საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გიორგი ყიფიანი

მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნებისთვის მათემატიკური მოდელების შექმნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებათა მეთოდით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“, შიფრი 0406

თბილისი

2019 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში სამშენებლო ფაკულტეტზე მშენებლობის კომპიუტერული დაპროექტების დეპარტამენტში

ხელმძღვანელი: სრული პროფესორი მურმან კუბლაშვილი

რეცენზენტები: მუსხელიშვილის სახელობის გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერ თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერების კანდიდატი - მამული ზაქრაძე

სრული პროფესორი - ბიჭიკო სურგულაძე

დაცვა შედგება 2019 წლის ”------” ----------------, --------- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე, კორპუსი I, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ის ბიბლიოთეკაში, ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. დემურ ტაბატაძე

ნაშრომის რეზიუმე

ნაშრომი შედგება შესავალისაგან, სამი თავისა და დანართისაგან. შესავალში განხილულია პრობლემა რასაც ეძღვნება ნაშრომი და აღნიშნული პრობლემის ირგვლივ მიძღვნილი ნაშრომების მიმოხილვა.

პირველ თავში განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში, მისი სტრუქტურა წირის ბოლოებში.

ნებისმიერი გლუვი გახსნილი კონტურების მქონე სინგულარული ინტეგრალებისათვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოებითი გამოთვლით სქემები და მიღებულია ამ სქემების თანაბარი შეფასებები მთელ კონტურზე ბოლოების ჩათვლით.

კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია გაუსის ტიპის კვადრატურული ფორმულები და მიღებულია შეფასებები წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

აგებულია მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები.

ნაშრომის მეორე თავში ნაჩვენებია პირველ თავში აგებული კვადრატურული ფორმულების გამოყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

ასეთ განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი ტიპის სასაზღვრო ამოცანები. მათთვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა “Mathematica” - სიმბოლურ ენაზე. ხდება მათი რეალიზაცია კონტურის დაყოფათა n - სხვადასხვა რიცხვისათვის.

ნაშრომის მესამე თავში განხილულია სხვადასხვა ტიპის ბზარების კონკრეტული ამოცანები. ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანები მიიყვანება კოშის გულიანი პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე გახსნილი კონტურებით. გამოკვლეულია ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულების ზღვრული წონასწორული მდგომარეობა. განისაზღვრება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის მიღწევის დროს ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე.ი. როცა იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. მოყვანილია კონკრეტული ამოცანების კომპიუტერული გამოთვლები და შესაბამისი გამოთვლის ცხრილები.

ნაშრომის დანართში მოყვანილია დისერტაციაში განხილული ყველა კონკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის კომპიუტერული პროგრამები.

Resume

The work is composed of three chapters and annex. The introduction examines the problem that is dedicated to the work and review of the works dedicated to this problem.

The first chapter discusses the behaviour of the weighted singular integration in the case of open contours, its structure at the end of the writing.

For the singular integrals with any smooth opening contours, the high order accuracy is approximated, calculating circuits and the equivalent of these schemes are included in the whole contour.

The cauche type of quadratic formulas are built for the hearted singular integration of the tower and the assessments are obtained in case of the contours opened for the weighted singular integration.

The square formulas of Markov's high-speed line accuracy are built.

In the second chapter of the work, the square formulas used in the first chapter are used in the case of the contours opened for the singular integral equation of the first kind.

Such equations will lead to different types of applied types of border types. For them the algorithms of numerical solution of high order accuracy are built. The corresponding computing program "Mathematica" - is a symbolic language. The realization of the contour division n is for different numbers.

The third chapter of the work deals with specific tasks of different types of cracks. It is shown that these tasks are followed by contours opened on the singular integral equations of the first heart of the tooth. The marginal equilibrium status of the fragile body with cracking type defects has been investigated. The critical meaning of external load is determined when the cracks begin to spread. When the body's local or complete rupture begins. The computer computation of the specific tasks and the corresponding calculation tables are presented.

Annex of the work is presented computer programs of numerical solution of all specific tasks discussed in the thesis.

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალურობა:

ბოლო პერიოდში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია სულ უფრო მეტად მნიშვნელოვანი ხდება. მექანიკის (აეროდინამიკის, დრეკადობის თეორიის, ღვევის თეორიის, ელექტროდინამიკის და სხვა) მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები მიიყვანება ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა შესახებაც სხვადასხვა ავტორებს საკმაოდ კარგად დამუშავებული სრული თეორია აქვთ მოცემული თავიანთ

ნაშრომებში. (მუსხელიშვილი, ივანოვი, ბელოცერკოვსკი, გაბდულხაევი, ლიფანოვი და ა.შ.)

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ სინგულარული ინტეგრალების დათვლა, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, რიგ შემთხვევებში შეუძლებელიც კი. ამიტომ ასეთ დროს აუცილებლობა ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენებისა.

გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული რიცხვითი ამოხსნებისთვის ალგორითმების დამუშავება. ის მოიცავს რამოდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველი, უნდა შეიქმნას რიცხვითი ამოხსნის მათემატიკური მოდელი, შემდეგ დამუშავდეს შესაბამისი ალგორითმები და მოხდეს მათი კომპიუტერული რეალიზაცია. ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გასათვალისწინებული უნდა იქნას ამოსახსნელი ამოცანების თავისებურებები: 1) ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოცემდეს მის შინაარსს. 2) ალგორითმი უნდა იყოს მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესებისადმი მდგრადი.

თეორიულ გამოკვლევებზე გაცილებით გვიან დაიწყო სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება. ამ მიმართულებით აუცილებლად უნდა აღვნიშოთ ს. ბელოცერკოვსკის შრომები აეროდინამიკაში, რომელიც საფუძველი გახდა დღეისათვის საკმაოდ კარგად ცნობილი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდისა - „დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი“.

აგრეთვე უნდა ვახსენოთ სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლებისადმი მიძღვნილ შრომებიდან ს, ბელოცერკოვსკის, ი. ლიფანოვის, მუსაევის, ჯ. სანიკიძის, ა. ჯიშკარიანის, მ. კუბლაშვილის, ბ. გაბდულხაევის, ი ბოიკოვისა და სხვათა შრომები.

აღსანიშნავია, რომ ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება დაიწყო ძირიტადად მეორე გვარის ფრედგოლმის განტოლებებზე. ასეთი განტოლებებისათვის აგებული იქნა რიცხვითი სქემები: ა) მაღალი რიგის სიზუსტის, საკმარისად ვიწრო კლასის, როცა საძებნი ფუნქციები ინტერპოლირდება სპეციალური მრავალწევრებით ან შესაბამისი ოპერატორების საკუთრივი ფუნქციებისგან შედგენილი მწკრივის კერძო ჯამებით. ბ) დაფუძნებული მართკუთხედის ტიპის ან ანალოგიური, საკმარისად ზოგადი, ტიპის ფორმულებზე.

პრობლემები წარმოიშვება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს, რადგანაც სინგულარული ინტეგრალი განშლადია და გაიგება ე.წ. კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოების თეორია არაა სამართლიანი, კერძოდ განვიხილოთ ფრედგოლმის განტოლება: $K\varphi = f$, სადაც K ფრედგოლმის ოპერატორია, f ცნობილი, ხოლო φ საძებნი ფუნქციებია.დავუშვათ K ოპერატორისათვის ავაგეთ K_n მიახლოებითი ოპერატორი, ისეთი რომ, როდესაც $\|K - K_n\| \to 0,$ $n \to \infty$, მაშინ როცა $K\varphi = f$ განტოლებას აქვე ერთადერთი ამონახსნი φ, $K_n\varphi_n = f_n$ განტოლებასაც გარკვეული n_0-დან დაწყებული ექნება ერთადერთი ამონახსნი φ_n და $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0,\ n \to \infty$. ხოლო სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლების შემთხვევაში ანალოგიურად არ ხდება: ავიღოთ ზუსტი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება $S\varphi = f$, ხოლო აპროქსიმაციის შედეგად მიღებული მიახლოებითი განტოლება იყოს $S_n\varphi_n = f_n$. დავუშვათ, რომ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი φ და $\|S - S_n\| \to 0,$ აქედან არ გამომდინარეობს, რომ $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$; ანუ კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოების თეორია სამართლიანი არ არის ამ შემთხვევაში და გამომდინარე აქედან სინგულარულ ინტეგრალურ

განტოლებებში ყოველ განტოლებას სჭირდება ინდივიდუალური შესწავლა. ამიტომ ასეთ დროს რთული ხდება მიახლოებითი პროცესების დაფუძნება.

საქვეყნოდ ცნობილია, რომ ბზარების ამოცანები მიეკუთვნება რთულ ამოცანებს რიცხვითი ამოხსნების თვალსაზრისით. საკმაოდ აქტუალურია ისეთი მეთოდების დამუშავება, რომლის საშუალებითაც ადვილად განისაზღვრება ძაბვების მნიშვნელობები ბზარების ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში, რომელიც, საშუალებას იძლევა ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირებაში. როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა, ასეთი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნებისთვის ეფექტური აღმოჩნდა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი.

სწორედ ამ საკითხების შესწავლას ეხება სადისერტაციო ნაშრომი სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. კერძოდ ბზარების ამოცანებისათვის, შედგენილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები და მათი საშუალებით განხორციელებულია ამ ამოცანების კომპიუტერული რეალიზაცია.

დისერტაციის მიზანი:

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია შევიმუშავოთ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმები სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანებისათვის და მოვახდინოთ მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

კვლევის მეთოდები:

სადისერტაციო ნაშრომზე მუშაობისას გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია, სამშენებლო, რღვევის მექანიკის და მიახლოებითი მეთოდების ზოგადი თეორიები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორია.

მეცნიერული სიახლე:

აგებულია და შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამიცანისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით.

მიღებული შედეგების პრაქტიკული გამოყენება:

მიღებული შედეგების გამოყენება შესაძლებელია სამშენებლო მექანიკის, ჰიდროდინამიკის, არეოდინამიკის და რღვევის თეორიის ამოცანების გადასაწყვეტად. სადისერტაციო ნაშრომში აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის ალგორითმები შესაძლებელია გამოვიყენოთ მშენებლობის ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის, როგორიცაა ბზარების ამოცანები.

ნაშრომის აპრობაცია და გამოქვეყნებული პუბლიკაციები:

ნაშრომის, როგორც ცალკეული ისე ძირითადი ნაწილი და შედეგები მოხსენებული იქნა სადისერტაციო პროგრამით გათვალისწინებულ სემინარებზე. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სტუდენდთა ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე. სადისერტაციო ნაშრომის მასალების მიხედვით გამოქვეყნებულია სამი სამეცნიერო შრომა.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა:

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავის, დასკვნის, დანართის, გამოყენებული ლიტერატურის 64 დასახელების ნუსხისგან, ტექსტის საერთო მოცულობა 140 გვერდია.

ნაშრომის შინაარსი

შესავალში მოცემულია ნაშრომის საერთო დახასიათება: განხილულია პრობლემის აქტუალობა რასაც ეძღვნება ნაშრომი, პრობლემის ირგვლივ მიძღვნილი ნაშრომების მიმოხილვა, მეცნიერეული სიახლე, პრაქტიკული ღირებულება და შედეგების რეალიზაცია, სამუშაოს აპრობაცია, ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა.

ნაშრომის პირველ თავში საუბარია წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის სხვადასხვა ავტორების და დისერტანტის მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმების შესახებ და მათი კრებადობის რიგის შეფასებებზე.

პირველი თავის §1.1-ში განხილულია ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალის თვისებები.

$$S(\varphi;t_0,\eta)\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{(t-c)^{\eta}(t-t_0)}\qquad(t_0\in L)$$

სადაც $L\equiv ab$ გახსნილი გლუვი კონტურია a და b ბოლოებით, რომლის პარამეტრული განტოლებაა $t=t(s),(s_a\le s\le s_b)$. დადებით მიმართულებას ვიღებთ s პერიმეტრის ზრდის მიხედვით. c არის a ან b, $\eta=\lambda+i\beta,\quad(0\le\lambda<1),\ (t-c)^{\lambda}$ ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტოა.

პირველი თავის §1.2-ში განხილულია ნებისმიერი გლუვი გახსნილი კონტურების მქონე სინგულარული ინტეგრალებისთვის ისეთი მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოებითი გამოთვლის სქემის აგება, რომელიც საშუალებას იძლევა ცდომილების თანაბარ შეფასებისას მთელ კონტურზე, ბოლოების ჩათვლით.

განხილულია შემდეგი ინტეგრალი

$$S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)=\frac{1}{\pi\, i}\int_L (t-a)^{\alpha}(t-b)^{\beta}\,\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \qquad t_0\in L,$$

სადაც, $L=ab$ წარმოადგენს გლუვ, გახსნილ კონტურს α და β ბოლოებით, რომელიც კომპლექსურ სიბრტყეზე წარმოდგენილია პარამეტრული სახით $t=t(s)\ (s_a\le s\le s_b)$

$$\rho(t)=(t-a)^{\alpha}(t-b)^{\beta}$$

წონითი მრავალსახა ფუნქციაა. α და β პარამეტრებიდან ღებულობენ ერთ-ერთი მნიშვნელობას $\{1/2;-1/2\}$ სიმრავლიდან

$\rho(t)$ ამ მრავალსახა ფუნქციის ერთ-ერთი ფიქსირებული შტოა, ხოლო φ ნებისმიერი ფუნქციაა $H_{\alpha}^{(r)}(L)\ r\ge 0, 1/2<\alpha\le 1)$ კლასიდან.

მ. კუბლაშვილის მიერ ასეთი ინტეგრალებისათვის აგებულია მაღალი სიზუსტი რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. დავუშვათ, რომ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ხოლო m მუდმივად დაფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, $S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსახულებად მივიღოთ

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)=L_v(\varphi;t_0)\cdot\delta^{(\alpha,\beta)}(t_0)+\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{p_{\sigma k}^{(\alpha,\beta)}}{t_0-t_{\sigma k}}\left[L_v(\varphi;t_0)-\varphi(t_0)\right]$$
$$(t_0\in\tau_v\tau_{v+1};\qquad t_0\ne t_{\sigma k};\quad v=1,2,\cdots,n),$$

სადაც

$$\delta^{(\alpha,\beta)}(t_0)=\begin{cases}0, & \alpha=\beta=-1/2\\ 1, & \alpha=-\beta=1/2\\ t_0 & \alpha=\beta=1/2\end{cases}$$

$\tau_{\sigma}, t_{\sigma k}$ $(\sigma=1,2,...,n;\ k=1,2,....,m)$ L წარმოადგენს წირის კონტურზე კვანძით წერტილებს. $L_v(\varphi;t_0)-$ ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწირია, $t_{vk}\,(v=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m})$ კვანძით წერტილებზე.

$$p_{\sigma k}^{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}(t-a)^{\alpha}(t-b)^{\beta}\,\frac{\omega_\sigma(t)dt}{(t-t_{\sigma k})\omega^{/}\sigma(t_{\sigma k})},\quad (\omega_\sigma(t)=\prod_{k=1}^{m}(t-t_{\sigma k}),\quad (\alpha,\beta=\pm 1/2).$$

$S_n^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ ჯამი $t_0=t_{\sigma k}$ -წერტილებში კომპიუტერზე გამოსათვლელად უფრო მოსახერხებელი ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს, რომლის დროსაც შესაძლებელია თავიდან აცილება მცირე სიდიდეებზე გაყოფისაგან, როცა t_0 პარამეტრის მნიშვნელობა ახლოს არის კვანძებთან.

$H_\alpha^{(r)}(L)$ ფუნქციათა კლასში $S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$-ის აპროქსიმაცია შესაძლებელია შესაბამისი კვადრატული $S_n^{(\alpha,\beta)}$ $(\varphi;t_0)$ ფორმულით, ნებისმიერ $t_0\in ab$ (t_0 არ ემთხვევა a და b ბოლოებს) წერტილში ცდომილების შეფასება მიღებულია $O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right)$ $(1/2<\alpha\le 1, r\ge 0)$, მაგრამ ზოგიერთ დმოკიდებულებაში, (ზზარების, გარსდენისა და პროფილის ამოცანებში) საჭირო ხდება ისეთი შეფასებების მიღება, რომელიც უფრო ზუსტად ასახავს მიახლოების პროცესს a და b ბოლოების მახლობლად.

სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევიდან გამომდინარე, წირის ბოლოების მახლობლად, ნებისმიერი $\varphi\in H_\alpha(L)$; $\alpha>1/2$ -სათვის არსებობს $\lim\limits_{t_0\to c}S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$, სადაც c ემთხვევა a ან b -ს. ამასთან დაკავშირებით, $S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ ინტეგრალის თანაბარი აპროქსიმაციის შესახებ საკითხი ისმება მთელ $L=ab$ წირზე, ბოლოების ჩათვლით.

ყოველი $t_0\in ab$ -სთვის სამართლიანია შეფასება:

$$\left|S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)-S_n^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)\right|\le(A_1+A_2\ln n)\frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}}\ (n>1,\quad 1/2<\alpha\le 1),$$

სადაც A_1,A_2 მუდმივებია, რომლებიც დამოუკიდებელია t_0 -ზე.

პირველი თავის §1.3-ში განხილულია ჯ. სანიკიძის და მ.კუბლაშვილის მიერ კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში გაუსის ტიპის სიზუსტის მახლობელი კვადრატურული ფორმულები. კერძოდ განხილულია კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt (-1 < x < 1) \text{, } \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

ინტეგრალისათვის აგებულია გაუსის ტიპის კვადრატურული ფორმულა t_k კვანძებით და $\{A_k\}$ კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} (-1 < x < 1)$$

ნაგულისხმებია, რომ $\varphi(t)$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე. თუ $x \in (-1 < x < 1)$ მნიშვნელობები შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{t_k - x} = 0,$$

მაშინ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის მოცემულ პირობებში სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt (-1 < x < 1):$$

კვადრატურულ ფორმულას ექნება შემდეგი სახე

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x} (-1 < x < 1),$$

მსგავსი სტრუქტურის კვადრატურული ფორმულები ლიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალებისათვის გაუსის კვადრატურული ფორმულების სახელით, რომელიც ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრება მოცემული $\rho(t)$ -სათვის $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით.

პირველი თავის §1.4-ში განხილულია ზ. კაპანაძის მიერ კოშის გულიანი ინტეგრალებისათვის მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულების აგება $n = 7$ კვანძისათვის. მოყვანილია

ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა მარკოვის კვანძებისათვის $t_k,\ k = 1, 2, ..., 12$. მიღებულია 7 სინგულარობის წერტილი მარკოვის 12 კვანძისათვის $t_{0j},\ j = 1, 2, ..., 7$. მიღებულ წერტილებში სინგულარული ინტეგრალის დასათვლელად გამოყენებულია კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi(t)}{t - t_0} dt \approx 2\left\{\frac{\phi(t_1)}{t_1 - t_{0j}} + \frac{\phi(t_2)}{t_2 - t_{0j}} + \cdots + \frac{\phi(t_{12})}{t_{12} - t_{0j}}\right\}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{12} \frac{\phi(t_k)}{t_k - t_{0j}}, \qquad j = 1,2, \dots ,7$$

საკმაოდ მნიშვნელოვანია განხილული საკითხი, რადგან საშუალებას იძლევა აღნიშნული ტიპის სინგულარული ინტეგრალებისათვის ერთნაირი რიცხვითი კოეფიციენტებიანი კვადრატურული ფორმულების გამოყენებისა.

პირველი თავის §1.5-ში დისერტანტის მიერ განხილულია, მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულა.

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0} (-1 < x_0 < 1)$$

(იგულისხმება, რომ $\rho(t)$ - წონითი ფუნქციაა, აკმაყოფილებს სიგლუვის თვისებას, ამასთან, როცა $x_0 = t_k$, $\frac{\varphi(t_k)-\varphi(x_0)}{t_k-x_0}$ - ში იგულისხმება შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობა)

თუ x_0- ის მნიშვნელობას $x_0 \in (-1, +1)$ შუალედიდან შევარჩევთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x_0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{t_k - x_0} = 0$$

$$n = 25$$

$$\{t_{0j}\}\ j = 1,2, \dots, 12$$

მაშინ x_0-ის ასეთი მნიშვნელობებისათვის სინგულარული ინტეგრალისთვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x_0} dx$$

მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)dt}{t - x_0} \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x_0}, \quad (-1 < x_0 < 1)$$

სადაც A_k - მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც შეესაბამება მარკოვის ტიპის კვადრატურულ ფორმულას. მოცემულ ნაშრომში აგებულია ახალი მაღალი სიზუსტის მქონე კვადრატურული ფორმულა, რომელიც აუმჯობესებს ყველა ადრე მიღებულ შედეგებს.

ნაშრომის II თავში ნაჩვენებია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის გახსნილი კონტურების სემთხვევაში. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა ტიპის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის), აერო და ჰიდრო დინამიკის, დირიხლეს (შესაბამისად გრეხის) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კოშის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

მეორე თავის §2.1-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t)dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t)\varphi_0(t)dt = f(t_0)$$

პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურების დროს, სადაც $f(t),\ K(t_0,t)$ $L \equiv ab$ -ზე განსაზღვრული ჰელდერის კლასის ფუნქციებია.

დავუშვათ, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამონახსნების გარკვეულ კლასში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში აგებულია ამ განტოლების ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმი, რომელსაც აქვს კრებადობის საკმარისად მაღალი რიგი.

შესაბამისი გამოთვლითი ალგორითმის აგება დაფუძნებულია §1.1-ში განხილული სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაციაზე.
ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგის საფუძველზე, სადაც დამტკიცებულია სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურებით კვადრატული პროცესების კრებადობა H_β მეტრიკით, შესაძლებელია შესაბამისი გამოთვლითი პროცესების დაფუძნება. გამოყენებული კვადრატურული პროცესები საშუალებას იძლევა საკმარისად ადვილად აიგოს შესაბამისი რეალური გამოთვლითი სქემები. გარდა ამისა, ამ სქემებს აქვს ის მნიშვნელოვანი თვისება, რომ K და f გულის და მარჯვენა მხარის გამოთვლის ცდომილება, როცა $n \to \infty$ პრაქტიკულად იზრდება ძალიან ნელა.

მეორე თავის §2.2-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi_0(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L K(t_0,t)\varphi_0(t)dt = \mathrm{f}(\mathrm{t}_0) \qquad (t_0 \in L)$$

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როდესაც მისი ამონახსნი ცალსახად არ განისაზღვრება ან განტოლების ამოხსნადობისათვის f მარჯვენა მხარესთვის საჭიროა დამატებითი პირობა. ასეთი განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები.

§2.3-ში ანალოგიურად აიგება მიახლოებითი პროცესები სრული სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებისათვის

მეორე თავის §2.4-ში განხილულია ზ. კაპანაძის მიერ აგებული მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალების რიცხვითი ამოხსნა.

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi_0(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L K(t_0,t)\varphi_0(t)dt=\mathrm{f}(\mathrm{t}_0) \qquad (t_0\in L)$$

$\mathrm{f(t)}, K(t_0,t)\in H$. ინტეგრალური განტოლებისათვის გამოიყენება კვადრატურული ფორმულა

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{7}\frac{\phi(t_k)}{t_k-t_{0j}}+\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{7}K(t_{0j},t_k)\phi(t_k)=f(t_{0j})$$

სადაც $j=1,2,...,7$. აქ t_k და t_{0j}, $j=1,2,...,7$, $k=1,2,\dots,7$ §1.4-ში მოძებნილი კვანძითი და სინგულარობის წერტილებია. მიღებული კვადრატურული ფორმულიდან ჩანს განტოლებათა სისტემა 7 უცნობითა და შვიდი განტოლებით, რომელიც იხსნება ცალსახად.

მეორე თავის §2.5-ში განხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურის შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამოხსნების განსახილველ კლასში აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში შესაძლებელია მივაღწიოთ კრებადობის საკმაოდ მაღალ რიგს.

სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემხთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულა. ამ ფორმულის კოეფიციენტებისა და კვანძების დასადგენად მიიღება საკმაოდ რთული განტოლებათა სისტემა. იხსნება აღნიშნული სისტემა და ვპოულობთ კვადრატული ფორმულის კოეფიციენტებს და კვანძებს. შედგენილია შესაბამისი კომიუტერული

პროგრამა „Mathematica" - სიმბოლურ ენაზე. ხდება აღნიშნული პროგრამის რეალიზაცია სხვადასხვა n - დაყოფათა რიცხვისთვის.

მიღებული შედეგები აჩვენებს, რომ მარკოვის ტიპის მუდმივკოეფიციენტიანი კვადრატული ფორმულა არის მაღალი რიგის სიზუსტის. გაუმჯობესებულია ზ. კაპანაძის მოყვანილი შედეგები.

მეორე თავის § 2.6-ში განხილულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული სქემებით.

განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi_0(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_{ab} k(t_0;t)\varphi_0(t)dt=f(t_0)$$

აღნიშული განტოლებისათვის, ნებისმიერი ინდექსის შემთხვევაში, აგებულია საკმაოდ გამარტივებული რიცხვითი ამოხსნის სქემა, რომელიც ინარჩუნებს სიზუსტის მაღალ რიგს.

ნაშრომის III თავში მოყვანილია სამშენებლო მექანიკის ძალზედ აქტუალური საკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. დასმულია და განხილულია ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სხვადასხვა შემთხვევებისათვის.

§-3.1-ში განხილულია წრფივი ჭრილის მქონე დრეკადი სიბრტყის დაძაბულ დეფორმირებული მდგომარეობა. კოშის ტიპის ინტეგრალების სახით წარმოდგენილია ძაბვის განაწილების და გადაადგილების ფუნქციები. ინტენსივობის კოეფიციენტების სათვლელი ფორმულები ზოგად შემთხვევაში მოცემულია ინტეგრალური სახით. შესწავლილია ზღვრულ–

წონასწორული მდგომარეობა ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულებში. განსაზღვრულია გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, როდესაც ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე.ი. როცა იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. მოცემულია გამოსათვლელი ფორმულები ბზარის განვითარების საწყისი კუთხისა და ზღვრული ძაბვების მნიშვნელობებისათვის. მოყვანილია შესაბამისი დიაგრამები.

§-3.2-ში განხილულია უსასრულო სხეულზე სასრული სიგრძის ზოლის გასწვრივ თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. ცნობილია ბზარის ნაპირების გასწვრივ ტემპერატურის მნიშვნელობის ცვლილება, უნდა განისაზღვროს სხეულის ზედაპირის ნებისმიერ წერტილში ტემპერატურის ცვლილება. ამოცანა მიყვანილია პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე. მოყვანილია შესაბამისი რიცხვითი გამოთვლის ცხრილები,საიდანაც ჩანს, რომ განსაკუთრებული წერტილებისათვის (ბზარის ბოლოების ძალიან მცირე მიდამოში) აღნიშნული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმებით მიიღწევა მიახლოების საკმაოდ მაღალი სიზუსტე.

§-3.3-ში განხილულია დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. განხილულია უსასრულო სხეული, რომელიც გრძივი ძვრის დეფორმაციის პირობებშია, მოცემულია სასრული სიგრძის წრფივი ჭრილისხეულის ზედაპირზე, თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა მოქმედებს ბზარის ზედაპირზე, ხოლონულის ტოლია ძაბვა უსასრულობაში. საპოვნია სხეულის ზედაპირის ნებისამიერ წერტილშიძაბვების განაწილება, რომელიც გამოისახება წონიანი კოშის ტიპის ინტეგრალებით, მოცემულია მიახლოების დათვლის ალგორითმები, შედგენილია ცხრილები, როდესაც კონკრეტული ფუნქციებით მოცემულია დატვირთვა ბზარის ნაპირზე.

§-3.4-ში განხილულია ბზარის ამოცანა, როდესაცორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი მოცემულია უსასრულო ფირფიტაზე,

მასზე მოცემულია დატვირთვა, რომელიც სიმეტრიის პირობასაკმაყოფილებს. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე, შედგენილია ამ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები, დაწერილიაშესაბამისი პაკეტის ტიპის კომპიუტერული პოგრმა და აგრეთვე მოყვანილია შესაბამისი გამოთვლის ცხრილები.

§-3.5-ში განხილულია უსასრულო ფირფიტაზე ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილები (ბზარები), რომლის ამოხსნაც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრარულ განტოლებებზე და ეს განტოლებები იხსნება მიახლოებით მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით, ასევე განხილულია ამ ანტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული მაღალი ზისუზტის სქემებით.

§-3.6-ში განხილულია ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა, სადაც მოცემულია სასრული სიგრძის ბზარი დრეკად ნახევარ სიბრტყეში, რომელიც სიბრტყის საზღვრის მართობულია და თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა მოცემულია ბზარის ნაპირზე. მოცემული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi_0(\tau)d\tau}{\tau-y}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}K(\tau,y)\varphi_0(\tau)d\tau=f(y), \qquad |y|<1 \qquad (0.5)$$

სადაც

$$K(\tau,y)=\frac{y^2+6y+4\tau\, y+2\tau-\tau^2+4}{(\tau+y+2)^3}$$

ხოლო $f(y)$ არის ბზარის ნაპირებზე მოდებული დატვირთვა. $K(\tau,y)$ გულს გარდა განსაკუთრებულობისა, $\tau=y=-1$ წერტილში აქვს უძრავი სინგულარობა. გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში აგებულია განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის დაფუძნებადი ალგორითმი.

მოყვანილია კომპიუტერული გამოთვლების ცხრილები. ასევე განხილულია ბზარის ამოცანა, როდესაც ბზარის ნაპირზე ფიქსირებულ წერტილში მოდებულია შეყურსულილი ძალა. აღნიშნული ამოცანა მიყვანილია ანალოგიური ტიპის განტოლებაზე, ამიტომ მისი რიცხვითი ამოხსნისათვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ იგივე ალგორითმი, რაც წინა შემთხვევაში.

§-3.7-ში განხილულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი პრქტიკული გამოყენებითი ტიპის ბზარის ამოცანა, რომლებიც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე.

რომელთა რიცხვითი ამოხსნისათვის ვიყენებთ წინა თავებში აგებულ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი გამოთვლის სქემებს.

დასკვნა

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგები

წონიანი სუნგულარული ინტეგრალებისთვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარტივი ტიპის ახალი კვადრატურული ფორმულები.

წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის ახალი კვადრატურული ფორმულები

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის გამარტივებული ახალი რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი, რომელიც აუმჯობესებს აკადემიკოსების ბელოცერკოვსკისა და ლიფანოვის ცნობილ რიცხვითი ამოხსნის ალორითმს :დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა

მეთოდს“, ასევე ჯ.სანიკიძისა და მ . კუბლაშვილი ცნობილ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმებს.

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისთვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი.

ბზარების ამოცანებისათვის რთულ შემთხვევებში (როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, თვით უკუქცევის წერტილების ჩათვლით), როცა კლასიკური რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები (სასრულ-სხვაობათა, სასრულ ელემენტთა, ფრედგოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა, ვარიაციული და ა.შ.) ნ საერთოდ უძლურია ან არ არის ეფექტური. აგებულია ახალი გამარტივებული და მარკოვის ტიპის პირდაპირი მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები.

ზემოთ მოყვანილი შედეგების შესაბამისი ალგორითმებით შექმნილია პაკეტის ტიპის პროგრამები Mathematica სიმბოლურ ენაზე, რომელიც მოყვანილია დიესრტაციის დანართში.

<u>სამუშაოს აპრობაცია</u>

კვლევის შედეგები განხილული იქნა შემდეგ სამეცნიერო კონფერენციებზე და სემინარებზე:

1. სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლა მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულებით. სტუდენტთა 83-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2016

2. კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისებები. სტუდენტთა 82-ე ღია

საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2014

3. სინგულარული ინტეგრალებისათვის მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულების შესახებ. სტუდენტთა 81-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2013

დისერტაციის მასალებზე მომზადდა და გამოქვეყნდა შრომები:

1. გ. ყიფიანი., მირიან კუბლაშვილი. უსასრულო სიბრტყეზე ორი ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილის (ბზარის) რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა" 1(51),2019

2. გ. ყიფიანი. მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატულიფორმულების შესახებსინგულარული ინტეგრალებისთვის. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა" 1(48),2018

3. გ. ყიფიანი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა" 1(48),2018