სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის ფაკულტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ბესიკი ტაბატაძე

ზოგიერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემის მიახლოებითი ამოხსნა

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

ავტორეფერატი

თბილისი, 2019

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:	**თემურ ჯანგველაძე** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი **თემურ ჩილაჩავა** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი.
კონსულტანტი	**ზურაბ კიღურაძე** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი, მისურის (აშშ) მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების უნივერსიტეტის ასოცირებული მკვლევარი, პროფესორი.
ექსპერტები:	**რომეო გალდავა** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი. **გია ლობჟანიძე** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, კავკასიის უნივერსიტეტის პროფესორი.
ოფიციალური რეცეზენტები:	**მარინა მენთეშაშვილი** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი. **ჯემალ როგავა** ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2020 წლის 16 იანვარს 14:00 საათზე სსიპ სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე.
მისამართი: ანა პოლიტკოვსკაიას ქ. №26, VII სართული, საპრეზენტაციო ოთახი №712.

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი,
გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულების
ასოცირებული პროფესორი ციალა ძიძიგური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

მათემატიკურ მოდელირებაში კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებები წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვა რეალური პროცესის აღწერა. უმეტეს შემთხვევაში დასმული ამოცანის ზუსტი ამონახსნის აგება შეუძლებელია, მაგრამ ხერხდება ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნა, რომელიც გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდების სიღრმისეულ ცოდნას მოითხოვს. უნდა აღინიშნოს, რომ თითოეული ამოცანა თავისი სპეციფიკიდან გამომდინარე წარმოადგენს ცალკე შესწავლის საკითხს. პირველ ეტაპზე ხდება მოცემული ამოცანის შეფასება და ამონახსნის ძიების ეფექტური ალგორითის შერჩევა, ამ ეტაპზე ხდება თეორიული დასკვნების გაკეთება. კერძოდ, შესაძლებელია თუ არა რომელიმე რიცხვითი ალგორითმის მისადაგება ამოცანისთვის, აქვს თუ არა ამოცანას ამონახსნი და არის თუ არა ის ერთადერთი, არის თუ არა ამონახსნი მდგრადი საწყისი მნიშვნელობების მიმართ, რა ცდომილობას უნდა ველოდოთ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის შემთხვევაში, რა რიგისაა ცდომილება. შემდეგ ეტაპზე ხორციელდება არჩეული ალგორითმის კომპიუტერული რეალიზაცია, რომელიც თავის მხრივ მოითხოვს პროგრამირების საკითხების სიღრმისეულ ცოდნას. აღნიშნულ ეტაპზე უნდა შეირჩეს ტექნოლოგია, რომელიც ალგორითმის აგებისთვის იქნება ეფექტური, გამოთვლების პროცესში გათვალისწინებული უნდა იყოს კომპიუტერის მიერ დაგროვების ცდომილების არსებობა. შემდეგ ეტაპზე ხორციელდება მიღებული შედეგების შეფასება და ანალიზი, წარმოებს დაკვირვება თუ რამდენად ახლოს დგას ამოცანის ზუსტი ამონახსნი მიახლოებით ამონახსნთან, ამ ეტაპზე ხორციელდება სხვადასხვა ტიპის გათვლების ჩატარება და დაკვირვება თუ როგორ შედეგებს იძლევა რეალიზებული ალგორითმი მარტივი, საშუალო ან რთული ტესტების შემთხვევაში, რამდენად შესაბამისობაშია პრაქტიკული რეალიზაციის შედეგად მიღებული მონაცემები თეორიულ დასკვნებთან.

კერძოწარმოებულიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით შესაძლებელია სხვადასხვა ბიოლოგიური პროცესების აღწერა. ერთ-ერთ ასეთ ბიოლოგიურ პროცესს წარმოადგენს მცენარეთა ფოთლებში ძარღვოვანი სისტემის ფორმირება. აღნიშნული პროცესის აღმწერი ერთ-ერთი მათემატიკური მოდელი შემოთავაზებული იქნა ინგლისელი მეცნიერის ჯ. მიჩისონის მიერ, რომელიც წარმოადგენს ორგანზომილებიან არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან განტოლებათა სისტემას.

მიჩისონის ნაშრომში აღწერილ მათემატიკურ მოდელში მცენარეთა ფოთლებში ძარღვების ფორმირების სიგნალი უჯრედებს შორის გადაიცემა დიფუზიით. მოდელის საშუალებით ხდება ძარღვების ფორმირების აღწერა, რომელიც ეყრდნობა სხვადასხვა ექსპერიმენტების შედეგებს. მათემატიკური მოდელს მიჩისონის ნაშრომში წარმოდგენილი აღნიშვნების გათვალისწინებით აქვს შემდეგი ზოგადი ფორმა:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(D_1\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(D_2\frac{\partial S}{\partial x_2}\right),\\ \frac{\partial D_1}{\partial t}=f\left(D_1,D_1\frac{\partial S}{\partial x_1}\right),\\ \frac{\partial D_2}{\partial t}=f\left(D_2,D_2\frac{\partial S}{\partial x_2}\right),\end{gathered}\tag{1}$$

სადაც $S(t,x_1,x_2)$ სიგნალის კონცენტრაციაა, D_1 და D_2 კი დიფუზიის კოეფიციენტებია, შესაბამისად OX_1 და OX_2 ღერძების გასწვრივ. აღნიშნული მათემატიკური მოდელი აღწერს შემთხვევას, როდესაც ძარღვების ფორმირების პროცესში არ მონაწილეობს გარე ფაქტორები, არ ხდება ქსოვილების დამახინჯება, დახლეჩვა ან წყვეტა.

უნდა აღინიშნოს, რომ აღწერილი მათემატიკური მოდელის შესწავლა არა მხოლოდ ბიოლოგიის და მათემატიკის თვალსაზრისით არის საინტერესო, (1) სისტემის ამოხსნა ეფუძნება რიცხვითი მეთოდების და ოპტიმალური ალგორითმების გამოყენებას, რაც თავის მხრივ კავშირშია ინფორმაციული ტექნოლოგიების კერძოდ, პროგრამირების სიღრმისეულ ცოდნასთან, შესაბამისი ალგორითმების რეალიზაცია და შედეგების მიღება წარმოადგენს პროგრამირებაში ერთ-ერთ საინტერესო საკითხს.

კვლევის ობიექტი და მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს ერთი ორგანზომილებიანი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი ბიოლოგიური მოდელის განტოლებათა სისტემის მიახლოებითი ამოხსნა.

მიჩისონნის მიერ შემოთავაზებული (1) ბიოლოგიური მოდელის შემდეგი ვარიანტისათვის $Q = \Omega \times (0, T)$ არეში, სადაც $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, განხილულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(V_1 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(V_2 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}}\right), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} &= -V_1 + g_1\left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} &= -V_2 + g_2\left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} U(x,0,t) = U(x,1,t) = U(0,y,t) = U(1,y,t) = 0, \\ U(x,y,0) = U_0(x,y), \\ V_1(x,y,0) = V_{10}(x,y),\ V_2(x,y,0) = V_{20}(x,y), \end{gathered} \tag{4}$$

(2) – (4) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად განხილულია ორი განსხვავებული მიდგომა. ორივე მათგანი მიეკუთვნება ე.წ. დეკომპოზიციური მეთოდების ჯგუფს. პირველი მიდგომაა ცვალებადი მიმართლების სხვაობიან სქემაზე დაფუძნებული დეკომპოზიციური მეთოდი, მეორე მიდგომა გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი მეთოდი. მათთვის მათემატიკური აპარატის გამოყენებით ჩატარებულია ზოგიერთი თეორიული კვლევა. აგებულია ორივე მიდგომის შესაბამისი სხვაობიანი სქემები და აღწერილია მათი რეალიზაციისთვის საჭირო ალგორითმები. მიღებული ალგორითმების რეალიზაციისთვის შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა და შესაბამისი ტესტებისთვის ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები.

მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები

რიცხვით მეთოდებში ეკონომიური ალგორითმის მოძიება, რომელიც დასმული ამოცანის სასურველი სიზუსტით ამოხსნის საშუალებას იძლევა, ასევე ალგორითმის რეალიზაციის მანქანური დროის მინიმალურ ნიშნულამდე დაყვანა აქტუალურია.

დისერტაციის ფარგლებში შესწავლილია ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი (2) – (4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი წყაროს წევრის გათვალისწინებით. (2) – (4) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად გამოყენებულია ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემაზე დაფუძნებული დეკომპოზიციური მეთოდი, გამოკვლეულია სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები. ასევე (2) – (4) ამოცანის ამონახსნის საპოვნელად აიგო გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა და გამოკვლეული იქნა მისი კრებადობის საკითხი. დასკვნით ნაწილში განხორციელებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები, რომელთა საფუძველზეც ერთმანეთს შედარდა ზემოთ ხსენებული ორი მეთოდის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახნები.

დაიწერა კომპიუტერული პროგრამა, რომლის საშუალებითაც მოხერხდა შესაბამისი ალგორითმების პრაქტიკული რეალიზაცია. დაპროგრამების გარემოდ შერჩეული იქნა პროგრამირების ენა C++. პროგრამირების პროცესში გათვალისწინებული იქნა ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპები და მიდგომები. ფუნქციების სიმბოლური დათვლებისა და მონაცემების ვიზუალური წარმოჩენისთვის გამოყენებულია მათემატიკური სიმბოლური პაკეტების დამუშავებისთვის განკუთვნილი თანამედროვე პროგრამული უზრუნველყოფა MATLAB, MATHCAD.

ჩატარებული სამუშაო და მიღებული შედეგები, რომლებიც განხორციელდა ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი (2) – (4) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოთვლითი მათემატიკის სფეროში საინტერესო და მნიშვნელოვან სიახლეს წარმოადგენს.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციაში ასახული ძირითადი შედეგების გაცნობა განხორციელდა რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე: თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების გაფართოებულ სხდომებზე (2011, 2012, 2015, 2017 წლებში), საქართველოს მათემატიკოსთა მეხუთე ყრილობაზე (ბათუმი, 2013). შედეგები ასევე წარდგენილი იქნა WSEAS-ის მე-15 საერთაშორისო კონფერენციაზე, რომელიც ჩატარდა საბერძნეთის დედაქალაქ ათენში 2010 წლის 29-31 დეკემბერს. დისერტაციის თემასთან დაკავშირებით 2016 წელს მოპოვებულია გრანტი დოქტორანტებისთვის (#PhDF2016_14), რომელიც წარმატებით დასრულდა 2017 წელს. გრანტის ფარგლებში მიღებული შედეგების სამეცნიერო საზოგადოებისთვის გაცნობა განხორციელდა 2016 წლის 8-10 დეკემბერს მე-5 საერთაშორისო კონფერენციაზე ბიოტექნოლოგიებში და ბიოინჟინერიაში, რომელიც ჩატარდა ტაილანდის დედაქალაქ ბანგკოკში.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

დისერტაცია შეიცავს 110 ნაბეჭდ გვერდს. იგი შედგება თავფურცელის, შესავალის, კვლევის თეორიული კონტექსტისგან, სამი თავისაგან, დასკვნისგან და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისგან.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი

შესავალში განხილულია სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილი თემის აქტუალობა. მოცემულია ლიტერატურის მიმოხილვა, დახასიათებულია ნაშრომის მიზანი, მოცემულია ნაშრომის ძირითადი შედეგები და მოკლე აღწერა. კვლევის თეორიულ კონტექსტში აღწერილია დისერტაციაში გამოყენებული ძირითადი თეორიული ასპექტები.

დისერტაციაში ჩატარებულია კვლევა (2) - (4) სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის რიცხვითი მეთოდების შესახებ. მეთოდების შესწავლის პროცესში $\bar{Q}$ არეზე შემოტანილია ბადეები:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau,\ \bar{\omega}_{\alpha h\tau} = \bar{\omega}_{\alpha h} \times \omega_\tau,\ \alpha = 1,2,$$

სადაც:

$$\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \qquad i,j = 0,1,\dots,M,\ \ Mh = 1\},$$

$$\bar{\omega}_{1h} = \{(x_i, y_j) = ((i-1/2)h, jh), \qquad i,j = 1,\dots,M,\ \ Mh = 1\},$$

$$\bar{\omega}_{2h} = \{(x_i, y_j) = (ih, (j-1/2)h), \qquad i,j = 1,\dots,M,\ \ Mh = 1\},$$

$$\omega_h = \Omega \cap \bar{\omega}_h, \qquad \gamma_h = \bar{\omega}_h / \omega_h\,, \qquad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h\,,$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau,\ \ k = 0,\dots,N, \quad N\tau = T\}.$$

სხვაობიანი სქემებისთვის გამოყენებულია შემდეგი ცნობილი აღნიშვნები:

$$u = u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k), \qquad \hat{u} = u_{i,j}^{k+1} = u(x_i, y_j, t_{k+1}),$$

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \qquad u_{\bar{x}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h}, \qquad u_{\bar{y}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h},$$

$$u_x = \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h}, \qquad u_y = \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h},$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2}, \qquad u_{\bar{y}y} = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}.$$

სასრული სხვაობები $\bar{\omega}_{\alpha h}$, $\alpha = 1,2$ ბადეზე მოცემული ფუნქციებისთვის განისაზღვრება ანალოგიურად.

პირველ თავში შესწავლილია (2) – (4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი წყაროს წევრის გათვალისწინებით. ასევე (2) - (4) ამოცანისთვის განხილულია ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემაზე დაფუძნებული დეკომპოზიციური მეთოდი, რომლისთვისაც შესწავლილია სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები.

(2) - (4) ამოცანისთვის აგებულია ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + \left(v_2 u_{2\bar{y}}\right)_y,$$
$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + \left(\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}}\right)_y, \tag{5}$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}),$$
$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2\left(v_2 u_{2y}\right), \tag{6}$$

$$u_1(x,y,0) = u_2(x,y,0) = U_0(x,y),\ \ (x,y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x,y,0) = V_{10}(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_{1h},$$
$$v_2(x,y,0) = V_{20}(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_{2h}, \tag{7}$$

$$u_1(x,y,t) = u_2(x,y,t) = 0,\ \ (x,y,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau.$$

(5) - (7) სქემაში ახალ შრეზე მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად მიმდევრობით ვპოულობთ $\hat{v}_1$ და $\hat{u}_1$ ფუნქციებს, ხოლო შემდეგ $\hat{v}_2$ და $\hat{u}_2$ ფუნქციებს ნაპოვნი $\hat{v}_1, \hat{u}_1$ ამონახსნების გამოყენებით.

სამართლიანია შემდეგი დებულება: თუ (2) - (4) კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას აქვს საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2, მაშინ (5) - (7) სქემა საწყისი პირობების მიმართ აბსოლიტურად მდგრადია და კრებადი.

მეორე თავში (2) - (4) ამოცანისთვის განხილულია გასაშუალებული მოდელი, რომელიც წარმოადგენს ეკონომიური ალგორითმის აგების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მეთოდს, აღნიშნული მეთოდის არსიც მგდომარეობს მრავალგაზნომილებიანი ამოცანის ერთგანზომილებიან ამოცანებზე დაყვანის შედეგად სისტემების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნაში. ერთგანზომილებიანი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის

შემდეგ ხდება მიღებული ამონახსნების კომპოზიციით საბოლოო მრავალგანზომილებიანი ამონახსნის მიღება.

ვთქვათ, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. შემოვიტანოთ $[0, T]$ სეგმენტზე ბადე: $\omega_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ \ j = 0, \dots, N;\ \ \tau = \frac{T}{N}\right\}$ და ყოველ $\Delta_k = [k\tau,\ \ (k+1)\tau]$ შუალედში განვიხილოთ U_i^k და V_i^k $(i = 1,2)$ ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი გასაშუალებული ადიტიური მოდელის ამონახსნებს:

$$\eta_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x}\right),$$

$$\eta_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial V_1^k}{\partial t} = -V_1^k + g_1\left(V_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial x}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = -V_2^k + g_2\left(V_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial y}\right),$$

$$U_1^k\big|_{x=0} = U_1^k\big|_{x=1} = 0,$$

$$U_2^k\big|_{y=0} = U_2^k\big|_{y=1} = 0,\ U_i^0(x,0) = U_0(x)\ ,$$

$$U_i^k(x,y,t_k) = U^{k-1}(x,y,t_k), \tag{10}$$

$$V_i^k(x,y,t_k) = V_i^{k-1}(x,y,t_k)\ .$$

$$i = 1,2.$$

სამართლიანია შემდეგი დებულება: (8) - (10) ამოცანის ამონახსნი $\left(U^k, V_1^k, V_2^k\right)$ კრებადია (2) - (4) ამოცანის (U, V_1, V_2) ამონახსნისაკენ .

გასაშუალებული მოდელისთვის აგებულია შესაბამისი σ წონიანი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = \sigma_1(\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (1 - \sigma_1)(v_1 u_{1\bar{x}})_x,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \tag{11}$$

$$u_{2t} = \sigma_2\left(\hat{v}_2\hat{u}_{2\bar{y}}\right)_y + (1-\sigma_2)\left(v_2u_{2\bar{y}}\right)_y,$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2\left(v_2u_{2\bar{y}}\right), \tag{12}$$

$$u_1(x,y,0) = u_2(x,y,0) = U_0(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x,y,0) = V_{10}(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_{1h},$$

$$v_2(x,y,0) = V_{20}(x,y),\ \ (x,y) \in \bar{\omega}_{2h}, \tag{13}$$

$$u_1(x,y,t) = u_2(x,y,t) = 0,\ \ (x,y,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

სქემაში (11) - (13) მიახლოებითი ამონახსნების $t = t_k$ შრის წერტილებში საპოვნელად, ამ წერტილებში პარალელურად ვპოულობთ (u_1, v_1) და (u_2, v_2) მიახლოებით ამონახსნებს. საძიებელ შრეზე საბოლოო მიახლოებით ამონახსნს წარმოადგენს v_1, v_2, u, სადაც $u = \eta_1 u_1 + \eta_2\, u_2,\ \eta_1\eta_2 > 0,\ \eta_1 + \eta_2 = 1$. ახალ შრეზე გადასვლისას v_1 და v_2 ფუნციებისთვის საწყისი პირობები განისაზღვრება წინა შრეზე მიღებული ამონახსნების შედეგად, ხოლო u_1 და u_2 ფუნქციებისთვის საწყის პირობას წარმოადგენს წინა შრეზე მიღებული u ფუნქცია. აღნიშნული მეთოდი წარმოადგენს პარალელური ტიპის დეკომპოზიციურ მეთოდს, რადგანაც u ფუნქციის საპოვნელად ამოცანის დეკომპოზიციის შედეგად მიღებული u_1 და u_2 ფუქციების პოვნა პარალელურად მიმდინარეობს.

რიცხვითი მეთოდების მნიშვნელოვან და განუყოფელ ნაწილს წარმოადგენს სხვაობიანი სქემების შესაბამისი ალგორითმის რეალიზაციის პროცესი. შესაბამისი ალგორითმის საფუძველზე კომპიუტერული პროგრამის აგება, მიღებული რიცხვითი შედეგების წარმოდგენა და ანალიზი.

მესამე თავი ეთმობა თეორიული კვლევების შესაბამისი ალგორითმების რეალიზაციის შედეგების აღწერასა და წარმოდგენას. მასში წარმოდგენილია (2) – (4) ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად გამოყენებული ცვალებადი მიმართულებისა სხვაობიანი სქემაზე დაფუძნებული დეკომპოზიცური მეთოდისა და გასაშუალებული მეთოდის შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და მათი შედარებითი ანალიზი.

აღწერილია სხვაობიანი სქემებით მიღებული ალგორითმი და შესაბამისი კომპიუ-ტერული რეალიზაციის პროცესი. ალგორითმების რეალიზაცია განხილულია შესა-ბამისი ტესტების საფუძველზე. რიცხვითი მონაცემების მისაღებად დაწერილია კომ-პიუტერული კონსოლური პროგრამა პროგრამირების ენა C++-ის საშუალებით, პროგ-რამის დაწერისას გათვალისწინებულია კომპიუტერული პროგრამის შემუშავების რეკომენდაციები, გამოყენებულია ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპები და ოპტიმალური დაპროგრამების ძირითადი ელემენტები. პროგრამის თითოეულ ფაილში დაწერილ კოდს თან ერთვის კომენტარები ქართულ ენაზე, რომელიც მომხარებელს საშუალებას აძლევს გაერკვეს თითეული კლასისა და მისი მეთოდების დანიშნულებასა და გამოყენების სპეციფიკაში. ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები დისერტაციაში მოცემულია გრაფიკული სახით.

რიცხვითი მეთოდებში წარმოდგენილი ალგორითმის მუშაობის შემოწმება, შეიძლება სხვადასხვა მახასიათებლის მიხედვით განხორციელდეს, თუმცა ძირი-თადად მოწმდება ორი მნიშვნელოვანი ფაქტორი ალგორითმის შესრულებაზე და-ხარჯული მანქანური დრო, რაც გვაძლევს საშუალებას ვიმსჯელოთ ალგორითმის ეკონომიურობაზე და მეორე - ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების სიზუსტე. ზემოთ აღნიშნულ მეთოდებში წარმოდგენილი ალგორითმების შედარება განხორ-ციელდა ერთიდაიგივე კომპიუტერზე ერთიდაიგივე ტესტისთვის ორი ფაქტორის გათვალისწინებით.

- **დროითი ფაქტორი**. კომპიუტერული პროგრამა რა დროს ანდომებს თითოეული მეთოდის შემთხვევაში მონაცემების დამუშავებას.
- **რიცხვითი ექსპერიმენტების სიზუსტის ფაქტორი**. შესასწავლი ამოცანის მიახლო-ებითი ამონახსნი ცხადია მაქსიმალური სიზუსტით ახლოს უნდა იყოს რეალურ ამონახსნთან. სიზუსტის შესადარებლად პროგრამაში დათვლილია ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნებს შორის სხვაობები, ზემოთ მოცემული ორივე მეთო-დისთვის ერთი და იგივე კვანძებზე აღებულია სხვაობებს შორის მაქსიმალური მნიშვნელობები და ისინი შედარებულია ერთმანეთთან.

დისერტაციაში წარმოდგენილი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის პოვნის პროცესში განსაზღვრული ალგორითმის რეალიზაციისთვის თანმიმდევრულად ჩატარდა შემდეგი სამუშაო:

- საწყის ეტაპზე განისაზღვრა სხვაობიანი სქემის შესაბამისი ალგორითმის აგების გზები, განისაზღვრა ალგორითმის რეალიზაციისთვის საჭირო ტექნოლოგია;
- კომპიუტერული პროგრამის შედეგის შესამოწმებლად შეირჩა შესასწავლი ამოცანის შესაბამისი პრაქტიკული ტესტები, ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის საწყის-სასაზღვრო პირობებს;
- ტესტების შერჩევის შემდეგ დადგინდა შესაბამისი მარჯვენა მხარეები. რადგანაც ამოცანა წარმოადგენს ორგანზომილებიან კერძოწარმოებულების შემცველ სისტემას, შესაბამისი ტესტებში განსაზღვრული ფუნქციების გაწარმოების შედეგად რიგ შემთხვევაში მიიღება საკმაოდ დიდი გამოსახულება (მარჯვენა მხარე). მარჯვენა მხარის დასადგენად გამოყენებულია სიმბოლური მათემატიკური პაკეტები;
- მარჯვენა მხარის მიღების შემდეგ განხორციელდა მისი გადატანა დაპროგრამების გარემოში პროგრამირების ენა C++-ის სინტაქსის დაცვით;
- შემდეგ ეტაპზე ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრიცნიპების გათვალისწინებით განისაზღვრა კომპიუტერული პროგრამის აგებისთვის აუცილებელი კლასები;
- შემუშავდა კლასების ურთიერთდამაკავშირებელი ლოგიკა, თითოეული კლასისთვის მისი დანიშნულების გათვალისწინებით განისაზღვრა შესაბამისი ცვლადები, კონსტრუქტორები და მეთოდები;
- აიგო ალგორითმი, დაიტესტა დაწერილი პროგრამული კოდი;
- განხორციელდა მიღებული შედეგების ანალიზი.

ქვემოთ წარმოდგენილია ზუსტ და მიახლოებით ფუნქციებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და პროგრამის მიერ დახარჯული დრო წამებში ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემით დათვლილ ტესტურ ექსპერიმენტში.

t	დრო წამებში	ცდომილება U ფუნქციისთვის
0.2	0.274000	0.00010842385853721551
0.4	0.483000	0.00038951627884258131
0.6	0.683000	0.00037023791408955767
0.8	0.872000	0.00008673135778793728
1.0	1.079000	0.00000000000000713858

t	დრო წამებში	ცდომილება V_1 ფუნქციისთვის
0.2	0.274000	0.0000286637100943507
0.4	0.483000	0.0000217683842285105
0.6	0.683000	0.0000179778858910805
0.8	0.872000	0.0000372260948910963
1.0	1.079000	0.0000797580445488499

t	დრო წამებში	ცდომილება V_2 ფუნქციისთვის
0.2	0.274000	0.00000016589258744482
0.4	0.483000	0.00000121995095070382
0.6	0.683000	0.00000515877373530316
0.8	0.872000	0.00000910660812003528
1.0	1.079000	0.00000952916303376128

ასევე წარმოდგენილია ზუსტ და მიახლოებით ფუნქციებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა მნიშვნელობები-სათვის და პროგრამის მიერ დახარჯული დრო წამებში გასაშუალებული მეთოდით დათვლილ ტესტურ ექსპერიმენტში.

t	დრო წამებში	ცდომილება U ფუნქციისთვის
0.2	0.224000	0.00091442740483927483
0.4	0.402000	0.00078163405180922446
0.6	0.584000	0.00056633397499628870
0.8	0.766000	0.00060341097809001141
1.0	0.938000	0.00000000000000325628

t	დრო წამებში	ცდომილება V_1 ფუნქციისთვის
0.2	0.224000	0.00023860025346259623
0.4	0.402000	0.00054273663029244903
0.6	0.584000	0.00092074937725837808
0.8	0.766000	0.00138279238372147808
1.0	0.938000	0.00193893634968879858

t	დრო წამებში	ცდომილება V_2 ფუნქციისთვის
0.2	0.224000	0.00002333039147702775
0.4	0.402000	0.00005301652662963191
0.6	0.584000	0.00002978406392209638
0.8	0.766000	0.00003444206522051065
1.0	0.938000	0.00008768830847336419

რიცხვით ექსპერიმენტებზე დაკვირვება იძლევა საშუალებას დავასკვნათ, რომ გასაშუალებული მეთოდი შედარებით სწრაფად რეალიზებადია ვიდრე ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა. აღნიშნული ფაქტი მოსალოდნელიც იყო, რად-განაც გასაშუალებული მოდელის ალგორითმის რეალიზაციის პროცესში ახალ შრეზე მონაცემების დათვლა მიმდინარეობს პარალელურად, ხოლო ცვალებადი მიმართუ-ლების სხვაობიანი სქემაში მიმდევრობით, ასევე ოპერაციათა რიცხვი გასაშუა-ლებული მოდელის სქემის შემთხვევაში უფრო ნაკლებია ვიდრე ცვალებადი მიმარ-თულების სხვაობიან სქემაში. ცხრილებში წარმოდგენილ მონაცემებზე დაკვირვებით ჩანს, რომ შრეების წერტილების რაოდენობის ზრდასთან ერთად გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი ალგორითმის რეალიზაცია უფრო სწრაფად მიმდინარეობს.

დისერტაციაში აღწერილი ორივე მეთოდისთვის ერთიდაიგივე შრეზე აღე-ბული ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობებს შორის მაქსიმუმების შედარებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა იძლევა შედარებით მეტ სიზუსტეს ვიდრე გასაშუალებული მოდელის შე-საბამისი სხვაობიანი სქემა. აღნიშნული შედეგი გამოწვეულია სხვაობიანი სქემების ბუნებიდან გამომდინარე, ცვალებადი მიმართულების სხვაობიან სქემაში U ფუნ-ქციის გამოთვლის პროცესში მიღებული განტოლებები ორგანზომილებიანია, ხოლო გასაშუალებულ მოდელში მიღებული U ფუნქციის გამოთვლა დაიყვანება ერთგან-ზომილებიან განტოლებებზე.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში:

1. Jangveladze T., Nikolishvili M., Tabatadze B. On one nonlinear two-dimensional diffusion system. Recent Researches in Appl. Math., 15th WSEAS Int. Conf. Appl. Math. (MATH '10), 2010, p. 105–108.

2. Nikolishvili M., Tabatadze B. Some properties of solution and variable directions difference scheme for one system of nonlinear three-dimensional partial differential equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2014, V. 28, p. 78–81.

3. Nikolishvili M., Tabatadze B. Parabolic regularization of one-dimensional analog of one nonlinear biological model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math., 2015, V. 29, p. 95–98.

4. Tabatadze B. On the numerical solution of two-dimensional mitchison nonlinear model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math., 2017, V.31, p.131-134.

5. Kiguradze Z., Tabatadze B. On a numerical solution of two-dimensional nonlinear Mitchison model. Mem. Differential Equations Math. Phys., 2018, V. 73, p. 93-100.

Sukhumi State University

Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy

With the right of manuscript

Besiki Tabatadze

Numerical Aproximate Solution Of Some Nonlinear Diffusion Systems

Submitted for the degree of PhD in Mathematics

Author's Abstract

Tbilisi, 2019

Tbilisi, 2019

Scientific advisers:	**Temur Jangveladze** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor at Georgian Technical University, Main Scientific Researcher at Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University **Temur Chilachava** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor at Sukhumi State University.
Consultant	**Zurab Kighuradze** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associated Professor at Georgian Technical University, Associated Researcher and Professor at Missouri University of Science and Technology (USA)
Experts:	**Romeo Galdava** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor at Sukhumi State University. **Gia Lobjanidze** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Professor at Caucasian University.
Official Reviewers:	**Marina Menteshashvili** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor at Sukhumi State University. **Jemal Rogava** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor at Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Sinior Scientific Researcher at Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Dissertation will be presented at 16 January, 2020 at 14:00 at the session of the Dissertation Council of the Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy of the LEPL Sokhumi State University
Address: 26 Ana Politkovskaya Str., VII floor, 712 Presentation Room

Scientific Secretary of Dissertation Board,
Associated Professor Tsiala Dzidziguri

General Description of the Work

Actuality of the Topic

Nonlinear partial differential equations are one of the important ways in mathematical modeling that help in describing many different real processes. In most cases, it is impossible to have an exact solution of the given problem but an approximate solution can be found and this requires deep knowledge of the methods of computational mathematics. It should be noted that each problem according to its specifics represents the topic to be studied separately. On the first stage, the given problem is evaluated and an effective algorithm for finding the solution is selected. On this stage, theoretical conclusions are made. More specifically, whether it is possible to apply any numerical algorithm to the problem, whether the task has a solution and if it is the only one, whether the solution is stable to initial values, what kind of error should we expect in case of the approximate solution and what is the rate of the error. The next stage includes the computational realization of the selected algorithm which in turn requires deep knowledge of the programming aspects. On this stage, technology must be selected that will be effective for building algorithms. During the computational process error accumulated by computer must be taken into account. On the next stage, the given results are evaluated and analyzed, examined to determine how close is the exact solution of the problem to the approximate one. On this stage, different calculations are performed and it is examined what kind of results does the realized algorithm has in case of simple, average or complex tests, whether the data found during practical realization agree with the theoretical results.

Using the nonlinear partial differential equations it is possible to describe different biological processes. One of such biological processes is the vein formation in leaves. One of the mathematical models describing the abovementioned process was proposed by English scientist J. Mitchison and it is represented as a nonlinear two-dimensional partial differential system.

In the mathematical model described in Mitchison's work, the signal of vein formation in leaves is transferred between cells by diffusion. By the mathematical model is described the vein formation, which is based on the results of different experiments. After taking notations in Mitchison's work into account the mathematical model has the following general form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(D_1 \frac{\partial S}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(D_2 \frac{\partial S}{\partial x_2}\right), \\ \frac{\partial D_1}{\partial t} &= f\left(D_1, D_1 \frac{\partial S}{\partial x_1}\right), \\ \frac{\partial D_2}{\partial t} &= f\left(D_2, D_2 \frac{\partial S}{\partial x_2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

Where $S(t, x_1, x_2)$ is concentration of signal, D_1 and D_2 and coefficients of diffusion correspondingly along OX_1 and OX_2 axes. The abovementioned mathematical model describes a case when external factors don't contribute to vein formation, there is no disfiguring, splitting or breaking of tissues.

It should be noted that studying this mathematical model is interesting not only from the perspective of biology and mathematics but the solution of (1) system is based on using numerical methods and optimal algorithms which in turn requires deep knowledge of information technologies, especially programming. Realization of relevant algorithms and getting results is one of the interesting topics in programming.

The Object and Purpose of the Study

The purpose of the dissertation thesis is an approximate solution of one nonlinear two-dimensional partial differential system of biological model.

In the following version of the (1) biological model proposed by Mitchison in the domain $Q = \Omega \times (0, T)$ where $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, an initial boundary value problem is considered:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(V_1 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{x}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(V_2 \frac{\partial U}{\partial \mathrm{y}}\right), \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} &= -V_1 + g_1\left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} &= -V_2 + g_2\left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y}\right), \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered} U(x,0,t) = U(x,1,t) = U(0,y,t) = U(1,y,t) = 0, \\ U(x,y,0) = U_0(x,y), \\ V_1(x,y,0) = V_{10}(x,y),\ V_2(x,y,0) = V_{20}(x,y), \end{gathered} \qquad (4)$$

For building an approximate solution of (2) – (4) problems two different approaches are considered. Both belong to the so called decomposition methods group. The first approach is a decomposition method based on variable directions difference scheme and the second approach is based on averaged model. Some theoretical research have been conducted for them using mathematical apparatus. Difference schemes for both approaches have been built and necessary algorithms for their realization have been described. Relevant software have been created for realization of the resulted algorithms and numerical experiments have been conducted for relevant tests.

Scientific Novelty and Main Results

Finding an economical algorithm in numerical methods that allows solving the presented problem with desired accuracy, also minimizing computer time of algorithm realization is important.

In this dissertation thesis the uniqueness of the solution of (2) – (4) nonlinear two-dimensional partial differential problems is studied considering the source term. To find an approximate solution of (2) – (4) problem, a decomposition method based on variable directions difference scheme is used, stability and convergence of the scheme is analyzed.

For find a solution of (2) – (4) problem, a difference scheme relevant to averaged model was built and its convergence was analyzed. In the concluding part numerical experiments are conducted based on which the approximate solutions derived using the abovementioned two methods were compared.

New software was written and it was used for practical realization of relevant algorithms. Programing language C++ was selected as programming environment. During the process of programming the principles and approaches of programming focussed on objective was considered. For symbolic computation of functions and visual representation of data modern softwares designed for processing mathematical symbolic packages MATLAB, MATHCAD were used.

Conducted work and resulted data that were carried out in computational mathematics to get an approximate solution of (2) – (4) nonlinear two-dimensional partial differential problems is an interesting and important novelties.

Approbation of the Work

Familiarizing with main results presented in the dissertation thesis was implemented on republican and international scientific conferences: Enlarged Sessions of Seminars of Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Tbilisi State University (in 2011, 2012, 2015, 2017), 5^{th} Conference of Mathematicians of Georgia (Batumi, 2013). Results have also been presented on the 15^{th} international conference of WSEAS that was held in the capital of Greece, Athens in December 29-31, 2010. With regard to dissertation topic doctoral students earned grant in 2016 and it was successfully finished in 2017. Results obtained in terms of the grant were presented to scientific community on the 5^{th} international conference in biotechnology and bioengineering that was held in the capital of Thailand, Bangkok on December 8-10, 2016.

The Volume and Structure of the Dissertation

The dissertation thesis contains 110 printed pages. It consists of introduction, theoretical context of the research, three chapters, conclusion and list of used literature.

Summary of the work

In the **introduction** relevance of the topic studied in dissertation thesis is discussed. Literature review is given, purpose of the dissertation thesis is described, main results and summary of the thesis is given. In theoretical context of the research main theoretical aspects used in dissertation thesis are described.

In the dissertation thesis research is conducted about numerical methods to obtain an approximate solution of (2) – (4) system. While studying the methods in $\bar{Q}$ domain the following grids are introduced:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \ \bar{\omega}_{\alpha h\tau} = \bar{\omega}_{\alpha h} \times \omega_\tau, \ \alpha = 1,2,$$

where

$$\bar{\omega}_h = \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \qquad i,j = 0,1,\dots,M, \ \ Mh = 1\},$$

$$\bar{\omega}_{1h} = \{(x_i, y_j) = ((i-1/2)h, jh), \qquad i,j = 1,\dots,M, \ \ Mh = 1\},$$

$$\bar{\omega}_{2h} = \{(x_i, y_j) = (ih, (j-1/2)h), \qquad i,j = 1,\dots,M, \ \ Mh = 1\},$$

$$\omega_h = \Omega \cap \bar{\omega}_h, \qquad \gamma_h = \bar{\omega}_h / \omega_h, \qquad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau, \ \ k = 0,\dots,N, \ \ N\tau = T\}.$$

For difference schemes the following well-known notations are used:

$$u = u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k), \qquad \hat{u} = u_{i,j}^{k+1} = u(x_i, y_j, t_{k+1}),$$

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \qquad u_{\bar{x}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h}, \qquad u_{\bar{y}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h},$$

$$u_x = \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h}, \qquad u_y = \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h},$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2}, \qquad u_{\bar{y}y} = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}.$$

Finite differences $\bar{\omega}_{\alpha h}$, $\alpha = 1,2$ for the functions presented in grids are defined in the same way.

In the **first chapter** the uniqueness of the solution of (2) – (4) problem is studied considering the source term. For (2) – (4) problem, a decomposition method based on variable directions difference scheme is also discussed and stability and convergence of the scheme is analyzed.

For (2) - (4) problem a variable directions difference scheme is built:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + \left(v_2 u_{2\bar{y}}\right)_y,$$
$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + \left(\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}}\right)_y, \tag{5}$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}),$$
$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2\left(v_2 u_{2y}\right), \tag{6}$$

$$u_1(x,y,0) = u_2(x,y,0) = U_0(x,y), \ \ (x,y) \in \bar{\omega}_h,$$
$$v_1(x,y,0) = V_{10}(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_{1h},$$
$$v_2(x,y,0) = V_{20}(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_{2h}, \tag{7}$$
$$u_1(x,y,t) = u_2(x,y,t) = 0, \ \ (x,y,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau.$$

To find an approximate solution on a new layer system of equations in scheme (5) – (7) is solved in sequence v_1 then u_1, after that solved v_2 and finally using the already found solutions we solved u_2. The final approximate solutions for the target layer are v_1, v_2, u_2. After moving to a new layer initial conditions are defined from the previous layer.

The following proposition is true: If (2) - (4) partial differential system has sufficiently smooth solution U, V_1, V_2, there (5) - (7) scheme is absolutely stable towards initial conditions and it is convergent.

In the **second chapter** the averaged model for (2) - (4) problem is discussed which is one of the important method of creating economical algorithm. The concept of the abovementioned method is finding an approximate solution of the system after reducing multi-dimensional problem to one-dimensional ones. After approximately solving one-dimensional problems the final multi-dimensional solution is created by composing the resulted solutions.

Let $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Introducing grid on $[0,T]$ segment: $\omega_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j = 0, \dots, N;\ \ \tau = \frac{T}{N}\right\}$ and for every $\Delta_k = [k\tau,\ (k+1)\tau]$ interval let us discuss U_i^k და V_i^k $(i = 1,2)$ functions that are solutions for the following averaged additive models:

$$\eta_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x}\right),$$

$$\eta_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y}\right), \tag{8}$$

$$\frac{\partial V_1^k}{\partial t} = -V_1^k + g_1\left(V_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial x}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = -V_2^k + g_2\left(V_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial y}\right),$$

$$U_1^k\big|_{x=0} = U_1^k\big|_{x=1} = 0,$$

$$U_2^k\big|_{y=0} = U_2^k\big|_{y=1} = 0,\ U_i^0(x,0) = U_0(x)\,,$$

$$U_i^k(x,y,t_k) = U^{k-1}(x,y,t_k), \tag{10}$$

$$V_i^k(x,y,t_k) = V_i^{k-1}(x,y,t_k)\,.$$

$$i = 1,2.$$

The following proposition is true: The solution $\left(U^k, V_1^k, V_2^k\right)$ of (8) - (10) problem is convergent towards the solution (U, V_1, V_2) of (2) - (4) problem.

For the averaged model a relevant σ weighted difference scheme is built:

$$u_{1t} = \sigma_1(\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (1-\sigma_1)(v_1 u_{1\bar{x}})_x,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \tag{11}$$

$$u_{2t} = \sigma_2\left(\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}}\right)_y + (1-\sigma_2)\left(v_2 u_{2\bar{y}}\right)_y,$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2\left(v_2 u_{2\bar{y}}\right), \tag{12}$$

$$u_1(x,y,0) = u_2(x,y,0) = U_0(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x,y,0) = V_{10}(x,y), (x,y) \in \bar{\omega}_{1h},$$

$$v_2(x,y,0) = V_{20}(x,y), \quad (x,y) \in \bar{\omega}_{2h}, \tag{13}$$

$$u_1(x,y,t) = u_2(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

In order to find approximate solutions for points in $t = t_k$ layer in (11) - (13) scheme we simultaneously find (u_1, v_1) and (u_2, v_2) approximate solutions in these points. The final approximate solution for the target layer is v_1, v_2, u where $u = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$, $\eta_1 \eta_2 > 0$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$. After moving to a new layer initial conditions for v_1 and v_2 functions are defined using solutions for the previous layer and initial condition for u_1 and u_2 functions is the u function that was derived in the previous layer. This method is a parallel type decomposition method because for finding u function the process of finding u_1 and u_2 functions derived by decomposition of the problem is being carried out simultaneously.

An important and integral part of numerical methods is the process of realization of algorithms corresponding to different schemes. Construct a computer program based on the corresponding algorithm, presenting and analyzing the numerical results obtained.

The third chapter is describing and presenting the results of realization of algorithms relevant to theoretical research. It includes the results and comparative analysis of the numerical experiments relevant to decomposition method and averaged model based on variable directions difference scheme used to derive an approximate solution of (2) – (4) nonlinear two-dimensional partial differential problem. Algorithm created by difference schemes and relevant computer realization process is described. Realization of algorithms is discussed based on relevant tests. For deriving numerical data a console software was written using C++ programming language. During writing the software recommendations for working on software was taken into account, principles of object-oriented programming and major elements of optimal programming were used. In each file of the program the code comes with comments written in the Georgian language which allows users to get familiar with purpose and using specifics of each class and their methods. Results of the conducted numerical experiments are presented in the dissertation thesis in a graphic form.

Examination of the algorithm presented in numerical methods can be carried out using different parameters but usually two important factors are examined: Computer time spent on executing the algorithm which allows us to discuss efficient performance of the algorithm and second – accuracy of the conducted numerical experiments. Comparison of the algorithms presented in the abovementioned methods was carried out in the same computer considering two factors for the same test.

- **Time factor**. The time that software need to process the data for each method.
- **Accuracy factor of numerical experiments**. An approximate solution of the studied problem must surely be close to the real solution with the highest accuracy. For comparing accuracy, differences between exact and approximate solutions are calculated in the program, for the both abovementiond methods maximum values of differences are selected for the same points and are compared to each other.

For realization of the algorithm defined in the process of finding an approximate solution of partial differential equations presented in the dissertation the following work was coherently conducted:

- On the initial stage ways to create the algorithm relevant to the difference scheme were determined, necessary technology for realization of the algorithm was defined;
- In order to verify software result, practical tests relevant to the studied problem and functions that satisfy the initial boundary conditions were selected;
- After selecting the tests relevant right sides were determined. Since the problem is a system that includes two-dimensional partial derivatives, after differentiating the functions defined in relevant tests the resulted expression in some cases is rather long (the right side). For defining the right side symbolic mathematical packages are used;
- After deriving the right side it was transferred in programming environment following C++ programming language syntax;

- On the next stage following object-oriented programming principles the necessary classes for creating software were determined;
- Logic for interconnecting classes was defined, relevant variables, constructors and methods were determined for each class based on their purpose;
- Algorithm was created, written software code was tested;
- Resulted data were analyzed.

Bellow there are maximums of absolute values of differences between exact and approximate functions for different time values and time spent by software in seconds in test experiments calculated by variable directions difference scheme.

t	**Time in seconds**	**Error for U function**
0.2	0.274000	0.00010842385853721551
0.4	0.483000	0.00038951627884258131
0.6	0.683000	0.00037023791408955767
0.8	0.872000	0.00008673135778793728
1.0	1.079000	0.00000000000000713858

t	**Time in seconds**	**Error for V_1 function**
0.2	0.274000	0.0000286637100943507
0.4	0.483000	0.0000217683842285105
0.6	0.683000	0.0000179778858910805
0.8	0.872000	0.0000372260948910963
1.0	1.079000	0.0000797580445488499

t	Time in seconds	Error for V_2 function
0.2	0.274000	0.00000016589258744482
0.4	0.483000	0.00000121995095070382
0.6	0.683000	0.00000515877373530316
0.8	0.872000	0.00000910660812003528
1.0	1.079000	0.00000952916303376128

Maximums of absolute values of differences between exact and approximate functions for different time values and time spent by software in seconds in test experiments calculated by averaged method are also presented.

t	Time in seconds	Error for U function
0.2	0.224000	0.00091442740483927483
0.4	0.402000	0.00078163405180922446
0.6	0.584000	0.00056633397499628870
0.8	0.766000	0.00060341097809001141
1.0	0.938000	0.00000000000000325628

t	Time in seconds	Error for V_1 function
0.2	0.224000	0.00023860025346259623
0.4	0.402000	0.00054273663029244903
0.6	0.584000	0.00092074937725837808
0.8	0.766000	0.00138279238372147808
1.0	0.938000	0.00193893634968879858

t	Time in seconds	Error for V_2 function
0.2	0.224000	0.000023330391477027 75
0.4	0.402000	0.0000530165266296319 1
0.6	0.584000	0.0000297840639220963 8
0.8	0.766000	0.0000344420652205106 5
1.0	0.938000	0.0000876883084733641 9

Numerical experiments allows us to conclude that averaged method can be realized relatively faster than the variable directions difference scheme. This fact was expected since during the process of realization of the averaged model algorithm computing data on a new layer goes in parallel and in variable directions difference scheme it is sequential. The number of operations is also less in the case of the averaged model scheme than in variable directions difference scheme. Based on the data presented in tables it is evident that by increasing the number of layers realization of the averaged model algorithm goes faster.

By comparing the maximums of differences between exact and approximate solutions on the same layer for both methods mentioned in the dissertation thesis we can conclude that the variable directions difference scheme allows relaitvely more accuracy than the relevant averaged model difference scheme. The reason behind this result is the nature of difference schemes – in variable directions difference scheme the equations we get during the process of computing the U function are two-dimensional and in averaged model computing the resulted U function is reduced only one-dimensional equations.

The main results of the thesis are given in the following publications:

1. Jangveladze T., Nikolishvili M., Tabatadze B. On one nonlinear two-dimensional diffusion system. Recent Researches in Appl. Math., 15th WSEAS Int. Conf. Appl. Math. (MATH '10), 2010, p. 105–108.

2. Nikolishvili M., Tabatadze B. Some properties of solution and variable directions difference scheme for one system of nonlinear three-dimensional partial differential equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2014, V. 28, p. 78–81.

3. Nikolishvili M., Tabatadze B. Parabolic regularization of one-dimensional analog of one nonlinear biological model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math., 2015, V. 29, p. 95–98.

4. Tabatadze B. On the numerical solution of two-dimensional mitchison nonlinear model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math., 2017, V.31, p.131-134.

5. Kiguradze Z., Tabatadze B. On a numerical solution of two-dimensional nonlinear Mitchison model. Mem. Differential Equations Math. Phys., 2018, V. 73, p. 93-100.