სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა, მათემატიკის, ტექნოლოგიებისა და ფარმაციის ფაკულტეტი

ცირა ღვინჯილია

სამეცნიერო კვლევების ურთიერთგავლენებისა, მეცნიერთა მომზადებისა და უნივერსიტეტების კონკურენციის პროცესების მათემატიკური მოდელირება

სადისერტაციო ნაშრომი წარდგენილია

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თემურ ჩილაჩავა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა

დოქტორი, პროფესორი

თბილისი

2019

სარჩევი

		გვ.
შესავალი	. . . .	3 - 12
თავი I.	სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის არაწრფივი მათემატიკური მოდელები	13
§ 1.1.	ინოვაციურ სისტემაში კოოპერაციული ურთიერთქმედების პროცესების დინამიკის ზოგადი მათემატიკური მოდელი. განტოლებათა სისტემა	13 -14
§ 1.2.	ოთხი ტიპის სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის მათემატიკური მოდელი მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში. ზუსტი ამონახსნები	15 – 31
§ 1.3.	ფუნდამენტური და გამოყენებითი სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის მათემატიკური მოდელი	31 – 40
თავი II.	მეცნიერთა მომზადების არაწრფივი მათემატიკური მოდელები . . .	41
§ 2.1.	მეცნიერთა მომზადების მათემატიკური მოდელები. სამ და ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემები	41 – 44
§ 2.2.	მეცნიერთა მომზადების ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემების გამოკვლევა	44 – 53
§ 2.3.	მეცნიერთა მომზადების სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემების გამოკვლევა	53 – 64
თავი III.	უნივერსიტეტებს შორის კონკურენციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელები	64
§ 3.1.	ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის ზოგადი მათემატიკური მოდელი. განტოლებათა სისტემა	64 – 66
§ 3.2.	ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის მათემატიკური მოდელი მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში. დინამიური სისტემის გამოკვლევა	67 – 77
§ 3.3.	ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის მიკრომოდელი	77 – 90
დასკვნა	. . . .	91 - 94
ლიტერატურა	. . . .	95- 106

შესავალი

როგორც ცნობილია, გამოყენებითი მათემატიკის მრავალი ამოცანისათვის დამახასიათებელია მრავალწახნაგოვანობა, რაც მოითხოვს ბუნებაში მიმდინარე ფიზიკური პროცესის ზეგავლენის გათვალისწინებას მიმდინარე მოვლენაზე [2, 6, 14]. გამოჩენილი მათემატიკოსი აკადემიკოსი ა. კოლმოგოროვი აღნიშნავდა: "არსებითად, გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალისტი, როცა ხსნის ჰიდროდინამიკის ამოცანას, ის იკვლევს ოკეანის ჰიდროდინამიკის პრობლემებს მათემატიკური საშუალებებით. მათემატიკოსებს ყოველთვის უნდათ, რომ მათემატიკა იყოს „სუფთა", ანუ მკაცრი, დამტკიცებადი. მაგრამ, როგორც წესი, ყველაზე საინტერესო რეალური ამოცანებია, რომლებსაც ბუნება გვიყენებს. ამ მიმართულებით ეს ამოცანები არიან მიუღწევადნი. ამ შემთხვევაში ძალიან მნიშვნელოვანია, რომ მათემატიკოსს თვითონ შეეძლოს მოძებნოს პრობლემური ამოცანის გადაწყვეტის მიახლოებული, არამკაცრი, მაგრამ ეფექტური გზები. ყოველ შემთხვევაში, ჩემთვის ყოველთვის ეს ასე იყო: თუ მე ვიკვლევ ტურბულენტობას, მაშინ დაკავებული ვარ ტურბულენტობით... მე, ყოველ შემთხვევაში, ყველაზე მეტად ვაფასებ ასეთი ტიპის გამოყენებით მათემატიკოსებს, რომლებიც რაღაც დროის განმავლობაში უკვე მათემატიკოსები კი არ არიან, არამედ დაკავებულები არიან ფიზიკური ამოცანების ამოხსნით, თუ შესაძლებელია, „სუფთა" მეთოდებით, თუ ეს შეუძლებელია, ჰქმნიან ჰიპოთეზებს".

ფიზიკური მოვლენების მათემატიკურ მოდელირებას დიდი წარსული აქვს. ფიზიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირება ითვალისწინებს მოდელის ადეკვატურობას, რომელიც მოწმდება ნიუტონის კლასიკური მექანიკის ხუთი კანონის შესრულებით: მასის შენახვის კანონი; იმპულსის შენახვის კანონი; იმპულსის მომენტის შენახვის კანონი; ენერგიის შენახვის კანონი; ენტროპიის შენახვის კანონი [6].

პრაქტიკული თვალსაზრისით, მნიშვნელოვანია აკუსტიკის ამოცანების მათემატიკური მოდელირება თუნდაც წყალქვეშა ობიექტების (წყალქვეშა ნავების) აღმოჩენისათვის [7, 8, 19, 77, 78, 82, 94 - 96].

როგორც ფართოდ ცნობილია, ასევე ხანგძლივი დიდი ისტორია აქვს მათემატიკურ მოდელირებას ბიოლოგიაში, ეკოლოგიაში, ქიმიაში [6, 14, 75, 76, 79, 88, 97]. მაგალითად, მალთუსის მოდელი კარგი სიზუსტით აღწერს ბაქტერიების გამრავლებას კოლონიებში; პერლი-ფერხიულსტის მოდელი აღწერს პოპულაციის ევოლუციას საკვების შეზღუდულობის პირობებში; ვოლტერას მოდელი აღწერს შიგასახეობრივ კონკურენციას; ლოტკი-ვოლტერას მოდელი აღწერს "მტაცებელი-მსხვერპლის" ფენომენს; კურასაოს მოდელი აღწერს არასასურველ სახეობასთან ბრძოლას და სხვა. ამ მოდელებმა საკმაოდ კარგი სიზუსტით აღწერეს ბუნებაში მიმდინარე საკმაოდ რთული პროცესები.

მედიცინაში, განსაკუთრებით, ეპიდემიოლოგიაში მათემატიკური მოდელების შექმნა და მიღებული შედეგების ანალიზი ძალიან აქტუალურია [6, 11, 14, 85].

ეკონომიკური პროცესების, მათ შორის, ფინანსური ნაკადების აღწერა დღეს წარმოუდგენელია მათემატიკური მოდელირების გარეშე. ეკონომიკური პროცესების აღმწერი პირველი მოდელები შექმნეს ისეთმა მეცნიერებმა, როგორებიცაა პარეტო, სმიტი, რიკარდო, სტოუნი და სხვა [3, 6, 80, 86]. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ის მოდელები, რომელთა შექმნის და რეალიზაციის გამო ავტორებმა მიიღეს ნობელის პრემიები: ვ. ლეონტიევი, ლ. კანტაროვიჩი, რ. აუმანი და სხვა. დღეს ურთულესი ეკონომიკური და ფინანსური მოდელების აღწერისათვის გამოიყენება დიფერენციალური და სხვაობიანი განტოლებების, ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მძლავრი მათემატიკური აპარატი [74, 84].

ცნობილმა მეცნიერმა გერმან ხაკენმა 1973 წელს ყურადღება მიაქცია იმას, რომ კოოპერაციული, ურთიერთშეთანხმებული მოვლენები შეიმჩნევა ძლიერ განსხვავებულ სისტემებში, როგორებიცაა ჰიდროდინამიკური არამდგრადობა, ავტოკატალიზური ქიმიური რეაქციები, პოპულაციის დინამიკა, ატმოსფეროში მაკრომოლეკულებისა და ციკლონების წარმოქმნა. ყველაფერი ეს სინერგეტიკული (ერთობლივიქმედების) ეფექტის მაგალითებია [91, 92].

თვითორგანიზების თეორია, დღეისათვის სამეცნიერო მიმართულებებს შორის კავშირების კვლევის ერთ-ერთი ყველაზე აღიარებული და პერსპექტიული მიდგომაა [81, 87]. სინერგეტიკას ორმოცი წლის წინ უყურებდნენ როგორც ფიზიკოს-თეორეტიკოსების

გასართობს, რომლებმაც ბევრ არაწრფივ მოვლენაში ნახეს მსგავსება. ოცი წლის წინათ კი სინერგეტიკული მიდგომების წყალობით ბევრი შესანიშნავი მოვლენა აღმოჩენილი იყო საბუნებისმეტყველო დარგებში: ფიზიკაში, ქიმიაში, ბიოლოგიაში, ჰიდროდინამიკაში. თანამედროვე ეტაპზე დისციპლინათაშორისი მიდგომა გამოიყენება როგორც სტრატეგიულ დაგეგმარებაში, ასევე ისტორიული ალტერნატივების ანალიზის დროს, გლობალური პრობლემების გადაჭრის გზების პოვნაში.

სინერგეტიკამ მძლავრი ბიძგი მისცა მათემატიკური მოდელების გამოყენებას სოციალურ მეცნიერებებში: სოციოლოგია, ისტორია, დემოგრაფია, პოლიტოლოგია, კონფლიქტოლოგია და სხვა [1, 10, 23, 67 - 73, 90].

XXI საუკუნეში, ინფორმაციული ტექნოლოგიების ეპოქაში, სადაც ადამიანი მუდმივად განიცდის მზარდი ინფორმაციული ნაკადების ზეწოლას, აქტუალურია ინფორმაციული ზემოქმედების პროცესების მეცნიერულად შესწავლა. ამ პროცესების შესწავლა შესაძლებელია მათ შორის მათემატიკური მოდელების მეშვეობით, რათა მოხერხდეს თავდაცვა პერმანენტულად მიმდინარე ინფორმაციულ ომში [9].

2009 წელს **პროფ. თემურ ჩილაჩავამ** შექმნა სოციალური პროცესების მათემატიკური მოდელირების ახალი მიმართულება „ინფორმაციული ნაკადების მათემატიკური მოდელები“.

[12, 13, 20, 21, 23, 98, 101 - 103] ნაშრომებში აგებულია ორ ანტაგონისტურ მხარეთა შორის ინფორმაციული ომის მათემატიკური მოდელები, როცა პროცესში აქტიურად ჩართულია მესამე მხარე მშვიდობისმყოფელების სახით. მოდელები იძლევიან საშუალებას ინფორმაციული შეტევების საწყისი ეტაპის ანალიზით მოვახდინოთ ინფორმაციული ომის განვითარების პროგნოზირება და, აქედან გამომდინარე, სამშვიდობო მხარისათვის ადვილია ინფორმაციული ომის დასრულებისათვის რეკომენდაციების შემუშავება.

პროფ. თემურ ჩილაჩავას მიერ შემდგომში შემოთავაზებული იყო ინფორმაციული ომის არაწრფივი უწყვეტი და დისკრეტული მათემატიკური მოდელები, სადაც ავტორი ამბობს: “ანტაგონისტური ქვეყნების შიგნით მოქმედებენ რელიგიური თუ სხვა ინსტიტუტები. მოდელში ურთიერთდაპირისპირებული მხარეების მასტაბილირებულ როლს თამაშობენ

რელიგიური ინსტიტუტები, რომლებიც დადებითად მოქმედებენ თავის ქვეყნების პოლიტიკურ ლიდერებზე და მოუწოდებენ მათ ინფორმაციული ომის შეწყვეტისკენ. კერძო შემთხვევაში ნაჩვენებია, რომ ავტორიტეტულ რელიგიურ ინსტიტუტებს შეუძლიათ ჩააქრონ ინფორმაციული ომი მაშინაც, როცა მხარეების აგრესიულობა მაღალია და საერთაშორისო ორგანიზაციები მოქმედებენ არაპრევენციულად“ [27 – 29, 33, 101 - 103].

უაღრესად აქტუალური გახდა ისეთი არაწრფივი სოციალური პროცესის შესწავლა, როგორიცაა ადმინისტრაციული მართვა. ასეთი მართვის მათემატიკური მოდელი შემოთავაზებული იქნა **პროფ. თემურ ჩილაჩავას** მიერ. მმართველობა შესაძლებელია განხორციელდეს როგორც მაკროდონეზე (მაგალითად, სახელმწიფოს მმართველობა), ასევე მიკროდონეზე (მაგალითად, სასწავლო, სამეცნიერო დაწესებულების, საფინანსო ან საწარმო ობიექტის მმართველობა). ნებისმიერი ადმინისტრაციული ობიექტის შემადგენლობა პირობითად შეიძლება დავყოთ რამოდენიმე განსხვავებული ტიპის სუბიექტებად: განსხვავებული სამოქალაქო პოზიციის მქონე ადამიანები, კონფორმისტები, რომლებიც ყველაფერში ეთანხმებიან მმართველ ადმინისტრაციას და სახელმწიფოებრივი სტრუქტურები. თუ როგორ ფარდობაშია კონფორმისტების და თავისუფლად მოაზროვნე ადამიანების რაოდენობა ამა თუ იმ დროს განიხილება : ლიბერალური, დემოკრატიული, ნახევრად დიქტატორული, დიქტატორული და სხვა რეჟიმები [10, 22, 99, 100, 106, 108].

სახელმწიფო მართვის თვალსაზრისით განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნა, რომელიც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ პოლიტიკური სუბიექტების მომხრეთა რაოდენობის დინამიკა არჩევნებიდან მორიგ არჩევნებამდე პერიოდში. პოლიტიკური არჩევნები შეიძლება განვიხილოთ ორნაირი: მრავალპარტიული და ორპარტიული. ბევრ ქვეყანაში არსებობს ორპარტიული არჩევნების სისტემა. ასეთ ქვეყნებს ახასიათებს ძალაუფლების პერიოდულად შეცვლა და, როდესაც ერთი პარტია სახელისუფლებოა, მეორე პარტია ოპოზიციურია. თუმცა ეს არ ნიშნავს იმას, რომ გარდა ამ ორი პარტიისა ქვეყანაში აღარ არსებობს სხვა პარტიები, უბრალოდ მათი გავლენა უმნიშვნელოა პოლიტიკურ პროცესებზე. დღემდე, ძირითადად, მეცნიერების

ინტერესს წარმოადგენდა უკვე ჩატარებული არჩევნების შედეგების სტატისტიკური მონაცემების ანალიზი [16, 18, 72, 73].

2012 წელს **პროფ. თემურ ჩილაჩავას** მიერ შემოთავაზებულია ორპარტიული არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში, რომელშიც აღწერილია სახელისუფლებო და ოპოზიციური პარტიების ამომრჩეველთა ხმების რაოდენობის დინამიკა [13, 24, 25,104, 105, 107, 109], ხოლო [39]- ში განხილულია მოდელი, როცა კოეფიციენტები წრფივი ფუნქციებია. 2013 წელს თ. ჩილაჩავამ ასევე შეიმუშავა სამპარტიული არჩევნების მოდელი მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში [26, 104]. არჩევნების პროცესების უფრო ზუსტი და რეალური აღწერისათვის, მათემატიკური მოდელის შექმნისას, გასათვალისწინებელია არჩევნებზე ამომრჩევლების მოსვლადობის სხვადასხვა მაჩვენებლები და ხმების გარკვეული ფალსიფიცირება არჩევნების დღეს. ბუნებრივია, რომ აგრეთვე გასათვალისწინებელია ე.წ. საარჩევნო დემოგრაფიული ცვლილება (ამომრჩევლების რაოდენობის ცვლილება არჩევნებიდან მორიგ არჩევნებამდე).

არჩევნების მოდელირებასთან დაკავშირებით ბევრი საინტერესო საკითხი გადაწყვეტილია ნაშრომებში [4, 5, 35, 36, 39, 42, 43,47, 49, 51 - 54, 89, 100, 104, 105, 107, 109, 112].

მსოფლიოში მიმდინარე ტენდენციების გათვალისწინებით მნიშვნელოვანია დემოგრაფიული და ასიმილაციის სოციალური პროცესების შესწავლა, მათ შორის მათემატიკური მოდელირების მეშვეობით.

[15] - ში აღწერილია ერთ ტერიტორიაზე მცხოვრები სამი ეთნოსის რაოდენობრივი დინამიკის კომპიუტერული კვლევა. რიცხვითი კვლევებისთვის განხილულია ერთ ტერიტორიაზე მცხოვრები სამი ეთნოსის რაოდენობრივი ცვლილება. ამასთან ასიმილაცია ხდება შერეული ქორწინების შედეგად. ამ პროცესს შეიძლება დაერქვას უმარტივესი (პრიმიტიული) ასიმილაცია.

2014 წელს **პროფ. თემურ ჩილაჩავას** მიერ შემოთავაზებულია ორმხრივი ასიმილაციის (ორი მძლავრი ქვეყანა ახდენს მესამე მხარის სახელმწიფოებრივი წარმონაქმნის, ავტონომიის მოსახლეობის ასიმილაციას) მათემატიკური მოდელები, როგორც

დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინებით, ასევე მის გარეშე [30 - 32, 34, 37, 38]. [42, 43] ნაშრომებში შემოთავაზებულია ორდონიანი ასიმილაციის (ერთი მძლავრი ქვეყანა ახდენს მეორე საშუალო სიძლიერის ქვეყნის მოსახლეობისა და მესამე მხარის სახელმწიფოებრივი წარმონაქმნის, ავტონომიის მოსახლეობის ასიმილაციას; ამავე დროს მეორე ქვეყანაც ახდენს იმავე მესამე ავტონომიის მოსახლეობის ასიმილაციას) მათემატიკური მოდელები დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინებით. ასიმილაციის პროცესის მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება განხილულია [5, 50, 93] ნაშრომებში.

2017 წელს **პროფ. თემურ ჩილაჩავას** მიერ შემოთავაზებული იყო ენობრივი გლობალიზაციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი [44, 48]. [44] ნაშრომში გამოკვლეულია ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემა, რომელიც აღწერს ენობრივი გლობალიზაციის პროცესს. მოდელის პარამეტრებზე ნაპოვნია პირობები, რომელთათვის შესაძლებელია ენობრივი სრული გლობალიზაცია, შესაბამისად ნაპოვნია პირობები, რომელთათვის შესაძლებელია თანაარსებობა ენობრივი გლობალიზაციის მომხრეებისა და მოწინააღმდეგეებისა.

2018 წელს **პროფ. თემურ ჩილაჩავას** მიერ შემოთავაზებულია ორ პოლიტიკურად ურთიერთდაპირისპირებულ მხარეთა (შესაძლო ქვეყნები ან ქვეყანა და ქვეყნის სუბიექტი) შორის ეკონომიკური თანამშრომლობის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს მხარეთა მოსახლეობების ნაწილთა ეკონომიკურ და სხვა სახის თანამშრომლობას, რომელიც მიმართულია მხარეთა დაახლოებისკენ, კონფლიქტის მშვიდობიანად გადაწყვეტისკენ. მოდელში ნაგულისხმევია, რომ ეკონომიკური თანამშრომლობის პროცესი თავისუფალია პოლიტიკური ზეწოლისაგან ანუ მხარეთა მთავრობები და მესამე გარე მხარე არ ერევა ამ პროცესში. მიღებულია დინამიური სისტემა, რომელიც აღწერს ორივე მხარის მოსახლეობების იმ ნაწილის დინამიკას, რომლებიც ორიენტირებული არიან თანამშრომლობაზე. მოდელში ასევე ნაგულისხმევია, რომ ორივე მხარის დემოგრაფიული ფაქტორი ნულოვანია ანუ მხარეთა თანამშრომლობის მსურველთა და მოწინააღმდეგეთა ჯამი უცვლელია პროცესის განხილვის პერიოდში. მათემატიკური მოდელის მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში ნაპოვნია არაწრფივ დიფერენციალურ

განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილები. შესწავლილია ამონახსნების ასიმპტოტური მდგრადობის საკითხი. მოდელის მუდმივი კოეფიციენტებს შორის გარკვეული თანაფარდობის შემთხვევაში, ნაპოვნია პირველი ინტეგრალი და ზუსტი ანალიზური ამონახსნი. მიღებული ზუსტი ამონახსნი იძლევა შესაძლებლობას მოცემული მათემატიკური მოდელისა და მის კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულების ფარგლებში განვსაზღვროთ პირობები, რომელთათვის ეკონომიკურ თანამშრომლობას შეუძლია მშვიდობიანად გადაწყვიტოს პოლიტიკური კონფლიქტი (მხარეთა მოსახლეობების უმრავლესობას სურთ კონფლიქტის გადაწყვეტა) [45, 46].

ერთ-ერთი პერსპექტიული და სწრაფად განვითარებადი დარგი მათემატიკური მოდელირების გამოყენებისა არის ინოვაციური პროცესების დინამიკა. გამოკვლევები ამ დარგში გვიჩვენებენ, რომ კრიზისულ მოვლენებს აქვთ არა შემთხვევითი, არამედ სისტემატური ხასიათი და განისაზღვრება დეტერმინირებული მექანიზმებით. ამიტომ ინოვაციური პროცესების ქცევის ბევრი თავისებურება შეიძლება აღიწეროს დიფერენციალური განტოლებების დეტერმინირებული სისტემების ჩარჩოში. ამ სისტემების რთული ქცევა, თვითორგანიზებულობის ჩათვლით, ექვემდებარება აღწერას არაწრფივი წევრების გათვალისწინების მეშვეობით, რომლებიც ხვდება დინამიური სისტემების მათემატიკურ მოდელებში. მნიშვნელოვან ინტერესს წარმოადგენს სამეცნიერო-საგანმანათლებლო სფეროში ინოვაციური პროცესების მათემატიკური მოდელების გამოკვლევა.

წარმოდგენილ სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ახალი მათემატიკური მოდელები ისეთი სოციალური მოვლენებისა, როგორებიცაა: ფუნდამენტური კვლევების - გამოყენებითი კვლევების - საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოების - ინოვაციული პროექტების ურთიერთგავლენების პროცესები; მეცნიერთა მომზადების ორ და სამსაფეხურიანი ეტაპები; უნივერსიტეტებს შორის კონკურენციის პროცესები.

პირველ თავში შემოთავაზებულია ინოვაციური სისტემის: ფუნდამენტური კვლევები - გამოყენებითი კვლევები - საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოები - ინოვაციები

კოოპერაციული ურთიერთქმედების პროცესების დინამიკის არაწრფივი მათემატიკური მოდელები.

პირველი თავის მეორე პარაგრაფში კერძო შემთხვევებისათვის, ნაპოვნია ოთხუცნობიან არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოშის ამოცანის ზუსტი ანალიზური ამონახსნები. შესწავლილია მიღებული შედეგები.

პირველი თავის მესამე პარაგრაფში განხილულია ახალი არაწრფივი უწყვეტი მათემატიკური მოდელი ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების ურთიერთგავლენისა ერთ, შესაძლო გარე მომხმარებლისაგან დახურული სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის მაგალითზე (მიკრომოდელი, ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემა). კოშის ამოცანა პირველი რიგის ორუცნობიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის, ამოხსნილია ანალიზურად ზუსტად. ნაპოვნია სტაციონარული ამონახსნი და ასევე ანალიზურად ზუსტად ამოხსნილია რიკატის სპეციალური განტოლებისავის კოშის ამოცანა. უფრო ზოგად შემთხვევაში, **ბენდიქსონის კრიტერიუმის** საფუძველზე, **დამტკიცებულია თეორემა** ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში შეკრული ინტეგრალური წირების არ არსებობის შესახებ. ნაპოვნია პირობები მოდელის პარამეტრებისათვის, რომელთათვის შესაძლებელია არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის შემოსაზღვრული ამონახსნების არსებობა ანუ შეკრული ინტეგრალური წირების არსებობა ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში.

დისერტაციის მეორე თავში განხილულია ორ და სამგანზომილებიანი არაწრფივი დინამიური სისტემები, რომლებიც აღწერენ მეცნიერთა მომზადების პროცესს, მათ შეუქცევად გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

მეცნიერთა მომზადების ორდონიან მოდელში განიხილება ორი სუბიექტი: ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები და უკვე დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერები, ხოლო სამსაფეხურიან მოდელში - სამი სუბიექტი: ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები, მეცნიერებათა კანდიდატები და მეცნიერებათა დოქტორები. დასმულია კოშის ამოცანა ორი ან სამი არაწრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. მათემატიკური მოდელი

აღწერს სამეცნიერო კადრების თვითწარმოების პროცესებს, მათი შეუქცევადად გასვლას და გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

მეორე თავის მეორე პარაგრაფში განხილულია ორდონიანი მოდელი, რომელიც ფაქტიურად დადის „მსხვერპლი“ - „მტაცებლის“ ლოტკი - ვოლტერას მოდელამდე შიგასახეობრივი კონკურენციის გათვალისწინებით (მატების თვითშეზღუდვის არაწრფივი წევრები).

ორგანზომილებიან დინამიურ სისტემას ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ დახურულ მეოთხედში აქვს წონასწორობის სამი წერტილი, ამასთან, ტრივიალური ამონახსნის შესაბამისი წონასწორობის წერტილი (კოორდინატთა სათავე), მოდელის პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის **უნაგირა წერტილია**, მეორე წონასწორობის მდგომარეობა, რომელიც შეესაბამება „მტაცებელთა“ გადაშენებას და „მსხვერპლთა“ წონასწორობის მდგომარეობას, ერთ შემთხვევაში **უნაგირა წერტილია**, ხოლო მეორე შემთხვევაში - **მდგრადი კვანძია.**

სისტემის მუდმივ კოეფიციენტებზე ნაპოვნია პირობები, რომელთათვის სტაციონარული ამონახსნი, მესამე წონასწორობის მდგომარეობა ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ ღია მეოთხედში (დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ერთადერთი **ზღვრული წერტილი),** რომელიც შეესაბამება დოქტორის ხარისხის მქონე და ხარისხის არმქონე მეცნიერთა წონასწორობის თანაარსებობას, იქნება ასიმპტოტურად მდგრადი (მდგრადი კვანძი ან მდგრადი ფოკუსი).

მეორე თავის მესამე პარაგრაფში განხილულია სამგანზომილებიანი შემთხვევა. ნაპოვნია დინამიური სისტემის განსაკუთრებული წერტილები. **რაუსი-გურვიცის მდგრადობის კრიტერიუმის** მეშვეობით გამოკვლეულია მდგრადობაზე განსაკუთრებული წერტილები. კერძო შემთხვევაში, ნაპოვნია სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემის **პირველი ინტეგრალი,** რომელიც ამონახსნთა ფაზურ სივრცეში წარმოადგენს ორგანზომილებიან ზედაპირს.

სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავში განხილულია უნივერსიტეტებს შორის კონკურენციის პროცესების აღმწერი არაწრფივი მათემატიკური მოდელები.

მესამე თავის მეორე პარაგრაფში განხილულია ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს კონკურენციას როგორც შეზღუდული რაოდენობის აბიტურიენტებისათვის, ასევე სტუდენტების მოზიდვას მობილობით (სტუდენტების გადასვლა ერთი უნივერსიტეტიდან მეორეში). მიღებულია დინამიური სისტემა, რომელიც აღწერს ორი უნივერსიტეტის სტუდენტებისა და აბიტურიენტთა რაოდენობების (ნაკადების) დინამიკას. მათემატიკური მოდელის მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში ნაპოვნია არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილები. **რაუსი - გურვიცის მდგრადობის კრიტერიუმის** გამოყენებით შესწავლილია ამონახსნების ასიმპტოტური მდგრადობის საკითხი.

მესამე თავის მესამე პარაგრაფში განხილულია ორ უნივერსიტეტს შორის შეზღუდული აბიტურიენტებისათვის კონკურენციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი **(მიკრომოდელი, ერთი რეგიონისათვის, სადაც მხოლოდ ორი არჩევანია).** კონკურენციის მიკრომოდელი ითვალისწინებს ამ უნივერსიტეტების სტუდენტთა კონტინგენტის ცვლილებას ერთი წლის განმავლობაში. კერძოდ, მოდელში გათვალისწინებულია: სტუდენტთა პირველ კურსზე ახალი ნაკადის მიღება (ადმინისტრაციის მიერ პიარ-კამპანიით მოზიდული აბიტურიენტები); მოცემული უნივერსიტეტის სტუდენტებსა და აბიტურიენტებს შორის თანამშრომლობა (კოოპერაცია); მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირება, რათა მობილობით გადმოიბირონ მეორე უნივერსიტეტიდან სტუდენტები.

მოდელის პარამეტრების კერძო შემთხვევებში კვადრატურებში ნაპოვნია ზუსტი ანალიზური ამოხსნები.

თავი I.

სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის არაწრფივი მათემატიკური მოდელები

§ 1.1. ინოვაციურ სისტემაში კოოპერაციული ურთიერთქმედების პროცესების დინამიკის ზოგადი მათემატიკური მოდელი

მათემატიკური მოდელირების გამოყენების ერთ-ერთი პერსპექტიული და სწრაფად განვითარებადი დარგია ინოვაციური პროცესების დინამიკა. გამოკვლევები ამ დარგში გვიჩვენებენ, რომ კრიზისულ მოვლენებს აქვთ არა შემთხვევითი, არამედ სისტემატური ხასიათი და განისაზღვრება დეტერმინირებული მექანიზმებით. ამიტომ ინოვაციური პროცესების ქცევის ბევრი თავისებურება შეიძლება აღიწეროს დიფერენციალური განტოლებების დეტერმინირებული სისტემების ჩარჩოში. ამ სისტემების რთული ქცევა, თვითორგანიზებულობის ჩათვლით, ექვემდებარება აღწერას არაწრფივი წევრების გათვალისწინების მეშვეობით, რომლებიც ხვდება დინამიური სისტემების მათემატიკურ მოდელებში. პრაქტიკულ ინტერესს წარმოადგენს სამეცნიერო-საგანმანათლებლო სფეროში ინოვაციური პროცესების აღმწერი მათემატიკური მოდელების კვლევა.

ნაშრომში შემოთავაზებულია ინოვაციური სისტემის: ფუნდამენტური კვლევები - გამოყენებითი კვლევები - საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოები - ინოვაციები კოოპერაციული ურთიერთქმედების პროცესების დინამიკის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს სახე [55]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1(t)u(t) - \beta_1(t)u^2(t) + \delta_1(t) - \delta_2(t), \\[2em]
\dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2(t)v(t) - \beta_2(t)v^2(t) + \gamma_{21}(t)u(t)v(t), \\[2em]
\dfrac{dw(t)}{dt} = \alpha_3(t)w(t) - \beta_3(t)w^3(t) + \gamma_{32}(t)v(t)w(t), \\[2em]
\dfrac{dz(t)}{dt} = \alpha_4(t)z(t) - \beta_4(t)z^2(t) + \gamma_{43}(t)w(t)z(t)\,.
\end{cases}
\tag{1.1.1}
$$

$$
u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0, \tag{1.1.2}
$$

$$
\delta_i(t) > 0, \quad i = 1,2, \qquad \alpha_i(t) > 0, \quad \beta_i(t) > 0, \quad i = \overline{1,4}\ ,
$$

$$
\gamma_{21}(t) > 0,
$$

$$
\gamma_{32}(t) > 0,
$$

$$
\gamma_{43}(t) > 0.
$$

კოშის ამოცანის (1.1.1), (1.1.2) ამონახსნს $[0,T]$ სეგმენტზე ვეძებთ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში $u,\ v,\ w,\ z \in C^1[0,T]$. $u(t),\ v(t),\ w(t),\ z(t)$ - შესაბამისად ფუნდამენტური, გამოყენებითი კვლევების, საცდელ-საკონსტრუქტორო და ინოვაციური სამუშაოების რაოდენობებია დროის t მომენტში.

§ 1.2. ოთხი ტიპის სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის მათემატიკური მოდელი მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში. განტოლებათა სისტემა და საწყისი პირობები. ზუსტი ამონახსნი.

ჩვენ ყველა ტიპის სამეცნიერო კვლევები დავყავით ოთხ ტიპად: ფუნდამენტური კვლევები -გამოყენებითი კვლევები - საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოები - ინოვაციები პროექტები და განვიხილავთ მათი ურთიერთქმედების პროცესის არაწრფივ მათემატიკურ მოდელს [55].

ბევრი მათემატიკური მოდელის ანალიზმა, რომლებიც დაკავშირებულია ორ ან სამ სუბიექტთან [2, 6, 14], ასევე ფუნდამენტური კვლევების საბოლოო ტრანსფორმაციამ ინოვაციურ პროექტებში მიგვიყვანა შემდეგ არაწრფივ მათემატიკურ მოდელამდე ოთხი სუბიექტის მონაწილეობით

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) + \delta_1 - \delta_2 \,, \\[2ex] \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2 v(t) - \beta_2 v^2(t) + \gamma_{21} u(t) v(t) \,, \\[2ex] \dfrac{dw(t)}{dt} = \alpha_3 w(t) - \beta_3 w^3(t) + \gamma_{32} v(t) w(t), \\[2ex] \dfrac{dz(t)}{dt} = \alpha_4 z(t) - \beta_4 z^2(t) + \gamma_{43} w(t) z(t). \end{cases} \tag{1.2.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0, \quad z(0) = z_0. \tag{1.2.2}$$

$$\delta_i > 0, \quad i = 1,2, \quad \alpha_i > 0, \qquad \beta_i > 0, \quad i = \overline{1,4}, \quad \gamma_{21} > 0, \quad \gamma_{32} > 0, \quad \gamma_{43} > 0.$$

კოშის ამოცანა (1.2.1), (1.2.2) იხილება $[0,T]$ სეგმენტზე უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში $u, v, w, z \in C^1[0,T]$.

$u(t)-$ ფუნდამენტური კვლევების რაოდენობაა დროის t მომენტში;

$v(t)-$ გამოყენებითი კვლევების რაოდენობაა დროის t მომენტში;

$w(t)-$საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოების რაოდენობაა დროის t მომენტში;

$z(t)-$ ინოვაციური პროექტების პროექტების რაოდენობაა დროის t მომენტში;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 -$ფუნდამენტური, გამოყენებითი, საცდელი-საკონსტრუქტორო, ინოვაციური სამუშაოების წარმოების კოეფიციენტებია;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 -$ ფუნდამენტური, გამოყენებითი, საცდელი-საკონსტრუქტორო, ინოვაციური სამუშაოების სიჭარბის კოეფიციენტებია;

δ_1, δ_2 - დროის ერთეულში ფუნდამენტური კვლევების გადინებისა და შემოდინების კოეფიციენტებია;

$\gamma_{12} -$ ფუნდამენტური და გამოყენებითი გამოკვლევების ურთიერთქმედების კოეფიციენტია;

$\gamma_{23} -$ გამოყენებითი და საცდელი-საკონსტრუქტორო გამოკვლევების ურთიერთქმედების კოეფიციენტია;

$\gamma_{34} -$ საცდელი-საკონსტრუქტორო გამოკვლევებისა და ინოვაციური პროექტების ურთიერთქმედების კოეფიციენტია.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა:

$$\boldsymbol{\delta_1} = \boldsymbol{\delta_2}\ , \tag{1.2.3}$$

მაშინ (1.2.1), (1.2.2)-დან $u(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2.4}$$

რომლის ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(t) = \frac{u_0 \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \exp(\alpha_1 t)}{\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} - u_0 + u_0 \exp(\alpha_1 t)}. \tag{1.2.5}$$

მაშინ (1.2.1)-(1.2.2), (1.2.5)- დან $v(t)$ ფუნქციისათვის მიიღება კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2 v - \beta_2 v^2 + \gamma_{21} v \dfrac{u_0 \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \exp(\alpha_1 t)}{\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} - u_0 + u_0 \exp(\alpha_1 t)} \\ \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$p(t) = 1 / v(t)\ , \tag{1.2.7}$$

რის შედეგად (1.2.6), (1.2.7) დან მარტივად მიიღება $p(t)$ ფუნქციისათვის კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} + [\alpha_2 + \gamma_{21}u(t)]p(t) = \beta_2 \\ \\ p(0) = \dfrac{1}{v_0} \equiv p_0 \end{cases} \qquad (1.2.8)$$

სადაც (1.2.5)-ის თანახმად $u(t)$ უკვე ცნობილი ფუნქციაა.

(1.2.8) არის პირველი რიგის არერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება $p(t)$ ფუნქციისათვის, რომლის ზუსტი ანალიზური ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$p(t) = \exp[-\int_0^t (\alpha_2 + \gamma_{21}u(\tau))d\tau]\left\{p_0 + \int_0^t \beta_2 \exp[\int_0^\tau (\alpha_2 + \gamma_{21}u(\mu))d\mu]d\tau\right\} \qquad (1.2.9)$$

ამრიგად, (1.2.7)-ის თანახმად $v(t)$ ფუნქციისათვის გვაქვს ზუსტი ამონახსნი

$$v(t) = \exp[\int_0^t (\alpha_2 + \gamma_{21}u(\tau))d\tau]\left\{p_0 + \int_0^t \beta_2 \exp[\int_0^\tau (\alpha_2 + \gamma_{21}u(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1} \qquad (1.2.10)$$

(1.2.1) - (1.2.3), (1.2.5), (1.2.10) -ის თანახმად $w(t)$ ფუნქციისათვის მიიღება შემდეგი კოშის ამოცანა

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} - [\alpha_3 + \gamma_{32}v(t)]w(t) = -\beta_3 w^2 \\ \\ w(0) = w_0 \end{cases} \qquad (1.2.11)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$q(t) = 1/w(t), \qquad (1.2.12)$$

მაშინ $q(t)$ ფუნქციისათვის მიიღება კოშის ამოცანა:

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} + [\alpha_3 + \gamma_{32} v(t)] q(t) = \beta_3 \\ \\ q(0) = \dfrac{1}{w_0} \equiv q_0 \end{cases} . \qquad (1.2.13)$$

(1.2.13)-ის ზუსტი ანალიზური ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$q(t) = \exp[-\int_0^t (\alpha_3 + \gamma_{32} v(\tau)) d\tau] \left\{ q_0 + \int_0^t \beta_3 \exp[\int_0^\tau (\alpha_3 + \gamma_{32} v(\mu)) d\mu] d\tau \right\}. \qquad (1.2.14)$$

(1.2.12), (1.2.14)-ის თანახმად $w(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის შემდეგ ამოცანას:

$$w(t) = \exp[\int_0^t (\alpha_3 + \gamma_{32} v(\tau)) d\tau] \left\{ q_0 + \int_0^t \beta_3 \exp[\int_0^\tau (\alpha_3 + \gamma_{32} v(\mu)) d\mu] d\tau \right\}.^{-1} \qquad (1.2.15)$$

(1.2.1) - (1.2.3), (1.2.5), (1.2.10), (1.2.15)-დან $z(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის შემდეგ ამოცანას:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} - [\alpha_4 + \gamma_{43} w(t)] z(t) = -\beta_4 z^2 \\ \\ z(0) = z_0 \end{cases} . \tag{1.2.16}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$r(t) = 1/z(t), \tag{1.2.17}$$

მაში ნ $r(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ კოშის ამოცანას:

$$\begin{cases} \dfrac{dr(t)}{dt} + [\alpha_4 + \gamma_{43} w(t)] r(t) = \beta_4 \\ \\ r(0) = \dfrac{1}{z_0} \equiv r_0 \end{cases} . \tag{1.2.18}$$

(1.2.18)-ის ზუსტი ანალიზური ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$r(t) = \exp[-\int_0^t (\alpha_4 + \gamma_{43} w(\tau)) d\tau] \left\{ r_0 + \int_0^t \beta_4 \exp[\int_0^\tau (\alpha_4 + \gamma_{43} w(\mu)) d\mu] d\tau \right\}. \tag{1.2.19}$$

(1.2.17), (1.2.19)-ის თანახმად $z(t)$ ფუნქცია ჩაიწერება :

$$z(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_4+\gamma_{43}w(\tau))d\tau]\left\{r_0+\int_0^t\beta_4\exp[\int_0^\tau(\alpha_4+\gamma_{43}w(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1}. \qquad (1.2.20)$$

ამრიგად, კოშის ამოცანის (1.2.1) – (1.2.3) ზუსტი ამონახსნი მიიღებს სახეს:

$$u(t)=\frac{u_0\frac{\alpha_1}{\beta_1}\exp(\alpha_1 t)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}-u_0+u_0\exp(\alpha_1 t)}\ , \qquad (1.2.21)$$

$$v(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_2+\gamma_{21}u(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{v_0}+\int_0^t\beta_2\exp[\int_0^\tau(\alpha_2+\gamma_{21}u(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

$$w(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_3+\gamma_{32}v(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{w_0}+\int_0^t\beta_3\exp[\int_0^\tau(\alpha_3+\gamma_{32}v(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

$$z(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_4+\gamma_{43}w(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{z_0}+\int_0^t\beta_4\exp[\int_0^\tau(\alpha_4+\gamma_{43}w(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1}.$$

(1.2.21)-დან გვექნება:

$$\min[u_0\exp(\alpha_1 t)]=u_0,\quad t\in[0,T],\quad \alpha_1>0.$$

ზედა უტოლობის ძალით ადგილი აქვს შემდეგ გამოსახულებას:

$$u(t), v(t),\ w(t), z(t) \in C^1[0,T].$$

1. <u>განვიხილოთ ზოგიერთი სხვა კერძო შემთხვევა:</u>

თუ ადგილი აქვს ტოლობას

$$u_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\ , \tag{1.2.22}$$

მაშინ (1.2.5)-დან, მივიღებთ:

$$u(t) = u_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{1.2.23}$$

შესაბამისად (1.2.10) მივიღებთ:

$$v(t) = \frac{v_0 \dfrac{\alpha_2 + \gamma_{21}u_0}{\beta_2} \exp[(\alpha_2 + \gamma_{21}u_0)t]}{\dfrac{\alpha_2 + \gamma_{21}u_0}{\beta_2} - v_0 + v_0 \exp[(\alpha_2 + \gamma_{21}u_0)t]} \tag{1.2.24}$$

თუ დავუშვებთ, რომ სრულდება ტოლობა:

$$v_0 = \frac{\alpha_2 + \gamma_{21}u_0}{\beta_2}\ , \tag{1.2.25}$$

მაშინ (1.2.24), (1.2.25) - დან მივიღებთ:

$$v(t) = v_0 = \frac{\alpha_2 + \gamma_{21} u_0}{\beta_2}, \ \forall t \in [0,T], \tag{1.2.26}$$

ხოლო (1.2.15) - დან ადგილი ექნება ტოლობას:

$$w(t) = \frac{w_0 \dfrac{\alpha_3 + \gamma_{32} v_0}{\beta_3} \exp[(\alpha_3 + \gamma_{32} v_0)t]}{\dfrac{\alpha_3 + \gamma_{32} v_0}{\beta_3} - w_0 + w_0 \exp[(\alpha_3 + \gamma_{32} v_0)t]}. \tag{1.2.27}$$

თუ დავუშვებთ, რომ w_0 - სთვის სრულდება ტოლობა:

$$w_0 = \frac{\alpha_3 + \gamma_{32} v_0}{\beta_3}, \tag{1.2.28}$$

მაშინ (1.2.27)-დან მივიღებთ:

$$w(t) = w_0 = \frac{\alpha_3 + \gamma_{32} v_0}{\beta_3}, \ \forall t \in [0,T] \tag{1.2.29}$$

ხოლო (1.2.20) -დან ვღებულობთ:

$$z(t) = \frac{z_0 \dfrac{\alpha_4 + \gamma_{43} w_0}{\beta_4} \exp[(\alpha_4 + \gamma_{43} w_0)t]}{\dfrac{\alpha_4 + \gamma_{43} w_0}{\beta_4} - z_0 + z_0 \exp[(\alpha_4 + \gamma_{43} w_0)t]}. \tag{1.2.30}$$

თუ დავუშვებთ, რომ z_0 - სთვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$z_0 = \frac{\alpha_4 + \gamma_{43} w_0}{\beta_4}, \tag{1.2.31}$$

მაშინ (1.2.30)-დან მივიღებთ:

$$z(t) = z_0 = \frac{\alpha_4 + \gamma_{43} w_0}{\beta_4}, \ \forall t \in [0, T] . \tag{1.2.32}$$

ამრიგად, განტოლებათა სისტემის (1.2.1) – (1.2.3) <u>სტაციონარულ ამონახსნს</u> აქვს სახე:

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \\[2ex] v_0 = \dfrac{\alpha_2 + \gamma_{21} u_0}{\beta_2} \\[2ex] w_0 = \dfrac{\alpha_3 + \gamma_{32} v_0}{\beta_3} \\[2ex] z_0 = \dfrac{\alpha_4 + \gamma_{43} w_0}{\beta_4} \end{cases}$$

საბოლოოდ ჩავწერთ:

$$
\begin{cases}
u(t) = u_0 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \\[2ex]
v(t) = v_0 = \dfrac{\alpha_2 + \gamma_{21} u_0}{\beta_2} \\[2ex]
w(t) = w_0 = \dfrac{\alpha_3 + \gamma_{32} v_0}{\beta_3} \\[2ex]
z(t) = z_0 = \dfrac{\alpha_4 + \gamma_{43} w_0}{\beta_4}
\end{cases}
$$

$$\forall t \in [0, T]. \tag{1.2.33}$$

2. ზუსტი ანალიზური ამონახსნი ზოგადი მოდელისათვის

განვიხილოთ კოშის ამოცანა (1.2.1), (1.2.2),

როცა:

$$\delta_1 \neq \delta_2,$$

(1.2.1), (1.2.2) - დან

$u(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის შემდეგ დამოუკიდებელ ამოცანას (დანარჩენი სამი უცნობი ფუნქცია არ ფიგურირებს ამ ქვეამოცანაში)

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) + \delta_1 - \delta_2 \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} . \tag{1.2.34}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$D \equiv \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} + 4 \cdot \frac{\delta_1 - \delta_2}{\beta_1} . \tag{1.2.35}$$

ჩვენ განვიხილავთ სამ შემთხვევას:

1. $\mathbf{D = 0}$,

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} > \delta_1 ,$$

ესე იგი თეორიული (ფუნდამენდური) კვლევების გადინება მეტია, ვიდრე ახალი თეორიული კვლევების შემოდინება.

მაშინ (1.2.34) ზუსტი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u(t) = \frac{4\beta_1 u_0 + \alpha_1(2\beta_1 u_0 - \alpha_1)t}{2\beta_1[2 + (2\beta_1 u_0 - \alpha_1)t]} . \tag{1.2.36}$$

2. $\mathbf{D > 0}$,

$$\delta_2 < \delta_1 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} ,$$

მაშინ (1.2.34) ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:

$$u(t)=\frac{u_2(u_0-u_1)\exp(-\beta_1\sqrt{D}t)-u_1(u_0-u_2)}{(u_0-u_1)\exp(-\beta_1\sqrt{D}t)-(u_0-u_2)}, \tag{1.2.37}$$

სადაც

$$u_1=\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\sqrt{D}}{2},$$

$$u_2=\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\sqrt{D}}{2},$$

$$u_2>0,$$

$$\delta_2>\delta_1,$$

$$u_2<0,$$

$$\delta_2<\delta_1,$$

განტოლებათა სისტემა (1.2.34) შემოღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{du(t)}{dt}=-\beta_1(u(t)-u_1)(u(t)-u_2).$$

(1.2.37)-დან მარტივად მიიღება, რომ ადგილი აქვს:

$$\lim_{t\to\infty}u(t)=u_1.$$

ამრიგად:

ა) თუ

$$u_2 < u_0 < u_1 ,$$

მაშინ $u(t)$ ფუნქცია იზრდება u_1 მნიშვნელობამდე.

ბ) თუ

$$u_1 < u_0 ,$$

მაშინ $u(t)$ ფუნქცია კლებულობს u_1 −მდე.

გ) ხოლო თუ:

$$\delta_2 > \delta_1,$$

$$0 < u_0 < u_2 ,$$

მაშინ $u(t)$ ფუნქცია კლებულობს ნულამდე.

$$u(t_*) = 0 , \qquad t_* = \frac{1}{\beta_1 \sqrt{D}} \ln \frac{u_2(u_0 - u_1)}{u_1(u_0 - u_2)}$$

3. $\mathbf{D < 0}$,

$$\delta_2 > \delta_1 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} > \delta_1 ,$$

ამ შემთხვევაში (1.2.34) ზუსტი ამონახსნი ჩაიწერება:

$$u(t)=\frac{2\beta_1 u_0+[\frac{\alpha_1(u_0-\frac{\alpha_1}{2\beta_1})}{\sqrt{-D}}-2\beta_1\sqrt{-D}]tg(\beta_1\sqrt{-D}t)}{2\beta_1(1+\frac{u_0-\frac{\alpha_1}{2\beta_1}}{\sqrt{-D}}tg(\beta_1\sqrt{-D}t))} \quad . \tag{1.2.38}$$

ამრიგად, კოშის ამოცანის (1.2.1), (1.2.2) ზუსტი ანალიზური ამონახსნს,

როცა გათვალისწინებულია:

$$\delta_2=\delta_1+\frac{\alpha_1^2}{4\beta_1},$$

აქვს შემდეგი სახე:

$$u(t)=\frac{4\beta_1 u_0+\alpha_1(2\beta_1 u_0-\alpha_1)t}{2\beta_1[2+(2\beta_1 u_0-\alpha_1)t]},$$

(1.2.39)

$$v(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_2+\gamma_{21}u(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{v_0}+\int_0^t\beta_2\exp[\int_0^\tau(\alpha_2+\gamma_{21}u(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

$$w(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_3+\gamma_{32}v(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{w_0}+\int_0^t\beta_3\exp[\int_0^\tau(\alpha_3+\gamma_{32}v(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

$$z(t)=\exp[\int_0^t(\alpha_4+\gamma_{43}w(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{z_0}+\int_0^t\beta_4\exp[\int_0^\tau(\alpha_4+\gamma_{43}w(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

ხოლო როცა:

$$\delta_2 < \delta_1 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1},$$

მაშინ:

$$u(t) = \frac{u_2(u_0 - u_1)\exp(-\beta_1\sqrt{D}t) - u_1(u_0 - u_2)}{(u_0 - u_1)\exp(-\beta_1\sqrt{D}t) - (u_0 - u_2)},$$

(1.2.40)

$$v(t) = \exp[\int_0^t (\alpha_2 + \gamma_{21}u(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{v_0} + \int_0^t \beta_2 \exp[\int_0^\tau (\alpha_2 + \gamma_{21}u(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

$$w(t) = \exp[\int_0^t (\alpha_3 + \gamma_{32}v(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{w_0} + \int_0^t \beta_3 \exp[\int_0^\tau (\alpha_3 + \gamma_{32}v(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1},$$

$$z(t) = \exp[\int_0^t (\alpha_4 + \gamma_{43}w(\tau))d\tau]\left\{\frac{1}{z_0} + \int_0^t \beta_4 \exp[\int_0^\tau (\alpha_4 + \gamma_{43}w(\mu))d\mu]d\tau\right\}^{-1}.$$

და როცა:

$$\delta_2 > \delta_1 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1},$$

მაშინ:

$$u(t)=\frac{2\beta_1 u_0+\left[\frac{\alpha_1\left(u_0-\frac{\alpha_1}{2\beta_1}\right)}{\sqrt{-D}}-2\beta_1\sqrt{-D}\right]tg(\beta_1\sqrt{-D}t)}{2\beta_1\left(1+\frac{u_0-\frac{\alpha_1}{2\beta_1}}{\sqrt{-D}}tg(\beta_1\sqrt{-D}t)\right)}, \tag{1.2.41}$$

$$v(t)=\exp\left[\int_0^t(\alpha_2+\gamma_{21}u(\tau))d\tau\right]\left\{\frac{1}{v_0}+\int_0^t\beta_2\exp\left[\int_0^\tau(\alpha_2+\gamma_{21}u(\mu))d\mu\right]d\tau\right\}^{-1},$$

$$w(t)=\exp\left[\int_0^t(\alpha_3+\gamma_{32}v(\tau))d\tau\right]\left\{\frac{1}{w_0}+\int_0^t\beta_3\exp\left[\int_0^\tau(\alpha_3+\gamma_{32}v(\mu))d\mu\right]d\tau\right\}^{-1},$$

$$z(t)=\exp\left[\int_0^t(\alpha_4+\gamma_{43}w(\tau))d\tau\right]\left\{\frac{1}{z_0}+\int_0^t\beta_4\exp\left[\int_0^\tau(\alpha_4+\gamma_{43}w(\mu))d\mu\right]d\tau\right\}^{-1}.$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ მიღებულია ზუსტი ანალიზური ამონახსნები: კერძო შემთხვევაში (როცა ფუნდამენტური კვლევების შემოდინება გადინების ტოლია) (1.2.21), ხოლო ზოგად შემთხვევაში:(1.2.39) - (1.2.41).

§ 1.3.

ფუნდამენტური და გამოყენებითი სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის მათემატიკური მოდელი

[56 – 59] – ში განხილულია ახალი არაწრფივი უწყვეტი მათემატიკური მოდელი ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების ურთიერთგავლენისა ერთ, შესაძლო გარე მომხმარებლისაგან დახურული სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის მაგალითზე (მიკრომოდელი). კოშის ამოცანა პირველი რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის, ამოხსნილია ანალიზურად ზუსტად. უფრო ზოგად შემთხვევაში, **ბენდიქსონის კრიტერიუმის** საფუძველზე, დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში შეკრული ინტეგრალური წირების არ არსებობის შესახებ. ნაპოვნია პირობები მოდელის პარამეტრებისათვის, რომელთათვის შესაძლებელია არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის შემოსაზღვრული ამონახსნების არსებობა.

შემოთავაზებული არაწრფივი მათემატიკური მოდელი იძლევა საშუალებას შევაფასოთ ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების (ნაშრომები) ურთიერთგავლენა, ვიპოვოთ პირობები მოდელის კონსტანტებზე, რომელთათვის არსებობს შემოსაზღვრული ამონახსნი ანუ ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის ღია პირველი მეოთხედში შეკრული ინტეგრალური წირები.

ბევრი მათემატიკური მოდელის ანალიზმა, რომლებიც დაკავშირებულია ორ ან მეტ სუბიექტთან, მიგვიყვანა ფუნდამენტური და გამოყენებითი სამეცნიერო კვლევების ურთიერთქმედების პროცესის არაწრფივ მათემატიკურ მოდელამდე [56-59]

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1(t)u(t) - \beta_1(t)u^2(t) + \gamma_{12}(t)u(t)v(t) + \delta_1(t) - \delta_2(t), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2(t)v(t) - \beta_2(t)v^2(t) + \gamma_{21}(t)u(t)v(t). \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \tag{1.3.2}$$

$$\delta_i(t) > 0, i = 1,2, \ \alpha_i(t) > 0, \beta_i(t) > 0, i = \overline{1,2},$$

$$\gamma_{12}(t) > 0, \quad \gamma_{21}(t) > 0.$$

კოშის ამოცანის (1.3.1), (1.3.2) ამონახსნს $[0,T]$ სეგმენტზე ვეძებთ უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში $u, v \in C^1[0,T]$, $[0,T]$- მოდელის განხილვის შუალედია.

უცნობი ფუნქციები წარმოადგენენ:

$u(t)-$ ფუნდამენტური კვლევების რაოდენობაა დროის t მომენტში;

$v(t)-$ გამოყენებითი კვლევების რაოდენობაა დროის t მომენტში;

$\alpha_1(t), \alpha_2(t)-$ ფუნდამენტური, გამოყენებითი სამუშაოების წარმოების კოეფიციენტებია;

$\beta_1(t), \beta_2(t)-$ ფუნდამენტური, გამოყენებითი სამუშაოების სიჭარბის კოეფიციენტებია;

$\delta_1(t), \delta_2(t)$ - დროის ერთეულში ფუნდამენტური კვლევების გადინებისა და შემოდინების კოეფიციენტებია;

$\gamma_{12}(t), \gamma_{21}(t)-$ფუნდამენტური და გამოყენებითი გამოკვლევების ურთიერთქმედების კოეფიციენტია.

<u>განვიხილოთ კერძო შემთხვევა:</u>

$$\delta_1(t) = \delta_2(t), \tag{1.3.3}$$

$$\alpha_1(t) = \alpha_1 = const > 0, \alpha_2(t) = \alpha_2 = const > 0,$$

$$\beta_1(t) = \beta_1 = const > 0, \beta_2(t) = \beta_2 = const > 0,$$

$$\gamma_{12}(t) = \gamma_{12} = const > 0, \gamma_{21}(t) = \gamma_{21} = const > 0.$$

მაშინ (1.3.1) - (1.3.3) -დან მივიღებთ კოშის ამოცანას განტოლებათა სისტემისათვის

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) + \gamma_{12} u(t) v(t) \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2 v(t) - \beta_2 v^2(t) + \gamma_{21} u(t) v(t) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0. \tag{1.3.5}$$

ვიპოვოთ (1.3.4) არატრივიალური სტაციონარული ამანახსნი:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = 0 \end{cases}.$$

მაშინ (1.3.4)-დან მივიღებთ წრფივ არაერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} -\beta_1 u + \gamma_{12} v = -\alpha_1 \\ \gamma_{21} u - \beta_2 v = -\alpha_2 \end{cases} \tag{1.3.6}$$

კრამერის ფორმულის თანახმად:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\beta_1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & -\beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1\beta_2 - \gamma_{12}\gamma_{21},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & \gamma_{12} \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_{12} > 0, \tag{1.3.7}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\beta_1 & -\alpha_1 \\ \gamma_{21} & -\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\gamma_{21} > 0.$$

ამრიგად, (1.3.6) სისტემის ამონახსნი არსებობს მხოლოდ, როცა:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\beta_1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & -\beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1\beta_2 - \gamma_{12}\gamma_{21} \neq 0,$$

და (1.3.4) სისტემის სტაციონარული ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u_{st} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$v_{st} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

იმისათვის, რომ ეს სტაციონარული ამონახსნი იყოს ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში (სხვა მეოთხედებს მოდელში შინაარსი არ გააჩნიათ), აუცილებელია, რომ:

$$\Delta = \beta_1\beta_2 - \gamma_{12}\gamma_{21} > 0. \tag{1.3.8}$$

ამრიგად, თუ შესრულებულია (1.3.8), მაშინ განტოლებათა სისტემას (1.3.4) გააჩნია პირველ მეოთხედში სტაციონარული ამონახსნი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$u = u_{st} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v = v_{st} = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{1.3.9}$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \gamma_{21}, \quad \beta_2 = \gamma_{12}. \tag{1.3.10}$$

(1.3.10) პირობის შესრულების შემთხვევაში, კოშის ამოცანა (1.3.4), (1.3.5) შეიძლება ანალიზურად ამოიხსნას.

მართლაც, თუ (1.3.4)-ში შევიტანთ (1.3.10), მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) + \beta_2 u(t)v(t) \\[2ex] \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_1 v(t) - \beta_2 v^2(t) + \beta_1 u(t)v(t) \end{cases} \tag{1.3.11}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0.$$

(1.3.11) სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ $v(t),$ ხოლო მეორე განტოლება $u(t),$ და მერე მიღებული გამოსახულებები შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ (1.3.11) სისტემის პირველ ინტეგრალს:

$$u(t)v(t) = u_0 v_0 e^{2\alpha_1 t} \tag{1.3.12}$$

ჩავსვამთ რა პირველ ინტეგრალს (1.3.12) სისტემა (1.3.11) სისტემის პირველ განტოლებაში, უცნობი $u(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ **რიკატის** დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) + \beta_2 u_0 v_0 e^{2\alpha_1 t}. \tag{1.3.13}$$

ცნობილია, რომ ზოგად შემთხვევაში რიკატის განტოლება კვადრატურებში არ ამოიხსნება, რადგანაც საჭიროა ერთი კერძო ამონახსნის ცოდნა.

მარტივად შევნიშნავთ, რომ შემდეგი $u_1(t)$ ფუნქცია არის (1.3.13) განტოლების კერძო ამონახსნი.

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{\beta_2 u_0 v_0}{\beta_1}} e^{\alpha_1 t}. \tag{1.3.14}$$

თუ შევიტანთ (1.3.13)- ში არაერთგვაროვანი წევრის მანულირებელ შემდეგ გარდაქმნას:

$$u(t) = u_1(t) + z(t), \tag{1.3.15}$$

(1.3.14) -ის გათვალისწინებით, (1.3.13) - (1.3.15) -დან $z(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ ბერნულის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dz(t)}{dt} = (\alpha_1 - 2\beta_1 u_1) z(t) - \beta_1 z^2(t). \tag{1.3.16}$$

შემოვღოთ გარდაქმნა:

$$y(t)=\frac{1}{z(t)}, \tag{1.3.17}$$

მაშინ $y(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ წრფივ არაერთგვაროვან პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{dy(t)}{dt}=-(\alpha_1-2\beta_1 u_1)y(t)+\beta_1 ,$$

რომლის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y(t)=e^{-\int_0^t(\alpha_1-2\beta_1 u_1(\tau))d\tau}\left(c+\beta_1\int_0^t e^{\int_0^t(\alpha_1-2\beta_1 u_1(\tau))d\tau}d\tau\right) . \tag{1.3.18}$$

(1.3.11), (1.3.14), (1.3.17) შესაბამისად, $y(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ საწყის პირობას

$$y(0)=\frac{1}{z(0)}=\frac{1}{u_0-\sqrt{\frac{\beta_2 u_0 v_0}{\beta_1}}}, u_0\neq\frac{\beta_2 v_0}{\beta_1}$$

რომლის ჩასმით (1.3.18) ზოგად ამონახსნში, მივიღებთ კოშის ამოცანის ერთადერთ $y(t)$ ამონახსნს:

$$y(t)=e^{-\int_0^t(\alpha_1-2\beta_1 u_1(\tau))d\tau}\left(y(0)+\beta_1\int_0^t e^{\int_0^t(\alpha_1-2\beta_1 u_1(\tau))d\tau}d\tau\right), \tag{1.3.19}$$

შესაბამისად, (1.3.12), (1.3.15), (1.3.17) თანახმად ჩვენ მივიღებთ კოშის (1.3.11) ამოცანის $u(t),\ v(t)$ საძებნ ფუნქციებს:

$$u(t)=e^{\int_0^t(\alpha_1-2\beta_1u_1(\tau))d\tau}\left[y(0)+\beta_1\int_0^t e^{\int_0^t(\alpha_1-2\beta_1u_1(\tau))d\tau}d\tau\right]^{-1}+\sqrt{\frac{\beta_2u_0v_0}{\beta_1}e^{\alpha_1t}} \tag{1.3.20}$$

$$v(t)=u_0v_0e^{2\alpha_1t}u^{-1}(t).$$

(1.3.20) - დან მარტივად მიიღება $u(t),\ v(t)$ ამონახსნების ასიმპტოტიკები დიდი დროისათვის:

$$u(t)\approx\sqrt{\frac{\beta_2u_0v_0}{\beta_1}e^{\alpha_1t}},\quad t\to\infty.$$

$$v(t)\approx\sqrt{\frac{\beta_1u_0v_0}{\beta_2}e^{\alpha_1t}},\quad t\to\infty.$$

გადავწეროთ (1.3.2) განტოლებათა სისტემა ვექტორული სახით:

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt}=\vec{F}, \tag{1.3.21}$$

$$\vec{w}(t)=\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix},\qquad \vec{F}=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix},$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები:

$$F_1(u,v)\equiv\alpha_1u(t)-\beta_1u^2(t)+\gamma_{12}u(t)v(t), \tag{1.3.22}$$

$$F_2(u,v)\equiv\alpha_2v(t)-\beta_2v^2(t)+\gamma_{21}u(t)v(t).$$

თეორემა 1.3.1. როცა მოდელის პარამეტრები აკმაყოფილებენ უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} \gamma_{12} \geq 2\beta_2 \\ \gamma_{21} \geq 2\beta_1 \end{cases} \tag{1.3.23}$$

მაშინ ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის (O,u,v) პირველ მეოთხედში კოშის ამოცანას (1.3.2) **არ გააჩნია შეკრული ინტეგრალური წირი**, რომელიც მთლიანად მდებარეობს ამ არეში.

დამტკიცება. განვიხილოთ ვექტორული $\vec{F}$ ველის დივერგენცია:

$$div\vec{F} = \nabla^i F_i = \frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{\partial F_2}{\partial v} = \alpha_1 - 2\beta_1 u(t) + \gamma_{12} v(t) + \alpha_2 - 2\beta_2 v(t) + \gamma_{21} u(t),$$

$$div\vec{F} = \alpha_1 + \alpha_2 + (\gamma_{21} - 2\beta_1)u(t) + (\gamma_{12} - 2\beta_2)v(t).$$

ცხადია, რომ (1.3.23) უტოლობათა სისტემის, ასევე ბუნებრივი დაშვებების $\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0$ გათვალისწინებით, ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის (O,u,v) პირველ მეოთხედში ადგილი აქვს ტოლობას:

$$div\vec{F} = \alpha_1 + \alpha_2 + (\gamma_{21} - 2\beta_1)u(t) + (\gamma_{12} - 2\beta_2)v(t) > 0,$$

ანუ ვექტორული ველის $\vec{F}$ დივერგენცია არ იცვლის ნიშანს და ბენდიქსონის კრიტერიუმის თანახმად არ არსებობს შეკრული ინტეგრალური წირი, რომელიც მთლიანად მოთავსებულია ამ არეში.

თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, წარმოდგენილი არაწრფივი მათემატიკური მოდელი იძლევა საშუალებას შევაფასოთ ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების (სამეცნიერო ნაშრომები) ურთიერთგავლენა, ვიპოვოთ პირობები მოდელის მუდმივ პარამეტრებზე, რომელთათვის არსებობს შემოსაზღვრული ამონახსნები, ანუ შეკრული ინტეგრალური წირები ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში.

თავი II.

მეცნიერთა მომზადების არაწრფივი მათემატიკური მოდელები.

მეორე თავში განხილულია ორ და სამგანზომილებიანი არაწრფივი დინამიური სისტემები, რომლებიც აღწერენ მეცნიერთა მომზადების პროცესს [60, 62, 63].

§ 2.1.

მეცნიერთა მომზადების მათემატიკური მოდელები.

სამ და ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემები.

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემა, რომელიც აღწერს მეცნიერთა მომზადების ორდონიან მათემატიკურ მოდელს [62, 63]. ორდონიან მათემატიკურ მოდელში განიხილება ორი სუბიექტი: ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები და უკვე დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერები:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1(t)u - \varepsilon_1(t)u^2 - \beta_1(t)uv, \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha_2(t)v - \varepsilon_2(t)v^2 + \beta_2(t)uv. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$$u(0) = u_0, \qquad v(0) = v_0. \tag{2.1.2}$$

მათემატიკური მოდელი (2.1.1), (2.1.2) აღწერს მეცნიერ-მკვლევარების თვითწარმოების პროცესს, მათ შეუქცევად გასვლას და გადასვლას ერთი კატეგორიიდან (პირველი კატეგორია, ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები) მეორეში (დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერები).

მოდელში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$v(t)$ - დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$\alpha_1 u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა თვითწარმოებაა (დროის ერთეულში სხვაობაა მომზადებასა და გასვლას შორის, რომელიც არ არის დაკავშირებული მეორე კატეგორიაში გადასვლასთან);

$\beta_1 u(t)v(t),\ \beta_2 u(t)v(t)$ - დოქტორების მიერ ხარისხის არმქონე მეცნიერ -მკვლევართა მომზადების ინტენსივობაა;

$\alpha_2 v(t)$ - დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რიგებიდან გასვლის ინტენსივობაა (გამგზავრება მოცემული სოციუმიდან; სიკვდილიანობა; ინტელექტუალური მიგრაცია; გადასვლა მოღვაწეობის სხვა სფეროში);

$\varepsilon_1 u^2(t),\ \varepsilon_2 v^2(t)$ - კატეგორიებში თვითშეზღუდვის წევრები (წევრები, რომლებიც უზრუნველყოფენ თვითშეზღუდვას ან უსასრულო წარმოებას);

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \beta_1$ - მოდელის დადებითი პარამეტრებია.

განვიხილოთ ასევე სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემა, რომელიც აღწერს მეცნიერთა მომზადების სამდონიან მათემატიკურ მოდელს.

სამსაფეხურიან მათემატიკურ მოდელში სამი სუბიექტია: ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები, მეცნიერებათა კანდიდატები და მეცნიერებათა დოქტორები.

$$
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1(t)u - \varepsilon_1(t)u^2 - \beta_1(t)uv - \gamma_1(t)uw \\[2ex]
\dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha_2(t)v - \varepsilon_2(t)v^2 - \gamma_2(t)v + \beta_1(t)uv + \gamma_1(t)uw - \beta_2(t)vw \\[2ex]
\dfrac{dw(t)}{dt} = -\alpha_3(t)w - \varepsilon_3(t)w^2 + \gamma_2(t)v + \beta_2(t)vw
\end{cases}
\tag{2.1.3}
$$

$$
u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0 \ . \tag{2.1.4}
$$

(2.1.3), (2.1.4) მათემატიკური მოდელი აღწერს მეცნიერ - მკვლევართა (მეცნიერთა) თვითწარმოების პროცესს და ასევე მათ შეუქცევად გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

მოდელში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$v(t)$ - მეცნიერებათა კანდიდატის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$w(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$\alpha_1 u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა თვითწარმოებაა (დროის ერთეულში სხვაობაა მომზადებასა და გასვლას შორის, რომელიც არ არის დაკავშირებული მეცნიერებათა კანდიდატების კატეგორიაში გადასვლასთან);

$\beta_1 u(t) v(t)$ - მეცნიერებათა კანდიდატების $(v(t))$ მიერ ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა $(u(t))$ მომზადების ინტენსივობაა;

$\gamma_1 u(t) w(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორების $(w(t))$ მიერ ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა $(u(t))$ მომზადების ინტენსივობაა;

$\alpha_2 v(t)$ - მეცნიერებათა კანდიდატების მეცნიერ - მკვლევართა რიგებიდან გასვლის ინტენსივობაა (გამგზავრება მოცემული სოციუმიდან, სიკვდილიანობა, ინტელექტუალური მიგრაცია, გადასვლა მოღვაწეობის სხვა სფეროში);

$\gamma_2 v(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორების კატეგორიაში გადასასვლელად მეცნიერებათა კანდიდატების მიერ თვითმომზადების ინტენსივობაა (მეცნიერებათა დოქტორების სამეცნიერო კონსულტანტების გარეშე);

$\beta_2 w(t) v(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორების $(w(t))$ მიერ მეცნიერებათა კანდიდატების $(v(t))$ მეცნიერებათა დოქტორების კატეგორიაში გადასასვლელად მომზადების ინტენსივობაა (მეცნიერებათა კანდიდატების სამეცნიერო კონსულტანტები მეცნიერებათა დოქტორებია);

$\alpha_3 w(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რიგებიდან გასვლის ინტენსივობაა (გამგზავრება მოცემული სოციუმიდან, სიკვდილიანობა, ინტელექტუალური მიგრაცია, გადასვლა მოღვაწეობის სხვა სფეროში);

$\varepsilon_1 u^2(t), \quad \varepsilon_2 v^2(t), \quad \varepsilon_3 w^2(t)$ - სამივე კატეგორიაში თვითშეზღუდვის წევრებია (წევრები, რომლებიც უზრუნველყოფენ თვითშეზღუდვას ან უსასრულო წარმოებას);

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ - მოდელის დადებითი პარამეტრებია.

§ 2.2.

მეცნიერთა მომზადების ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემების გამოკვლევა.

მეცნიერთა მომზადების ორეტაპიან მათემატიკურ მოდელში განიხილება ორი სუბიექტი (მეცნიერ - მკვლევართა ორი კატეგორია): მეცნიერ - მკვლევარები ხარისხის გარეშე (პირველი კატეგორია) და მეცნიერ - მკვლევარები დოქტორის ხარისხით (მეორე კატეგორია).

მათემატიკური მოდელი წარმოდგენილია ორგანზომილებიანი არაწრფივი დინამიური სისტემით [62, 63]:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u - \varepsilon_1 u^2 - \beta_1 uv = u(\alpha_1 - \varepsilon_1 u - \beta_1 v), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha_2 v - \varepsilon_2 v^2 + \beta_2 uv = v(-\alpha_2 - \varepsilon_2 v + \beta_2 u). \end{cases} \tag{2.2.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0 \ . \tag{2.2.2}$$

(2.2.1), (2.2.2) მათემატიკური მოდელი აღწერს მეცნიერ - მკვლევართა (მეცნიერთა) თვითწარმოების პროცესს და ასევე მათ შეუქცევად გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

მოდელში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$v(t)$ - დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$\alpha_1 u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა თვითწარმოებაა (დროის ერთეულში სხვაობაა მომზადებასა და გასვლას შორის, რომელიც არ არის დაკავშირებული მეორე კატეგორიაში გადასვლასთან);

$\beta_1 u(t)v(t)$, $\beta_2 u(t)v(t)$ - დოქტორების მიერ ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა მომზადების ინტენსივობაა;

$\alpha_2 v(t)$ - დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რიგებიდან გასვლის ინტენსივობაა (გამგზავრება მოცემული სოციუმიდან, სიკვდილიანობა, ინტელექტუალური მიგრაცია, გადასვლა მოღვაწეობის სხვა სფეროში);

$\varepsilon_1 u^2(t),\ \varepsilon_2 v^2(t)$ - კატეგორიებში თვითშეზღუდვის წევრები (წევრები, რომლებიც უზრუნველყოფენ თვითშეზღუდვას ან უსასრულო წარმოებას);

$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \beta_1$ - მოდელის დადებითი პარამეტრებია.

ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ ჩაკეტილ მეოთხედში R_+^2 (2.2.1) სისტემას აქვს სამი წონასწორობის (სტაციონარული) წერტილი:

$$O(0,0), \quad N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1},0), \quad N_2\left[\frac{\alpha_1\varepsilon_2+\alpha_2\beta_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2+\beta_1\beta_2},\frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2+\beta_1\beta_2}\right], \tag{2.2.3}$$

ცხადია, რომ:

$$N_2 \in R_+^2,$$

თუ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\alpha_1\beta_2 > \alpha_2\varepsilon_1, \tag{2.2.4}$$

მაშინ (2.2.1) სისტემის იაკობის მატრიცას აქვს სახე:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\varepsilon_1 u - \beta_1 v & -\beta_1 u \\ \beta_2 v & -\alpha_2 - 2\varepsilon_2 v + \beta_2 u \end{pmatrix}. \tag{2.2.5}$$

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(u,v) \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = g(u,v) \end{cases}, \tag{2.2.6}$$

სადაც $u(t), v(t) \in R.$

დავუშვათ, რომ $(u,v)=(0,0)$ არის (2.2.6) სისტემის წონასწორობის მდგომარეობა. (2.2.6) სისტემის იაკობის მატრიცას აქვს სახე:

$$J(u,v)=\begin{pmatrix} f_u(u,v) & f_v(u,v) \\ g_u(u,v) & g_v(u,v) \end{pmatrix}.$$

შესაბამისად, გვაქვს ორი საკუთარი მნიშვნელობა $\lambda_1,\ \lambda_2$, რომლებიც არიან მახასიათებელი განტოლების ფესვები:

$$\lambda^2-\lambda trJ+\det J=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{trJ\pm\sqrt{(trJ)^2-4\det J}}{2}.$$

სიბრტყეზე არსებობს ჰიპერბოლური წონასწორობის მდგომარეობის სამი ტოპოლოგიური კლასი (დინამიური სისტემის წონასწორობის მდგომარეობა როგორც ამბობენ, ჰიპერბოლურია მაშინ, როცა არ არის საკუთარი მნიშვნელობები წარმოსახვით ღერძზე; წონასწორობის ჰიპერბოლურ მდგომარეობას ჰიპერბოლური უნაგირი ეწოდება, თუ არსებობს ერთი მაინც საკუთარი მნიშვნელობა დადებითი და უარყოფითი ნამდვილი ნაწილით); მდგრადი კვანძი (ფოკუსი), უნაგირი, არამდგრადი კვანძი (ფოკუსი). წონასწორობის მდგომარეობის პირველი კლასი ასიმპტოტურად მდგრადია (წონასწორობის მდგომარეობა ატრაქტორის უფრო ზოგადი ცნების კერძო შემთხვევაა), უნაგირი არამდგრადია, კვანძი (ფოკუსი) არამდგრადია, რომლებიც რეპელერების კერძო შემთხვევაა.

ფაზური სივრცის თვალსაზრისით (მათემატიკური მოდელის პარამეტრთა სივრცე) დინამიური სისტემის ქცევის აღწერაში, მდგრადი მდგომარეობა შეესაბამება ობიექტს, რომელიც იზიდავს ტრაექტორიებს გარკვეული მიდამოდან. ასეთ ობიექტს (მდგრადი თვითრხევების გეომეტრიული წარმოსახვა სისტემის ფაზურ სივრცეში) ატრაქტორი ეწოდება. დინამიურ სისტემას შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე ატრაქტორი კონტროლის პარამეტრების იგივე მნიშვნელობებით.

ატრაქტორი არის შეკრული სისტემის ასიმპტოტურად მდგრადი ამონახსნი, ხოლო **რეპელერი** - ფაზური სივრცის არეა, რომელიც გადახრის სისტემის მოძრაობის ტრაექტორიების ფაზებს.

იაკობის მატრიცის (2.2.5) საკუთარი მნიშვნელობების დაწვრილებითი ანალიზი წონასწორობის მდგომარეობის წერტილებში (2.2.3) გვიჩვენებს, რომ $O(0,0)$ წერტილი არის უნაგირი პარამეტრების ყველა დასაშვები მნიშვნელობებისათვის, ხოლო $N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1},0)$ წერტილი არის უნაგირი, თუ სრულდება (2.2.4) და მდგრადი კვანძია თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\alpha_1\beta_2 < \alpha_2\varepsilon_1 \ . \qquad (2.2.7)$$

დავუშვათ, რომ სამართლიანია (2.2.4). მაშინ

შემდეგი წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემის:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 u + \beta_1 v = \alpha_1, \\ \beta_2 u - \varepsilon_2 v = \alpha_2 \end{cases}$$

ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u = u_* = \frac{\alpha_1\varepsilon_2 + \alpha_2\beta_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1\beta_2},$$
$$v = v_* = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1\beta_2} \qquad (2.2.8)$$

მაშინ, (2.2.5), (2.2.8) - ის თანახმად, ჩვენ მივიღებთ:

$$trJ(u_*, v_*) = \alpha_1 - 2\varepsilon_1 u_* - \beta_1 v_* - \alpha_2 - 2\varepsilon_2 v_* + \beta_2 u_* = -\varepsilon_1 u_* - \varepsilon_2 v_* < 0, \qquad (2.2.9)$$

$$\det J(u_*, v_*) = u_* v_* (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \beta_1 \beta_2) > 0 .$$

შესაბამისად წონასწორობის მდგომარეობა:

$$N_2 \left[\frac{\alpha_1 \varepsilon_2 + \alpha_2 \beta_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \beta_1 \beta_2}, \frac{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \beta_1 \beta_2} \right].$$

ასიმპტოტურად მდგრადია (მდგრადი კვანძი $((trJ(u_*, v_*))^2 \geq 4 \det J(u_*, v_*))$ან **მდგრადი ფოკუსი** $((trJ(u_*, v_*))^2 < 4 \det J(u_*, v_*))$).

განსხვავებით კლასიკური **ლოტკა - ვოლტერას მოდელისაგან,** ტრაექტორიების განტოლებაში (2.2.1) ცვლადებს ვერ განვაცალკავებთ, ამიტომ დინების ნაკადის გლობალური ანალიზისათვის გამოვიყენოთ ნულოვანი **იზოკლინის მეთოდი** (წრფეები, სადაც ველის ვექტორის კომპონენტები ნულის ტოლია).

მთავარი იდეა მდგომარეობს R_+^2 სიმრავლის დაყოფაში არეებად, რომელშიც $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ აქვთ გარკვეული ნიშანი და მერე შემდეგ მტკიცების გამოყენებაში.

მტკიცებულება. დავუშვათ $\varphi(t) = (u(t), \quad v(t))$ უწყვეტი დინამიური სისტემის ამონახსნია სიბრტყეზე. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ U ღია არეა, და მისი ჩაკეტვა $\overline{U}$ კომპაქტია. თუ $u(t), v(t)$ მკაცრად მონოტონურია U - ში, მაშინ ან $\varphi(t)$ აღწევს U არის საზღვარს ზოგიერთ სასრულო დროში $t = t_0$, ან მიისწრაფვის წონასწორობის მდგომარეობისკენ $(u_*, v_*) \in \overline{U}.$

ახლა ჩვენ განვიხილავთ (2.2.7) შემთხვევას. არეები, სადაც უცნობი ფუნქციების წარმოებულებს $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}$ გააჩნიათ განსაზღვრული ნიშანი დაყოფილი არიან წრფეებით

$$L_1 = \{(u(t), v(t)) : \varepsilon_1 u + \beta_1 v = \alpha_1\},$$

$$L_{2.} = \{(u(t), v(t)) : \beta_2 u - \varepsilon_2 v = \alpha_2\},$$

ახლა აღვნიშნოთ არეები, რომლითაც R_+^2 სიმრავლეს დაყოფენ L_1 და $L_{2,}$ წრფეები (მარცხნიდან მარჯვნივ). ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ტრაექტორია იწყება $(u_0, v_0) \in U_3$ წერტილში. შემდეგ, იმისათვის რომ გავაკეთოთ დასკვნა, რომელი ტრაექტორიები მოხვდებიან U_2 არეში L_2 მეშვეობით, ჩვენ ვამატებთ შეზღუდვას $u < u_0$. ტრაექტორიები, რომლებიც იწყება U_2 არეში, ხვდებიან წონასწორობის მდგომარეობაში $N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}, 0)$ წერტილში, ან გადაკვეთენ L_1-ს და გადადიან U_1 არეში. საბოლოოდ, თუ ტრაექტორია იწყება U_1 არეში, მაშინ ერთადერთი შესაძლებლობაა, რომ ის მიისწრაფვოდეს $N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}, 0)$ - სკენ. ამრიგად, დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი ტრაექტორია, რომელიც იწყება $\operatorname{int} R_+^2 = \{(u,v) : u > 0, v > 0\}$, მიისწრაფვის წონასწორობის მდგომარეობისკენ $N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}, 0)$.

დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს (2.2.4) უტოლობას. მაშინ წონასწორობის $N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}, 0)$ წერტილი - ჰიპერბოლური უნაგირია, $N_2 \in R_+^2$ წერტილი - ასიმპტოტურად მდგრადი წონასწორობის წერტილია. L_1 და L_2 წრფეები ასევე ყოფენ მდგომარეობების სივრცეს ოთხ არედ. როგორც ადრე ვაჩვენეთ, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ ტრაექტორიები გადადიან ამ არეებში შემდეგი მიმდევრობით: $U_4 \to U_3 \to U_2 \to U_1 \to U_4$ თუ ორბიტები არ იკრიბებიან წონასწორობის მდგომარეობისკენ. მთავარი განსხვავება წინა შემთხვევისგან მდგომარეობს პერიოდული ტრაექტორიების არსებობის შესაძლებლობაში ანუ ორბიტები, რომლებიც იწყება U_4 - ში, შეიძლება კვლავ დაბრუნდეს ამ არეში.

დავუშვათ, მოცემულია დინამიური სისტემა:

$$\frac{dw}{dt} = f(w), \quad w \in R^n, \quad f : R^n \to R^n \tag{2.2.10}$$

და დიფერენცირებადი ფუნქცია $V : R^n \to R.$

როგორც ცნობილია, ფაზური სივრცის ყოველ w წერტილში $f(w)$ ვექტორი ადგენს მხებ მიმართულებას ფაზური ტრაექტორიისკენ, თუ $f(w) \neq 0.$ ჩვენ განვიხილავთ $V(w)$ ფუნქციის ცვლილების სიჩქარეს $f(w)$ ვექტორის მიმართულებით (წარმოებული $f(w)$ მიმართულებით).

$f(w)$ ვექტორის მიმართულებით წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად, ჩვენ გვაქვს:

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial w_i} f_i(w) = (gradV, f).$$

განსაზღვრება 1. ლის წარმოებული (2.2.10) სისტემის ტრაექტორიის გასწვრივ ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$L_t V = (gradV, \frac{dw}{dt}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial w_i} \frac{dw_i}{dt} = (gradV, f). \tag{2.2.11}$$

როგორც ცნობილია, სამართლიანია შემდეგი თეორემა [66]:

თეორემა 1. დავუშვათ, რომ:

$$\frac{dw}{dt} = f(w), \quad w \in U \subset R^n, \quad f : U \to R^n . \tag{2.2.12}$$

სისტემა განსაზღვრულია ზოგიერთ $U \subseteq R^n$ სიმრავლეზე.

დავუშვათ, რომ $V : U \to R$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია. თუ ზოგიერთი ამონახსნისთვის $w(t; w_0)$, რომელიც ეკუთვნის U ყველა $t \geq 0,$ $L_t V$ (2.2.11) წარმოებული (2.2.12) სისტემის მიხედვით აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$L_t V \leq 0 \quad (\text{ან } L_t V \geq 0),$$

მაშინ $\omega(w_0) \cap U(\alpha(w_0) \cap U)$ ეკუთვნის $\{w \in U : L_t V = 0\}$ სიმრავლეს.

განსაზღვრება 2 . w წერტილს (2.2.12) სისტემის ტრაექტორიის $w(t;w_0)$ ამონახსნის შესაბამისი დადებითი ზღვრული წერტილი ეწოდება, თუ არსებობს მიმდევრობა $\{t_k\}, t_k \to \infty$, რომელთათვის $w(t_k;w_0) \to w.$

განსაზღვრება 3. $w(t;w_0)$ შესაბამისი ტრაექტორიის ყველა დადებითი ზღვრული წერტილების სიმრავლეს ომეგა ზღვრული (ალფა ზღვრული) ეწოდება და აღინიშნება $\omega(w_0)(\alpha(w_0)).$

თეორემა 2. თუ (2.2.4) უტოლობა სამართლიანია, მაშინ $N_2(u_*,v_*)$ (2.2.1) სისტემის ზღვრული წერტილია.

თეორემის დამტკიცება.

იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ (2.2.1) სისტემის პერიოდული ტრაექტორიების არ არსებობა, განვიხილოთ ფუნქცია:

$$V(u,v) = \beta_2(u_\bullet \ln u - u) + \beta_1(v_\bullet \ln v - v), \tag{2.2.13}$$

სადაც $u_\bullet, v_\bullet$ - (2.2.8)- ში განსაზღვრული N_2 - ის კოორდინატებია.

(2.2.1) სისტემის ტრაექტორიის გასწვრივ ლის $L_t V(u,v)$ (2.2.11) წარმოებულს, აქვს სახე:

$$L_t V(u,v) = \beta_2\left(\frac{u_\bullet}{u}\frac{du}{dt} - \frac{du}{dt}\right) + \beta_1\left(\frac{v_\bullet}{v}\frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dt}\right) =$$

$$= \beta_2(u_\bullet - u)(\alpha_1 - \varepsilon_1 u - \beta_1 v) + \beta_1(v_\bullet - v)(-\alpha_2 - \varepsilon_2 v + \beta_2 u)$$

$$L_t V(u,v) = \beta_2\varepsilon_1(u_\bullet - u)^2 + \beta_1\varepsilon_2(v_\bullet - v)^2 \ge 0 \ . \tag{2.2.14}$$

(2.2.14) გამოსახულება არაუარყოფითია და ხდება ნულის ტოლი, როცა $u = u_\bullet,\ \ v = v_\bullet.$

თეორემა 1 -ის თანახმად, ჩვენ მივიღებთ, რომ $N_2(u_\bullet, v_\bullet)$ წერტილი არის (2.2.1) სისტემის ზღვრული წერტილი.

ამრიგად, სისტემა (2.2.1) უშვებს ტოპოლოგიურად არა ექვივალენტური ორი **ფაზური პორტრეტის** არსებობას.

თუ $\alpha_1\beta_2 < \alpha_2\varepsilon_1$, მაშინ $N_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1}, 0)$ წერტილი გლობალური ატრაქტორია ("**მტაცებლები**" განადგურდებიან, ხოლო "**მსხვერპლთა**" პოპულაცია იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში).

თუ $\alpha_1\beta_2 > \alpha_2\varepsilon_1$, მაშინ ჩნდება ასიმპტოტურად მდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა $N_2(u_\bullet, v_\bullet)$ **(" მტაცებლები"-ს** და **"მსხვერპლთა"** თანაარსებობის წონასწორობა).

§ 2.3.

მეცნიერთა მომზადების სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემების გამოკვლევა.

მეცნიერთა მომზადების სამსაფეხურებიან მათემატიკურ მოდელში განიხილება სამი სუბიექტი (მკვლევარ-მეცნიერთა სამი კატეგორია): ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები (პირველი კატეგორია), მეცნიერებათა კანდიდატები (მეორე კატეგორია) და მეცნიერებათა დოქტორები (მესამე კატეგორია) [62, 63].

მათემატიკური მოდელი აღიწერება არაწრფივი სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემით:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u - \varepsilon_1 u^2 - \beta_1 uv - \gamma_1 uw, \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha_2 v - \varepsilon_2 v^2 - \gamma_2 v + \beta_1 uv + \gamma_1 uw - \beta_2 vw, \\ \\ \dfrac{dw(t)}{dt} = -\alpha_3 w - \varepsilon_3 w^2 + \gamma_2 v + \beta_2 vw \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0. \qquad (2.3.2)$$

(2.3.1), (2.3.2) მათემატიკური მოდელი აღწერს მეცნიერ - მკვლევართა (მეცნიერთა) თვითწარმოების პროცესს და ასევე მათ შეუქცევად გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

მოდელში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$v(t)$ - მეცნიერებათა კანდიდატის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$w(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რაოდენობა დროის t მომენტში;

$\alpha_1 u(t)$ - ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა თვითწარმოებაა (დროის ერთეულში სხვაობაა მომზადებასა და გასვლას შორის, რომელიც არ არის დაკავშირებული მეცნიერებათა კანდიდატების კატეგორიაში გადასვლასთან);

$\beta_1 u(t)v(t)$ - მეცნიერებათა კანდიდატების $(v(t))$ მიერ ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა $(u(t))$ მომზადების ინტენსივობაა;

$\gamma_1 u(t)w(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორების $(w(t))$ მიერ ხარისხის არმქონე მეცნიერ - მკვლევართა $(u(t))$ მომზადების ინტენსივობაა;

$\alpha_2 v(t)$ - მეცნიერებათა კანდიდატების მეცნიერ - მკვლევართა რიგებიდან გასვლის ინტენსივობაა (გამგზავრება მოცემული სოციუმიდან; სიკვდილიანობა; ინტელექტუალური მიგრაცია; გადასვლა მოღვაწეობის სხვა სფეროში);

$\gamma_2 v(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორების კატეგორიაში გადასასვლელად მეცნიერებათა კანდიდატების მიერ თვითმომზადების ინტენსივობაა (მეცნიერებათა დოქტორების სამეცნიერო კონსულტანტების გარეშე);

$\beta_2 w(t)v(t)$ - მეცნიერებათა დოქტორების $(w(t))$ მიერ მეცნიერებათა კანდიდატების $(v(t))$ მეცნიერებათა დოქტორების კატეგორიაში გადასასვლელად მომზადების ინტენსივობაა (მეცნიერებათა კანდიდატების სამეცნიერო კონსულტანტები მეცნიერებათა დოქტორებია);

$\alpha_3 w(t)$- მეცნიერებათა დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერ - მკვლევართა რიგებიდან გასვლის ინტენსიბაა (გამგზავრება მოცემული სოციუმიდან; სიკვდილიანობა; ინტელექტუალური მიგრაცია; გადასვლა მოღვაწეობის სხვა სფეროში);

$\varepsilon_1 u^2(t),\quad \varepsilon_2 v^2(t),\ \varepsilon_3 w^2(t)$- სამივე კატეგორიაში თვითშეზღუდვის წევრებია (წევრები, რომლებიც უზრუნველყოფენ თვითშეზღუდვას ან უსასრულო წარმოებას);

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$- მოდელის დადებითი პარამეტრებია.

თუ $\gamma_2 = 0$ (როგორც წესი, თანამედროვე პრაქტიკაში მეცნიერებათა კანდიდატების მეცნიერებათა დოქტორებად მომზადება ხდება, როცა მეცნიერებათა დოქტორები არიან მეცნიერებათა კანდიდატების სამეცნიერო კონსულტანტები) მაშინ განტოლებათა სისტემა (2.3.1) მიიღებს სახეს:

$$
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u - \varepsilon_1 u^2 - \beta_1 uv - \gamma_1 uw, \\[2ex]
\dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha_2 v - \varepsilon_2 v^2 + \beta_1 uv + \gamma_1 uw - \beta_2 vw, \\[2ex]
\dfrac{dw(t)}{dt} = -\alpha_3 w - \varepsilon_3 w^2 + \beta_2 vw.
\end{cases}
\tag{2.3.3}
$$

(2.3.3) სისტემის განსაკუთრებულ წერტილებს აქვთ სახე:

$$
O(0,0,0), \qquad M_1\left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1},0,0\right), \qquad M_2(u_\bullet, v_\bullet, w_\bullet),
$$

სადაც:

$$
u_* = \frac{\alpha_1\varepsilon_2 + \alpha_2\beta_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1^2},
$$

$$
v_* = \frac{\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1^2}, \; w_* = 0, \tag{2.3.4}
$$

$$
M_3(u_{1\bullet}, v_{1\bullet}, w_{1\bullet}),
$$

$$
M_4(u_{2\bullet}, v_{2\bullet}, w_{2\bullet}),
$$

$$
v_{1\bullet}, v_{2\bullet} : av_\bullet^2 - bv_\bullet + c = 0 \tag{2.3.5}
$$

$$
a = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2 + \beta_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \gamma_1^2\beta_2^2 + \gamma_1\beta_2\beta_1\varepsilon_3 + \beta_1^2\varepsilon_3^2 + \beta_1\varepsilon_3\gamma_1\beta_2 > 0,
$$

$$
c = \gamma_1\alpha_3(\alpha_1\varepsilon_3 + \gamma_1\alpha_3) > 0,
$$

$$b=(\beta_1\alpha_1-\varepsilon_1\alpha_2)\varepsilon_3^2+\beta_1\gamma_1\varepsilon_3\alpha_3+\gamma_1\beta_2\alpha_1\varepsilon_3+2\gamma_1^2\beta_2\alpha_3+\beta_1\varepsilon_3\gamma_1\alpha_3+\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_3.$$

თუ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\alpha_1\beta_1>\alpha_2\varepsilon_1 \tag{2.3.6}$$

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ გამოსახულებას:

$$M_2\in R_+^3.$$

თუ სრულდება (2.3.6) უტოლობა, მაშინ:

$$b=(\beta_1\alpha_1-\varepsilon_1\alpha_2)\varepsilon_3^2+\beta_1\gamma_1\varepsilon_3\alpha_3+\gamma_1\beta_2\alpha_1\varepsilon_3+2\gamma_1^2\beta_2\alpha_3+\beta_1\varepsilon_3\gamma_1\alpha_3+\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_3>0,$$

და

$$D=b^2-4ac\geq 0, \tag{2.3.7}$$

$$v_{1\bullet}\in\mathrm{Re}, v_{2\bullet}\in\mathrm{Re},$$

$$v_{1\bullet}>0, v_{2\bullet}>0.$$

$(D=0, v_{1\bullet}=v_{2\bullet})$

$$u_{1\bullet}=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_3}[\alpha_1\varepsilon_3+\gamma_1\alpha_3-(\beta_1\varepsilon_3+\gamma_1\beta_2)v_{1\bullet}]>0,$$

$$u_{2\bullet}=\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_3}[\alpha_1\varepsilon_3+\gamma_1\alpha_3-(\beta_1\varepsilon_3+\gamma_1\beta_2)v_{2\bullet}]>0,$$

$$w_{1\bullet} = \frac{\beta_2 v_{1\bullet} - \alpha_3}{\varepsilon_3} > 0,$$

$$w_{2\bullet} = \frac{\beta_2 v_{2\bullet} - \alpha_3}{\varepsilon_3} > 0\,.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს:

$$M_3 \in R_+^3, \quad M_4 \in R_+^3\,.$$

ახლა გამოვიკვლიოთ (2.3.3) სისტემის განსაკუთრებული $M_2(u_\bullet, v_\bullet, 0)$ წერტილი მდგრადობაზე.

შემოვიღოთ **ტრანსლაციის გარდაქმნა:**

$$\begin{cases} u_1 = u - u_\bullet \\ v_1 = v - v_\bullet \\ w_1 = w \end{cases}. \tag{2.3.8}$$

შევიტანოთ (2.3.8) (2.3.3) - ში და მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = (\alpha_1 - 2\varepsilon_1 u_\bullet - \beta_1 v_\bullet)u_1 - \beta_1 u_\bullet v_1 - \gamma_1 u_\bullet w_1 - \varepsilon_1 u_1^2 - \beta_1 u_1 v_1 - \gamma_1 u_1 w_1, \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \beta_1 v_\bullet u_1 + (-\alpha_2 - 2\varepsilon_2 v_\bullet + \beta_1 u_\bullet)v_1 + (\gamma_1 u_\bullet - \beta_2 v_\bullet)w_1 - \varepsilon_2 v_1^2 + \beta_1 u_1 v_1 + \gamma_1 u_1 w_1 - \beta_2 v_1 w_1, \\ \dfrac{dw_1}{dt} = (-\alpha_3 + \beta_2 v_\bullet)w_1 - \varepsilon_3 w_1^2 + \beta_2 v_1 w_1. \end{cases} \tag{2.3.9}$$

თუ შემოვიფარგლებით (2.3.9) სისტემის მარტო წრფივი წევრებით, მაშინ მივიღებთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = (\alpha_1 - 2\varepsilon_1 u_{\bullet} - \beta_1 v_{\bullet})u_1 - \beta_1 u_{\bullet} v_1 - \gamma_1 u_{\bullet} w_1 \\ \\ \dfrac{dv_1}{dt} = \beta_1 v_{\bullet} u_1 + (-\alpha_2 - 2\varepsilon_2 v_{\bullet} + \beta_1 u_{\bullet})v_1 + (\gamma_1 u_{\bullet} - \beta_2 v_{\bullet})w_1 \\ \\ \dfrac{dw_1}{dt} = (-\alpha_3 + \beta_2 v_{\bullet})w_1 \end{cases} \qquad (2.3.10)$$

ამრიგად, არაწრფივი ავტონომიური სისტემა (2.3.3), $M_2(u_{\bullet}, v_{\bullet}, 0)$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში (2.3.8) გაწრფივების შედეგად დადის (2.3.10) წრფივ ავტონომიურ სისტემაზე, რომლის წონასწორობის წერტილის (0,0,0), მდგრადობა ან არამდგრადობა განისაზღვრება შემდეგი A მატრიცის საკუთარი მნიშვნელობების (რიცხვების) ნამდვილი მნიშვნელობების (ნაწილების) ნიშნებით:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\varepsilon_1 u_{\bullet} - \beta_1 v_{\bullet} & -\beta_1 u_{\bullet} & -\gamma_1 u_{\bullet} \\ \beta_1 v_{\bullet} & -\alpha_2 + \beta_1 u_{\bullet} - 2\varepsilon_2 v_{\bullet} & \gamma_1 u_{\bullet} - \beta_2 v_{\bullet} \\ 0 & 0 & -\alpha_3 + \beta_2 v_{\bullet} \end{pmatrix}, \qquad (2.3.11)$$

რომელიც განისაზღვრება შემდეგი მახასიათებელი განტოლებიდან:

$$|A - \lambda E| = 0,$$

და რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\lambda^3 + (\alpha_3 - \beta_2 v_\bullet + \varepsilon_1 u_\bullet + \varepsilon_2 v_\bullet)\lambda^2 +$$

$$+[(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1^2)v_\bullet u_\bullet + (\alpha_3 - \beta_2 v_\bullet)(\varepsilon_1 u_\bullet + \varepsilon_2 v_\bullet)]\lambda + \tag{2.3.12}$$

$$+(\alpha_3 - \beta_2 v_\bullet)(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1^2)v_\bullet u_\bullet = 0$$

რაუსი-გურვიცის პრინციპი მდგომარეობს კუბური პოლინომის (2.3.12) ყველა კოეფიციენტისა და გურვიცის მატრიცის ყველა დიაგონალური მინორის დადებითობაში, რომელიც მიგვიყვანს უტოლობამდე მოდელის პარამეტრებს შორის

$$\alpha_3(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1^2) - \beta_2\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\varepsilon_1 > 0. \tag{2.3.13}$$

არ არის რთული საჩვენებელი, რომ დანარჩენი ორი განსაკუთრებული წერტილი $O(0,0,0)$, $M_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1},0,0)$ **არამდგრადი კვანძია.**

მაგალითად, $O(0,0,0)$, განსაკუთრებული წერტილის შემთხვევაში გაწრფივებული მატრიცის ერთ-ერთი სამი ნამდვილი საკუთარი მნიშვნელობიდან დადებითია, ხოლო $M_1(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1},0,0)$, განსაკუთრებული წერტილის შემთხვევაში კუბური პოლინომის:

$$\varepsilon_1\lambda^3 - (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_3\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_1 - \beta_1\alpha_1)\lambda^2 + [\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1 - (\alpha_1 + \alpha_3)(\beta_1\alpha_1 - \alpha_2\varepsilon_1)]\lambda + \alpha_1\alpha_3(\alpha_2\varepsilon_1 - \beta_1\alpha_1) = 0$$

ყველა კოეფიციენტი არ არის დადებითი და **რაუსი-გურვიცის მდგრადობის კრიტერიუმი** არ სრულდება.

1. **კერძო შემთხვევა. სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემის პირველი ინტეგრალი**

განვიხილოთ (2.3.1) სისტემის კერძო შემთხვევა, როცა :

$$\varepsilon_i = \gamma_2 = 0, i = 1-3,$$

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u - \beta_1 uv - \gamma_1 uw, \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha_2 v + \beta_1 uv + \gamma_1 uw - \beta_2 vw, \\ \dfrac{dw(t)}{dt} = -\alpha_3 w + \beta_2 vw \end{cases} \quad . \tag{2.3.14}$$

შევკრიბოთ (2.3.14) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებები:

$$\frac{d(v(t)+w(t))}{dt} = -\alpha_2 v - \alpha_3 w + \beta_1 uv + \gamma_1 uw \quad . \tag{2.3.15}$$

დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\alpha_2 = \alpha_3, \qquad \beta_1 = \gamma_1, \tag{2.3.16}$$

მაშინ, (2.3.15), (2.3.16) - დან მივიღებთ:

$$\frac{d(v(t)+w(t))}{dt}=(v+w)(\beta_1 u-\alpha_2)\,. \tag{2.3.17}$$

შევკრიბოთ (2.3.14) სისტემის სამივე განტოლება და გავითვალისწინოთ (2.3.16), მაშინ მივიღებთ ტოლობას:

$$\frac{d(u(t)+v(t)+w(t))}{dt}=\alpha_1 u-\alpha_2(v+w)\ . \tag{2.3.18}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$\psi\equiv v+w, \tag{2.3.19}$$

მაშინ (2.3.17) – (2.3.19), მივიღებთ:

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi}{dt}=\psi(\beta_1 u-\alpha_2),\\[2ex] \dfrac{du}{dt}+\dfrac{d\psi}{dt}=\alpha_1 u-\alpha_2\psi.\end{cases} \tag{2.3.20}$$

(2.3.20) სისტემიდან მარტივად მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\psi}{dt} = \psi(\beta_1 u - \alpha_2) \\
\\
\dfrac{du}{dt} = u(\alpha_1 - \beta_1 \psi)
\end{cases}
\tag{2.3.21}
$$

(2.3.21) სისტემიდან, (2.3.2) -ის გათვალისწინებით, მარტივად მიიღება მისი პირველი ინტეგრალი:

$$
\alpha_1 \ln \frac{\psi}{\psi_0} - \beta_1(\psi - \psi_0) = \beta_1(u - u_0) - \alpha_2 \ln \frac{u}{u_0} \tag{2.3.22}
$$

შევიტანთ რა (2.3.19) აღნიშვნას (2.3.22)-ში, მივიღებთ (2.3.14) **პირველ ინტეგრალს,** რომელშიც გათვალისწინებულია (2.3.2), ((2.3.16):

$$
\alpha_1 \ln \frac{v + w}{v_0 + w_0} = \beta_1(u + v + w - u_0 - v_0 - w_0) - \alpha_2 \ln \frac{u}{u_0} \ . \tag{2.3.23}
$$

ახლა, დავუშვათ, რომ:

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 ,
$$

მაშინ, პირველი ინტეგრალი (2.3.23) მიიღებს სახეს:

$$
\frac{u(v + w)}{u_0(v_0 + w_0)} = \exp(u - u_0) \exp(v + w - v_0 - w_0) \tag{2.3.24}
$$

პირველი ინტეგრალი (2.3.24), (2.3.1), (2.3.2) სისტემისა და საწყისი პირობების ამონახსნთა $(O,u(t),\ v(t),\ w(t))$ ფაზურ სივრცეში წარმოადგენს ზოგიერთ ორგანზომილებიან ზედაპირს.

თავი III.

უნივერსიტეტებს შორის კონკურენციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელები.

§ 3.1.

ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის ზოგადი მათემატიკური მოდელი. განტოლებათა სისტემა.

ორ უნივერსიტეტს შორის შეზღუდული აბიტურენტებისათვის კონკურენციის არაწრფივ მათემატიკურ მოდელს **(მიკრომოდელი, ერთი რეგიონისათვის, სადაც მხოლოდ ორი არჩევანია)** აქვს შემდეგი სახე [64]:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1(t)u(t) - \beta_1(t)u^2(t) + (\gamma_1(t) - \gamma_2(t))u(t)v(t) + \varepsilon_1(t)u(t)w(t), \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2(t)v(t) - \beta_2(t)v^2(t) + (\gamma_2(t) - \gamma_1(t))u(t)v(t) + \varepsilon_2(t)v(t)w(t), \\ \dfrac{dw(t)}{dt} = \alpha_3(t)w(t) - \beta_3(t)w^2(t) - \varepsilon_1(t)u(t)w(t) - \varepsilon_2(t)v(t)w(t). \end{cases} \tag{3.1.1}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0, \tag{3.1.2}$$

$$\alpha_i(t) > 0, \beta_i(t) > 0 \qquad i = \overline{1,3},$$

$$\varepsilon_j(t) > 0, \gamma_j(t) > 0 \qquad j = 1,2,$$

$u(t)$ - სტუდენტთა რაოდენობა პირველ უნივერსიტეტში დროის t მომენტში;

$v(t)$ - სტუდენტთა რაოდენობა მეორე უნივერსიტეტში დროის t მომენტში;

$w(t)$ - აბიტურიენტთა რაოდენობა დროის t მომენტში, რომელთაც სურთ ჩააბარონ ამ ორიდან რომელიმე უნივერსიტეტში;

$\alpha_1(t) > 0, \alpha_2(t) > 0, \alpha_3(t) > 0$ - სტუდენტთა და აბიტურიენტთა ზრდის კოეფიციენტებია;

$\beta_1(t) > 0, \beta_2(t) > 0$ - მოცემულ უნივერსიტეტში სტუდენტთა რაოდენობის თვითშეზღუდვის კოეფიციენტებია (ავტორიზაციის საბჭო ადგენს მოცემულ უნივერსიტეტში სტუდენტთა მაქსიმალურ დასაშვებ რაოდენობას);

$\beta_3(t) > 0$ - აბიტურიენტთა რაოდენობის თვითშეზღუდვის კოეფიციენტია (მოცემულ რეგიონში დემოგრაფიული სურათიდან გამომდინარე არსებობს აბიტურიენტთა მაქსიმალური რაოდენობა);

$\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t) -$ მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტებსა და აბიტურიენტებს შორის თანამშრომლობის (კოოპერაციის, თავის უნივერსიტეტში მოზიდვა) კოეფიციენტებია;

$\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ - მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირების კოეფიციენტებია, რათა მობილობით გადმოიბირონ მეორე უნივერსიტეტიდან სტუდენტები;

$u, v, w \in C^1[0,T]$ - საძებნ ფუნქციებს ვეძებთ სეგმენტზე უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში.

§ 3.2.

ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის მათემატიკური მოდელი

მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში.

დინამიური სისტემის გამოკვლევა.

განვიხილოთ (3.1.1), (3.1.2) კერძო შემთხვევა, როცა მოდელი კოეფიციენტები მუდმივებია [64].

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \alpha_1 u(t) - \beta_1 u^2(t) + (\gamma_1 - \gamma_2)u(t)v(t) + \varepsilon_1 u(t)w(t), \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = \alpha_2 v(t) - \beta_2 v^2(t) + (\gamma_2 - \gamma_1)u(t)v(t) + \varepsilon_2 v(t)w(t), \\ \\ \dfrac{dw(t)}{dt} = \alpha_3 w(t) - \beta_3 w^2(t) - \varepsilon_1 u(t)w(t) - \varepsilon_2 v(t)w(t). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას (3.2.1) აქვს 8 სტაციონარული წერტილი:

$$M_1(0,0,0),$$

$$M_2(0,0,\frac{\alpha_3}{\beta_3}),$$

$$M_3(0,\frac{\alpha_2}{\beta_2},0),$$

$$M_4\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1},0,0\right),$$

$$M_5\left(0,\frac{\alpha_2\beta_3+\varepsilon_2\alpha_3}{\beta_2\beta_3+\varepsilon_2^2},\frac{\beta_2\alpha_3-\alpha_2\varepsilon_2}{\beta_2\beta_3+\varepsilon_2^2}\right),$$

$$M_6\left(\frac{\alpha_1\beta_3+\alpha_3\varepsilon_1}{\beta_1\beta_3+\varepsilon_1^2},0,\frac{\beta_1\alpha_3-\alpha_1\varepsilon_1}{\beta_1\beta_3+\varepsilon_1^2}\right), \tag{3.2.2}$$

$$M_7\left(\frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2(\gamma_1-\gamma_2)}{\beta_1\beta_2+(\gamma_1-\gamma_2)^2},\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1(\gamma_1-\gamma_2)}{\beta_1\beta_2+(\gamma_1-\gamma_2)^2},0\right),$$

$$M_8(u_*,v_*,w_*),$$

$$u_*=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_2-\gamma_1 & -\varepsilon_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2\\ \alpha_3 & \varepsilon_2 & \beta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & -\varepsilon_1\\ \gamma_1-\gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3\end{vmatrix}},$$

$$v_*=\frac{\begin{vmatrix}\beta_1 & \alpha_1 & -\varepsilon_1\\ \gamma_1-\gamma_2 & \alpha_2 & -\varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & -\varepsilon_1\\ \gamma_1-\gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3\end{vmatrix}}, \tag{3.23}$$

$$w_* = \frac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_1-\gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_1-\gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix}},$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_1-\gamma_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \tag{3.2.4}$$

$$= \beta_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1^2\beta_2 + \beta_1\varepsilon_2^2 + \beta_3(\gamma_1-\gamma_2)^2 > 0.$$

სტაციონარული წერტილები $M_i, i=\overline{1-4}$ მოდელის მუდმივი კოეფიციენტების ნებისმიერი დადებითი მნიშვნელობებისათვის მდებარეობენ ფაზური სივრცის ჩაკეტილ ორწახნაგა კუთხეში არაუარყოფითი კოორდინატებით.

სტაციონარული წერტილები $M_i, i=\overline{5-7}$ მდებარეობენ ფაზური სივრცის ჩაკეტილ ორწახნაგა კუთხეში არაუარყოფითი კოორდინატებით, თუ ადგილი აქვს უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} \beta_2\alpha_3 > \alpha_2\varepsilon_2, \\ \beta_1\alpha_3 > \alpha_1\varepsilon_1, \\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2(\gamma_1-\gamma_2) > 0, \\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1(\gamma_1-\gamma_2) > 0 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

M_8 სტაციონარული წერტილი მდებარეობს ფაზური სივრცის ღია ორწახნაგა კუთხეში დადებითი კოორდინატებით, თუ ადგილი აქვს უტოლობათა სისტემას:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_2-\gamma_1 & -\varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & -\varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \varepsilon_2 & \beta_3 \end{vmatrix} > 0, \\ \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & -\varepsilon_1 \\ \gamma_1-\gamma_2 & \alpha_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} > 0, \\ \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_2-\gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_1-\gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} > 0. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა სტუდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირების და ამის გამო მობილობის წესით გადმოყვანის კოეფიციენტები ტოლია, ანუ

$$\gamma_1 = \gamma_2 , \tag{3.2.7}$$

მაშინ (3.2.5) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \beta_2\alpha_3 > \alpha_2\varepsilon_2 \\ \\ \beta_1\alpha_3 > \alpha_1\varepsilon_1 \end{cases} , \tag{3.2.8}$$

ხოლო (3.2.6) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1\beta_2\alpha_3 + \alpha_1\varepsilon_2^2 > \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2, \\ \beta_1\alpha_2\beta_3 + \varepsilon_1^2\alpha_2 + \beta_1\varepsilon_2\alpha_3 > \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1, \\ \beta_1\beta_2\alpha_3 > \alpha_1\beta_2\varepsilon_1 + \beta_1\varepsilon_2\alpha_2. \end{cases} \tag{3.2.9}$$

მაშინ (3.2.4), (3.2.6)-ის გათვალისწინებით (3.2.3) მიიღებს სახეს:

$$u_* = \frac{\alpha_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1\beta_2\alpha_3 + \alpha_1\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2}{\beta_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1^2\beta_2 + \beta_1\varepsilon_2^2},$$

$$v_* = \frac{\beta_1\alpha_2\beta_3 + \varepsilon_1^2\alpha_2 + \beta_1\varepsilon_2\alpha_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1}{\beta_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1^2\beta_2 + \beta_1\varepsilon_2^2}, \tag{3.2.10}$$

$$w_* = \frac{\beta_1\beta_2\alpha_3 - \alpha_1\beta_2\varepsilon_1 - \beta_1\varepsilon_2\alpha_2}{\beta_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1^2\beta_2 + \beta_1\varepsilon_2^2}.$$

ცხადია, რომ (3.2.6)-ის გათვალისწინებით, ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$u_* > 0, \quad v_* > 0, \quad w_* > 0. \tag{3.2.11}$$

მტკიცებულება. სისტემა (3.2.9) შესრულება ექვივალენტურია ამ სისტემის მესამე უტოლობის შესრულებისა.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს (3.2.9) სისტემის მესამე უტოლობას:

$$\beta_1\beta_2\alpha_3 > \alpha_1\beta_2\varepsilon_1 + \beta_1\varepsilon_2\alpha_2\ . \tag{3.2.12}$$

უტოლობა (3.2.12) გავამრავლოთ დადებით ε_1 – ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\beta_1\beta_2\alpha_3\varepsilon_1 > \alpha_1\beta_2\varepsilon_1^2 + \beta_1\varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_2,$$

საიდანაც მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა:

$$\beta_1\beta_2\alpha_3\varepsilon_1 > \beta_1\varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_2\ . \tag{3.2.13}$$

თუ უტოლობათა სისტემის (3.2.9)-ის პირველ უტოლობას გავამრავლოთ დადებით β_1 – ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_1\beta_1\beta_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_1\varepsilon_2^2 > \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2\beta_1 \quad , \tag{3.2.14}$$

რომელიც ავტომატურად სრულდება, რადგანაც ადგილი აქვს (3.2.13).

ახლა უტოლობა (3.2.9) გავამრავლოთ დადებით ε_2 – ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\beta_1\beta_2\alpha_3\varepsilon_2 > \alpha_1\beta_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \beta_1\varepsilon_2^2\alpha_2 ,$$

საიდანაც მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა:

$$\beta_1\beta_2\alpha_3\varepsilon_2 > \beta_2\varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_1 \quad . \tag{3.2.15}$$

თუ უტოლობათა სისტემის (3.2.9)-ის მეორე უტოლობას გავამრავლოთ დადებით β_2 – ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3 + \varepsilon_2\beta_1\beta_2\alpha_3 + \alpha_2\beta_2\varepsilon_1^2 > \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1\beta_2 \quad , \tag{3.2.16}$$

რომელიც ავტომატურად სრულდება, რადგანაც ადგილი აქვს (3.2.15).

ამრიგად სისტემა (3.2.9)-ის შესრულება ექვივალენტურია მისი მესამე უტოლობის შესრულებისა, ანუ (3.2.12)-ის. ასევე (3.2.12)-ის შესრულება იწვევს (3.2.16)-ის შესრულებას.

ახლა მოვახდინოთ სისტემა (3.2.1)-ს გაწრფივება $M_8(u_*, v_*, w_*)$ წერტილის მიდამოში, რისთვისაც გავაკეთებთ ტრანსლაციის გარდაქმნას:

$$u(t) = u_1(t) + u_*,$$

$$v(t) = v_1(t) + v_*, \tag{3.2.17}$$

$$w(t) =_1 w(t) + w_*.$$

ჩავსვამთ რა (3.2.17)-ს (3.2.1)-ში, (3.2.10)-ს გათვალისწინებით და თუ დავტოვებთ მარტო წრფივ წევრებს, მივიღებთ:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1(t)}{dt} = (\alpha_1 - 2\beta_1 u_* + \varepsilon_1 w_*)u_1(t) + \varepsilon_1 u_* w_1(t), \\ \\ \dfrac{dv_1(t)}{dt} = (\alpha_2 - 2\beta_2 v_* + \varepsilon_2 w_*)v_1(t) + \varepsilon_2 v_* w_1(t), \\ \\ \dfrac{dw_1(t)}{dt} = -\varepsilon_1 w_* u_1(t) - \varepsilon_2 w_* v_1(t) + (\alpha_3 - 2\beta_3 w_* - \varepsilon_1 u_* - \varepsilon_2 v_*)w_1(t). \end{cases} \tag{3.2.18}$$

განტოლებათა სისტემა (3.2.18) გადავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \\ v_1(t) \\ \\ w_1(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \\ v_1(t) \\ \\ w_1(t) \end{pmatrix}, \tag{3.2.19}$$

სადაც:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\beta_1 u_* + \varepsilon_1 w_* & 0 & \varepsilon_1 u_* \\ 0 & \alpha_2 - 2\beta_2 v_* + \varepsilon_2 w_* & \varepsilon_2 v_* \\ -\varepsilon_1 w_* & -\varepsilon_2 w_* & \alpha_3 - 2\beta_3 w_* - \varepsilon_1 u_* - \varepsilon_2 v_* \end{pmatrix} \tag{3.2.20}$$

როგორც ცნობილია, (3.2.19) სისტემის $O(0,0,0)$ სტაციონარული წერტილის მდგრადობა ან არამდგრადობა (შესაბამისად $M_8(u_*, v_*, w_*)$ სტაციონარული წერტილისა სისტემა (3.2.1), (3.2.10), (3.2.20)-ს გათვალისწინებით) განისაზღვრება მატრიცა A საკუთარი რიცხვების ნამდვილი ნაწილების ნიშნებით.

$$\det(A - \lambda E). = 0 \ . \tag{3.2.21}$$

(3.2.21)-დან, (3.2.20)-ის გათვალისწინებით, მარტივად მიიღება კუბური განტოლება λ საკუთარ რიცხვებზე:

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32})\lambda+$$
$$+a_{13}a_{31}a_{22}+a_{11}a_{23}a_{32}-a_{11}a_{22}a_{33}=0, \tag{3.2.22}$$

სადაც $a_{ij}, i, j=\overline{1-3}$ (21)-ში განსაზღვრული A მატრიცის ელემენტებია.

(3.2.22)-ის გათვალისწინებით გურვიცის მატრიცას აქვს სახე:

$$G=\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \tag{3.2.23}$$

სადაც

$$a_1=-(a_{11}+a_{22}+a_{33})=-trA,$$

$$a_2=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{13}a_{31}-a_{23}a_{32}, \tag{3.2.24}$$

$$a_3=a_{13}a_{31}a_{22}+a_{11}a_{23}a_{32}-a_{11}a_{22}a_{33}=-\det A.$$

რაუსი-გურვიცის მდგრადობის კრიტერიუმი.

იმისათვის, რომ მახასიათებელი განტოლების (3.2.22) ყველა ფესვის ნამდვილ ნაწილები იყოს უარყოფითი, აუცილებელია და საკმარისია, რომ გურვიცის მატრიცის (3.2.23) ყველა მთავარი დიაგონალური მინორი იყოს დადებითი.

ჩვენს შემთხვევაში ეს (3.2.24)-ის გათვალისწინებით, ჩაიწერება:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \qquad a_1a_2 - a_3 > 0 \;, \tag{3.2.25}$$

ანუ

$$trA < 0.$$

$$a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} > a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} \tag{3.2.26}$$

$$\det A < 0,$$

$$a_1a_2 - a_3 > 0.$$

ამრიგად, თუ შესრულებულია (3.2.26), მაშინ განტოლებათა სისტემისათვის (3.2.1) სტაციონარული წერტილი ანუ წონასწორობის მდგომარეობა $M_8(u_*, v_*, w_*)$ **ასიმპტოტურად მდგრადია.**

§ 3.3.

ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის მიკრომოდელი.

განვიხილოთ ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის მიკრომოდელი, რომელიც ითვალისწინებს ამ უნივერსიტეტების სტუდენტთა კონტინგენტის ცვლილებას ერთი წლის განმავლობაში. კერძოდ მოდელში გათვალისწინებულია: სტუდენტთა პირველ კურსზე

ახალი ნაკადის მიღება (ადმინისტრაციის მიერ პიარ-კამპანიით მოზიდული აბიტურიენტები); მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტებსა და აბიტურიენტებს შორის თანამშრომლობა (კოოპერაცია); მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირება, რათა მობილობით გადმოიბირონ მეორე უნივერსიტეტიდან სტუდენტები.

არაწრფივი მათემატიკური მოდელის აღმწერ ორგანზომილებიან დინამიურ სისტემას აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \varepsilon_1 u(t) w_0 + (\gamma_1 - \gamma_2) u(t) v(t) + \delta_1 w_0, \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = \varepsilon_2 v(t) w_0 + (\gamma_2 - \gamma_1) u(t) v(t) + \delta_2 w_0 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

$$u(0) = u_0, \qquad v(0) = v_0 \ , \tag{3.3.2}$$

$$\varepsilon_j > 0, \qquad \gamma_j > 0, \qquad \delta_j > 0 \ , \qquad j = 1,2$$

$u(t)$ - სტუდენტთა რაოდენობა პირველ უნივერსიტეტში დროის t მომენტში;

$v(t)$ - სტუდენტთა რაოდენობა მეორე უნივერსიტეტში დროის t მომენტში;

w_0 - აბიტურიენტთა საერთო რაოდენობა, რომელთაც ჩააბარეს მისაღები გამოცდები და მოხვდნენ ამ ორიდან რომელიმე უნივერსიტეტში;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტებსა და აბიტურიენტებს შორის თანამშრომლობის (კოოპერაციის, თავის უნივერსიტეტში მოზიდვა) კოეფიციენტებია;

γ_1, γ_2 - მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირების კოეფიციენტებია, რათა მობილობით გადმოიბირონ მეორე უნივერსიტეტიდან სტუდენტები;

$u, v \in C^1[0,1]$ - საძებნ ფუნქციებს ვეძებთ სეგმენტზე უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში;

განვიხილოთ კერძო შემთხვევები.

1. $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_2$,

მაშინ (3.3.1) განტოლებათა სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების შეკრებით მივიღებთ:

$$\frac{d(u(t)+v(t))}{dt} = \varepsilon_1 w_0 (u(t)+v(t)) + w_0. \qquad (3.3.3)$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას:

$$z(t) \equiv u(t) + v(t), \qquad (3.3.4)$$

მაშინ (3.3.3)-დან $z(t)$ - ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \varepsilon_1 w_0 z(t) + w_0 \tag{3.3.5}$$

$$z(0) \equiv u_0 + v_0,$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$z(t) = (u_0 + v_0 + \frac{1}{\varepsilon_1})e^{\varepsilon_1 w_0 t} - \frac{1}{\varepsilon_1} \quad . \tag{3.3.6}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.3.4) და (3.3.6), მაშინ (3.3.1)-დან $u(t)$ - ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას :

$$\frac{du(t)}{dt} = \left[\varepsilon_1 w_0 + (\gamma_1 - \gamma_2)\left(u_0 + v_0 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)e^{\varepsilon_1 w_0 t} - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1}\right]u(t) - (\gamma_1 - \gamma_2)u^2(t) + \delta_1 w_0 \tag{3.3.7}$$

$$u(0) = u_0 .$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა:

$$\delta_1 = 1 \ , \tag{3.3.8}$$

მაშინ (3.3.7), (3.3.8)-ის გათვალისწინებით კერძო ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u_{par}(t) = (u_0 + v_0 + \frac{1}{\varepsilon_1})e^{\varepsilon_1 w_0 t} - \frac{1}{\varepsilon_1} \quad . \tag{3.3.9}$$

(3.3.9) კერძო ამონახსნის გათვალისწინებით, (3.3.7) ზოგადი ამონახსნის პოვნისათვის, გავაკეთოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$u(t) = u_{par}(t) + p(t) \quad . \tag{3.3.10}$$

მაშინ თუ ისევ გავაკეთებთ გარდაქმნას:

$$y(t) \equiv \frac{1}{p(t)} \quad . \tag{3.3.11}$$

$y(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ კოშის ამოცანას:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[(\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 + v_0 + \frac{1}{\varepsilon_1})e^{\varepsilon_1 w_0 t} - \varepsilon_1 w_0 - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1} \right] y(t) + \gamma_1 - \gamma_2 \tag{3.3.12}$$

$$y(0) = -\frac{1}{v_0} .$$

კოშის ამოცანის (3.3.12)-ის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y(t) = \exp\left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0 + v_0 + \frac{1}{\varepsilon_1})(e^{\varepsilon_1 w_0 t} - 1) - (\varepsilon_1 w_0 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1})t \right] \left[-\frac{1}{v_0} + (\gamma_1 - \gamma_2) I_1(t) \right] \tag{3.3.13}$$

$$I_1(t) \equiv \int_0^t \exp\left[\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0+v_0+\frac{1}{\varepsilon_1})(-e^{\varepsilon_1 w_0 \tau}+1)+(\varepsilon_1 w_0+\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1})\tau\right]d\tau .$$

საბოლოოდ, (3.3.10), (3.3.11), (3.3.13)-დან მივიღებთ კოშის ამოცანის (3.3.7) ერთადერთ ამონახსნს:

$$u(t)=(u_0+v_0+\frac{1}{\varepsilon_1})e^{\varepsilon_1 w_0 t}-\frac{1}{\varepsilon_1}+p(t) \quad , \tag{3.3.14}$$

$$p(t)=\exp\left[\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0+v_0+\frac{1}{\varepsilon_1})(-e^{\varepsilon_1 w_0 t}+1)+(\varepsilon_1 w_0+\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1})t\right]\left[-\frac{1}{v_0}+(\gamma_1-\gamma_2)I_1(t)\right]^{-1},$$

ხოლო (3.3.4), (3.3.6), (3.3.14) მივიღებთ $v(t)$ ფუნქციას:

$$v(t)=-\exp\left[\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0+v_0+\frac{1}{\varepsilon_1})(-e^{\varepsilon_1 w_0 t}+1)+(\varepsilon_1 w_0+\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\varepsilon_1})t\right]\times$$

(3.3.15)

$$\times\left[-\frac{1}{v_0}+(\gamma_1-\gamma_2)I_1(t)\right]^{-1}.$$

2. $\boldsymbol{\delta_1=\delta_2=0}$**,** $\boldsymbol{\varepsilon_1=\varepsilon_2}$,

მაშინ (3.3.1) განტოლებათა სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების შეკრებით მივიღებთ:

$$\frac{d(u(t)+v(t))}{dt}=\varepsilon_1 w_0(u(t)+v(t)). \tag{3.3.16}$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას:

$$z(t)\equiv u(t)+v(t), \tag{3.3.17}$$

მაშინ (3.3.1) - დან $z(t)$ - ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$\frac{dz(t)}{dt}=\varepsilon_1 w_0 z(t), \tag{3.3.18}$$

$$z(0)\equiv u_0+v_0,$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$z(t)=(u_0+v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t}. \tag{3.3.19}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.3.17) და (3.3.18), მაშინ (3.3.1) - დან $u(t)$ - ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას (**ბერნულის განტოლება**):

$$\frac{du(t)}{dt} = \left[\varepsilon_1 w_0 + (\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t}\right]u(t) - (\gamma_1 - \gamma_2)u^2(t), \tag{3.3.19}$$

$$u(0) = u_0,$$

მაშინ, თუ გავაკეთებთ გარდაქმნას:

$$p(t) \equiv \frac{1}{u(t)}\ , \tag{3.3.20}$$

მაშინ $p(t)$ ფუნქციისთვის ვღებულობთ კოშის ამოცანას:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\left[\varepsilon_1 w_0 + (\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t}\right]p(t) + (\gamma_1 - \gamma_2) \tag{3.3.21}$$

$$p(0) = \frac{1}{u_0},$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$p(t) = \exp\left[-\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t} - \varepsilon_1 w_0 t\right]\left[\frac{1}{u_0} + (\gamma_1 - \gamma_2)I_2(t)\right], \tag{3.3.22}$$

$$I_2(t) \equiv \int_0^t \exp\left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 \tau} + \varepsilon_1 w_0 \tau\right]d\tau,$$

მაშინ (3.3.20), (3.3.22) გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$u(t) = \exp\left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t} + \varepsilon_1 w_0 t\right]\left[\frac{1}{u_0} + (\gamma_1 - \gamma_2)I_2(t)\right]^{-1}, \tag{3.3.23}$$

მაშინ (3.3.17), (3.3.19), (3.3.23) გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$v(t) = (u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t} - \exp\left[\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\varepsilon_1 w_0}(u_0 + v_0)e^{\varepsilon_1 w_0 t} + \varepsilon_1 w_0 t\right]\left[\frac{1}{u_0} + (\gamma_1 - \gamma_2)I_2(t)\right]^{-1}. \tag{3.3.24}$$

3. არაწრფივი მათემატიკური მოდელის აღმწერ ორგანზომილებიან დინამიურ სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = (\gamma_1 - \gamma_2)u(t)v(t) + \delta_1 w_0 \\ \\ \dfrac{dv(t)}{dt} = (\gamma_2 - \gamma_1)u(t)v(t) + \delta_2 w_0 \end{cases} \tag{3.3.25}$$

$$u(0)=u_0, \quad v(0)=v_0 \ , \tag{3.3.26}$$

$$\gamma_j > 0, \qquad \delta_j > 0, \qquad j=1,2 .$$

სადაც:

$\delta_1+\delta_2=1$ - გამოცდები წარმატებით განვლილი აბიტურიენტი ჩარიცხულია ამ ორიდან რომელიმე უნივერსიტეტში.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$u(t)$ - სტუდენტთა რაოდენობა პირველ უნივერსიტეტში დროის t მომენტში;

$v(t)$ - სტუდენტთა რაოდენობა მეორე უნივერსიტეტში დროის t მომენტში;

w_0 - აბიტურიენტთა საერთო რაოდენობა, რომელთაც ჩააბარეს მისაღები გამოცდები და მოხვდნენ ამ ორიდან რომელიმე უნივერსიტეტში;

$\gamma_1, \ \gamma_2$ - მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირების კოეფიციენტებია, რათა მობილობით გადმოიბირონ მეორე უნივერსიტეტიდან სტუდენტები;

$u,v \in C^1[0,1]$ - საძებნ ფუნქციებს ვეძებთ სეგმენტზე უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში.

მაშინ (3.3.25) განტოლებათა სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების შეკრებით მივიღებთ:

$$\frac{d(u(t)+v(t))}{dt}=w_0, \tag{3.3.27}$$

საიდანაც მარტივად მიიღება (3.3.25) სისტემის პირველი ინტეგრალი:

$$u(t)+v(t)=w_0t+u_0+v_0 \tag{3.3.28}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.3.28), მაშინ (3.3.25), (3.3.26) - დან $u(t)$ - ფუნქციისათვის მივიღებთ კოშის ამოცანას **რიკატის განტოლებისათვის**:

$$\frac{du(t)}{dt}=[(\gamma_1-\gamma_2)(u_0+v_0+w_0t)]u(t)-(\gamma_1-\gamma_2)u^2(t)+\delta_1w_0, \tag{3.3.29}$$

$$u(0)=u_0.$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა:

$$\delta_1=1\ , \tag{3.3.30}$$

მაშინ (3.3.29)-ის, (3.3.30)-ის გათვალისწინებით, კერძო ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u_{par}(t)=u_0+v_0+w_0t. \tag{3.3.31}$$

(3.3.31) კერძო ამონახსნის გათვალისწინებით, (3.3.29) ზოგადი ამონახსნის პოვნისათვის, გავაკეთოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$u(t) = u_{par}(t) + p(t), \tag{3.3.32}$$

მაშინ $p(t)$ ფუნქციისთვის (3.3.29) – (3.3.32) – გათვალისწინებით ვღებულობთ კოშის ამოცანას ბერნულის განტოლებისათვის:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -(\gamma_1 - \gamma_2)[w_0 t + u_0 + v_0]p(t) - (\gamma_1 - \gamma_2)p^2(t)\ . \tag{3.3.33}$$

$$p(0) = -v(0),$$

მაშინ, თუ გავაკეთებთ გარდაქმნას:

$$y(t) \equiv \frac{1}{p(t)}, \tag{3.3.34}$$

$y(t)$ ფუნქციისთვის ვღებულობთ კოშის ამოცანას:

$$\frac{dy(t)}{dt} = (\gamma_1 - \gamma_2)[w_0 t + u_0 + v_0]y(t) + (\gamma_1 - \gamma_2) \tag{3.3.35}$$

$$y(0) = \frac{1}{p(0)} = -\frac{1}{v_0},$$

რომლის ერთადერთი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$y(t) = \exp\left[(\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 t + v_0 t + \frac{w_0 t^2}{2}\right]\left[-\frac{1}{v_0} + (\gamma_1 - \gamma_2) I_3(t)\right] . \tag{3.3.36}$$

$$I_3(t) \equiv \int_0^t \exp\left[-(\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 \tau + v_0 \tau + \frac{w_0 \tau^2}{2}\right] d\tau ,$$

მაშინ (3.3.34), (3.3.36) გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$p(t) = \exp\left[-(\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 t + v_0 t + \frac{w_0 t^2}{2}\right]\left[-\frac{1}{v_0} + (\gamma_1 - \gamma_2) I_3(t)\right]^{-1}, \tag{3.3.37}$$

მაშინ (3.3.31), (3.3.32), (3.3.37) გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$u(t) = u_0 + v_0 + w_0 t + \exp\left[-(\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 t + v_0 t + \frac{w_0 t^2}{2}\right]\left[-\frac{1}{v_0} + (\gamma_1 - \gamma_2) I_3(t)\right]^{-1} \tag{3.3.38}$$

საბოლოოდ, (3.3.28), (3.3.38)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$v(t) = -\exp\left[-(\gamma_1 - \gamma_2)(u_0 t + v_0 t + \frac{w_0 t^2}{2}\right]\left[-\frac{1}{v_0} + (\gamma_1 - \gamma_2) I_3(t)\right]^{-1} \quad . \tag{3.3.39}$$

ამრიგად, კოშის ამოცანის (3.3.25), (3.3.26) ერთადერთ ამონახსნს, (3.3.30)-ის შემთხვევაში აქვს სახე (3.3.38), (3.3.39).

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ახალი მათემატიკური მოდელები ისეთი სოციალური მოვლენებისა, როგორებიცაა: ფუნდამენტური კვლევების - გამოყენებითი კვლევების - საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოების - ინოვაციული პროექტების ურთიერთგავლენების პროცესები; მეცნიერთა მომზადების ორ და სამსაფეხურიანი ეტაპები; უნივერსიტეტებს შორის კონკურენციის პროცესები.

პირველ თავში შემოთავაზებულია ინოვაციური სისტემის: ფუნდამენტური კვლევები - გამოყენებითი კვლევები - საცდელი-საკონსტრუქტორო სამუშაოები - ინოვაციები კოოპერაციული ურთიერთქმედების პროცესების დინამიკის არაწრფივი მათემატიკური მოდელები.

კერძო შემთხვევებში, ნაპოვნია ოთხუცნობიან არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოშის ამოცანის ზუსტი ანალიზური ამონახსნები. შესწავლილია მიღებული შედეგები.

ერთ, შესაძლო გარე მომხმარებლისაგან დახურული სამეცნიერო-კვლევითი ინსტიტუტის მაგალითზე, განხილულია ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების ურთიერთგავლენის ახალი არაწრფივი უწყვეტი მათემატიკური მოდელი (მიკრომოდელი, ორგანზომილებიანი დინამიური სისტემა). კოშის ამოცანა პირველი რიგის ორუცნობიანი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის, ამოხსნილია ანალიზურად ზუსტად. ნაპოვნია სტაციონარული ამონახსნი და ასევე ანალიზურად ზუსტად ამოხსნილია რიკატის სპეციალური განტოლებისავის კოშის ამოცანა. უფრო ზოგად შემთხვევაში,

ბენდიქსონის კრიტერიუმის საფუძველზე, დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში შეკრული ინტეგრალური წირების არ არსებობის შესახებ.

ნაპოვნია პირობები მოდელის პარამეტრებისათვის, რომელთათვის შესაძლებელია არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის შემოსაზღვრული ამონახსნების არსებობა ანუ შეკრული ინტეგრალური წირების არსებობა ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ მეოთხედში.

მეორე თავში განხილულია ორ და სამგანზომილებიანი არაწრფივი დინამიური სისტემები, რომლებიც აღწერენ მეცნიერთა მომზადების პროცესს, მათ შუქცევად გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

მეცნიერთა მომზადების ორდონიან მოდელში განიხილება ორი სუბიექტი: ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები და უკვე დოქტორის ხარისხის მქონე მეცნიერები, ხოლო სამსაფეხურიან მოდელში - სამი სუბიექტი: ხარისხის არმქონე სამეცნიერო კადრები, მეცნიერებათა კანდიდატები და მეცნიერებათა დოქტორები.

დასმულია **კოშის ამოცანა** ორი ან სამი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის. მათემატიკური მოდელი აღწერს მეცნიერთა თვითწარმოების პროცესებს, მათ შეუქცევადად გასვლას და გადასვლას ერთი კატეგორიიდან მეორეში.

სამგანზომილებიან შემთხვევაში ნაპოვნია დინამიური სისტემის განსაკუთრებული წერტილები. **რაუსი-გურვიცის მდგრადობის კრიტერიუმის** მეშვეობით გამოკვლეულია მდგრადობაზე განსაკუთრებული წერტილები. კერძო შემთხვევაში, ნაპოვნია

სამგანზომილებიანი დინამიური სისტემის პირველი ინტეგრალი, რომელიც ამონახსნთა ფაზურ სივრცეში წარმოადგენს ორგანზომილებიან ზედაპირს.

ორდონიანი მოდელი ფაქტიურად დადის ლოტკი-ვოლტერას განტოლებათა სისტემამდე ანუ **„მსხვერპლი - მტაცებლის"** კლასიკურ მოდელამდე შიგასახეობრივი კონკურენციის გათვალისწინებით (მატების თვითშეზღუდვის წევრები).

შესაბამის დინამიურ სისტემას ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ დახურულ კვადრანტში აქვს **სამი განსაკუთრებული მდგომარეობის** წერტილი. ამასთან, ნულოვანი ამონახსნის შესაბამისი წონასწორობის მდგომარეობა, მოდელის პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის უნაგირა წერტილია, ხოლო მეორე წერტილი, რომელიც შეესაბამება დოქტორის ხარისხის მქონე და ხარისხის არმქონე მეცნიერთა წონასწორობის მდგომარეობას, ერთ შემთხვევაში **უნაგირა წერტილია,** ხოლო მეორე შემთხვევაში - **მდგრადი კვანძია.**

ნაპოვნია **პირობები მოდელის კონსტანტებზე,** რომელთათვის სტაციონარული ამონახსნი, მესამე წონასწორობის მდგომარეობა ამონახსნთა ფაზური სიბრტყის პირველ ღია ˜მეოთხედში (დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ერთადერთი ზღვრული წერტილი), რომელიც შეესაბამება „მტაცებელთა" და „მსხვერპლთა" წონასწორობის თანაარსებობას, იქნება ასიმპტოტურად მდგრადი (მდგრადი კვანძი ან მდგრადი ფოკუსი).

მესამე თავში განხილულია უნივერსიტეტებს შორის კონკურენციის პროცესების აღმწერი არაწრფივი მათემატიკური მოდელები.

განხილულია ორ უნივერსიტეტს შორის კონკურენციის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს კონკურენციას როგორც შეზღუდული რაოდენობის

აბიტურიენტებისათვის, ასევე სტუდენტების მოზიდვას მობილობით (სტუდენტების გადასვლა ერთი უნივერსიტეტიდან მეორეში). მიღებულია დინამიური სისტემა, რომელიც აღწერს ორი უნივერსიტეტის სტუდენტებისა და აბიტურიენტთა რაოდენობების (ნაკადების) დინამიკას.

მათემატიკური მოდელის მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში ნაპოვნია არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის განსაკუთრებული წერტილები. **რაუსი - გურვიცის მდგრადობის კრიტერიუმის** გამოყენებით შესწავლილია ამონახსნების ასიმპტოტური მდგრადობის საკითხი.

განხილულია ორ უნივერსიტეტს შორიის შეზღუდული აბიტურენტებისათვის კონკურენციის არაწრფივი მათემატიკურ მოდელი (მიკრომოდელი, ერთი რეგიონისათვის, სადაც მხოლოდ ორი არჩევანია). კონკურენციის მიკრომოდელი ითვალისწინებს ამ უნივერსიტეტების სტუდენტთა კონტინგენტის ცვლილებას ერთი წლის განმავლობაში.

კერძოდ მოდელში გათვალისწინებულია: სტუდენტთა პირველ კურსზე ახალი ნაკადის მიღება (ადმინისტრაციის მიერ პიარ-კამპანიით მოზიდული აბიტურიენტები); მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტებსა და აბიტურიენტებს შორის თანამშრომლობა (კოოპერაცია); მოცემული უნივერსიტეტის სტუნდენტების მიერ თავისი უნივერსიტეტის რეკლამირება, რათა მობილობით გადმოიბირონ მეორე უნივერსიტეტიდან სტუდენტები.

მოდელის პარამეტრების კერძო შემთხვევებში კვადრატურებში ნაპოვნია ზუსტი ანალიზური ამოხსნები.

ლიტერატურა

1. ბელთაძე გ., მელაძე ჰ., სხირტლაძე ნ. გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის საფუძვლები და მათი გამოყენება საზოგადოებრივ მეცნიერებებში. თბილისი, თსუ, 2003, გვ. 480;
2. მელაძე ჰ., სხირთლაძე ნ. გამოყენებითი მათემატიკის საწყისები. თსუ, თბილისი, 2000, გვ. 261;
3. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირება, თბილისი, 2016, სტუ, გვ. 839;
4. სულავა ლ. ორსუბიექტიანი არჩევნების პროცესების მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, 2015, ტ. IX - X, გვ. 176 – 185;
5. ჩაკაბერია მ. ორმხრივი ასიმილაციის პროცესის მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინებით. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, 2015, ტ. IX - X, გვ. 186 – 197;
6. ჩილაჩავა თ., ძიძიგური ც. მათემატიკური მოდელირება. თბილისი, 2008, “ინოვაცია”, გვ. 440;
7. ჩილაჩავა თ., სივრცით არაერთგვაროვან გარემოში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის შეუღლების ამოცანის ამოხსნის შესახებ. ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომების მოხსენებები, ტ. 4, № 1, თბილისი, 1989, გვ. 136 – 139;
8. ჩილაჩავა თ. ჰელმჰოლცის განტოლების ამოხსნადობა სივრცით არაერთგვაროვან ფენაში. აფხაზეთის რეგიონის მეცნიერებათა აკადემიის მაცნე, საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სერია I, თბილისი, 2000, გვ. 13 – 24;
9. ჩილაჩავა თ., კერესელიძე ნ. საინფორმაციო ომის მათემატიკური მოდელირება. ქართული ელექტრონული სამეცნიერო ჟურნალი, კომპიუტერული მეცნიერებანი და ტელეკომუნიკაციები, 2010, 1(24), გვ. 78 – 105;

10. ჩილაჩავა თ., ძიძიგური ც., სულავა ლ., ჩაკაბერია მ. ადმინისტრაციული ზეწოლის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები, მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია, ტ. VII, 2009, გვ. 169 – 180;

11. ჩილაჩავა თ., გელაძე ხ., ძიძიგური ც. მალარიის გავრცელების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, 2011, ტ. I, გვ. 317 – 324;

12. ჩილაჩავა თ., კერესელიძე ნ. "აგრესორ-მსხვერპლის" ინფორმაციული ომის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, 2011, ტ. II, გვ. 5 – 15;

13. ჩილაჩავა თ., ჭოჭუა შ., გელაძე შ. არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი ფალსიფიკაციის გათვალისწინებით. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, 2014,ტ. VII- VIII, გვ. 18 – 33;

14. ძიძიგური ც., ჩილაჩავა თ. მათემატიკური მოდელები ეკოლოგიასა და მედიცინაში. თბილისი, 2011, "ინოვაცია", გვ. 336;

15. Atnabayeva L.A., Halitova T.B., Malikov R. F. Imitating modeling of assimilation of ethnos. http://simulation.su/uploads/files/default/2012-conf- prikl-math-and-mod-33- 35.pdf

16. Belenky A., King D.A mathematical model for estimating the potential margin of state undecided voters for a candidate in a US Federal election, Mathematical Computer Modeling, 2007, 45, pp. 585 – 593;

17. Bendixson I., Sur les courbes definies par des equations differentielles, Acta Mathematika, 1901, Bd 24, 1, pp. 1 - 88;

18. Boccara N., 2010. Voters' Fickleness: A Mathematical Model. Int. J. Modern Phys. C, 21(2), pp.149 – 158;

19. Chilachava T.I. Sound scattering in A 3-dimensionally inhomogeneous wave-guide with a rough fluid bottom. Soviet Physics Acoustics, USSR, 1986, 32 (5), pp. 445 – 446;

20. Chilachava T.I., Kereselidze N.G. Non-preventive continuous linear mathematical model of information warfare. Sokhumi State University Proceedings, Mathematics and Computer Sciences, 2009, №VII, pp. 91 – 112;
21. Chilachava T.I., Kereselidze N.G. Continuous linear mathematical model of preventive information warfare. Sokhumi State University Proceedings, Mathematics and Computer Sciences, 2009, №VII, pp. 113 – 141;
22. Chilachava T.I, Dzidziguri Ts. D., Sulava L.O., Chakaberia M.R., Nonlinear mathematical model of administrative pressure. Georgian mathematical union. First international Conference, Books of Abstracts. Batumi, September 12 – 19, 2010, pp. 74 – 75;
23. Chilachava T.I., Kereselidze N.G. Optimizing Problem of Mathematical Model of Preventive Information Warfare, Informational and Communication Technologies – Theory and Practice: Proceedings of the International Scientific ConferenceICTMC-2010 USA, Imprint: Nova, 2011, pp. 525 – 529;
24. Chilachava T.I. Nonlinear mathematical model of dynamics of voters of two political subjects. Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Reports, 2013, vol.39, pp. 13 – 22;
25. Chilachava T.I., Chochua Sh. Two-party nonlinear mathematical model of elections taking account falsification. IV International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2013, pp. 162;
26. Chilachava T.I. Nonlinear mathematical model of dynamics of voters three electoral subjects.IV International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2013, pp. 161;
27. Chilachava T.I., Chakhvadze A. Continuous nonlinear mathematical and computer Model of information warfare with participation of authoritative interstate institutes. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2014, № 4(44), pp. 53 – 74;
28. Chilachava T.I., Kereselidze N.G., Kharaishvili Q. Nonlinear discrete mathematical and computer model of information warfare "an aggressor – the victim" with participation of

interstate authoritative organizations. V Annual International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2014, pg. 77;

29. Chilachava T.I., Chakhvadze A. Nonlinear mathematical and computer model of information warfare with participation of authoritative interstate institutes, V Annual International Conference of theGeorgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2014, pg. 76;
30. Chilachava T.I. Nonlinear mathematical model of bilateral assimilation taking intoaccount demographic factor, Caucasian Mathematics Conference CMC I Book of Abstracts, Tbilisi, 2014, pp. 66 – 67;
31. Chilachava T.I.Nonlinear mathematical model of bilateral assimilationGeorgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2014, No. 1 (41), pp. 61 – 67;
32. Chilachava T.I., Chakaberia M.R. Mathematical modeling of nonlinear process of assimilation taking into account demographic factor. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2014, No. 4 (44), pp. 35 – 43;
33. Chilachava T.I., Akhvlediani G., Miruashvili M. Continuous mathematical models of information warfare with participation of authoritative international and interstate institutes, VAnnual International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2014, pg. 75;
34. Chilachava T.I., Nonlinear mathematical model of the two-level assimilation. VI International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2015, pp. 79 – 80;
35. Chilachava T.I., Sulava L.O. Nonlinear mathematical model of elections with variable coefficients. VI International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2015, pg. 97;
36. Chilachava T.I., Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of nonlinear processes of elections with two selective subjects. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2015, No. 2(46), pp. 61 – 78;

37. Chilachava T.I., Chakaberia M.R. Nonlinear mathematical model of bilateral assimilation with zero demographic factor of the assimilating sides., VI International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2015, pg. 95;

38. Chilachava T.I., Chakaberia M.R. Mathematical modeling of nonlinear processes bilateral assimilation, Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2015, No. 2(46), pp. 79 - 85;

39. Chilachava T.I., Geladze Sh. Nonlinear mathematical model of two-party elections in case of linear functions coefficients. VI International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2015, pp. 81 – 82;

40. ChilachavaT.I., ChakaberiaM.R.About some decisions of nonlinear system of the differential equations describing process of two-level assimilation. VII International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2016, pp.103 – 104;

41. ChilachavaT.I., Chakaberia M.R.Mathematical modeling of nonlinear processes of two-level assimilation. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2016, № 3 (49), pp. 34 – 48;

42. ChilachavaT.I., Sulava L.O. Three party nonlinear mathematical model of elections. VII International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2016, pp. 105 – 106;

43. ChilachavaT.I., Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of three-party elections. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2016, № 2(48), pp. 59 – 72;

44. T. Chilachava Research of the dynamic system describing globalization process. **Springer** Proceedings in Mathematics & Statistics, Mathematics, Informatics, and their Applications in Natural Sciences and Engineering – AMINSE 2017, Tbilisi, Georgia, December 6 - 9, 2017, 2019, pp. 67 – 78;

45. T. Chilachava, G. Pochkhua About a possibility of resolution of conflict by means of economic cooperation. Problems managements of safety of complex systems. **Proceedings** XXVI of the International conference, 2018, pp. 69 – 74;

46. T. Chilachava, G. Pochkhua Research of the dynamic system describing mathematical model of settlement of the conflict by means of economic cooperation. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2018, 3 (55), pp. 18 – 26;

47. T.Chilachava, L. Sulava Mathematical and computer modeling of elections. Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences, Proceedings, 2018, v. XV-XVI, pp. 174 – 190;

48. T. Chilachava Development and research of mathematical model of language globalization, Problems managements of safety of complex systems. **Proceedings** XXV of the International conference, 2017, pg. 259 – 262;

49. Chilachava, L. Sulava Mathematical and computer modeling of political elections. The Eleventh International Scientific-Practical Conference Internet-Education Science-2018, **Proceedings, 2018,** pg. 113 – 116;

50. T. Chilachava About some first integrals of nonlinear system of the differential equations describing process of two-level assimilation. Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences, Proceedings, 2017, v. XIII - XIV, pp. 59 – 78;

51. T.Chilachava, L. Sulava Mathematical and computer modeling of political elections with a change in the number of electoral subjects. Proceeding of SPIE, 2018 (SPIE Digital Library), 2018, pp;

52. T.Chilachava, L. Sulava Mathematical and computer modeling of elections with constant demographic factor. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2018, 2(54), pp. 111 – 124;

53. T.Chilachava Mathematical model of transformation of two-party elections to three-party elections. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2017, № 2(52), pp. 21 – 29;

54. T.Chilachava About some exact solutions of nonlinear system of the differential equations describing three-party elections. 2016, Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, vol. 21, № 1, pp. 60 - 75;

55. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Nonlinear mathematical model of dynamics of processes of cooperation interaction in innovative system. VII International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi**, 2016,** pp. 104 – 105;

56. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Nonlinear mathematical model of interaction of fundamental and applied researches. Problems managements of safety of complex systems. Proceedings XXIV of the International conference, Moscow, 2016, pp. 289 – 292;

57. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Nonlinear mathematical model of interference of fundamental and applied researches of scientifically-research institute. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications. 2017, № 1(51), pp. 15 - 24;

58. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia About some exact solutions of nonlinear systems of the differential equations describing interference of fundamental and applied researches. Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences, Proceedings, 2017, v. XIII-XIV, pp. 79 – 91;

59. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Mathematical model of interference of fundamental and applied researches. VIII International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2017, pg. 77;

60. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Nonlinear two or three-stage mathematical model of training of scientists. VIII International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2017, pp. 77 – 78;

61. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Nonlinear Mathematical Model of Interference of Fundamental and Applied Researches. International Journal of Systems Science and Applied Mathematics, 2017, 2(6), pp. 110 – 115;

62. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Research of the dynamic systems describing mathematical models of training of the diplomaed scientists. Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Reports, 2017, vol. 43, pp. 17 – 29;

63. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Research of three and two-dimensional nonlinear dynamical systems describing the training of scientists. Applied Mathematics, Informatics, Mechanics, 2017, vol. 22, No.1, pp. 3 – 20;

64. T. Chilachava, Ts. Gvinjilia Mathematical Model of Competition Between Two Universities. IX International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2018, pg. 100;
65. Dulac H. C. Recherche des cycles limites. CR Acad. sciences, 1937, vol. 204, № 23, pp. 1703 - 1706;
66. Hofbauer, J., Sigmund, K.: Evolutionary games and population dynamics. Cambridge University Press, 1998;
67. Huckfeldt R. Noncompliance and the Limits of Coercion: The Problematic Enforcement of Unpopular Laws, in P.E. Johnson, ed., Formal Theories of Politics: Mathematical Modelling in Political Science, 1989, Vol. 12, No. 4/5 of Mathematical and Computer Modelling, pp. 533 - 546;
68. Huckfeldt R., Kohfeld C.W., Likens T.W. Dynamic Modeling: An Introduction. Sage University Paper Series on Quantitative Applications in the SocialSciences, Series no. 07-027. Beverly Hills and London: Sage Publications, 1982, 96 pg;
69. Huckfeldt R. The Dynamics of Political Mobilization, I: A Model of the MobilizationProcess. Newton, Massachusetts: Education Development Center by Burkhouse, Boston, 1981;
70. Huckfeldt R. Variable Responses to Neighborhood Social Contexts: Assimilation,Conflict, and Tipping Points, Political Behavior, 1980, Vol. 2, No. 3, pp. 231 – 257;
71. Huckfeldt R., Kohfeld C.W. Electoral stability and the decline of class in democratic politics, Math. Comput. Modelling, 1992, 16(8–9), pp. 223 – 239;
72. Misra A.K. A simple mathematical model for the spread of two political parties.Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2012, Vol. 17, No. 3, pp. 343 – 354;
73. Nagel M. A Mathematical Model of Democratic Elections. Current Research Journal of Social Sciences, 2010, 2(4), pp. 255 - 261;
74. Samuelson P.A. Foundations of Economic Analysis. Harvard University Press,1947, 353pg.
75. Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. Москва, Наука, 1985, стр. 165;

76. Бейли Н.Т.Дж. Математика в биологии и в медицине. Москва, Мир, 1970, стр. 312;
77. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва, Наука, 1973, стр. 343;
78. Вайнберг Б.В. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. Москва, МГУ, 1982, стр. 296;
79. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва, Наука, изд. 2, 2004, стр. 288;
80. Замков О.О., Черемных Ю.А., Толстопятенко А.В. Математические методы в экономике. Москва, Изд. Дело и Сервис, 1999, стр. 368;
81. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. Москва, Наука, 1997;
82. Келлер Дж.Б., Пападакис Дж. С Распространение волн и подводная акустика. Москва, Мир, 1980, стр. 232;
83. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. Москва, Наука, 1994, стр. 236;
84. ЛеонтьевВ.В. Межотраслевая экономика, Москва, Финансы и статистика, 1997, стр. 480;
85. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. Москва, Наука, 1991, стр. 276;
86. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика, Москва, 2002, стр. 198
87. Пригожин И.Р., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. Москва, Прогресс, 1986, стр. 432;
88. Смит Дж. М. Модели в экологии. Москва, Наука, 1976, стр. 428;
89. Сулава Л. О. Математическое и компьютерное моделирование нелинейных процессов выборов. Труды Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвященной 85-летию со дня рождения И.В.Прангишвили, Тбилиси, 2015, стр. 387 – 390;
90. Сулакшин С.С. Политико-математический анализ выборов. Труды Центра научной политической мысли и идеологии. Москва, №1, 2013, стр. 15;

91. Хакен Г. Синергетика. Москва, Мир, 1980, стр. 404;

92. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, стр. 320;

93. Чакаберия М.Р.Математическое и компьютерное моделирование нелинейных процессовдвусторонней ассимиляции.Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвященная 85-летию со дня рождения И.В. Прангишвили, Грузия, Тбилиси, 2015, стр. 524 – 526;

94. Чилачава Т.И. Рассеяние звука в трехмерно-неоднородном волноводе с неровным жидким дном. Академия Наук СССР, Акустический журнал, 1986, т. 32, вып. 5, стр. 708 – 711;

95. Чилачава Т.И. Об одной математической модели теории распространения звуковых волн.სტუ, შრომების კრებული, მართვის ავტომატიზებული სისტემები, 2007, № 2(3), стр. 85 – 93;

96. ЧилачаваТ.И. Ободноййматематическоймоделиакустики. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2007, № 2(13), стр. 65 – 68;

97. Чилачава Т.И. Об экологической модели «хищник-жертва», учитывающей сезонность встреч популяций. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2009, № 2(19), стр. 35 – 46;

98. Чилачава Т.И., Кереселидзе Н.Г. Оптимизационная задача математической модели информационной войны. Тезисы докладов Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвященной 80-летию со дня рождения И.В.Прангишвили, Тбилиси, 2010, стр. 196 – 197;

99. Чилачава Т.И., Дзидзигури Ц.Д.,Сулава Л. О., Чакаберия М.Р. Об одной нелинейной математической модели административного управления. Тезисы докладов Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии,

моделирование, управление», посвященной 80-летию со дня рождения И.В.Прангишвили, Тбилиси, 2010, стр. 203 – 204;

100. Чилачава Т.И., СулаваЛ. О., ЧакаберияМ.Р. Об одной нелинейной математической модели административного управления. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XVIII Международной конференции, Москва, 2010, стр. 492 – 496;

101. Чилачава Т.И.,КереселидзеН.Г. Оптимизационная задача математической модели информационной войны. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XVIII Международной конференции, Москва,2010, стр. 221 - 226;

102. Чилачава Т.И.,Кереселидзе Н.Г. Математическое моделирование информационных войн. Информационные войны, 2011, №1(17), стр. 28 – 35;

103. Чилачава Т.И., КереселидзеН.Г. Нелинейная математическая модель информационной войны. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XIX Международной конференции, Москва, 2011, стр. 185 – 188;

104. Чилачава Т.И. Нелинейная математическая модель динамики избирателей проправительственной и оппозиционной партий (двух избирательных субъектов). Basicparadigmsinscienceand technology. Development for the XXI century. Transactions II, 2012, стр. 184 – 188;

105. Чилачава Т.И. Нелинейная математическая модель динамики избирателей проправительственной и оппозиционной партий. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XX Международной конференции, Москва, 2012, стр. 322 – 324;

106. Чилачава Т.И.,СулаваЛ. О. Нелинейная математическая модель переменного административного управления, ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათ აკადემიის შრომები, ტ. III, 2012, გვ. 234 – 244;

107. Чилачава Т.И. Нелинейная трехпартийная математическая модель выборов. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XXI Международной конференции, Москва, 2013, стр. 513 - 516;

108. Чилачава Т.И.,СулаваЛ.О.Об одной нелинейной математической модели управления. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2013, № 1(37), стр. 60 – 64;

109. Чилачава Т.И., Чочуа Ш. Нелинейная двухпартийная математическая модель выборов с учетом фальсификации. Проблемы управления безопасностью слож-ных систем. Труды XXI Международной конференции, Москва, 2013, стр. 349 - 352;

110. Чилачава Т.И. Линейная дискретная математическая модель информационной войны с участием авторитетных общественных организаций. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XXII Международной конференции, Москва, 2014, стр. 77 - 80;

111. Чилачава Т.И. Линейная непрерывная математическая модель информационной войны с участием авторитетных религиозных институтов. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XXII Международной конференции, Москва, 2014, стр. 298 – 302;

112. Чилачава Т.И.,Сулава Л.О. Математическое и компьютерное моделирование процессов выборов с двумя избирательными субъектами и переменными коэффициентами модели. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XXIII Международной конференции, Москва, 2015, стр. 356 - 359.