

სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საზუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის
ფაკულტეტი

ბესიკი ტაბატაძე

ზოგიერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემის მიახლოებითი
ამოხსნა

*მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი*

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

კონსულტანტი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,
ასოცირებული პროფესორი ზურაბ კილურაძე

თბილისი 2019

ანოტაცია. გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთ ძირითად მიზანს წარმოადგენს დისერტაციაში განხილული ამოცანებისთვის მათემატიკური მოდელების აგება, ჩამოყალიბებული დიფერენციალური ამოცანის შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების მოფიქრება, თეორიული კვლევა, გამოთვლითი ექსპერიმენტების ჩატარება და მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი. მათემატიკურ მოდელირებაში მნიშვნელოვან მიმართულებას წარმოადგენს კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების თუ განტოლებათა სისტემების საშუალებით აღწერილი ამოცანების რიცხვითი ამონახსნების პოვნა და შესაბამისი დასკვნების გაკეთება. დისერტაციის ფარგლებში განხილულია მცენარეთა ფოთლებში ძარღვოვანი სისტემის განვითარების დიფუზიური პროცესების აღმწერი ორგანოზომილებიანი კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის გამოკვლევისა და რიცხვითი ამონახსნის საკითხები. კერძოდ, ორგანოზომილებიანი არაწრფივი განტოლებათა სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ნაჩვენებია ამონახსნის ერთადერთობა. მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოყენებულია ორი განსხვავებული მიდგომა. ორივე მათგანი მიეკუთვნება ე.წ. დეკომპოზიციური მეთოდების ჯგუფს. მათთვის შესაბამისი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით ჩატარებულია ზოგიერთი თეორიული კვლევა. აგებულია ორივე მიდგომის შესაბამისი სხვაობიანი სქემები და აღწერილია მათი რეალიზაციისთვის საჭირო ალგორითმები. მიღებული ალგორითმების რეალიზაციისთვის შედგენილია შესაბამისი პროგრამული კოდები და სხვადასხვა ტესტისთვის ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. მიღებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილებისა და გრაფიკების სახით. ჩატარებულია ამ შედეგების შედარებითი ანალიზი და გაკეთებულია სათანადო დასკვნები.

Sokhumi State University

Faculty of Natural Sciences, Mathematics, Technology and Pharmacy

Besiki Tabatadze

**Numerical Aproximate Solution Of Some Nonlinear Diffusion
Systems**

Submitted for the degree of PhD in Mathematics

DISERTATION

Scientific advisers:

Doctor of Physics and Mathematics,

Professor **Temur Jangveladze**

Doctor of Physics and Mathematics,

Professor **Temur Chilachava**

Consultant

PhD Physics and Mathematics,

Associate professor **Zurab Kiguradze**

Tbilisi 2019

Abstract. One of the main goals of applied mathematics is to construct a mathematical model for problems considered in the dissertation, the study of the formulated differential problem, come up with the corresponding discrete analogs, theoretical research, carrying out of the numerical experiments and to analyze obtained results. To find the approximate solutions and making relevant decisions to the problems described by partial differential equations and by systems of such equations are an important direction in mathematical modeling. The present work concerns the questions of investigation and numerical solution of non-linear two-dimensional partial differential equations that describe the diffusion processes of vein development in plant leaves. In particular, the uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for the system of non-linear two-dimensional equations is shown. In order to obtain an approximate solution, two different approaches are used. Both of them belong to the so-called decomposition method group. Some theoretical researches are carried out for them by applying special mathematical apparatus. Difference schemes for both approaches were built and the algorithms for their realization are described. For the realization of the constructed algorithms, the relevant program codes have been developed; many numerical experiments have been fulfilled for various test examples. The results are presented in tables and charts. The comparative analysis of these results has been carried out and relevant conclusions were made.

განსაკუთრებულ მადლობას ვუხდით დისერტაციის სამეცნიერო ხელმძღვანელს პროფესორ თემურ ჯანგველაძეს დისერტაციის დამუშავების პროცესში გაწეული კონსულტაციებისა და თანადგომისთვის. ასევე გამოვახატავ მადლიერების გრძნობას სამეცნიერო ხელმძღვანელის სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადოქტორო პროგრამა გამოყენებითი მათემატიკის ხელმძღვანელის პროფესორ თემურ ჩილაჩავას მიმართ. მადლობას ვუხდით ასოცირებულ პროფესორ ზურაბ კილურაძეს აქტიური კონსულტაციების, გამოჩენილი მხარდაჭერისა და დახმარებისთვის. აუცილებლად მინდა აღვნიშნო სოხუმის უნივერსიტეტის ინფორმატიკის სადოქტორო პროგრამის პირველი კურსდამთავრებულის მიხეილ გაგომიძის დაუზარელი და მნიშვნელოვანი კონსულტაციები ალგორითმების კომპიუტერული რეალიზაციის პროცესში.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი	2
ნაშრომის სტრუქტურა და კვლევის თეორიული კონტექსტი	14
თავი I - დეკომპოზიციური ცვალებადი მიმართულების სხვაობიან სქემაზე დაფუძნებული მეთოდი	28
§ 1.1. ამოცანის დასმა	28
§ 1.2. ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ	30
§ 1.3. დეკომპოზიციური მოდელის შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა	32
§ 1.4. დეკომპოზიციური მოდელის შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის მდგრადობა	34
§ 1.5. დეკომპოზიციური მოდელის ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის კრებადობა	37
თავი II - დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელი	44
§ 2.1. ამოცანის დასმა	45
§ 2.2. დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელის კრებადობა	46
§ 2.3. დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა	49
თავი III - ალგორითმების რეალიზაცია და შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების ანალიზი	51
§ 3.1. ალგორითმების რეალიზაციის მნიშვნელოვანი ასპექტები	51
§ 3.2. დეკომპოზიციური ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემაზე დაფუძნებული მოდელის შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები	60
§ 3.3. დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები	73
§ 3.4. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების შედარებითი ანალიზი	86
დასკვნა	93
ლიტერატურა	95

შესავალი

სამყაროს ფორმირება რთული და მრავალმხრივი პროცესია, მისი შექმნა და განვითარება შორეული წარსულიდან იწყება, დღესაც გრძელდება და მომავალშიც მრავალი საინტერესო პროცესია მოსალოდნელი. სამყაროს ფორმირების ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია დედამიწაზე მიმდინარე პროცესები, რომლებიც თავის მხრივ მრავალ საინტერესო, რთულ და ზოგიერთ შემთხვევაში ამოუცნობ ბუნებრივ მოვლენებს აერთიანებს. ბუნებრივ პროცესებზე დაკვირვება, ექსპერიმენტების და შესაბამისი ანალიზის ჩატარება აქტუალურია და მეცნიერების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან და საინტერესო სფეროს წარმოადგენს. თანამედროვე ტექნოლოგიების სწრაფი განვითარების მიუხედავად უამრავი პროცესის სრულყოფილი გამოკვლევა და შესაბამისი გამართული, უტყუარი შედეგების მიღება ვერ ხერხდება.

დღეისთვის მრავალი მეცნიერის ინტერესის სფეროს წარმოადგენს ბუნებაში მიმდინარე პროცესები. ამ მიმართულებით ტარდება მრავალი ექსპერიმენტი, კეთდება მიღებული შედეგების მრავალმხრივი ანალიზი, რომლებზე დაყრდნობითაც შესაძლებელია ზოგიერთ ბუნებრივი მოვლენის საფუძვლიანი შესწავლა, ასევე შესაძლებელია აღწერილი იქნას მისი ყოფაქცევა და გაკეთდეს სავარაუდო პროგნოზი თუ როგორ განვითარდება სამომავლოდ ამ მოვლენასთან მიმართებაში რაიმე პროცესები.

ბუნებაში მიმდინარე პროცესებზე დაკვირვებასა და ანალიზის დროს ხშირად გამოიყენება მათემატიკური მეთოდები. დარგში ჩართული მეცნიერები აწარმოებენ მრავალმხრივ კვლევებს, რათა უფრო მეტად ჩასწვდნენ ამა თუ იმ ბუნებრივი მოვლენის არსს, ცდილობენ მათემატიკურად აღწერონ პროცესის მიმდინარეობა. ახდენენ მიმდინარე პროცესების დაკვირვებას და შესწავლას. ამ კუთხით მრავალი მეცნიერული ნაშრომი თუ კვლევა იწვევს ინტერესს. ზოგიერთ შემთხვევაში ბუნებრივი მოვლენების შესწავლა ხერხდება და მათი მიმდინარეობა ექვემდებარება მეცნიერების მიერ დადგენილ და აღმოჩენილ კანონზომიერებებს, რიგ შემთხვევაში კვლევის შედეგად პროცესების კონტროლიც კი არის შესაძლებელი. დაკვირვებებისა

და ექსპერიმენტების საფუძველზე მიღებული შედეგები ხშირად იღებს მათემატიკური მოდელის სახეს. რომელთა შესწავლა და შესაბამისი მათემატიკური დასკვნების გაკეთება საინტერესო და აქტუალურია.

მათემატიკური მოდელირება რთულ, საინტერესო და განვითარებულ მათემატიკის მიმართულებას წარმოადგენს. ადამიანის მოღვაწეობის თითქმის ყველა სფეროში გვხვდება ამა თუ იმ სახით სხვადასხვა მათემატიკური მოდელი, რომლებიც გარკვეული პირობების გათვალისწინებით აღწერენ რაიმე პროცესს. ასევე როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ზოგიერთ შემთხვევაში მათემატიკური მოდელის სახე შეიძლება მიიღოს ბუნებრივმა მოვლენებმაც. მათემატიკურ მოდელირებაში კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებები წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვა რეალური პროცესის აღწერა. ზოგიერთ შემთხვევაში მიიღება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომლის ზუსტი ამონახსნის პოვნა შეუძლებელია, ამიტომ საჭიროა მათი მიახლოებითი ამოხსნა. ხშირად მოსახერხებელია სხვაობიანი განტოლებებით მათი აპროქსიმაცია. აქტუალურია ასეთნაირად მიღებული სისტემების ამოხსნის ეფექტური მეთოდის შერჩევა და ისეთი ეკონომიური ალგორითმების მოძიება, რომლებიც მოითხოვენ ნაკლებ ოპერატიულ მეხსიერებას და მანქანურ დროს.

მათემატიკური მოდელირების თვალსაზრისით ერთ-ერთ საინტერესო დარგს წარმოადგენს ბიოლოგია. საინტერესოა როგორ ფორმირდება ბიოლოგიური პროცესები, ხომ არ არსებობს პროცესებში რაიმე კანონზომიერება. მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებით აღიწერება მრავალი რეალური ბიოლოგიური პროცესი. ერთ-ერთ ასეთ პროცესს წარმოადგენს მცენარეთა ფოთლებში ძარღვების ფორმირება, რომელიც აღიწერება ორგანზომილებიანი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებებით.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზუსტი ამონახსნის მიღება რიგ შემთხვევაში შეუძლებელია, ზოგიერთ შემთხვევაში ხერხდება განტოლებათა სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნა, რომელიც თავის მხრივ გამოთვლითი მათემატიკის მეთოდების სიღრმისეულ

ცოდნას მოითხოვს. უნდა აღინიშნოს, რომ თითოეული სისტემა თავისი სპეციფიკიდან გამომდინარე წარმოადგენს ცალკე შესწავლის საკითხს. საწყის ეტაპზე ხდება მოცემული სისტემის შეფასება და იმის გაანალიზება თუ რომელი ალგორითმი იქნება აღნიშნული სისტემისთვის ეფექტური, შესაბამისად ამ ეტაპზე ხდება თეორიული დასკვნების გაკეთება. კერძოდ, შესაძლებელია თუ არა რომელიმე რიცხვითი ალგორითმის მისადაგება სისტემისათვის, აქვს თუ არა სისტემას ამონახსნი და არის თუ არა ის ერთადერთი, არის თუ არა ამონახსნი საწყისი მნიშვნელობების მიმართ მდგრადი, რა ცდომილობას უნდა ველოდოთ სისტემის მიახლოებითი ამოხსნის შემთხვევაში, რა რიგისაა ცდომილება. შემდეგ ეტაპზე ხორციელდება არჩეული ალგორითმის კომპიუტერული რეალიზაცია, რომელიც თავის მხრივ მოიცავს რამდენიმე პროცედურის თანმიმდევრულ გავლას, ასევე პროგრამირების საკითხების სიღრმისეულ ცოდნას. აღნიშნულ ეტაპზე უნდა შეირჩეს ტექნოლოგია, რომელიც ალგორითმის აგებისთვის იქნება ეფექტური, გამოთვლების პროცესში გათვალისწინებული უნდა იყოს კომპიუტერის მიერ დაგროვების ცდომილების არსებობა. შემდეგ ეტაპზე ხორციელდება მიღებული შედეგების შეფასება და ანალიზი, წარმოებს დაკვირვება თუ რამდენად ახლოს დგას სისტემის ზუსტი ამონახსნი მიახლოებით ამონახსნთან, ამ ეტაპზე ხორციელდება სხვადასხვა ტიპის გათვლების ჩატარება და დაკვირვება თუ როგორ შედეგებს იძლევა რეალიზებული ალგორითმი მარტივი, საშუალო ან რთული ტესტების შემთხვევაში, რამდენად შესაბამისობაშია პრაქტიკული რეალიზაციის შედეგად მიღებული მონაცემები თეორიულ დასკვნებთან. მნიშვნელოვანია დასკვნით ნაწილში მიღებული მონაცემები თვალსაჩინოდ იყოს გამოსახული, რაც ითვალისწინებს შესაბამისი მონაცემების წარმოდგენას ცხრილების, დიაგრამების ან გრაფიკების სახით. შედეგებზე დაკვირვება ასევე ზოგიერთ შემთხვევაში იძლევა საშუალებას, რომ ვიფიქროთ არსებული ალგორითმის გაუმჯობესებაზე.

მცენარეთა ფოთლებში ძარღვოვანი სისტემის ფორმირების ერთ-ერთი მათემატიკური მოდელი შემოთავაზებული იქნა ინგლისელი მეცნიერის ჯ. მიჩისონის მიერ [83].

მცენარეთა ფოთლებში ძარღვების რეგენერაციაზე ექსპერიმენტი აჩვენებს, რომ გარკვეული ტიპის სიგნალი, რომელმაც შეიძლება გამოიწვიოს მცენარეში ძარღვების დიფერენციაცია, მიედინება მზარდ ქსოვილებში არსებული წყაროდან ფესვებისკენ.

დამტკიცებულია, სიგნალის გზის ტევადობა მზარდია. აქვე ნავარაუდებია, რომ ეს ზრდა შეიძლება გამოიწვიოს სიგნალის დინების არხმა, რომელშიც ფორმას იღებს ცალკეული თვისებები, რომლებიც შემდეგ მარღვებში განსხვავებულად არის წარმოჩენილი.

მიჩისონის ნაშრომში [83] აღწერილ მათემატიკური მოდელში მარტივ შემთხვევაში მარღვების ფორმირების სიგნალი უჯრედებს შორის გადაიცემა დიფუზიით. როგორც ექსპერიმენტებიდან ჩანს მარღვების ფორმირება ხორციელდება მოკლე დროში და ის დამოკიდებულია შესაბამისი დიფუზიის კონსტანტებსა და დინების კონცენტრაციაზე. მოდელის საშუალებით ხდება მარღვების ფორმირების აღწერა, რომელიც ეყრდნობა სხვადასხვა ექსპერიმენტების შედეგს. შესაძლებელია სიგნალის გავრცელების მოდელის გამოყენება ფოთლების გარკვეულ სეგმენტზე ან მცენარის სხვადასხვა კვანძების განვითარებებზე.

მარღვების ფორმირების შესახებ ინფორმაციის ძირითად წყაროს წარმოადგენს დაკვირვებები მარღვების აღდგენაზე და ექსპერიმენტები, რომელიც იწვევს მცენარეში მარღვების სტიმულირებას ჰორმონი აუქსინის (ნივთიერება, რომელიც გამოიყოფა მცენარეში ფესვებსა და ყლორტების წვეროებში და რომელიც მონაწილეობას იღებს მათი ზრდის პროცესში, სიტყვა აუქსინი არის ბერძნული წარმოშობის *αὔξω* და გაზრდას, გადიდებას ნიშნავს) საშუალებით. ორივე შემთხვევაში შეიძლება დავასკვნათ, რომ ახალი მარღვის ფორმირების სიგნალი ერთმანეთის იდენტურია. სხვადასხვა ექსპერიმენტის საფუძველზე დაკვირვებები იძლევა საშუალებას დავასკვნათ, რომ მარღვების განვითარების პროცესს ქმნის სიგნალის ნაკადი. თუ ძლიერდება უჯრედებს შორის ტრასპორტირების სიგნალი, მაშინ ნაკადი იზრდება და იგი სიგნალის გატარებას უკეთესად ახორციელებს, ამ შემთხვევაში მარღვების ფორმირებას აქვს ბუნებრივი ხასიათი.

ნაშრომში [83] ნაჩვენებია მარღვების ფორმირების ნაკადის შექმნის ზუსტი მათემატიკური ფორმულირება. უმარტივესი სახის მოდელში დაშვებულია, რომ უჯრედებს შორის დიფუზიური გავრცელების სიგნალი იზრდება ნაკადთან ერთად. მოყვანილია ახალგაზრდა ქსოვილებში მარღვების განვითარების სისტემის ფორმირება. მცენარის სხვა ნაწილებში, როგორებიცაა ღერო და ფესვი, შესაძლებელია მოდელმა სრულყოფილად ვერ აღწეროს პროცესი.

მიჩისონის ნაშრომში წარმოდგენილი მოდელის ამოსავალია უჯრედების მასივი. დაშვებულია, რომ სიგნალის დიფუზიურად გადაცემის პროცესში ბარიერები არის მხოლოდ გარსები ან სხვა სტრუქტურების სახეები, რომელიც მოთავსებულია ორ უჯრედს შორის. მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე [83]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(D_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(D_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial D_1}{\partial t} &= f \left(D_1, D_1 \frac{\partial S}{\partial x_1} \right), \\ \frac{\partial D_2}{\partial t} &= f \left(D_2, D_2 \frac{\partial S}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (0.1)$$

სადაც $S(t, x_1, x_2)$ სიგნალის კონცენტრაციაა, ხოლო D_1 და D_2 კი დიფუზიის კოეფიციენტებია, შესაბამისად OX_1 და OX_2 ღერძების გასწვრივ. აღნიშნული მათემატიკური მოდელი აღწერს შემთხვევას, როდესაც ძარღვების ფორმირების პროცესში არ მონაწილეობს გარე ფაქტორები, არ ხდება ქსოვილების დამახინჯება, დახლეჩვა ან წყვეტა.

წარმოდგენილი (0.1) მოდელი მოიცავს სამ უცნობ ფუნქციას. მათემატიკური თვალსაზრისით საინტერესოა როგორ აიგება უცნობი ფუნქციები სხვადასხვა საწყისი და სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში.

ნაკადში დიფუზიური მუდმივების ცვლილებების კონცეფციის აღმწერი (0.1) მათემატიკური მოდელის პარალელები მოიძებნება სხვადასხვა ფიზიკურ სისტემაში. მაგალითად, ცვლადი დენის გატარებამ გაზში შეიძლება გამოიწვიოს მისი გათბობა და იონიზაცია რაც ზღრის მის გამტარუნარიანობას. მსგავსი დიფუზიური პროცესები აღიწერება მრავალგანზომილებიანი არაწრფივი რთული განტოლებების სისტემებით და მათი რიცხვითი ამოხსნა საინტერესო კვლევის საგანია (იხ. მაგალითად, [6-9, 11-13, 15, 20, 25-28, 35-37, 40, 48, 49, 51, 53-54, 57, 60, 62, 63, 66 90] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული ციტირებები).

უნდა აღინიშნოს, რომ აღწერილი (0.1) მათემატიკური მოდელის შესწავლა არა მხოლოდ ბიოლოგიის და მათემატიკის თვალსაზრისით არის საინტერესო, არამედ

მოითხოვს ინფორმაციული ტექნოლოგიების ეფექტურ გამოყენებას. მოდელში აღწერილი სისტემის ამოხსნა ეფუძნება რიცხვითი მეთოდების და ოპტიმალური ალგორითმების გამოყენებას, რაც თავის მხრივ კავშირშია ინფორმაციული ტექნოლოგიების კერძოდ, პროგრამირების სიღრმისეულ ცოდნასთან, შესაბამისი ალგორითმების რეალიზაცია და შედეგების მიღება წარმოადგენს პროგრამირებაში ერთ-ერთ საინტერესო საკითხს.

(0.1) სისტემის შესწავლა საინტერესოა, რის გამოც აღნიშნული მოდელი სწრაფად მოექცა მრავალი მეცნიერის ყურადღების ცენტრში. ამერიკელმა მათემატიკოსებმა ჯ. ბელმა, ჩ. კოსნერმა და უ. ბერტიგერმა გამოიკვლიეს შესაბამისი შესაბამისი ერთგანზომილებიანი ანალოგი [8]. მათ მიერ განხილული იქნა შემდეგი ერთგანზომილებიანი ამოცანა შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო პირობებით:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in (0,1) \times (0, T], \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -d + g \left(d \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in [0,1] \times (0, T],$$

$$S(0, t) = 0, \quad d \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=1} = \psi, \quad t \in [0, T], \quad (0.3)$$

$$S(x, 0) = S_0(x); \quad d(x, 0) = d_0(x) \geq \delta_0 = \text{const} > 0, \quad x \in [0,1],$$

სადაც ψ დადებითი მუდმივია, ხოლო g , S_0 , d_0 - მოცემული საკმარისად გლუვი ფუნქციები. მათ მიერ დამტკიცებულ იქნა (0.2), (0.3) ამოცანის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები, რისთვისაც გამოიყენეს ცვლადთა გარდაქმნა და იტერაციული სქემა. კერძოდ, ახალი უცნობის შემოტანით

$$w(x, t) = d \frac{\partial S}{\partial x} \quad (0.4)$$

(0.2), (0.3) ამოცანიდან გვაქვს:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (x, t) \in (0,1) \times (0, T], \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -d + g(w), \quad (x, t) \in [0,1] \times (0, T],$$

$$w(x, 0) = w_0(x) = d_0 \frac{dS_0(x)}{dx}, \quad t \in [0, T], \quad (0.6)$$

$$d(x, 0) = d_0(x), \quad x \in [0, 1].$$

გარდაქმნის მიზანია მოვახდინოთ (0.5), (0.6) ამოცანის w და d ფუნქციებზე დაყვანა.

თუ (0.4) დამოკიდებულების ორივე მხარეს გავაწარმოებთ t ცვლადით ვღებულობთ

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial d}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial x} + d \frac{\partial s}{\partial x \partial t}. \quad (0.7)$$

(0.7) განტოლებაში შევიტანოთ (0.5) სისტემის მეორე განტოლების $\frac{\partial d}{\partial t}$ მნიშვნელობა და გავითვალისწინოთ (0.5) სისტემის პირველი განტოლება, შესაბამისად გვაქვს:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (-d + g(w)) \frac{\partial s}{\partial x} + d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (0.8)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{w}{d} = \frac{\partial s}{\partial x}$, მაშინ

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (-d + g(w)) \frac{w}{d} + d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (0.9)$$

საბოლოოდ ვღებულობთ შემდეგ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\frac{g(w)}{d} - 1 \right] w, \quad (0.10)$$

$$\frac{\partial d}{\partial t} = -d + g(w),$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad w(1, t) = \psi, \quad (0.11)$$

$$w(x, 0) = w_0(x) = d_0 \frac{dS_0(x)}{dx}, \quad d(x, 0) = d_0(x).$$

ნაშრომში [8] აგებული (0.10), (0.11)-ის შესაბამისი იტერაციული სქემაა:

$$\frac{\partial w^n}{\partial t} = d^{n-1} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \left[\frac{g(w^{n-1})}{d^{n-1}} - 1 \right] w^{n-1}, \quad (0.12)$$

$$\frac{\partial d^n}{\partial t} = -d^n + g(w^{n-1}),$$

$$\left. \frac{\partial w^n}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad w^n(1, t) = \psi, \quad (0.13)$$

$$w^n(x, 0) = w_0(x), \quad d^n(x, 0) = d_0(x).$$

(0.12), (0.13) ამოცანის შესაბამისი დისკრეტული სქემის ალგორითმი კომპიუტერზე ადვილად რეალიზებადია.

ნაშრომში [8] ასევე მიღებულია სტაციონალური ამონახსნის მდგრადობის საკმარისი პირობა სივრცის $L_2(0,1)$ ნორმის აზრით. ამ პირობას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{1}{\delta_0} \left[G_1 D_1 + \frac{\psi}{g(\psi)} \right] + \frac{G_1 \psi}{g'(\psi)} < 1,$$

სადაც G_1, D_1 დადებითი მუდმივებია.

იმავე ნაშრომში მითითებულია ისეთი ψ_c სიდიდის არსებობა, რომ თუ შესრულდება პირობა $0 < \psi < \psi_c$ ამონახსნი წრფივად მდგრადია, ხოლო თუ $\psi > \psi_c$, მაშინ ადგილი აქვს ჰოფის ბიფურკაციას [76].

(0.1) მათემატიკური მოდელის აქტუალობაზე და მის მიმართ ინტერესზე მეტყველებს მასზე დაფუძნებული ნაშრომების სიმრავლე (იხ. მაგალითად, [68, 69, 72, 75, 78, 79, 81, 85, 93, 95, 98, 100, 101, 105, 107-110, 112, 115, 122, 124]). მრავალი წელია მიმდინარეობს აღნიშნული მათემატიკური მოდელის კვლევა. ამ მოდელისა და მისი მრავალგანზომილებიანი ანალოგების შესწავლისთვის ძირითადად განიხილება გახლეჩის მეთოდები. (0.1) მათემატიკური მოდელის ერთგანზომილებიანი ანალოგის

შესწავლის ზოგიერთი საკითხი ასახულია დისერტაციის ავტორობით და თანაავტორობით შესრულებულ შემდეგ ნაშრომებში [58, 88, 117, 119]. აგებულია სხვაობიანი სქემები, შემუშავებულია მიღებული ალგორითმის რეალიზებისთვის საჭირო კომპიუტერული პროგრამა და მიღებული შედეგების საფუძველზე ჩატარებულია შესაბამისი ანალიზი.

(0.1) მათემატიკური მოდელის ერთგანზომილებიანი ანალოგისთვის განხილულია შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -V + g \left(V \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (0.14)$$

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in [0, 1].$$

ზემოთ ჩამოთვლილი ნაშრომების სიმრავლის მიუხედავად, რომლებიც დაკავშირებულია (0.1) მათემატიკური მოდელის კვლევასთან, აღნიშნული მოდელი არ კარგავს აქტუალობას მისი შინაარსისა და მასში აღწერილი მათემატიკური ამოცანების გამო. მოდელის თეორიული კვლევისას მიღებული ალგორითმების აგება და შესწავლა საინტერესოა.

(0.1) მათემატიკურ მოდელში დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა გარკვეული თანმიმდევრობით განსაზღვრული მოქმედებების ჩატარება, დასკვნით ნაწილში აუცილებელია მიღებული ალგორითმის სწორი, ოპტიმალური რეალიზაცია. ალგორითმების აგებისა და ოპტიმიზაციის საკითხების შესწავლას დიდი ხნის ისტორია აქვს (იხ. მაგალითად, [5, 61, 82]). კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლის პროცესში წარმოშობილი ალგორითმების კომპიუტერული რეალიზაციის საკითხები აქტუალურია (იხ. მაგალითად, [24, 38, 64]).

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების კვლევის აქტუალობაზე მეტყველებს მათემატიკაში გამოყენებულ ცნობილ პროგრამულ პაკეტებში ჩაშენებული სხვადასხვა დანიშნულების ინსტრუმენტი, რომელთა დახმარებითაც გა-

მარტივებულია ზოგიერთი ტიპის ამოცანის გადაწყვეტა. შეიძლება გამოიყოს რამოდენიმე განსაკუთრებით ძლიერი პროგრამული უზრუნველყოფა, რომლებიც გამოყენებულია დისერტაციაში დასმული ამოცანის კომპიუტერული რეალიზაციისა და მონაცემების წარმოდგენისთვის.

კომპიუტერული პროგრამა MATLAB წარმოადგენს კომპანია MathWorks -ის მიერ შექმნილ მათემატიკურ პაკეტს (<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>). პროგრამა შეიქმნა 70-იან წლებში ამერიკელი მეცნიერის კლივ მოულერის მიერ. ის თავდაპირველად ორიენტირებული იყო წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნის მეთოდების კომპიუტერულ რეალიზაციაზე. MATLAB-ის ბოლო განახლებულ პაკეტებში მომხარებლისთვის შექმნილია ინტერაქტიული გარემო, რომელიც ძირითადად ემსახურება სამეცნიერო ხასიათის პრობლემების და ამოცანების ფართო სპექტრის ამოხსნას. MATLAB განსაკუთრებით გამოირჩევა მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის ინსტრუმენტების მრავალფეროვანი არჩევანით. მასში მძლავრად არის წარმოდგენილი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნისთვის საჭირო სხვადასხვა დანიშნულების ინსტრუმენტი. MATLAB-ში ჩაშენებული ინსტრუმენტების გამოყენება ეფექტურია (იხ. მაგალითად, [70, 103]). დისერტაციის ფარგლებში MATLAB-ის პროგრამული პაკეტი გამოყენებულია სიმბოლური გამოთვლების საწარმოებლად და დიაგრამების ასაგებად.

კომპიუტერული პროგრამა MATHCAD წარმოადგენს კომპანია MathSoft-ის მიერ შექმნილი მათემატიკურ პაკეტს (<https://www.ptc.com/en/products/mathcad>). პროგრამას აქვს მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მრავალფეროვანი, ინტერაქტიული ინტერფეისის მქონე ინსტრუმენტები. მასში ინტეგრირებულია დაპროგრამებისთვის საჭირო გარემო. მარტივად არის შესაძლებელი როგორც ერთგანზომილებიანი, ასევე მრავალგანზომილებიანი სხვადასხვა გრაფიკის აგება და გაფორმება. პროგრამა შეიქმნა ალენ რეზდოუს მიერ 90-იან წლებში. პროგრამის საწყისი ვერსიები განკუთვნილი იყო ოპერაციული სისტემა WINDOWS-ისთვის. სამეცნიერო ნაშრომებში წარმოდგენილი მათემატიკური გათვლებისთვის MATHCAD-ის სხვადასხვა სახით გამოყენება სულ უფრო მეტად აქტუალურია მისი ინტერფეისის სიმარტივისა და მოქნილობის გამო (იხ. მაგალითად, [80, 99, 113]). დისერტაციის ფარგლებში MATHCAD გამოყენებულია

სიმბოლური გამოთვლების საწარმოებლად, ასევე მიღებული შედეგების გრაფიკული სახით წარმოდგენისთვის.

(0.1) მათემატიკური მოდელის რიცხვითი ამოხსნის პროცესში წარმოშობილი ალგორითმის შესწავლა საინტერესო და აქტუალურია მისი მრავალკომპონენტური ბუნების გამო. შესაბამისი ალგორითმის კომპიუტერული რეალიზაცია მოითხოვს დაპროგრამების ძირითადი პრინციპების ეფექტურ გამოყენებას. ტექნოლოგიების და კომპიუტერული ტექნიკის თანამედროვე განვითარება გვთავაზობს დაპროგრამების გარემოსა და პროგრამირების ენის არჩევის ფართო ასორტიმენტს. დისერტაციის ფარგლებში ალგორითმის კომპიუტერული რეალიზაცია შესრულებულია მაღალი დონის პროგრამირების ენა C++-ზე, ხოლო პროგრამის რეალიზაციის გარემოდ შერჩეულია ერთ-ერთი თანამედროვე ე.წ. Integrated Development Environment (IDE) კომპანია Microsoft-ის მიერ წარმოებული პროგრამული უზრუნველყოფა VISUAL STUDIO.

სამეცნიერო გამოთვლების წარმოების პროცესში პროგრამირების ენა C++-ს აქვს ფართო გამოყენება მისი სიზუსტისა და სისწრაფის გამო (იხ. მაგალითად, [10, 39, 67, 114]). დისერტაციის ფარგლებში პროგრამირების ენა C++-ის საშუალებით დაწერილია კონსოლური აპლიკაცია და აგებულია შესაბამისი ალგორითმი.

კომპიუტერული პროგრამის აგებისა და ტესტირებისთვის ერთ-ერთი მნიშვნელოვან წინაპირობას წარმოადგენს შესაბამისი სამუშაო გარემოს სწორი შერჩევა. კომპიუტერული ტექნიკის განვითარების სწრაფი განვითარების პარალელურად მსოფლიოს წამყვანი ტექნოლოგიური კომპანიები მომხარებელს სთავაზობს პროგრამების აგება/შემუშავების სხვადასხვა კომფორტულ, მომხარებელზე მორგებულ გარემოს. კომპიუტერული პროგრამის აგების პროცესი დაწყებული მისი დაგეგმვიდან ტესტირებამდე გადის სხვადასხვა ეტაპს. პროგრამის ეფექტური და სწრაფი შემუშავებისთვის მნიშვნელოვანია მოხერხებული სამუშაო გარემოს შერჩევა. დისერტაციის ფარგლებში კომპიუტერული პროგრამის შემუშავების სამუშაო გარემოდ შერჩეულია VISUAL STUDIO (<https://visualstudio.microsoft.com/>) [52], რადგანაც მასში ინტეგრირებულია პროგრამირების ენა C++ მძლავრი დახმარებისა და ტესტირების მოქნილი სისტემით.

სადისერტაციო ნაშრომში წარმოდგენილია მიჩისონის ორგანოზომილებიანი მათემატიკური მოდელის ამოხსნის ორი განსხვავებული მეთოდი, მეთოდების შესწავლის მიზნით განხორციელებულია ზოგიერთი თეორიული და პრაქტიკული კვლევები. შესწავლილია მეთოდების ეფექტურობის საკითხები. ერთმანეთთან შედარებულია შესაბამისი მეთოდებში აღწერილი ალგორითმების რეალიზაციით მიღებული შედეგები.

დისერტაციის ფარგლებში ჩატარებული კვლევის შედეგები გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [49, 58, 59, 89, 116]. მოხსენებები გაკეთებულია ადგილობრივ და საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე: თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების გაფართოებულ სხდომებზე [58, 88, 89, 116, 119], საქართველოს მათემატიკოსთა მეოთხე ყრილობაზე (ბათუმი, 2013) [117]. შედეგების ჩვენება ასევე განხორციელდა WSEAS-ის მე-15 საერთაშორისო კონფერენციაზე [49], საბერძნეთის დედაქალაქ ათენში 2010 წელს. დისერტაციის თემასთან დაკავშირებით 2016 წელს მოპოვებულია გრანტი (#PhDF2016_14) დოქტორანტებისთვის, რომელიც წარმატებით დასრულდა 2017 წელს. გრანტის ფარგლებში კვლევის ძირითადი შედეგები ასახულია ნაშრომებში [59, 116]. მიღებული შედეგების სამეცნიერო საზოგადოებისთვის გაცნობა განხორციელდა 2016 წლის 8-10 დეკემბერს მე-5 საერთაშორისო კონფერენციაზე ბიოტექნოლოგიებში და ბიოინჟინერიაში, რომელიც ჩატარდა ტაილანდის დედაქალაქ ბანგკოკში [118].

ნაშრომის სტრუქტურა და კვლევის თეორიული კონტექსტი

სადისერტაციო ნაშრომში აღწერილია მიჩისონის მიერ მიღებული (0.1) მათემატიკური მოდელის ამოხსნის ორი განსხვავებული მეთოდი, შესწავლილია ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა და გასაშუალებული მოდელი. აღნიშნული მეთოდებისთვის გამოკვლეულია ზოგიერთი თეორიული საკითხი, აგებულია შესაბამისი სხვაობიანი სქემები, ალგორითმების რეალიზაციისთვის დაწერილია პროგრამული კოდი და წარმოდგენილია რიცხვითი შედეგები.

სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია (0.1) მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (0.15)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (0.16)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

მიუხედავად იმ გარემოებისა, რომ ორგანოზომილებიან განტოლებათა (0.15), (0.16) სისტემას საფუძვლად უდევს ბიოლოგიური პროცესები, აღნიშნული განტოლებათა სისტემა ასევე საინტერესოა ფიზიკისა და სხვა მომიჯნავე დარგების სამეცნიერო მიმართულებებისთვისაც.

(0.15), (0.16) სისტემის ზოგიერთი ხარისხობრივი და სტრუქტურული თვისება დადგენილია [8, 43] ნაშრომებში. [8] ნაშრომში (0.15), (0.16) სისტემისთვის გამოკვლეულია შესაბამისი ერთგანზომილებიანი ანალოგი უცნობი U და V_1 ფუნქციისთვის. [8] და [84] ნაშრომებში ასევე ყურადღება გამახვილებულია (0.15), (0.16) სისტემის შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნების აგების მნიშვნელობაზე და გამოყენებაზე.

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი ნაწილი მოიცავს სამ თავს და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხას.

ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი მეთოდების გამოყენების ეფექტურობის გათვალისწინებით სადისერტაციო ნაშრომის პირველ თავში (0.15), (0.16) სისტემისთვის განხილულია შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის შესწავლის თეორიული საკითხები. [2, 3, 43] ნაშრომებზე დაყრდნობით შესწავლილია აღნიშნული სისტემის შემთხვევაში როგორ შეიძლება იყოს გამოყენებული ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა.

პისმენის, რეკვორდის და დუგლასის შრომებიდან იწყება [16-19, 91], სხვაობიანი სქემების გამოყენება. აღნიშნული მიდგომის შესწავლა ფართოვდებოდა და ღრმავდებოდა სხვა მათემატიკოსების შრომებშიც. ამჟამად, ეს მეთოდი და მისი სხვა მრავალი ნაირსახეობა გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის სხვაობიანი სქემების ეფექტური აგებისთვის. თუმცა მოცემული მეთოდის გამოყენების და მისი შესწავლის დროს, ზოგ შემთხვევაში წარმოიქმნება გარკვეული სიძნელეები, დაკავშირებული მაგალითად, სქემის აბსოლუტურ მდგრადობასა და კრებადობასთან.

ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემები და მათი გამოკვლევა წარმოდგენილია მრავალი სხვადასხვა მეცნიერის ნაშრომში, აღნიშნული მიმართულებით მრავალი წელია მიმდინარეობს სამეცნიერო მუშაობა (იხ., მაგალითად, [23, 29-31, 43-45, 47-49, 56, 59]). მეთოდის ზოგიერთი ვარიანტებისთვის შესწავლილია შესაბამისი სქემების მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები.

ასეთი სხვაობიანი სქემების მეთოდის მნიშვნელოვან უპირატესობას წარმოადგენს აბსოლუტური მდგრადობა მრავალგანზომილებიანი ამოცანებისთვის, იგი განსაკუთრებით ეფექტურია რიცხვითი ამონახსნების მიღებისთვის.

ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის შესწავლისას [3] ნაშრომზე დაყრდნობით და მასში გამოყენებული აღნიშვნების გათვალისწინებით განვიხილოთ შემდეგი სახის მრავალგანზომილებიანი ამოცანა:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + f, \Omega_p \times \Omega_t, u(x, 0) = \varphi(x), \Omega_t = (0, T), x = (x_1, \dots, x_p), \quad (0.17)$$

Ω_p ($0 \leq x_a \leq l_a, a = 1, 2, \dots, p$) p -განზომილებიანი პარალელეპიპედი. γ -წარმოადგენს Ω_p არის საზღვარს.

დავუშვათ, რომ $A = \sum_{a=1}^p A_a$. A_a -შესაძლებელია განისაზღვროს ამოცანათა სხვადასხვა კლასისთვის.

შემოვიღოთ ბადე:

$$\begin{aligned}\omega_{h\tau} &= \omega_h \times \omega_\tau, \\ \omega_h &= \left\{ x_a^{(i_a)} = i_a h_a, a = 1, \dots, p, h_a = \frac{l_a}{N_a} \right\}, \\ \omega_\tau &= \{ t_j = j\tau, j = 1, \dots \},\end{aligned}$$

ამოვწეროთ შემდეგი თანაფარდობა:

$$u_{ht} = \sum_{a=1}^j \Lambda_a \hat{u}_h + \sum_{a=j+1}^p \Lambda_a u_h + \hat{f}_h + \psi_j, j = 1, 2, \dots, p, \quad (0.18)$$

სადაც u_h, f_h წარმოადგენენ u და f -ის პროექციას $\omega_{h\tau}$ ბადეზე, ψ_j - ცდომილებაა.

$\Lambda_a = A_a^h$ - წრფივი ოპერატორია, A_a დიფერენციალური ოპერატორია.

თუ (0.18)-ში ცდომილებას ვუგულებელვყოფთ, მივიღებთ სხვაობიან განტოლებათა სისტემას

$$y_{jt} = \sum_{a=1}^j \Lambda_a(\hat{y}^{(a)}) + \sum_{a=j+1}^p \Lambda_a(\hat{y}^{(a)}) + \hat{f}_h, \quad (0.19)$$

$$j = 1, 2, \dots, p, \hat{y}^{(a)} = (y_1, \dots, y_a).$$

(0.19) სხვაობიანი სისტემა ამოიხსნება მიმდევრობითი მეთოდით, ალგორითმის რეალიზაციის შედეგად ვიღებთ ამონახსნს ბადის ყოველ წერტილში.

განვიხილოთ A და A_a ოპერატორების შერჩევის მაგალითები, ავიღოთ პარაბოლური განტოლების შემთხვევა:

$$Au = \sum_{a=1}^j \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2}, \quad A_a = \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2}, \quad \Lambda_a = (y^{(a)}) = \Lambda_a(y_{\bar{x}_a x_a).$$

სხვაობიანი სქემა (0.17) მიიღებს სახეს:

$$y_{jt} = \sum_{a=1}^j \Lambda_a(\hat{y}_a) + \sum_{a=j+1}^p \Lambda_a(y_a) + f_h, j = 1, 2, \dots, p .$$

ამოხსნა დაიყვანება ერთგანზომილებიანი მიმდევრობითი სხვაობიანი სქემების გამოყენებაზე და შესაბამისად მეთოდი ეკონომიურია.

თუ პარაბოლური განტოლება შეიცავს შერეულ წარმოებულებს, კერძოდ:

$$Au = \sum_{a,\beta=1}^p a_{a\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_\beta}, a_{a\beta} = a_{\beta a}, \quad (0.20)$$

და სრულდება პირობა

$$0 < C_1 \sum_{a=1}^p \xi_a^2 \leq \sum_{a,\beta=1}^p a_{a\beta} \xi_a \xi_\beta \leq C_2 \sum_{a=1}^p \xi_a^2, C_i > 0, \quad (0.21)$$

მაშინ, A_a შეირჩევა ისე, რომ

$$A_a u = a_{aa} \frac{\partial^2 u}{\partial x_a^2} + \sum_{j=1}^{a-1} 2a_{ia} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_a},$$

$$A = \sum_{a=1}^p A_a.$$

სხვაობიან სქემაში (0.19) სივრცულ ოპერატორ Λ_a - ს აქვს შემდეგი სახე:

$$\Lambda_a(y^{(a)}) = a_{aa} y_{a\bar{a}x_a} + \sum_{j=1}^{a-1} 2a_{ia} y_{i\bar{i}x_a}$$

და y_j ($j = 1, 2, \dots, p$)-ის პოვნის პროცესი დაიყვანება ერთგანზომილებიანი მიმდევრობით ამოხსნის მეთოდზე და შესაბამისად ეკონომიურია.

განვიხილოთ საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია (0.19) მეთოდის მდგრადობასთან და კრებადობასთან. გავამრავლოთ (0.19) სკალარულად $\tau(\Lambda_j(y^{(j)}))_t$ -ზე შესაბამისად ($j = 1, 2, \dots, p$) და ავჯამოთ j -ით, შედეგად მივიღებთ ტოლობას:

$$-\tau \sum_{j=1}^p (y_{jt}, \Lambda_j(y^{(j)}))_t + 0,5 \left\| \sum_{a=1}^p \Lambda_j(\hat{y}^{(a)}) \right\|^2 + 0,5\tau^2 \sum_{a=1}^p \left\| (\Lambda_j(y^{(a)}))_t \right\|^2 =$$

$$= 0,5 \left\| \sum_{a=1}^p \Lambda_j(y^{(a)}) \right\|^2 - \tau \sum_{a=1}^p (\hat{f}, (\Lambda_a(y^{(a)}))_t),$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს

$$\begin{aligned}
 & -\tau \sum_{j=1}^p (y_{jt}, (\Lambda_j(y^{(j)}))_t) + 0,5 \left\| \sum_{a=1}^p \Lambda_a(\hat{y}^{(a)}) + \hat{f} \right\|^2 \leq \\
 & \leq 0,5 \left\| \sum_{a=1}^p \Lambda_a(y^{(a)}) + f \right\|^2 + \tau M (\|\hat{f} + f\|^2 + \|f_t\|^2),
 \end{aligned} \tag{0.22}$$

სადაც $\|\cdot\|$ - არის L_2 ნორმის დისკრეტული ანალოგი; M - კონსტანტაა, რომელიც არ არის დამოკიდებული h -ზე და τ -ზე. (0.22) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სხვაობიანი სქემის (0.19)-ის მდგრადობა დამოკიდებულია გამოსახულების ნიშანზე:

$$\Phi(y) = - \sum_{j=1}^p (y_{jt}, (\Lambda_j(y^{(j)}))_t).$$

თუ $\Phi(y) \geq 0$, მაშინ ძნელი არ არის ვაჩვენოთ (0.19) სხვაობიანი სქემის მდგრადობა.

თუ A განისაზღვრება (0.20)-დან და აკმაყოფილებს (0.21)-ის პირობებს ხოლო $y|_{\gamma} = 0$, მაშინ (0.22) უტოლობიდან გამომდინარეობს (0.19) სხვაობიანი სქემის მდგრადობა. სამართლიანია შეფასება:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \sum_{a=1}^p \|y_{\bar{a}\bar{x}_a}\|^2 \leq \\
 & \leq M \left\{ \sum_{a=1}^p \|y_{\bar{a}\bar{x}_a}(0)\|^2 + \left\| \sum_{a=1}^p \Lambda_a(y^{(a)}(0)) + f(0) \right\|^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \max(\|f\|^2 + \|f_t\|^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{0.23}$$

ვინაიდან

$$\Phi(y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^p (a_{\alpha\beta} y_{\alpha\bar{t}\bar{x}_\alpha}, y_{\beta\bar{t}\bar{x}_\beta}) \geq C_1 \sum_{a=1}^p \|y_{\alpha\bar{t}\bar{x}_\alpha}\|^2.$$

თუ საწყისი ამოცანის ამოხსნა საკმარისად გლუვია, მაშინ ადგილი აქვს სხვაობიანი ამოცანის (1.19)-ის ამონახსნის კრებადობას საწყისი ამოცანის ამონახსნისაკენ და მეთოდის $z_j = u - y_j$ ცდომილებებისთვის სამართლიანია შეფასება [3]

$$\sum_{a=1}^p |Z_{a\bar{x}_a}| \leq O(\tau + h^2).$$

ამონახსნისკენ იკრიბება ყველა $y_j (j = 1, 2, \dots, p)$. მიახლოებითი ამონახსნად, როგორც წესი ითვლება y_p ან $y = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_i$. თუ (0.21) უტოლობაში $C_1 \geq 0$ ანუ ოპერატორი $A \geq 0$, მაშინ (0.23)-დან არ გამომდინარეობს (0.19) სქემის მდგრადობა. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაშიც (0.19) მეთოდი ინარჩუნებს მდგრადობას. თუ $j = p$, (0.19)-ს სკალარულად \hat{y}_p -ზე გამრავლებით, მარტივად მიიღება შემდეგი უტოლობა

$$\|\hat{y}_p\|^2 \leq (1 + \tau C) \|y_p\|^2 + \tau M \left\| \sum_{j=1}^p \Lambda_j(y^{(j)}) + \hat{f} \right\|^2,$$

სადაც C, M – შემოსაზღვრული კონსტანტებია, რომლებიც არ არიან h -ზე და τ -ზე დამოკიდებულები. აქედან და (0.22) უტოლობიდან y_p - სთვის მივიღებთ შემდეგი სახის შეფასებას:

$$\|\hat{y}_p\|^2 \leq M \left\{ \|y_p(0)\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^p \Lambda_j(y^{(j)})(0) + f(0) \right\|^2 + \underbrace{\max_t (\|f\|^2 + \|f_t\|^2)}_t \right\}. \quad (0.24)$$

შესაძლებელია გავაკეთოთ დასკვნა y_p -ს მდგრადობის შესახებ შესაბამისი საწყისი პირობებისა და მარჯვენა მხრის გათვალისწინებით. $z_p = u - y_p$ -სთვის ძნელი არ არის მივიღოთ შეფასება $\|z_p\| \leq O(\tau + h^2)$.

(0.15), (0.16) ორგანზომილებიანი სისტემისთვის ზემოთ შემოთავაზებული მსჯელობის გათვალისწინებით შესწავლილია ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა.

კერძოდ, დისერტაციაში ჩატარებულია კვლევა (0.15), (0.16) სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის პოვნის რიცხვითი მეთოდების შესახებ. მეთოდების შესწავლის პროცესში \bar{Q} არეზე, შემოვიტანოთ ბადეები:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \quad \bar{\omega}_{\alpha h\tau} = \bar{\omega}_{\alpha h} \times \omega_\tau, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_h &= \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad i, j = 0, 1, \dots, M, \quad Mh = 1\}, \\
\bar{\omega}_{1h} &= \{(x_i, y_j) = ((i - 1/2)h, jh), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad Mh = 1\}, \\
\bar{\omega}_{2h} &= \{(x_i, y_j) = (ih, (j - 1/2)h), \quad i, j = 1, \dots, M, \quad Mh = 1\},
\end{aligned} \tag{0.25}$$

$$\omega_h = \Omega \cap \bar{\omega}_h, \quad \gamma_h = \bar{\omega} \setminus \omega_h, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h,$$

$$\omega_\tau = \{t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, N, \quad N\tau = T\}.$$

სხვაობიანი სქემებისთვის გამოყენებულია შემდეგი ცნობილი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
u &= u_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k), \quad \hat{u} = u_{i,j}^{k+1} = u(x_i, y_j, t_{k+1}), \\
u_t &= \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h}, \quad u_{\bar{y}} = \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h}, \\
u_x &= \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h}, \quad u_y = \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h}, \\
u_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2}, \quad u_{\bar{y}\bar{y}} = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}.
\end{aligned} \tag{0.26}$$

სასრული სხვაობები $\bar{\omega}_{\alpha h}$, $\alpha = 1, 2$ ბადეზე მოცემული ფუნქციებისთვის განისაზღვრება ანალოგიურად.

განვიხილოთ პირველ თავში წარმოდგენილი საკითხები დეტალურად.

დისერტაციის პირველ თავში (0.15), (0.16) სისტემისათვის დამტკიცებულია ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ თეორემა. აგებულია შესაბამისი ცვალებადი მიმარულებების სხვაობიანი სქემა. მოყვანილია სხვაობიანი სქემის აბსოლუტურად მდგრადობის და კრებადობის თეორემები.

არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებათა (0.15), (0.16) სისტემა განხილულია შემდეგი საწყისი და სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{aligned}
U(x, y, 0) &= U_0(x, y), \quad V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \\
V_2(x, y, 0) &= V_{20}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \\
U(x, y, t) &= 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T],
\end{aligned} \tag{0.27}$$

სადაც, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\partial\Omega$ არის Ω -ს საზღვარი, T ფიქსირებული დადებითი რიცხვია, $U_0, V_{\alpha 0}, g_\alpha$ წარმოადგენენ დასმული ამოცანის შესაბამის ცნობილ საკმაოდ გლუვ ფუნქციებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$V_{\alpha 0}(x) \geq \delta_0 \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (0.28)$$

$$\gamma_0 < g_\alpha(\xi_\alpha) \leq G_0, \quad |g'_\alpha(\xi_\alpha)| \leq G_1, \quad \xi_\alpha \in R, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც $\delta_0, \gamma_0, G_0, G_1$ დადებითი მუდმივებია.

დისერტაციის პირველ თავში დასმულ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას აქვს სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (0.29)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (0.30)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) &= U_0(x, y), & V_1(x, y, 0) &= V_{10}(x, y), \\ V_2(x, y, 0) &= V_{20}(x, y), & (x, y) &\in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (0.31)$$

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

$$V_{\alpha 0}(x) \geq \delta_0 \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (0.32)$$

$$\gamma_0 < g_\alpha(\xi_\alpha) \leq G_0, \quad |g'_\alpha(\xi_\alpha)| \leq G_1, \quad \xi_\alpha \in R, \quad \alpha = 1, 2,$$

(0.29) - (0.32) ამოცანისათვის ცნობილი აღნიშვნების (0.25), (0.26) გათვალისწინებით აგებულია ცვალეზადი მიმართულების შემდეგი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}})_y, \quad (0.33)$$

$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \quad (0.34)$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}),$$

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h, \quad (0.35)$$

$$v_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_{1h},$$

$$v_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

სადაც (0.33) - (0.35) განტოლობებში დისკრეტული უცნობი u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია მთელკვანძებიან $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, ხოლო v_α ფუნქცია კი შუაკვანძებიან $\bar{\omega}_{\alpha h\tau}$ ბადეზე ($\alpha = 1, 2$).

პირველი თავის ფარგლებში ზემოთ განხილული ამოცანისთვის დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები:

თეორემა 0.1. თუ (0.29) - (0.32) ამოცანას გააჩნია კლასიკური ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

თეორემა 0.2. თუ (0.29) - (0.32) კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (0.33) - (0.35) სქემა საწყისი პირობების მიმართ აბსოლიტურად მდგრადია.

თეორემა 0.3. თუ (0.29) - (0.32) კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას აქვს საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (0.33) - (0.35) სქემა კრებადია როცა, $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, და სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|u_{1\bar{x}} - U_{1\bar{x}}\|_1 + \|u_{2\bar{y}} - U_{2\bar{y}}\|_2 + \|v_1 - V_1\|_1 + \|v_2 - V_2\|_2 = O(\tau + h^2).$$

მრავალგანზომილებიანი, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის პროცესში ოპერატორთა გახლეჩვის ტექნიკის გამოყენება ერთ-ერთ ეფექტურ მიდგომას წარმოადგენს. შესაბამისად დისერტაციის მეორე თავში განხილულია ოპერატორთა გახლეჩვის მეთოდის გამოყენებით (0.15), (0.16) სისტემის შესწავლა. ოპერატორთა გახლეჩვის მიდგომა მნიშვნელოვნად აადვილებს ალგორითმის აგების პროცესს. ალგორითმის აგების გამარტივება გამოწვეულია მრავალგანზომილებიანი ამოცანის ერთგანზომილებიან ამოცანებზე დაყვანით. ასევე ალგორითმი ოპტიმალურია და მისი რეალიზაციისთვის საჭირო მანქანური დრო ეკო-

ნომიურია, აღნიშნული მიდგომები გამოყენებულია მრავალი მათემატიკური მოდელის რიცხვითი მეთოდებით ამოხსნისთვის (იხ. მაგალითად, [21-22, 32-34, 40, 42, 46]).

დისერტაციის ფარგლებში განხილული (0.15), (0.16) სისტემა ორგანზომილებიანია, შესაბამისად ოპერატორთა გახლიჩვის მეთოდის გამოყენება აღნიშნული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისა და ალგორითმის რეალიზაციისთვის აქტუალურია და ბუნებრივია აქცენტი გაკეთდა შესაბამისი მეთოდის გამოყენებაზე.

(0.15), (0.16) სისტემა, თავისი შინაარსით და აღწერილობით გვაძლევს საშუალებას გამოვიყენოთ დეკომპოზიციის (გახლეჩის) მეთოდი, რადგანაც განტოლება (0.15) ორგანზომილებიანია, ხოლო (0.16) განტოლებები შესაბამისად შეიცავენ მხოლოდ x ან y ცვლადს და $V_\alpha, \alpha = 1,2$ დიფუზიის კოეფიციენტებს.

დისერტაციის მეორე თავში (0.15), (0.16) სისტემისათვის (0.27), (0.28) საწყის-სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით განხილულია გასაშუალებული მოდელი, რომელიც წარმოადგენს ეკონომიური ალგორითმის აგების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მეთოდს. გასაშუალებული მოდელისთვის განხილულია სხვაობიანი სქემა.

გასაშუალებულ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$\eta_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \tag{0.36}$$

$$\eta_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial V_1^k}{\partial t} = -V_1^k + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \tag{0.37}$$

$$\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = -V_2^k + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right),$$

$$U_1^k|_{x=0} = U_1^k|_{x=1} = 0, \quad U_2^k|_{y=0} = U_2^k|_{y=1} = 0, \quad U_i^0(x, 0) = U_0(x), \tag{0.38}$$

$$U_i^k(x, y, t_k) = U^{k-1}(x, y, t_k), \quad V_i^k(x, y, t_k) = V_i^{k-1}(x, y, t_k), \quad i = 1,2,$$

სადაც

$$U^k(x, t) = \eta_1 U_1^k(x, y, t) + \eta_2 U_2^k(x, y, t), \quad \eta_1, \eta_2 > 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1.$$

გასაშუალებული მოდელისთვის (0.25), (0.26) აღნიშვნების გათვალისწინებით აგებულია სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = \sigma_1(\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (1 - \sigma_1)(v_1 u_{1\bar{x}})_x, \quad (0.39)$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}),$$

$$u_{2t} = \sigma_2(\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y + (1 - \sigma_2)(v_2 u_{2\bar{y}})_y, \quad (0.40)$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}),$$

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = U_0(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad v_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_{2h}, \quad (0.41)$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

(0.39) - (0.41) გახლეჩილ ამოცანებში $\sigma_1, \sigma_2 \in]0, 1]$; u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, v_1 და v_2 კი შესაბამისად $\bar{\omega}_{1h\tau}$ და $\bar{\omega}_{2h\tau}$ ბადეებზე.

დასმული (0.39) – (0.41) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნების $t = t_k$ შრის წერტილებში საპოვნელად, ამ წერტილებში პარალელურად ვპოულობთ (u_1, v_1) და (u_2, v_2) მიახლოებით ფუნქციებს. საძიებელ შრეზე საბოლოო მიღებულ მიახლოებით ამონახსნს წარმოადგენს $(\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2, v_1, v_2)$ ფუნქციები, რომლებიც მომდევნო შრეზე გამოიყენება, როგორც საწყისი მნიშვნელობები.

აღნიშნული მეთოდი წარმოადგენს პარალელური ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდს, რადგანაც u ფუნქციის საპოვნელად ამოცანის დეკომპოზიციის შედეგად მიღებული u_1 და u_2 ფუნქციების პოვნა პარალელურად მიმდინარეობს.

მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად შეიძლება გამოყენებულ იქნას აგრეთვე მიმდევრობითი ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდი, დროის ყოველ შუალედში მიმდევრობით ამოიხსნას ამოცანა პირველად (u_1, v_1) -ს მიმართ, ხოლო შემდეგ (u_2, v_2) -ს მიმართ. ამოცანის საბოლოო მიახლოებით ამონახსნად ავიღოთ (u_2, v_1, v_2) .

მეორე თავში დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები:

თეორემა 0.4. (0.36) - (0.38) ამოცანის ამონახსნი (U^k, V_1^k, V_2^k) კრებადია (0.15) - (0.16) ამოცანის ამონახსნისაკენ, (0.27), (0.28) საწყის-სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, (U, V_1, V_2) , როცა $\tau \rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|U^k(t) - U(t)\|^2 + \|V_1^k(t) - V_1(t)\|^2 + \|V_2^k(t) - V_2(t)\|^2 = O(\tau^{1/2}).$$

თეორემა 0.5. (0.36) - (0.38) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (0.15) - (0.16) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ და იგი კრებადია (0.15) - (0.16) ამოცანის ამონახსნისაკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ ნორმის აზრით, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

როგორც უკვე არაერთგზის აღინიშნა, მათემატიკური ამოცანის ან ამოცანათა სისტემის ამოხსნის პროცესში რიცხვითი მეთოდების გამოყენებას ძალიან დიდი ისტორია და მნიშვნელობა აქვს. ალგორითმების ეკონომიურობის გაუმჯობესების თვალსაზრისით მრავალი მეცნიერი აწარმოებს თეორიულ და პრაქტიკულ კვლევებს. კვლევის თეორიული კონტექსტი აღნიშნული პროცესში გადამწყვეტ როლს ასრულებს, თუმცა ალგორითმების რეალიზაციის სწორ პროცესს, დაპროგრამების პარადიგმების გამოყენებით გამართულ პროგრამულ რეალიზაციას უმნიშვნელოვანესი როლი აქვს. დისერტაციის **მესამე თავში** განხილულია კერძოწარმოებულნი დიფერენციალურ (0.15), (0.16) განტოლებათა სისტემისთვის ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა და ამავე განტოლებათა სისტემის გასაშუალებული მოდელისთვის სხვაობიანი სქემა. განხილულია მიღებული ალგორითმების პრაქტიკული რეალიზაციის საკითხები. თეორიული საკითხების შესაბამისად დასმულია პრაქტიკული ამოცანები, წარმოდგენილია მიღებული რიცხვითი შედეგების შესაბამისი გრაფიკები, ასევე შედარებულია აღნიშნული მეთოდების ეფექტურობა ერთმანეთთან.

ალგორითმების პრაქტიკული რეალიზაციის საკითხები თანამედროვე ტექნოლოგიების განვითარებასთან ერთად სულ უფრო მეტად იხვეწება და ვითარდება. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ისეთი ალგორითმების დამუშავება, რომლებიც მრავალ ეტაპად არის დაყოფილი, მსგავსი ტიპის ალგორითმების პროგრამული დამუშავება პროგრამირების საკითხების სიღრმისეულ ცოდნას მოითხოვს. მეორეთმეტე საუკუნიდან დაწყებული ალგორითმების შემუშავების პროცესი კიდევ უფრო

მეტად დაიხვეწა და განვითარდა. ალგორითმის ჩამოყალიბება, მისი სწორი გადაწყვეტის პროცესი მარტივი თანმიმდევრული ბიჯებიდან დაწყებული, განშტოებადი, ციკლური, რეკურსიული, პარალელური და სხვა მრავალი სახის ალგორითმებით გაგრძელებული დღევანდელ დღეს წარმოადგენს ცალკე კვლევის საგანს [14, 50].

ალგორითმის რეალიზაცია და შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამის აგების თანამედროვე მიდგომები ითვალისწინებს პროგრამის დაგეგმვისა და შემუშავების თანმიმდევრულ რამოდენიმე მნიშვნელოვან ასპექტს [4, 65, 73, 77].

- ალგორითმის სპეციფიკიდან გამომდინარე მოხდეს შესაბამისი პროგრამირების ენის შერჩევა;
- დაპროგრამების გარემოს შერჩევა;
- პროგრამული ვერსიების კონტროლის სერვისის შერჩევა;
- ფაილური სისტემის აგება;
- ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპების გამოყენება;
- პროგრამული კოდის წერის დიზაინის შერჩევა;
- ალგორითმის შესაბამისი პროგრამული კოდის დაწერა;
- შეცდომების აღმოჩენა/გასწორება.

დისერტაციის ფარგლებში შესწავლილი საკითხებიდან მნიშვნელოვანი ყურადღება ეთმობა მის ფარგლებში განხილული რიცხვითი მეთოდების შესაბამისი ალგორითმების პრაქტიკული რეალიზაციისა და მეთოდების შედარებითი ანალიზის საკითხებს. აღნიშნული მიმართულებით კვლევები ძალიან აქტუალურია (იხ. მაგალითად, [71, 92, 94, 102-104, 111, 116, 117]).

დისერტაციის მესამე თავში წარმოდგენილია ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელისთვის სხვაობიანი სქემის შესატყვისი ალგორითმი. მიღებულია ალოგორითმების კომპიუტერული რეალიზაციის რიცხვითი შედეგები. ალგორითმის მუშაობის სიზუსტის შესამოწმებლად განხილულია დასმული ამოცანის შესაბამისი ტესტები. ერთმანეთთან შედარებულია მიღებული შედეგები და ჩატარებულია შესაბამისი ანალიზი. მეთოდების შედარება განხორციელდა ერთი და იგივე ტესტზე დაყრდნობით ორი მნიშვნელოვანი

ფაქტორის შესაბამისად. პირველი დროითი ფაქტორი, პროგრამა რა დროს ანდომებს თითოეული მეთოდის შემთხვევაში მონაცემების დამუშავებს. მეორე მიღებული მონაცემების სიზუსტის ფაქტორი, რომელი მეთოდით მიიღება შედარებით ზუსტი რიცხვითი შედეგები. სიზუსტის შესადარებლად პროგრამაში დათვლილია ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობები, ზემოთ მოცემული ორივე მეთოდისთვის ერთი და იგივე კვანძებზე აღებულია სხვაობებს შორის მაქსიმალური და მიღებული მაქსიმალური მნიშვნელობები შედარებულია ერთმანეთთან.

კომპიუტერული პროგრამა აგებულია ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპების სრული დაცვით. მასზე მუშაობის პროცესში დაცულია პროგრამის შემუშავებისა და განვითარების სტანდარტები. პროგრამის დაწერისას გამოყენებულია პროგრამირების ენა C++.

დისერტაციის განუყოფელ ნაწილს წარმოადგენს კონსოლური აპლიკაცია, რომელშიც მოცემულია და აღწერილია პროგრამული კოდი, შესაბამისი კომენტარებით. პროგრამული კოდის საშუალებით განხორციელდა შესაბამისი გათვლები.

თავი I - დეკომპოზიციური ცვალებადი მიმართულების სხვაობიან სქემაზე დაფუძნებული მეთოდი

თავში I-ში დასმულია მიჩისონის მიერ შემოთავაზებული მცენარეთა ფოთ-
ლებში ძარღვოვანი განვითარების ბიოლოგიური პროცესის აღმწერი მათემატიკური
მოდელის ორგანზომილებიანი (0.15), (0.16) სისტემისთვის შესასწავლი ამოცანა.
დამტკიცებულია დასმული ამოცანის ამონახნის ერთადერთობის თეორემა, აგებულია
შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა. შესწავლილია და
გამოკვლეულია სქემის მდგრადობისა და კრებადობის თეორიული საკითხები.
კვლევის პროცესში გამოყენებულია ნაშრომები (იხ. მაგალითად [3, 43, 48, 49, 55, 86-
89]).

§ 1.1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

$$U(x, 0, t) = U(x, 1, t) = U(0, y, t) = U(1, y, t) = 0,$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (1.1.3)$$

$$V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y),$$

$$x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, T].$$

U, V_1, V_2 წარმოადგენენ საძიებელ ფუნქციებს, T ფიქსირებული დადებითი რიცხვია. $g_1, g_2, U_0, V_{10}, V_{20}$ მოცემული საკმაოდ გლუვი ფუნქციებია. g_1, g_2 ფუნქციები დადებითი და შემოსაზღვრულნი არიან თავის ყველა წარმოებულთან ერთად. ასევე სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\begin{aligned} V_{10} \geq \delta, V_{20} \geq \delta, \quad \delta = \text{const} > 0. \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ g_0 \leq g_1(\xi_1) \leq G_0, \quad |g_1'(\xi_1)| \leq G_1, \quad \xi_1 \in R, \\ g_0 \leq g_2(\xi_2) \leq G_0, \quad |g_2'(\xi_2)| \leq G_1, \quad \xi_2 \in R, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

სადაც δ_0, g_0, G_0, G_1 დადებითი მუდვივებია.

ვთქვათ, შესრულებულია ზემოთ მოყვანილი პირობები და არსებობს (1.1.1) - (1.1.3) ამოცანის ამონახსნი. შევნიშნოთ, რომ (1.1.4) დამოკიდებულების გამოყენებით (1.1.2)-ში განსაზღვრული V_1, V_2 ფუნქციებისთვის ვღებულობთ შემდეგ შეფასებას

$$\begin{aligned} V_1(x, y, t) &= e^{-t}V_{10}(x, y) + e^{-t} \int_0^t e^\tau g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) d\tau \geq \\ &\geq e^{-t}\delta_0 + e^{-t} \int_0^t g_0 e^\tau d\tau > \sigma_0 > 0, \\ V_2(x, y, t) &= e^{-t}V_{20}(x, y) + e^{-t} \int_0^t e^\tau g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) d\tau \geq \\ &\geq e^{-t}\delta_0 + e^{-t} \int_0^t g_0 e^\tau d\tau > \sigma_0 > 0. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

ანალოგიურად ვღებულობთ V_1, V_2 ფუნქციების ზემოდან შემოსაზღვრულობას:

$$\begin{aligned} V_1(x, y, t) &< V_0 = \text{const}, \\ V_2(x, y, t) &< V_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

ასევე ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\left| \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} \right| \leq C, \quad (x, y, t) \in \bar{Q}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.1.7)$$

§ 1.2. ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ

შევისწავლოთ ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი შემდეგი ამოცანისთვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right) - q(U), \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = -V_1 + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right), \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = -V_2 + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

$$U(x, 0, t) = U(x, 1, t) = U(0, y, t) = U(1, y, t) = 0,$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (1.2.3)$$

$$V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y),$$

$$x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \in [0, T].$$

სადაც q ზრდადი ფუნქციაა და $q(U)U \geq 0$.

თეორემა 2.1.1 თუ (1.2.1) - (1.2.3) ამოცანას გააჩნია კლასიკური ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

თეორემის დამტკიცება. დავუშვათ, არსებობს (1.2.1) - (1.2.3) ამოცანის ორი ამონახსნი (U, V_1, V_2) და $(\tilde{U}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2)$, განვიხილოთ მათ შორის სხვაობები (Z, S_1, S_2) , სადაც

$$Z = U - \tilde{U}, \quad S_1 = V_1 - \tilde{V}_1, \quad S_2 = V_2 - \tilde{V}_2.$$

მივიღებთ:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + S_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2 \frac{\partial Z}{\partial y} + S_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) - (q(U) - q(\tilde{U})), \quad (1.2.4)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -S_1 + \bar{g}_1(x, t) \left(V_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + S_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right), \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial t} &= -S_2 + \bar{g}_2(x, t) \left(V_2 \frac{\partial Z}{\partial y} + S_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right), \\ Z(x, y, 0) &= 0, \quad S_1(x, y, 0) = 0, \quad S_2(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ Z(x, y, t) &= 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

აქ

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(x, t) &= \int_0^1 g'_1 \left(\theta V_1 \frac{\partial U}{\partial x} + (1 - \theta) \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \right) d\theta, \\ \bar{g}_2(x, t) &= \int_0^1 g'_2 \left(\theta V_2 \frac{\partial U}{\partial y} + (1 - \theta) \tilde{V}_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} \right) d\theta. \end{aligned}$$

გავამრავლოთ (1.2.4), (1.2.5) ტოლობები შესაბამისად Z და S_1, S_2 ფუნქციებზე და ვაინტეგრირებთ Ω არეზე:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z\|^2 + \left(V_1, \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right) + \left(V_2, \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right) + (q(U) - q(\tilde{U}), Z) &= \\ &= - \left(S_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}, \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - \left(S_2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}, \frac{\partial Z}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_1\|^2 + \|S_1\|^2 = \left(\bar{g}_1(x, y, t) S_1, V_1 \frac{\partial Z}{\partial x} + S_1 \frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_2\|^2 + \|S_2\|^2 = \left(\bar{g}_2(x, y, t) S_2, V_2 \frac{\partial Z}{\partial y} + S_2 \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

სადაც

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}, \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv dx.$$

გარდაქმნების შემდეგ და იმის გათვალისწინებით, რომ q ზრდადია და $q(U) \geq 0$ ზრდადია და შესაბამისად $(q(U) - q(\tilde{U}), U - \tilde{U})$ შესაკრები არის არაუარყოფითი, მივიღებთ შეფასებებს:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Z\|^2 + C \left(\left\| \frac{\partial Z}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial Z}{\partial y} \right\|^2 \right) \leq C (\|S_1\|^2 + \|S_2\|^2),$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_1\|^2 + \|S_1\|^2 \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial Z}{\partial x} \right\|^2 + C \|S_1\|^2,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_2\|^2 + \|S_2\|^2 \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial Z}{\partial y} \right\|^2 + C \|S_2\|^2,$$

სადაც ε არის საკმარისად მცირე არაუარყოფითი მუდმივი, ხოლო C აღნიშნავს საზოგადოდ განსხვავებულ მუდმივებს.

გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} (\|Z\|^2 + \|S_1\|^2 + \|S_2\|^2) \leq K (\|S_1\|^2 + \|S_2\|^2).$$

გრონუოლის ლემის გამოყენებით და (1.2.6) პირობის ძალით ვღებულობთ:

$$Z \equiv 0, \quad S_1 \equiv 0, \quad S_2 \equiv 0.$$

ამრიგად, (1.2.1) - (1.2.3) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

§ 1.3. დეკომპოზიციური მოდელის შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა

ავაგოთ განტოლებათა (1.1.1) - (1.1.3) სისტემისთვის შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა.

შემოვიტანოთ (0.25) ბადეები \bar{Q} არეზე. ასევე გავითვალისწინოთ ცნობილი აღნიშვნები (0.26) და ავაგოთ (1.1.1) - (1.1.3) სისტემისთვის შემდეგი ცვალებადი მიმართულებების სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}})_y, \tag{1.3.1}$$

$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \tag{1.3.2}$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}),$$

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h, \tag{1.3.3}$$

$$v_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{1h},$$

$$v_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

(1.3.1) - (1.3.3) ამოცანის ზუსტი ამონახსნისათვის გვაქვს:

$$U_t = (\hat{V}_1 \hat{U}_{1\bar{x}})_x + (V_2 U_{2\bar{y}})_y + \varphi_1, \quad (1.3.4)$$

$$U_t = (\hat{V}_1 \hat{U}_{1\bar{x}})_x + (\hat{V}_2 \hat{U}_{2\bar{y}})_y + \varphi_2,$$

$$V_{1t} = -\hat{V}_1 + g_1(V_1 U_{1\bar{x}}) + \chi_1, \quad (1.3.5)$$

$$V_{2t} = -\hat{V}_2 + g_2(V_2 U_{2\bar{y}}) + \chi_2,$$

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad (1.3.6)$$

$$V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), x \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$U(x, y, t) = 0, (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau.$$

სადაც, $\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2$ ფუნქციები წარმოადგენენ ცდომილობებს.

(1.3.1) - (1.3.3) სხვაობიანი სქემა ეკონომიურია, ვინაიდან $t = t_{j+1}$ შრეზე მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად მიმდევრობით იხსნება (1.3.1), (1.3.2) განტოლებათა სისტემა \hat{v}_1, \hat{u}_1 ფუნქციების მიმართ, ხოლო შემდეგ \hat{v}_2, \hat{u}_2 ფუნქციების მიმართ ნაპოვნი \hat{v}_1, \hat{u}_1 ამონახსნების გამოყენებით. უნდა ავლნიშნოთ, რომ მოყვანილი ალგორითმი არ გამოიყენება იტერაციულ პროცესი, რადგან \hat{v}_1, \hat{v}_2 ფუნქციების გამოთვლა (1.3.3) და (1.3.4) ტოლობებიდან ხდება ცხადი სახით, შემდეგ კი \hat{u}_1, \hat{u}_2 ამონახსნებს ვპოულობთ წრფივ სამდიაგონალური მატრიცის მქონე ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით, რომლისთვისაც ვიყენებთ ფაქტორიზაციის მეთოდს.

თეორემა 1.3.1. (1.1.1) - (1.1.3) სისტემის შესაბამისი (1.3.1) - (1.3.3) სხვაობიანი სქემა საკმაოდ გლუვი U, V_1, V_2 ამონახსნებისთვის ახდენს აპროქსიმაციას და აპროქსიმაციის რიგია:

$$\varphi_1 = O(\tau + h^2), \quad \varphi_2 = O(\tau + h^2),$$

$$\chi_1 = O(\tau + h^2), \quad \chi_2 = O(\tau + h^2).$$

φ_1 და φ_2 ცდომილებებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

$$\varphi_1 = U_t - (\hat{V}_1 \hat{U}_{1\bar{x}})_x - (V_2 U_{2\bar{y}})_y, \quad \varphi_2 = U_t - (\hat{V}_1 \hat{U}_{2\bar{x}})_x - (\hat{V}_2 \hat{U}_{2\bar{y}})_y. \quad (1.3.15)$$

§ 1.4. დეკომპოზიციური მოდელის შესაბამისი ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის მდგრადობა

სხვაობიანი სქემის ეფექტურობისთვის საჭიროა შესწავლილი იქნას აღნიშნული სქემის მდგრადობა საწყისი პირობების მიმართ [43, 45, 58].

თეორემა 1.4.1. თუ (1.1.1) - (1.1.3) დიფერენციალურ ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (1.3.1) - (1.3.3) სქემა საწყისი პირობების მიმართ აბსოლიტურად მდგრადია და სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \leq e^{c\tau} \left\{ \|(V_{10} U_{0\bar{x}})_x\|^2 + \|U_{0\bar{x}}\|_1^2 + \|(V_{20} U_{0\bar{y}})_y\|^2 + \|U_{0\bar{y}}\|_2^2 \right\},$$

$$0 < c < v_\alpha(x, y, t) \leq C, \quad (x, y, t) \in \bar{\omega}_{\alpha h \tau}, \quad \alpha = 1, 2,$$

სადაც c და C აქ და შემდგომშიც აღნიშნება დადებითი მუდმივები, რომლებიც დამოკიდებულნი არ არიან τ, h სიდიდეებზე.

დამტკიცება. (1.3.2) დიფერენციალური განტოლებებიდან, V_{10}, V_{20}, g_1 და g_2 ფუნქციებზე (1.1.4) შეზღუდვების გამოყენებით, ადვილად ვღებულობთ (1.1.6), (1.1.7) შეფასებების ანალოგიურ შეფასებებს:

$$c < v_\alpha(x, y, t) \leq C, \quad |v_{\alpha t}(x, y, t)| \leq C, \quad (x, y, t) \in \bar{\omega}_{\alpha h \tau}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.4.1)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $A_1 = (v_1 u_{1\bar{x}})_x$, $A_2 = (v_2 u_{2\bar{y}})_y$ და გავამრავლოთ (1.3.1)-ში მოცემული ტოლობები სკალარულად τA_{1t} და τA_{2t} ფუნქციებზე შესაბამისად x და y ცვლადების მიმართ დისკრეტული ანალოგის ნაწილობითი ინტეგრებისა და შემდეგი ტოლობის გამოყენებით

$$\tau[(\hat{A}_1, A_{1t}) + (A_2, A_{1t}) + (\hat{A}_1, A_{2t}) + (\hat{A}_2, A_{2t})] = \quad (1.4.2)$$

$$= \frac{1}{2} \|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) - \frac{1}{2} \|A_1 + A_2\|^2,$$

(1.3.3) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \tau^2 (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(\hat{v}_1 u_{1\bar{x}t}, u_{1\bar{x}t}]_1 + (\hat{v}_2 u_{2\bar{y}t}, u_{2\bar{y}t}]_2 + \\ & + \tau(v_1 u_{1\bar{x}t}, u_{1\bar{x}t}]_1 + (v_2 u_{2\bar{y}t}, u_{2\bar{y}t}]_2 = \|A_1 + A_2\|^2. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

(1.4.1) შეფასებებისა და ε -უტოლობის გამოყენებით (1.4.3) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 + A_2\|^2 + \tau^2 (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(c - \varepsilon C) \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) \leq \\ & \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

მიღებული უტოლობის ორივე მხარეში

$$\tau(u_{1t\bar{x}}, \hat{u}_{1\bar{x}} + u_{1\bar{x}})_1 + \tau(u_{2t\bar{y}}, \hat{u}_{2\bar{y}} + u_{2\bar{y}})_2$$

წევრის მიმატებით გვექნება

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 + A_2\|^2 + \tau^2 (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(c - \varepsilon C) \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 \leq \\ & \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \left(\frac{\tau C}{\varepsilon} + 1 \right) \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) + \tau \varepsilon \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \\ & + \frac{\tau}{2\varepsilon} \left(\|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

მსგავსი წევრების შეკრება გვაძლევს

$$\begin{aligned} & \|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \tau^2 (\|A_{1t}\|^2 + \|A_{2t}\|^2) + \tau(c - \varepsilon - \varepsilon C) \left(\|u_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \\ & + \left(1 - \frac{\tau}{2\varepsilon} \right) \left(\|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \leq \quad (1.4.4) \\ & \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \left(1 + \frac{\tau}{2\varepsilon} + \frac{\tau C}{\varepsilon} \right) \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$ ისე, რომ $c - \varepsilon - \varepsilon C > 0$ და ავირჩიოთ დროითი τ ბიჯი ისე, რომ $0 < 1 - \frac{\tau}{2\varepsilon} < 1$ ე.ი. $0 < \tau < 2\varepsilon$. მაშინ (1.4.4) უტოლობა გვაძლევს

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\tau}{2\varepsilon}\right) \left(\|\hat{A}_1 + \hat{A}_2\|^2 + \tau^2 \|A_{1t}\|^2 + \tau^2 \|A_{2t}\|^2 + \|\hat{u}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{u}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \leq \\
& \leq \|A_1 + A_2\|^2 + \left(1 + \frac{\tau}{2\varepsilon} + \frac{\tau C}{\varepsilon}\right) \left(\|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.4.5}$$

შემდეგი აღნიშვნის შემოტანით

$$\begin{aligned}
P(u, v) &= \|A_1 + A_2\|^2 + \|u_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|u_{2\bar{y}}\|_2^2, \\
C_1 &= \frac{1}{2\varepsilon}, \quad C_2 = \frac{C}{\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon},
\end{aligned}$$

(1.4.5) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ

$$P(\hat{u}, \hat{v}) + \tau^2 \|A_{1t}\|^2 + \tau^2 \|A_{2t}\|^2 \leq \frac{1 + C_2\tau}{1 - C_1\tau} P(u, v) = \left(1 + \frac{C_1 + C_2}{1 - C_1\tau}\right) P(u, v). \tag{1.4.6}$$

ცხადია, რომ არსებობს τ_0 , ისეთი რომ ნებისმიერი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\frac{C_1 + C_2}{1 - C_1\tau} < C,$$

სადაც

$$C = \frac{C_1 + C_2}{1 - \tau_0 C_1}, \quad 1 - \tau_0 C_1 > 0.$$

(1.4.6) გამოსახულების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\begin{aligned}
P(u^{k+1}, v^{k+1}) &\leq (1 + \tau C) P(u^k, v^k) \leq \dots \leq (1 + \tau C)^{k+1} P(u^0, v^0) \leq \\
&\leq e^{CT} P(u^0, v^0).
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

როგორც უკვე (1.4.1) დამოკიდებულებებში აღვნიშნეთ, დისკრეტული ფუნქციები v_1 და v_2 არიან შემოსაზღვრულები. მაშასადამე, (1.4.1) და (1.4.7) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით ვღებულობთ თეორემა 1.4.1-ის სამართლიანობას.

§ 1.5. დეკომპოზიციური მოდელის ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის კრებადობა

შევისწავლოთ (1.3.1) – (1.3.3) ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის კრებადობა [43, 45, 58].

თეორემა 1.5.1. თუ (1.1.1) - (1.1.3) დიფერენციალურ ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი U, V_1, V_2 , მაშინ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი რომ ყოველი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის (1.3.1) - (1.3.3) სქემა კრებადია როცა, $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ და სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$\|u_{1\bar{x}} - U_{\bar{x}}\|_1 + \|u_{2\bar{y}} - U_{\bar{y}}\|_2 + \|v_1 - V_1\|_1 + \|v_2 - V_2\|_2 \leq C(\tau + h^2).$$

დამტკიცება. ცდომილებებისთვის $z_\alpha = u_\alpha - U$ და $s_\alpha = v_\alpha - V_\alpha, \alpha = 1, 2$, (1.3.1), (1.3.2) და (1.3.4), (1.3.5) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$z_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}} - \hat{V}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}} - V_2 U_{\bar{y}})_y - \varphi_1,$$

$$z_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}} - \hat{V}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}} - V_2 U_{\bar{y}})_y - \varphi_2,$$

$$s_{1t} = -\hat{v}_1 + \hat{V}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) - g_1(V_1 U_{\bar{x}}) - \chi_1,$$

$$s_{2t} = -\hat{v}_2 + \hat{V}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) - g_2(V_2 U_{\bar{y}}) - \chi_2.$$

შემდეგი დამოკიდებულებების გათვალისწინებით:

$$v_1 u_{1\bar{x}} - V_1 U_{\bar{x}} = v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}},$$

$$v_2 u_{2\bar{y}} - V_2 U_{\bar{y}} = v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}},$$

$$g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) - g_1(V_1 U_{\bar{x}}) = g_1'(\xi_1)(v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}}),$$

$$g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) - g_2(V_2 U_{\bar{y}}) = g_2'(\xi_2)(v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}}),$$

გვაქვს:

$$\xi_1 = \eta v_1 u_{1\bar{x}} + (1 - \eta) V_1 U_{\bar{x}}, \quad 0 < \eta < 1,$$

$$\xi_2 = \eta v_2 u_{2\bar{y}} + (1 - \eta) V_2 U_{\bar{y}}, \quad 0 < \eta < 1.$$

ზემოთ მოყვანილი ტოლობებისა და (1.3.3), (1.3.6) პირობების გათვალისწინებით $z_\alpha, s_\alpha, \alpha = 1, 2$ ცდომილებებისთვის ვღებულობთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$z_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}} + \hat{s}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}})_y - \varphi_1, \quad (1.5.1)$$

$$z_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}} + \hat{s}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}} + \hat{s}_2 \hat{U}_{\bar{y}})_y - \varphi_2,$$

$$s_{1t} = -\hat{s}_1 + g'_1(\xi_1)(v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}}) - \chi_1, \quad (1.5.2)$$

$$s_{2t} = -\hat{s}_2 + g'_2(\xi_2)(v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}}) - \chi_2,$$

$$z_1(x, y, 0) = z_2(x, y, 0), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$s_1(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad s_2(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{2h}, \quad (1.5.3)$$

$$z_1(x, y, t) = z_2(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_h,$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_1 = (v_1 z_{1\bar{x}} + s_1 U_{\bar{x}})_x, \quad B_2 = (v_2 z_{2\bar{y}} + s_2 U_{\bar{y}})_y,$$

$$\hat{B}_1 = (\hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}} + \hat{s}_1 \hat{U}_{\bar{x}})_x, \quad \hat{B}_2 = (\hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}} + \hat{s}_2 \hat{U}_{\bar{y}})_y,$$

მაშინ (1.5.1) სხვაობიანი განტოლებები შესაძლებელია გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$z_{1t} = \hat{B}_1 + B_1 - \varphi_1, \quad (1.5.4)$$

$$z_{2t} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 - \varphi_2.$$

გავამრავლოთ (1.5.4) განტოლებები სკალარულად τB_{1t} და τB_{2t} სიდიდეებზე შესაბამისად. მიღებული ტოლობების აჯამვით და (1.4.2) დამოკიდებულების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \tau(z_{1t}, B_{1t}) + \tau(z_{2t}, B_{2t}) &= \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) - \\ &- \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 - \tau(\varphi_1, B_{1t}) - \tau(\varphi_2, B_{2t}). \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

თუ გავითვალისწინებთ B_α ფუნქციის სახეს, დისკრეტულ ანალოგებისთვის ნაწილობითი ინტეგრებისა და ნამრავლის გაწარმოებისა ფორმულების, ასევე (1.5.3) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, (1.5.5) ტოლობიდან გვაქვს

$$\begin{aligned} \tau\{(z_{1\bar{x}t}, \hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}t})_1 + (z_{1\bar{x}t}, v_1 z_{1\bar{x}t})_1 + (z_{2\bar{y}t}, \hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}t})_2 + (z_{2\bar{y}t}, v_2 z_{2\bar{y}t})_2 + \\ + (z_{1\bar{x}t}, s_{1t} \hat{U}_{\bar{x}t})_1 + (z_{1\bar{x}t}, s_1 U_{\bar{x}t})_1 + (z_{2\bar{y}t}, s_{2t} \hat{U}_{\bar{y}t})_2 + (z_{2\bar{y}t}, s_2 U_{\bar{y}t})_2\} + \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) = \\
& = \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \tau(\varphi_1, B_{1t}) + \tau(\varphi_2, B_{2t}).
\end{aligned}$$

შევაფასოთ (1.5.6) უტოლობის მარცხენა მხარეში მყოფი სკალარული ნამრავლი. ზუსტი U, V_1, V_2 ამონახსნების საკმარისად გლუვობის, (1.4.1) დამოკიდებულების და ε -უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$(z_{1\bar{x}t}, \hat{v}_1 \hat{z}_{1\bar{x}t}]_1 \geq c \|z_{1\bar{x}t}\|_1^2, (z_{2\bar{y}t}, \hat{v}_2 \hat{z}_{2\bar{y}t}]_2 \geq c \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2, \quad (1.5.7)$$

$$(z_{1\bar{x}t}, v_1 z_{1\bar{x}}]_1 \leq \varepsilon C \|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|z_{1\bar{x}}\|_1^2, \quad (1.5.8)$$

$$(z_{2\bar{y}t}, v_2 z_{2\bar{y}}]_2 \leq \varepsilon C \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|z_{2\bar{y}}\|_2^2,$$

$$(z_{1\bar{x}t}, s_1 U_{\bar{x}t}]_1 \leq \varepsilon C \|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|s_1\|_1^2, \quad (1.5.9)$$

$$(z_{2\bar{y}t}, s_2 U_{\bar{y}t}]_2 \leq \varepsilon C \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \|s_2\|_2^2.$$

გამოვიყენოთ (1.5.2) ტოლობები $(z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, s_{\alpha t} U_{\bar{x}_\alpha t}]_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, სკალარული ნამრავლის შესაფასებლად (შემოტანილია აღნიშვნები: $x_1 = x$, $x_2 = y$):

$$\begin{aligned}
& (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \hat{v}_\alpha \hat{z}_{\alpha\bar{x}_\alpha t}]_\alpha = (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \hat{s}_\alpha \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha - (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, g'_\alpha(\xi_\alpha) v_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha} \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha - \\
& \quad - (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, g'_\alpha(\xi_\alpha) s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha} \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha - (z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \varphi_\alpha \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha \leq \\
& \leq \varepsilon C \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}\|_\alpha^2 + \frac{C}{4\varepsilon} (\|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|\varphi_\alpha\|_\alpha^2).
\end{aligned} \quad (1.5.10)$$

(1.5.7) – (1.5.10) უტოლობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
& \tau c \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) \leq \\
& \leq \tau \varepsilon C \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \\
& + \frac{C}{4\varepsilon} \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{s}_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 + \|s_1\|_1^2 + \|\varphi_1\|_1^2 + \right.
\end{aligned} \quad (1.5.11)$$

$$+ \|s_2\|_2^2 + \|\varphi_2\|_2^2) + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \tau(\varphi_1, B_{1t}) + \tau(\varphi_2, B_{2t}).$$

დავუმატოთ (1.5.11) უტოლობის ორივე მხარეს შემდეგი გამოსახულება

$$\tau(z_{1\bar{x}t}, \hat{z}_{1\bar{x}} + z_{1\bar{x}}]_1 + \tau(z_{2\bar{y}t}, \hat{z}_{2\bar{y}} + z_{2\bar{y}}]_2,$$

გვაქვს

$$\begin{aligned} & \tau C \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) + \\ & + \|\hat{z}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{z}_{2\bar{y}}\|_2^2 \leq \|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \tau(z_{1\bar{x}t}, \hat{z}_{1\bar{x}} + z_{1\bar{x}}]_1 + \\ & + \tau(z_{2\bar{y}t}, \hat{z}_{2\bar{y}} + z_{2\bar{y}}]_2 + \tau \varepsilon C \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) + \\ & + \frac{\tau C}{4\varepsilon} \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{s}_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 + \|s_1\|_1^2 + \right. \\ & \left. + \|\varphi_1\|_1^2 + \|s_2\|_2^2 + \|\varphi_2\|_2^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \frac{\tau C}{4\varepsilon} \left(\|\chi_1\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 \right) + \tau(\varphi_1, B_{1t}) + \tau(\varphi_2, B_{2t}). \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

შევავსოთ (1.5.12) უტოლობაში სკალარული ნამრავლი

$$(z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}, \hat{z}_{\alpha\bar{x}_\alpha} + z_{\alpha\bar{x}_\alpha}]_\alpha \leq \varepsilon \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}\|_\alpha^2 + \frac{1}{2} \left(\|\hat{z}_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 \right). \quad (1.5.13)$$

თუ გავითვალისწინებთ B_α ფუნქციის სახეს, (1.5.10) დამოკიდებულებებს და (1.5.2) ტოლობებს, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} & (\varphi_\alpha, B_\alpha) = \left(\varphi_\alpha, (v_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha} + s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha})_{\bar{x}_\alpha t} \right) = \\ & = -(\varphi_{\alpha\bar{x}_\alpha}, \hat{\vartheta}_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha t} + \vartheta_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha} + s_{\alpha t} \hat{U}_{\bar{x}_\alpha} + s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha \leq \\ & \leq \varepsilon C \left\{ \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}\|_\alpha^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|s_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 \right\} + \frac{C}{4\varepsilon} \|\varphi_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 = \\ & = -(\varphi_{\alpha\bar{x}_\alpha}, (-\hat{s}_{\bar{x}_\alpha} + g'_\alpha(\xi_\alpha)(\vartheta_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha} + s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha}) - \varphi_\alpha) \hat{U}_{\bar{x}_\alpha}]_\alpha \leq \\ & \leq \varepsilon C \left\{ \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha t}\|_\alpha^2 + \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|\hat{s}_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|s_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 \right\} + \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

$$+ \frac{C}{4\varepsilon} \|\varphi_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \frac{1}{2} \|\varphi_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \frac{1}{2} \|\psi_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2.$$

(1.5.13) და (1.5.14) დამოკიდებულებების გამოყენებით (1.5.12) შეფასება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} & \tau(c - \varepsilon C) \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \\ & + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) + \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \left(\|\hat{z}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{z}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \leq \\ & \leq \left[1 + \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) + \right. \\ & + \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\|\hat{s}_1\|_1^2 + \|s_1\|_1^2 + \|\hat{s}_2\|_2^2 + \|s_2\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \\ & \left. + \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(\|\chi_1\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

გავამრავლოთ (1.5.2) განტოლებები სკალარულად τs_1 და τs_2 სიდიდეებზე შესაბამისად, რათა მივიღოთ დამატებითი აპრიორული შეფასებები s_α , $\alpha = 1, 2$, ბადური ფუნქციებისთვის. გვაქვს

$$\begin{aligned} \tau(s_{\alpha t}, \hat{s}_\alpha)_\alpha + \tau \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 &= \tau(g'_\alpha(\xi_\alpha) \nu_\alpha z_{\alpha\bar{x}_\alpha}, \hat{s}_\alpha)_\alpha + \tau(g'_\alpha(\xi_\alpha) s_\alpha U_{\bar{x}_\alpha}, \hat{s}_\alpha)_\alpha - \\ & - \tau(\chi_\alpha, \hat{s}_\alpha)_\alpha \leq \frac{\tau C}{\varepsilon} \left\{ \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|s_\alpha\|_\alpha^2 \right\} + \tau \varepsilon C \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|\chi_\alpha\|_\alpha^2. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

შემდეგი მარტივი იგივეობის გამოყენებით

$$\tau(s_{\alpha t}, \hat{s}_\alpha)_\alpha = \frac{1}{2} \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 - \frac{1}{2} \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{2} \|s_{\alpha t}\|_\alpha^2,$$

(1.5.16) მიიღებს სახეს

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{2} \|s_{\alpha t}\|_\alpha^2 + \tau \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 \leq \frac{1}{2} \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \\ & + \frac{\tau C}{\varepsilon} \left\{ \|z_{\alpha\bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \tau \varepsilon C \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau}{4\varepsilon} \|\chi_\alpha\|_\alpha^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \tau \varepsilon C) \|\hat{s}_\alpha\|_\alpha^2 + \tau^2 C \|s_{\alpha t}\|_\alpha^2 \leq \\
& \leq \left(1 + \frac{\tau C}{\varepsilon}\right) \|s_\alpha\|_\alpha^2 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \|z_{\alpha \bar{x}_\alpha}\|_\alpha^2 + \frac{\tau C}{\varepsilon} \|\chi_\alpha\|_\alpha^2.
\end{aligned} \tag{1.5.17}$$

(1.5.15) და (1.5.17) შეფასებების გათვალისწინებით, საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
& \tau(c - \varepsilon C) \left(\|z_{1\bar{x}t}\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}t}\|_2^2 \right) + \frac{1}{2} \|\hat{B}_1 + \hat{B}_2\|^2 + \\
& + \frac{\tau^2}{2} (\|B_{1t}\|^2 + \|B_{2t}\|^2) + \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right) \left(\|\hat{z}_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\hat{z}_{2\bar{y}}\|_2^2 \right) + \\
& + \left[1 - \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \left(\|s_1\|_1^2 + \|s_2\|_2^2 \right) + \tau^2 C \left(\|s_{1t}\|_1^2 + \|s_{2t}\|_2^2 \right) \leq \\
& \leq \left[1 + \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \left(\|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|s_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|s_2\|_2^2 \right) + \\
& + \frac{1}{2} \|B_1 + B_2\|^2 + \tau C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left\{ \|\chi_1\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}\|_2^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.5.18}$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$, ისე, რომ $c - \varepsilon C > 0$, ხოლო τ შევარჩიოთ შემდეგი უტოლობებიდან

$$0 < 1 - \frac{\tau}{\varepsilon} < 1, 0 < 1 - \tau C \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) < 1.$$

(1.5.18) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\tau_0 > 0$, ისეთი, რომ ნებისმიერი $\tau < \tau_0$ სიდიდისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\begin{aligned}
& J(z^{j+1}, s^{j+1}) \leq (1 + \tau C) J(z^j, s^j) + \\
& + \tau \left(\|\chi_1\|_1^2 + \|\chi_2\|_2^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}\|_2^2 \right),
\end{aligned} \tag{1.5.19}$$

სადაც

$$J(z, s) = \|B_1 + B_2\|^2 + \|z_{1\bar{x}}\|_1^2 + \|s_1\|_1^2 + \|z_{2\bar{y}}\|_2^2 + \|s_2\|_2^2.$$

ერთგვაროვანი (1.5.3) საწყისი მონაცემების გათვალისწინებით (1.5.19) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$(z^{j+1}, s^{j+1}) \leq (1 + \tau C)^j \left\{ J(z^0, s^0) + \tau \sum_{k=0}^j \left(\|\chi_1^k\|_1^2 + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \|\varphi_{1\bar{x}}^k\|_1^2 + \|\chi_2^k\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}^k\|_2^2 \right\} \leq \\
& \leq Te^{TC} \max_{t_k \in \omega_\tau} \left(\|\chi_1^k\|_1^2 + \|\varphi_{1\bar{x}}^k\|_1^2 + \|\chi_2^k\|_2^2 + \|\varphi_{2\bar{y}}^k\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

თეორემა 1.5.1 დამტკიცებულია.

თავი II - დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელი

თავი II- ში შესწავლილია ორგანოზომილებიანი განტოლებათა (0.15), (0.16) სისტემისთვის გასაშუალებული მოდელი. განტოლებათა სისტემის სტრუქტურიდან გამომდინარე, ბუნებრივად დგას საკითხი აღნიშნული მოდელის შესასწავლად გამოყენებული იყოს ე.წ. დეკომპოზიციური მეთოდი. რომლის არსიც მგდომარეობს მრავალგანზომილებიანი ამოცანის ერთგანზომილებიან ამოცანებზე დაყვანის შედეგად სისტემების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნაში. ერთგანზომილებიანი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის შემდეგ ხდება მიღებული ამონახსნების კომპოზიციით საბოლოო მრავალგანზომილებიანი ამონახსნის მიღება. არსებობს აღნიშნული მიდგომის ორი ტიპი: პარალელური და მიმდევრობითი. მიმდევრობითი მიდგომის დროს მრავალგანზომილებიანი ამოცანის დაყოფის შედეგად მიღებული ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნა ხორციელდება მიმდევრობით, მკაცრად განსაზღვრული რიგითობის გათვალისწინებით, საბოლოო ამონახსნად აღებულია ბოლოს მიღებული ამონახსნი. პარალელური მიდგომის დროს მრავალგანზომილებიანი ამონახსნის პოვნის პროცესი დაიყვანება ერთგანზომილებიანი ამოცანების დამოუკიდებლად, პარალელურ რეჟიმში ამოხსნის პროცესზე და ამონახსნების მიღების შემდეგ ხორციელდება ამონახსნების კომპოზიცია რაიმე წესის მიხედვით. მრავალგანზომილებიანი სისტემების ამოხსნის დეკომპოზიციური მეთოდები განხილულია შემდეგ ნაშრომებში (იხ. მაგალითად [1, 22, 23, 74, 96, 97, 106, 120, 121]). ასეთი მიდგომის ძირითადი უპირატესობა დასმული ამოცანის შესაბამისი ალგორითმების ეკონომიურობაშია. ალგორითმი შედარებით მარტივად რეალიზებადია. გამოთვლების პროცესი სწრაფად მიმდინარეობს.

§ 2.1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ ორგანზომილებიან კერძოწარმოებულეზანი განტოლებათა (0.15), (0.16) სისტემისთვის გასაშუალებული მოდელი შესაბამისი სასწყის-სასაზღვრო პირობებით.

ვთქვათ, $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. შემოვიტანოთ $[0, T]$ სეგმენტზე ბადე: $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, \dots, N; \tau = \frac{T}{N}\}$ და ყოველ $\Delta_k = [k\tau, (k+1)\tau]$ შუალედში განვიხილოთ U_i^k და V_i^k ($i = 1, 2$) ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი გასაშუალებული ადიტიური მოდელის ამონახსნებს:

$$\eta_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1^k \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \tag{2.1.1}$$

$$\eta_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(V_2^k \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial V_1^k}{\partial t} = -V_1^k + g_1 \left(V_1 \frac{\partial U_1^k}{\partial x} \right), \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial V_2^k}{\partial t} = -V_2^k + g_2 \left(V_2 \frac{\partial U_2^k}{\partial y} \right),$$

$$U_1^k|_{x=0} = U_1^k|_{x=1} = 0, \quad U_2^k|_{y=0} = U_2^k|_{y=1} = 0, \quad U_i^0(x, 0) = U_0(x),$$

$$U_i^k(x, y, t_k) = U_i^{k-1}(x, y, t_k), \tag{2.1.3}$$

$$V_i^k(x, y, t_k) = V_i^{k-1}(x, y, t_k).$$

$$i = 1, 2.$$

სადაც

$$U^k(x, y, t) = \eta_1 U_1^k(x, y, t) + \eta_2 U_2^k(x, y, t), \quad \eta_1, \eta_2 > 0, \quad \eta_1 + \eta_2 = 1.$$

(2.1.1) – (2.1.3) განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს დეკომპოზიციურ მოდელს. (0.15) განტოლებაში წარმოდგენილი საძებნი U ფუნქციის ამოხსნის პროცესი დაიყვანება ერთგანზომილებიან U_1, U_2 ფუნქციების პოვნაზე.

§ 2.2. დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელის კრებადობა

შევისწავლოთ (2.1.1) – (2.1.3) გასაშუალებული მოდელის კრებადობა [22].

თეორემა 2.2.1. თუ (2.1.1) - (2.1.3) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი (U^k, V_1^k, V_2^k) , მაშინ იგი კრებადია (1.1.1) - (1.1.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ (U, V_1, V_2) , როცა $\tau \rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შეფასებას

$$\|U^k(t) - U(t)\|^2 + \|V_1^k(t) - V_1(t)\|^2 + \|V_2^k(t) - V_2(t)\|^2 = O(\tau^{1/2}).$$

დამტკიცება. შემოვიტანოთ ცდომილებები:

$$Z = U^k - U, \quad Z_i = U_i^k - U, \quad S_i = V_i^k - V_i, \quad i = 1, 2.$$

ცხადია, რომ $Z = \eta_1 Z_1 + \eta_2 Z_2$.

Z_i და S_i ფუნქციებისთვის გვაქვს ტოლობები:

$$\eta_i \frac{\partial Z_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} - V \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + A_i U - \eta_i A U, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} = -S_i + g_i \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} \right) - g_i \left(V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \quad (2.2.2)$$

სადაც

$$A_i U = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), \quad A U = A_1 U + A_2 U.$$

გავამრავლოთ სკალარულად (2.2.1), (2.2.2) ტოლობები შესაბამისად Z_i და S_i ფუნქციებზე. შედეგად ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\frac{1}{2} \eta_i \frac{d}{dt} \|Z_i\|^2 = J_i^1 + (A_i U, Z_i) - \eta_i (A U, Z), \quad (2.2.3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|S_i\|^2 = -\|S_i\|^2 + J_i^2, \quad (2.2.4)$$

სადაც:

$$J_i^1 = - \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} - V_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right),$$

$$J_i^2 = \left(g_i \left(V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} \right) - g_i \left(V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right), S_i \right).$$

თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას

$$Z_i = Z + \sum_{j=1}^2 \eta_j (U_i^k - U_j^k),$$

(2.2.3) შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{1}{2} \eta_i \frac{d}{dt} \|Z_i\|^2 = J_i^1 - \eta_i (AU, Z_i) + (A_i U, Z) + \left(A_i U, \sum_{j=1}^2 \eta_j (U_i^k - U_j^k) \right). \quad (2.2.5)$$

შევავსოთ J_i^1 , J_i^2 და $I_i = \sum_{j=1}^2 \eta_j (A_i U, U_i^k - U_j^k)$ გამოსახულებები. თუ გავითვალისწინებთ, რომ V_i^k ფუნქციებისათვის სამართლიანია (1.1.5), (1.1.6)-ის ანალოგიური შეფასებები, მივიღებთ

$$\begin{aligned} J_i^1 + J_i^2 &= - \left(V_i^k, \left(\frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right)^2 \right) - \left(S_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right) + \left(\overline{g_i^k}(x, t) V_i^k, S_i \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \left(\overline{g_i^k}(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i}, S_i^2 \right) \leq -\sigma_0 \left\| \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right\|^2 + \varepsilon \left\| \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} \right\|^2 + C \|S_i\|^2. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

აქ შემოტანილია აღნიშვნა

$$\overline{g_i^k}(x, t) = \int_0^1 g_i' \left(\theta V_i^k \frac{\partial U_i^k}{\partial x_i} + (1 - \theta) V_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) d\theta$$

და რამდენიმეჯერ გამოყენებულია ε - უტოლობა.

თუ ავჯამავთ (2.2.5) და (2.2.6) ტოლობებს i ინდექსის მიმართ ($i = 1, 2$) და ავიღებთ $\varepsilon < \sigma_0$, მაშინ (2.2.6) უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\eta_1 \|Z_1\|^2 + \|S_1\|^2 + \eta_2 \|Z_2\|^2 + \|S_2\|^2) + \|S_1\|^2 + \|S_2\|^2 &\leq \\ &\leq K (\|S_1\|^2 + \varphi_1 + I_1 + \|S_2\|^2 + \varphi_2 + I_2), \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

სადაც

$$\varphi_i = (A_i U, Z_i) - \eta_i (AU, Z_i), \quad i = 1, 2,$$

აღვნიშნოთ, რომ

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0 .$$

შევაფასოთ I_i გამოსახულება. თუ გავითვალისწინებთ იგივეობას

$$U_i^k - U_j^k = \int_{t_k}^t \frac{\partial}{\partial t'} (U_i^k - U_j^k) dt'$$

და დავუშვებთ, რომ $\|A_i U\| < C$, $\|\partial U_i^k / \partial t\| < C$, გვექნება

$$(A_i U, U_i^k - U_j^k) = \left(A_i U, \int_{t_k}^t \frac{\partial}{\partial t'} (U_i^k - U_j^k) dt \right) \leq C \tau^{1/2} .$$

(2.2.7) უტოლობიდან $t \in \Delta_k$ ცვლადით ინტეგრების შემდეგ, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (\eta_i \|Z_i\|^2 + \|S_i\|^2) &\leq C \sum_{i=1}^2 \int_{t_k}^t \|S_i(t^1)\| dt^1 + \\ &+ \|Z(t_k)\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|S_i(t_k)\|^2 + C \tau^{3/2} . \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ნორმის ამოზნექილობას

$$\sum_{i=1}^2 \eta_i \|Z_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^2 \|\eta_i Z_i\|^2 = \|Z\|^2 ,$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \|Z(t)\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|S_i(t)\|^2 &\leq C \sum_{i=1}^2 \int_{t_k}^t \|S_i(t^1)\|^2 dt' + \\ &+ \|Z(t_k)\|^2 + \sum_{i=1}^2 \|S_i(t_k)\|^2 + C \tau^{3/2} . \end{aligned}$$

აქედან ადვილად მიიღება შეფასება

$$\|Z(t)\|^2 + \|S_1(t_k)\|^2 + \|S_2(t_k)\|^2 \leq C \tau^{1/2} .$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2.2.1 აღვნიშნოთ, რომ კრებადობის რიგის $O(\tau^{1/4})$ შეფასების გაუმჯობესება თეორემა 2.2.1-ში შესაძლებელია. კერძოდ, თუ დავუშვებთ, რომ $\left| \frac{\partial u_t^k}{\partial t} \right| < C$, მაშინ კრებადობის რიგი იქნება $O(\tau^{1/2})$.

§ 2.3. დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა

ავაგოთ (2.1.1) - (2.1.3) გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა. სხვაობიანი სქემა.

შემოვიტანოთ (0.25) ბადეები \bar{Q} არეზე. ასევე გავითვალისწინოთ ცნობილი აღნიშვნები (0.26). ამოცანის სხვაობიანი ამონახსნის მისაღებად

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad N\tau = T\},$$

ბადის ყოველ ბიჯზე იხსნება ორ სისტემა:

პირველი სისტემა:

$$u_{1t} = \sigma_1(\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (1 - \sigma_1)(v_1 u_{1\bar{x}})_x, \quad (2.3.1)$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}), \quad (2.3.2)$$

$$u_1(x_i, y_j, 0) = U_0(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h$$

$$v_1(x_i, y_j, 0) = V_{01}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad (2.3.3)$$

$$u_1(0, y_j, t_{k+1}) = u_1(1, y_j, t_{k+1}) = 0,$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

მეორე სისტემა:

$$u_{2t} = \sigma_2(\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y + (1 - \sigma_2)(v_2 u_{2\bar{y}})_y, \quad (2.3.4)$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}), \quad (2.3.5)$$

$$u_2(x_i, y_j, 0) = U_0(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h$$

$$v_2(x_i, y_j, 0) = V_{02}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{2h}, \quad (2.3.6)$$

$$u_2(x_i, 0, t_{k+1}) = u_1(x_i, 1, t_{k+1}) = 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

u_1 და u_2 ფუნქციები განსაზღვრულია $\bar{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, v_1 და v_2 კი $\bar{\omega}_{1h\tau}$ და $\bar{\omega}_{2h\tau}$ ბადეებზე შესაბამისად, ხოლო $\sigma_1, \sigma_2 \in]0, 1]$.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ შესასწავლი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნების მნიშვნელობები $t = t_k$ შრის წერტილებში, საჭიროა დროის ყოველ შუალედში ახალ შრეზე გადასვლისას პარალელურად ვიპოვოთ (2.3.1) - (2.3.3) სისტემის u_1, v_1 ფუნქციებისა და (2.3.4) - (2.3.6) u_2, v_2 ფუნქციების მიახლოებითი ამონახსნები. საბოლოო მიახლოებით ამონახსნს წარმოადგენს v_1, v_2, u , სადაც $u = \eta_1 u_1 + \eta_2 u_2$, $\eta_1 \eta_2 > 0$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$. ახალ შრეზე გადასვლისას v_1 და v_2 ფუნქციებისთვის საწყისი პირობები განისაზღვრება წინა შრეზე მიღებული ამონახსნების შედეგად, ხოლო u_1 და u_2 ფუნქციებისთვის საწყისი პირობას წარმოადგენს წინა შრეზე მიღებული u ფუნქცია. აღნიშნული მეთოდი არის გასაშუალებული პარალელური ტიპის დეკომპოზიციური მეთოდი.

მიახლოებითი ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ ასევე მიმდევრობითი ტიპის დეკომპოზიციის მეთოდით, რაც გულისხმობს დროის ყოველ შუალედში მიმდევრობით ამოიხსნას ამოცანა ჯერ (u_1, v_1) -ს მიმართ, შემდეგ (u_2, v_2) -ს მიმართ და საბოლოო ამონახსნად გამოცხადდეს (v_1, v_2, u_2) .

რადგანაც ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება ერთგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნაზე, შესაბამისად (2.3.1) - (2.3.6) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (0.15) - (0.16) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ და იგი კრებადია (0.15) - (0.16) ამოცანის ამონახსნისაკენ, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

თავი III - ალგორითმების რეალიზაცია და შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების ანალიზი

თეორიული კვლევების გამყარება პრაქტიკული კომპონენტით გამოყენებითი მათემატიკის მნიშვნელოვან თანმხლებ პროცესს წარმოადგენს. წარმოდგენილი დისერტაციის ფარგლებში რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება შესაბამისი ალგორითმების აგებას, მიღებული მონაცემების დამუშავებას და წარმოდგენას გულისხმობს. დისერტაციის მესამე თავი ეთმობა თეორიული კვლევების შესაბამისი ალგორითმების რეალიზაციის შედეგების აღწერასა და წარმოდგენას. მასში მოყვანილია ცვალებადი მიმართლების სხვაობიანი (1.3.1) – (1.3.3) სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი (2.3.1) - (2.3.6) სქემის ალგორითმების რეალიზაციებით მიღებული რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები. აღწერილია სხვაობიანი სქემით მიღებული ალგორითმი და შესაბამისი კომპიუტერული რეალიზაციის პროცესი. ალგორითმების რეალიზაცია განხილულია შესაბამისი ტესტების საფუძველზე. რიცხვითი მონაცემების მისაღებად დაწერილია კომპიუტერული კონსოლური პროგრამა პროგრამირების ენა C++-ის საშუალებით. ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები წარმოდგენილია გრაფიკული სახით. ზემოთ განხილული ორი მეთოდით მიღებული შედეგები შედარებულია ერთმანეთთან და გაკეთებულია შესაბამისი დასკვნები.

§ 3.1. ალგორითმების რეალიზაციის მნიშვნელოვანი ასპექტები

რიცხვითი მეთოდების მნიშვნელოვან და განუყოფელ ნაწილს წარმოადგენს სხვაობიანი სქემების შესაბამისი ალგორითმის რეალიზაციის პროცესი. შესაბამისი ალგორითმის საფუძველზე პროგრამის აგება, მიღებული რიცხვითი შედეგების წარმოდგენა და თვალსაჩინოებისთვის შესაბამისი გრაფიკების აგება. ალგორითმის რეალიზაციით მიღებული რიცხვითი შედეგები ამყარებს შესაბამის თეორიულ კვლევას. დისერტაციის ფარგლებში (1.1.1) - (1.1.3) სისტემის მიახლოებითი ამოხსნის

შესახებ თეორიული კვლევების გადამოწმებისთვის დაიწერა კომპიუტერული პროგრამა.

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის პოვნის პროცესში წარმოშობილ ამოცანებში განსაზღვრული ალგორითმისთვის კომპიუტერული პროგრამის შემუშავებასა და მიღებული რიცხვითი შედეგების წარმოდგენისათვის ჩატარდა რამოდენიმე ეტაპიანი სამუშაო, რომელსაც გარკვეული სპეციფიკა ახასიათებს.

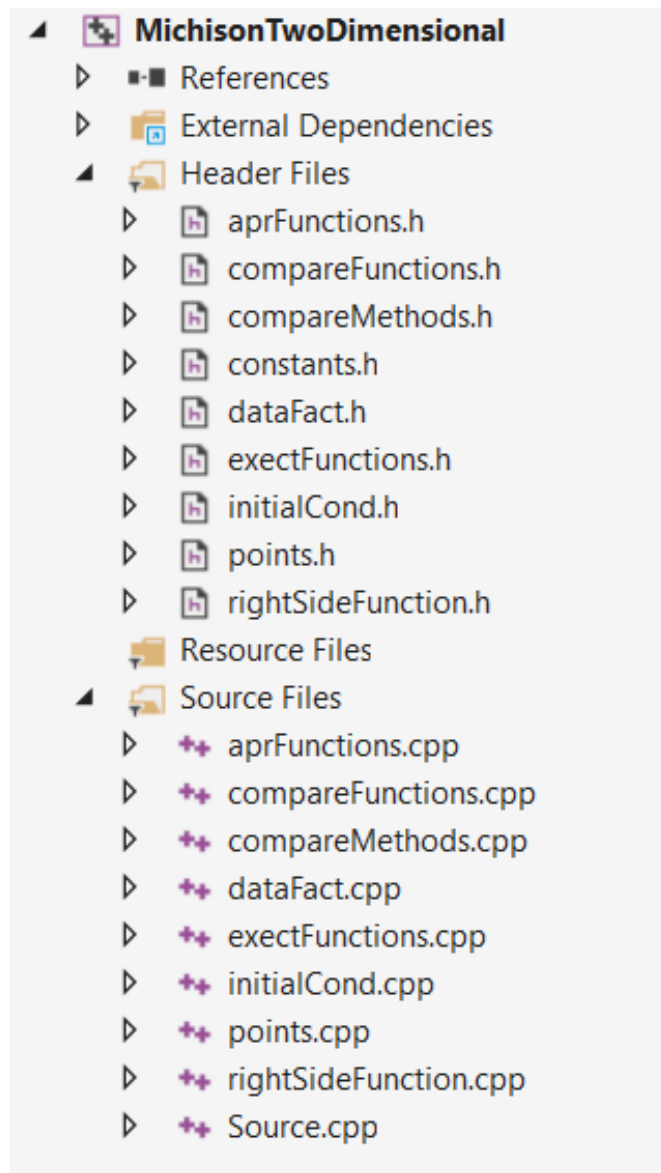
თანმიმდევრულად განხორციელდა შემდეგი სამუშაო:

- საწყის ეტაპზე განისაზღვრა სხვაობიანი სქემის შესაბამისი ალგორითმის აგების გზები, განისაზღვრა ალგორითმის რეალიზაციისთვის საჭირო ტექნოლოგია;
- კომპიუტერული პროგრამის შედეგის შესამოწმებლად შეირჩა შესასწავლი ამოცანის შესაბამისი პრაქტიკული ტესტები, ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის საწყის-სასაზღვრო პირობებს. აღნიშნული ფუნქციები დისერტაციის ფარგლებში მოხსენიებულია როგორც ზუსტი ამონახსნები;
- ტესტების შერჩევის შემდეგ დადგინდა შესაბამისი მარჯვენა მხარეები. რადგანაც (1.1.1) - (1.1.3) ამოცანა წარმოადგენს ორგანზომილებიან კერძოწარმოებულების შემცველ სისტემას, შესაბამისი ტესტებში განსაზღვრული ფუნქციების გაწარმოების შედეგად რიგ შემთხვევაში მიიღება საკმაოდ დიდი გამოსახულება (მარჯვენა მხარე). მარჯვენა მხარის დასადგენად გამოყენებულია პროგრამული უზრუნველყოფა MATLAB, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია სიმბოლური გამოთვლების წარმოება;
- მარჯვენა მხარის მიღების შემდეგ განხორციელდა მისი გადატანა დაპროგრამების გარემოში პროგრამირების ენა C++-ის სინტაქსის დაცვით;
- შემდეგ ეტაპზე ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპების დაცვით განისაზღვრა კომპიუტერული პროგრამის აგებისთვის აუცილებელი კლასები;
- შემუშავდა კლასების ურთიერთდამაკავშირებელი ლოგიკა, თითოეული კლასისთვის მისი დანიშნულების გათვალისწინებით განისაზღვრა შესაბამისი ცვლადები, კონსტრუქტორები და მეთოდები;
- აიგო ალგორითმი, დაიტესტა დაწერილი პროგრამული კოდი;

- რადგანაც შესასწავლი ამოცანის ამონახსნს ფუნქციები წარმოადგენენ, რომელთა ანალიზური სახით წარმოდგენა ვერ ხერხდება, მიღებული შედეგის წარმოდგენის საშუალებაა რიცხვები და გრაფიკები, პროგრამული კოდის შედეგად მიღებული რიცხვითი მონაცემების საფუძველზე აიგო გრაფიკები. სამგანზომილებიანი გრაფიკების ასაგებად გამოყენებულია პროგრამული უზრუნველყოფა MATHCAD, რომელშიც ინტეგრირებულია გრაფიკების აგებისთვის საჭირო მოსახერხებელი ინტერფეისი;
- ჩატარებულია მიღებული შედეგების ანალიზი.

დისერტაციის ფარგლებში დაიწერა კონსოლური პროგრამა პროგრამირების ენა C++-ზე რომელიც მოიცავს თვრამეტ ფაილს, აქედან ცხრა .h(კლასის) და ცხრა .cpp გაფართოების ფაილს. პროგრამის დაწერისას გათვალისწინებულია პროგრამის შემუშავების რეკომენდაციები, გამოყენებულია ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპები და ოპტიმალური დაპროგრამების ძირითადი ელემენტები. თითოეულ ფაილში აღწერილ კოდს თან ერთვის კომენტარები ქართულ ენაზე, რომელიც მომხარებელს საშუალებას აძლევს მარტივად გაერკვეს კლასის მეთოდების დანიშნულებასა და გამოყენების სპეციფიკაში.

ძირითადი კლასები დაიყო ორ ფაილად .h და .cpp გაფართოების ფაილებად, .h გაფართოების ფაილებში აღწერილია კლასის ცვლადები, კონსტრუქტორები, გამოყენებული მეთოდები. კონსტრუქტორებისა და მეთოდების განსაზღვრის პროცესში გათვალისწინებულია როგორც დასმული ამოცანის, ასევე ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების სპეციფიკა. .cpp ფაილებში ხორციელდება შესაბამის .h ფაილში აღწერილი მეთოდების იმპლემენტაცია, პროგრამის ძირითადი კოდიც აღნიშნულ ფაილებშია განთავსებული.



ნახ. 3.1.1 კომპიუტერულ პროგრამაში არსებული ფაილები.

წარმოდგენილი კლასების უმეტესობაში განსაზღვრულია მონაცემების გამოტანისთვის საჭირო მეთოდები, რომლებიც პროგრამის აგებისა და ტესტირების პროცესისთვის მნიშვნელოვან ინსტრუმენტს წარმოადგენენ, აღნიშნული მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია პროგრამის სრული სურათის დანახვა, მეთოდების საშუალებით შესაძლებელია პროგრამის მუშაობაზე თანმიდევრული დაკვირვება და შესაბამისი ანალიზის ჩატარება.

ფაილების აღწერა და კლასებში წარმოდგენილი ძირითადი ცვლადები, კონსტრუქტორების და მეთოდების პროტოტიპები თანდართული კომენტარებით (კომენტარები პროგრამულ კოდს თან ერთვის მარჯვნიდან ან ქვემოდან):

Source.cpp წარმოადგენს გამშვებ ფაილს, რომელიც შეიცავს main() მეთოდს. მასში ხორციელდება ძირითადი კლასების შექმნა და მეთოდების გამოძახება ალგორითის შესაბამისი თანმიმდევრობით.

```
int main() {
    exactFunctions exactFunctions(true); // ზუსტი ამონახსნები (ტესტების გამოტანა)
    initialCond initialConditionsForFunctions(exactFunctions);
    // საწყისი მნიშვნელობები (ზუსტი ფუნქციები)
    for (int i = 0; i < M + 1; i++) {
        rightFunctions = new rightSideFunction(i, exactFunctions.getTestNumber());
        // მარჯვენა მხარე (შრის ნომერი, ტესტის ნომერი)
        aprFunctions calculateAproximate(initialConditionsForFunctions.getU0(),
            initialConditionsForFunctions.getV10(),
            initialConditionsForFunctions.getV20(),
            rightFunctions->getFRu(),
            rightFunctions->getFRv1(),
            rightFunctions->getFRv2());
        // ობიექტი, რომელიც ითვის მიახლოებითი ამონახსნს
    }
    calculateAproximate.printVvalues();
}
```

constants.h ფაილი განკუთვნილია პროგრამაში გამოყენებული კონსტანტებისთვის. მასში განსაზღვრულია მათემატიკური კონსტანტები, კვანძების წერტილების რაოდენობა, კვანძებს შორის მანძილები და ა.შ.

```
#define e 2.718281828459045
#define Pi 3.141592653589793
// მათემატიკური მუდმივები
#define X 1.0
#define Y 1.0
#define T 1.0
//მაქსიმალური მნიშვნელობა ღერძების გასწვრივ
#define M 25
#define N 1000
#define h X/M
#define tau T/N
#define Curant tau/h*h // ნაკლებია 0.5
// მუდმივები
```

points.h, points.cpp ფაილებში წარმოდგენილია კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ბადის წერტილების აგებას და შესაბამისი მასივების შევსებას ბადის წერტილებით, განსაზღვრულია მეთოდები, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია კვანძების წერტილების დაბრუნება მასივის სახით.

```
class points
{
private:
    double* x; // კვანძების მნიშვნელობები სიბრტყეზე
    double* m_x; // შუა კვანძებში მნიშვნელობები სიბრტყეზე
    double* y;
    double* m_y;
    double* t; // კვანძების მნიშვნელობები t ღერძზე (დროითი ღერძი)
```

```

// სტრიქონში მონაცემების რაოდენობა, გამოიყენება ბეჭდვის შემთხვევაში
int countLine;

public:
points(); // კვანძების ინიციალიზაცია
void setCountLine(int countLine);
// სტრიქონში მონაცემების რაოდენობის ინიციალიზაცია
double* getX(); // აბრუნებს კვანძების მასივს X ღერძის გასწვრივ
double* getMX(); // აბრუნებს შუა კვანძების მასივს X ღერძის გასწვრივ
double* getY();
double* getMY();
double* getT(); // აბრუნებს კვანძების მასივს T ღერძის გასწვრივ
void printXpoints(); // ბეჭდავს კვანძების მნიშვნელობებს X ღერძზე
void printMXpoints(); // ბეჭდავს შუა კვანძების მნიშვნელობებს X ღერძზე
void printYpoints();
void printMYpoints();
void printTpoints(); // ბეჭდავს კვანძების მნიშვნელობებს T ღერძზე
};

```

exectFunctions.h, exectFunctions.cpp ფაილებში წარმოდგენილი კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები უზრუნველყოფენ ფუნქციების ზუსტი მნიშვნელობების დათვლას ტესტების და შრეების გათვალისწინებით, მეთოდების საშუალებით შესაძლებელია ტესტების გამოტანა/არჩევა და შესაბამისი შრეზე ზუსტი მნიშვნელობების ჩვენება.

```

class exectFunctions
{
private:
long double*** Ue; // U ფუნქციის ზუსტი ამონახნების მასივი
long double*** Ve1; // V1 ფუნქციის ზუსტი ამონახნების მასივი
long double*** Ve2; // V1 ფუნქციის ზუსტი ამონახნების მასივი
int test = 1; // ტესტის ნომერი, გაჩუმების პრინციპით ეშვება 1(პირველი ტესტი)

public:
void allocatedMemory(); // დინამიური მეხსიერების გამოყოფა
exectFunctions(); // უპარამეტრო კონსტრუქტორი
exectFunctions(bool);
// ფუნქციების ზუსტი მნიშვნელობების ავტომატურად დათვლა, (ტესტების გამოტანა)
void inputTestNumber(); // ტესტების გამოტანა და შესაბამისი ნომრის შეტანა
long double U_Exact(double, double, int);
long double V1_Exact(double, double, int);
long double V1_Exact(double, double, int);
// ზუსტი სატესტო ფუნქციები, (x ბადის კვანძი, y ბადის კვანძი, t შრე, ტესტის ნომერი)
void fill_Exact();
// ბადეზე ფუნქციების ზუსტ მნიშვნელობების დათვლა, (ტესტის ნომერი)
long double*** getUe(); // აბრუნებს U ფუნქციის მნიშვნელობების მასივს
long double*** getVe(int); // აბრუნებს V ფუნქციების მნიშვნელობების მასივს
int getTestNumber(); // აბრუნებს ტესტის ნომერს
void printUe(); // ბეჭდავს U ფუნქციის ზუსტ მნიშვნელობებს
void printUe(int);
// ბეჭდავს U ფუნქციის ზუსტ მნიშვნელობებს მიმდინარე შრის ნომრის მიხედვით
void printVe(int); // ბეჭდავს V ფუნქციების ზუსტ მნიშვნელობებს
void printVe(int, int);
// ბეჭდავს V ფუნქციების ზუსტ მნიშვნელობებს მიმდინარე შრის ნომრის მიხედვით
};

```

initialCond.h, initialCond.cpp ფაილებში წარმოდგენილი კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები უზრუნველყოფენ ფუნქციების საწყისი და სასაზღვრო მნიშვნელობების დათვლას.

```
class initialCond
{
    long double** U0; // U ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობები
    long double** V10; // V1 ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობები
    long double** V20; // V2 ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობები
public:
    initialCond(exectFunctions);
    // საწყისი მნიშვნელობების დათვლა (ზუსტი ფუნქციების ობიექტი)
    long double** getU0(); // აბრუნებს U ფუნქციის საწყის მნიშვნელობებს
    long double** getV0(int); // აბრუნებს V ფუნქციების საწყის მნიშვნელობებს
    void printU0(); // ბეჭდავს U ფუნქციის საწყის მნიშვნელობებს
    void printV0(int); // ბეჭდავს V ფუნქციის საწყის მნიშვნელობებს
};
```

rightSideFunction.h, rightSideFunction.cpp ფაილებში წარმოდგენილი კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები უზრუნველყოფენ ტესტების შესაბამისი მარჯვენა მხარეების მნიშვნელობების დათვლას. მარჯვენა მხარეების გამოსახულებების აღება ხდება MATLAB-ში დამუშავებული სიმბოლური გამოთვლების შესაბამისად.

```
class rightSideFunction
{
private:
    long double** RightFunctionForU; // U ფუნქციისთვის მარჯვენა მხარე
    long double** RightFunctionForV1; // V1 ფუნქციისთვის მარჯვენა მხარე
    long double** RightFunctionForV2; // V2 ფუნქციისთვის მარჯვენა მხარე
    long int level; // შრის ნომერი
    points p;
public:
    rightSideFunction(); // დინამიური მეხსიერების გამოყოფა
    rightSideFunction(int, int);
    // მარჯვენა მხარის ავტომატური დათვლა (მიმდინარე შრის ნომერი, ტესტი ნომერი)
    long double uRFunction(double, double, double, int);
    // U ფუნქციის მარჯვენა მხარე (x ბადის კვანძი, y ბადის კვანძი, t ბადის კვანძი, ტესტის ნომერი)
    long double vRFunction(double, double, int);
    void fillRightFunction(int, int);
    // მარჯვენა მხარის დათვლა მიმდინარე შრეზე (შრის ნომერი, ტესტის ნომერი)
    long double** getFRu();
    // აბრუნებს u ფუნქციის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს მიმდინარე შრეზე
    long double** getFRv(int);
    // აბრუნებს v ფუნქციების მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს მიმდინარე შრეზე
    void printFRu();
    // ბეჭდავს u ფუნქციის მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს მიმდინარე შრეზე
    void printFRv(int);
    // ბეჭდავს v ფუნქციების მარჯვენა მხარის მნიშვნელობებს მიმდინარე შრეზე
};
```

dataFact.h, dataFact.cpp ფაილებში დამუშავებულია ფაქტორიზაციის მეთოდის შესაბამისი ალგორითმი, აღნიშნული მეთოდის გამოყენება ერთ-ერთ საკვანძო საკითხს წარმოადგენს სრული პროგრამის შემუშავებისთვის, დისერტაციის ფარგლებში ფაქტორიზაციის მეთოდის პროგრამული რეალიზაცია ცალკე პროგრამის სახითაც განხორციელდა, აღნიშნული პროგრამაში არა მხოლოდ ალგორითმია აგებული, არამედ მისი საშუალებით შესაძლებელია აღნიშნულ მეთოდის მუშაობაზე საფუძვლიანი დაკვირვება.

```
class dataFact
{
private:
    long double* kniu = new long double[4]{ 0, 0, 0, 0 };
    // საწყისი და საბოლოო მნიშვნელობების გამოსათვლი მნიშვნელობები
    long double* aCoef; // ქვედა დიაგონალი
    long double* cCoef; // დიაგონალი
    long double* bCoef; // ზედა დიაგონალი
    long double* alpha; // alpha კოეფიციენტები
    long double* beta; // beta კოეფიციენტები
    long double* U = new long double[M + 1];
    // საძიებელი მნიშვნელობები
    long double* F; // მარჯვენა მხარე
public:
    dataFact(); // ცარიელი კონსტრუქტორი
    dataFact(long double, long double, long double, long double*);
    // მუდმივების გადაცემა კონსტრუქტორში + მარჯვენა მხარე
    dataFact(long double*, long double*, long double*, long double*);
    // მასივის გადაცემა კონსტრუქტორში + მარჯვენა მხარე
    void setACB(long double, long double, long double, long double*);
    // მუდმივების გადაცემა ფაქტორიზაციაში + მარჯვენა მხარე
    void setACB(long double*, long double*, long double*, long double*);
    // მასივის გადაცემა ფაქტორიზაციაში + მარჯვენა მხარე
    void factorization(); // ფაქტორიზაციის მეთოდის რეალიზაცია
    void printABC(); // კოეფიციენტების ბეჭდვა
    void printU(); // მიღებული მნიშვნელობების ბეჭდვა
    long double* getFactU(); // საძიებელი მნიშვნელობების დაბრუნება
};
```

aprFunctions.h, aprFunctions.cpp ფაილებში წარმოდგენილი კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები უზრუნველყოფენ ფუნქციების მიახლოებითი მნიშვნელობების დათვლას სქემის შესაბამისად, ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის ალგორითმის აგების მეთოდები დამოუკიდებელ ფუნქციებად არის განსაზღვრული. შესაბამისი მეთოდები უზრუნველყოფენ მიღებული რიცხვითი მასივების მნიშვნელობების .txt ფაილებში ჩაწერას.

```
class aprFunctions
{
```

```

private:
    long double** U; // U ფუნქციის ამონახსნები, NxM-ზე
    long double** V1; // V ფუნქციის ამონახსნები, NxM-ზე
    dataFact* factorisation; // ფაქტორიზაციის მეთოდის ობიექტი
public:
    void allocatedMemory(); // მეხსიერების გამოყოფა
    aprFunctions(); // ცარიელი კონსტრუქტორი
    aprFunctions(long double**, long double**, long double**, long double**);
    // კონსტრუქტორი გადაეცემა საწყისი მნიშვნელობები + შესაბამისი მარჯვენა მხარეები U0,
    V0, UF, VF,
    long double funcA(long double); // ამოცანის შესაბამისი g ფუნქცია
    void printUvalues(); // მონაცემების ბეჭდვა
    void printVvalues();
    long double** getU(); // მონაცემების დაბრუნება
    long double** getV();
};

```

compareFunctions.h, compareFunctions.cpp ფაილებში წარმოდგენილი კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები უზრუნველყოფენ მიღებული მიახლოებითი და ზუსტი ამონახსნების ერთმანეთთან შედარებას, და მიღებული სხვაობების ფაილებში ჩაწერას, ფაილებში წარმოდგენილია მეთოდები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მიღებული შედეგების ცდომილების რიგის დადგენას.

```

class compareFunctions
{
private:
    long double** Uz; // ცდომილება U ფუნქციისთვის
    long double** V1z; // ცდომილება V1 ფუნქციისთვის
    long double** V2z; // ცდომილება V2 ფუნქციისთვის

public:
    void allocatedMemory(); // მეხსიერების გამოყოფა
    compareFunctions(); // ცარიელი კონსტრუქტორი

    compareFunctions(long double**, long double**, double);
    // გადაეცემა ზუსტი, მიახლოებითი ამონახსნი და შრის ნომერი
    long double** getCompareFunctions(int);
    // აბრუნებს ცდომილების მასივს გადაეცემა 1-U, 2-V1, 3-V2 ფუნქციები
    void printCompareFunctions(int);
    // ბეჭდავს ცდომილების მასივს გადაეცემა 1-U, 2-V1, 3-V2 ფუნქციები
};

```

compareMethods.h, compareMethods.cpp ფაილებში წარმოდგენილი კლასის ცვლადები, მასივები და მეთოდები უზრუნველყოფენ ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის მიხედვით დათვლილი მონაცემების შედარებას სიზუსტის თვალსაზრისით, ასევე წარმოდგენილია მეთოდები, რომლებიც უზრუნველყოფენ აღნიშნული ორი მეთოდის მანქანური დროის შესაბამის შედარებას.


```

class compareMethods
{
    private:
        long double** Uz; // ცდომილება U ფუნქციისთვის
        long double** V1z; // ცდომილება V1 ფუნქციისთვის
        long double** V2z; // ცდომილება V2 ფუნქციისთვის
        long double* time;
        // მითითებულ შრეზე ალგორითმის შესრულებისთვის დახარჯული დრო

    public:
        void allocatedMemory(); // მეხსიერების გამოყოფა
        compareMethods(); // ცარიელი კონსტრუქტორი
        compareMethods(long double**, long double**, double*);
        // გადაეცემა ზუსტი, მიახლოებითი ამონახსნი და შრის ნომრების მასივი
        long double* getCompareMethod(int);
        // აბრუნებს ცდომილების მასივს გადაეცემა, ავსებს time მასივს
        void printCompareMethods(int);
        // ბეჭდავს ცდომილების მასივს შესაბამის დროსთან
};

```

ფაილები და მათში წარმოდგენილი პროგრამული კოდი ერთმანეთთან დაკავშირებულია ლოგიკურად დაპროგრამების პრინციპების დაცვით.

§ 3.2. დეკომპოზიციური ცვალდებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემაზე დაფუძნებული მოდელის შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

სხვაობიანი სქემის ალგორითმის სიზუსტის შესამოწმებლად ბუნებრივია შესასწავლი (1.1.1) – (1.1.3) ამოცანა დაისვას მარჯვენა მხარეების გათვალისწინებით.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) = F(x_1, x_2, t), \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 - g_1 \left(V_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) = F_1(x_1, x_2, t), \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 - g_2 \left(V_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) = F_2(x_1, x_2, t),$$

შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო პირობებით:

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (3.2.3)$$

$$V_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad x \in \bar{\Omega},$$

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T],$$

განვიხილოთ (3.2.1) - (3.2.3) ამოცანის შესაბამის ცვალეზადი მიმართულეზის სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (v_2 u_{2\bar{y}})_y + \hat{f}_1, \quad (3.2.4)$$

$$u_{2t} = (\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y + \hat{f}_2,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) + \hat{\phi}_1, \quad (3.2.5)$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) + \hat{\phi}_2,$$

$$u_1(x, y, 0) = u_2(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x, y, 0) = V_{10}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad (3.2.6)$$

$$v_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

სადაც f_1, f_2, ϕ_1, ϕ_2 შესაბამისი მარჯვენა მხარეებია. ალგორითმის სრული აღქმისთვის მოვახდინოთ (3.2.4)-(3.2.6) სქემის დეტალური შესწავლა. (0.26) აღნიშვნების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\frac{u_1^{k+1} - u_1^k}{\tau} = v_{1x}^{k+1} u_{1\bar{x}}^{k+1} + v_1^{k+1} u_{1\bar{x}x}^{k+1} + v_{2y}^k u_{2\bar{y}}^k + v_2^k u_{2\bar{y}y}^k + f_1^{k+1}, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{u_2^{k+1} - u_2^k}{\tau} = v_{1x}^{k+1} u_{1\bar{x}}^{k+1} + v_1^{k+1} u_{1\bar{x}x}^{k+1} + v_{2y}^{k+1} u_{2\bar{y}}^{k+1} + v_2^{k+1} u_{2\bar{y}y}^{k+1} + f_2^{k+1},$$

$$\frac{v_1^{k+1} - v_1^k}{\tau} = -v_1^{k+1} + g_1(v_1^k u_{1\bar{x}}^k) + \phi_1^{k+1}, \quad (3.2.8)$$

$$\frac{v_2^{k+1} - v_2^k}{\tau} = -v_2^{k+1} + g_2(v_2^k u_{2\bar{y}}^k) + \phi_2^{k+1},$$

$$u_1(x_i, y_j, 0) = u_2(x_i, y_j, 0) = U_0(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x_i, y_j, 0) = V_{10}(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{1h}, \quad (3.2.9)$$

$$v_2(x_i, y_j, 0) = V_{20}(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{2h},$$

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t) = 0, \quad (x, y, t) \in \gamma_h \times \omega_\tau,$$

გადავწეროთ (3.2.8) განტოლებები შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} v_1^{k+1} &= \frac{\tau}{2} (v_1^k + g_1(v_1^k u_{1\bar{x}}^k) + \varphi_1^{k+1}), \\ v_2^{k+1} &= \frac{\tau}{2} (v_2^k + g_2(v_2^k u_{2\bar{y}}^k) + \varphi_2^{k+1}), \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

განტოლებებიდან ჩანს, რომ v_1, v_2 ფუნქციების პოვნა ახალ შრეზე ხორციელდება ცხადი სახით.

(3.2.7) განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარეში გავითვალისწინოთ პირველი და მეორე რიგის დისკრეტული ანალოგები (0.26), ასევე ჩავთვალოთ რომ v_1^{k+1}, v_2^{k+1} მნიშვნელობები ცნობილია:

$$\begin{aligned} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i,j}^k}{\tau} &= v_{1x}^{k+1} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \\ &+ v_1^{k+1} \frac{u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \\ &+ v_2^k \frac{u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k}{h} + \\ &+ v_2^k \frac{u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k}{h} + f_{1i,j}^{k+1}, \\ \frac{u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j}^k}{\tau} &= v_{1x}^{k+1} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \\ &+ v_1^{k+1} \frac{u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \\ &+ v_{2y}^{k+1} \frac{u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} + \\ &+ v_2^{k+1} \frac{u_{2i,j+1}^{k+1} - 2u_{2i,j}^{k+1} + u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} + f_{2i,j}^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

მიღებული (3.2.11)-ის პირველ განტოლებაში მარცხენა მხარეს გადავიტანოთ სამეზბნი ფუნქციები

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{1i,j}^{k+1}}{\tau} - v_{1x}^{k+1} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} - v_1^{k+1} \frac{u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} = \\
& = \frac{u_{1i,j}^k}{\tau} + v_{2y}^k \frac{u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k}{h} + \\
& + v_2^k \frac{u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k}{h} + f_{1i,j}^{k+1},
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

(3.2.12) დამოკიდებულების (რომელშიც წარმოდგენილია (3.2.11)-ის მხოლოდ პირველი განტოლება) ორივე მხარის τh გამრავლებით ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
& hu_{1i,j}^{k+1} - \tau v_{1x}^{k+1} (u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}) - \tau v_1^{k+1} (u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}) = \\
& = hu_{1i,j}^k + \tau v_{2y}^k (u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k) + \\
& + \tau v_2^k (u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k) + \tau h f_{1i,j}^{k+1},
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

(3.2.13)-ის გარდაქმნის შედეგად გვაქვს

$$\begin{aligned}
& \tau (v_{1x}^{k+1} - v_1^{k+1}) u_{1i-1,j}^{k+1} + (h - \tau v_{1x}^{k+1} + 2\tau v_1^{k+1}) u_{1i,j}^{k+1} - \tau v_1^{k+1} u_{1i+1,j}^{k+1} = \\
& = hu_{1i,j}^k + \tau v_{2y}^k (u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k) + \\
& + \tau v_2^k (u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k) + \tau h f_{1i,j}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

(3.2.14) განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ოპტიმალურ მიდგომას წარმოადგენს ფაქტორიზაციის მეთოდი. (3.2.14)-ში მკაფიოდ ჩანს ფაქტორიზაციის მეთოდისთვის საჭირო კოეფიციენტები. მას შემდეგ რაც (3.2.10)-დან ცხადი სახით ვითვლით v_1, v_2 ფუნქციებს, (3.2.14)-იდან ფაქტორიზაციის მეთოდის გამოყენებით ვპოულობთ u_1 ფუნქციას.

ჩავთვალოთ, რომ u_1^{k+1} ფუნქციები ცნობილია და ანალოგიურად გარდავექმნათ 3.2.11-ის მეორე განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{2i,j}^{k+1}}{\tau} - v_{2y}^{k+1} \frac{u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} - v_2^{k+1} \frac{u_{2i,j+1}^{k+1} - 2u_{2i,j}^{k+1} + u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} = \\
& = \frac{u_{2i,j}^k}{\tau} + v_{1x}^{k+1} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \\
& + v_1^{k+1} \frac{u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + f_{2i,j}^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

(3.2.15)-ის ორივე მხარე გავამრავლოთ τh -ზე

$$\begin{aligned} hu_{2i,j}^{k+1} - \tau v_{2y}^{k+1}(u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j-1}^{k+1}) - \tau v_2^{k+1}(u_{2i,j+1}^{k+1} - 2u_{2i,j}^{k+1} + u_{2i,j-1}^{k+1}) = \\ = hu_{2i,j}^k + \tau v_{1x}^{k+1}(u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}) + \\ + \tau v_1^{k+1}(u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}) + f_{2i,j}^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

(3.2.16) მიიღებს საბოლოო სახეს

$$\begin{aligned} \tau(v_{2y}^{k+1} - v_2^{k+1})u_{2i,j-1}^{k+1} + (h - \tau v_{2y}^{k+1} + 2\tau v_2^{k+1})u_{2i,j}^{k+1} - \tau v_2^{k+1}u_{2i,j+1}^{k+1} = \\ = hu_{2i,j}^k + \tau v_{1x}^{k+1}(u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}) + \\ + \tau v_1^{k+1}(u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}) + f_{2i,j}^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

ალგორითმის ბოლო ეტაპზე ფაქტორიზაციის მეთოდის საშუალებით იხსნება (3.2.17) განტოლებათა სისტემა.

რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩასატარებლად საჭიროა სატესტო ფუნქციების შერჩევა. მოყვანილ ტესტურ ექსპერიმენტში მარჯვენა მხარე შერჩეულია ისე, რომ ზუსტი ამონახსნია:

$$U(x, y, t) = xy(1-x)(1-y)(1+t), \quad (3.2.18)$$

$$V_1(x, y, t) = xy(1-x)(1-y)(2+t+t^2) + 1, \quad (3.2.19)$$

$$V_2(x, y, t) = xy(1-x)(1-y)(2+t+t^3) + 1,$$

და

$$g_k(\xi) = 1 + \frac{\xi^2}{1 + \xi^2}, \quad k = 1, 2. \quad (3.2.20)$$

პარამეტრების მნიშვნელობებია: $M_1 = M_2 = 20$ და $N = 1000$.

ცხრილი 3.2.1. სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვადასხვა დროითი პარამეტრისათვის.

t	ცდომილება U ფუნქციისთვის	ცდომილება V_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება V_2 ფუნქციისთვის
0.2	0.00010842385853721551	0.0000286637100943507	0.00000016589258744482
0.4	0.00038951627884258131	0.0000217683842285105	0.00000121995095070382
0.6	0.00037023791408955767	0.0000179778858910805	0.00000515877373530316
0.8	0.00008673135778793728	0.0000372260948910963	0.00000910660812003528
1.0	0.00000000000000713858	0.0000797580445488499	0.00000952916303376128

ცხრილი 3.2.2. U ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 0.5$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,0021471549271	1,97676837742577	0,97338418871288
0.05	0.00125	0,0001578888667	1,98870174081678	0,95935087040839
0.04	0.0008	0,0001614985501	1,97750127536620	0,94375063768310
0.025	0.0003125	0,0001573863179		

ცხრილი 3.2.3. V_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 0.5$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00016928004378	1,92090408449112	0,95545204224556
0.05	0.00125	0,00002171735464	1,98140675530180	0,96570337765089
0.04	0.0008	0,00001769684000	1,98465014379733	0,97732507189866
0.025	0.0003125	0,00001078629769		

ცხრილი 3.2.4. V_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 0.5$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00037078723049	1,85161023298955	0,93080511649477
0.05	0.00125	0,00021047635154	1,89582788893755	0,96791394446877
0.04	0.0008	0,00017433201902	1,95380259087501	0,98190129543250
0.025	0.0003125	0,00002150743218		

ცხრილი 3.2.5. U ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 1$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00189264232466	1,97184683282478	0,97092341641239
0.05	0.00125	0,00047151056363	1,96602530925643	0,96801265462822
0.04	0.0008	0,00021765723981	1,97647046601262	0,97323523300631
0.025	0.0003125	0,00021880758903		

ცხრილი 3.2.6. V_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 1$.

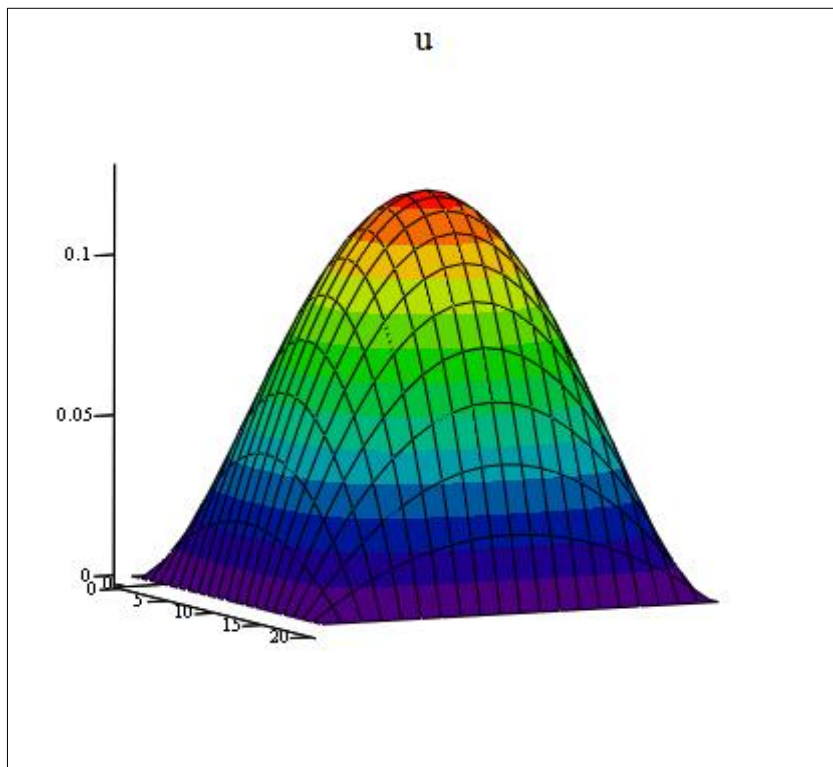
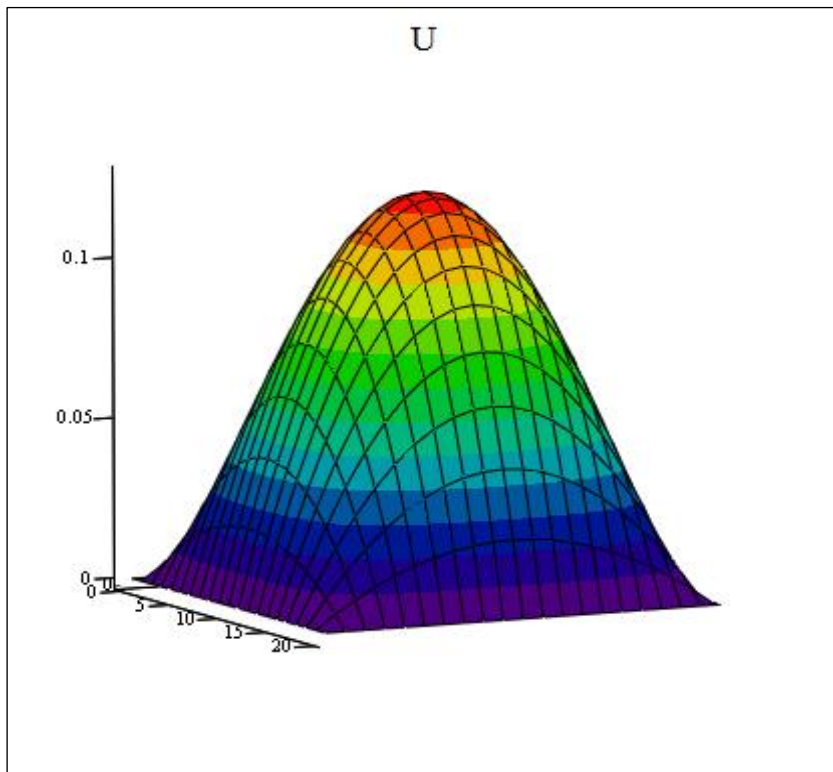
h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00065887313209	1,91962806069178	1,00981403034588
0.05	0.00125	0,00023425091499	2,01020393071454	1,00110196535727
0.04	0.0008	0,00023511580210	1,99746582360909	0,98373291180454
0.025	0.0003125	0,0000609170316		

ცხრილი 3.2.7. V_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 1$.

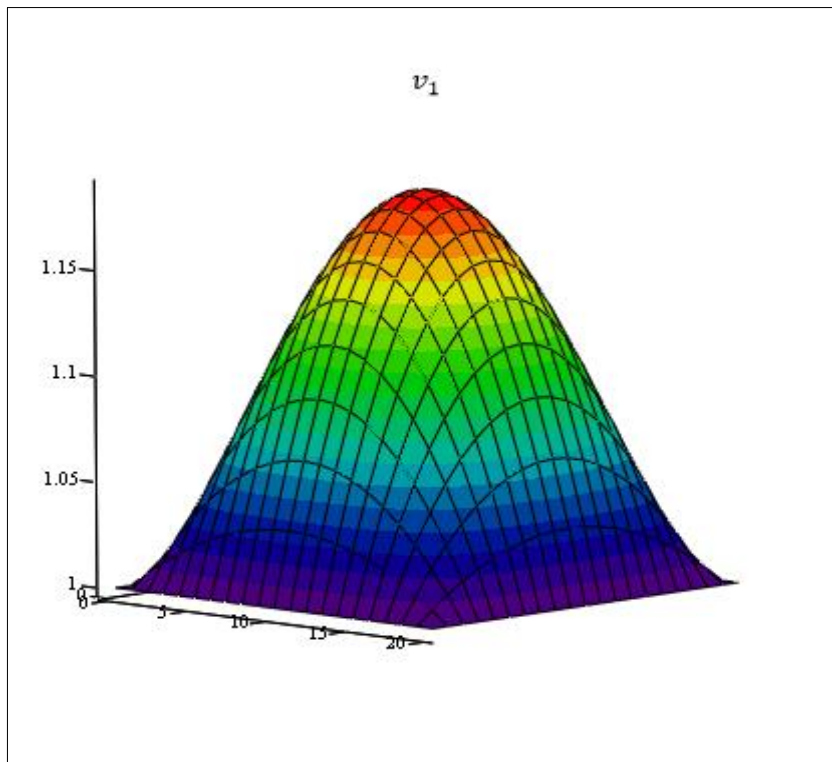
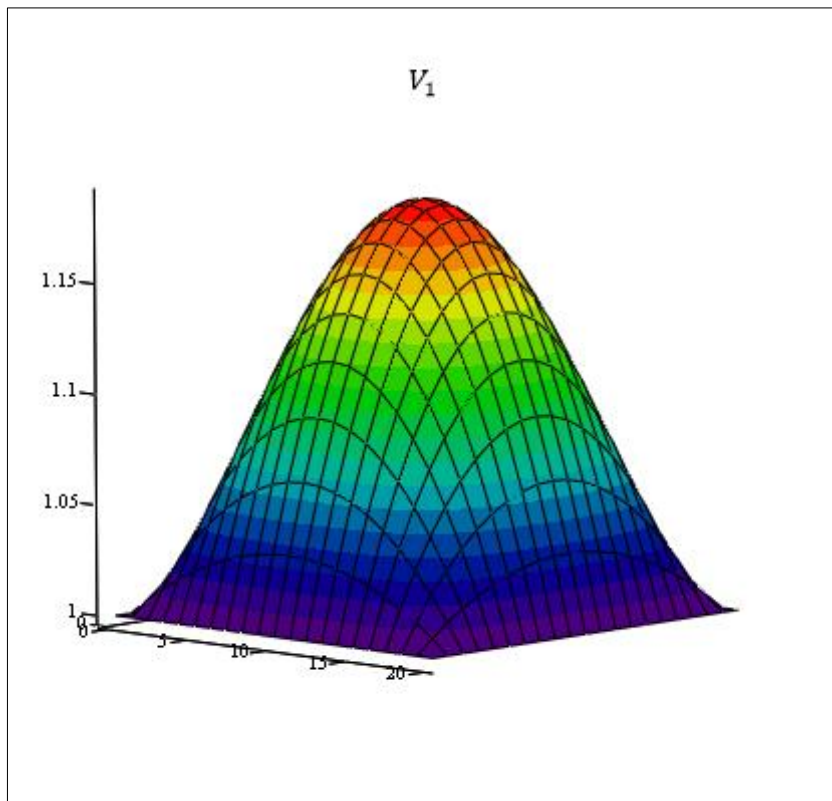
h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00150656149698	1,97533622643524	0,94266811321762
0.05	0.00125	0,00061715052894	2,00721475369074	1,00860737684537
0.04	0.0008	0,00016714231849	2,00748437582204	0,95874218791102
0.025	0.0003125	0,00080447592253		

ცდომილებებზე და კრებადობის რიგებზე დაკვირებიდან ჩანს, რომ რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემის შემთხვევაში თეორიულ კვლევებთან შესაბამისობაშია.

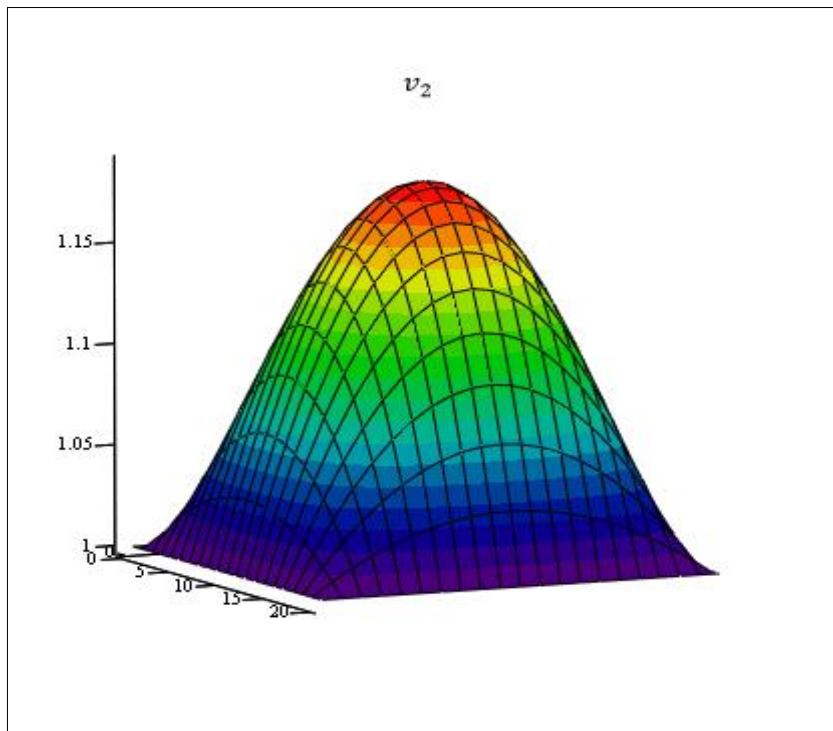
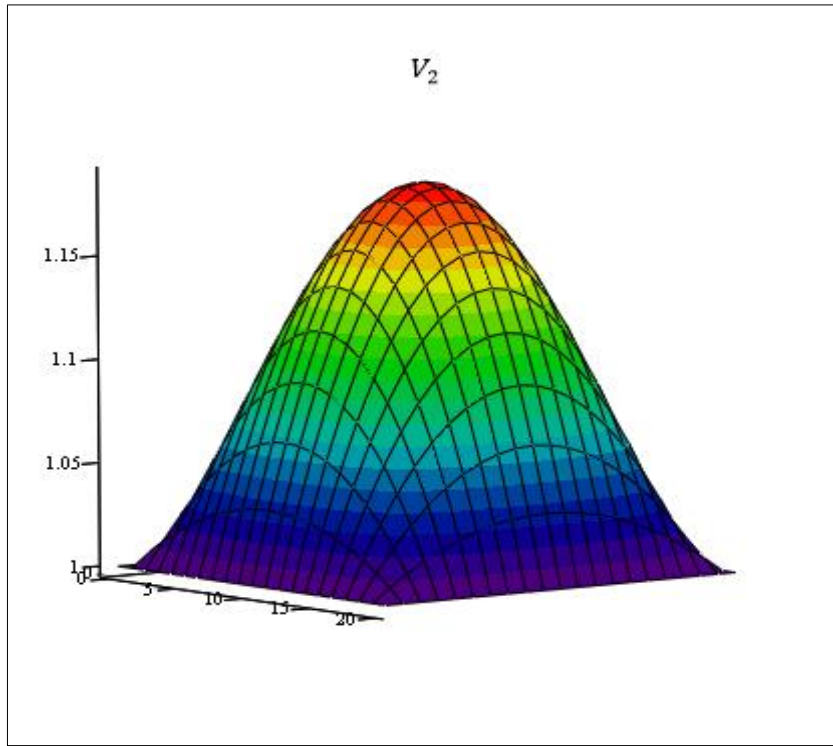
U, V_1, V_2 ფუნქციებისთვის აგებულია რიცხვითი ექსპერიმენტის შესაბამისი გრაფიკები ზუსტი, მიახლოებითი ამონახსნებისა და შესაბამისი ცდომილებისთვის.



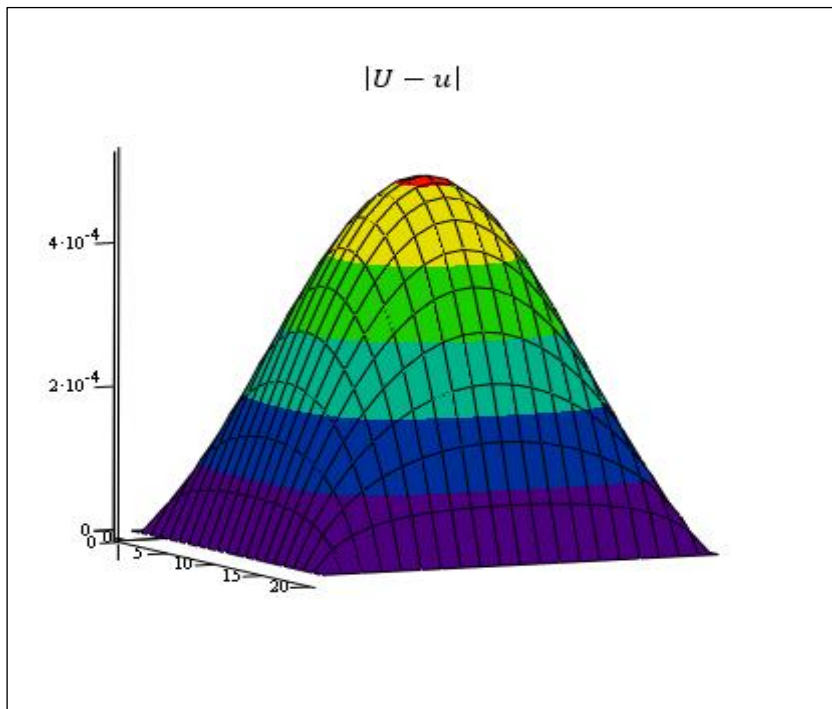
ნახ. 3.2.1. ზუსტი U (ზედა) და მიახლოებითი u (ქვედა) ამონახსნი.



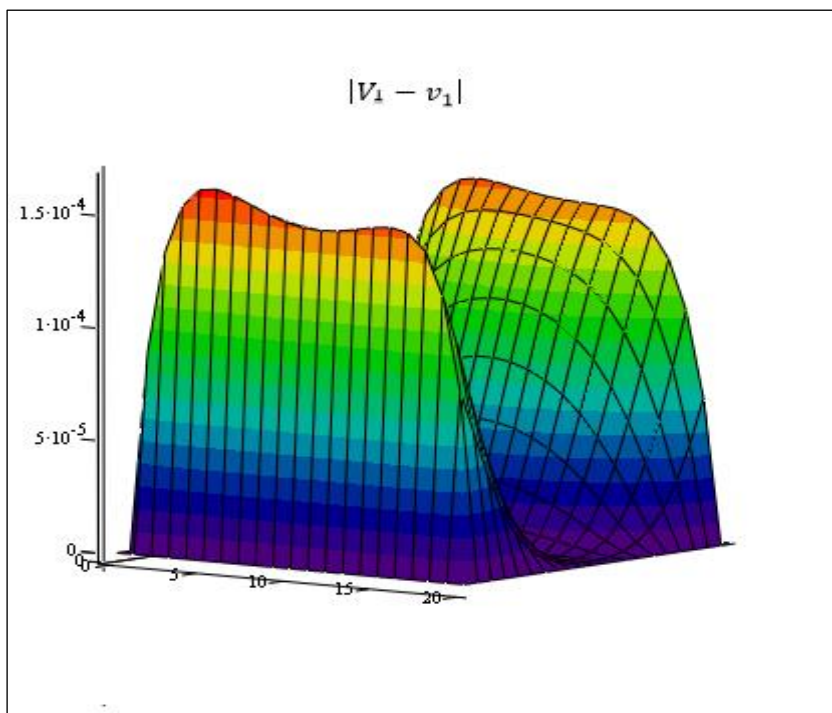
ნახ. 3.2.2. ზუსტი V_1 (ზედა) და მიახლოებითი v_1 (ქვედა) ამონახსნი.



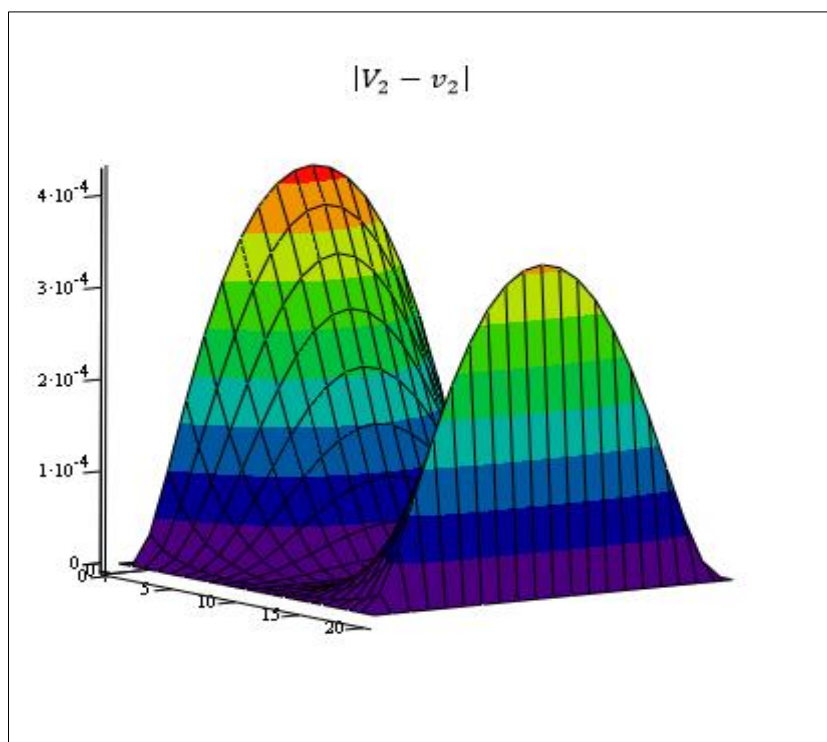
ნახ. 3.2.3. ზუსტი V_2 (ზედა) და მიახლოებითი v_2 (ქვედა) ამონახსნი.



ნახ. 3.2.4. სხვაობა ზუსტ U და მიახლოებით u ამონახსნებს შორის



ნახ. 3.2.5. სხვაობა ზუსტ V_1 და მიახლოებით v_1 ამონახსნებს შორის.



ნახ. 3.2.6. სხვაობა ზუსტ V_2 და მიახლოებით v_2 ამონახსნებს შორის.

§ 3.3. დეკომპოზიციური გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

განვიხილოთ (1.1.1) – (1.1.3) ამოცანისთვის გასაშუალებული მოდელი მარჯვენა მხარეების გათვალისწინებით:

$$\eta_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(V_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = F_1(x_1, x_2, t), \quad (3.3.1)$$

$$\eta_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(V_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) = F_2(x_1, x_2, t),$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 - g_1 \left(V_1 \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right) = \Phi_1(x_1, x_2, t), \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 - g_2 \left(V_2 \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) = \Phi_2(x_1, x_2, t),$$

შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{aligned}
U(x, y, 0) &= U_0(x, y), \\
V_1(x, y, 0) &= V_{10}(x, y), \quad V_2(x, y, 0) = V_{20}(x, y), \quad x \in \bar{\Omega}, \\
U(x, y, t) &= 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, T],
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

განვიხილოთ (3.3.1) - (3.3.3) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{1t} = \sigma_1(\hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}})_x + (1 - \sigma_1)(v_1 u_{1\bar{x}})_x + \hat{f}_1, \tag{3.3.4}$$

$$u_{2t} = \sigma_2(\hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}})_y + (1 - \sigma_2)(v_2 u_{2\bar{y}})_y + \hat{f}_2,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) + \hat{\phi}_1, \tag{3.3.5}$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) + \hat{\phi}_2,$$

$$u_1(x_i, y_j, 0) = U_0(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_h,$$

$$v_1(x_i, y_j, 0) = V_{01}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{1h}, \tag{3.3.6}$$

$$u_1(0, y_j, t_{k+1}) = u_1(1, y_j, t_{k+1}) = 0,$$

$$i, j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

(3.3.4), (3.3.5) გავშალოთ შემდეგი სახით:

$$u_{1t} = \sigma_1(\hat{v}_{1x} \hat{u}_{1\bar{x}} + \hat{v}_1 \hat{u}_{1\bar{x}x}) + (1 - \sigma_1)(v_{1x} u_{1\bar{x}} + v_{1x} u_{1\bar{x}x}) + \hat{f}_1, \tag{3.3.7}$$

$$u_{2t} = \sigma_2(\hat{v}_{2y} \hat{u}_{2\bar{y}} + \hat{v}_2 \hat{u}_{2\bar{y}y}) + (1 - \sigma_2)(v_{2y} u_{2\bar{y}} + v_{2y} u_{2\bar{y}y}) + \hat{f}_2,$$

$$v_{1t} = -\hat{v}_1 + g_1(v_1 u_{1\bar{x}}) + \hat{\phi}_1, \tag{3.3.8}$$

$$v_{2t} = -\hat{v}_2 + g_2(v_2 u_{2\bar{y}}) + \hat{\phi}_2,$$

აღნიშვნების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i,j}^k}{\tau} = \sigma_1 \left(v_{1x}^{k+1} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \right. \tag{3.3.9}$$

$$\begin{aligned}
& + v_1^{k+1} \frac{u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} \\
& + (1 - \sigma_1) \left(v_{1x}^k \frac{u_{1i,j}^k - u_{1i-1,j}^k}{h} + \right. \\
& \left. + v_1^k \frac{u_{1i+1,j}^k - 2u_{1i,j}^k + u_{1i-1,j}^k}{h} \right) + f_1^{k+1}, \\
\frac{u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j}^k}{\tau} & = \sigma_2 \left(v_{2y}^{k+1} \frac{u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} + \right. \\
& \left. + v_2^{k+1} \frac{u_{2i,j+1}^{k+1} - 2u_{2i,j}^{k+1} + u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} \right) \\
& + (1 - \sigma_2) \left(v_{2y}^k \frac{u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k}{h} + \right. \\
& \left. + v_2^k \frac{u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k}{h} \right) + f_2^{k+1}, \\
v_1^{k+1} & = \frac{\tau}{2} (v_1^k + g_1(v_1^k u_{1x}^k) + \varphi_1^{k+1}), \\
v_2^{k+1} & = \frac{\tau}{2} (v_2^k + g_2(v_2^k u_{2y}^k) + \varphi_2^{k+1}),
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

(3.3.9) განტოლებებში მარცხენა მხარეს გადავიტანოთ უცნობი ფუნქციები

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{1i,j}^{k+1}}{\tau} - \sigma_1 \left(v_{1x}^{k+1} \frac{u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} + \right. \\
& \left. + v_1^{k+1} \frac{u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}}{h} \right) + = \\
& = \frac{u_{1i,j}^k}{\tau} + (1 - \sigma_1) \left(v_{1x}^k \frac{u_{1i,j}^k - u_{1i-1,j}^k}{h} + \right. \\
& \left. + v_1^k \frac{u_{1i+1,j}^k - 2u_{1i,j}^k + u_{1i-1,j}^k}{h} \right) + f_{1i,j}^{k+1}, \\
& \frac{u_{2i,j}^{k+1}}{\tau} - \sigma_2 \left(v_{2y}^{k+1} \frac{u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} + \right.
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

$$\begin{aligned}
& + v_2^{k+1} \frac{u_{2i,j+1}^{k+1} - 2u_{2i,j}^{k+1} + u_{2i,j-1}^{k+1}}{h} \Big) = \\
& = \frac{u_{2i,j}^k}{\tau} + (1 - \sigma_2) \left(v_{2y}^k \frac{u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k}{h} + \right. \\
& \left. + v_2^k \frac{u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k}{h} \right) + f_{2i,j}^{k+1},
\end{aligned}$$

მიღებულ (3.3.11)-ში ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ τh -ზე:

$$\begin{aligned}
& hu_{1i,j}^{k+1} - \sigma_1 \tau v_{1x}^{k+1} (u_{1i,j}^{k+1} - u_{1i-1,j}^{k+1}) - \\
& - \sigma_1 \tau v_1^{k+1} (u_{1i+1,j}^{k+1} - 2u_{1i,j}^{k+1} + u_{1i-1,j}^{k+1}) = \\
& = hu_{1i,j}^k + (1 - \sigma_1) \tau (v_{1x}^k (u_{1i,j}^k - u_{1i-1,j}^k) + \\
& + v_1^k (u_{1i+1,j}^k - 2u_{1i,j}^k + u_{1i-1,j}^k)) + \tau h f_{1i,j}^{k+1}, \\
& hu_{2i,j}^{k+1} - \sigma_2 \tau v_{2y}^{k+1} (u_{2i,j}^{k+1} - u_{2i,j-1}^{k+1}) - \\
& - \sigma_2 \tau v_2^{k+1} (u_{2i,j+1}^{k+1} - 2u_{2i,j}^{k+1} + u_{2i,j-1}^{k+1}) = \\
& = hu_{2i,j}^k + (1 - \sigma_2) \tau (v_{2y}^k (u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k) + \\
& + v_2^k (u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k)) + \tau h f_{2i,j}^{k+1},
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

გარდაქმნების შედეგად ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
& \sigma_1 \tau (v_{1x}^{k+1} - v_1^{k+1}) u_{1i-1,j}^{k+1} + (h - \sigma_1 \tau v_{1x}^{k+1} + \\
& + 2\sigma_1 \tau v_1^{k+1}) u_{1i,j}^{k+1} - \sigma_1 \tau v_1^{k+1} u_{1i+1,j}^{k+1} = \\
& hu_1^k + (1 - \sigma_1) \tau (v_{1x}^k (u_{1i,j}^k - u_{1i-1,j}^k) + \\
& + v_1^k (u_{1i+1,j}^k - 2u_{1i,j}^k + u_{1i-1,j}^k)) + \tau h f_{1i,j}^{k+1}, \\
& \sigma_2 \tau (v_{2y}^{k+1} - v_2^{k+1}) u_{2i,j-1}^{k+1} + (h - \sigma_2 \tau v_{2y}^{k+1} + \\
& + 2\sigma_2 \tau v_2^{k+1}) u_{2i,j}^{k+1} - \sigma_2 \tau v_2^{k+1} u_{2i,j+1}^{k+1} = \\
& hu_2^k + (1 - \sigma_2) \tau (v_{2y}^k (u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k) + \\
& + v_2^k (u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k)) + \tau h f_{2i,j}^{k+1},
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

(3.3.13)-ში მიღებულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისთვის ვიყენებთ ფაქტორიზაციის მეთოდს. (3.3.10)-ისა და (3.3.13) შედეგად გვაქვს საბოლოო ალგორითმი:

$$\begin{aligned}
& \sigma_1 \tau (v_{1x}^{k+1} - v_1^{k+1}) u_{1i-1,j}^{k+1} + (h - \sigma_1 \tau v_{1x}^{k+1} + \\
& \quad + 2\sigma_1 \tau v_1^{k+1}) u_{1i,j}^{k+1} - \sigma_1 \tau v_1^{k+1} u_{1i+1,j}^{k+1} = \\
& \quad h u_1^k + (1 - \sigma_1) \tau (v_{1x}^k (u_{1i,j}^k - u_{1i-1,j}^k) + \\
& \quad + v_1^k (u_{1i+1,j}^k - 2u_{1i,j}^k + u_{1i-1,j}^k)) + \tau h f_{1i,j}^{k+1}, \\
& \quad v_{1i,j}^{k+1} = \frac{\tau}{2} (v_{1i,j}^k + g_{1i,j} (v_1^k u_{1x}^k) + \varphi_{1i,j}^{k+1}),
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_2 \tau (v_{2y}^{k+1} - v_2^{k+1}) u_{2i,j-1}^{k+1} + (h - \sigma_2 \tau v_{2y}^{k+1} + \\
& \quad + 2\sigma_2 \tau v_2^{k+1}) 2u_{2i,j}^{k+1} - \sigma_2 \tau v_2^{k+1} u_{2i,j+1}^{k+1} = \\
& \quad h u_2^k + (1 - \sigma_2) \tau (v_{2y}^k (u_{2i,j}^k - u_{2i,j-1}^k) + \\
& \quad + v_2^k (u_{2i,j+1}^k - 2u_{2i,j}^k + u_{2i,j-1}^k)) + \tau h f_{2i,j}^{k+1}, \\
& \quad v_{2i,j}^{k+1} = \frac{\tau}{2} (v_{2i,j}^k + g_{2i,j} (v_2^k u_{2y}^k) + \varphi_{2i,j}^{k+1}),
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

ალგორითმში (3.3.14), (3.3.15)-ში შემავალი უცნობი ფუნქციების დათვლა ხორციელდება პარალელურად. რიცხვითი ექსპერიმენტები ჩატარებულია (3.2.18) – (3.2.20) ტესტების საფუძველზე.

ცხრილი 3.3.1. სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვადასხვა დროითი პარამეტრისათვის.

t	ცდომილება U ფუნქციისთვის	ცდომილება V_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება V_2 ფუნქციისთვის
0.2	0.00091442740483927483	0.00023860025346259623	0.00002333039147702775
0.4	0.00078163405180922446	0.00054273663029244903	0.00005301652662963191
0.6	0.00056633397499628870	0.00092074937725837808	0.00002978406392209638
0.8	0.00060341097809001141	0.00138279238372147808	0.00003444206522051065
1.0	0.00000000000000325628	0.00193893634968879858	0.00008768830847336419

ცხრილი 3.3.2. U ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 0.5$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,0003049579762	1,99706564824331	0,99853282412166
0.05	0.00125	0,0000763947182	1,99329673448354	0,99664836724177
0.04	0.0008	0,0000489658075	1,99900718063099	0,99950359031549
0.025	0.0003125	0,0000191361959		

ცხრილი 3.3.3. V_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 0.5$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00026510126667	2,04946626785852	1,02424313392926
0.05	0.00125	0,00010965015524	2,08726869651192	1,01063434825596
0.04	0.0008	0,00021114939057	2,03294122988735	1,01097061494367
0.025	0.0003125	0,00010193022257		

ცხრილი 3.3.4. V_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 0.5$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00020145131770	2,08736798762681	1,03218399381340
0.05	0.00125	0,00013799728058	2,04811055150060	1,01405527575030
0.04	0.0008	0,00012039024573	1,99743166712515	1,01871583356257
0.025	0.0003125	0,00010177432705		

ცხრილი 3.3.5. U ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 1$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,0002148648115	1,97680931328549	1,00040465664275
0.05	0.00125	0,0001820540249	2,00006070881431	0,98630354407159
0.04	0.0008	0,0001490118463	1,97308656880015	0,97904328440008
0.025	0.0003125	0,0001530722424		

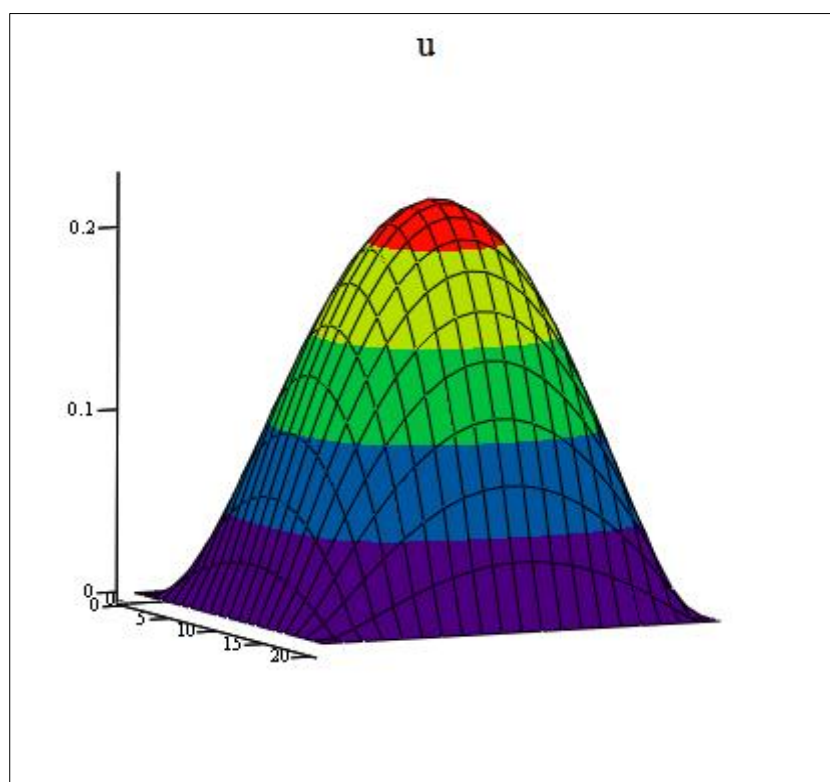
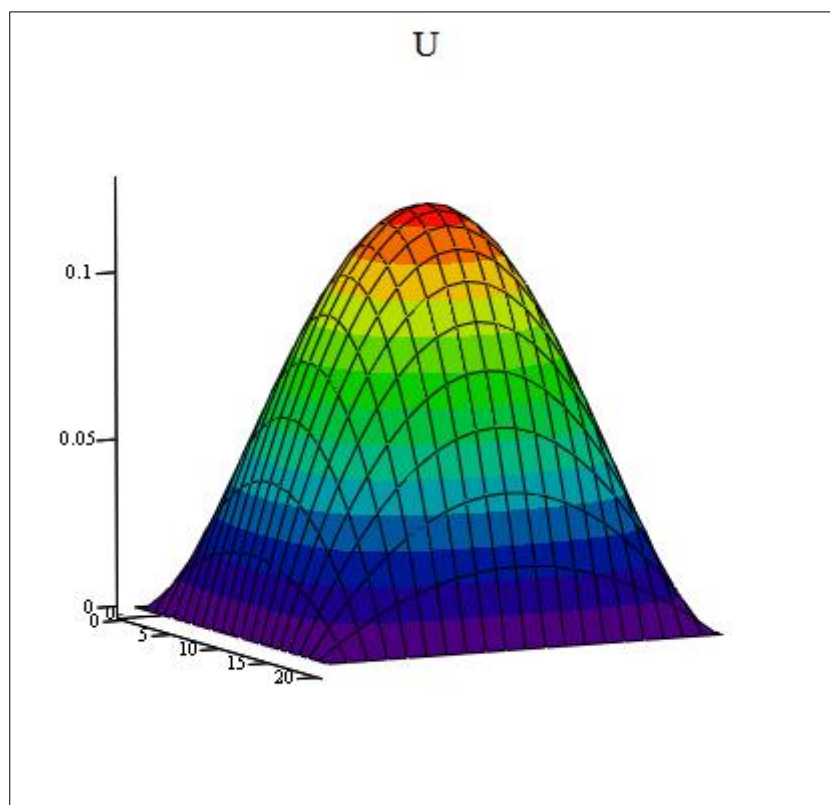
ცხრილი 3.3.6. V_1 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 1$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00031365131676	2,00249544749296	1,02124772374648
0.05	0.00125	0,00010818090304	2,00180813649124	0,99590406824562
0.04	0.0008	0,00001410083250	2,01539272685836	1,01769636342918
0.025	0.0003125	0,00001858235595		

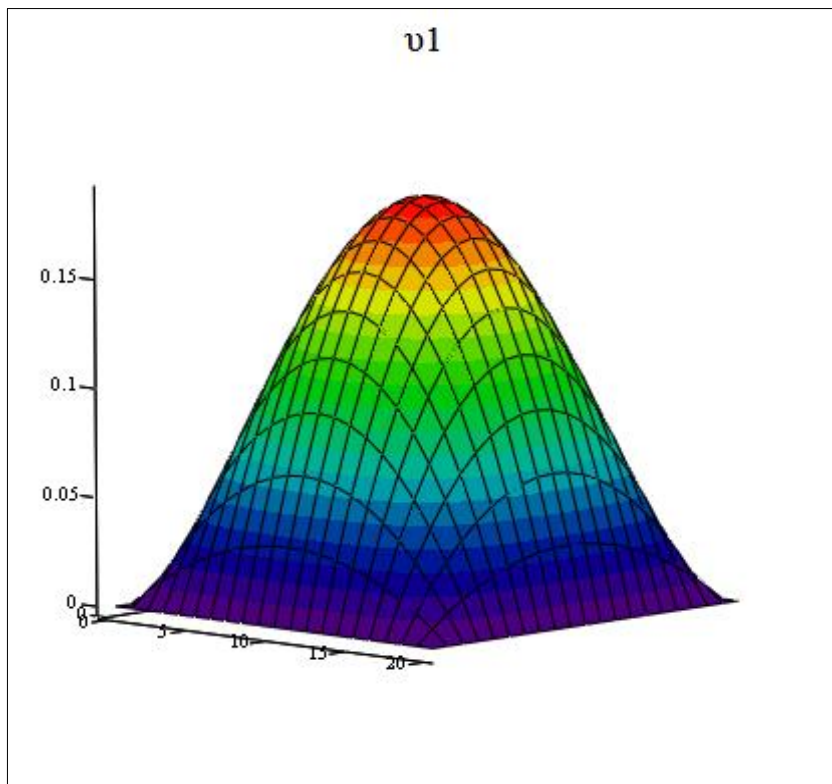
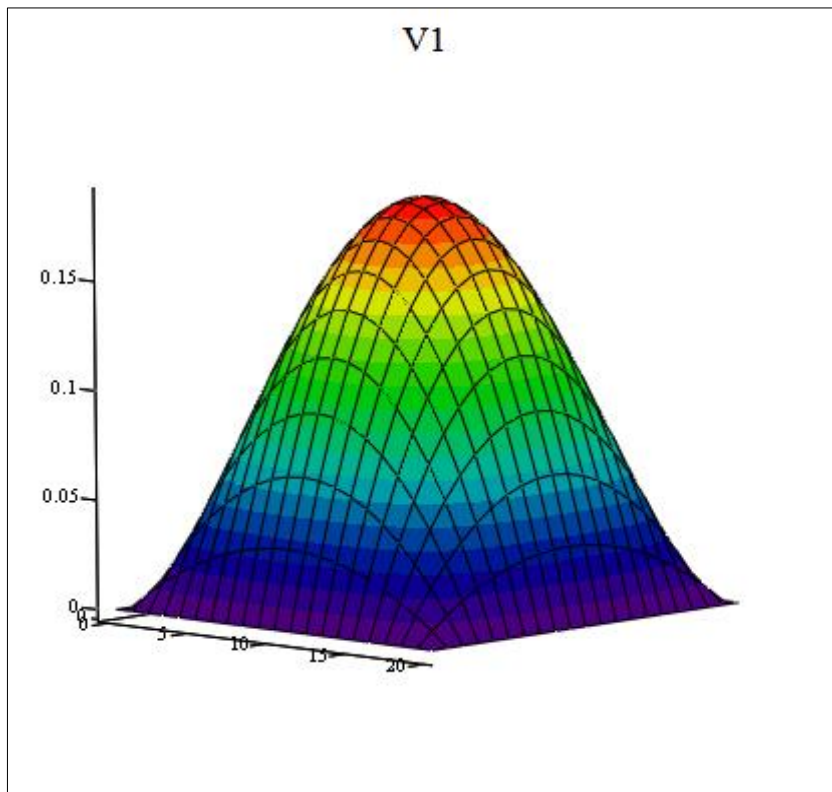
ცხრილი 3.3.7. V_2 ფუნქციისთვის კრებადობის რიგები, როცა $t = 1$.

h	τ	ცდომილება	კრებადობის რიგი h ბიჯის მიმართ	კრებადობის რიგი τ ბიჯის მიმართ
0.1	0.005	0,00023667280043	2,02908665384607	1,00954332692304
0.05	0.00125	0,00021625023389	2,01770242155969	1,01085121077985
0.04	0.0008	0,00010743046065	2,01049926827801	1,01324963413901
0.025	0.0003125	0,00010608746329		

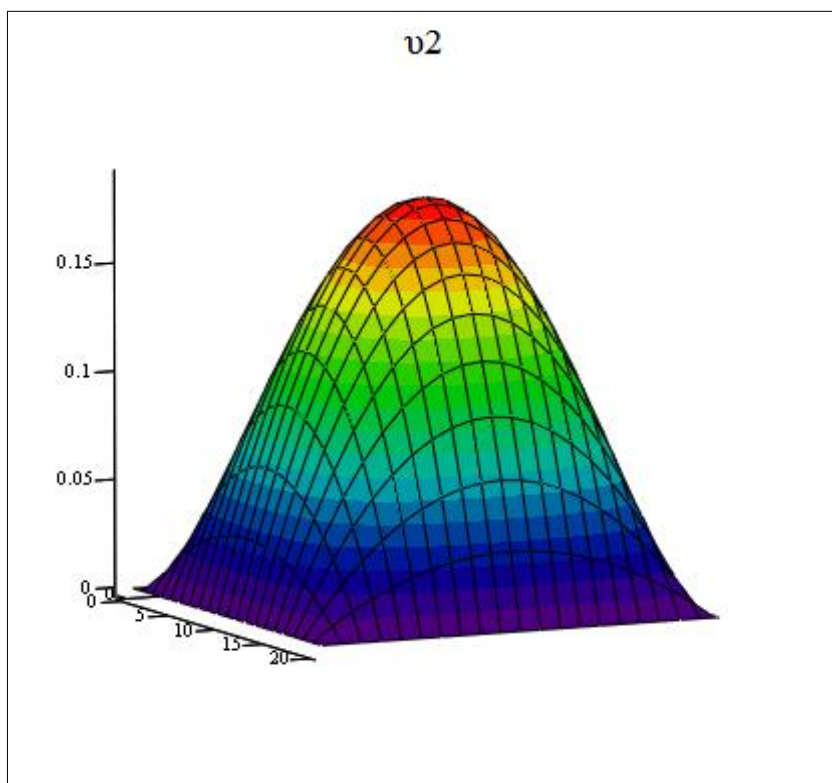
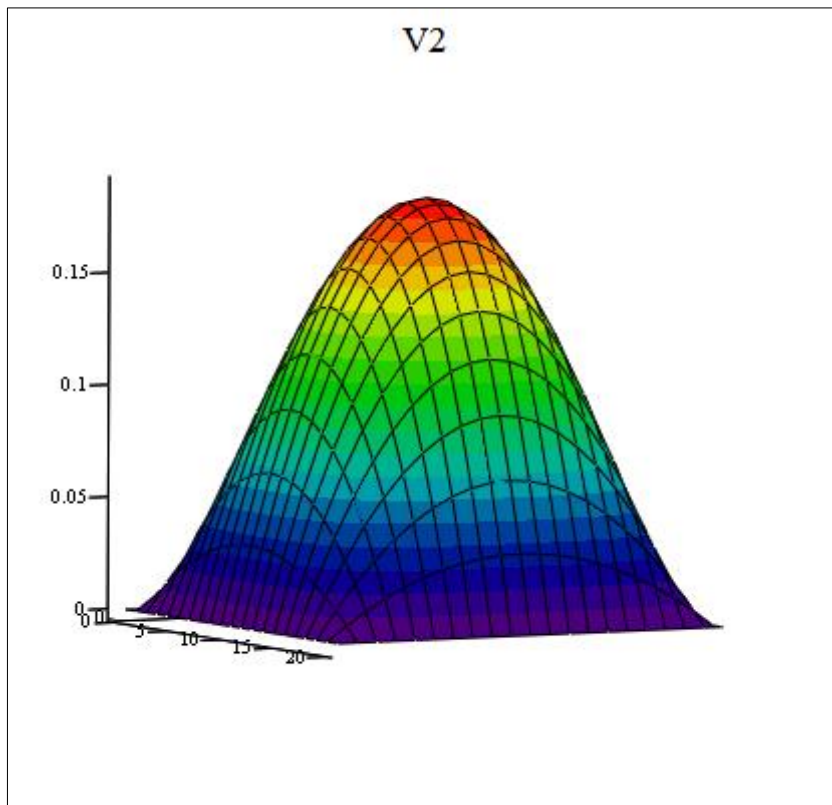
ქვემოთ U, V_1, V_2 ფუნქციებისთვის ასევე მოყვანილია რიცხვითი ექსპერიმენტის შესაბამისი გრაფიკები ზუსტი, მიახლოებითი ამონახსნებისა და შესაბამისი ცდომილებისთვის.



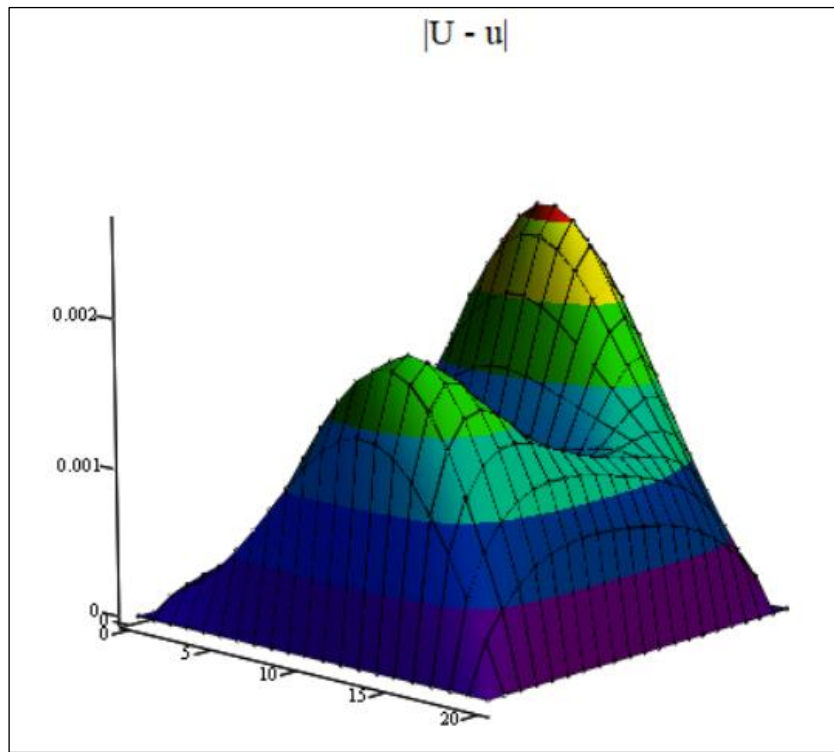
ნახ. 3.3.1 ზუსტი U (ზედა) და მიახლოებითი u (ქვედა) ამონახსნი.



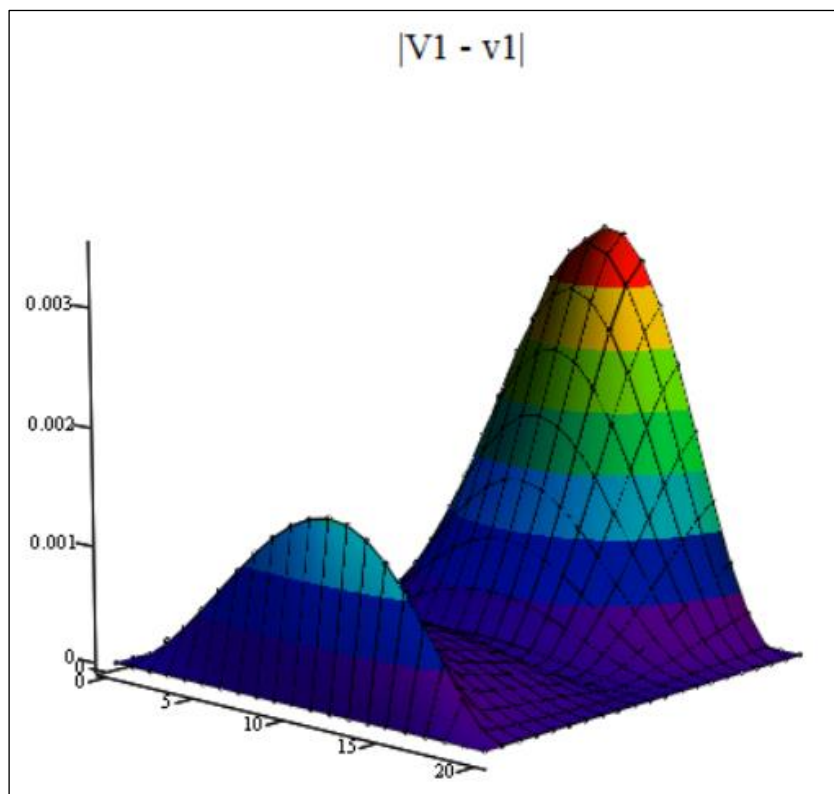
ნახ. 3.3.2 ზუსტი V_1 (ზედა) და მიახლოებითი v_1 (ქვედა) ამონახსნი.



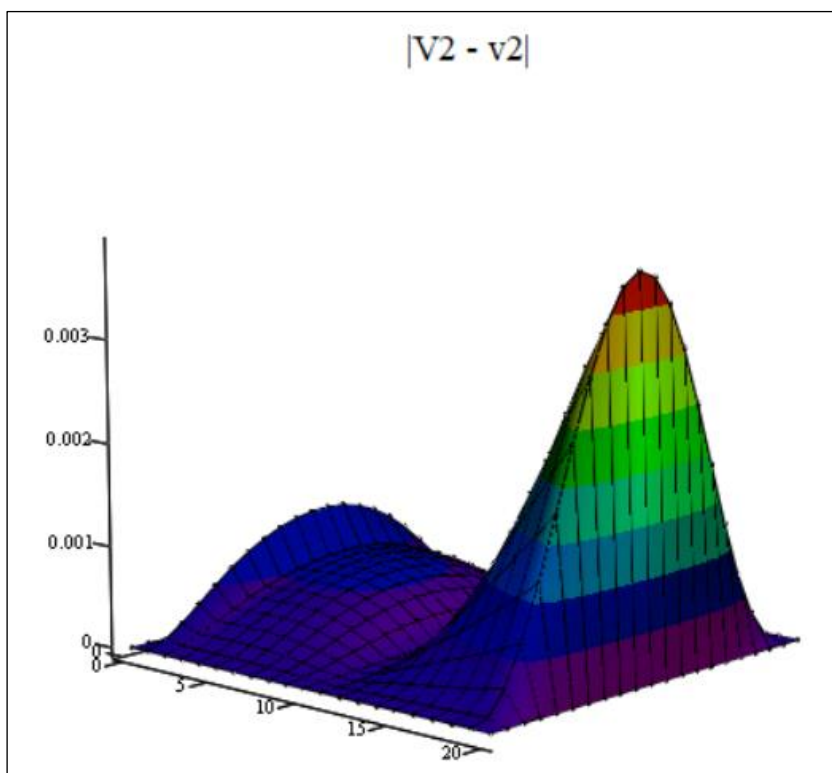
ნახ. 3.3.3 ზუსტი V_2 (ზედა) და მიახლოებითი v_2 (ქვედა) ამონახსნი.



ნახ. 3.3.4. სხვაობა ზუსტ U და მიახლოებით u ამონახსნებს შორის



ნახ. 3.3.5. სხვაობა ზუსტ V_1 და მიახლოებით v_1 ამონახსნებს შორის



ნახ. 3.3.6. სხვაობა ზუსტ V_2 და მიახლოებით v_2 ამონახსნებს შორის

§ 3.4. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების შედარებითი ანალიზი

დისერტაციის ფარგლებში შესრულებული კვლევის დასკვნით ნაწილში წარმოდგენილია მიჩისონის ნაშრომში აგებული მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ორგანოზომილებიანი კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი (1.1.1) – (1.1.3) სისტემის მიახლოებითი ამონახსნის ასაგებად გამოყენებული ცვალებადი მიმართულებისა სხვაობიანი სქემაზე დაფუძნებული დეკომპოზიციური მეთოდისა და გასაშუალებული მეთოდის შესაბამისი ექსპერიმენტების შედეგებზე დაკვირვება და შედარებითი ანალიზი. რიცხვითი მეთოდებში წარმოდგენილი ალგორითმის მუშაობის შემოწმება, შეიძლება სხვადასხვა მახასიათებლის მიხედვით განხორციელდეს, თუმცა ძირითადად მოწმდება ორი მნიშვნელოვანი ფაქტორი ალგორითმის შესრულებაზე დახარჯული მანქანური დრო, რაც გვაძლევს საშუალებას ვიმსჯელოთ ალგორითმის ეკონომიურობაზე და მეორე ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების სიზუსტე. ზე-

მოდული ადრინჯულ მეთოდებში წარმოდგენილი ალგორითმების შედარება განხორციელდა ერთდაიგივე კომპიუტერზე (3.2.18) – (3.2.20) ტესტისთვის ორი ფაქტორის გათვალისწინებით,

- **დროითი ფაქტორი.** კომპიუტერული პროგრამა რა დროს ანდომებს თითოეული მეთოდის შემთხვევაში მონაცემების დამუშავებას, დისერტაციის ფარგლებში წარმოდგენილი მონაცემები მიღებულია: Intel@Core i7 6700 HQ CPU @ 2.60 GHz პროცესორი, DDR4 8GB ოპერატიული მეხსიერება, L1D 32 KB, L1I 32KB, L2 256 KB, L3 6 MB ქეშმეხსიერება, 120 GB SSD მონაცემების კომპიუტერზე.
- **რიცხვითი ექსპერიმენტების სიზუსტის ფაქტორი.** დისერტაციის ფარგლებში განხილულ რიცხვით მეთოდებში მნიშვნელოვან კვლევის საგანს წარმოადგენს შესასწავლი ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მიღება, რომელიც ცხადია მაქსიმალური სიზუსტით ახლოს უნდა იყოს რეალურ ამონახსნთან. სიზუსტის შესადარებლად პროგრამაში დათვლილია ზუსტი ფუნქციებისა და მიახლოებითი ამონახსნებს შორის სხვაობები, ზემოთ მოცემული ორივე მეთოდისთვის ერთი და იგივე კვანძებზე აღებულია სხვაობებს შორის მაქსიმალური და მიღებული მაქსიმალური მნიშვნელობები შედარებულია ერთმანეთთან.

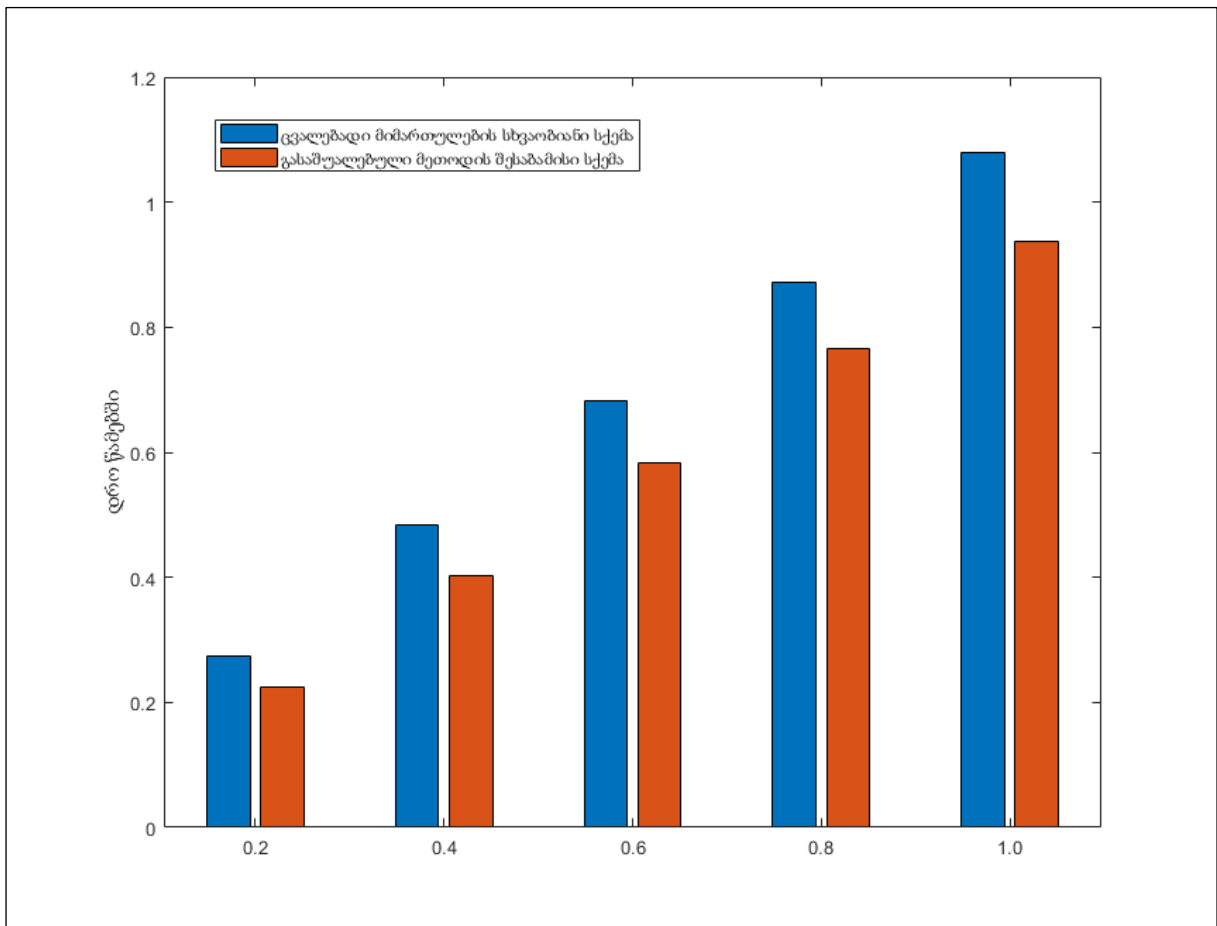
ცხრილი 3.4.1. ზუსტ და მიახლოებით ფუნქციებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმები დროის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის და პროგრამის მიერ დახარჯული დრო წამებში ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემით დათვლილ ტესტურ ექსპერიმენტში.

t	დრო წამებში	ცდომილება U ფუნქციისთვის	ცდომილება V_1 ფუნქციისთვის	ცდომილება V_2 ფუნქციისთვის
0.2	0.274000	0.00010842385853721551	0.0000286637100943507	0.00000016589258744482
0.4	0.483000	0.00038951627884258131	0.0000217683842285105	0.00000121995095070382
0.6	0.683000	0.00037023791408955767	0.0000179778858910805	0.00000515877373530316
0.8	0.872000	0.00008673135778793728	0.0000372260948910963	0.00000910660812003528
1.0	1.079000	0.00000000000000713858	0.0000797580445488499	0.00000952916303376128

ცხრილი 3.4.2. ზუსტ და მიახლოებით ფუნქციებს შორის სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობების მაქსიმუმი დროის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის და პროგრამის მიერ დახარჯული დრო წამებში გასაშუალებული მეთოდით დათვლილ ტესტურ ექსპერიმენტში.

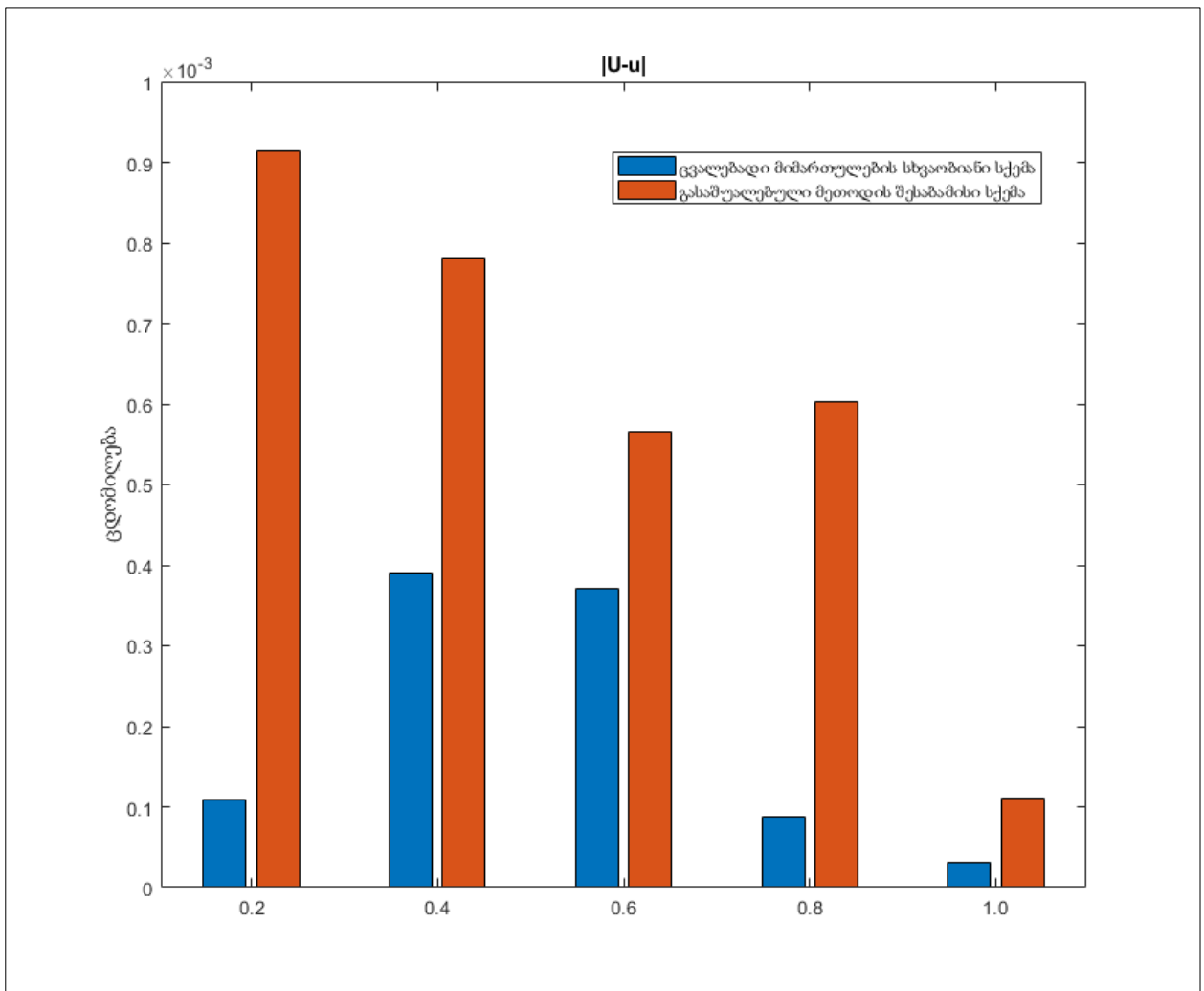
<i>t</i>	დრო წამებში	ცდომილება <i>U</i> ფუნქციისთვის	ცდომილება <i>V</i> ₁ ფუნქციისთვის	ცდომილება <i>V</i> ₂ ფუნქციისთვის
0.2	0.224000	0.00091442740483927483	0.00023860025346259623	0.00002333039147702775
0.4	0.402000	0.00078163405180922446	0.00054273663029244903	0.00005301652662963191
0.6	0.584000	0.00056633397499628870	0.00092074937725837808	0.00002978406392209638
0.8	0.766000	0.00060341097809001141	0.00138279238372147808	0.00003444206522051065
1.0	0.938000	0.00000000000000325628	0.00193893634968879858	0.00008768830847336419

რიცხვით ექსპერიმენტებზე დაკვირვება (3.2.18) – (3.2.20) ტესტების გათვალისწინებით გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ გასაშუალებული მეთოდის შესაბამისი ალგორითმი შედარებით სწრაფად რეალიზებადია ვიდრე ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა. აღნიშნული ფაქტი მოსალოდნელიც იყო, რადგანაც გასაშუალებული მოდელის ალგორითმის რეალიზაციის პროცესში ახალ შრეზე მონაცემების დათვლა მიმდინარეობს პარალელურად, ხოლო ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემაში მიმდევრობით. 3.4.1 და 3.4.1 ცხრილებში წარმოდგენილ მონაცემებზე დაკვირვებით ჩანს, რომ შრეების წერტილების რაოდენობის ზრდასთან ერთად გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი ალგორითმის რეალიზაცია უფრო სწრაფად მიმდინარეობს.

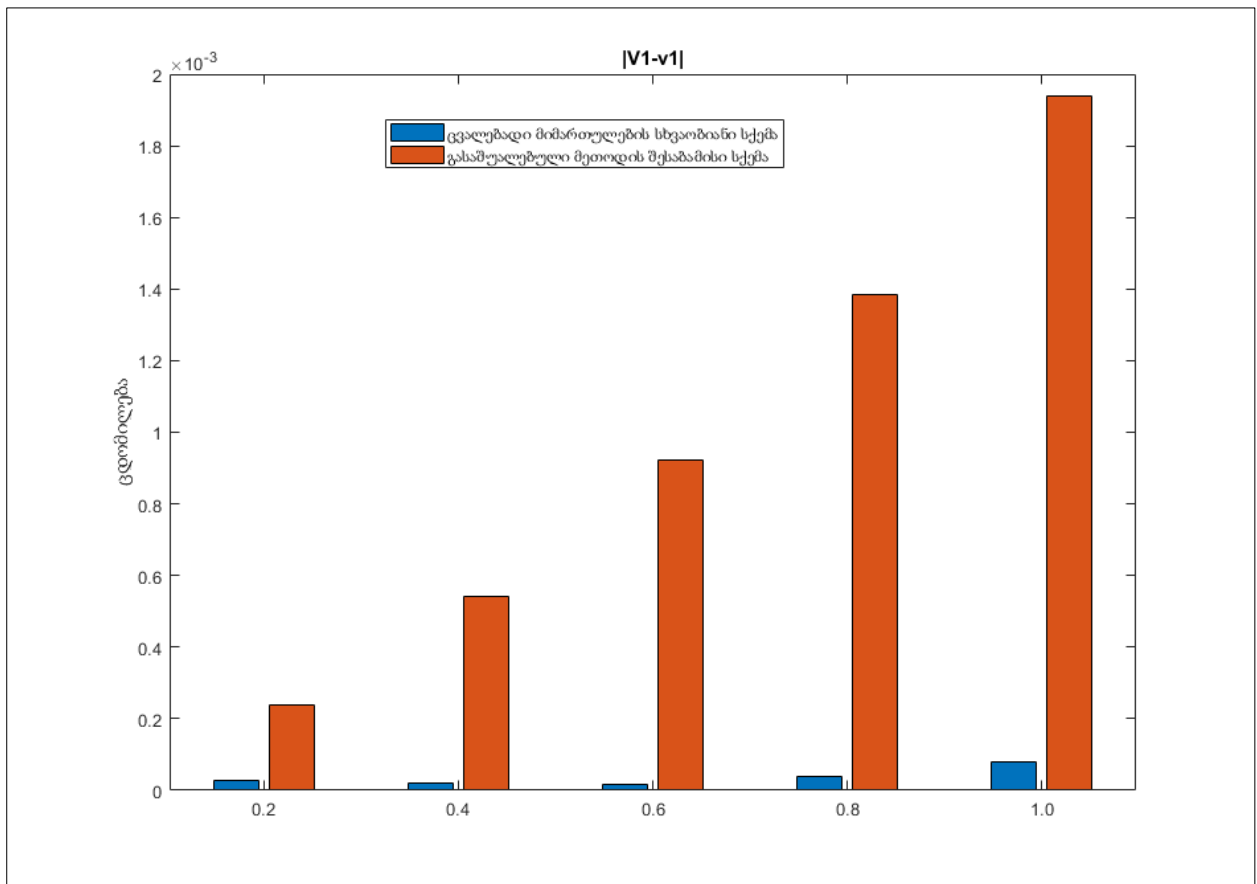


ნახ. 3.4.1 ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემების ალგორითმის რეალიზაციაზე დახარჯული დრო შრეების მიხედვით.

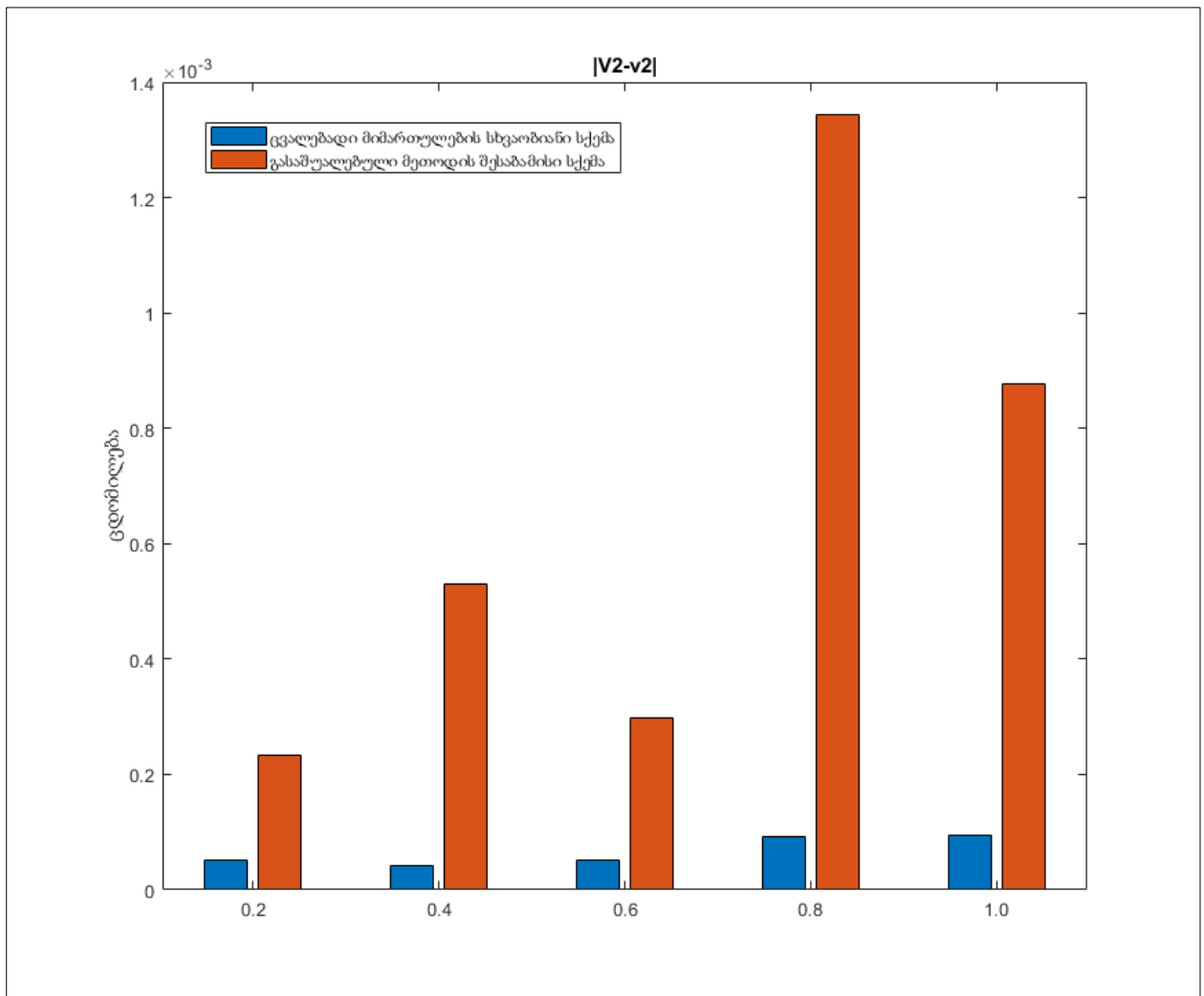
დისერტაციაში აღწერილი ორივე მეთოდისთვის ერთიდაიგივე შრეზე აღებული ზუსტ და მიახლოებით ამონახსნებს შორის სხვაობებს შორის მაქსიმუმების შედარებით შეიძლება დავასკვნათ, რომ ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა იძლევა შედარებით მეტ სიზუსტეს ვიდრე გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა. აღნიშნული შედეგი გამოწვეულია სხვაობიანი სქემების ბუნებიდან გამომდინარე, რადგანაც ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემაში U ფუნქციის გამოთვლების პროცესში დეკომპოზიციის შედეგად მიღებული განტოლებები ორგანოზომილებიანია, ხოლო გასაშუალებულ მოდელში დეკომპოზიციის შედეგად მიღებული U ფუნქციის გამოთვლა დაიყვანება ერთგანზომილებიან განტოლებებზე.



ნახ. 3.4.2 ცვალეზადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემების ცდომილების შედარება u ამონახსნისთვის.



ნახ. 3.4.3 ცვალეზადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემების ცდომილების შედარება v_1 ამონახსნისთვის.



ნახ. 3.4.4 ცვალეზადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემების ცდომილების შედარება v_2 ამონახსნისთვის.

დასკვნა

არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციარულ განტოლებათა სისტემის სრული შესწავლა უმეტეს შემთხვევაში შეუძლებელია. უფრო ხშირად ხერხდება მისი მიახლოებითი ამონახსნის პოვნა, რომელიც თავის მხრივ გამოთვლითი მეთოდების სიღრმისეულ ცოდნას მოითხოვს. უნდა აღინიშნოს, რომ თითოეული სისტემა თავისი სპეციფიკიდან გამომდინარე მოითხოვს ცალკე შესწავლას. საწყის ეტაპზე ხდება მოცემული სისტემის გაანალიზება თუ რომელი ალგორითმი იქნება აღნიშნული სისტემისთვის ეფექტური. შემდეგ ეტაპზე ხორციელდება არჩეული ალგორითმის კომპიუტერული რეალიზაცია, რა დროსაც გათვალისწინებული უნდა იყოს გამოთვლების პროცესში კომპიუტერის მიერ დაგროვების ცდომილების არსებობა. მიღებული მონაცემები თვალსაჩინოდ უნდა იყოს წარმოდგენილი, რაც ითვის-ლისწინებს შესაბამისი მონაცემების წარმოდგენას ცხრილების, დიაგრამების ან გრაფიკების სახით. ბოლო ეტაპზე ხორციელდება მიღებული შედეგების შეფასება და ანალიზი, წარმოებს დაკვირვება თუ რამდენად ახლოს დგას სისტემის ზუსტი ამონახსნი მიახლოებით ამონახსნთან, ამ ეტაპზე ხორციელდება სხვადასხვა ტიპის გათვლების ჩატარება და დაკვირვება თუ როგორ შედეგებს იძლევა რეალიზებული ალგორითმი მარტივი, საშუალო ან რთული ტესტების შემთხვევაში, რამდენად შესაბამისობაშია პრაქტიკული რეალიზაციის შედეგად მიღებული მონაცემები თეორიულად დასკვნებთან. შედეგებზე დაკვირვება ასევე ზოგიერთ შემთხვევაში იძლევა საშუალებას, რომ ვიფიქროთ არსებული ალგორითმის გაუმჯობესებაზე.

მიჩისონის ორგანზომილებიანი არაწრფივი (1.1.1) - (1.1.3) სისტემისთვის აიგო ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემა, გამოკვლეული იქნა აღნიშნული სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები.

დისერტაციის ფარგლებში (1.1.1) - (1.1.3) სისტემისთვის ასევე აიგო გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა და გამოკვლეული იქნა მისი აპროქსიმაციის თეორიული საკითხები.

ცვალებადი მიმართულების სხვაობიანი სქემისა და გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი სქემისთვის დაიწერა კომპიუტერული პროგრამა, რომლის საშუალებითაც მოხერხდა შესაბამისი ალგორითმების პრაქტიკული რეალიზაცია. დაპროგრამების

გარემოდ შერჩეული იქნა მაღალი დონის პროგრამირების ენებს შორის ერთ-ერთი სწრაფად რეალიზებადი პროგრამირების ენა C++. პროგრამული კოდის დაწერა მოხდა ერთ-ერთ ყველაზე პოპულარულ გარემოში VISUAL STUDIO-ში. პროგრამირების პროცესში გათვალისწინებული იქნა ობიექტზე ორიენტირებული დაპროგრამების პრინციპები და მიდგომები. ფუნქციების სიმბოლური დათვლებისა და მონაცემების ვიზუალური წარმოჩენისთვის გამოყენებულია მათემატიკური სიმბოლური პაკეტების დამუშავებისთვის განკუთვნილი პროგრამული უზრუნველყოფა MATLAB, MATHCAD.

რიცხვით მეთოდებში ეკონომიური ალგორითმის მოძიება, რომელიც დასმული ამოცანის სასურველი სიზუსტით ამოხსნის საშუალებას იძლევა, ასევე ალგორითმის რეალიზაციის მანქანური დროის მინიმალურ ნიშნულამდე დაყვანა აქტუალურია. დისერტაციის ფარგლებში ჩატარებული სამუშაო და მიღებული შედეგები, რომლებიც განხორციელდა (1.1.1) - (1.1.3) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად ზემოთ აღნიშნული ორი მეთოდით გამოყენებითი მათემატიკის სფეროში საინტერესო კვლევას წარმოადგენს. დისერტაციის დასკვნით ნაწილში განხორციელებული რიცხვითი ექსპერიმენტები, რომელთა საფუძველზეც ერთმანეთს შედარდა მიღებული მიახლოებითი ამოხსნები, საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ რომ მიღებული შედეგები თანხვედრაშია ჩატარებულ თეორიულ კვლევებთან. მომავალში საინტერესოა დისერტაციის ფარგლებში განხილული მეთოდების გამოყენება სხვა მსგავსი ამოცანების ამოხსნის პროცესში.

ლიტერატურა

1. Abley K., Sauret-Güeto S., Maree A.F., Coen E. Formation of polarity convergences underlying shoot outgrowths. *Elife*, 2016, 5, p.e18165. p. 1–43.
2. Abrashin V.N. A class of additive methods for nonlinear multidimensional problems of mathematical physics. (in Russian) *Diff. Uravn.*, 2003, V. 39, N7, p. 879-887. English translation: *Diff. Equ.*, 2003, V. 39, N7, p. 926–935.
3. Abrashin V.N. A variant of the method of variable directions for the solution of multi-dimensional problems in mathematical physics. I, (in Russian) *Diff. Uravn.*, 1990, V. 26, p. 314–323. English translation: *Diff. Equ.*, 1990, V. 26, p. 243–250.
4. Achi I. I., Agwu C. O., Alo U. R., Anikwe C. V., Okemiri H. A. Technological Advancement in Object Oriented Programming Paradigm for Software Development. *International Journal of Applied Engineering Research* ISSN 0973-4562 Volume 14, Number 8, 2019 p. 1835-1841.
5. Arora R. K. *Optimization: Algorithms and Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2015, 486 p.
6. Bar M., Ori N. Compound leaf development in model plant species. *Current Opinion in Plant Biology*, 2015, V. 23, p. 61–69.
7. Bayer E.M., Smith R.S., Mandel T., Nakayama N., Sauer M., Prusinkiewicz P., Kuhlemeier, C. Integration of transport-based models for phyllotaxis and midvein formation. *Genes & development*, 2009, V. 23, N3, p. 373–384.
8. Bell J., Cosner C., Bertiger W. Solutions for a flux-dependent diffusion model. *SIAM J. Math. Anal.*, 1982, V. 13, N 5, p. 758–769.
9. Berleth T., Scarpella E., Prusinkiewicz P. Towards the systems biology of auxin-transport-mediated patterning. *Trends in plant science*, 2007, V. 12, N4, p. 151–159.
10. Brown D. L., Henshaw D. W., Quinlan J. D. Overture: An object-oriented framework for solving partial differential equations. *Scientific Computing in Object-Oriented Parallel Environments*, LNCS, volume 1343, 2005, p. 177-184.

11. Candela H., Martinez-Laborda A., Luis Micol J. Venation pattern formation in *Arabidopsis thaliana* vegetative leaves, *Develop. Biol.*, 1999, V. 205, p. 205–216.
12. Chang L., Mei G., Hu Y., Deng J., Zhang T. LMI1-like and KNOX1 genes coordinately regulate plant leaf development in dicotyledons. *Plant molecular biology*, 2019, V. 99, N4-5, p. 449-460.
13. Cieslak M., Runions A., Prusinkiewicz P. Auxin-driven patterning with unidirectional fluxes. *Journal of Experimental Botany*, 2015, V. 66, p. 5083–5102.
14. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stain C. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press; 3rd edition, 2009, 1320 p.
15. Dafermos C.M., Hsiao L. Adiabatic shearing of incompressible fluids with temperature-dependent viscosity. *Quart. Appl. Math.*, 1983, V. 41, N1, p. 45–58.
16. Douglas J. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. *SIAM*, 1955, V. 3, N1, p. 42–65.
17. Douglas J., Peaceman D.W. Numerical solution of two-dimensional heat flow problems, *Amer. Inst. Chem. Engin. J.*, 1955, V. 1, p. 505–512.
18. Douglas J., Peaceman D.W., Rachford H.H. A method for calculating multidimensional immiscible displacement, *Trans. of AIME*, 1959, V. 216, p. 297–308.
19. Douglas J., Rachford H.H. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1960, V. 82, p. 421–439.
20. Dupuy L., Mackenzie J., Rudge T., Haseloff, J. 2008. A system for modelling cell–cell interactions during plant morphogenesis. *Ann. Bot. (Lond.)*, 2008, V. 101, p. 1255–1265.
21. Dzhangveladze T.A. Averaged model of sum approximation for a system of nonlinear partial differential equations, (in Russian) *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 1987, V. 19, p. 60–73.
22. Dzhangveladze T.A. On the convergence of the difference scheme for one nonlinear system of partial differential equations. (in Russian) *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR*, 1987, V. 126, 2, p. 257–260.

23. Dzhangveladze T.A., Tagvarelia T.G. Convergence of a difference scheme for a system of nonlinear partial differential equations, that arise in biology, (in Russian) Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1990, V. 40, p. 77–83.
24. Evans G., Blackledge J., Yardley P. Analytic Methods for Partial Differential Equations. Springer, 1999, 316 p.
25. Evers J.B., Letort V., Renton M., Kang M. Computational botany: advancing plant science through functional–structural plant modelling. *Annals of Botany*, 2018, V. 121, N 5, p. 767–772.
26. Feugier F.G., Mochizuki A. Iwasa, Y. Self-organization of the vascular system in plant leaves: inter-dependent dynamics of auxin flux and carrier proteins. *Journal of theoretical Biology*, 2005, V. 236, N4, p. 366–375.
27. Freeman D.C., Graham J.H., Emlen J. M. Developmental stability in plants: symmetries, stresses and epigenesis, *Genetica*, 1993, V. 89, p. 97–119.
28. Fujita H., Mizutani A. On the finite element method for parabolic equations. I. Approximation of holomorphic semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, 1976, V. 28, p. 749–771.
29. Gagoshidze M. Numerical resolution of one nonlinear parabolic system. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst Appl. Math., 2010, V. 24, p. 40–44.
30. Gagoshidze M. On parabolic regularization of one nonlinear diffusion model. Rep. Enl. Sess. Sem. I. Vekua Inst. Apl. Math., 2012, V. 26, p. 14–17.
31. Gagoshidze M., Jangveladze T. On one nonlinear diffusion system. Rep. Enlarged Sess. Sem. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2011, V. 25, p. 39–43.
32. Gegechkori Z., Rogava J., Tsiklauri M. The fourth order accuracy decomposition scheme for an evolution problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2004, V.38, N4, p. 707–722.
33. Gordeziani D.G. On application of local one-dimensional method for solving parabolic type multi-dimensional problems of 2m-degree. *Proceeding of Science Academy of GSSR*, 1965, V. 39, N3, p. 535–542.

34. Gordeziani D.G., Meladze H.V. On modeling multi-dimensional quasilinear equation of parabolic type by one-dimensional ones. Proceeding of Science Academy of GSSR, 1970, V. 60, N3, p. 537–540.
35. Hardwick R.C., Physiological consequences of modular growth in plants, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences, 1986, V. 313, p. 161–173.
36. Heisler M.G., Jönsson H. Modeling auxin transport and plant development. Journal of Plant Growth Regulation, 2006, V. 25, N4, p. 302–312.
37. Hong L., Dumond M., Zhu M., Tsugawa S., Li C.B., Boudaoud A., Hamant O., Roeder A.H. Heterogeneity and robustness in plant morphogenesis: from cells to organs. Annual review of plant biology, 2018, V. 69, p. 469–495.
38. Iliev O. P., Margenov S. D., Minev P. D, Vassilevski P. S., Zikatanov L. T. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms, and Their Applications (In Honor of Professor Raytcho Lazarov's 40 Years of Research in Computational Methods and Applied Mathematics). Springer, 2013, 327 p.
39. Ivor Horton I., Weert V. P. Beginning C++17: From Novice to Professional 5th ed. Edition. Apress, 2018, 804 p.
40. Janenko N.N. The Method of Fractional Steps for Multi-dimensional Problems of Mathematical Physics. (in Russian). Nauka, Moscow, 1967, 168 p.
41. Jangveladze T. A. Investigation and numerical solution of some systems of nonlinear partial differential equations, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 1991, V. 6, p. 25–28.
42. Jangveladze T. Investigation and Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential and Integro-Differential Models Based on System of Maxwell Equations. Mem. Differential Equations Math. Phys., 2019, V. 76, 118 p.
43. Jangveladze T. The difference scheme of the type of variable directions for one system of nonlinear partial differential equations. Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math. (Tbiliss. Gos. Univ. Inst. Prikl. Math. Trudy), 1992, V. 47, p. 45–66.

44. Jangveladze T., Kiguradze Z., Gagoshidze M. Economical difference scheme for one multi-dimensional nonlinear system. *Acta Mathematica Scientia*, 2019, V. 39, N4, p. 57–64.
45. Jangveladze T., Kiguradze Z., Gagoshidze M., Nikolishvili M. Stability and convergence of the variable directions difference scheme for one nonlinear two-dimensional model. *international journal of biomathematics*. 2015, V. 8, N5, p. 1–21.
46. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. *Numerical Solution of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations*. Elsevier, 2016, ACADEMIC PRESS, 254 p.
47. Jangveladze T., Kiguradze Z., Nikolishvili M. On aroximate solution of one nonlinear two-dimensional diffusion system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 2009, V. 23, 42–45.
48. Jangveladze T., Kiguradze Z., Nikolishvili M. On investigation and numerical solution of one nonlinear biological model. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 2008, V. 22, p. 46–50.
49. Jangveladze T., Nikolishvili M., Tabatadze B. On one nonlinear two-dimensional diffusion system. *Recent Researches in Appl.Math.*, 15th WSEAS Int. Conf. Appl. Math. (MATH '10), 2010, p. 105–108.
50. Jean-Luc Chabert J. *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. Springer; 1999 edition, 1999, 524 p.
51. Jilkine A., Mare 'e A.F., Edelstein-Keshet L. Mathematical model for spatial segregation of the Rho-family GTPases based on inhibitory crosstalk. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2007, V. 69, p. 1943–1978.
52. Johnson B. *Professional Visual Studio 2017 1st Edition*. Wrox, 2017, 864 p.
53. Kang J., Dengler N. Vein pattern development in adult leaves of *Arabidopsis thaliana*. *Int. J. Plant Sci.*, 2004, V. 165, p. 231–242.
54. Kasprzewska A., Carter R., Swarup R., Bennett M., Monk N., Hobbs J.K., Fleming A. Auxin influx importers modulate serration along the leaf margin. *The Plant Journal*, 2015, V. 83, p. 705–718.

55. Katsadze T. On the numerical solution of one-dimensional analog of Mitchison nonlinear partial differential system. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math., 2017, V. 31, p. 71–74.
56. Kierzkowski D., Lenhard M., Smith R., Kuhlemeier C. Interaction between meristem tissue layers controls phyllotaxis. *Developmental cell*, 2013, V. 26, N6, p. 616–628.
57. Kierzkowski D., Routier-Kierzkowska A.L. Cellular basis of growth in plants: geometry matters. *Current opinion in plant biology*, 2019, V. 47, p. 56–63.
58. Kiguradze Z., Nikolishvili M., Tabatadze B. Numerical resolution one system of nonlinear partial differential equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2011, V. 25, p. 76–79.
59. Kiguradze Z., Tabatadze B. On a numerical solution of two-dimensional nonlinear mitchison model. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 2018, V. 73, p. 93–100.
60. Kirane M., Kouachi S. Global solution to a system of strongly couled reaction-diffusion equations. *Nonlinear Anal.*, 1996, N8, p. 1387–1396.
61. Kocay W., Kreher L. D. *Graphs, Algorithms, and Optimization*. Chapman and Hall/CRC; 1 edition, 2004, 504 p.
62. Kramer E.M. Computer models of auxin transport: A review and commentary. *J. Exp. Bot.*, 2008, V. 59, p. 45–53.
63. Kuiper H.J. Existence and comparison theorems for nonlinear diffusion systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, V. 60, p. 166–181.
64. Langtangen H. P. *Computational Partial Differential Equations*. Springer; 2nd edition, 2003, 862 p.
65. Le Garrec J.F., Lopez P., Kerszberg M. Establishment and maintenance of planar epithelial cell polarity by asymmetric cadherin bridges: a computer model. *Developmental Dynamics*, 2006, V. 235, p. 235–246.
66. Lee C.T., Hoopes M.F., Diehl J., Gilliland W., Huxel G., Leaver E.V., McCann K., Umbanhowar J., Mogilner A. Non-local concepts and models in biology. *Journal of theoretical biology*, 2001, V. 210, N2, p. 201–219.

67. Lee H.J., Schiesser W.E. Ordinary and Partial Differential Equation Routines in C, C++, Fortran, Java, Maple, and MATLAB. Chapman and Hall/CRC, 2003, 528 p.
68. Lee K., Avondo J., Morrison H., Blot L., Stark M., Sharpe J., Bangham A., Coen E. Visualizing plant development and gene expression in three dimensions using optical projection tomography. *The Plant Cell Online*, 2006, V. 18, p. 2145–2156.
69. Lee S.W., Feugier F.G., Morishita Y. Canalization-based vein formation in a growing leaf. *Journal of theoretical biology*, 2014, V. 353, p. 104–120.
70. Li J., Chen Y. *Computational Partial Differential Equations Using MATLAB*. Chapman and Hall/CRC; 1 edition, 2008, 378 p.
71. Lintermann B., Deussen, O. Interactive modeling of plants. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1999, V. 19, N1, p. 56–65.
72. Long Y., Boudaoud A. Emergence of robust patterns from local rules during plant development. *Current opinion in plant biology*, 2019, V. 47, p.127–137.
73. Mamoon S., Yaqoob I., Naseer N., Akram J., Osman R., Zulfiqar S. Modern C++ Design Patterns and Idioms with New Features. *International Journal of Innovative Computer Science & Engineering*, Volume 4 Issue 3. 2017, p.102-109.
74. Marchuk G.I. *The Splitting-up Methods*, Nauka, Moscow, (in Russian), 1988. p. 263.
75. Mare 'e A.F., Jilkin A., Dawes A., Grieneisen V.A., Edelstein-Keshet L. Polarization and movement of keratocytes: a multiscale modelling approach. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2006, V. 68, p. 1169–1211.
76. Marsden J.E., McCracken M. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Appl. Math. Sciences series, V. 19, Springer-Verlag, New York, 1976, 424 p.
77. Martin R., *Agile Software Development, Principles, Patterns, and Practices 1st Edition*. Pearson; 1st edition, 2002, 552 p.
78. Mattsson J., Ckurshumova W., Berleth T. Auxin signaling in Arabidopsis leaf vascular development. *Plant Physiology*, 2003, V. 131, p. 1327–1339.

79. Mattsson J., Sung Z.R., Berleth T. Responses of plant vascular systems to auxin transport inhibition. *Development*, 1999, V. 126, p. 2979–2991.
80. Maxfield B. *Essential Mathcad for Engineering, Science, and Math*, Second Edition 2nd Edition. Academic Press, 2009, 501 p.
81. Mech R., Prusinkiewicz, P. Visual models of plants interacting with their environment. *Siggraph*, 1996, V. 96, p. 397–410.
82. Migdalis A., Panos M. P., Värbrand P. *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*. Springer, 1998, 387 p.
83. Mitchison G.J. A model for vein formation in higher plants, *Proc. R. Soc. Lond. B.*, V. 1980, V. 207, p. 79–109.
84. Mitchison G.J. The polar transport of auxin and vein patterns in plants, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.*, 1981, V. 295, p. 461-471.
85. Nelson T., Dengler N. Leaf vascular pattern formation, *The Plant Cell*, 1997, V. 9, p. 1121–1135.
86. Nikolishvili M. Finite difference scheme and stability of the stationary solution for one system of nonlinear partial differential equations, *Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math.*, 2012, V. 26, p. 46–49.
87. Nikolishvili M. Numerical resolution of one nonlinear partial differential system, *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* 2010, V. 24, p. 93–96.
88. Nikolishvili M., Tabatadze B. Parabolic regularization of one-dimensional analog of one nonlinear biological model, *Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Appl. Math.*, 2015, V. 29, p. 95–98.
89. Nikolishvili M., Tabatadze B. Some properties of solution and variable directions difference scheme for one system of nonlinear three-dimensional partial differential equations. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Apple. Math.*, 2014, V. 28, p. 78–81.

90. Nikolov L.A., Runions A., Gupta M.D., Tsiantis M. Leaf development and evolution. *Current topics in developmental biology*, 2019, V. 131, p. 109–139.
91. Peaceman D.W., Rachford H.H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, *J. Soc. Industr. Apl. Math.*, 1995, V. 3, N1, p. 28–41.
92. Prusinkiewicz P. Graphical applications of L-systems. *Proceedings of Graphics Interface*, V. 86, N86, p. 247–253.
93. Prusinkiewicz P. Modeling plant growth and development. *Current opinion in plant biology*, 2004, V. 7, N1, p. 79–83.
94. Prusinkiewicz P., Hanan J. *Lindenmayer systems, fractals, and plants*. Springer Science & Business Media, V. 79. 2013, 120 p.
95. Prusinkiewicz P., Rolland-Lagan A.G. Modeling plant morphogenesis, *Current Opinion in Plant Biology*, 2006, V. 9, p. 83–88.
96. Rogava J., Gulua D. Reduction of a three-layer semi-discrete scheme for an abstract parabolic equation to two-layer schemes. Explicit estimates for the approximate solution error. *Journal of Math. Sciences*, 2015, V. 206, N4, p. 424–444.
97. Rogava J., Tsiklauri M. Convergence of a semi-discrete scheme for an abstract nonlinear second order evolution equation. *Appl. Numerical Mathematics* 2014, V. 75, p. 22–36.
98. Rolland-Lagan A. G., Prusinkiewicz P. Reviewing models of auxin canalization in the context of leaf vein pattern formation in *Arabidopsis*. *The Plant Journal*, 2005, V. 44, N5, p. 854–865.
99. Ronald Larson W. R. *Introduction to Mathcad 15 (3rd Edition)*. Pearson, 2010, 408 p.
100. Roussel C.J., Roussel M.R. Reaction–diffusion models of development with state-dependent chemical diffusion coefficients, *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2004, V. 86, p. 113–160.
101. Roussel M.R., Slingerland M.J. A biochemically semi-detailed model of auxin-mediated vein formation in plant leaves, *Biosystems*, 2012, V. 109, p. 475–487.

102. Runions A., Fuhrer M., Lane B., Federl P., Rolland-Lagan A.G., Prusinkiewicz P. Modeling and visualization of leaf venation patterns, *ACM Transactions on Graphics*, 2005, V. 24, p. 702–711.
103. Runions A., Smith R.S., Prusinkiewicz P. Computational models of auxin-driven development. In *Auxin and its role in plant development*. Springer, Vienna, 2014, p. 315–357.
104. Runions A., Tsiantis M., Prusinkiewicz P. A common developmental program can produce diverse leaf shapes. *New Phytologist*, 2017, V. 216, N2, p.401–418.
105. Sachs T., Cohen D. Circular vessels and the control of vascular differentiation in plants. *Differentiation*, 1982, V. 21, N1-3, p. 22–26.
106. Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N., *Difference Schemes with Operator Factors*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2002, 384 p.
107. Sarvepalli K., Gupta M.D., Challa K.R., Nath U. Molecular cartography of leaf development—role of transcription factors. *Current opinion in plant biology*, 2019, V. 47, p. 22–31.
108. Scarpella E., Marcos D., Friml J., Berleth, T. 2006. Control of leaf vascular patterning by polar auxin transport. *Genes & development*, V. 20, N8, p. 1015–1027.
109. Shi P., Ratkowsky D., Li Y., Zhang L., Lin S., Gielis J. A general leaf area geometric formula exists for plants—evidence from the simplified Gielis equation. *Forests*, 2018, V. 9, N11, p. 1–15.
110. Shleizer-Burko S., Burko Y., Ben-Herzel O., Ori N. Dynamic growth program regulated by LANCEOLATE enables flexible leaf patterning. *Development*, 2011, V. 138, N4, p. 695–704.
111. Smith C., Prusinkiewicz P., Samavati F. Local specification of surface subdivision algorithms (Applications of Graph Transformations with Industrial Relevance (AGTIVE 2003)). In: *Lecture Notes in Computer Science*. 2003, p. 313–327.
112. Smith R.S., Bayer E.M. Auxin transport-feedback models of patterning in plants. *Plant, cell & environment*, 2009, V, 32, N9, p. 1258-1271.

113. Solodov A., Ochkov V. *Differential Models An Introduction with Mathcad*. Springer Berlin Heidelberg, 2005, 237 p.
114. Stroustrup B. *The C++ Programming Language (hardcover) (4th Edition)*. Addison-Wesley Professional, 2013, 1376 ձ.
115. Szövényi P., Waller M., Kirbis A. Evolution of the plant body plan. *Current topics in developmental biology*, 2019, V. 131, p. 1–34.
116. Tabatadze B. On the numerical solution of two-dimensional mitchison nonlinear model. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2017, V.31, p.131-134.
117. Tabatadze B. Parabolic regularization for one nonlinear biological model. *Book of Abstracts of IV International Conference of the Georgian Mathematical Union*, 2013, p.176.
118. Tabatadze B. On one mathematical model arising in biology. *5th Internaional Conference on Biotechnology and Bioengineering, 2016 International Conference on Coastal Ecology and Marine Biotechnology*. Bangkok Thailand, 2016, p. 41.
119. Tabatadze B. On parabolic regularization for one nonlinear partial differential system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Apple. Math.*, 2012, V. 26, p.81-86.
120. Tagvarelia T.G., Convergence of a difference scheme for a system of nonlinear partial differential equations arising in biology, (in Russian), *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 1991, V. 6, p. 109–112.
121. Vabishchevich P.N., *Additive Operator-Difference Schemes: Splitting Schemes*, de Gruyter, Berlin / Boston, 2014. 354 p.
122. Wabnik K., Robert H.S., Smith R.S., Friml J. Modeling framework for the establishment of the apical-basal embryonic axis in plants. *Current Biology*, 2013, V.23, p.2513–2518.
123. White R. E. *Computational Mathematics: Models, Methods, and Analysis with MATLAB® and MPI*, Second Edition (Textbooks in Mathematics). Chapman and Hall/CRC; 2 edition, 2015, 500 p.
124. Zhao Y. The role of local biosynthesis of auxin and cytokinin in plant development. *Curr. Opin. Plant Biol.*, 2008, V.11, p.16–22.