_r^i + A_{r-1}^i), & s = r, \\ -\frac{1}{h^2} A_r^i, & s = r+1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მაშასადამე (3.3.1) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{j+1} \\ \mathbf{v}^{j+1} \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^j \\ \mathbf{v}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{j+1} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}^{j+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{j+1} \\ \mathbf{v}^{j+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1^j \\ f_2^j \end{bmatrix} = 0. \quad (3.3.3)$$

მიღებული (3.3.3) არაწრფივი სისტემის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი სისტემებისთვის [88]. ვთქვათ,

$$\mathbf{P}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^j \\ \mathbf{v}^j \end{bmatrix}$$

და

$$\mathbf{F}^j = \begin{bmatrix} f_1^j \\ f_2^j \end{bmatrix}$$

და განვსაზღვროთ შემდეგი ვექტორი

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}^{j+1}) = \frac{1}{\tau} \mathbf{P}^{j+1} - \frac{1}{\tau} \mathbf{P}^j + \widehat{\mathbf{T}}^{j+1} \mathbf{P}^{j+1} - \mathbf{F}^j, \quad (3.3.4)$$

სადაც $\widehat{\mathbf{T}}^{j+1}$ არის 2×2 ბლოკური დიაგონალური მატრიცი \mathbf{T}^{j+1} ელემენტებით.

ზემოთ მოყვანილი $\mathbf{H}(\mathbf{P}^{j+1})$ ვექტორის ასაგებად Mathcad პროგრამული პაკეტის გარემოში ჩაწერილ შესაბამის კოდს აქვს შემდეგი სახე:

for j ∈ 1..N

for i ∈ 0..M	$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j} &\leftarrow \mathbf{u}_{i,j-1} \\ \mathbf{v}_{i,j} &\leftarrow \mathbf{v}_{i,j-1} \\ \mathbf{P}_{i,j} &\leftarrow \mathbf{u}_{i,j} \\ \mathbf{P}_{i+M+1,j} &\leftarrow \mathbf{v}_{i,j} \end{aligned}$
--------------	--

for i ∈ 0..M-1

$$A_i \leftarrow 1 + \tau \cdot \sum_{k=1}^j \left[\left(\frac{\mathbf{u}_{i+1,k} - \mathbf{u}_{i,k}}{h} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{v}_{i+1,k} - \mathbf{v}_{i,k}}{h} \right)^2 \right]$$

for i ∈ 1..M-1

$$\left| \mathbf{G}1_i \leftarrow \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{\tau} - A_{i-1} \cdot \frac{\mathbf{u}_{i-1,j}}{h^2} + (A_i + A_{i-1}) \cdot \frac{\mathbf{u}_{i,j}}{h^2} - A_i \cdot \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}}{h^2} \right.$$

$$\left| G2_i \leftarrow \frac{v_{i,j}}{\tau} - A_{i-1} \cdot \frac{v_{i-1,j}}{h^2} + (A_i + A_{i-1}) \cdot \frac{v_{i,j}}{h^2} - A_i \cdot \frac{v_{i+1,j}}{h^2} \right.$$

for $i \in 0..M-2$

$$\left| \begin{aligned} H_i &\leftarrow G1_{i+1} - \frac{u_{i+1,j-1}}{\tau} - f1_{i+1,j-1} \\ H_{i+M-1} &\leftarrow G2_{i+1} - \frac{v_{i+1,j-1}}{\tau} - f2_{i+1,j-1} \end{aligned} \right.$$

განვიხილოთ გრადიენტული მატრიცი (იაკობიანი). იგი ასევე შეიძლება ჩაიწეროს ბლოკური სახით შემდეგნაირად:

$$\nabla H = \begin{bmatrix} Q & R \\ W & Z \end{bmatrix},$$

სადაც Q, R, W, Z მოცემულია შემდეგნაირად:

$$Q_{rs} = \begin{cases} T_{rr-1}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr-1}^{j+1}}{\partial u_{r-1}^{j+1}} u_{r-1}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial u_{r-1}^{j+1}} u_r^{j+1}, & s = r - 1, \\ \frac{1}{\tau} + T_{rr}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr-1}^{j+1}}{\partial u_r^{j+1}} u_{r-1}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial u_r^{j+1}} u_r^{j+1} + \frac{\partial T_{rr+1}^{j+1}}{\partial u_r^{j+1}} u_{r+1}^{j+1}, & s = r, \\ T_{rr+1}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial u_{r+1}^{j+1}} u_r^{j+1} + \frac{\partial T_{rr+1}^{j+1}}{\partial u_{r+1}^{j+1}} u_{r+1}^{j+1}, & s = r + 1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

$$R_{rs} = \begin{cases} \frac{\partial T_{rr-1}^{j+1}}{\partial v_{r-1}^{j+1}} u_{r-1}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial v_{r-1}^{j+1}} u_r^{j+1}, & s = r - 1, \\ \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial v_r^{j+1}} u_r^{j+1} + \frac{\partial T_{rr-1}^{j+1}}{\partial v_r^{j+1}} u_{r-1}^{j+1} + \frac{\partial T_{rr+1}^{j+1}}{\partial v_r^{j+1}} u_{r+1}^{j+1}, & s = r, \\ \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial v_{r+1}^{j+1}} u_r^{j+1} + \frac{\partial T_{rr+1}^{j+1}}{\partial v_{r+1}^{j+1}} u_{r+1}^{j+1}, & s = r + 1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Z_{rs} და W_{rs} მიიღება Q_{rs} და R_{rs} მატრიცებში შესაბამისად u ფუნქციის v ფუნქციით ჩანაცვლებით.

გამოვითვალოთ u კომპონენტის მიმართ T_{rs}^{j+1} ელემენტების პირველი რიგის კერძო წარმოებულები. (3.3.2) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr-1}^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial A_{r-1}^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} = -\frac{\tau}{h^2} \frac{\partial}{\partial u_s^{j+1}} \left\{ \left(\frac{u_r^{j+1} - u_{r-1}^{j+1}}{h} \right)^2 \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{2\tau}{h^3} \nabla_x u_r^{j+1}, & s = r - 1, \\ -\frac{2\tau}{h^3} \nabla_x u_r^{j+1}, & s = r, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial A_r^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial A_{r-1}^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} \\ &= \frac{\tau}{h^2} \frac{\partial}{\partial u_s^{j+1}} \left\{ \left(\frac{u_{r+1}^{j+1} - u_r^{j+1}}{h} \right)^2 \right\} + \frac{\tau}{h^2} \frac{\partial}{\partial u_s^{j+1}} \left\{ \left(\frac{u_r^{j+1} - u_{r-1}^{j+1}}{h} \right)^2 \right\} \\ &= \begin{cases} -\frac{2\tau}{h^3} \Delta_x u_r^{j+1} + \frac{2\tau}{h^3} \nabla_x u_r^{j+1}, & s = r, \\ -\frac{2\tau}{h^3} \nabla_x u_r^{j+1}, & s = r - 1, \\ \frac{2\tau}{h^3} \Delta_x u_r^{j+1}, & s = r + 1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

და

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr+1}^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} &= -\frac{1}{h^2} \frac{\partial A_r^{j+1}}{\partial u_s^{j+1}} = -\frac{\tau}{h^2} \frac{\partial}{\partial u_s^{j+1}} \left\{ \left(\frac{u_{r+1}^{j+1} - u_r^{j+1}}{h} \right)^2 \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{2\tau}{h^3} \Delta_x u_r^{j+1}, & s = r, \\ -\frac{2\tau}{h^3} \Delta_x u_r^{j+1}, & s = r + 1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

v კომპონენტის მიმართ კერძო წარმოებულების გამოთვლისას (3.3.5) - (3.3.9) ტოლობებში ყველგან u ფუნქციის ნაცვლად გვექნება v ფუნქცია.

$$Q_{rs} = \begin{cases} -\frac{1}{h^2} A_{r-1}^{j+1} - \frac{2\tau}{h^2} (\nabla_x u_r^{j+1})^2, & s = r - 1, \\ \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2} (A_r^{j+1} + A_{r-1}^{j+1}) + \frac{2\tau}{h^2} (\Delta_x u_r^{j+1})^2 + \frac{2\tau}{h^2} (\nabla_x u_r^{j+1})^2, & s = r, \\ -\frac{1}{h^2} A_r^{j+1} - \frac{2\tau}{h^2} (\Delta_x u_r^{j+1})^2, & s = r + 1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$$

Z_{rs} მიიღება Q_{rs} მატრიცაში u ფუნქციის v ფუნქციით ჩანაცვლებით. და ბოლოს,

$$R_{rs} = W_{rs} = \begin{cases} -\frac{2\tau}{h^2} \nabla_x u_r^{j+1} \nabla_x v_r^{j+1}, & s = r - 1, \\ \frac{2\tau}{h^2} \Delta_x u_r^{j+1} \Delta_x v_r^{j+1} + \frac{2\tau}{h^2} \nabla_x u_r^{j+1} \nabla_x v_r^{j+1}, & s = r, \\ -\frac{2\tau}{h^2} \Delta_x u_r^{j+1} \Delta_x v_r^{j+1}, & s = r + 1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მოვიყვანოთ პროგრამული კოდის ფრაგმენტი, რომლის საშუალებითაც აიგება იაკობიანი:

for $i \in 1..M - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{i-1,i-1} \leftarrow \frac{1}{\tau} + \frac{A_i + A_{i-1}}{h^2} + h1 \cdot [(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2] \\ Z_{i-1,i-1} \leftarrow \frac{1}{\tau} + \frac{A_i + A_{i-1}}{h^2} + h1 \cdot [(v_{i+1,j} - v_{i,j})^2 + (v_{i,j} - v_{i-1,j})^2] \\ R_{i-1,i-1} \leftarrow h1 \cdot [(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \cdot (v_{i+1,j} - v_{i,j}) + (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \cdot (v_{i,j} - v_{i-1,j})] \end{array} \right.$$

for $i \in 2..M - 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{i-1,i-2} \leftarrow -\frac{A_{i-1}}{h^2} - h1 \cdot (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 \\ Z_{i-1,i-2} \leftarrow -\frac{A_{i-1}}{h^2} - h1 \cdot (v_{i,j} - v_{i-1,j})^2 \\ R_{i-1,i-2} \leftarrow -h1 \cdot (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \cdot (v_{i,j} - v_{i-1,j}) \end{array} \right.$$

$$\text{for } i \in 1..M-2$$

$$\left| \begin{array}{l} Q_{i-1,i} \leftarrow -\frac{A_i}{h^2} - h1 \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 \\ Z_{i-1,i} \leftarrow -\frac{A_i}{h^2} - h1 \cdot (v_{i+1,j} - v_{i,j})^2 \\ R_{i-1,i} \leftarrow -h1 \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \cdot (v_{i+1,j} - v_{i,j}) \end{array} \right.$$

for $i \in 0..M-2$

for $r \in 0..M-2$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Jacobian}_{i,r} \leftarrow Q_{i,r} \\ \text{Jacobian}_{i+M-1,r+M-1} \leftarrow Z_{i,r} \\ \text{Jacobian}_{i+M-1,r} \leftarrow R_{i,r} \\ \text{Jacobian}_{i,r+M-1} \leftarrow R_{i,r} \end{array} \right.$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.3.4) განსაზღვრებას, ნიუტონის მეთოდი (3.3.3) სისტემისთვის ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\nabla H(\mathbf{P}^{j+1})|^{(n)} (\mathbf{P}^{j+1}|^{(n+1)} - \mathbf{P}^{j+1}|^{(n)}) = -H(\mathbf{P}^{j+1})|^{(n)}.$$

აღნიშნული იტერაციული პროცესი კრებადია და იგი არის სულ ცოტა მეორე რიგის.

Mathcad პროგრამული პაკეტის გარემოში, მოყვანილი საიტერაციო პროცესის შესაბამისი პროგრამული კოდის ფრაგმენტი გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$\text{inv_J} \leftarrow \text{Jacobian}^{-1}$$

$$\text{for } i \in 0..M-2$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{utemp}_i \leftarrow P_{i+1,j} \\ \text{utemp}_{i+M-1} \leftarrow P_{i+M+2,j} \end{array} \right.$$

$$\text{utemp} \leftarrow \text{utemp} - \text{inv_J} \cdot H$$

$$\text{for } i \in 0..M-2$$

$$\left| \begin{array}{l} P_{i+1,j} \leftarrow \text{utemp}_i \\ P_{i+M+2,j} \leftarrow \text{utemp}_{i+M-1} \end{array} \right.$$

$$\text{diff} \leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{M-1} \left[(P_{i,j} - u_{i,j})^2 + (P_{i+M+1,j} - v_{i,j})^2 \right]}$$

```

for i ∈ 1..M - 1
  |
  | ui,j ← Pi,j
  | vi,j ← Pi+M+1,j
while diff > ε
  |
  | for i ∈ 1..M - 1
  |   |
  |   | ui,j ← Pi,j
  |   | vi,j ← Pi+M+1,j
  |   for i ∈ 0..M - 1
  |     Ai ← 1 + τ · ∑k=1j [ ( (ui+1,k - ui,k) / h )2 + ( (vi+1,k - vi,k) / h )2 ]
  |   for i ∈ 1..M - 1
  |     |

```

.....

```

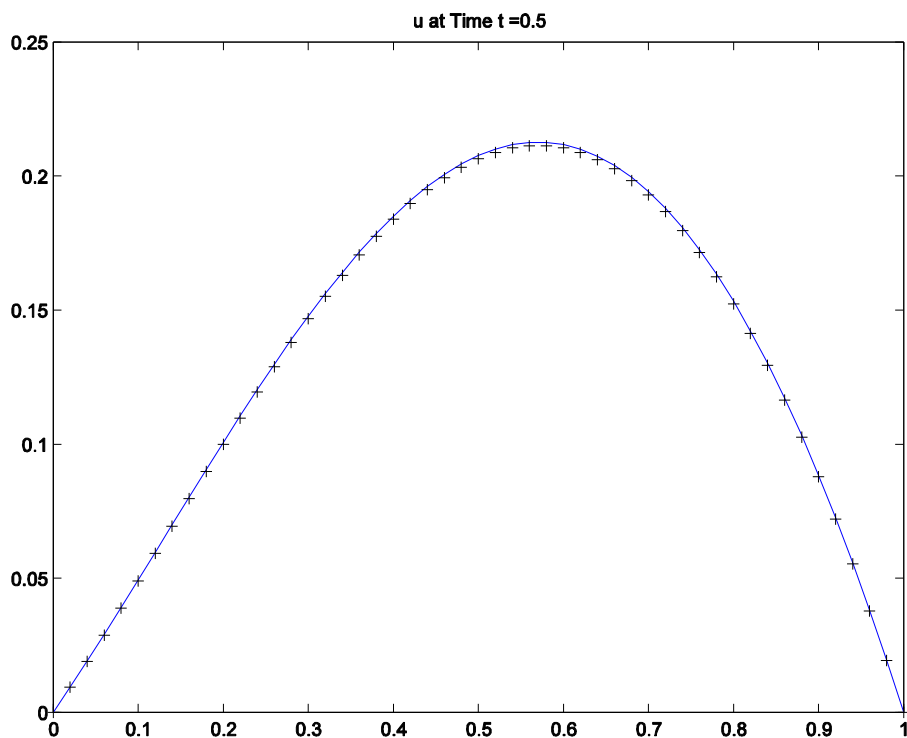
inv_J ← Jacobian-1
for i ∈ 0..M - 2
  |
  | utempi ← Pi+1,j
  | utempi+M-1 ← Pi+M+2,j
utemp ← utemp - inv_J · H
for i ∈ 1..M - 1
  |
  | Pi,j ← utempi-1
  | Pi+M+1,j ← utempi+M-2
diff ← √ [ ∑i=1M-1 [ (Pi,j - ui,j)2 + (Pi+M+1,j - vi,j)2 ] ]
for i ∈ 1..M - 1
  |
  | ui,j ← Pi,j
  | vi,j ← Pi+M+1,j

```

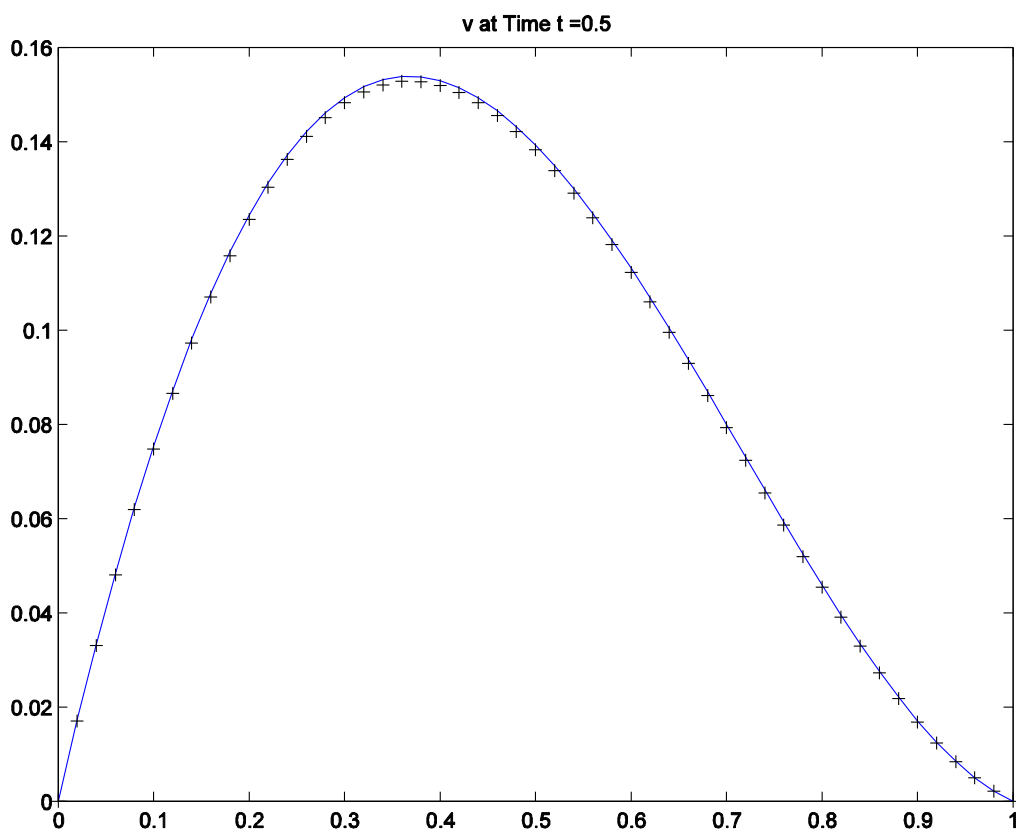
ჩატარებულ პირველ რიცხვით ექსპერიმენტში, მარჯვენა მხარე შევარჩიეთ ისე რომ ზუსტი ამონახსნი იყოს შემდეგი ფუნქციები:

$$U(x, t) = x(1 - x) \sin(x + t), \quad V(x, t) = x(1 - x) \cos(x + t).$$

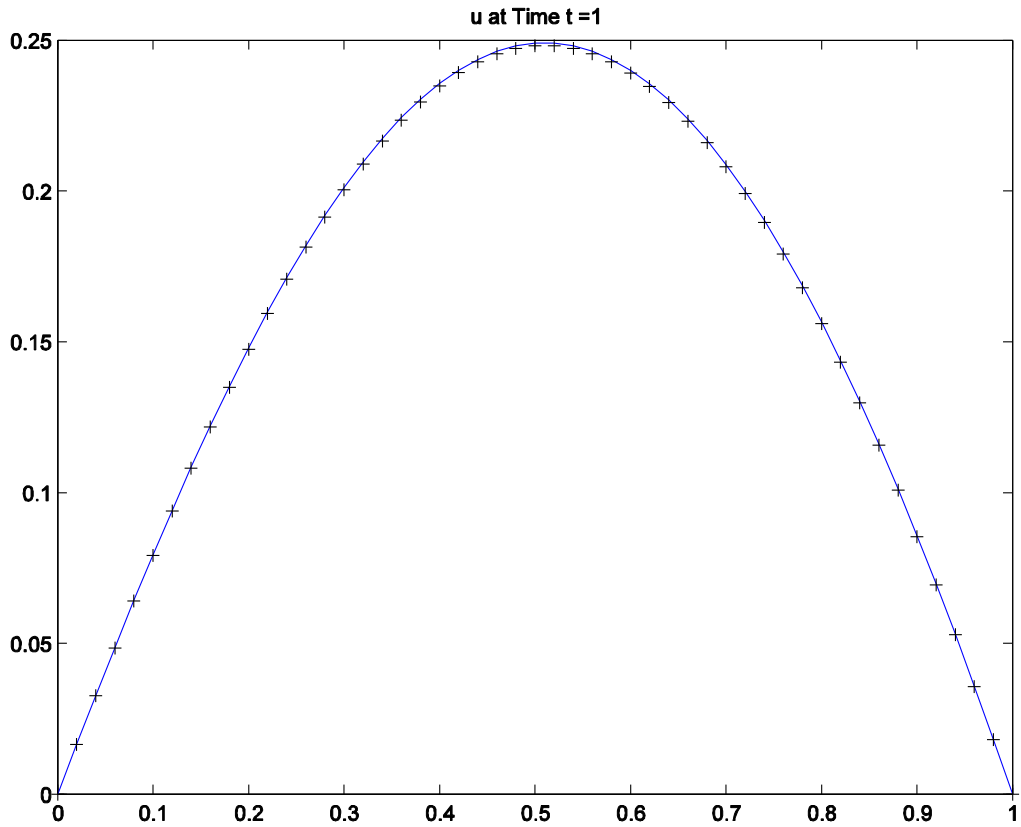
შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები მოცემულია 3.3.1 - 3.3.4 ნახაზებზე.



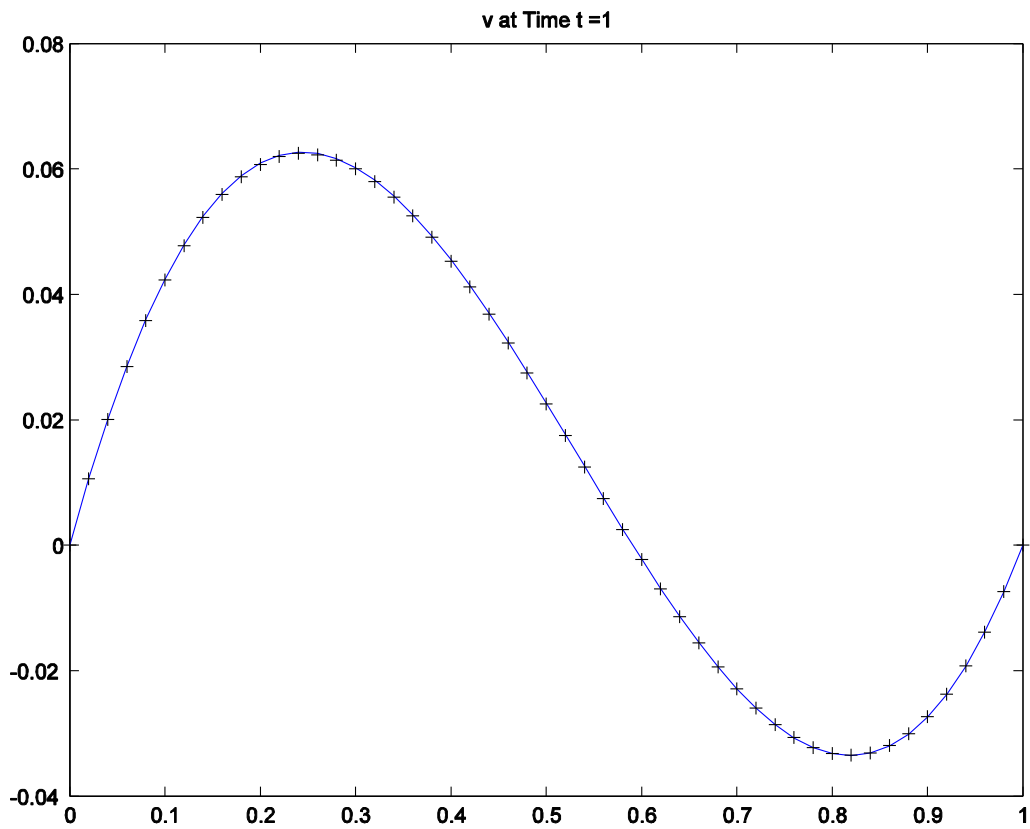
ნახ. 3.3.1. U ფუნქციის ზუსტი (უწყვეტი წირი) და მიახლოებითი (+) მნიშვნელობები $t = 0,5$ მომენტისთვის.



ნახ. 3.3.2. V ფუნქციის ზუსტი (უწყვეტი წირი) და მიახლოებითი (+) მნიშვნელობები $t = 0,5$ მომენტისთვის.



ნახ. 3.3.3. U ფუნქციის ზუსტი (უწყვეტი წირი) და მიახლოებითი (+) მნიშვნელობები $t = 1$ მომენტისთვის.

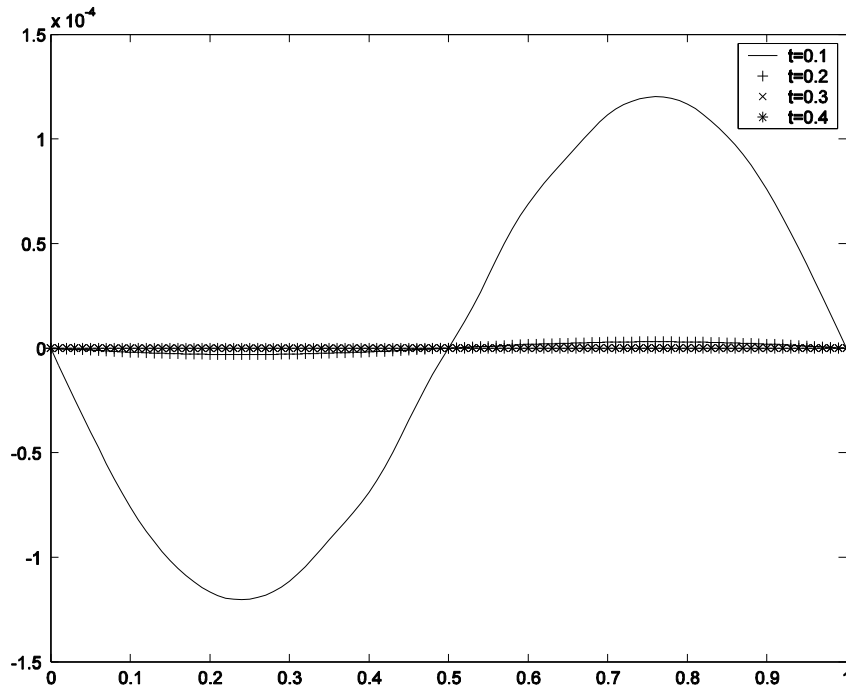


ნახ. 3.3.4. V ფუნქციის ზუსტი (უწყვეტი წირი) და მიახლოებითი (+) მნიშვნელობები $t = 1$ მომენტისთვის.

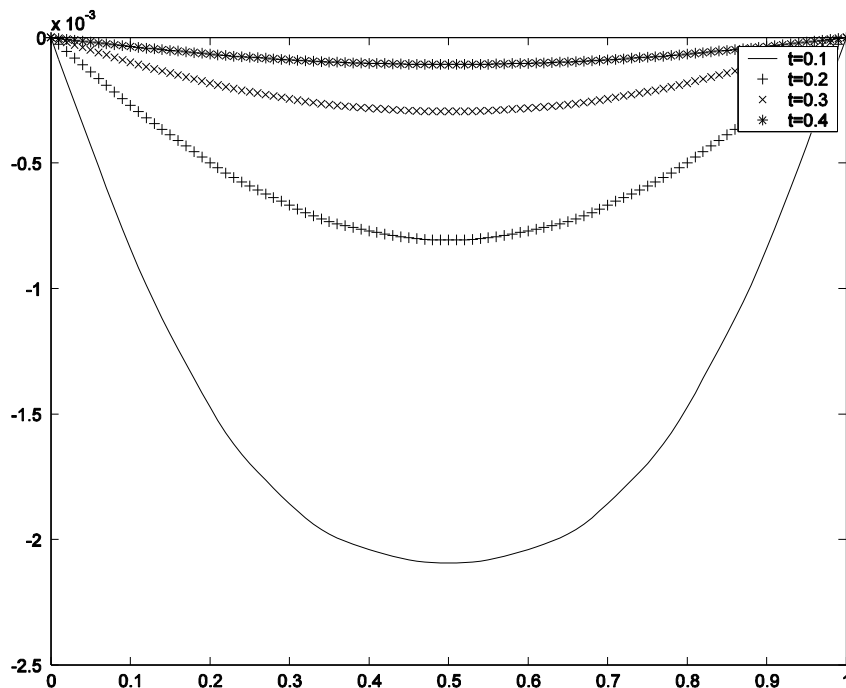
შემდეგ რიცხვით ექსპერიმენტში განხილულია ერთგვაროვანი განტოლებები, საწყის ფუნქციებად კი შემდეგი ფუნქციები:

$$U_0(x) = U(x, 0) = x(1 - x) \sin(8\pi x), \quad V_0(x) = V(x, 0) = x(1 - x) \cos(4\pi x).$$

როგორც თეორიული კვლევიდან ჩანს, ამ შემთხვევაში ადგილი უნდა ჰქონდეს ამონახსნის ქრობას, რასაც ადასტურებს 3.3.5 და 3.3.6 ნახაზები:

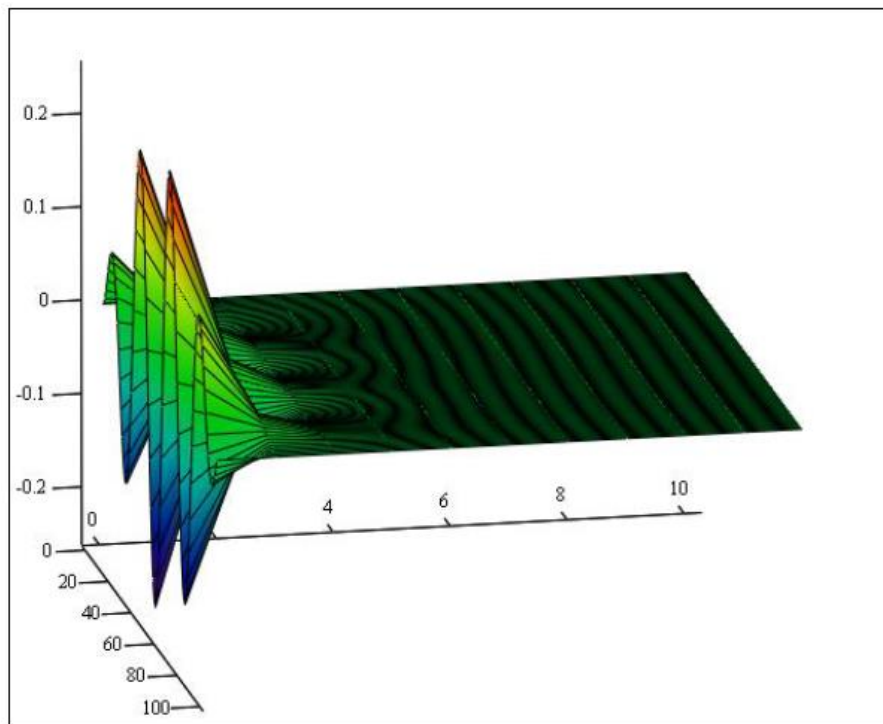


ნახ. 3.3.5. U ფუნქციის მნიშვნელობები $t = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ მომენტებისთვის.

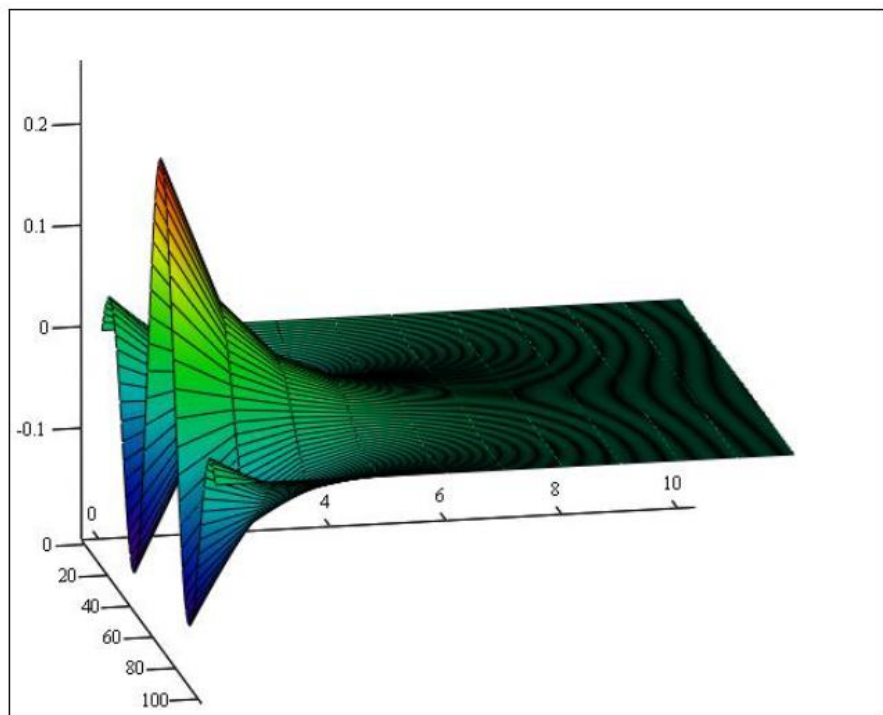


ნახ. 3.3.6. V ფუნქციის მნიშვნელობები $t = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ მომენტებისთვის.

ასევე, ამონახსნის ყოფაქცევა შესაძლებელია დამზერილ იქნას 3.7 და 3.8 ნახაზებზე, რომლებიც გვიჩვენებს ამონახსნებს სამგანზომილებიან სივრცეში.



ნახ. 3.3.7. U ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.



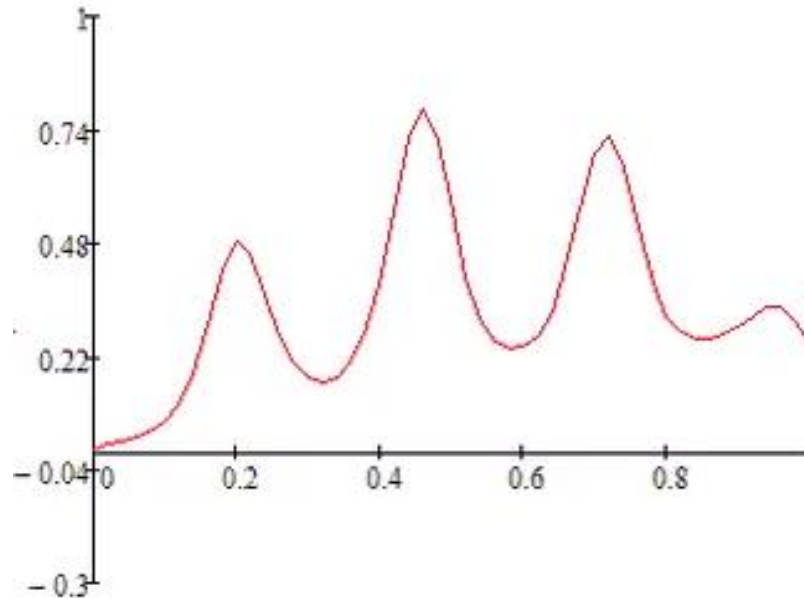
ნახ. 3.3.8. V ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

აგრეთვე განხილული გვაქვს ამოცანა საზღვრის ერთ ნაწილზე არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით. რიცხვით ექსპერიმენტში საწყის ფუნქციებად აღებულია შემდეგი ფუნქციები, ხოლო მარჯვენა მხარეები კი კვლავ ნულის ტოლია:

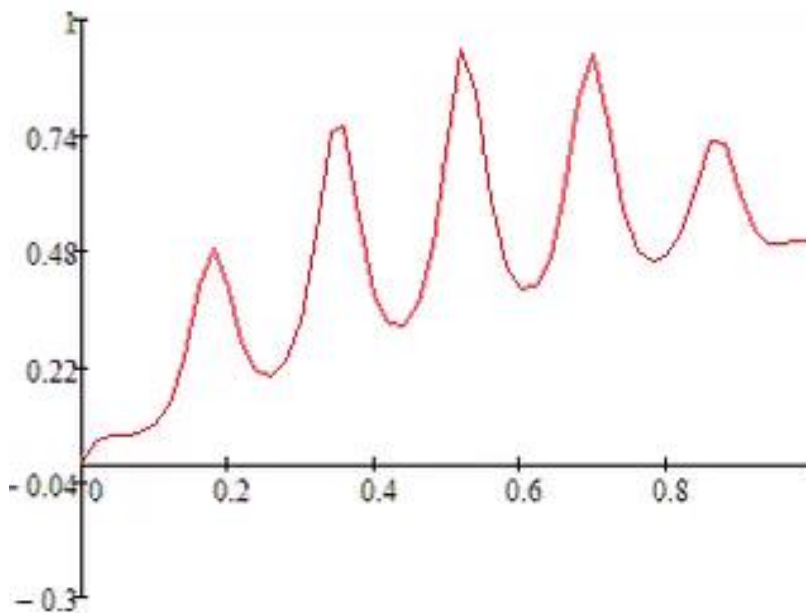
$$U_0(x) = U(x, 0) = x(1-x)e^{-\sin(24\pi)} + 0.25x,$$

$$V_0(3.3.x) = V(3.3.x, 0) = x(1-x)e^{\cos(36\pi)} + 0.5x.$$

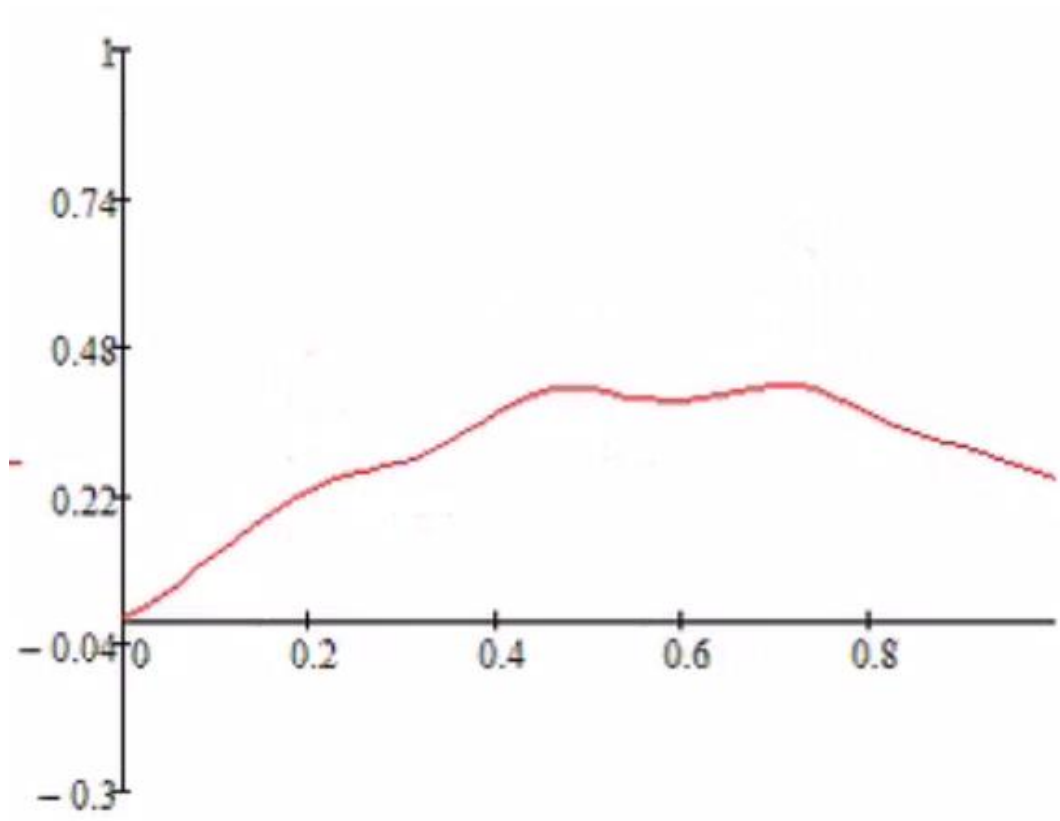
შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები მოყვანილია 3.3.9 - 3.3.14 ნახაზებზე.



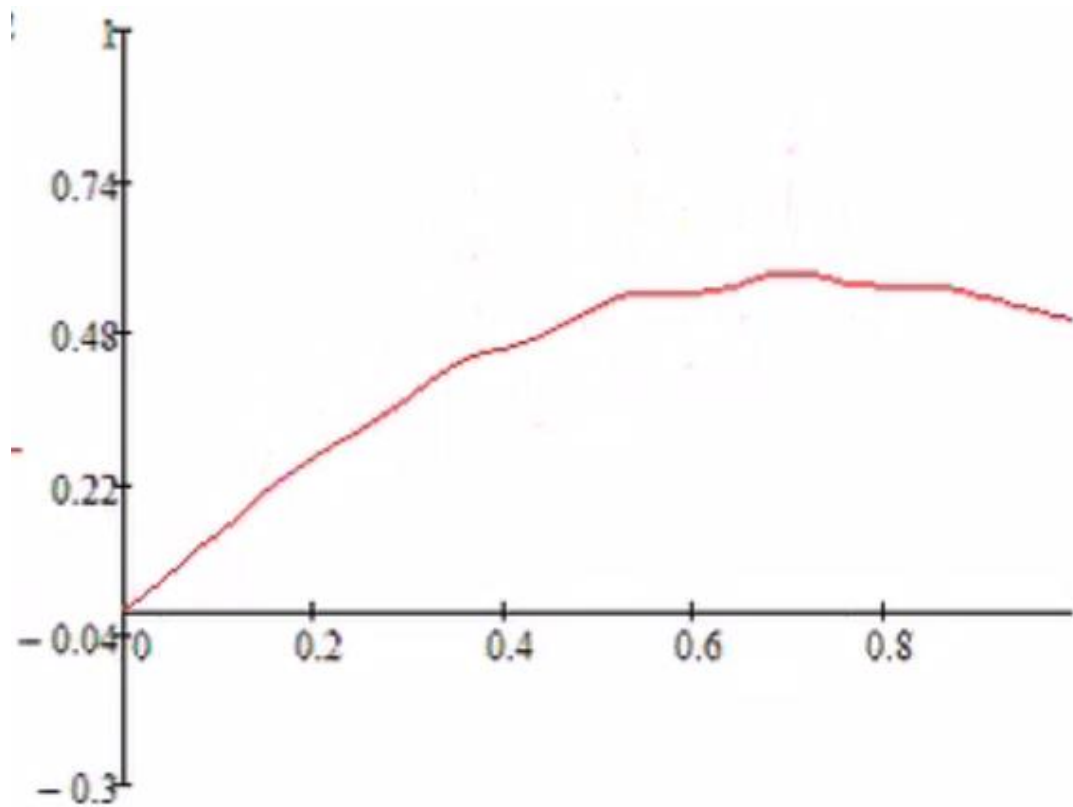
ნახ. 3.3.9. U ფუნქცია საწყისი მომენტისთვის ($t = 0$).



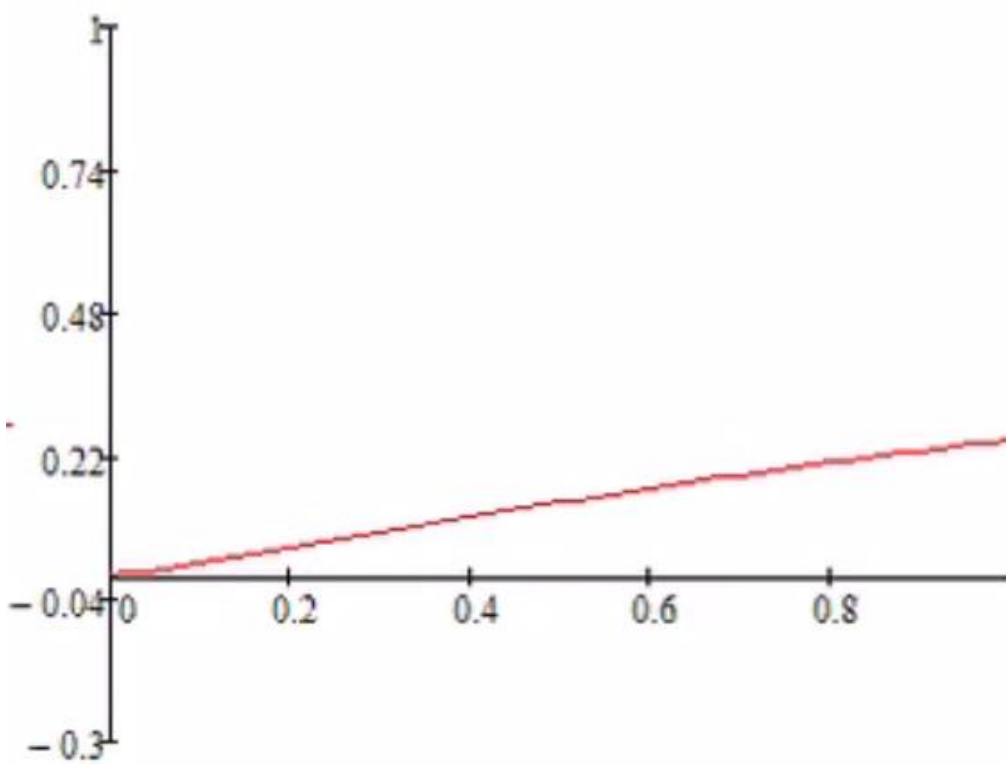
ნახ. 3.3.10. V ფუნქცია საწყისი მომენტისთვის ($t = 0$).



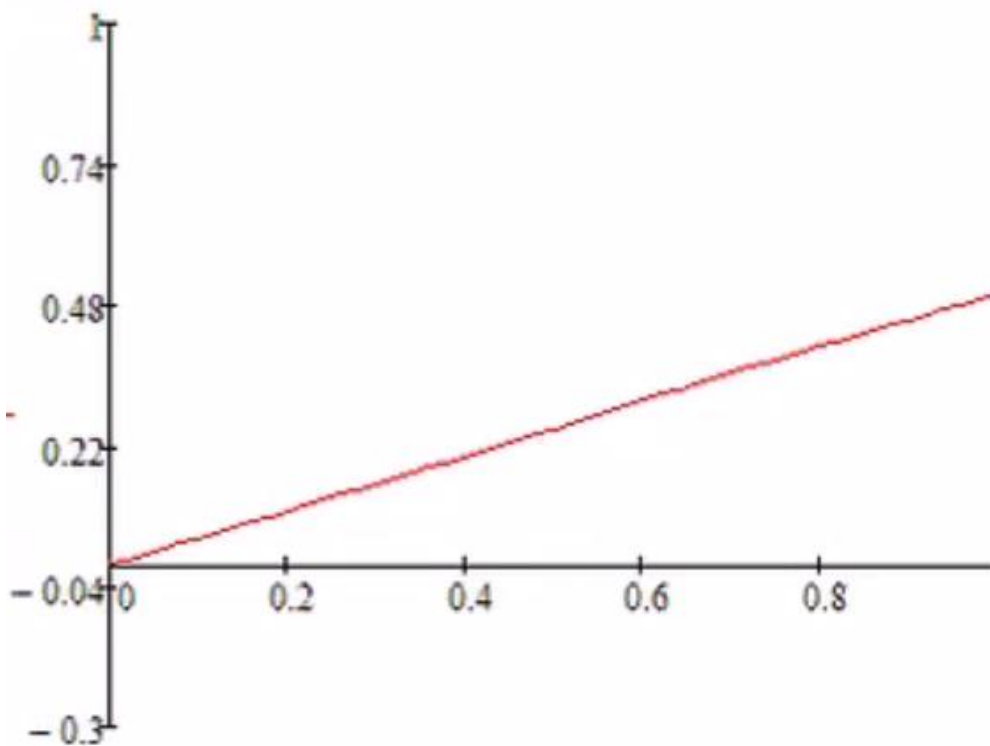
ნახ. 3.3.11. U ფუნქცია $t = 0.02$ მომენტისთვის.



ნახ. 3.3.12. V ფუნქცია $t = 0.02$ მომენტისთვის.

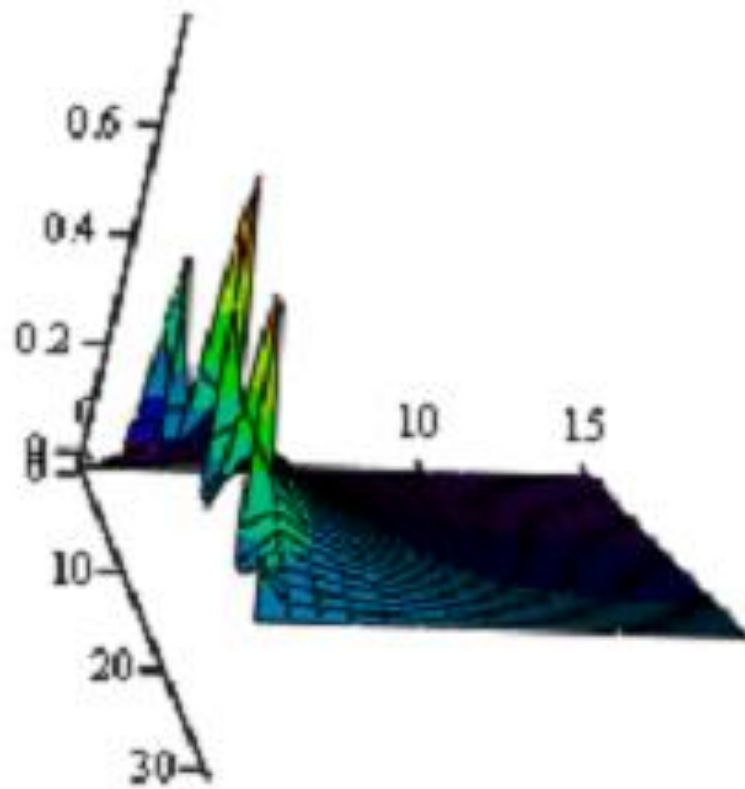


ნახ. 3.3.13. U ფუნქცია $t = 0.3$ მომენტისთვის.

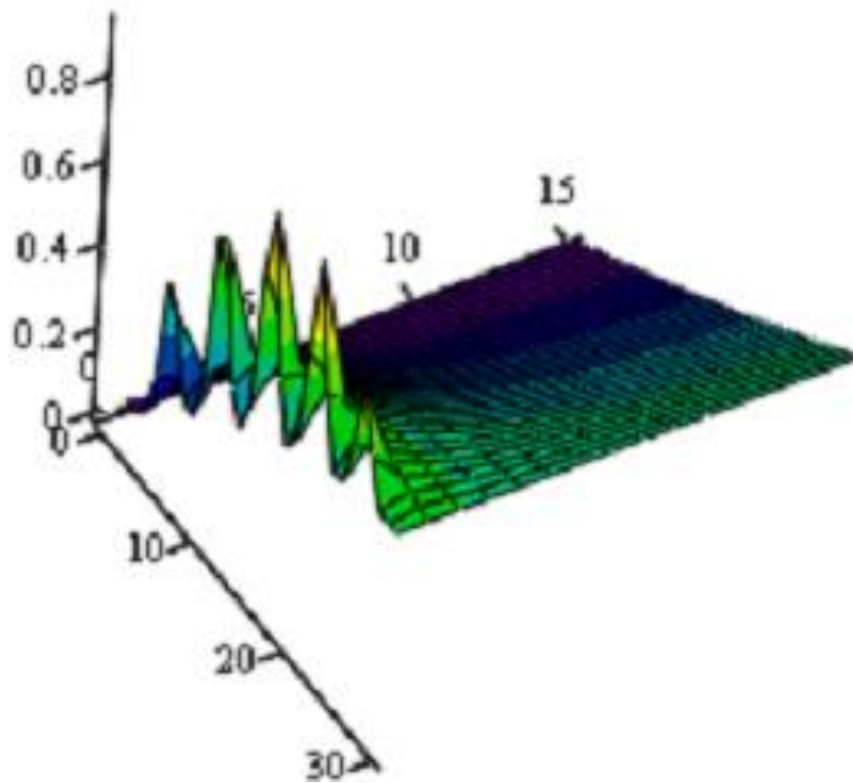


ნახ. 3.3.14. V ფუნქცია $t = 0.3$ მომენტისთვის.

შესაბამისი სამგანზომილებიანი ილუსტრაციები მოცემულია 3.15 და 3.16 ნახაზებზე.



ნახ. 3.3.15. U ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.



ნახ. 3.3.16. V ფუნქცია სამგანზომილებიან სივრცეში.

ჩატარებულია ასევე სხვა მრავალრიცხოვანი რიცხვითი ექსპერიმენტი, რომელთა შედეგები ადასტურებენ მიღებულ თეორიულ შედეგებს.

აღვნიშნოთ, რომ წინამდებარე ნაშრომში რიცხვითი შედეგები მიღებულია სხვადასხვა თანამედროვე პროგრამული პაკეტის გამოყენებით. დისერტაციაში მოყვანილია C++ და Mathcad პაკეტების შესაბამისი კოდების ფრაგმენტები. გარდა აღნიშნული პაკეტებისა, აგებული ალგორითმების სარეალიზაციოდ, ასევე გამოყენებულ იქნა Matlab და Maple პროგრამული პაკეტები.

დასკვნა

გამოყენებითი პროცესების აღმწერი ამოცანების გამოკვლევა, მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება-შესწავლა და კომპიუტერული რეალიზაცია წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის მეტად აქტუალურ სფეროს. სხვადასხვა დიფუზიური პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას ვლემულობთ ევოლუციურ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ და ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებს და მათ სისტემებს. ამ ამოცანათა უდიდესი ნაწილი, როგორც წესი, არაწრფივია. ეს მომენტი ერთიორად ართულებს ასეთი მოდელების შესწავლას. აღნიშნული მოდელების ძირითადი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შეიცავენ განტოლებებს, რომლებიც ძლიერად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. აღნიშნული გარემოება ყოველი კონკრეტული მოდელისათვის განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას, რადგან ზოგადი თეორია ამგვარი წრფივი სისტემებისათვისაც კი ჯერ კიდევ არასრულადაა განვითარებული. ბუნებრივად დგება მსგავსი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის აუცილებლობა, რაც კვლავ არსებით სირთულეებთან არის დაკავშირებული.

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიური პროცესების აღმწერი მაქსველის სისტემაზე დაფუძნებული არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ზოგიერთი თვისების შესწავლას, ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგების აგებას და გამოკვლევას, კომპიუტერზე რეალიზაციების ალგორითმების და შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის შექმნას, რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარებას, გრაფიკული ილუსტრაციების აგებასა და მიღებული შედეგების ანალიზს. კვლევები ჩატარებულია როგორც არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისთვის, ასევე გარემოში ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის აღმწერი მაქსველის განტოლებათა სისტემის ინტეგრო-დიფერენციალურ სახეზე რედუცირებით მიღებული მოდელისთვის.

პირველ თავში განხილულია ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური აღწერა ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის

კოეფიციენტზე დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსიმალური ცნობილი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის საფუძველზე მოყვანილია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა, რომლის შედეგადაც მიღებული არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის განხილულია შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების გლობალური ამონახსნების არსებობის საკითხები. კერძოდ, აგებულია ისეთი არაწრფივი სისტემა და მისი ანალიზური ამონახსნების მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ აღნიშნულ სისტემებს საზოგადოდ გლობალური ამონახსნები არა აქვთ. ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანის ამონახსნისთვის შეისწავლება წრფივად და გლობალურად მდგრადობის საკითხები. სასაზღვრო პირობაში შემავალი პარამეტრისათვის მოძებნილია ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც საშუალებას იძლევა დადგინდეს ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა. ამავე თავში აგებულია სასრულ-სხვაობიანი სქემა რომლისთვისაც დამტკიცებულია კრებადობის თეორემა. აგებული სქემის საფუძველზე ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები, რომელთა შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ დასკვნებთან.

მეორე თავში მოყვანილია მაქსიმალური დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სხვადასხვა სისტემამდე და განხილულია მათი ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. კერძოდ, გამოკვლეულია მიღებული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა მოდელების შესაბამისი წყაროს წევრებიანი სისტემების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დამტკიცებულია ამონახსნების სტაბილიზაცია და მითითებულია შესაბამისი რიგები. ამავე თავში დამტკიცებულია შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები.

მესამე თავში შესწავლილია დისკრეტული ანალოგები წინა თავში მიღებული არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისთვის. კერძოდ, აგებულია ნახევრად-დისკრეტული მოდელები და სხვაობიანი სქემები. დამტკიცებულია მათი მდგრადობისა და კრებადობის თეორემები. მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ალგორითმების აღწერა და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების ტესტურ ამოცანებზე მიღებული შედეგების გრაფიკული ილუსტრაციები.

ლიტერატურა

1. Abuladze I.O., Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Discrete models for a nonlinear magnetic-field scattering problem with thermal conductivity (Russian). *Differentsial'nye Uravneniya*, 1986, V.22, N7, p.1119-1129.
2. Akrivis, G. Larsson, S., Linearly implicit finite element methods for the time-dependent Joule heating problem. *BIT*, 2005, V.45, p.429-442.
3. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary Value Problems of Inhomogeneous Fluid Mechanics. *Studies in Mathematics and Its Applications*, North-Holland, 1990, 309p.
4. Bai Y. Backward Solutions to Nonlinear Integro-Differential Systems. *Cent. Eur. J. Math.*, 2010, V.8, N4, p.807-815.
5. Bai Y., Zhang P. On a Class of Volterra Nonlinear Equations of Parabolic Type. *Appl. Math. Comp.*, 2010, V.216, N1, p.236-240.
6. Baxevanis, Th., Katsaounis, Th., Tzavaras, A.E. Adaptive finite element computations of shear band formation. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 2010, V.20, p.423-448.
7. Bien, M. Existence of global weak solutions for a class of quasilinear equations describing Joule's heating. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1998, V.23, p.1275-1291.
8. Bossavit A. Computational Electromagnetism, Variational Formulations, Complementarity, Edge Elementss. Academic Press Series in Electromagnetism. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1998. 343p.
9. Brezzi F., Lipnikov K., Shashkov M., Simoncini V. A new discretization methodology for diffusion problems on generalized polyhedral meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2007, V.196, p.3682-3692.
10. Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D. Mathematical Problems of Generalized Thermo-Electro-Magneto-Elasticity Theory. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 2016, V.68, 166p.
11. Cessenat M. Mathematical Methods in Electromagnetism Linear Theory and Applications. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, V.41, World Scientific Publishers, Singapore, 1996, 394p.
12. Charalambakis N. Adiabatic shearing ow caused by timedependent inertial force. *Quart. J. Appl. Math.*, 1984, V.42, p.275-280.
13. Chen F. Crank-Nicolson Fully Discrete-Galerkin Mixed Finite Element Approximation of One Nonlinear Integro-Differential Model. *Abstract and Applied Analysis*, 2014, V.2014, 8p.
14. Chew W.C., Weddon W.H. A 3-D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates, *Micro. Opt. Tech. Lett.*, 1994, V.7, p.599-604.
15. Chilachava T. Nonlinear mathematical model of bilateral assimilation. *Comput. Sci. Telecom.*, 2014, V.41, N1, p.62-68.

16. Chrysafinos K., Walkington N.J. Error estimates for the discontinuous Galerkin method for parabolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2006, V.44, p.349-366.
17. Cimatti G. Existence of weak solutions for the nonstationary problem of the Joule heating of a conductor. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1992, V.162, N4, p.33-42.
18. Dafermos C.M., Hsiao L. Adiabatic shearing of incompressible fluids with temperature-dependent viscosity. *Quart. Appl. Math.*, 1983, V.41, p.45-58.
19. Ding S.J., Guo B.L., Lin J.Y., Zeng M. Global existence of weak solutions for Landau-Lifshitz-Maxwell equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2007, V.17, p.867-890.
20. Duvaut G., Lions J.-L. Inequalities in Mechanics and Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1976, 397p.
21. Dzhangveladze T.A. First boundary value problem for a nonlinear equation of parabolic type (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, V.269, p.839-842. English translation: *Soviet Phys. Dokl.*, 1983, V.28, p.323-324.
22. Dzhangveladze T.A. On the convergence of the difference scheme for one nonlinear system of partial differential equations (Russian). *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR*, 1987, V.126, N2, p.257-260.
23. Dzhangveladze T.A. Stability of the stationary solution of a system of nonlinear partial differential equations (Russian). *Proc. All-Union Symp. Curr. Probl. Math. Phys.*, Tbilisi, 1987, V.1, p.214-221.
24. Eller M., Lagnese J.E., Nicaise S. Stabilization of heterogeneous Maxwell's equations by linear or nonlinear boundary feedbacks. *Electronic J. Diff. Equ.*, 2002, V.21, p.1-26.
25. Elliott C. M, Larsson S. A finite element model for the time-dependent Joule heating problem. *Math. Comp.*, 1995, V.64, p.1433-1453.
26. Estep D.J., Verduyn Lunel S. M., Williams R.D. Analysis of shear layers in a fluid with temperature-dependent viscosity. *J. Comput. Physics*, 2001, V.173, p.17-60.
27. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, Englewood, NJ, 1964, 368p.
28. Fujita H., Mizutani A. On the finite element method for parabolic equations. I. Approximation of holomorphic semigroups. *J. Math. Soc. Japan*, 1976, V.28, p.749-771.
29. Gagoshidze M. Numerical resolution of one nonlinear parabolic system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2010, V.24, p.40-44.
30. Gagoshidze M. On parabolic regularization for one nonlinear diffusion model. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2012, V.26, p.14-17.
31. Gagoshidze M., Jangveladze T. On one nonlinear diffusion system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2011, V.25, p.39-43.
32. Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear parabolic problems (Russian). *Differencial'nye Uravneniya*, 1983, V.19, p.1197-1207. English translation: *Differential Equations*, 1983, V.19, p.887-895.

33. Grossmann C., Roos H.-G., Stynes M. Numerical Treatment of Partial Differential Equations. Springer, Berlin, 2007. 601p.
34. Grote M.J. Local nonreflecting boundary condition for Maxwell's equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, V.195, p.3691-3708.
35. Guo Y. The Vlasov-Maxwell-Boltzmann system near Maxwellians. *Invent. Math.*, 2003, V.153, p.593-630.
36. Hall W.F., Kabakian A.V. A sequence of absorbing boundary conditions for Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 2004, V.194, p.40-155.
37. Haraux A. Nonlinear Evolution Equations: Global Behavior of Solutions. Lecture Notes in Mathematics, V.841, Springer-Verlag, Berlin, 1981. 316p.
38. Hecht F., Jangveladze T., Kiguradze Z., Pironneau O. Finite Difference Scheme for One System of Nonlinear Partial Integro-Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, 2018, V.328, p.287-300.
39. Hong M.-C., Tonegawa Y., Yassin A. Partial regularity of weak solutions to Maxwell's equations in a quasi-static electromagnetic field. *Methods and Applications of Analysis*, 2008, V.15, p.205-222.
40. Hundsdorfer W., Verwer J.G. Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations, Springer Series in Comp. Math., 2003, V.33, 472p.
41. Hyman J.M., Shashkov M. Mimetic discretizations for Maxwell's equations. *J. Comput. Phys.*, 1999, V.151, p.881-909.
42. Jangveladze T. Investigation and Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential and Integro-Differential Models Based on System of Maxwell Equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 2019, V.76, 118p.
43. Jangveladze T. On one class of nonlinear integro-differential parabolic equations. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.*, 1997, V.23, p.51-87.
44. Jangveladze T., Gagoshidze M. Hopf bifurcation and its computer simulation for one-dimensional Maxwell model. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2016, V.30, p.27-30.
45. Jangveladze T.A., Kiguradze Z.V. Asymptotics of a solution of a nonlinear system of diffusion of a magnetic field into a substance (Russian). *Siberian Math. J.*, 2006, V.47, N5, p.1058-1070. English translation: *Siberian Math. J.*, 2006, V.47, N5, p.867-878.
46. Jangveladze T., Chilachava T., Kratsashvili M. Convergence analysis for finite difference scheme of one nonlinear integro-differential model with source term. *4th International Conference on Pure and Applied Sciences (Renewable Energy), ICPAS 2017, Book of Abstracts*, p.48.
47. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. Uniqueness of solution and fully discrete scheme to nonlinear integro-differential averaged model with source terms. *Miskolc Mathematical Notes*, 2018, V.19, N2, p.907-921.

48. Jangveladze T., Kratsashvili M. Some properties of solution and finite difference scheme for one nonlinear partial differential model based on Maxwell system. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 2018, V.73, p.83-92.
49. Jangveladze T., Kiguradze Z. Kratsashvili M. Correctness of the initial-boundary value problem and discrete analogs for one nonlinear parabolic integro-differential equation. *International Journal of Pure Mathematics*, 2017, N4, p.7-11.
50. Jangveladze T., Kiguradze Z. Kratsashvili M. Some properties of solution and finite difference scheme for integro-differential model with source terms based on Maxwell system. *International Conference on Mathematics and Engineering, ICOME-2017, Book of Abstracts*, 2017, p.277.
51. Jangveladze T., Kratsashvili M. On the stability of stationary solution and numerical approximation for one nonlinear model. *SIAM Annual Meeting (AN16), AN16 Annual Meeting Abstracts*, 2016, p.22.
52. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. One nonlinear model based on Maxwell system. *39th Annual SIAM Southeastern Atlantic Section Conference, Abstracts Book*, (2015), p.39.
53. Jangveladze T., Kiguradze Z., Kratsashvili M. Asymptotic behavior of solution and semi-discrete scheme for one nonlinear averaged integro-differential equation with source term. *VI International Conference of the GMU*, 2015, p.123-124.
54. Jangveladze T., Kratsashvili M. Asymptotic behavior of solution and semi-discrete difference scheme for one nonlinear integro-differential equation with source term. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2014, V.28, p.50-53.
55. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Numerical Solution of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. Elsevier, 2016, ACADEMIC PRESS, 254p.
56. Jangveladze T.A., Lyubimov B.I., Korshia T.K. On the numerical solution of a class of nonisothermics problem of the diffusion of an electromagnetic field (Russian). *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 1986, V.18, p.5-47.
57. Jichun L. Posteriori error estimation for an interior penalty discontinuous Galerkin method for Maxwell's equations in cold plasma. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, N1, p.107-124.
58. Kiguradze Z.V. On the stationary solution for one diffusion model. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 2001, V.16, N1, p.17-20.
59. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On one nonlinear model describing electromagnetic field diffusion process. *V International Conference of the GMU*, 2014, p.108.
60. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On one two-dimensional model based on Maxwell system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2015, V.29, p.64-67.
61. Kiguradze Z., Kratsashvili M. On two dimensional nonlinear integrodifferential equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance. *SIAM Annual Meeting (AN16), AN16 Annual Meeting Abstracts*, 2016, p.25.

62. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one nonlinear partial integro-differential equation. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2016, V.30, p.47-50.
63. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one system of nonlinear partial integro-differential equations with source terms. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2017, V.31, p.75-78.
64. Kiguradze Z., Kratsashvili M. Finite difference scheme for one nonlinear parabolic averaged integro-differential equation. *International Conference on Mathematics and Engineering, ICOME-2017, Book of Abstracts*, 2017, p.133.
65. Kratsashvili M. On finite difference scheme for one integro-differential model with source terms based on Maxwell system. *Bulletin of TICMI*, 2017, V.21, N1, p.21-32.
66. Krejci P. Periodic solutions to Maxwell equations in nonlinear media. *Czechoslovak Math. J.*, 1986, V.36, p.238-258.
67. Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A. Mathematical problems of hydrodynamics and magnetohydrodynamics of a viscous incompressible fluid. *Proceedings of V.A. Steklov Mathematical Institute*, 1960, V.59, p.115-173.
68. Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. Math. Monographs, V.23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 667p.
69. Landau L., Lifschitz E. Electrodynamics of Continuous Media. Course of Theoretical Physics, 8 (Translated from the Russian), Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1960; Russian original: Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit., Moscow, 1957, 460p.
70. Laptev G.I. Mathematical features of the problem on the penetration of a magnetic field into a substance for quasistationary approximation (Russian). *IzV. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math.*, 1989, V7, p.70-73. English translation: *Soviet Math.*, 1989, V.33, N7, p.93-97.
71. Laptev G.I. Mathematical singularities of a problem on the penetration of a magnetic field into a substance (Russian). *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 1988, V.28, p.1332-1345. English translation: *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, V.28, p.35-45.
72. Laptev G.I. Quasilinear Evolution Partial Differential Equations with Operator Coefficients (Russian). Doctoral Dissertation. Moscow, 1990, 267p.
73. Li J. Error analysis of finite element methods for 3-D Maxwell's equations in dispersive media. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, V.188, p.107-120.
74. Li J. Error analysis of fully discrete mixed finite element schemes for 3-D Maxwell's equations in dispersive media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, V.196, p.3081-3094.
75. Li J., Chen Y. Analysis of a time-domain finite element method for 3-D Maxwell's equations in dispersive media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, V.195, p.4220-4229.

76. Lions J. L. Quelques Methodes de Resolution des Problemes Aux Limites Non-
Lineaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 531p.
77. Liao H., Zhao Y. Linearly localized difference schemes for the nonlinear Maxwell
model of a magnetic field into a substance. *Appl. Math. Comput.*, 2014, V.233, p.608-
622.
78. Lin Y., Yin H.M. Nonlinear parabolic equations with nonlinear functionals. *J. Math.
Anal. Appl.*, 1992, V.168, p.28-41.
79. Long N.T., Dinh A.P. Nonlinear parabolic problem associated with the penetration of
a magnetic field into a substance. *Math. Mech. Appl. Sci.*, 1993, V.16, p.281-295.
80. Lu T., Zhang P., Cai W. Discontinuous Galerkin methods for dispersive and lossy
Maxwell's equations and PML boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 2004, V.200,
p.549-580.
81. Ma C. Finite-element method for time-dependent Maxwell's equations based on an
explicit magnetic-field scheme. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, V.194, p.409-424.
82. Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and its Applications, Appl. Math.
Sciences series, V.19, Springer-Verlag, New York, 1976, 424p.
83. Metaxas A.C. Foundations of Electroheat. A Unified Approach, John Wiley & Sons,
New York, 1996, 530p.
84. Milani A. Local in time existence for the complete Maxwell equations with monotone
characteristic in a bounded domain. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1982, V.131, p.233-254.
85. Miranda F., Rodrigues J.-F., Santos L. A class of stationary nonlinear Maxwell systems.
Math. Models Methods Appl. Sci., 2009, V.19, p.1883-1905.
86. Mitrea M. Boundary value problems for Dirac operators and Maxwell's equations in
non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2002, V.25, p.1355-1369.
87. Ponomarev S.M. On the diffusion of an intense magnetic field into a thin
incompressible conductor (Russian). *Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz.*, 1987, V27, p.1424-
1428. English translation: *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1987, V.27, N5, p.98-101.
88. Rheinboldt W.C. Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations. SIAM,
Philadelphia, 1970, 138p.
89. Rogava J., Gulua D. The perturbation algorithm for realization of Four-layer semi-
discrete solution scheme of an abstract evolutionary problem. *Georgian Mathematical
Jornal*, 2018, V.25, N1, p.77-92.
90. Rogava J., Gulua D., Galdava R. Reduction of some semi-discrete schemes for an
evolutionary equation to two-layer schemes and estimates for the approximate solution
error. *Book "Lie groups, Differential equations, and Geometry"*, Italy, Springer, 2017,
p.223-246.
91. Russell D.L. Dirichlet-Neumann boundary control problem associated with Maxwell
equations in a cylindrical region. *SIAM, J. Math. Anal.*, 1986, V.24, p.199-229.

92. Samarskii A.A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001, 768p.
93. Sharma N., Pani A.K., Sharma K. Expanded mixed FEM with lowest order RT elements for nonlinear and nonlocal parabolic problems. *Adv. Comput. Math.*, 2018, V.44, N5, p.1537-1571.
94. Sharma N., Khebchareon M., Sharma K., Pani A.K. Finite element Galerkin approximations to a class of nonlinear and nonlocal parabolic problems. *Numer. Meth. PDEs*, 2016, V.32, N4, p.1232-1264.
95. Sharma N., Sharma K.K. Unconditionally stable numerical method for a nonlinear partial integro-differential equation. *Comp. Math. Appl.*, 2014, V.67, N1, p.62-76.
96. Sharma N., Sharma K.K. Finite element method for a nonlinear parabolic integro-differential equation in higher spatial dimensions. *Appl. Math. Model.*, 2015, V.39, N23, p.7338-7350.
97. Slodicka M., Busa J.Jr. Error estimates for the time discretization for nonlinear Maxwell's equations. *J. Comput. Math.*, 2008, V.26, p.677-688.
98. Sun D., Manoranjan V.S., Yin H.-M. Numerical solutions for a coupled parabolic equations arising induction heating processes. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplement*, 2007, p.956-964.
99. Thornton G.D., Anderson B.R., Baugh M.A., Robertson G.M., Shapiro J., Thyberg R.C., Neta B. Numerical Solution of a Nonlinear Diffusion Model with Memory. Monterey, California. Naval Postgraduate School; 2018, p.1-22.
100. Tsulaia G. On the stationary solution and numerical approximation for one-dimensional Maxwell system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2017, V.31, p.141-146.
101. Tsulaia G. Finite-difference scheme for one-dimensional analog of the Maxwell nonlinear system with source term. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2018, V.32, p.75-78.
102. Tzavaras A. E. Non-linear analysis techniques for shear band formation at high strain rates. *Appl. Mech. Rev.*, 1992, V.45, p.82-94.
103. Wei W., Yin H.-M. Global solvability for a singular nonlinear Maxwell's equations. *Pure Appl. Anal.*, 2005, V.4, p.431-444.
104. Wollman S. A deterministic particle method for the Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck system in two dimensions. *Neural Parallel Sci. Comput.*, 2010, V.18, p.461-470.
105. Xu X. A degenerate Stefan-like problem with Joule's heating. *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, V.23, p.1417-1438.
106. Xu X. Existence and uniqueness for the nonstationary problem of the electrical heating of a conductor due to the Joule-Thomson effect. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 1993, V.16, p.125-138.
107. Xu X. Local and global existence of continuous temperature in the electrical heating of conductors. *Houston J. Math.*, 1996, V.22, p.435-455.

108. Yee K.S. Numerical solution of initial boundary problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1966, V14, p.302-307.
109. Yin H.-M. Global solutions of Maxwell's equations in an electromagnetic field with a temperature-dependent electrical conductivity. *European J. Appl. Math.*, 1994, V.5, p.57-64.
110. Yin H.-M. On a nonlinear Maxwell's system in quasistationary electromagnetic fields. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2004, V.14, p.1521-1539.
111. Yin H.-M. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect. *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, V.29, p.637-651.
112. Yin H.-M. Regularity of solutions to Maxwell's system in quasi-stationary electromagnetic fields and applications. *Comm. PDEs*, 1997, V.22, p.1029-1053.
113. Young J.L., Adams R.S. On the time integration of Maxwell's equations associated with Debye relaxation processes. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 2007, V.55, p.2409-2412.
114. Zhao J. Analysis of finite element approximation for time-dependent Maxwell problems. *Math. Comp.*, 2004, V.73, p.1089-1105.
115. Zlamal M. Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field. *RAIRO Anal. Numer.*, 1982, V.16, p.161-191.