

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გიორგი ყიფიანი

მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნებისთვის
მათემატიკური მოდელების შექმნა სინგულარული ინტეგრალური
განტოლებათა მეთოდით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“, შიფრი 0406

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

2019 წელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით გიორგი ყიფიანის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: **მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნებისთვის მათემატიკური მოდელების შექმნა სინგულარული ინტეგრალური განტოლებათა მეთოდით** და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის საუნივერსიტეტო სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

-----, ----- 2019 წელი

ხელმძღვანელი: სრული პროფესორი მურმან კუბლაშვილი

რეცენზენტი: მუსხელიშვილის სახელობის
გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი
მეცნიერ თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერების კანდიდატი - მამული ზაქრაძე

რეცენზენტი: სრული პროფ. ბიჭიკო სურგულაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი 2019 წ

ავტორი: გიორგი ყიფიანი

დასახელება: მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი
ამოხსნებისთვის მათემატიკური მოდელების შექმნა სინგულარული
ინტეგრალური განტოლებათა მეთოდით

სადოქტორო პროგრამა: მშენებლობა

ხარისხი: მისანიჭებელი კვალიფიკაცია

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

9 გვ

I თავი- წონიანი სინგულარული ინტეგრალების მაღალი რიგის სიზუსტის აპროქსიმაციები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

1.1 წონიანი სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევა ზოგად შემთხვევაში გახსნილი კონტურების შემთხვევაში 24 გვ

1.2 მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი მიახლოვების სქემები 25 გვ

1.3 ჯ.სანიკიძის და მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული გაუსის ტიპის რიცხვითი სქემები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის 39 გვ

1.4 ზ.კაპანაძის მიერ აგებული გაუსის ტიპის რიცხვითი სქემები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის 45

1.5 მარკოვის ტიპის მაღალი სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურებისათვის 51 გვ

II თავი - პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

2.1 პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნები სხვადასხვა ავტორების მიერ (მიმოხილვა). 55 გვ

2.2 მ. კუბლაშვილის მიერ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება და მისი კომპიუტერული რეალიზაცია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების გახსნილი კონტურებით. 60 გვ

2.3 მ.კუბლაშვილის და ჯ.სანიკიძის სრული ინტეგრალური შემთხვევა 65 გვ

2.4 ზ. კაპანაძის მიერ სრული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ მარკოვის ტიპის კვადრატური ფორმულებით. 70 გვ

2.5 პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი კონტურებით მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით	72 გვ
2.6 სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული სქემების გამოყენებით	76 გვ
III თავი - მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები გამარტივებული მაღალი რიგის სიზუსტის ალგორითმებით სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით	
3.1 წრფივი ბზარის მქონდე დრეკადი სიბრტყის დამაბუდეფორმირებადი მდგომარეობა	81 გვ
3.2 თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა	93 გვ
3.3 დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა	97 გვ
3.4 ორი თანაბარი სიგრძის პარალელური ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა	100 გვ
3.5 უსასრულო სიბრტყეზე ორი ნებისმიერად ორიენტირებული ბზარის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ	103 გვ
3.6 ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა	107 გვ
3.7 ბზარების ამოცანები სიბრტყეზე, რომლებიც I გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე მიიყვანება	111 გვ
დასკვნა	115 გვ
ლიტერატურა	118 გვ
დანართი	125 გვ

ნაშრომის რეზიუმე

ნაშრომი შედგება შესავალისაგან, სამი თავისა და დანართისაგან. შესავალში განხილულია პრობლემა რასაც ეძღვნება ნაშრომი და აღნიშნული პრობლემის ირგვლივ მიძღვნილი ნაშრომების მიმოხილვა.

პირველ თავში განხილულია წონიანი სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში, მისი სტრუქტურა წირის ბოლოებში.

ნებისმიერი გლუვი გახსნილი კონტურების მქონე სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოება, გამოთვლით სქემები და მიღებულია ამ სქემების თანაბარი შეფასებები მთელ კონტურზე ბოლოების ჩათვლით.

კომის გულიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის აგებულია გაუსის ტიპის კვადრატურული ფორმულები და მიღებულია შეფასებები წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

აგებულია მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები.

ნაშრომის მეორე თავში ნაჩვენებია პირველ თავში აგებული კვადრატურული ფორმულების გამოყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში.

ასეთ განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა სახის გამოყენებითი ტიპის სასაზღვრო ამოცანები. მათთვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა “Mathematica” - სიმბოლურ ენაზე. ხდება მათი რეალიზაცია კონტურის დაყოფათა n - სხვადასხვა რიცხვისათვის.

ნაშრომის მესამე თავში განხილულია სხვადასხვა ტიპის ბზარების კონკრეტული ამოცანები. ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანები მიიყვანება კოშის გულიანი პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე გახსნილი კონტურებით. გამოკვლეულია ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიდვე სხეულების ზღვრული წონასწორული მდგომარეობა. განისაზღვრება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის მიღწევის დროს ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე.ი. როცა იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. მოყვანილია კონკრეტული ამოცანების კომპიუტერული გამოთვლები და შესაბამისი გამოთვლის ცხრილები.

ნაშრომის დანართში მოყვანილია დისერტაციაში განხილული ყველა კონკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის კომპიუტერული პროგრამები.

Resume

The work is composed of three chapters and annex. The introduction examines the problem that is dedicated to the work and review of the works dedicated to this problem.

The first chapter discusses the behaviour of the weighted singular integration in the case of open contours, its structure at the end of the writing.

For the singular integrals with any smooth opening contours, the high order accuracy is approximated, calculating circuits and the equivalent of these schemes are included in the whole contour.

The cauche type of quadratic formulas are built for the hearted singular integration of the tower and the assessments are obtained in case of the contours opened for the weighted singular integration.

The square formulas of Markov's high-speed line accuracy are built.

In the second chapter of the work, the square formulas used in the first chapter are used in the case of the contours opened for the singular integral equation of the first kind.

Such equations will lead to different types of applied types of border types. For them the algorithms of numerical solution of high order accuracy are built. The corresponding computing program "Mathematica" - is a symbolic language. The realization of the contour division n is for different numbers.

The third chapter of the work deals with specific tasks of different types of cracks. It is shown that these tasks are followed by contours opened on the singular integral equations of the first heart of the tooth. The marginal equilibrium status of the fragile body with cracking type defects has been investigated. The critical meaning of external load is determined when the cracks begin to spread. When the body's local or complete rupture begins. The computer computation of the specific tasks and the corresponding calculation tables are presented.

Annex of the work is presented computer programs of numerical solution of all specific tasks discussed in the thesis.

შესავალი

ბოლო პერიოდში სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია სულ უფრო მეტად მნიშვნელოვანი ხდება. მექანიკის (აეროდინამიკის, დრეკადობის თეორიის, რღვევის თეორიის, ელექტროდინამიკის და სხვა) მრავალი გამოყენებითი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები მიიყვანება ერთგანზომილებიან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომელთა შესახებაც სხვადასხვა ავტორებს საკმაოდ კარგად დამუშავებული სრული თეორია აქვთ მოცემული თავიანთ ნაშრომებში. (მუსხელიშვილი [1], ბელოცერკოვსკი-ლიფანოვი [4], კრილოვი [5], და სხვა).

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ სინგულარული ინტეგრალების დათვლა, ან ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, რიგ შემთხვევებში შეუძლებელიც კი. ამიტომ ასეთ დროს აუცილებლობა ხდება რიცხვითი მეთოდების გამოყენებისა.

გარკვეულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული რიცხვითი ამოხსნებისთვის ალგორითმების დამუშავება. ის მოიცავს რამოდენიმე მნიშვნელოვან ეტაპს. პირველი, უნდა შეიქმნას რიცხვითი ამოხსნის მათემატიკური მოდელი, შემდეგ დამუშავდეს შესაბამისი ალგორითმები და მოხდეს მათი კომპიუტერული რეალიზაცია. ასეთი ალგორითმების დამუშავების დროს გათვალისწინებული უნდა იყოს ამოსახსნელი ამოცანების თავისებურებები: 1) ალგორითმი სრულად უნდა აღწერდეს ამოცანის ბუნებას და რაც შეიძლება ზუსტად გადმოცემდეს მის შინაარსს. 2) ალგორითმი უნდა იყოს მაღალი სიზუსტის და გამოთვლითი პროცესებისადმი მდგრადი.

თეორიულ გამოკვლევებზე გაცილებით გვიან დაიწყო სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება. ამ მიმართულებით აუცილებლად უნდა

აღნიშნულ ს. ბელოცერკოვსკის შრომები აეროდინამიკაში, რომელიც საფუძველი გახდა დღეისათვის საკმაოდ კარგად ცნობილი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნის მეთოდისა - „დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის“.

აგრეთვე უნდა ვახსენოთ სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლებისადმი მიძღვნილ შრომებიდან ს, ბელოცერკოვსკის, ი. ლიფანოვის, მუსაევის, ჯ. სანიკიძის, ა. ჯიშკარიანის, მ. კუბლაშვილის, ბ. გაბდულხაევის, ი. ბოიკოვისა და სხვათა შრომები.

აღსანიშნავია, რომ ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდების განვითარება დაიწყო ძირითადად მეორე გვარის ფრედგოლმის განტოლებებზე. ასეთი განტოლებებისათვის აგებული იქნა რიცხვითი სქემები: ა) მაღალი რიგის სიზუსტის, საკმარისად ვიწრო კლასის, როცა საძებნი ფუნქციები ინტერპოლირდება სპეციალური მრავალწევრებით ან შესაბამისი ოპერატორების საკუთრივი ფუნქციებისგან შედგენილი მწკრივის კერძო ჯამებით. ბ) დაფუძნებული მართკუთხედის ტიპის ან ანალოგიური, საკმარისად ზოგადი, ტიპის ფორმულებზე.

პრობლემები წარმოიშვება სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის რიცხვითი ალგორითმების აგების დროს, რადგანაც სინგულარული ინტეგრალი ზოგადი აზრით განშლადია და გაიგება ე.წ. კომის მთავარი მნიშვნელობით.

სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოების თეორია არაა სამართლიანი, კერძოდ განვიხილოთ ფრედგოლმის განტოლება: $K\varphi = f$, სადაც K ფრედგოლმის ოპერატორია, f ცნობილი, ხოლო φ საძებნი ფუნქცია. დავუშვათ K ოპერატორისათვის ავაგეთ K_n მიახლოებითი ოპერატორი, ისეთი რომ, როდესაც $\|K - K_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, მაშინ როცა $K\varphi = f$ განტოლებას აქვე ერთადერთი ამონახსნი φ , $K_n\varphi_n = f_n$ განტოლებასაც გარკვეული n_0 -დან დაწყებული ექნება

ერთადერთი ამონახსნი φ_n და $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. ხოლო სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლების შემთხვევაში ანალოგიურად არ ხდება: ავიღოთ ზუსტი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება $S\varphi = f$, ხოლო აპროქსიმაციის შედეგად მიღებული მიახლოებითი განტოლება იყოს $S_n\varphi_n = f_n$. დავუშვათ, რომ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი φ და $\|S - S_n\| \rightarrow 0$, აქედან არ გამომდინარეობს, რომ $\|\varphi - \varphi_n\| \rightarrow 0$; ანუ კანტოროვიჩის ზოგადი მიახლოების თეორია სამართლიანი არ არის ამ შემთხვევაში და გამომდინარე აქედან სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებში ყოველ განტოლებას სჭირდება ინდივიდუალური შესწავლა. ამიტომ ასეთ დროს რთული ხდება მიახლოებითი პროცესების დაფუძნება.

საქვეყნოდ ცნობილია, რომ ბზარების ამოცანები მიეკუთვნება რთულ ამოცანებს რიცხვითი ამოხსნების თვალსაზრისით. საკმაოდ აქტუალურია ისეთი მეთოდების დამუშავება, რომლის საშუალებითაც ადვილად განისაზღვრება ძაბვების მნიშვნელობები ბზარების ბოლოების რაგინდ მცირე მიდამოში, რომელიც, საშუალებას იძლევა ბზარის შემდგომი გავრცელების მიმართულების პროგნოზირებაში. როგორც გამოკვლევებმა აჩვენა, ასეთი ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნებისთვის ეფექტური აღმოჩნდა სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი.

სწორედ ამ საკითხების შესწავლას ეხება სადისერტაციო ნაშრომი სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. კერძოდ ბზარების ამოცანებისათვის, შედგენილია მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები და მათი საშუალებით განხორციელებულია ამ ამოცანების კომპიუტერული რეალიზაცია.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია შევიმუშავოთ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმები სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანებისათვის და მოვახდინოთ მათი კომპიუტერული რეალიზაცია.

სადისერტაციო ნაშრომზე მუშაობისას გამოყენებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია, სამშენებლო, რღვევის მექანიკის და მიახლოებითი მეთოდების ზოგადი თეორიები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორია.

აგებულია და შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამით უზრუნველყოფილია სამშენებლო მექანიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით.

მიღებული შედეგების გამოყენება შესაძლებელია სამშენებლო მექანიკის, ჰიდროდინამიკის, არეოდინამიკის და რღვევის თეორიის ამოცანების გადასაწყვეტად. სადისერტაციო ნაშრომში აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის ალგორითმები შესაძლებელია გამოვიყენოთ მშენებლობის ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნისათვის, როგორცაა ბზარების ამოცანები.

შესავალში მოცემულია ნაშრომის საერთო დახასიათება: განხილულია პრობლემის აქტუალობა რასაც ეძღვნება ნაშრომი, პრობლემის ირგვლივ მიძღვნილი ნაშრომების მიმოხილვა, მეცნიერული სიახლე, პრაქტიკული ღირებულება და შედეგების რეალიზაცია, სამუშაოს აპრობაცია, ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა.

ნაშრომის პირველ თავში საუბარია წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის სხვადასხვა ავტორების და დისერტანტის მიერ დამუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმების შესახებ და მათი კრებადობის რიგის შეფასებებზე.

პირველი თავის §1.1-ში განხილულია ხარისხობრივი ტიპის განსაკუთრებულობების მქონე სიმკვრივიანი სინგულარული ინტეგრალის თვისებები.

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L)$$

სადაც $L \equiv ab$ გახსნილი გლუვი კონტურია a და b ბოლოებით, რომლის პარამეტრული განტოლებაა $t = t(s), (s_a \leq s \leq s_b)$. დადებით მიმართულებას ვიღებთ s პერიმეტრის ზრდის მიხედვით. c არის a ან b , $\eta = \lambda + i\beta$, ($0 \leq \lambda < 1$), $(t-c)^\lambda$ ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტოა.

პირველი თავის § 1.2-ში განხილულია ნებისმიერი გლუვი გახსნილი კონტურების მქონე სინგულარული ინტეგრალებისთვის ისეთი მაღალი რიგის სიზუსტის მიახლოებითი გამოთვლის სქემის აგება, რომელიც საშუალებას იძლევა ცდომილების თანაბარ შეფასებისას მთელ კონტურზე, ბოლოების ჩათვლით.

განხილულია შემდეგი ინტეგრალი

$$S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L (t-a)^\alpha (t-b)^\beta \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in L,$$

სადაც, $L = ab$ წარმოადგენს გლუვ, გახსნილ კონტურს α და β ბოლოებით, რომელიც კომპლექსურ სიბრტყეზე წარმოდგენილია პარამეტრული სახით $t = t(s) (s_a \leq s \leq s_b)$

$$\rho(t) = (t-a)^\alpha (t-b)^\beta$$

წონითი მრავალსახა ფუნქციაა. α და β პარამეტრებიდან ლებულობენ ერთ-ერთი მნიშვნელობას $\{1/2; -1/2\}$ სიმრავლიდან

$\rho(t)$ ამ მრავალსახა ფუნქციის ერთ-ერთი ფიქსირებული შტოა, ხოლო φ ნებისმიერი ფუნქციაა $H_\alpha^{(r)}(L)$ $r \geq 0, 1/2 < \alpha \leq 1$ კლასიდან.

მ. კუბლაშვილის მიერ ასეთი ინტეგრალებისათვის აგებულია მაღალი სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. დავუშვათ, რომ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, ხოლო m მუდმივად დაფიქსირებული

ნატურალური რიცხვია, $S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსახულებად მივიღოთ

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0) = L_v(\varphi;t_0) \cdot \delta^{(\alpha,\beta)}(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{p_{\sigma k}^{(\alpha,\beta)}}{t_0 - t_{\sigma k}} [L_v(\varphi;t_0) - \varphi(t_0)]$$

$$(t_0 \in \tau_v \tau_{v+1}; \quad t_0 \neq t_{\sigma k}; \quad v = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც

$$\delta^{(\alpha,\beta)}(t_0) = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta = -1/2 \\ 1, & \alpha = -\beta = 1/2 \\ t_0 & \alpha = \beta = 1/2 \end{cases}$$

$\tau_\sigma, t_{\sigma k}$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) L წარმოადგენს წირის კონტურზე კვანძით წერტილებს. $L_v(\varphi;t_0)$ – ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწირია, $t_{\nu k}$ ($\nu = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}$) კვანძით წერტილებზე.

$$p_{\sigma k}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} (t-a)^\alpha (t-b)^\beta \frac{\omega_\sigma(t) dt}{(t-t_{\sigma k}) \omega' \sigma(t_{\sigma k})}, \quad (\omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}), \quad (\alpha, \beta = \pm 1/2)).$$

$S_n^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ ჯამი $t_0 = t_{\sigma k}$ -წერტილებში კომპიუტერზე გამოსათვლელად უფრო მოსახერხებელი ფორმით შეიძლება ჩაიწეროს, რომლის დროსაც შესაძლებელია თავიდან აცილება მცირე სიდიდეებზე გაყოფისაგან, როცა t_0 პარამეტრის მნიშვნელობა ახლოს არის კვანძებთან.

$H_\alpha^{(r)}(L)$ ფუნქციათა კლასში $S^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ -ის აპროქსიმაცია შესაძლებელია შესაბამისი კვადრატული $S_n^{(\alpha,\beta)}(\varphi;t_0)$ ფორმულით, ნებისმიერ $t_0 \in ab$ (t_0 არ ემთხვევა a და b ბოლოებს) წერტილში ცდომილების

შეფასება მიღებულია $O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right)$ ($1/2 < \alpha \leq 1, r \geq 0$), მაგრამ ზოგიერთ

დამოკიდებულებაში, (ბზარების, გარსდენისა და პროფილის ამოცანებში) საჭირო ხდება ისეთი შეფასებების მიღება, რომელიც უფრო ზუსტად ასახავს მიახლოების პროცესს a და b ბოლოების მახლობლად.

სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევიდან გამომდინარე, წირის ბოლოების მახლობლად, ნებისმიერი $\varphi \in H_\alpha(L)$; $\alpha > 1/2$ -სათვის არსებობს $\lim_{t_0 \rightarrow c} S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$, სადაც c ემთხვევა a ან b -ს. ამასთან დაკავშირებით, $S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0)$ ინტეგრალის თანაბარი აპროქსიმაციის შესახებ საკითხი ისმება მთელ $L = ab$ წირზე, ბოლოების ჩათვლით.

ყოველი $t_0 \in ab$ -სთვის სამართლიანია შეფასება:

$$\left| S^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) - S_n^{(\alpha, \beta)}(\varphi; t_0) \right| \leq (A_1 + A_2 \ln n) \frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}} \quad (n > 1, \quad 1/2 < \alpha \leq 1),$$

სადაც A_1, A_2 მუდმივებია, რომლებიც დამოუკიდებელია t_0 -ზე.

პირველი თავის § 1.3-ში განხილულია ჯ. სანიკიძის და მ.კუბლაშვილის მიერ კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში გაუსის ტიპის სიზუსტის მახლობელი კვადრატურული ფორმულები. კერძოდ განხილულია კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1)$$

ინტეგრალისათვის აგებულია გაუსის ტიპის კვადრატურული ფორმულა t_k კვანძებით და $\{A_k\}$ კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1)$$

ნაგულისხმებია, რომ $\varphi(t)$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე. თუ $x \in (-1 < x < 1)$ მნიშვნელობები შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0,$$

მაშინ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის მოცემულ პირობებში სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt (-1 < x < 1):$$

კვადრატურულ ფორმულას ექნება შემდეგი სახე

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x} (-1 < x < 1),$$

მსგავსი სტრუქტურის კვადრატურული ფორმულები ლიტერატურაში ცნობილია სინგულარული ინტეგრალებისათვის გაუსის კვადრატურული ფორმულების სახელით, რომელიც ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრება მოცემული $\rho(t)$ -სათვის $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით.

პირველი თავის § 1.4-ში განხილულია ზ. კაპანაძის მიერ კოშის გულიანი ინტეგრალებისათვის მარკოვის ტიპის მომატებული რიგის სიზუსტის კვადრატურული ფორმულების აგება $n = 7$ კვანძისათვის. მოყვანილია ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულა მარკოვის კვანძებისათვის $t_k, k = 1, 2, \dots, 12$. მიღებულია 7 სინგულარობის წერტილი მარკოვის 12 კვანძისათვის $t_{0j}, j = 1, 2, \dots, 7$. მიღებულ წერტილებში სინგულარული ინტეგრალის დასათვლელად გამოყენებულია კვადრატურული ფორმულა

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{t-t_0} dt &\approx 2 \left\{ \frac{\phi(t_1)}{t_1-t_{0j}} + \frac{\phi(t_2)}{t_2-t_{0j}} + \dots + \frac{\phi(t_{12})}{t_{12}-t_{0j}} \right\} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{12} \frac{\phi(t_k)}{t_k - t_{0j}}, \quad j = 1, 2, \dots, 7 \end{aligned}$$

საკმაოდ მნიშვნელოვანია განხილული საკითხი, რადგან საშუალებას იძლევა აღნიშნული ტიპის სინგულარული ინტეგრალებისათვის ერთნაირი რიცხვითი კოეფიციენტებიანი კვადრატურული ფორმულების გამოყენებისა.

პირველი თავის § 1.5-ში დისერტანტის მიერ განხილულია, მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულა.

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0} \quad (-1 < x_0 < 1)$$

(იგულისხმება, რომ $\rho(t)$ - წონითი ფუნქციაა, აკმაყოფილებს სიგლუვის თვისებას, ამასთან, როცა $x_0 = t_k$, $\frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0}$ - ში იგულისხმება შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობა)

თუ x_0 -ის მნიშვნელობას $x_0 \in (-1, +1)$ შუალედიდან შევარჩევთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x_0} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x_0} = 0$$

$$n = 25$$

$$\{t_{0j}\} j = 1, 2, \dots, 12$$

მაშინ x_0 -ის ასეთი მნიშვნელობებისათვის სინგულარული ინტეგრალისთვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x_0} dx$$

მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) dt}{t - x_0} \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x_0}, \quad (-1 < x_0 < 1)$$

სადაც A_k - მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც შეესაბამება მარკოვის ტიპის კვადრატურულ ფორმულას. მოცემულ ნაშრომში აგებულია ახალი მაღალი სიზუსტის მქონე კვადრატურული ფორმულა, რომელიც აუმჯობესებს ყველა ადრე მიღებულ შედეგებს.

ნაშრომის II თავში ნაჩვენებია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა ტიპის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის), აერო და ჰიდრო დინამიკის, დირიხლეს (შესაბამისად გრეხის) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კოშის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

მეორე თავის § 2.1-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0)$$

პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამონახსნა, გახსნილი კონტურების დროს, სადაც $f(t)$, $K(t_0, t)$ $L \equiv ab$ -ზე განსაზღვრული ჰელდერის კლასის ფუნქციებია.

დავუშვათ, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამონახსნების გარკვეულ კლასში აქვს ერთადერთი ამონახსნი. მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში აგებულია ამ განტოლების ამოხსნის რიცხვითი ალგორითმი, რომელსაც აქვს კრებადობის საკმარისად მაღალი რიგი. შესაბამისი გამოთვლითი ალგორითმის აგება დაფუძნებულია §1.1-ში განხილული სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაციაზე.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგის საფუძველზე, სადაც დამტკიცებულია სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურებით კვადრატული პროცესების კრებადობა H_β მეტრიკით, შესაძლებელია შესაბამისი გამოთვლითი პროცესების დაფუძნება. გამოყენებული კვადრატურული პროცესები საშუალებას იძლევა საკმარისად ადვილად აიგოს შესაბამისი რეალური გამოთვლითი სქემები. გარდა ამისა, ამ სქემებს აქვს ის მნიშვნელოვანი თვისება, რომ K და f გულის და მარჯვენა

მხარის გამოთვლის ცდომილება, როცა $n \rightarrow \infty$ პრაქტიკულად იზრდება ძალიან ნელა.

მეორე თავის § 2.2-ში განხილულია

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L)$$

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როდესაც მისი ამონახსნი ცალსახად არ განისაზღვრება ან განტოლების ამოხსნადობისათვის f მარჯვენა მხარესთვის საჭიროა დამატებითი პირობა. ასეთი განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები.

§ 2.3-ში ანალოგიურად აიგება მიახლოებითი პროცესები სრული სახის პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლებისათვის.

მეორე თავის § 2.4-ში განხილულია ზ. კაპანაძის მიერ აგებული მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალის რიცხვითი ამოხსნა.

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L)$$

$f(t), K(t_0, t) \in H$. ინტეგრალური განტოლებისათვის გამოიყენება კვადრატურული ფორმულა

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^7 \frac{\phi(t_k)}{t_k - t_{0j}} + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^7 K(t_{0j}, t_k) \phi(t_k) = f(t_{0j})$$

სადაც $j=1,2,\dots,7$. აქ t_k და t_{0j} , $j=1,2,\dots,7$, $k=1,2,\dots,7$ §1.4-ში მოძებნილი კვანძითი და სინგულარობის წერტილებია. მიღებული კვადრატურული ფორმულიდან ჩანს განტოლებათა სისტემა 7 უცნობითა და შვიდი განტოლებით, რომელიც იხსნება ცალსახად.

მეორე თავის § 2.5-ში განხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურის შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამოხსნების განსახილველ კლასში აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში შესაძლებელია მივაღწიოთ კრებადობის საკმაოდ მაღალ რიგს.

სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულა. ამ ფორმულის კოეფიციენტებისა და კვანძების დასადგენად მიიღება საკმაოდ რთული განტოლებათა სისტემა. იხსნება აღნიშნული სისტემა და ვპოულობთ კვადრატული ფორმულის კოეფიციენტებს და კვანძებს. შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა „Mathematica” - სიმბოლურ ენაზე. ხდება აღნიშნული პროგრამის რეალიზაცია სხვადასხვა n - დაყოფათა რიცხვისთვის.

მიღებული შედეგები აჩვენებს, რომ მარკოვის ტიპის მუდმივკოეფიციენტის კვადრატული ფორმულა არის მაღალი რიგის სიზუსტის. გაუმჯობესებულია ზ. კაპანაძის მოყვანილი შედეგები.

მეორე თავის § 2.6-ში განხილულია სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული სქემებით.

განხილულია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} k(t_0; t) \varphi_0(t) dt = f(t_0)$$

აღნიშნული განტოლებისათვის, ნებისმიერი ინდექსის შემთხვევაში, აგებულია საკმაოდ გამარტივებული რიცხვითი ამოხსნის სქემა, რომელიც ინარჩუნებს სიზუსტის მაღალ რიგს.

ნაშრომის III თავში მოყვანილია სამშენებლო მექანიკის ძალზედ აქტუალური საკითხი, ბზარების ზოგიერთი ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. დასმულია და განხილულია ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა სხვადასხვა შემთხვევებისათვის.

§-3.1-ში განხილულია წრფივი ბზარის მქონე დრეკადი სიბრტყის დაძაბულ დეფორმირებული მდგომარეობა. კოშის ტიპის ინტეგრალების სახით წარმოდგენილია ძაბვის განაწილების და გადაადგილების ფუნქციები. ინტენსივობის კოეფიციენტების სათვლელი ფორმულები ზოგად შემთხვევაში მოცემულია ინტეგრალური სახით. შესწავლილია ზღვრულ-წონასწორული მდგომარეობა ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულებში. განსაზღვრულია გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, როდესაც ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე.ი. როცა იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. მოცემულია გამოსათვლელი ფორმულები ბზარის განვითარების საწყისი კუთხისა და ზღვრული ძაბვების მნიშვნელობებისათვის. მოყვანილია შესაბამისი დიაგრამები.

§-3.2-ში განხილულია უსასრულო სხეულზე სასრული სიგრძის ზოლის გასწვრივ თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. ცნობილია ბზარის ნაპირების გასწვრივ ტემპერატურის მნიშვნელობის ცვლილება, უნდა განისაზღვროს სხეულის ზედაპირის ნებისმიერ წერტილში ტემპერატურის ცვლილება. ამოცანა მიყვანილია პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე. მოყვანილია შესაბამისი რიცხვითი გამოთვლის ცხრილები, საიდანაც ჩანს, რომ განსაკუთრებული

წერტილებისათვის (ბზარის ბოლოების ძალიან მცირე მიდამოში) აღნიშნული მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმებით მიიღწევა მიახლოების საკმაოდ მაღალი სიზუსტე.

§-3.3-ში განხილულია დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. განხილულია უსასრულო სხეული, რომელიც გრძივი ძვრის დეფორმაციის პირობებშია, მოცემულია სასრული სიგრძის წრფივი ბზარი სხეულის ზედაპირზე, თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა მოქმედებს ბზარის ზედაპირზე, ხოლო ნულის ტოლია ძაბვა უსასრულობაში. საპოვნია სხეულის ზედაპირის ნებისამიერ წერტილში ძაბვების განაწილება, რომელიც გამოისახება წონიანი კომის ტიპის ინტეგრალებით, მოცემულია მიახლოების დათვლის ალგორითმები, შედგენილია ცხრილები, როდესაც კონკრეტული ფუნქციებით მოცემულია დატვირთვა ბზარის ნაპირზე.

§-3.4-ში განხილულია ბზარის ამოცანა, როდესაც ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი მოცემულია უსასრულო ფირფიტაზე, მასზე მოცემულია დატვირთვა, რომელიც სიმეტრიის პირობას აკმაყოფილებს. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე, შედგენილია ამ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები, დაწერილია შესაბამისი პაკეტის ტიპის კომპიუტერული პროგრამა და აგრეთვე მოყვანილია შესაბამისი გამოთვლის ცხრილები.

§-3.5-ში განხილულია უსასრულო ფირფიტაზე ნებისმიერად ორიენტირებული ბზარები, რომლის ამოხსნაც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე და ეს განტოლებები იხსნება მიახლოებით მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებით, ასევე განხილულია ამ ანტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული მაღალი სიზუსტის სქემებით.

§-3.6-ში განხილულია ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა, სადაც მოცემულია სასრული სიგრძის ბზარი დრეკად ნახევარ სიბრტყეში, რომელიც სიბრტყის საზღვრის მართობულია და თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა მოცემულია ბზარის ნაპირზე. მოცემული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{\tau - y} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} K(\tau, y) \varphi_0(\tau) d\tau = f(y), \quad |y| < 1 \quad (0.5)$$

სადაც

$$K(\tau, y) = \frac{y^2 + 6y + 4\tau y + 2\tau - \tau^2 + 4}{(\tau + y + 2)^3}$$

ხოლო $f(y)$ არის ბზარის ნაპირებზე მოდებული დატვირთვა. $K(\tau, y)$ გულს გარდა განსაკუთრებულობისა, $\tau = y = -1$ წერტილში აქვს უძრავი სინგულარობა. გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში აგებულია განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის დაფუძნებადი ალგორითმი. მოყვანილია კომპიუტერული გამოთვლების ცხრილები. ასევე განხილულია ბზარის ამოცანა, როდესაც ბზარის ნაპირზე ფიქსირებულ წერტილში მოდებულია შეყურსულილი ძალა. აღნიშნული ამოცანა მიყვანილია ანალოგიური ტიპის განტოლებაზე, ამიტომ მისი რიცხვითი ამოხსნისათვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ იგივე ალგორითმი, რაც წინა შემთხვევაში.

§-3.7-ში განხილულია რამდენიმე მნიშვნელოვანი პრქტიკული გამოყენებითი ტიპის ბზარის ამოცანა, რომლებიც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე.

რომელთა რიცხვითი ამოხსნისათვის ვიყენებთ წინა თავებში აგებულ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი გამოთვლის სქემებს.

I თავი

წონიანი სინგულარული ინტეგრალების მაღალი რიგის სიზუსტის აპროქსიმაციები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

1.1. წონიანი სინგულარული ინტეგრალის ყოფაქცევა ზოგად შემთხვევაში გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

განვიხილოთ სინგულარული ინტეგრალი

$$S(\varphi; t_0, \eta) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{(t-c)^\eta (t-t_0)} \quad (t_0 \in L) \quad (1.1.1)$$

სადაც $L \equiv ab$ გახსნილ გლუვი კონტურა a და b ბოლოებით, რომლის პარამეტრული განტოლებაა $t = t(s), (s_a \leq s \leq s_b)$. დადებითი მიმართულება აიღება s პერიმეტრის ზრდის მიხედვით. c არის a ან b , $\eta = \lambda + i\beta$, ($0 \leq \lambda < 1$), $(t-c)^\lambda$ ამ მრავალსახა ფუნქციის ნებისმიერი ფიქსირებული შტოა.

როგორც ცნობილია (იხ. [1], §22), რომ, როცა $\eta = \lambda + i\beta \neq 0$, მაშინ

$$S(\varphi; t_0, \eta) = \pm \frac{ctg\eta\pi}{2i} \frac{\varphi(c)}{(t_0 - c)^\eta} + \phi^*(t_0),$$

ასევე, თუ $\lambda = 0$, c წერტილის მიდამოში $\phi^*(t_0)$ ეკუთვნის H კლასს (აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას)

როდესაც $\lambda > 0$, მაშინ

$$\phi^*(t_0) = \frac{\phi^{**}(t_0)}{|t_0 - c|^{\lambda_0}}, \quad 0 < \lambda_0 < \lambda$$

$\phi^{**}(t_0)$ მიეკუთვნება H -ს c წერტილის მიდამოში, როცა $c=a$ აიღება ზედა ნიშანი, ხოლო როცა $c=b$, მაშინ ქვედა. ამ მსჯელობის შედეგად, როდესაც $\operatorname{Re} \eta \neq 0$, $S(\varphi; t_0, \eta)$, სინგულარული ინტეგრალი a ან b წერტილების მახლობლობაში შეიძლება იყოს შემოსაზღვრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როდესაც $\eta = 1/2 + i\beta$ (β -ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია). ასევე, საინტერესოა ეს შემთხვევა იმითაც, რომ წონიანი სინგულარული ინტეგრალები, წონით, რომელთაც გააჩნიათ კვადრატული ფესვის სახის განსაკუთრებულობები, ხშირ შემთხვევებში გვხვდება გამოყენებებში. ასეთი სახის ინტეგრალებზე მიიყვანება გახსნილ კონტურებიანი სინგულარული ინტეგრალების შებრუნების ფორმულები და სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ზოგადი თეორიიდან (იხ. [1] თავი V), წინასწარ განისაზღვრება ზოგადი სახის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნების სტრუქტურა ინტეგრების წირის ბოლოებში აღნიშნული ტიპის განსაკუთრებულობებით.

თავის მხრივ, განტოლებების ეს კლასი ძალზედ მნიშვნელოვანია იმითაც, რომ მათზე მიიყვანება ძალიან ბევრი მნიშვნელოვანი გამოყენებითი ტიპის პრაქტიკული ამოცანა (იხ. [1-2], [3], [4]).

1.2. მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი მიახლოებების სქემები

განხილულია ინტეგრალი ბელოცერკოვსკი-ლიფანოვის დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის შესახებ გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \approx \varphi(t_0) + \sum_{\sigma=1}^n (P_{\nu+2\sigma-1} + P_{\nu+2\sigma+1}) \frac{\varphi(\tau_{\nu+2\sigma+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{\nu+2\sigma+1} - t_0}$$

მიახლოება იმ პირობით, რომ $t_0 \in \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$ ($t_0 \neq \tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$),

სადაც

$$P_{\nu+2\mu-1} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+2\mu-1}}^{\tau_{\nu+2\mu+1}} l_{\nu\mu}^{(0)}(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\nu+2\mu-1}}^{\tau_{\nu+2\mu+1}} l_{\nu\mu}^{(1)}(t) d(t),$$

$$\text{ამასთან, } l_{\nu\mu}^{(0)}(t) = \frac{t - \tau_{\nu+2\mu+1}}{\tau_{\nu+2\mu-1} - \tau_{\nu+2\mu+1}}, l_{\nu\mu}^{(1)}(t) = \frac{t - \tau_{\nu+2\mu-1}}{\tau_{\nu+2\mu+1} - \tau_{\nu+2\mu-1}}$$

აქ ν ინდექსი შეესაბამება იმ ნომერს, რომლისთვისაც t_0 პარამეტრის მოცემული მნიშვნელობა მოთავსებულია $\tau_{\nu-1}, \tau_{\nu+1}$ რკალში.

საიდანაც ჩანს თუ $\varphi(t)$ ფუნქციას L -ზე გააჩნია მეორე რიგის შემოსაზღვრული წარმოებული, მაშინ აღნიშნული კვადრატურული ფორმულით მიახლოება იძლევა კრებადობის $O(n^{-2} \ln n)$ რიგს.

მიუხედავად იმისა, რომ აღნიშნულია მეთოდი - დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდი, საკმაოდ ცნობილია მსოფლიოში და ფართოდ გამოიყენება (განსაკუთრებით თვითმფინავმშენებლობაში), მას გააჩნია უარყოფითი მხარე - დაბალი კრებადობის რიგის სახით, არ იძლევა საშუალებას ბზარის ბოლო წერტილებში თანაბარი შეფასების და სიზუსტის დაბალი რიგი აქვს.

მურმან კუბლაშვილმა განიხილა ინტეგრალი

$$S^{(\nu;\delta)}(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} (t-a)^\nu (t-b)^\delta \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}, (\nu, \delta \in \{\pm 1/2\})$$

მსჯელობის გამარტივებისთვის და მეტი სიზუსტისთვის ამ პარაგრაფში მიმოვიხილავთ შემდეგი სახის ინტეგრალების აპროქსიმაციის საკითხებს:

$$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \quad (t_0 \in ab, t_0 \neq a, b) \quad (1.2.1)$$

სინგულარული ინტეგრალების აპროქსიმაციისათვის ქვემოთ მოყვანილ კვადრატულ ფორმულებში, კვანძითი წერტილების სისტემის აგება ხდება

ისევე, როგორც გართულებული კვადრატული ფორმულების აგების შემთხვევაში შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციისთვის.

ვთქვათ n -ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და შუალედი წერტილებით $[a, b]$ გაყოფილია ტოლ ნაწილად

$$s_\sigma = a + \frac{b-a}{n}(\sigma-1), \sigma = 1, 2, \dots, n+1.$$

შემდგომ ფიქსირებული m ნატურალური რიცხვისთვის ყოველი $[s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ სეგმენტი წერტილებით გაყოფილია ნაწილებად

$$s_{\sigma k} = s_\sigma + h \cdot x_k \quad \left(h = \frac{b-a}{n} \right), k = 1, 2, \dots, m,$$

სადაც $\{x_k\}_{k=1}^m \subset [0, 1]$ შუალედიდან აღებული მოცემული წერტილთა სისტემა არის. შემდგომში ჩავთვალოთ რომ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ რიცხვები გადანომრილია ზრდის მიხედვით.

$$\text{აღვნიშნოთ } \tau_\sigma = t(s_\sigma), \quad t_{\sigma k} = t(s_{\sigma k}) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

σ, ν -ნებისმიერია $1, 2, \dots, n$ რიცხვებიდან და t_0 წერტილი განსხვავებულია $t_{\sigma k}$ კვანძებისგან, განვიხილოთ გამოსახულება

$$\Psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0} \cdot \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0-t_{\sigma k}} \cdot L_\nu(\varphi; t_0),$$

სადაც

$$L_\nu(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi(t_{\nu k_0}), \quad l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t-t_{\sigma k}) \omega'_\sigma(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t-t_{\sigma k}),$$

ხოლო φ, L -ზე მოცემული ჰელდერის კლასის ფუნქცია ($\varphi \in H$).

შევნიშნოთ, რომ $\Psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$ გამოსახულებას შეიძლება მიენიჭოს

გარკვეული აზრი, როცა $t_0 = t_{\sigma k}$ (ამ შემთხვევაში უნდა ვიგულისხმოთ რომ $t_0 \rightarrow t_{\sigma k}$). მართლაც, ჩავთვალოთ, რომ ნატურალური ν რიცხვი ყოველთვის შერჩეულია ისე, რომ მოცემული t_0 -ისათვის აღმოჩნდეს $t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}$. ჩანს, რომ $t_0 - t_{\sigma k_1} = 0$ ($1 \leq k_1 \leq m$) შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $\sigma = \nu, \nu \pm 1$ (და თუ ერთდროულად $x_1 > 0, x_m < 1$, როცა $\sigma = \nu$). ადვილად შეიძლება წარმოვადგინოთ, რომ, მაგალითად $\sigma = \nu$ -სათვის შესაბამისი გამოსახულება

$$L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\nu k_1})$$

$\Psi_{\nu\nu}(\varphi; t, t_0)$ -ში ნაშთის გარეშე $t_0 - t_{\nu k_1}$ ($t_0 \neq t_{\nu k_1}$)-ზე. ანალოგიურ გარემოება არის მაშინაც, როცა $\sigma = \nu - 1, \sigma = \nu + 1$ (თუ შესაბამისად $x_1 = 0, x_m = 1$).

აღვნიშნოთ ეხლა

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0), t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}, t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$$

$$\sigma = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, n.$$

მოყვანილი შენიშვნის გათვალისწინებით $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$ გამოსახულება განსაზღვრული არის ნებისმიერი $t, t_0 \in L$ მნიშვნელობისათვის. ასევე ნათელია $\Phi_n(\varphi; t, t_0)$ -ის შემდეგი სტრუქტურული წარმოდგენა

$$\Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t_0) + (t - t_0)H_n(\varphi; t, t_0),$$

სადაც

$$H_n(\varphi; t, t_0) = \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \cdot \frac{L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_0 - t_{\sigma k}}, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$$

$$t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, \sigma, \nu = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$(H_n(\varphi; t, t_{\sigma k_1}) = \lim_{t_0 \rightarrow t_{\sigma k_1}} H_n(\varphi; t, t_0)),$$

ყოველი k_1 -სთვის ($1 \leq k_1 \leq m$).

მ. კუბლაშვილმა ინტეგრალი $S^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)$ ჩაანაცვლა $S_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0)$

-ით

$$S_n^{(1/2;-1/2)}(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{\Phi_n(\varphi; t, t_0) dt}{t-t_0} = \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} H_n(\varphi; t, t_0) dt \quad (1.2.2)$$

მიახლოებითი ფორმულის მისაღებად გამოყენებულია ტოლობა

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \cdot \frac{dt}{t-t_0} = 1$$

რომელიც ადვილად მტკიცდება, კოშის თეორემისა და პლემელი–სოხოცკის ფორმულების გამოყენებით [1]).

(1.2.2) გამოსახულების მარჯვენა მხარე წარმოდგენილია

$$P_{\sigma k}^{(1/2;-1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} J_{\sigma k}(t) dt, (\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$$

რიცხვებით და φ ფუნქციის მნიშვნელობებით $t_{\sigma k}$ კვანძებში.

როგორც მსჯელობებიდან ჩანს (1.2.1) ინტეგრალს აზრი აქვს, როცა $t_0 \rightarrow c$ (c -არის a ან b), თუ φ აკმაყოფილებს ab წირზე (a და b ბოლოების ჩათვლით) ჰელდერის პირობას $1/2$ -ზე მეტი მაჩვენებლით. ეს გარემოება არსებით მნიშვნელობას წარმოადგენს იმ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, რომლებიც (1.2.3) ტიპის ინტეგრალებს შეიცავს. ყოველივე აქედან გამომდინარე, განსახილველი ინტეგრალი $t_0 = a, b$ წერტილებში კუბლაშვილმა განმარტა როგორც შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობები, მიღებული იქნა შეფასებები რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი $t_0 \in ab$, თვით a და b ბოლოების ჩათვლით. ეს უკანასკნელი გარემოება ეფექტურად გამოიყენება შესაბამისი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის.

ვიტყვი, რომ $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$, თუ φ ფუნქცია უწყვეტია მოცემულ L (გლუვ) კონტურზე თავის წარმოებულბთან ერთად r რიგამდე ჩათვლით, ამასთან r -ური რიგის წარმოებული $\varphi^{(r)} \in H$, α ($0 < \alpha \leq 1$) მაჩვენებლით. როდესაც $r = 0$ $H_\alpha^{(0)}(L)$ ($1/2 < \alpha \leq 1$) - ის ნაცვლად ჩაიწერება $H_\alpha(L)$.

თავიდანვე აღვნიშნოთ ცნობილი მტკიცებულებებიდან გამომდინარე ([1], § 18-22) თუ $\varphi \in H_\alpha(L)$ ($1/2 < \alpha \leq 1$) მაშინ

$$S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) \in H.$$

ნებისმიერი $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$ ($1/2 < \alpha \leq 1$, $r \leq m$)-სთვის შეიძლება ნაჩვენები იქნას, რომ სამართლიანია შეფასება

$$\left| S^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) - S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) \right| \leq \frac{C_m \ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}, \quad (n > 1) \quad (1.2.3)$$

სადაც C_m მუდმივი დამოკიდებულია მხოლოდ $L \equiv ab$ კონტურზე, $\{x_k\}_{k=1}^m$ კვანძებზე და $\varphi^{(r)}$ ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

მარტივად აღსაქმელად დაწვრილებით განვიხილოთ $r = 0$ შემთხვევა. ვთქვათ

$$t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1} \quad (\sigma \neq \nu, \sigma \neq \nu \pm 1), \text{ განვიხილოთ}$$

$$\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0) = \varphi(t) - \left\{ \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_{\sigma k} - t_0} \varphi(t_{\sigma k}) + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} L_\nu(\varphi; t_0) \right\}.$$

ლაგრანჟის საინტერპოლაციო პოლინომის თვისების გათვალისწინებით,

$$\sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t-t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} = -1 + \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \quad (1.2.4)$$

ნებისმიერი t და $t_0 \neq t_{\sigma k}$ -თვის შეიძლება ვაჩვენოთ

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0) &= \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} [\varphi(t) - \varphi(t_0)] + \left[1 - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right] \times \\ &\times L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0 + \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} [\varphi(t) - \varphi(t_{\sigma k})] \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$(t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}, t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1} \sigma \neq \nu, \sigma \neq \nu \pm 1),$$

$$L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0 = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) [\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_0)] = \sum_{k_0=1}^m l_{\nu k_0}(t_0) \varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_0).$$

თუ $\sigma = \nu$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) - \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) (t - t_0) \sum_{\substack{k_0=1 \\ k_0 \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k_0}}^m (t - t_{\nu j}) \frac{\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})}{\omega'_\nu(t_{\nu k_0})} \\ & \quad (1.2.6) \end{aligned}$$

$$(t, t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}).$$

(1.2.6)-ის ანალოგიური $\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0)$ -სათვის გვექნება, როცა $\sigma = \nu \pm 1$.

(1.2.5) და (1.2.6) -ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \Phi_n(\varphi; t, t_0)}{t - t_0} dt = \\ & \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left\{ \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} + L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0 \right\} \left[1 - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_\sigma(t_0)} \right] \frac{1}{t - t_0} + \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_{\sigma k} - t_0} \} dt + (1.2.7)$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\nu \tau_{\nu+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left\{ \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} - \sum_{k=1}^m l_{\sigma k}(t) \sum_{\substack{k_0=1 \\ k_0 \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k_0}}^m (t - t_{\nu j}) \frac{\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})}{\omega'_\nu(t_{\nu k_0})} \right\} dt + \int_{\tau_{\nu-1} \tau_\nu} + \int_{\tau_{\nu+1} \tau_{\nu+2}}$$

სადაც ბოლო ორი ინტეგრალი გამოსახულებით იგივეა, როგორც (1.2.5)-ში ინტეგრალი $\tau_\nu, \tau_{\nu+1}$ რკალზე.

შევაფასოთ (1.2.5) გამოსახულება, პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ, როცა $t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}, t \in \tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}, \sigma \neq \nu, \sigma \neq \nu \pm 1$ სამართლიანია

$$\max_{t \in \tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_{\sigma+1}(t_0)} \right| \cdot |\varphi(t) - \varphi(t_0)| = O(n^{-\alpha}), \quad (1.2.8)$$

ამასთან მარჯვენა მუდმივი ნაწილში შეიძლება ავიღოთ t_0 σ და ν -ზე დამოუკიდებელი.

ნებისმიერი $\nu, t \in \tau_\sigma, \tau_{\sigma+1} (\sigma \neq \nu \pm 1, \nu)$ და $k (1 \leq k \leq m)$ -სთვის,

$$\max_{t, \sigma} |\omega_\sigma(t)| = O(n^{-m}), \quad \min_{t_0 \in \tau_\nu, \tau_{\nu+1}} |t_0 - t_{\sigma k}| > qn^{-1},$$

სადაც $q > 0$ მუდმივი არაა დამოკიდებული σ და ν -ზე. გარდა ამისა,

$$\max_{t_0, t} \left| \frac{t - t_0}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| = \max_{t_0, t} \left| 1 + \frac{t_{\sigma k} - t}{t_0 - t_{\sigma k}} \right| = O(1)$$

თანაბრად ν და σ -ს მიმართ. აქედან მიიღება შეფასება

$$\max_{t \in \tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}} \left| \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_{\sigma+1}(t_0)} \right| \cdot |\varphi(t) - \varphi(t_0)| = O(n^{-\alpha}),$$

რომლის გამოყენებით, $\varphi \in H_\alpha(L)$ ის ძალით მიიღება (1.2.8), საიდანაც ადვილად მიიღება

$$\max_{t_0 \in \tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}} \left| \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma, \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} [\varphi(t) - \varphi(t_0)] \frac{dt}{t-t_0} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1/2}}\right), \quad (n > 1, 1/2 < \alpha \leq 1).$$

შემდგომ ისევ გამოვიყენოთ $\varphi \in H_\alpha(L)$ პირობა (და L -ის გლუობა) მიიღება:

$$\max_{\substack{t_0 \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1} \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}} \left| \sum_{\sigma=1}^n L_\nu(\varphi - \varphi(t_0)); t_0 \right| \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[1 - \frac{\omega_\sigma(t)}{\omega_{\sigma+1}(t_0)} \right] \frac{dt}{t-t_0} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1/2}}\right), (n > 1, 1/2 < \alpha \leq 1).$$

გარდა ამისა როგორც ელემენტარული შეფასებებიდან ჩანს:

$$\left| \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \sum_{k=1}^m \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} l_{\sigma k}(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(t_{\sigma k})}{t_{\sigma k} - t_0} dt \right| = O\left(\frac{1}{n^{1/2+\alpha}}\right) \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu \pm 1, \nu}}^n \frac{1}{|t_{\sigma k} - t_0|} = O\left(\frac{\ln n}{n^{\alpha-1/2}}\right) (1/2 < \alpha \leq 1)$$

თანაბრად t_0 და ν -ს მიმართ შემდეგ, ისევ $\varphi \in H_\alpha(L)$ -ის ძალით და $L = ab - b$

გლუვობიდან გამომდინარე

$$\left| \int_{\tau_\nu \tau_{\nu+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} dt \right| \leq O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\right).$$

ასევე სამართლიანია შეფასება

$$\max_{t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}} \left| \sum_{k=1}^m P_{\nu k} \sum_{\substack{k_0=1 \\ k_0 \neq k}}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k_0}}^m (t_0 - t_{\nu j}) \frac{\varphi(t_{\nu k_0}) - \varphi(t_{\nu k})}{\omega_\nu(t_{\nu k})} \right| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\right).$$

ანალოგიურად მოხდება შეფასება (1.2.5) გამოსახულებაში ინტეგრალების რომლებიც შეესაბამებიან $\tau_{\nu-1} \tau_\nu, \tau_{\nu+1} \tau_{\nu+2}$ რკალებს. მიღებული შეფასებების გაერთიანებით და ვრწმუნდებით (1.2.3) -ს სამართლიანობაში როდესაც $r = 0$.

როდესაც $r \geq 1$ შესაბამისი შეფასებების მიღება შესაძლებელია თუ გამოყენებული იქნება $\varphi(t)$ ტეილორის მწკრივად გაშლა, როდესაც $\sigma = \nu \neq 1, \nu$ t_0 -წერტილის მიდამოში, ნაშთითი წევრის ინტეგრალური ფორმით, ხოლო როცა $\sigma \neq \nu \pm 1, \nu$ ფორმულით (σ -ს შესაბამისი მნიშვნელობისათვის)

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t-t_0) \sum_{j=0}^{r-1} \frac{(t-t_0)^j}{j!(t_0-t)^{j+1}} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0-u)^j \varphi^{(j+1)}(u) du + \frac{t-t_0}{(r-1)!} \frac{(t-t_\sigma)^r}{(t_0-t_\sigma)^{r+1}} \int_{\tau_\sigma t_0} (t_0-u)^{r-1} \varphi^{(r)}(u) du - \frac{t-t_0}{(r-1)!} \left\{ \int_{\tau_\sigma t} \frac{(t-\tau)^r + (t-\tau)^{r-1}(t_0-\tau)}{(t_0-\tau)^2} \varphi^{(r)}(\tau) d\tau - (r+1) \int_{\tau_\sigma t} \frac{(t-\tau)^2 d\tau}{(t_0-\tau)^{r+2}} \int_{\pi_0} (t_0-u)^{r-1} \varphi^{(r)}(u) du \right\},$$

რომლის სამართლიანობაში ადვილად დარწმუნების საშუალებას იძლევა ნაწილობრივი ინტეგრება. ასევე უნდა გამოვიყენოთ $\rho(t) - \Phi_n(\rho; t; t_0) = 0$ ტოლობა, რომელიც სრულდება ნებისმიერი t, t_0 -სთვის როცა $\rho(t)$ ნებისმიერი პოლინომია, ხარისხით $\leq m$. ტოლობის სამართლიანობა უშუალოდაც მოწმდება.

აღვნიშნოთ, რომ $S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ გამოსახულება შეიცავს φ ფუნქციის მნიშვნელობას t_0 ცვლად წერტილში, ამიტომ თვით ამ გამოსახულების სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელოვად მიღება არამიზანშეწონილია. ამგვარად ამ თვალსაზრისით სავსებით მისაღებია მიახლოებითი ფორმულა

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} \approx S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0), \quad t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

სადაც

$$S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = L_\nu(\varphi; t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \lambda_n(\varphi; t; t_0) dt,$$

ნათელია, რომ $t_{\nu k}$ კვანძებში S_n და S_n^* ემთხვევიან ერთმანეთს. შემდეგ როგორც ადვილად შევამჩნევთ,

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right|$$

გამოსახულებისათვის, φ -ს შესაბამის დაშვებებში სამართლიანი (1.2.3)-სახის შეფასება.

ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცება, რომ ნებისმიერი $\varphi \in H_\alpha^{(r)}(L)$ ($1/2 < \alpha \leq 1$, $r \leq m$)-სთვის სამართლიანია შეფასებები

$$\left| S^{(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{*(-1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right)$$

და

$$\left| S^{(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) - S_n^{*(1/2; 1/2)}(\varphi; t_0) \right| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-1/2}}\right).$$

ამოვწეროთ $S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ -ის გამოსახულების სახე გაშლილი ფორმით

(ვიგულისხმობთ, რომ $x_1 = 0$ და $x_m = 1$)

$$\begin{aligned} S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) = & \left[1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - p_{\nu j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) \quad (1.1.10) \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} d_{\nu k} &= \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{\nu j} - t_{\nu j_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{\nu k} - t_{\nu j_0})}, & p_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}}^{\sqrt{t-a}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt \\ p_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} &= \begin{cases} p_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + p_{\sigma-1 m}^{(1/2; -1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ p_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad \kappa = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n)$$

აღნიშული მსჯელობიდან გამომდინარე

$$\max_{t_0 \in ab} \left| S_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq M_0 \max_{t \in ab} |\varphi(t)| + M_1 \max_{\sigma, \kappa} |\varphi(t_{\sigma\kappa})| n^{1/2} \ln n \quad (1.2.11)$$

$$\max_{t_0 \in ab} \left| S_n^{*(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) \right| \leq M_2 \max_{\sigma, \kappa} |\varphi(t_{\sigma\kappa})| n^{1/2} \ln n \quad (n > 1)$$

სადაც M_0, M_1, M_2 – რაიმე მუდმივებია.

ანალოგიურად შედგება $S_n^{*(-1/2;-1/2)}(\varphi; t_0), S_n^{*(1/2;1/2)}(\varphi; t_0)$

კვადრატურული ფორმულების შესაბამისი გამოსახულებები:

$$S_n^{*(-1/2;-1/2)}(\varphi; t_0) = \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - p_{\nu j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}) \quad (1.2.12)$$

$$S_n^{*(1/2;1/2)}(\varphi; t_0) = \left[t_{\nu j} + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{\kappa=1}^m \frac{P_{\sigma\kappa}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma\kappa}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} - p_{\nu j}^{*(1/2;1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] \varphi(t_{\nu j}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(1/2;1/2)}}{t_{\nu j} - t_{\nu k}} \varphi(t_{\nu k}) + p_{\nu j}^{*(1/2;1/2)} \sum_{k=1}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \varphi(t_{\nu k}), \quad (1.2.13)$$

სადაც

$$d_{\nu k} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{\nu j} - t_{\nu j_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{\nu k} - t_{\nu j_0})}, \quad p_{\sigma\kappa}^{*(-1/2;-1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$p_{\sigma\kappa}^{*(1/2;1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma\kappa}^{*(-1/2;-1/2)} = \begin{cases} p_{\sigma 1}^{*(-1/2;-1/2)} + p_{\sigma-1 m}^{*(-1/2;-1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ p_{\sigma\kappa}^{*(-1/2;-1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$P_{\sigma\kappa}^{*(1/2;1/2)} = \begin{cases} p_{\sigma 1}^{*(1/2;1/2)} + p_{\sigma-1 m}^{*(1/2;1/2)} & \sigma = 1, 2, 3, \dots, n; \\ p_{\sigma\kappa}^{*(1/2;1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; \quad \kappa = 1, 2, \dots, m), \quad (t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; \quad \nu = 1, 2, \dots, n)$$

აღსანიშნავია, რომ S_n^* ჯამები მიდის ერთიან გამოთვლით სქემამდე $t_0 \in L \equiv ab$ პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის (კერძოდ, t_0 როცა რაგინდ ახლოს არის $L = ab$ წირის კვანძით წერტილებთან და a და b ბოლოებთან). მათი გამოყენება პრაქტიკულ გამოთვლებში მოსახერხებელია.

მოცემულია მურმან კუბლაშვილის მიერ აგებული სინგულარული ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლის ცხრილები, აგებული (1.2.10), (1.2.12), (1.2.13) კვადრატურული ფორმულების გამოყენებით, განსაკუთრებულ $t_0 = \pm 1$ (ბოლო) წერტილებში, როდესაც ინტეგრების წირი ნამდვილი $[-1; 1]$ მონაკვეთია. ამ შუალედის n სხვადასხვა დაყოფათა რიცხვისათვის (შიგა დაყოფები ყოველთვის ფიქსირებულია $m = 4$). ხოლო სიმკვრივე $\varphi(t) = t^2$, თავის მხრივ, ასეთი წერტილები არსებით როლს თამაშობს მექანიკის პრაქტიკულ გამოყენებითი ტიპის ამოცანებში. მაგალითად, ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნების დროს საჭიროა დაითვალოს ინტენსივობის კოეფიციენტი ამ წერტილებში, რომლის საშუალებითაც თავის მხრივ განისაზღვრება ბზარის გავრცელების შემდგომი მიმართულება [3].

ცხრილი 1

n	t_0	$S^{(1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$S_n^{*(1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$R_n^{(1/2; -1/2)} = S - S_n^*$
5	-1	-0,5	-0,496551	-0,003449
	1	1,5	1,48621	0,01379
10	-1	-0,5	-0,499256	-0,00074424
	1	1,5	1,49405	0,0059532
30	-1	-0,5	-0,499962	-0,0000380375
	1	1,5	1,49893	0,00106505
50	-1	-0,5	-0,49999	-0,0000101642

	1	1,5	1,49951	0,00048789
--	---	-----	---------	------------

ცხრილი 2

n	t_0	$S^{(-1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$S_n^{*(-1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$R_n^{(-1/2; -1/2)} = S - S_n$
5	-1	-1	-0,99233	-0,00766977
	1	1	0,969321	0,0306791
10	-1	-1	-0,997012	-0,00298762
	1	1	0,976099	0,023901
30	-1	-1	-0,999507	-0,000492854
	1	1	0,9862	0,0137999
50	-1	-1	-0,999777	-0,000222581
	1	1	0,989316	0,0106839

ცხრილი 3

n	t_0	$S^{(-1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$S_n^{*(-1/2; -1/2)}(t^2; t_0)$	$R_n^{(-1/2; -1/2)} = S - S_n$
5	-1	-1,5	-1,49471	-0,00529483
	1	1,5	1,47882	0,0211793
10	-1	-1,5	-1,4987	-0,00129719
	1	1,5	1,48962	0,0103775
30	-1	-1,5	-1,49993	-0,000073049
	1	1,5	1,49795	0,00204537
50	-1	-1,5	-1,49998	-0,0000198499
	1	1,5	1,49905	0,000952797

როგორც ცხრილებიდან ჩანს (1.2.10), (1.2.12), (1.2.13)-ის სიზუსტე იზრდება n -ის ზრდასთან ერთად და $n = 50$ -ზე აღწევს 10^{-4} -ს.

**1.3 ჯ.სანიკიძის და მ. კუბლაშვილის მიერ აგებული გაუსის ტიპის
რიცხვითი სქემები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში წონიანი
სინგულარული ინტეგრალებისათვის**

მთელი რიგი გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების ამოხსნისას ასეთი ინტეგრალების გამოყენების შესაძლებლობამ საშუალება მისცა როგორც მათემატიკოს-მკვლევარებს, ისე გამოყენებლებს ასეთი ინტეგრალისათვის ეფექტური კვადრატურული ფორმულების აგებისა და კვლევისადმი. მსგავს ფორმულებთან მუშაობისას წარმოიშვება ჩვეულებრივ ინტეგრალთან დაკავშირებული ანალოგიური საკითხები სპეციფიკურ საკითხებთან ერთად, რომლებიც რაღაც ოდენობით მაინც განპირობებულია განსახილველი ამოცანის ამა თუ იმ სპეციფიკით. მათ განეკუთვნება, ინტეგრების წირის ბოლოების მახლობლობაში კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის შეფასების საკითხები, ინტეგრების ინტერვალზე სინგულარული ინტეგრალისათვის სინგულარობის წერტილების განლაგების მიხედვით კონკრეტული კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის საკითხები და ა.შ.

წამოჭრილი საკითხის მეტად ცხადად აღსაქმელად განხილულია ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1) \quad (1.3.1)$$

წონითი ფუნქციით $\rho(t)$ რომელიც ზოგადაა შემთხვევაში აკმაყოფილებს წონითი ფუნქციებისათვის მიღებულ პირობებს (მაგ. იხ. [5]), ხოლო $\varphi(t)$ ეკუთვნის გლუვი ფუნქციების ამა თუ იმ კლასს, რომლებიც განსახილველი

$x \in [-1; +1]$ შუალედზე უზრუნველყოფენ მოცემული ინტეგრალის არსებობას.

(1.3.1) ინტეგრალისათვის სანიკიძე-კუბლაშვილის მიერ განხილულია გაუსის კვადრატურული ფუნქცია t_k კვანძებით და $\{A_k\}$ კოეფიციენტებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1) \quad (1.3.2)$$

$\varphi(t)$ -ს გააჩნია შესაბამისი სიგლუვე, როცა $t_k = x$ (1.3.2)-ე გამოსახულებაში იგულისხმება შესაბამისი ზღვარი.

როდესაც $\varphi(t)$ წარმოადგენს $\leq 2n$ მრავალწევრს, ნათელია ნებისმიერი $x \in (-1; +1)$ -ისათვის მოცემული კვადრატურული ფორმულა, არის ზუსტი, ხოლო თუ $x \in (-1 < x < 1)$ მნიშვნელობები (1.3.2)-ში შერჩეულია ისე, რომ ამ უკანასკნელისათვის შესრულდეს ტოლობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x} = 0, \quad (1.3.3)$$

მაშინ x -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის (1.3.3)-ე პირობით შემდეგი სინგულარული ინტეგრალისათვის

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \quad (-1 < x < 1):$$

იქნება კვადრატურული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x} \quad (-1 < x < 1), \quad (1.3.4)$$

ზუსტია $x (x \neq t_k)$ მნიშვნელობებისათვის, როცა $\varphi(t)$ არის $\leq 2n$ ხარისხის ნებისმიერი მრავალწევრი. როგორც ცნობილია (იხ. [6]), სინგულარობის x წერტილების სიმრავლე, რომლების დროსაც (1.3.4)-ეში მიიღწევა სიზუსტის

უმადლესი ალგებრული ხარისხი, შედგება $(n-1)$ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} მნიშვნელობებისაგან, რომლებიც შეადგენენ ე. წ. მეორე რიგის ფუნქციის ნულებს (იხ.[3], [7]). შესაბამისად, ამგვარი სტრუქტურის კვადრატული ფორმულები - ლიტერატურაში ცნობილი სინგულარული ინტეგრალისათვის გაუსის კვადრატული ფორმულების სახელწოდებით, განისაზღვრება სავსებით ერთმნიშვნელოვნად მოცემული $\rho(t)$ -სათვის $\{x_k\}_{k=1}^{n-1}$ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებით. აქედან გამომდინარე x სინგულარობის პარამეტრის იმ მნიშვნელობების რაოდენობა, რომელთა დროსაც მიიღწევა (1.3.4)-ე კვადრატული ფორმულების უმადლესი ალგებრული სიზუსტე, მკაცრად შეზღუდულია.

გამომდინარე ყოველივე აქედან იმ კვადრატული ფორმულების პრაქტიკული ეფექტურობის გათვალისწინებით, რომლებსაც გააჩნიათ სიზუსტის ასე თუ ისე მაღალი ხარისხი, ნაცადია რაღაც ოდენობით სინგულარობის ასეთი წერტილების x რაოდენობის გაზრდა, რაც მე- (1.3.4) სახის ფორმულებთან მიმართებაში შესაძლოა განხორციელებული იქნას ასეთი ფორმულების სიზუსტის შედარებით დაწვევის ხარჯზე, მაგრამ ისე კი, რომ შესაბამის კვადრატულ ფორმულებს გააჩნდეთ სიზუსტის მნიშვნელოვნად უფრო მაღალი ხარისხი, ვიდრე გაცილებით ხშირად გამოყენებად (ანდა მათთან მიახლოებულ) ინტერპოლაციური სიზუსტის ფორმულებს. $(\sqrt{1-t^2})^{-1}$ ჩებიშევისკის წონის შემთხვევაში, ზოგიერთი ასეთი კერძო სახის ფორმულა მოყვანილია [8]-ში. მოცემულ შემთხვევაში ამ საკითხის შემდგომი განხილვა მდგომარეობს x -ის მთელი რიგი სხვა, ზემოთ მითითებული $\{x_v\}_{v=1}^{n-1}$ მნიშვნელობების პოვნაში, რაც გამოიხატება (1.3.3)-ის მარცხენა ნაწილში გამოსახულების გათანაბრებით განსაზღვრულად შერჩეულ, n -ზე დამოკიდებულ რიცხვთან, რომელიც მიისწრაფის ნულისაკენ სათანადო სიჩქარით, როცა $n \rightarrow \infty$. ამასთანავე $r = 2n$ შემთხვევა შეესაბამება [6]-ში მოცემულ კვადრატულ ფორმულას ჩებიშევის წონიანი სინგულარული ინტეგრალისათვის.

რიცხვითი მაგალითების სახით მოცემულია (1.3.4) კვადრატული ფორმულით ჩატარებული გამოთვლების რამდენიმე შედეგი ჩებიშევის წონიანი ფუნქციის $p(t) = (\sqrt{1-t^2})^{-1}$ შემთხვევაში r -ის განსხვავებული მნიშვნელობების დროს. ამასთან დაკავშირებით პირველ რიგში აღვნიშნოთ, რომ $r = 2n$ შემთხვევაში, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, მურმან კუბლაშვილმა და ჯემალ სანიკიძემ აჩვენა შესაბამისი შედეგები მნიშვნელოვანი სიზუსტით ემთხვევიან მოსალოდნელ შედეგებს [6]-დან. ხოლო მიღებული შედეგები $2n-1, 2n-2, 2n-3$ -ს დროს, იძლევა x სინგულარობის საძიებო წერტილების მიახლოებით მნიშვნელობას, რომლებიც განსხვავდება [6]-დან მიღებულისაგან და ამასთან ერთად მათი ანალოგიური თვისებების მატარებელიცაა სიზუსტის უფრო მაღალი ხარისხის მიღწევის თვალსაზრისით, ვიდრე სიზუსტის ინტერპოლაციური ხარისხის კვადრატული ფორმულების შემთხვევაში. მოცემულია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტის ზოგიერთი შედეგი, შედარებისათვის ზემოთ მოხსენიებულ [6]-ში რიცხვითი მონაცემების გათვალისწინებით, რომლებიც განეკუთვნება (1.3.4)-ე ცნობილ კვადრატულ ფორმულას სინგულარობის x პარამეტრის მნიშვნელობებისათვის

$$\{x = 0.951057\}, \{x = -0.951057\}, \{x = 0.809017\},$$

$$\{x = -0.809017\}, \{x = -0.587785\}, \{x = 0.587785\},$$

$$\{x = 0.309017\}, \{x = -0.309017\}, \{x = 0\}.$$

ეს უკანასკნელი შეესაბამება ზემოთ მოყვანილ შედეგს უკვე მოხსენიებული ნაშრომიდან [6]. ხოლო ქვედა ცხრილში მოცემული შედეგები შეესაბამება r პარამეტრის ოთხ სხვადასხვა მნიშვნელობას,

რომლების დროსაც მიიღწევა გაუსის სიზუსტესთან თანმიმდევრულად მიახლოებული მნიშვნელობები, რომლებიც განსაზღვრულია პირობებით:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t-x} - \sum_{k=1}^n A_k \frac{A_k}{t_k - x} = O\left(\frac{1}{(2n)^r}\right): \quad (1.3.5)$$

$$r = 2n$$

$$\{x = 0.951051\}, \{x = -0.951166\}, \{x = 0.808964\},$$

$$\{x = -0.809508\}, \{x = 0.58757\}, \{x = -0.588612\}, \{x = -0.308519\},$$

$$\{x = -0.309959\}, \{x = -0.000796391\}, \{x = -0.000796391\}$$

$$r = 2n - 1$$

$$\{x = 0.951278\}, \{x = -0.9464\}, \{x = 0.811053\}, \{x = -0.789402\},$$

$$\{x = 0.595877\}, \{x = -0.556487\}, \{x = 0.327475\},$$

$$\{x = -0.274258\}, \{x = 0.0292467\}, \{x = 0.0292467\}$$

$$r = 2n - 2$$

$$\{x = 0.951503\}, \{x = -0.940935\}, \{x = 0.813065\}, \{x = -0.771394\},$$

$$\{x = 0.603542\}, \{x = -0.531103\}, \{x = 0.343939\},$$

$$\{x = -0.246632\}, \{x = 0.0535829\}, \{x = -0.0535829\}$$

$$r = 2n - 3$$

$$\{x = 0.951725\}, \{x = -0.935098\}, \{x = 0.815002\}, \{x = -0.757817\},$$

$$\{x = 0.610537\}, \{x = -0.513714\}, \{x = 0.35771\},$$

$$\{x = -0.227433\}, \{x = 0.0719113\}, \{x = -0.0719113\}.$$

$r = 2n$ -ის შესაბამისი შედეგები, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, მნიშვნელოვნად უახლოვდება [8]-ში მიღებულ შედეგებს, სადაც შესაბამისი

სხვაობის მარცხენა ნაწილი გათანაბრებულია $o\left(\frac{1}{(2n)^r}\right)$ -ს ნაცვლად ნულთან.

როგორც რიცხვითი ექსპერიმენტიდან სანიკიმე-კუბლაშვილმა [9] ცხადყო, რომ r -ის მნიშვნელობის თანდათანობითი შემცირებისას მოცემულ საზღვრებში აღებულია კვადრატურულ ფორმულებს რამდენადმე შემცირებული, მაგრამ მაინც გაუსის სიზუსტისადმი მიახლოებული სიზუსტით.

ზემოთ განხილული მიდგომის გამოყენებისას ანალოგიური სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების ასაგებად, მოცემული და სხვა სახის წონითი ფუნქციებით, რამდენადმე გაფართოებულია სინგულარობის იმ წერტილების მნიშვნელობების სიმრავლეს (მოცემულ აღნიშვნებში x - წერტილები, რომლებითაც მიიღწევა კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების სიზუსტის გარკვეულწილად მაღალი ალგებრული ხარისხი.

ნათელია, გარკვეულწილად გართულებულია საკითხი r პარამეტრის მნიშვნელობების რამდენადმე ოპტიმალური შერჩევის თაობაზე შესაბამისი კვადრატურული ფორმულების სიზუსტესთან მიმართებაში. ამით, ძალიან არსებითია გამოთვლითი ექსპერიმენტის როლი, (1.3.4) სახის სინგულარული ინტეგრალების ყველაზე უფრო ეფექტური სიზუსტის ფორმულების აგების მიზნით. ამასთან დაკავშირებით კიდევ ერთხელ უნდა აღინიშნოს მომატებული სიზუსტის სინგულარული ინტეგრალებისათვის კვადრატურული ფორმულების გამოყენების ცნობილი ეფექტურობა იმ ამოცანების რიცხობრივ ამოხსნით, რომლებიც დაკავშირებულია კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალების შემცველი ინტეგრალური განტოლებების გადაწყვეტის საკითხთან.

1.4 ზ. კაპანაძის მიერ აგებული გაუსის ტიპის რიცხვითი სქემები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის

მარკოვმა განიხილა და შეისწავლა (50) სახის კვადრატული ფორმულები, რომლებიც ზუსტია $\leq 2m$ ხარისხის მრავალწევრებისათვის. გარდა ამ ფორმულებისა, მარკოვმა ააგო და შეისწავლა შემდეგი სახის კვადრატული ფორმულები:

$$\int_{-1}^{+1} F(x)\varphi(x)dx = k \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \varphi(x_i) - \sum_{i=m+2}^{2m+1} \varphi(x_i) \right\},$$

რომლებიც ზუსტია $\leq 2m+1$ ხარისხის ნებისმიერი $\varphi(x)$ მრავალწევრისა და $F(x)$ ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\int_{-1}^{+1} F(x)dx \neq 0.$$

$F(x)=1$ -სათვის ნებისმიერი m -თვის არსებობენ მარკოვის ფორმულები. განხილულა მარკოვის კვადრატული ფორმულები მხოლოდ როდესაც $F(x)=1$.

მარკოვის კვადრატული ფორმულების მისაღებად $F(x)=1$ -თვის საერთო ფორმულიდან დაშვებულია ამ ფორმულაში, რომ $a=0, h=1, t_\beta=1, n=1, t_0=0, A_0=A, A_\nu=(-1)^{r+\nu} A (\nu=1,2,\dots,r),$

სადაც A – ჯერ კიდევ უცნობი მუდმივაა.

ამრიგად, მიღებულია კვადრატული ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = (-1)^r 2A \left\{ f(0) + \sum_{\nu=1}^r (-1)^\nu [f(t_\nu) + f(-t_\nu)] \right\} + 2 \int_0^1 tP(t)f(\pm t, 0, \dots, \pm t_r)dt$$

რიცხვები $t_\nu (\nu = 1, 2, \dots, r)$ და კოეფიციენტი A აკმაყოფილებენ განტოლებების ალგებრულ სისტემას:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \frac{P_0(t)}{P_0(0)} dt &= (-1)^r A, \\ \int_0^1 \frac{t P_\nu(t)}{t_\nu P_\nu(t)} dt &= (-1)^{r+\nu} 2A, \end{aligned} \right\} \quad (1.4.1)$$

სადაც ν ღებულობს მნიშვნელობებს $1, 2, \dots, r$

მიღებული ტოლობების შეჯამებისას, ჩანს

$$(-1)^r A \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^r (-1)^\nu \right\} = 1.$$

ანუ $A = 1$. რჩება $t_\nu (\nu = 1, 2, \dots, r)$ რიცხვების განსაზღვრისათვის ამოხსნილია ერთობლივად განსხვავებული განტოლებების r , რომელიც აღებულია სისტემიდან (1.4.1).

მაგალითისათვის $r = 1$. აქ $T_0 = 0$, ხოლო t_1 -თვის აღებულია განტოლების ფესვი

$$\int_0^1 t^2 dt = 2t_1^2.$$

ამგვარად, ჩანს, რომ $t_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ და, ამის შესაბამისად, მარკოვის ფორმულას

მიიღებს სახეს

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2 \left\{ f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\} + 2 \int_0^1 t^2 \left(t^2 - \frac{1}{6}\right) f\left(\pm t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) dt.$$

t -ს შეცვლისას $-t$ -ზე მიღებული ფორმულის ნაშთითი წევრისათვის ნაპოვნია შემდეგ გამოსახულება:

$$2 \int_{-1}^0 t^2 \left(t^2 - \frac{1}{6}\right) f\left(\pm t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}}\right) dt.$$

ნაწილობითი ინტეგრების დახმარებით მისი მნიშვნელოვნად გამარტივებაა შესაძლებელი, რისთვისაც განხილულია ფუნქცია

$$Q(t) = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{6} \right) dt,$$

რომელიც არ უდრის ნულს $(-1,0)$ მონაკვეთის შიგნით. იქნება:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^0 t^2 \left(t^2 - \frac{1}{6} \right) f \left(\pm t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) dt &= \int_{-1}^0 \left[f \left(t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) - f \left(-t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right] dQ = \\ &= - \int_{-1}^0 Q(t) \left\{ f \left(t, t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + f \left(-t, -t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\} dt, \end{aligned}$$

რადგანაც $Q(-1) = 0$. გამოყენებულია საშუალო მნიშვნელობის თეორემა, რაც აჩვენებს, რომ

$$\int_{-1}^0 Q(t) \left\{ f \left(t, t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + f \left(-t, -t, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\} dt = 2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^0 Q(t) dt.$$

მიღებულია კვლავ ნაწილობითი ინტეგრებისას:

$$\int_{-1}^0 Q(t) dt = - \int_{-1}^0 t^2 \left(t^2 - \frac{1}{6} \right) dt = - \frac{13}{90}$$

საბოლოოდ ნაპოვნია მოცემული ფორმულის ნაშთით წევრი $\frac{13}{1080} f^{(4)}(\xi)$.

როდესაც $r = 2$ და t_1 და t_2 განტოლებების ფესვებია,

$$\int_0^1 (t^2 - t_1^2) dt = 2t_2^2(t_2^2 - t_1^2),$$

$$\int_0^1 (t^2 - t_2^2) dt = -2t_1^2(t_1^2 - t_2^2),$$

მიღებულია მარკოვის მიერ ნაპოვნი ფორმულა.

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = 2 \left\{ f\left(\sqrt{\frac{23}{60}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{23}{60}}\right) - f\left(\sqrt{\frac{13}{60}}\right) - f\left(-\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + f(0) \right\} + \frac{3821}{36075600} f^{(7)}(\zeta),$$

როგორც ბოლო ფორმულიდან ჩანს მარკოვმა შეძლო თავის კვადრატული ფორმულის აგება $n = 4$ კვანძისათვის, (1.4.1) სისტემის ამოხსნას $r = 2$ - შემთხვევისათვის. რთული არაწრფივი განტოლებათა სისტემა მიიღება როდესაც $r > 2$, რომლის ამოხსნაც მან ვერ შეძლო. როგორც ზ. კაპანაძის თეორიულმა და კომპიუტერულმა კვლევებმა აჩვენა, აღნიშნულ შემთხვევაში კვანძები თითქმის ერთმანეთს ემთხვევა (ერთიდაიგივე დაგროვების წერტილი აქვს). ცნობილია, ორი არსებითი პრობლემა წარმოიშვება ასეთი სისტემების ამოხსნის დროს: 1) ეს არის ფესვების იზოლირება. 2) ამ ფესვების მიახლოებითი პოვნა. უნდა აღინიშნოს, რომ პირველი პრობლემის გადაჭრა ძალიან რთულია და ზოგჯერ შეუძლებელიც მითუმეტეს ისეთი სისტემებისთვის, როგორიცაა (1.4.1).

თანამედროვე კომპიუტერების გამოყენებით ზ. კაპანაძემ შეძლო ამ პრობლემის დაძლევა. $r = 3$ -ის შემთხვევაში (1.4.1) სისტემის ამოხსნით მიიღო 12 კვანძი, რომელიც აუმჯობესებს მ. კუბლაშვილისა და ჯ. სანიკიძის შედეგს [9]. აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ ზ. კაპანაძემ ააგო მარკოვის ტიპის ანალოგიური კვადრატული ფორმულა სინგულარული ინტეგრალისათვის.

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ მნიშვნელოვანია სინგულარული ინტეგრალისათვის ისეთი კვადრატული ფორმულების აგება და გამოყენება, რომლებიც შეიცავენ ერთნაირ რიცხვით კოეფიციენტებს [4].

განხილულია სინგულარული ინტეგრალი

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \quad (1.4.2)$$

სადაც $\varphi(t) \in H$. ეს ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \varphi(t_0) \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t-t_0} \quad (1.4.3)$$

(1.4.3)-ში პირველი შესაკრები სუსტი განსაკუთრებულობის ინტეგრალია.

$$\left| \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt \right| \leq \int_{-1}^{+1} \frac{C|t-t_0|^\alpha}{|t-t_0|} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{C}{|t-t_0|^{1-\alpha}} dt \quad (1.4.4)$$

ამიტომ შეიძლება მისი შეცვლა მარკოვის კვადრატურული ფორმულით

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt &\approx 2 \left\{ \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} + \frac{\varphi(-t_1) - \varphi(t_0)}{-t_1 - t_0} - \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_0)}{t_2 - t_0} - \frac{\varphi(-t_2) - \varphi(t_0)}{-t_2 - t_0} + \right. \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(-t_n) - \varphi(t_0)}{-t_n - t_0} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(0) - \varphi(t_0)}{t_0} \left. \right\} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_0)}{t_k - t_0} + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^{n-1} \frac{\varphi(-t_k) - \varphi(t_0)}{-t_k - t_0} + (-1)^{n-1} \frac{\varphi(0) - \varphi(t_0)}{t_0}, \\ &t_0 \in (-1; 1). \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

აქ t_k , $k=1, \dots, n$ მნიშვნელობებს ნაპოვნია (1.4.1) სისტემიდან. ზ. კაპანაძის შემთხვევაში $r=3$, $v=1, 2, 3$. მიღებულია:

$$\begin{aligned} v=1; & \int_0^1 t^2 (t^3 - t_2^3)(t^3 - t_3^3) = 2t_1^2 (t_1^3 - t_2^3)(t_1^3 - t_3^3) \\ v=2; & \int_0^1 t^2 (t^3 - t_1^3)(t^3 - t_3^3) = 2t_2^2 (t_2^3 - t_1^3)(t_2^3 - t_3^3) \\ v=3; & \int_0^1 t^2 (t^3 - t_1^3)(t^3 - t_2^3) = 2t_3^2 (t_3^3 - t_1^3)(t_3^3 - t_2^3) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

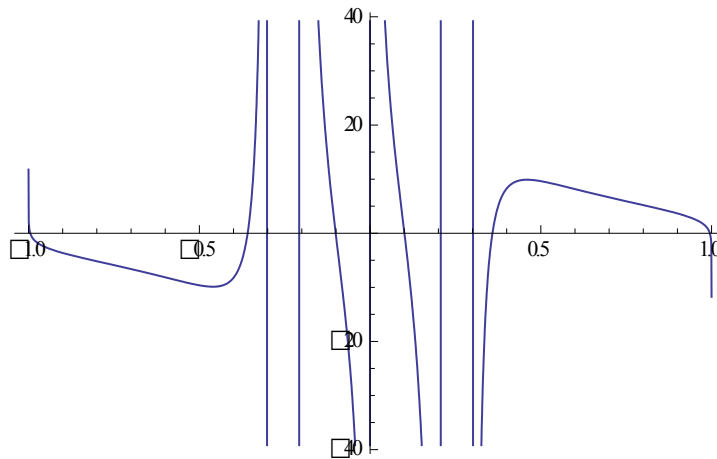
ეს არაწრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემაა t_1, t_2, t_3 ცვლადების მიმართ, რომელსაც შესაძლებელია ქონდეს როგორც ნამდვილი ასევე კომპლექსური ამონახსნები. (1.4.6)-ის ამოხსნა განხორციელებულია კომპიუტერის საშუალებით პროგრამული პაკეტი „Mathematika“-ს გამოყენებით, რის შედეგადაც აღმოჩნდა, რომ (1.4.6) განტოლებათა სისტემას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში გააჩნია 12 ამონახსნი (ფესვი). ესეიგი მიღებულია t_k , $k=1, 2, \dots, 12$ მნიშვნელობები. საინტერესოა როგორც

მიღებული $t_k, k=1, 2, \dots, 12$ მნიშვნელობები, ასევე მათი ნოლის მიმართ სიმეტრიული წერტილები და თვით $t=0$ წერტილი. ესეიგი სულ მიღებულია 25 კვანძითი წერტილი. თუ კლებადობის მიხედვით დალაგებულ $t_k, k=1, 2, \dots, 12$ -ის მნიშვნელობებს შევიტანთ შემდეგ განტოლებაში

$$\ln \frac{1-t_0}{1+t_0} - 2 \left\{ \frac{1}{-t_1-t_0} + \frac{1}{t_1-t_0} - \frac{1}{-t_2-t_0} - \frac{1}{t_2-t_0} + \dots + \right. \quad (1.4.7)$$

$$\left. (-1)^{n-1} \frac{1}{-t_n-t_0} + (-1)^{n-1} \frac{1}{t_n-t_0} + (-1)^n \frac{1}{t_0} \right\} = 0, \quad t_0 \in (-1, +1).$$

და ამოვხსნით ამ განტოლებას t_0 ცვლადის მიმართ, მივიღებთ სინგულარობის წერტილების მნიშვნელობებს. (1.4.7) განტოლების ამოხსნა განახორციელდა პროგრამული პაკეტი „Mathematika“-ს გამოყენებით, გრაფიკულად, რის შედეგადაც აღმოჩნდა, რომ მას $t_0 \in (-1, +1)$ არეში გააჩნია შვიდე ფესვი (იხილეთ ნახაზი-1).



(ნახ.-1)

უნდა აღინიშნოს, t_0 ფესვების მოძებნა მოხერხდა მხოლოდ მას შემდეგ, რაც (1.4.6) განტოლებისათვის განახორციელდა ამონახსნის მოძებნა 22 ნიშნის სიზუსტით. ეს კი განპირობებული იყო იქედან, რომ (1.4.6) არაწრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ამონახსნის მიმართ დაგროვების წერტილები, რის შესახებაც მსჯელობის დასაწყისში იყო საუბარი.

ამრიგად როდესაც $r = 3$, მოიძებნა 25 კვანძითი $t_k, k = 1, 2, \dots, 25$ წერტილი და შესაბამისი 7 სინგულარობის $t_{0j}, j = 1, 2, \dots, 7$ წერტილი. მაშასადამე, მოცემული (1.4.2) განტოლებისთვის კაპანაძემ დაწერა შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} \approx 2 \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{\varphi(t_k)}{t_k - t_{0j}} + \frac{\varphi(-t_k)}{-t_k - t_{0j}} \right) + 2 \frac{\varphi(0)}{-t_{0j}}, \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

და შეძლო მიახლოებით გამოეთვალა მოცემული სინგულარული ინტეგრალი სინგულარობის 7 წერტილისათვის. ქვემოთ მოცემულია $t_k, k = 1, 2, \dots, 12$ და $t_{0j}, j = 1, 2, \dots, 7$ -ის მნიშვნელობები:

$t_1 = 0.8748906074186820253805$	
$t_2 = 0.8748906074186820253766$	
$t_3 = 0.8748906074186820184239$	
$t_4 = 0.8748906074186820145221$	$t_{01} = -0.994987$
$t_5 = 0.7779343185075440422565$	$t_{02} = -0.358476$
$t_6 = 0.7779343185075439912877$	$t_{03} = -0.100635$
$t_7 = 0.7277150731016115605432$	$t_{04} = 0$
$t_8 = 0.7277150731016114968030$	$t_{05} = 0.994987$
$t_9 = 0.3017517031835172963083$	$t_{06} = 0.358476$
$t_{10} = 0.3017517031835172156894$	$t_{07} = 0.100635$
$t_{11} = 0.2068648544348662732937$	
$t_{12} = 0.2068648544348662732845$	

1.5 მარკოვის ტიპის მაღალი სიზუსტის კვადრატურული ფორმულები

წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი

კონტურებისათვის

როგორც ცნობილია [1], [2], [10] ძალიან ბევრი გამოყენებითი პრაქტიკული ტიპის ამოცანები (მათ შორის სამშენებლო) მიიყვანება გახსნილი კონტურების შემცველ სინგულარულ ინტეგრარულ განტოლებებზე. ინჟინრებისათვის ასეთი განტოლების ზუსტი ამონახსნები ძალიან ძნელია, ამიტომ დგება საკითხი მათი რიცხვითი ამოხსნების მეთოდების დამუშავების შესახებ. ბუნებრივია რომ უპირველესი საკითხია თვითონ ამ განტოლებაში შემავალი სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა გარკვეული ტიპის კვადრატული ფორმულებით.

კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალის მიახლოებით გამოთვლებს მიძღვნილი აქვს მრავალი ნაშრომი. განსაკუთრებით ძალიან ბევრი ცნობილი მეცნიერის (იხ. [10-11]) ნაშრომები მიძღვნილია თუ როგორი ყოფაქცევა და შეფასება მიიღება კვადრატული ფორმულებისა ინტეგრების წირის ბოლოების მახლობლობაში, რასაც უდიდესი მნიშვნელობა აქვს ასეთი სინგულარული ინტეგრალის შემცველი სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნების შესწავლაში.

განვიხილოთ შემდეგი სახის სინგულარული ინტეგრალი:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} dt \quad (-1 < x_0 < 1) \quad (1.5.1)$$

სადაც, $\rho(t)$ წონიანი ფუნქციაა. $\varphi(t)$ - ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს გარკვეულ თვისებებს (იხ. მაგ. [1]), იმისათვის, რომ არსებობდეს (1.5.1) ინტეგრარული კოშის მთავარი მნიშვნელობით. იხ.[1]. ასეთი ინტეგრალისთვის განვიხილოთ მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულა. იხ. [12]

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) - \varphi(x_0)}{t - x_0} dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0} \quad (-1 < x_0 < 1)$$

(1.5.2)

(იგულისხმება, რომ $\rho(t)$ - წონითი ფუნქციაა, აკმაყოფილებს სიგლუვის თვისებას, ამასთან, როცა $x_0 = t_k$, $\frac{\varphi(t_k) - \varphi(x_0)}{t_k - x_0}$ - ში იგულისხმება შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობა)

თუ x_0 - ის მნიშვნელობას $x_0 \in (-1, +1)$ შუალედიდან შევარჩევთ ისე, რომ სრულდებოდეს პირობა

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{dt}{t - x_0} - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{t_k - x_0} = 0$$

(1.5.3)

მაშინ x_0 -ის ასეთი მნიშვნელობებისათვის სინგულარული ინტეგრალისთვის $\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t)}{t - x_0} dx$ მივიღებთ შემდეგ კვადრატურულ ფორმულას:

$$\int_{-1}^{+1} \rho(t) \frac{\varphi(t) dt}{t - x_0} \approx \sum_{k=1}^n A_k \frac{\varphi(t_k)}{t_k - x_0}, \quad (-1 < x_0 < 1)$$

სადაც A_k - მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც შეესაბამება მარკოვის ტიპის კვადრატურულ ფორმულას. ასეთი ტიპის კვადრატურული ფორმულების აგებას მრავალი შრომები აქვს მიძღვნილი (იხ. [12-9]). მოცემულ ნაშრომში აგებულია ახალი მაღალი სიზუსტის მქონე კვადრატურული ფორმულა, რომელიც აუმჯობესებს ყველა ადრე მიღებულ შედეგებს [67].

$$\int_0^1 t P_\nu(t) dt = (-1)^{z+\nu} t_\nu P_\nu(t_\nu)$$

$$z = 4$$

$$\int_0^1 t P_\nu(t) dt = 2 * (-1)^{4+\nu} t_\nu P_\nu(t_\nu)$$

$$\nu = 1; \int_0^1 t^2 (t^4 - t_2^4)(t^4 - t_3^4)(t^4 - t_4^4) dt = -2 t_1^2 (t_1^4 - t_2^4)(t_1^4 - t_3^4)(t_1^4 - t_4^4)$$

$$v = 2; \int_0^1 t^2(t^4 - t_1^4)(t^4 - t_3^4)(t^4 - t_4^4)dt = 2t_2^2(t_2^4 - t_1^4)(t_2^4 - t_3^4)(t_2^4 - t_4^4)$$

$$v = 3; \int_0^1 t^2(t^4 - t_1^4)(t^4 - t_2^4)(t^4 - t_4^4)dt = -2t_3^2(t_3^4 - t_1^4)(t_3^4 - t_2^4)(t_3^4 - t_4^4)$$

$$v = 4; \int_0^1 t^2(t^4 - t_1^4)(t^4 - t_2^4)(t^4 - t_3^4)dt = 2t_4^2(t_4^4 - t_1^4)(t_4^4 - t_2^4)(t_4^4 - t_3^4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x = t_1^4; \quad y = t_2^4; \quad z = t_3^4; \quad v = t_4^4$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - y)(t^4 - z)(t^4 - v)dt = -2 * \sqrt{x}(x - y)(x - z)(x - v)$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - x)(t^4 - z)(t^4 - v)dt = 2\sqrt{y}(y - x)(y - z)(y - v)$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - x)(t^4 - y)(t^4 - v)dt = -2 * \sqrt{z}(z - x)(z - y)(z - v)$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - x)(t^4 - y)(t^4 - z)dt = 2 * \sqrt{v}(v - x)(v - y)(v - z)$$

ამ სისტემის ამოხსნის შემდეგ ვღებულობთ

$$n = 25$$

$$\{t_{0j}\} j = 1, 2, \dots, 12$$

II თავი

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი
ამოხსნები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში

II თავში საუბარია I თავში აგებული მიახლოებითი ფორმულების გამოყენება ერთი კლასის ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის. ამ კლასის განტოლებებზე მიიყვანება სხვადასხვა ტიპის გამოყენებითი (მათ შორის სამშენებლო მექანიკის), დირიხლეს (შესაბამისად გრეხის) და დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებები იწერება კომის გულიან სინგულარულ ინტეგრალებში.

§2.1. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნების სხვადასხვა ავტორების მიერ (მიმოხილვა)

განხილვა პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (t_0 \in L) \quad (2.2.1)$$

გახსნილი კონტურების შემთხვევაში რიცხვითი ამოხსნის საკითხები გარკვეულ დაშვებებში საძებნი ამონახსნის ფუნქციათა კლასის მიმართ. ამგვარ განტოლებებზე მიიყვანება ისეთი მნიშვნელოვანი ამოცანები, როგორცაა, მაგალითად, დირიხლეს ამოცანა სიბრტყეზე ბზარების ([13] §107) შემთხვევაში, სიბრტყის ტემპერატურული სტაციონარული ამოცანა, ნებისმიერად განლაგებული ბზარების შემთხვევაში ([2], თ.VII), ასევე დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები.

მრავალ ავტორს განხილული აქვს სხვადასხვა სქემები ასეთი განტოლებების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, მათ შორის, უფრო რთული შემთხვევების დროს, როდესაც განტოლებას უარყოფითი ინდექსი აქვს. ამ მხრივ განსაკუთრებით ა. ჯიშკარიანის [14-15], ი. ლიფანოვის [17-18], ბ. მუსაევის [20-23] შედეგები. მ. ლავრენტიევის, ა. კალანდიას, ი. ეფრემოვის შედეგების მიმოხილვა განხილულია [24] შრომაში. [25], [26], [18-19]

შრომებში მოცემულია (2.2.1) სახის განტოლებებისათვის, დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდის დაფუძნება.

[27,28,29,] შრომებში სხვადასხვა მეთოდებია განხილული ასეთი განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნებისას.

აღნიშნულ შრომებში, როგორც წესი, განხილულია გარკვეული შეზღუდვები პირველი გვარის სინგულარული განტოლებების გულისა და ინტეგრალების წირის მიმართ. ნამდვილი ღერძის მონაკვეთი აღებულია ინტეგრების წირად. პრინციპულად შესაძლებელია ნებისმიერი კონტურის შემთხვევაში განტოლების გარდაქმნა მონაკვეთის შემცველ განტოლებაზე, მაგრამ ხშირად არასასურველია, განსაკუთრებით ისეთ განტოლებებში, რომლებიც პრაქტიკულ ამოცანებს უკავშირდება (იხ. მაგ. [3]). ასეთი გარდაქმნები ხშირად საკმაოდ რთულია, რადგანაც გამოყენებებში (მაგალითად, ბზარების თეორიის ამოცანებში) უფრო ხშირად იძულებულნი ვართ გამოვიყენოთ გარკვეული საწყისი მონაცემები. მეორე მნიშვნელოვანი საკითხია გამოთვლილი სქემების კრებადობის სისწრაფე.

მოცემულ პარაგრაფში განხილულია სქემა, რომელიც გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურების შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

გარკვეულ დაშვებებში მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ მოცემულ განტოლების მიმართ, შესაძლებელია კრებადობის საკმარისად მაღალ რიგის მიღწევა.

ამ პარაგრაფში მოყვანილი შედეგის საფუძველზე, რომელშიც ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურებით მტკიცდება, H_β მეტრიკით კვადრატული პროცესების კრებადობა, შესაძლებელია გამოთვლითი პროცესების დაფუძნება. ამასთან გამოყენებული კვადრატული პროცესებიდან შეიძლება საკმარისად ადვილად აიგოს შესაბამისი რეალური გამოთვლითი სქემები.

ჩავთვალოთ, რომ (2.2.1) განტოლებაში $L \equiv ab$ გახსნილი გლუვი კონტურია, რომელსაც ჩავთვლით, რომ პარამეტრული სახითაა მოცემული $t = t(s)$ ($s_a \leq s \leq s_b$), $K(t_0, t)$ და $f(t)$ L -ზე მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას (იხ. [1]).

სამეზნია (2.2.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია a ბოლოზე და შემოუსაზღვრელია b -ზე. როგორც ცნობილია (იხ. [1] § 86) ასეთ ამონახსნს, აქვს შემდეგი სახე

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t),$$

სადაც, K და f -ზე ზემოთ მოთხოვნილ დაშვებებში, ფუნქცია L -ზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას.

თუ შევაბრუნებთ მახასიათებელ ნაწილს, მიღებული განტოლება შეიძლება მიყვანილ იქნას (იხ. [30] § 42)

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{t_1 - b}{t_1 - t_0} \frac{k(t_1, t)}{t_1 - t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt \quad (2.13)$$

შემდეგში ეს უკანასკნელი განტოლება განხილული იქნება, როგორც ოპერატიული განტოლება, გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში. ამასთან დაკავშირებით ის ჩაიწერება

$$K^0 \varphi = I\varphi + k\varphi = f_0(t_0), \quad (2.2.3)$$

სადაც

$$K\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt$$

$$f_0(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \frac{f(t) dt}{t-t_0}$$

I ერთეულოვანი ოპერატორია. ჩანს რომ განტოლების თავისუფალი წევრი და გული სინგულარული ინტეგრალია

$$(k\varphi)(t_0; t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt$$

ინტეგრალურ ოპერატორში გული

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} dt_1$$

შეცვალოთ ჩვენ მიერ აგებული კვადრატული ფორმულით, მივიღებთ:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t_1 - b}{t_1 - a}} \frac{K(t_1; t)}{t_1 - t_0} = L_n \left[(S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right], \quad t_0 \in ab,$$

სადაც

$$L_n \left[(S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right] = L_{nj} \left[(S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right], \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$L_{nj} \left[(S_n^{(1/2; -1/2)} K); t_0, t \right] = \sum_{k=1}^m \frac{\omega_j(t_0)}{(t_0 - t_{jk}) \omega_j'(t_{jk})} S_n^{(1/2; -1/2)} K; t_{jk}; t, \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1}$$

ანალოგიურად

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t - a}{t - b}} \frac{f(t) dt}{t - t_0} \approx L_n \left[(S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right]$$

(2.2.2)-თან ერთად $L_n[\varphi_n; t_0]$ ფუნქციათა ქვესივრცეში განვიხილოთ განტოლება

$$K_n^0 [L_n[\varphi_n; t_0]] = L_n[\varphi_n; t_0] + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} L_n[(S_n K)^{(1/2; -1/2)}; t_0, t] L_n[\varphi_n; t] dt = L_n[(S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0]$$

(2.2.3) თუ ამ განტოლებაში t_0 პარამეტრები მიიღებს მნიშვნელობას

$$T(\nu; j) = \{t_{\nu j}\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

სიმრავლიდან, მიიღება წრფივ განტოლებათა სისტემა $T(v; j)$ წერტილებში $\varphi_n(t_{vj})$ უცნობების მიმართ:

$$\left[K_n^0 \left[L_n \left[\varphi_n; t_0 \right] \right] \right]_{t_0=t_{vj}} = \left[L_n \left[(S_n^{(1/2; -1/2)} f); t_0 \right] \right]_{t_0=t_{vj}} \quad (v = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}).$$

უფრო კონკრეტულად სისტემა მიღებს სახეს

$$\varphi_n(t_{vj}) + \sum_{i=1}^n \sum_e^m q_{ie} A_n(t_{ie}, t_{vj}) \varphi_n(t_{ie}) = f_0(t_{vj}), \quad (2.2.3//)$$

სადაც

$$A_n(t_{ie}, t_{vj}) = \left[1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] K(t_{vj}; t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{vj}} K(t_{\sigma k}; t_{ie}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vk} - t_{vj}} K(t_{vk}; t_{ie}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) K(t_{vk}; t_{ie}),$$

ხოლო $\varphi_n(t_{vj})$ -სადიებელი სიდიდეებია.

$$f_0(t_{vj}) = \left[1 + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} f(t_{vk}) + P_{vj}^{*(1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) f(t_{vj}),$$

$$(v = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

$$P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-b}{t-a}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t-t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt \quad q_j^{(-1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t-t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \sigma = \overline{1, n}, \\ P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1, m}^{(1/2; -1/2)}, & k = 1; \sigma = \overline{1, n}, \end{cases} \quad d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}$$

ვიგულისხმობთ, რომ (2.2.1) განტოლებაში $K(t_0, t), f(t_0) \in H_\alpha^r(L)$. ვაჩვენოთ, რომ თუ (2.2.1) განტოლებას აქვს ერთადერთი $\varphi_0 = \sqrt{(t-a)/(t-b)}\varphi(t)$ ამონახსნი, მაშინ გარკვეული $n = n_0$ -დან დაწყებული (2.2.3) განტოლებას და (2.2.3') სისტემას ექნება ამონახსნი, ამასთან, თუ $L_n[\varphi_n; t_0]$ არის (2.2.1.3) განტოლების ამონახსნი, მაშინ φ -ს მიმართ ზემოთ მიღებულ დაშვებებში სამართლიანია შეფასება

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n; t]\|_{H_\beta} \leq \frac{C_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \quad (m > r+1, \beta < \alpha - 1/2), \quad (2.2.4)$$

სადაც φ -არის (2.2.3) განტოლების ამონახსნი, ხოლო C_r -რაიმე მუდმივია.

ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს ზოგადი მიახლოებითი თეორიის ცნობილი შედეგებიდან (იხ. [33] XIV თავი).

როცა $\alpha = 1$, (2.2.4) შეფასებიდან პლემელი პრივალოვის (იხ. [1] §18) ცნობილი თეორემის თანახმად, შესაბამის დაშვებებში K -სა და f -ის

მიმართ მტკიცდება, რომ $\|\varphi - L_n\varphi\|$ -ის რიგი არის $O\left(\frac{1}{n^{r+1/2-\varepsilon}}\right)$, სადაც ε

რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

§ 2.2 მ. კუბლაშვილის მიერ მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმის აგება და მისი კომპიუტერული რეალიზაცია პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების გახსნილი კონტურებით.

მ. კუბლაშვილმა განიხილა განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (t_0 \in L) \quad (2.2.1)$$

$f(t), K(t_0, t) \in H$ და განხილულია შემთხვევა, როდესაცა საძებნია (2.2.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შემოუსაზღვრელია ორივე a და b ბოლოებზე. როგორც ცნობილია (იხ. [1] §86), ასეთ დროს (2.2.1) განტოლების ინდექსი 1-ის ტოლია და ზოგადად ამონახსნი ცალსახად არ განისაზღვრება.

თუ (2.2.1) განტოლება ამოიხსნება მახასიათებელი ნაწილის მიმართ ამოხსნით (იხ. [30] §42) ის მიიყვანება ექვივალენტურ განტოლებაზე:

$$\begin{cases} \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{K(t_1, t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \frac{dt_1}{t_1 - t_0} \varphi_0(t) dt = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} \\ \int_{ab} \varphi_0(t) dt = C \end{cases} \quad (2.2.2)$$

C მუდმივი რიცხვია.

ასეთ შემთხვევაში (2.3.3) ოპერატორული განტოლება იქნება

$$V_\varphi = I_\varphi + k_1 \varphi = f_1 \quad (2.2.3)$$

სადაც

$$\begin{aligned} k_1 \varphi &= \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{K(t_1, t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t_1-t)}} dt_1 \right] \varphi_0(t) dt \\ f_1(t_0) &\equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + C \end{aligned}$$

ანალოგიურად წინა მსჯელობისა

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{K(t_1; t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} dt_1 \approx L_n \left[(S_n^{(-1/2; -1/2)} K); t, t_0 \right], \quad t_0 \in ab$$

სადაც

$$\begin{aligned} L_n \left[(S_n^{(1/2; 1/2)} k); t, t_0 \right] &= L_{nj} \left[(S_n^{(1/2; 1/2)} K); t, t_0 \right], \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} \quad (j \in \overline{1, n}) \\ L_{nj} \left[(S_n^{(1/2; 1/2)} K); t, t_0 \right] &= \sum_{k=1}^m \frac{\omega_j(t_0)}{(t_0 - t_{jk}) \omega_j(t_{jk})} S_n^{(-1/2; -1/2)} (K; t_{jk}, t), \quad t_0 \in \tau_j \tau_{j+1} \quad (j \in \overline{1, n}) \end{aligned}$$

ანალოგიურად

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \frac{f(t)dt}{(t-t_0)} \approx L_n[(S_n^{(-1/2;-1/2)} f); t_0]$$

(2.2.1) განტოლებასთან ერთად $L_n[\varphi_n; t_0]$ ფუნქციათა ქვეკლასზე განვიხილოთ განტოლება

$$V_n[L_n[\varphi_n; t_0]] \equiv L_n[\varphi_n; t_0] + \frac{1}{\pi i} L_n[(S_n^{(1/2;1/2)} K); t_0] L_n[\varphi_n; t_0] dt = L_n[(S_n^{(1/2;1/2)} f); t_0]$$

(2.2.1)

თუ t_0 -ს მნიშვნელობა იქნება

$$tT(\nu; j) = \{t_{\nu j}\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

სიმრავლიდან, მოგვეძიოს წრფივ განტოლებათა სისტემას $\varphi_n(t_{\nu j})$ უცნობების მიმართ:

$$\left\{ \begin{array}{l} [V_n[L_n[\varphi_n; t_0]]]_{t_0=t_{\nu j}} = [L_n[(S_n^{(-1/2;-1/2)} f); t_0]]_{t_0=t_{\nu j}} \\ (\nu = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m q_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} \varphi(t_{\sigma k}) = C; \quad \nu = n \end{array} \right.$$

ანუ

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(t_{\nu j}) + \sum_{\sigma=1}^n \sum_{e=1}^m q_{ie}^{*(1/2;1/2)} B_n(t_{ie}; t_{\nu j}) = f_{1n}(t_{\nu j}) \\ (\nu = 1, 2, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m) \\ (\nu = n; j = 1, 2, \dots, m-1) \\ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m q_{\sigma k}^{*(1/2;1/2)} \varphi(t_{\sigma k}) = C; \end{array} \right. \quad (2.2.3)$$

სადაც

$$B_n(t_{ie}, t_{\nu j}) = \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{\nu j}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu k} - t_{\nu j}} - P_{\nu j}^{*(-1/2;-1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) \right] K(t_{\nu j}, t_{ie}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \nu}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\sigma k} - t_{\nu j}} K(t_{\sigma k}, t_{ie}) - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq j}}^n \frac{P_{\nu k}^{*(-1/2;-1/2)}}{t_{\nu k} - t_{\nu j}} K(t_{\nu k}, t_{ie}) + P_{\nu j}^* \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{\nu k}(t_{\nu j}) K(t_{\nu k}, t_{ie})$$

$\varphi_n(t_{vj})$ - კვლავ საძებნი ფუნქცია.

$$f_{\ln}(t_{vj}) = \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} - P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] f(t_{vj}) - \\ - \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} f(t_{\sigma k}) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} f(t_{vk}) + P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m d_{vk}(t_{vj}) f(t_{vk})$$

$$P_{\sigma k}^{(-1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{\sigma} \tau_{\sigma+1}} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$q_{il}^{(1/2; 1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_i \tau_{i+1}} \sqrt{(t-a)(t-b)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq e}}^m \frac{t - t_{ij}}{t_{ie} - t_{ij}}$$

$$P_{\sigma k}^{(-1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma k}^{(1/2; 1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \sigma = \overline{1, n}, \\ P_{\sigma 1}^{(-1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(-1/2; -1/2)}, & k = 1; \sigma = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$$d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m t_{vj} - t_{vj_0}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j_0 \neq k}}^m t_{vk} - t_{vj_0}}$$

$$q_{\sigma k}^{*(1/2; 1/2)} = \begin{cases} q_{\sigma k}^{(1/2; 1/2)}, & k = \overline{2, m-1}; \sigma = \overline{1, n}, \\ q_{\sigma 1}^{(1/2; 1/2)} + P_{\sigma-1m}^{(1/2; 1/2)}, & k = 1; \sigma = \overline{1, n}; \end{cases}$$

$K, f \in H_{\alpha}^{(r)}(L)$ მტკიცდება, რომ თუ (2.2.1) განტოლებას აქვს ერთადერთი

ამონახსნი $\int_{ab} \varphi_0(t) dt = C$ $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$, მაშინ გარკვეული $n=n_0$

დან დაწყებული (2.2.1') განტოლებას და (2.2.3) სისტემას ექნება ერთადერთი

ამონახსნი, ამასთან, თუ $L_n(\varphi_n; t_0)$ არის (2.2.1') განტოლების ამონახსნი,

მაშინ K და f -ის მიმართ ზემოთ მოყვანილ დაშვებებში ადგილი ექნება

შეფასებებს

$$\|\varphi(t) - L_n[\varphi_n, t]\|_{H_\beta} \leq \frac{A_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}}, \quad (m > r+1, \beta < \alpha-1/2), \quad (2.2.4)$$

A_r მუდმივია, დამოკიდებულია მხოლოდ L -ზე და $\varphi^{(r)}$ -ფუნქციის ჰელდერის მაჩვენებელზე.

ამ თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს მიახლოების ზოგადი თეორიიდან (იხ. [31], XIV-თავი) და ჩვენ მიერ §1.4-ში მიღებული შეფასებებიდან

$$\|L_n[V[L_n\varphi_n]] - V[L_n\varphi_n]\|_{H_\beta} \leq \frac{b'_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \|L_n\varphi_n\|_{H_\beta},$$

$$\|f_1 - L_n[(S_n^{-1/2; -1/2})f]; t_0]\|_{H_\beta} \leq \frac{a'_r \ln n}{n^{r+\alpha-\beta-1/2}} \|f_1\|_{H_\beta},$$

სადაც b' და a' მუდმივებია, როგორც ვხედავთ ამ სქემის დაფუძნებაშიც არსებით როლს თამაშობს §1.4-ის შეფასებები.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა: როცა (2.2.1) განტოლების ინდექსი უარყოფითია $\aleph = -1$, ყოველთვის არ არსებობს აღნიშნული ზუსტი განტოლების ამონახსნი, ის რომ არსებობდეს მარჯვენა მხარე $f(t_0)$ უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით პირობას

$$\int_{ab} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$$

ამიტომ (2.2.1) განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის დროს გათვალისწინებული უნდა იქნეს (2.2.5) დამატებითი პირობა. როგორც ცნობილია (იხ. მაგ[1]) თუ სრულდება (2.2.5) პირობა, მაშინ (2.2.1) განტოლებას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

§ 2.3 მ. კუბლაშვილის და ჯ. სანიკიძის სრული ინტეგრალური შემთხვევა

განხილულია სრული პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} + \int_L h(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (2.3.1)$$

ვიგულისხმობთ, რომ საძებნია (2.3.1) განტოლების a ბოლოებზე შემოსაზღვრული და b ბოლოზე შემოსაზღვრულ ამონახსნი, მაშინ როგორც მრავალჯერ აღვნიშნეთ (2.3.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{(t-b)}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_L \sqrt{\frac{t-a}{(t-b)}} h(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0)$$

$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0)$ ინტეგრალისათვის გამოვიყენოთ §1.4-ში აგებული $D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$ აპროქსიმაცია

$$S^{(1/2; -1/2)}(\varphi, t_0) \approx D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0)$$

ხოლო რეგულარული ნაწილისთვის გამოვიყენოთ კვადრატული პროცესი, დაფუძნებული ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უბან-უბან კვადრატულ L_n -ინტერპოლაციაზე (იგივე კვანძით წერტილებისათვის), ანუ

$$\int_L h(t_0, t) \varphi_0(t) dt = \int_L L_n[h(t_0, t) \varphi_0, t] dt$$

იგი არის ცნობილი კოეფიციენტებით განსაზღვრულ კვადრატული ჯამი. აქედან გამომდინარე, (2.3.2)-ის ექვივალენტურ განტოლებასთან ერთად

$$\varphi(t_0) + [S^{(1/2; -1/2)}]^{-1} \int_L h(t_0, t) \varphi(t) dt = [S^{(1/2; -1/2)}]^{-1} f,$$

რომელსაც განვიხილავთ C სივრცეში. საწყისი განტოლების მარცხენა მხარე შევცვალოთ

$$D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) + L_n \left[\int_L (L_n(h(t_0, t) \varphi)(t) dt; t_0) \right].$$

გავითვალისწინოთ, რომ ზემოთ მიღებულ დაშვებებში შეზღუდვადია $D_n^{(1/2; -1/2)}$, თუ ვისარგებლებთ f ფუნქციისათვის ზემოთ გამოყენებული უბან-უბან საინტერპოლაციო აპროქსიმაციით,

$$\varphi(t_0) + [D_n^{(1/2; -1/2)}]^{-1} \left[L_n \left[\int_L (L_n h(t_0, t) \varphi_n, t_0) dt \right] \right] = [D_n^{(1/2; -1/2)}] (L_n f)(t_0).$$

თუ გავითვალისწინებთ $D_n^{(1/2; -1/2)}$ ოპერატორის სტრუქტურას, ნათელი იქნება, რომ უკანასკნელი განტოლების მარცხენა მხარის ოპერატორი მოქმედებს უბან-უბან პოლინომიურ ქვესივრციდან (რომლის ხარისხი ≤ 2) იგივე ქვესივრცეში, რომელშიც ვიხილავთ განტოლებას. სანიკიძე-კუბლაშვილმა აჩვენეს

$$D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi; t_0) + L_n \left[\int_L (L_n h(t_0, t) \varphi_n(t) dt; t_0) \right] = L_n[f; t_0]$$

განტოლებას საკმარისად დიდი n -ებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსნი. შემოვიტანოთ აღნიშვნები

$$(H\varphi)(t_0) = \left(\int_L h(t_0, t) \varphi(t) dt \right) (t_0)$$

$$(H_n \varphi)(t_0) = \left(L_n \int_L (L_n h(t_0, t) \varphi)(t) dt \right) (t_0)$$

დავიწყოთ შემდეგი სხვაობის განხილვით:

$$\begin{aligned} & (S^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H\varphi_n) - (D_n^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H_n \varphi_n) = (D_n^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H_{\varphi_n} - H_n \varphi_n) + (S^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H\varphi_n) - \\ & - (D_n^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H\varphi_n) = (D_n^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H - H_n) \varphi_n + \\ & + (D_n^{(1/2; -1/2)})^{-1} (D_n^{(1/2; -1/2)} - S^{(1/2; -1/2)}) (S^{(1/2; -1/2)})^{-1} (H\varphi_n) \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ $\|L\| = O(1)$ და გამოვიყენოთ მიღებული

$$\left\| (D_n^{(1/2; -1/2)})^{-1} \right\| = O(\ln^2 n) \quad (n \rightarrow \infty) \cdot h(t_0, t) \text{ ფუნქციის მიმართ ზემოთ მიღებულ}$$

დაშვებებში, სანიკიძე-კუბლაშვილმა მიიღეს

$$\left\| \left(D_n^{(1/2; -1/2)} \right)^{-1} (H_{\varphi_n} - H_n \varphi_n) \right\|_c \leq C_0 (n^{-\alpha+1/2} \ln^2 n \|\varphi_n\|$$

$(C_0 = \text{const}) \quad (n \rightarrow \infty).$

აღვნიშნოთ $\left[D_n^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H_{\varphi_n})(t_0)$ ოპერატორ ფუნქცია $\Psi_n(t_0)$ -ით.

ჩანს რომ

$$(S^{(1/2; -1/2)} - D_n^{(1/2; -1/2)}) \left[S^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H_{\varphi_n}) = (S^{(1/2; -1/2)} - D_n^{(1/2; -1/2)}) \left[S^{(1/2; -1/2)} \right] (H_{\varphi_n})$$

წარმოადგენს §1.3-ში აგებული კვადრატული პროცესის ნაშთით წევრს

$$S^{(1/2; -1/2)}(\psi_n; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t)}{t-t_0} dt$$

ამასთან, $\psi_n(t)$ ფუნქციის აგების

სტრუქტურის თანახმად და კარგად ცნობილი მტკიცებით [1] გამომდინარეობს, რომ $\psi_n(t) \in H_{\alpha-1/2}$ ($1/2 < \alpha \leq 1$). შევავსოთ ახლა შესაბამისი ნაშთითი წევრი

$$R_n(\psi_n; t_0) = (S^{(1/2; -1/2)}(\psi_n; t_0) - D_n^{(1/2; -1/2)}(\psi_n; t_0))$$

გამოყენებული $(\psi_n; t) \in H_{\alpha-1/2}$ პირობა, წინა მსჯელობის ანალოგიურად $R_n(\varphi; t_0)$ ნაშთითი წევრის შეფასება კვანძით τ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) წერტილებში:

$$R_n(\psi_n; \tau_\nu) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t) - \varphi_n(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} dt - D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi_n; \tau_\nu),$$

თუ გავითვალისწინებთ $D_n^{(1/2; -1/2)}(\varphi_n; \tau_\nu)$ სტრუქტურას, შეიძლება ჩაიწეროს

$$R_n(\psi_n; \tau_\nu) = \sum_{\sigma=1}^n \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}}^{\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} dt - \left[P_{2\sigma-1}^{(1/2; -1/2)} \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu} + P_{2\sigma+1}^{(1/2; -1/2)} \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \varphi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu} \right] \right\} \quad (2.3.3)$$

ფიგურულ ფრჩხილებში ყოველი შესაკრები, რომელსაც შემდეგში აღვნიშნავთ $R_n(\psi_n; \tau_\nu)$ -ით, წარმოადგენს ნაშთს $\tau_{2\sigma-1}$ $\tau_{2\sigma+1}$ რკალებზე,

შესაბამისი ინტეგრალებისათვის $\frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu}$ სხვაობიანი

დამოკიდებულებიდან. აღნიშნული ნაშთები მიიღება აღნიშნული ფუნქციის წრფივი ინტერპოლაციით შესაბამის რკალების ბოლო წერტილებით.

როგორც §1.3-ში, ასეთი აპროქსიმაცია იძლევა ზუსტ მნიშვნელობებს ისეთი $\psi_n(t)$ მრავალწევრი ფუნქციისათვის, რომლის ხარისხი ნაკლები ან ტოლია 2-ის, ამიტომ შესაკრებები არ შეიცვლება, თუ მათში შემავალ გაყოფილ სხვაობებს რაიმე მუდმივ რიცხვით, კერძოდ, ნებისმიერ $\sigma(1 \leq \sigma \leq n)$ შესაკრებ განსახილველ ჯამში ჩაიწერება, მაგალითად, ასე:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \left[\frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_\nu)}{t - \tau_\nu} - \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu} \right] dt -$$

$$- P_{2\sigma+1}^{(1/2; -1/2)} \left[\frac{\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu} - \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu} \right]$$

$R_{n\sigma}$ -ში შემავალ ყოველ გაყოფილ სხვაობას ვაკლებთ $[\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)]/(\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu)$ სახის მუდმივს. ანუ მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tau_{2\sigma-1}\tau_{2\sigma+1}} \left[\frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_{2\sigma-1})}{t - \tau_\nu} + (\tau_{2\sigma-1} - t) \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{(t - \tau_\nu)(\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu)} \right] dt -$$

$$- P_{2\sigma+1}^{(1/2; -1/2)} \left[\frac{\psi_n(\tau_{2\sigma+1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu} + (\tau_{2\sigma-1} - \tau_{2\sigma+1}) \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma-1}) - \psi_n(\tau_\nu)}{(\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu)(\tau_{2\sigma+1} - \tau_\nu)} \right] \quad (2.4.4)$$

გამოვიყენოთ $\psi_n \in H_{\alpha-1/2}$ პირობა; $L \equiv ab$ კონტურის გლუვობა და აღვნიშნოთ $h = e/n$, l წირის სიგრძეა, მაშინ დავრწმუნდებით, რომ მოცემული გამოსახულებიდან ინტეგრალი არ აღემატება $O(h^{\alpha-1/2})\|\psi_n\|$ -ს. ანალოგიური შეფასებები იქნება იმავე გამოსახულების ინტეგრალური წევრების მიმართ.

შევაფასოთ $\sum_{\sigma=1}^n R_{n\sigma}(\psi_n; \tau_\nu)$ ჯამი, $R_{n\sigma}(\psi_n; \tau_\nu)$ ვიგულისხმობთ (2.3.4) ის

შესაბამისი გამოსახულება. წინა მსჯელობის ანალოგიურად

$$\sum_{\sigma=1}^n \int_{\tau_{2\sigma-1}}^{\tau_{2\sigma}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi_n(t) - \psi_n(\tau_{2\sigma-1})}{(t - \tau_\nu)} dt = O(h^{\alpha-1/2}) \|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma} = O(h^{\alpha-1/2} \ln n) \|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

რაც შეეხება ინტეგრალების ჯამს

$$(\tau_{2\sigma-1} - t) \frac{\psi_n(\tau_{2\sigma} - 1) - \psi_n(\tau_\nu)}{(\tau_{2\sigma-1} - \tau_\nu)(t - \tau_\nu)}$$

ტიპის გამოსახულებებიდან, მათთვის გვექნება შეფასება

$$O(h^{\alpha-1/2}) \|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}} \sum_{\sigma=1}^{n+1} \frac{1}{\sigma^{\frac{2}{3}-\alpha}} \quad (1/2 < \alpha < 1)$$

საიდანაც მიღებულია შეფასება $O(h^{\alpha-1/2}) \|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}}$. ანალოგიური შეფასებები შეიძლება მიღებული იქნას შესაბამისი არაინტეგრალური წევრების ჯამიდან, ამასთან ყველა შეფასება თანაბარია $\nu(1 \leq \nu \leq n+1)$ -ის მიმართ.

ამ შეფასებების საფუძველზე ვიღებთ $\max_{\nu} |R_n(\psi_n; \tau_\nu)|$ შეფასებას, რომლის საფუძველზედაც ისევე, როგორც §1.3-ში, მიღებულია შემდეგი სახის შეფასება

$$\|(S^{(1/2; -1/2)} - D_n^{(1/2; -1/2)})\psi_n\| \leq \varepsilon_n \|\psi_n\|_{H_{\alpha-1/2}}$$

-ის სრულიად განსაზღვრული შეფასებით. აქ, როგორც წინა შემთხვევაში,

$$\psi_n(t_0) = [S^{(1/2; -1/2)}]^{-1} (H\varphi_n)(t_0) = S^{(1/2; -1/2)} (H\varphi_n)(t_0)$$

გვაქვს

$$\|\psi_n\|_{H_\beta} \leq C_0 \|H\varphi_n\|_{H_\beta} \leq C_1 \max_j |\varphi(\tau_j)|, \quad C_0, C_1 = const.$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით, ასევე ε_n -ის ცხადი შეფასებიდან და

$$\|[D_n^{(1/2; -1/2)}]^{-1}\| = O(n^{1/2} \ln^2 n) \text{ მივიღებთ საბოლოოდ}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \left[D_n^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} \left(D_n^{(1/2; -1/2)} - S^{(1/2; -1/2)} \left[S^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H\varphi_n) \right) \right\| \leq \\ & \leq \delta_n \|\varphi_n\|, \quad \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ამგვარად, ვისარგებლოდ $\left\| \left[S^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H\varphi_n) - \left[D_n^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H_n\varphi_n) \right\|$ და მხედველობაში მივიღოთ, რომ $L_n \left[D_n^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} = \left[D_n^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1}$ მივიღებთ ისეთივე შეფასებას $L_n \left[S^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H\varphi_n) - \left[D_n^{(1/2; -1/2)} \right]^{-1} (H_n\varphi_n)$ -სთვისაც.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე და მარტივი შეფასებებით (მხედველობაში მივიღოთ $f \in H_\alpha$ ($1/2 < \alpha \leq 1$)) დავრწმუნდებით, სანიკიძე-კუბლაშვილის მიერ განხილული განტოლებისათვის სრულდება მიახლოების მეთოდის ზოგადი პირობები [29].

ჩვენ დაშვებებში, რომ კომპიუტერით მიღებული შესაბამისი მრავალწევრის ფესვები ემთხვევა $t_{0j} = \frac{\tau_j + \tau_j + 1}{2}$ წერტილებს, გარდა ერთი ფესვისა, რომელიც მცირედ განსხვავდება t_{0n} წერტილისგან, შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ (2.3.2) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია გარკვეული n -დან დაწყებული და მიახლოებითი ამოხსნა მიისწრაფის ზუსტი ამონახსნისაკენ. $h(t_0, t)$ და $f(t_0)$ ფუნქციების შესაბამისი სიგლუვის შემთხვევაში მიიღება კრებადობის $O(n^{-\frac{3}{2}} \ln n)$ რიგი.

ანალოგიური მსჯელობა შეგვიძლია ჩავატაროთ (შესაბამისი დაზუსტებებით), როცა (2.3.1) განტოლებისათვის ვეძებთ ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელ ან ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრულ ფესვს.

§ 2.4 ზ. კაპანაძის მიერ სრული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულებით.

კაპანაძეს განხილული აქვს სრული პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \int_L K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (2.4.1)$$

(2.4.1) განტოლებაში $f(t)$ და $K(t_0, t)$ ფუნქციები თავიანთი განსაზღვრის არეში ეკუთვნის ჰელდერის კლასს. მაშინ შესაძლებელია

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^n K(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.2)$$

რომლის გამოთვლაც შეისაძლებელია §1.4-ში განსაზღვრული მარკოვის 7 სინგულარობის წერტილისთვის და 25 კვანძითი წერტილისათვის მიღებული ალგორითმით. მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{25} \frac{\varphi(t_k) h}{t_{0j} - t_k} + \sum_{k=1}^{25} K(t_{0j}, t_k) \varphi(t_k) h = f(t_{0j}), \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (2.4.3)$$

ეს უკანასკნელი წრფივი ალგებრული განტოლებათა სისტემა $\varphi(t_k)$ უცნობების მიმართ, 12 განტოლებითა და 25 უცნობით, რომლის ცალსახა ამოხსნა შეუძლებელია. ესეიგი §1.4-ში მიღებული შედეგით შესაძლებელია დაითვალოს სინგულარული ინტეგრალის მნიშვნელობა 12 სინგულარობის წერტილში, მაგრამ შეუძლებელია სინგულარული ინტეგრალური განტოლების ცალსახა ამონახსნის მოძებნა. აქედან გამომდინარეობს, რომ მნიშვნელოვანია მოიძებნოს ერთნაირი რაოდენობის ერთმანეთთან ურთიერთკავშირში მყოფი ისეთი კვანძითი და სინგულარობის წერტილები, რომ ერთდროულად დაკმაყოფილდეს §1.4-ში t_k კვანძითი და t_{0j} სინგულარობის წერტილებისთვის წაყენებული მოთხოვნებიც და ამავდროულად (2.4.3) გახდეს ცალსახად ამოხსნადი.

§ 2.5 პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების

რიცხვითი ამოხსნა გახსნილი კონტურებით მარკოვის ტიპის

კვადრატურული ფორმულებით

განიხილება პირველი გვარის [1] სინგულარული ინტეგრალური განტოლების

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} K(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad t_0 \in L$$

(2.5.1)

რიცხვითი ამოხსნის საკითხები, გახსნილი კონტურების შემთხვევაში გარკვეული დაშვებებში საძებნი ამონახსნის ფუნქციათა კლასის მიმართ. ასეთ განტოლებებზე მიიყვანება, მაგალითად დირიხლეს ამოცანა სიბრტყეზე ჭრილებისათვის [1], ლეროსა და ძელის გრების ამოცანები, სიბრტყის ტემპერატურული სტაციონალური ამოცანა, ნებისმიერად განლაგებული ბზარების შემთხვევაში ([2] თ. VII), ასევე დრეკადობის თეორიის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები.

მრავალი ავტორის მიერ განხილულია სხვადასხვა სქემები ასეთი განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისათვის, მათ შორის , უფრო რთულ შემთხვევებში, როცა განტოლების ინდექსი უარყოფითი რიცხვია. ამ მხრივ განსაკუთრებით აღსანიშნავია ა. ჯიშკარიანის [34-35], ი. ლიფანოვის [36-37], ბ. მუსაევის [38-39], მ. კუბლაშვილის [10] შრომები.

მიუხედავად ამისა, აღნიშნულ შრომებში, როგორც წესი, განიხილება პირველი გვარის სინგულარული განტოლების გულისა და ინტეგრალების წირის მიმართ გარკვეული შეზღუდვები. ინტეგრების წირად აღებულია ნამდვილი ღერძის მონაკვეთი. ნებისმიერი კონტურის შემთხვევაში განტოლების გარდაქმნა მონაკვეთის შემცველ განტოლებაზე პრინციპულად შესაძლებელია, მაგრამ ხშირად ძალიან არასასურველია. განსაკუთრებით ისეთ განტოლებებში, რომლებიც უკავშირდება პრაქტიკულ ამოცანებს. ხშირად ასეთი გარდაქმნები რთულია, რადგანაც გამოყენებებში უფრო ხშირად იძულებულნი ვართ გამოვიყენოთ გარკვეული საწყისი მონაცემები.

მეორე მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს გამოთვლილი სქემების კრებადობის სისწრაფე.

მოცემულ ნაშრომში განხილული სქემა გამოიყენება პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისთვის, ნებისმიერი გახსნილი კონტურის შემთხვევაში, იმ დაშვებით, რომ მოცემულ ზუსტ განტოლებას ამოხსნების განსახილველ კლასში აქვს ერთადერთი ამოხსნა.

მარჯვენა მხარისა და გულის მიმართ გარკვეულ დაშვებებში შესაძლებელია მივაღწიოთ კრებადობის საკმაოდ მაღალ რიგს.

ჩავთვალოთ, რომ (2.5.1) განტოლებაში ab - წარმოადგენს გახსნილ გლუვ კონტურს, რომელსაც ჩვენ ჩავთვლით, რომ მოცემულია პარამეტრული სახით $t = t(s)$ ($s_a \leq s \leq s_b$), $K(t_0, t)$ და $f(t)$ ab - ზე მოცემული ფუნქციებია, რომლების აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას (იხ. [1]).

ვეძებთ (2.5.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია a - ბოლოზე და შემოუსაზღვრელია b - ზე. ასეთ ამონახსნს, როგორც ცნობილია (იხ. [1] § 68), აქვს შემდეგი სახე

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t) \quad (2.5.2)$$

სადაც K და f - ზე ზემოთ მოყვანილ დაშვებაში, φ ფუნქცია ab -ზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. თუ გავითვალისწინებთ (2.5.2) - ტოლობას, მაშინ (2.5.1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} K(t_0, t) \varphi(t) dt = f(t_0) \quad t_0 \in ab \quad (2.5.3)$$

როგორც აღვნიშნეთ ასეთი განტოლებების რიცხვით ამოხსნებს მიძღვნილი აქვს უამრავი ნაშრომები (იხ. [10], [41], [12], [41] და ა.შ.), მაგრამ ეს სქემები

ძალიან რთულია და ინჟინრებს მათი გამოყენება უჭირთ. მირიან კუბლაშვილმა ნაშრომში ძალიან გაამარტივა ეს სქემები. აღნიშნულ ნაშრომში გამოყენებულია ეს იდეა მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულებისათვის, კერძოდ:

$$S_{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\varphi; t_0) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0}}, \quad (t_0 \in ab, \quad t_0 \neq a, b) \quad (2.5.4)$$

სინგულარული ინტეგრალი იცვლება $S_n^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\varphi; t_0)$ მარკოვის ტიპის კვადრატურული ფორმულით (იხ. [12]) ხოლო რეგულარული ინტეგრალი

$K(\varphi; t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} K(t_0, t) \varphi(t) dt$ $K_n(\varphi; t_0)$ - ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულით, მარკოვის კოეფიციენტებით და კვანძებით (იხ. [12]) და (2.5.3) - ზუსტი ინტეგრალური განტოლება

$$S(\varphi; t_0) = S_n^{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(\varphi; t_0) + K_n(\varphi_n; t_0) \quad (2.5.5)$$

თუ (2.5.5)- ში t_0 - ის ნაცვლად ჩავსვამთ $T(v, j) = \{t_{vj}\}$ ($v = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$) მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $T(v, j)$ წერტილებში $\varphi_n(t_{vj})$ უცნობების მიმართ. თუ ამოვხსნით ამ სისტემას და $\varphi_n(t_{vj})$ ამონახსნებით ავაგებთ $L_n(\varphi_n; t)$ - ლაგრანჟის საინტერპოლაციო მრავალწევრს.

$$L_v(\varphi; t_0) = \sum_{k_0=1}^m l_{vk_0}(t_0) \varphi(t_{vk_0}), \quad l_{\sigma k}(t) = \frac{\omega_\sigma(t)}{(t - t_{\sigma k}) \omega_\sigma'(t_{\sigma k})}, \quad \omega_\sigma(t) = \prod_{k=1}^m (t - t_{\sigma k})$$

მტკიცდება, რომ როცა $K K(t_0, t), f(t_0) \in H_\alpha^{(r)}(ab)$ ადგილი აქვს შეფასება:

$$\|\varphi(t) - L_n(\varphi_{n_0}; t)\|_{H^\beta} \leq \frac{C_r l_{nn}}{n^{r+\alpha-\beta-\frac{1}{2}}} \quad (m > r + 1, \quad \beta < a < \frac{1}{2})$$

სადაც φ არის (2.5.3) განტოლების ამონახსნი, ხოლო C_r - რაიმე მუდმივია.

თეორიის დამუშავების შედეგად, განზოგადდა და დამუშავდა ზ. კაპანაძის მიერ შემუშავებული მეთოდი როდესაც $r=3$, ხოლო ეხლა შესაძლებელი ხდება რიცხვითი ამოხსნების წარმოება იმ შემთხვევაში როცა $r=4$, რამაც უფრო გაართულა განტოლებები [68].

$$\int_0^1 t P_\nu(t) dt = (-1)^{z+\nu} t_\nu P_\nu(t_\nu)$$

$$z = 4$$

$$\int_0^1 t P_\nu(t) dt = 2 * (-1)^{4+\nu} t_\nu P_\nu(t_\nu)$$

$$\nu = 1; \int_0^1 t^2(t^4 - t_2^4)(t^4 - t_3^4)(t^4 - t_4^4) dt = -2t_1^2(t_1^4 - t_2^4)(t_1^4 - t_3^4)(t_1^4 - t_4^4)$$

$$\nu = 2; \int_0^1 t^2(t^4 - t_1^4)(t^4 - t_3^4)(t^4 - t_4^4) dt = 2t_2^2(t_2^4 - t_1^4)(t_2^4 - t_3^4)(t_2^4 - t_4^4)$$

$$\nu = 3; \int_0^1 t^2(t^4 - t_1^4)(t^4 - t_2^4)(t^4 - t_4^4) dt = -2t_3^2(t_3^4 - t_1^4)(t_3^4 - t_2^4)(t_3^4 - t_4^4)$$

$$\nu = 4; \int_0^1 t^2(t^4 - t_1^4)(t^4 - t_2^4)(t^4 - t_3^4) dt = 2t_4^2(t_4^4 - t_1^4)(t_4^4 - t_2^4)(t_4^4 - t_3^4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x = t_1^4; \quad y = t_2^4; \quad z = t_3^4; \quad \nu = t_4^4$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - y)(t^4 - z)(t^4 - \nu) dt = -2 * \sqrt{x}(x - y)(x - z)(x - \nu)$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - x)(t^4 - z)(t^4 - \nu) dt = 2\sqrt{y}(y - x)(y - z)(y - \nu)$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - x)(t^4 - y)(t^4 - v)dt = -2 * \sqrt{z}(z - x)(z - y)(z - v)$$

$$\int_0^1 t^2(t^4 - x)(t^4 - y)(t^4 - z)dt = 2 * \sqrt{v}(v - x)(v - y)(v - z)$$

$$n = 25$$

$$\{t_{0j}\} j = 1, 2, \dots, 12$$

შედგენილი შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა Mathematica – სიმბოლურ ენაზე (2.5.3) განტოლების რიცხვითი ამოხსნებისათვის. მიღებული შედეგები სხვადასხვა ამონახსნებით ასახავს რეალურ სურათს.

§ 2.6 სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნა გამარტივებული სქემების გამოყენებით

განხილულია განტოლება

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi_0(t)dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} k(t_0; t)\varphi_0(t)dt = f(t_0) \quad (2.6.1)$$

სადაც $f(t), K(t_0; t)$ განსაზღვრულნი არიან $L = ab$ კონტურზე და ეკუთვნის $H_r(a; L)$ კლასს. ()

იმის გათვალისწინებით, ამონახსნს ფუნქციათა რომელ კლასში ვეძებთ - წირის ერთ ბოლოზე შემოსაზღვრული, მეორეზე შემოუსაზღვრელი (ინდექსი $\aleph = 0$) , ორივე ბოლოზე შემოუსაზღვრელი ($\aleph = 1$); ორივეზე შემოსაზღვრული ($\aleph = -1$); - (2.6.1) განტოლების ზუსტ ამონახსნებს აქვს სხვადასხვა სახე.

პირველ რიგში ავიღოთ, რომ $\chi = 0$ ანუ ვეძებთ ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთ ბოლოზე და შემოუსაზღვრელია მეორე ბოლოზე [44].

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \varphi(t)$$

თუ $\varphi_0(t)$ მნიშვნელობას შევიტანთ (2.6.1) განტოლებაში, :

$$\frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0; t) \varphi_0(t) dt = f(t_0) \quad (2.6.2)$$

აღვნიშნოთ ასევე, რომ ასეთი განტოლების ამოხსნის საკითხები სხავადასხვა ნაშრომებშია განხილული, მაგრამ იქ შესწავლილი განტოლებებისთვის ძირითადად გამოყენებულია ნახევრად რეგულარიზაციის მეთოდი, რაც კიდევ უფრო ართულებს (3.6.2) განტოლების სტრუქტურას [43,44].

აღვნიშნოთ

$$S\left(\varphi; t_0; \pm \frac{1}{2}\right) \equiv \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\varphi_0(t) dt}{t-t_0}$$

დავუშვათ n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. $[a,b]$ შუალედი წერტილებით დავყოთ n ტოლ ნაწილად

$$S_\sigma = a + \frac{b-a}{n} (\sigma - 1), \sigma = 1, 2, \dots, n + 1.$$

ფიქსირებული m ნატურალური რიცხვისთვის ყოველი $[S_\sigma, S_{\sigma+1}]$ სეგმენტი წერტილებით დავყოთ ნაწილებად

$$S_\sigma = S_\sigma + h x_k \left(h = \frac{b-a}{n} \right), k = 1, 2, \dots, m,$$

სადაც $\{x_k\}_1^m [0,1]$ შუალედიდან აღებული წერტილებია. x_1, x_2, \dots, x_m რიცხვები გადანომრილია ზრდის მიხედვით.

აღვნიშნოთ

$$\tau_\sigma = t(S_\sigma), \tau_{\sigma k} = t(S_{\sigma k}), (\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m).$$

$S(\varphi; t_0; \pm 1/2)$ ის მიახლოებით მნიშვნელობად განვიხილოთ გამოსახულება.

$$S_n(\varphi; t_0; \pm 1/2) = L_\nu(\varphi; t_0) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P_{\sigma k}}{t - t_{\sigma k}} [L_\nu(\varphi; t_0) - \varphi(t_{\sigma k})]$$

$$(t_0 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}; t_0 \neq t_{\sigma k}; \nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

სადაც $L_\nu(\varphi; t_0)$ ლაგრანჟის მრავალწევრია $t_{\nu k} (\nu = \overline{0, n-1}; k = \overline{0, m-1})$ კვანძით წერტილებში,

$$P_{\sigma k} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\omega_\sigma(t) d(t)}{(t-t_{\sigma k}) \omega_\sigma(t_{\sigma k})}, \omega_\sigma(t) = \prod_{k=0}^{m-1} (t-t_{\sigma k})$$

$t_0 = t_{\sigma k}$ წერტილებში როგორც ზღვრული მნიშვნელობა განისაზღვრება $S(\varphi; t_0; \pm 1/2)$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ $\varphi \in H_z(a; L)$, მაშინ ნებისმიერი $t_0 \in ab$ -თვის სამართლიანი შეფასება

$$|S(\varphi; t_0; \pm 1/2) - S_n(\varphi; t_0; \pm 1/2)| \leq (c_1 + c_2 l_{nn}) \frac{1}{n^{z+a-1/2}}$$

სადაც c_1, c_2 მუდმივები t_0 -ზე არ არის დამოკიდებული

შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ჩვენს მიერ ინტეგრალებით აგებული მიახლოებითი სქემა გაცილებით მარტივია სტრუქტურულად, ვიდრე სხვა, ასევე ჩვენს მიერ წინა თავებში განხილული სქემები, მაგრამ შენარჩუნებული აქვს სიზუსტის მაღალი რიგი.

$$(2.6.2) \quad \text{განტოლებაში} \quad \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0; t) \varphi_0(t) d(t) \quad \text{ჩვეულებრივი}$$

კვადრატურული ფორმულით შეცვალეთ მიახლოებით

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} k(t_0; t) \varphi_0(t) d(t) \approx \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} P_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k})$$

(2.6.2) მიახლოებითი განტოლებით შეიცვლება ზუსტი სინგულარული განტოლება

$$S_n(\varphi; t_0; \pm 1/2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} P_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = \varphi(t_0)$$

გაშლილი სახით და კომპიუტერზე რეალიზაციისთვის, სქემას ექნება სახე:

$$\left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} + P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{vk}(t_{vj}) \right] \varphi(t_{vj})$$

$$- \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq v}}^n \sum_{k=1}^m \frac{P_{\sigma k}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{\sigma k}} \varphi(t_{\sigma k})$$

$$- \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{P_{vk}^{*(-1/2; -1/2)}}{t_{vj} - t_{vk}} \varphi(t_{vk})$$

$$+ P_{vj}^{*(-1/2; -1/2)} \sum_{k=1}^m d_{vk}(t_{vj}) \varphi(t_{vk})$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^n \sum_{k=1}^m P_{\sigma k} k(t_0, t_{\sigma k}) \varphi(t_{\sigma k}) = f(t_0)$$

სადაც

$$d_{vk} = \frac{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k, j}}^m (t_{vj} - t_{vj_0})}{\prod_{\substack{j_0=1 \\ j_0 \neq k}}^m (t_{vk} - t_{vj_0})}, P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{t - t_{\sigma j}}{t_{\sigma k} - t_{\sigma j}} dt$$

$$P_{\sigma k}^{*(1/2; -1/2)} = \begin{cases} P_{\sigma 1}^{(1/2; -1/2)} + P_{\sigma-1 m}^{(1/2; -1/2)} & \sigma = 1, 2, \dots, n; \\ P_{\sigma k}^{(1/2; -1/2)} & k = 2, 3, \dots, m-1; \sigma = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(\sigma = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m), (t_0 \in \tau_v \tau_{v+1}; v = 1, 2, \dots, n)$$

თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ $t_{vj}(v = \overline{0, n}; j = \overline{0, m})$ კვანძით წერტილს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას $\varphi(t_{vk})(v = \overline{0, n}; j = \overline{0, m})$ უცნობების მიმართ.

ვაჩვენოთ ანალოგიურად, რომ თუ φ_n - არის უბან-უბან საინტერპოლაციო ფუნქცია, აგებული $\varphi(t_{vk})(v = \overline{0, n}; j = \overline{0, m})$ სისტემის ამონახსნის მნიშვნელობებზე, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას.

$$\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\|_{H_\beta} \leq \frac{Al_{nn}}{n^{z+\alpha-\beta-1/2}} (m > z + 1, \beta < a - 1/2),$$

სადაც A გარკვეული მუდმივი რიცხვია.

როგორც ვხედავთ, საკმარისად გამარტივდა (2.6.2) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის სათვლელი სქემა, და თან მაიხლოების მაღალი რიგის სიზუსტე კვლავ შენარჩუნებულია.

როდესაც (2.6.1) განტოლების ინდექსი $\kappa = 1$, ორივე ბოლოზე შემოსაზღვრულია განტოლების ამონახსნი. მას აქვს $\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$ [30] სახე და არ გაინსაზღვრება ცალსახად. ამისათვის საჭიროა შესრულდეს დამატებითი პირობა $\int_{ab} \varphi_0(t) d(t) = c$, სადაც c რაიმე მუდმივი რიცხვია.

ასევე, როდესაც უარყოფითია განტოლების ინდექსი $\kappa = -1$, ზუსტი ამონახსენი ყოველთვის არ არსებობს. ამისათვის მარჯვენა მხარემ $f(t_0)$ უნდა დააკმაყოფილოს დამატებითი პირობა.

$$\int_{ab} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$$

გამომდინარე ყოველივე აქედან, (2.6.1) განტოლების მიახლოებით ამოხსნის დროს ყოველთვის უნდა იქნას გათვალისწინებული აღნიშნული დამატებითი პირობა. როგორც ცნობილია [42], როდესაც პირობა სრულდება, (2.6.1) განტოლებას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

ეს დამატებითი პირობები, რომლებიც განხილული იქნა განტოლების რიცხვითი ამოხსნის სისტემების შედგენის დროს, ანალოგიურდ იქნება გათვალისწინებული ჩვენს შემთხვევაშიც, გამარტივებული სქემების გამოყენებისას.

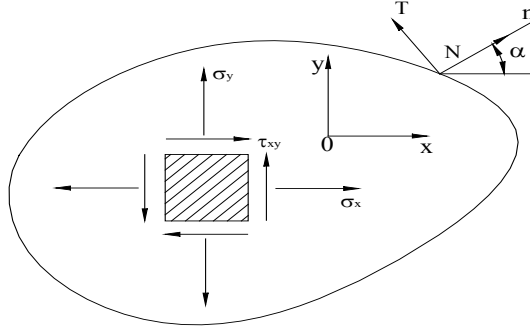
საერთო ჯამში, მოყვანილი მსჯელობის საფუძველზე შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ (2.6.1) განტოლებისათვის, ნებისმიერი ინდექსის შემთხვევაში, ავადგეთ საგრძნობლად გამარტივებული რიცხვითი ამოხსნის სქემა, რომელიც ინარჩუნებს სიზუსტის მაღალ რიგს.

III თავი

**მშენებლობის ზოგიერთი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები
გამარტივებული მაღალი რიგის სიზუსტის ალგორითმებით
სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით**

§ 3.1 წრფივი ბზარის მქონდე დრეკადი სიბრტყის დაძაბულ- დეფორმირებადი მდგომარეობა

როგორც ცნობილია [3], დრეკადი იზოტროპული სხეულის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრისათვის ნებისმიერ წერტილში აუცილებელია პოვნა ძაბვის ვექტორის ტენზორის სამი კომპონენტის $-\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ (სურ.2) და გადაადგილების ვექტორის ორი შემადგენელი კომპონენტის u, v .



სურ. 2

საჭიროა ამოცანის დასმა და ინტეგრალურ განტოლებებზე მისი მიყვანა. დავუშვათ არე, რომელიც დრეკადი სხეულით არის დაკავებული, არის x ღერძზე $|x| \leq l, \gamma = 0$ მონაკვეთის გასწვრივ გაჭრილი მთელი სიბრტყე. ჩავთვალოთ, რომ ძაბვა ნულის ტოლია უსასრულობაში, ხოლო მოცემულია ძაბვის კომპონენტები ჭრილის ნაპირებზე $\sigma_y^+, \tau_{xy}^+, \sigma_y^-, \tau_{xy}^-$. შემდეგში “+” და “-“ ნიშნებით აღნიშნული იქნება შესაბამისი სიდიდეების სასაზღვრო მნიშვნელობები, ბზარის ზედა და ქვედა მხრიდან. აღვნიშნოთ [51]:

$$\sigma_y^\pm(x,0) - i\tau_{xy}^\pm(x,0) = p(x) \pm q(x), \quad |x| < l, \quad (3.1.1)$$

$p(x)$ და $q(x)$ ფუნქციები ცნობილია:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2}(\sigma_y^+ + \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ + \tau_{xy}^-) \\ q(x) &= \frac{1}{2}(\sigma_y^+ - \sigma_y^-) - \frac{i}{2}(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

ვთქვათ მოცემულია $|x| \leq l$ მონაკვეთზე წყვეტა ძაბვისა და გადაადგილების წარმოებულის:

$$\sigma_y^+ - \sigma_y^- - i(\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) = 2q(x) \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)] = \frac{i(\kappa + 1)}{2\mu} g'(x) \quad (3.1.4)$$

(κ, μ მუდმივებია)

ნულის ტოლია მონაკვეთის ბოლოებში გადაადგილების წყვეტის მნიშვნელობა, ანუ

$$g(-\ell) = g(\ell) = 0. \quad (3.1.5)$$

შემოვიტანოთ ფუნქცია

$$\Omega(z) = \phi(\bar{z}) + z\phi'(\bar{z}) + \psi(\bar{z}), \quad (3.1.6)$$

მაბევს და გადაადგილებს ექნებათ შემდეგი დამოკიდებულებები [45, 2]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\phi(z) + \phi(\bar{z})] \quad (3.1.7)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\phi'(\bar{z})$$

$$2\mu(u' + iv') = \aleph\phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\phi'(\bar{z}) \quad (3.1.8)$$

უსასრულობაში ქრობადი $\phi(z)$ და $\Omega(z)$ ფუნქციებს ექნებათ სახე:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-e}^{+l} \frac{Q(t)}{t-z} dt \quad (3.1.9)$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{-l} \frac{Q(t) + 2iq(t)}{t-z} dt \quad (3.1.10)$$

რომლითაც იხსნება (3.1.3.) და (3.1.4) სასაზღვრო ამოცანა, $Q(x)$ განისაზღვრება პირობიდან

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = i \left[g'(x) - i \frac{2q(x)}{\aleph + 1} \right] = iQ(x) \quad |x| < 1 \quad (3.1.11)$$

მხედველობაში ვიქონიოთ

$$\psi(z) = \Omega(\bar{z}) - \phi(z) - z\phi'(\bar{z}) \quad (3.1.12)$$

$\psi(z)$ ფუნქციისათვის მიიღება ფორმულა

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^{+l} \left[\frac{\overline{Q(t)} - 2i\overline{q(t)}}{t-z} - \frac{iQ(t)}{(t-z)^2} \right] dt. \quad (3.1.13)$$

ვთქვათ $|x| < l, y = 0$ მოცემულია ჭრილის ნაპირებზე (3.1.1) დატვირთვა და ძაბვა უსასრულოებაში არ გვაქვს. ამოცანის პოტენციალები $\phi(z)$ და $\Omega(z)$ მოვეძებნოთ (3.1.9) და (3.1.10) სახით, ასევე $g(x)$ უცნობი ფუნქციაა, შესაბამისად ამოცანი არსი მდგომარეობს, რომ განისაზღვროს $g(x)$ ან $g'(x)$ ფუნქცია. ცნობილია რომ ეს ამოცანა მიიყვანება [3] სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{Q(t) + iq(t)}{t-x} dt = p(x) \quad |x| < l \quad (3.1.14)$$

თუ გავითვალისწინებთ $\int_{-l}^l g'(t) dt = 0$ პირობას

$$g'(x) = -i \frac{\aleph-1}{\aleph+1} q(x) + \frac{1}{\pi \sqrt{l^2-x^2}} \left[- \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2-t^2} p(t)}{t-x} dt + iR \right],$$

სადაც

$$R = \frac{\aleph-1}{\aleph+1} \int_{-e}^{+e} q(t) dt \quad (3.1.15)$$

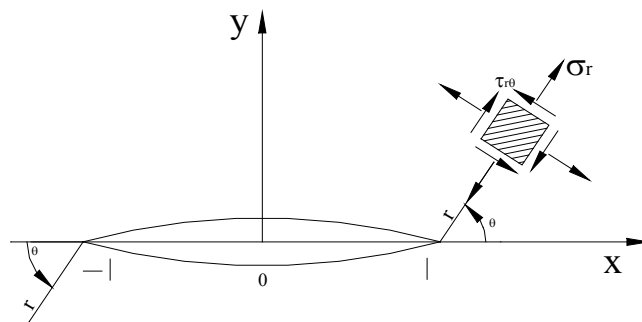
ამოცანის სრული ამოხსნისათვის მიიღება

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{z^2-l^2}} \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2-t^2} p(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-l}^{+l} \frac{q(t) dt}{t-z} + \frac{R}{\sqrt{z^2-l^2}} \right],$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{z^2-l^2}} \int_{-l}^{+l} \frac{\sqrt{l^2-t^2} p(t) dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \left[- \int_{-l}^{+l} \frac{q(t) dt}{t-z} + \frac{R}{\sqrt{z^2-l^2}} \right]. \quad (3.1.16)$$

განვიხილოთ უსასრულო იზოტროპული სიბრტყე, სადაც ძაბვებისა და გადაადგილების განაწილება სიბრტყეში ხდება წრფივი ბზარის მცირე მიდამოში. ამ მიზნით გადავიდეთ ახალ (პოლარულ) კოორდინატთა სისტემაზე რომელსაც სათავე ბზარის წვეროში აქვს $z_{10} = l$ ან $z_{20} = -l$ (სურ.3) [3] ანუ

$$z = \pm(z_1 + l), \quad z_1 = ze^{i\varphi} \quad (3.1.17)$$



სურ.3

პოტენციალები $\Phi_1(z_1)$ და $\Omega_1(z_1)$, შეესაბამებიან ახალ კოორდინატთა სისტემაში $\Phi(z)$ და $\Omega(z)$ ფუნქციებს XOY სისტემაში განისაზღვრება ფორმულით

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(\pm z_1 \pm l) \quad (3.1.18)$$

$$\Omega_1(z_1) = \Omega(\pm z_1 \pm l)$$

ბზარის მცირე მიდამოში $|z_1| \ll l$ ადგილი აქვს $\Phi_1(z_1)$ და $\Omega_1(z_1)$ ფუნქციებს

$$\Phi_1(z_1) = \frac{k_1^\pm - ik_2^\pm}{2\sqrt{2z_1}} + O(1), \quad (3.1.19)$$

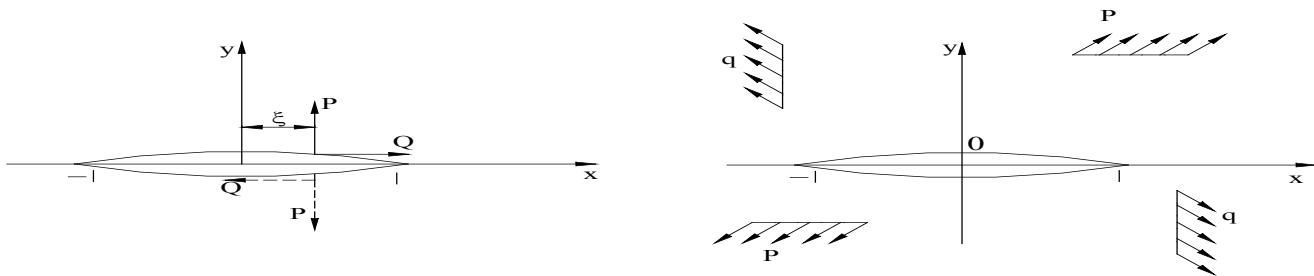
$$\Omega_1(z_1) = \frac{k_1^\pm - ik_2^\pm}{2\sqrt{2z_1}} + O(1)$$

$O(1)$ შემოსაზღვრული სიდიდეა, როდესაც $|z_1| \rightarrow 0$;

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = -\frac{1}{\pi\sqrt{l}} \left[\int_{-l}^{+l} \sqrt{\frac{l \pm t}{l \mp t}} p(t) dt \pm i \frac{\mathfrak{N}-1}{\mathfrak{N}+1} \int_{-l}^{+l} q(t) dt \right] \quad (3.1.20)$$

k_1^\pm და k_2^\pm ნამდვილი სიდიდეებია. “+” ბზარის მარჯვენა წვეროა ($z=l$), ($z=-l$) “-” მარცხენა წვეროა. k_1^\pm და k_2^\pm დამაბულობის ინტენსივობის კოეფიციენტი. ზოგიერთ შრომაში ძაბვის კოეფიციენტს უწოდებენ $\sqrt{\pi}$ -ჯერ მეტ სიდიდეებს $k_1^\pm = \sqrt{\pi}k_1^\pm$, $k_2^\pm = \sqrt{\pi}k_2^\pm$.

ისინი განისაზღვრებიან დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის ძაბვის ფუნქციებითა და პარამეტრებით, რომლითაც ხასიათდება სხეულის კონფიგურაცია და ბზარის ფორმა. ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში (3.1.20) ფორმულა მარტივია. მაგალითად, როცა ბზარის ქვედა საზღვარზე $x=\xi$ ($y=0$) წერტილში მოდებულია P და Q სიდიდის, მაგრამ ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალები (სურ. 4), მაშინ (3.1.20)



მარტივდება ფორმულა და $k_1^\pm - ik_2^\pm = \frac{P-Q}{\pi\sqrt{l}} \sqrt{\frac{l \pm \xi}{l \mp \xi}}$, ხოლო როდესაც

შესუსტებულ უსასრულო სიბრტყეზე $2l$ სიგრძის ბზარით, რომელზეც უსასრულობაში მოქმედებენ ერთმანეთის მართობულად p და q ძალები (სურ.5), (3.1.20) კიდევ უფრო მარტივდება ფორმულა

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \frac{1}{2}[p + q - (p - q)e^{2i\alpha}] \sqrt{l}. \quad (3.1.21),$$

სადაც α არის კუთხე, რომელსაც ძაბვა ადგენს ბზარის სიბრტყესთან.

ზოგადი დატვირთვისას ბზარების გასწვრივ k_1^\pm და k_2^\pm ინტენსივობის კოეფიციენტები გამოითვლება (3.1.20) ფორმულით. აღვნიშნოთ, რომ როდესაც დატვირთვა მოდებულია უსასრულობაში ან სიბრტყის შიგა წერტილში, ამავე ფორმულით შეიძლება მივიღოთ k_1^\pm, k_2^\pm სიდიდეები. ამისათვის საჭიროა განვსაზღვროთ $\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)$, ბზარის წირზე ძაბვების კომბინაცია $|x| < l, y = 0$, სიბრტყეზე, ჭრილის გარეშე იგივე დატვირთვის დროს. სიბრტყისათვის ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები ჭრილით გამოითვლება (4.1.20) ფორმულით, სადაც უნდა დავუშვათ $q(x) = 0$; $p(x) = -[\sigma_y(x,0) - i\tau_{xy}(x,0)]$, მარტივად რომ ვთქვათ ასეთი ამოცანის ამოხსნის დროს გამოიყენება სუპერპოზიციის მეთოდი. არსებითია ის ფაქტი, რომ ბზარის წვეროს მახლობლობაში ძაბვისა და გადაადგილების განაწილებას ყოველთვის აქვს პოლარული კოორდინატების (z, Q) მიმართ ერთიდაიგივე ფუნქციონალური დამოკიდებულება [3]. შეგვიძლია განვიხილოთ, ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები, როგორც პარამეტრები, რომლებიც ასახავენ სხეულში ბზარების წარმოქმნის გამო ძაბვების განაწილებას. ამიტომ ბზარის წვეროს მცირე მიდამოში ძაბვის განაწილება ცნობილი იქნება, თუ განსაზღვრული იქნება ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები. ამიტომ არსებითია k_1^\pm, k_2^\pm ინტენსივობის კოეფიციენტების განსაზღვრა.

ზღვრული წონასწორობის განტოლებები. ბზარების ტიპის დეფექტების მქონე მყიფე სხეულების ზღვრულ-წონასწორულ მდგომარეობის გამოკვლევის დროს, განისაზღვრება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ბზარები იწყებენ გავრცელებას ე. ი. იწყება სხეულის ლოკალური ან სრული რღვევა. ამ ამოცანის ამოხსნის დროს პრინციპული მომენტია ზღვრული წონასწორობის პირობის ფორმულირება. ასეთი პირობა შედარებით ადვილად ფორმულირდება ეგრეთწოდებული კვაზიმყიფე ბზარების თეორიაში, როცა ბზარის წვეროს მიდამოში უდიდესი პლასტიკური ზომა მცირეა, ბზარის ზომებთან შედარებით და მანძილთან ბზარის წვეროდან სხეულის საზღვრამდე. ამ პირობის უმარტივესი ვარიანტი გრიფთისის [45-46] ფიზიკურ იდეაზე დაყრდნობით ჩამოაყალიბა ირვინმა [48]. ნორმალური განვითარების ბზარის შემთხვევაში ე.ი. ლოკალური სიმეტრიის ($k_2 = 0$) შემთხვევაში მის მიერ გამოთქმული იყო მტკიცება იმის შესახებ, რომ მყიფე ან კვაზიმყიფე სხეულებში ბზარის გავრცელება იწყება მაშინ, როცა მოცემული მასალისათვის, მოცემულ პირობებში ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტი ბზარის წვეროსთან აღწევს რაიმე მუდმივ მნიშვნელობას.

$$k_1 = K_{1c} / \sqrt{\pi} \quad (3.1.22)$$

K_{1c} მუდმივი, რომელიც ახასიათებს მასალის რღვევის წინააღმდეგობას უნდა განისაზღვროს ექსპერიმენტალურად.

ზოგად შემთხვევაში, სხეულის ზღვრული წონასწორობის საკითხის განხილვისას, როცა ლოკალური სიმეტრიის პირობა ($k_2 \neq 0$) არ სრულდება, აუცილებელია ჩამოვაყალიბოთ დამატებითი პირობა. ასეთ პირობად უფრო ხშირად გამოიყენება ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ ბზარის საწყისი მიმართულება ემთხვევა სიბრტყეს, რომელშიაც გამჭიმავი ძაბვის მთავარი ნაწილი (სურ.3) აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ჰიპოთეზა განხილულია [48], [49], შრომებში. ამ ჰიპოთეზის საფუძველზე ბზარის

საწყისი გავრცელების კუთხე გამოითვლება ფორმულით [50]

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{k_1 - \sqrt{k_1^2 + 8k_2^2}}{4k_2}. \quad (3.1.23)$$

ზღვრული წონასწორობის განტოლებას ექნება სახე [51]

$$\cos^2 \frac{\theta_*}{2} (k_1 - 3k_2 \operatorname{tg} \frac{\theta_*}{2}) = \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.1.24)$$

აქედან გამოითვლება გარე დატვირთვის კრიტიკული მნიშვნელობა, რომლის დროსაც იწყება სხეულის ლოკალური რღვევა

ნებისმიერად ორიენტირებულ ფირფიტის ერთღერძა გაჭიმვა

ვთქვათ, წრფივი, $2l$ სიგრძის ბზარის მქონე იზოტროპიული ფირფიტა (სურ.5) ($q=0$) იჭიმება უსასრულობაში, ბზარის სიბრტყის მიმართ კუთხით, მონოტონურად ზრდადი გარე ძაბვით. მოცემულ მომენტში ბზარის მარცხენა და მარჯვენა წვერო იმყოფება ერთნაირ პირობებში ($k_{1,2}^\pm = k_{1,2}$). (3.1.21) ფორმულით მოცემული ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები, როცა დაითვლება ფორმულებით

$$k_1 = p\sqrt{l} \sin^2 \alpha; \quad k_2 = p\sqrt{l} \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.1.25)$$

ბზარის საწყისი განვითარების θ_* კუთხე, გამოითვლება ფორმულით

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{1 + 8ctg^2 \alpha}}{4ctg \alpha}, \quad (3.1.26)$$

ხოლო ზღვრული ძაბვის მნიშვნელობა $p = p_*$ გამოისახება დამოკიდებულებით

$$p_* = \frac{P_0}{\cos^3 \frac{\theta_*}{2} \sin^2 \alpha (1 - 3ctg \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_*}{2})}, \quad (3.1.27)$$

სადაც

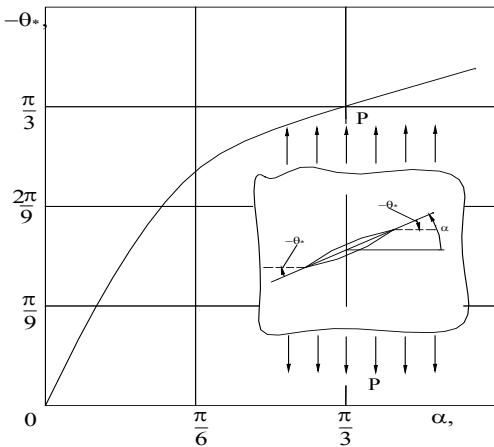
$$p_0 = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi l}} \quad (3.1.28)$$

ფირფიტის გაჭიმვის დროს გარე ძაბვის კრიტიკული მნიშვნელობაა, რომელიც გაჭიმვის მიმართულების პერპენდიკულარულია.

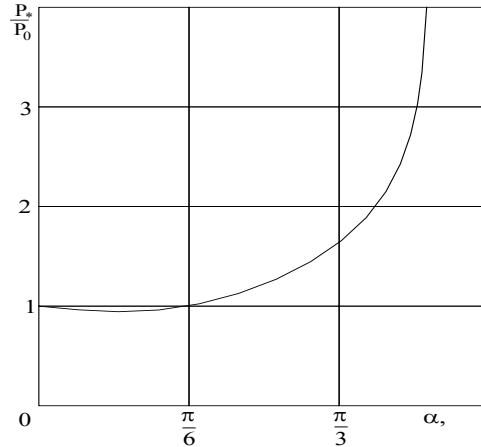
(3.1.28) ფორმულა წარმოადგენს გრიფთისის ცნობილი ამოცანის ამოხსნას.

(3.1.27) ფორმულით, მე-6-ე სურათზე აგებულია θ_* კუთხე ბზარის ორიენტაციის მიხედვით, მოცემულ მომენტში.

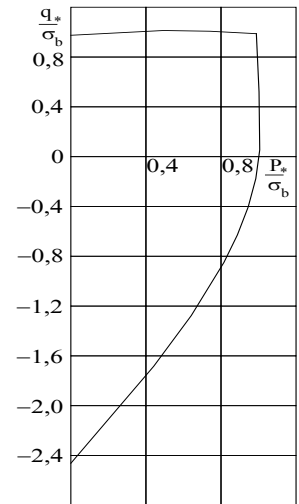
ბზარის გავრცელების საწყისი მიმართულება ახლოს არის გარე ძაბვის მიმართულების მართ კუთხესთან.



სურ. 6



სურ. 7



სურ. 8

მე-7-სურათზე ნაჩვენებია დამოკიდებულება $\frac{p_*}{p}$ სიდიდისა

$\alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ კუთხესთან. p_* ზღვრული დატვირთვაა $p_* \approx 0,97 p_0$

მინიმალური მნიშვნელობა, როდესაც რადიანია $\alpha \approx 1,19$.

უნდა აღინიშნოს, რომ (3.1.26) და (3.1.27) დამოკიდებულებანი, რომლებიც მიღებულნი არიან ბზარის საწყისი გავრცელების ჰიპოთეზაზე, კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ მონაცემებს (ვ. პანასიუკი, ლ. ბერეჟნიცკი, ს. კოვჩიკი [48])

ზღვრული დამაბულობის დიაგრამა. განვიხილოთ უსასრულო იზოტროპული ერთეულოვანი სიგანის ფირფიტა $2l$ სიგრძის წრფივი ბზარით, როცა უსასრულობაში ერთმანეთის მართობულად მოქმედებენ p და q (იხ. სურ.5) დატვირთვები, იმ დაშვებით, რომ ბზარის ნაპირები ერთმანეთთან კონტაქტში არ არიან, მაშინ (3.1.23) და (3.1.24) გამომდინარე p_* და q_* ზღვრული ძაბვებისთვის

$$p_* = p_0 \sec^2 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha) - 3(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-1} \quad (4.1.28)$$

$$q_* = \eta_0 / p_*$$

აქ

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 \mp \sqrt{1 + 8n^2}}{4n}, \quad (3.1.29)$$

სადაც “+” მნიშვნელობაა $k_1 < 0$, ხოლო “-” მნიშვნელობაა $k_1 > 0$;

$$n = \frac{k_2}{k_1} = \frac{(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha} \quad (3.1.30)$$

(3.1.28)–(3.1.29) დამოკიდებულება გამოიყენება მყიფე წრფივი ჭრილით შეზუსტებულ სხეულების ბრტყელი დამაბული მდგომარეობის ზღვრული დიაგრამების ასაგებად.

ვთქვათ, საწყის, არადეფორმირებულ მყიფე სხეულში გვაქვს შინაგანი დეფექტები, რომელთა მახასიათებელი წრფივი განზომილებაა $2l$. ვთქვათ ისინი ერთმანეთისაგან იზოლირებულნი ნებისმიერად

ორიენტირებულნი არიან მთელ სხეულში. თუ ასეთი სხეული გაჭიმულია გარე $p(\eta_0 = 0)$ ძაბვით, გაჭიმვის ძაბვის მინიმალური მნიშვნელობა, სხვადასხვა α კუთხისთვის $p_* \approx 0,97 p_0$.

$\min p_*$ სიდიდე, მოცემული ნივთიერებაა σ :

$$\min p_* \approx 0,97 p_0 = \sigma \quad (3.1.31)$$

თუ ბზარების მქონე სხეული გამოიცდება ორღერძა გაჭიმვით p და q ძაბვებით, p_* და q_* ზღვრული ძაბვების მნიშვნელობა გამოითვლება (3.1.28) – (3.1.30) ფორმულებით.

მე-8-ე სურათზე η_0 პარამეტრზე დამოკიდებულებით აგებულია ზღვრული ძაბვის მნიშვნელობების ცვლილება, სადაც აბსისათა, ღერძზე იზომება p_*/σ მნიშვნელობანი, ხოლო ორდინატაზე $\min q_*/\sigma$ მნიშვნელობანი. ეს გრაფიკი წარმოადგენს p_* და q_* ძაბვების ზღვრული მნიშვნელობების გრაფიკს, რომელიც სამართლიანია ბზარი-ხვრელისათვის, რომელთა ნაპირები სხეულის დეფორმაციის პირობებში არ ეხებიან ერთმანეთს. ამასთან $\min p_*/\sigma$ და $\min q_*/\sigma$, უნდა განვიხილოთ როგორც მთავარი ძაბვის მნიშვნელობები, რომლებიც აღიძვრებიან ბრტყელ დამაბულ მდგომარეობაში მყოფ დეფორმირებულ სხეულებში.

ამგვარად, როგორც ზემოთმოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, ბზარების კვლევის ამოცანებში არსებითია ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტების დათვლა, ასევე დრეკადი დეფექტების მქონე სხეულების ზღვრული დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრა, რომლის შემდეგ საჭიროა განისაზღვროს ძაბვების გადანაწილება, რათა თავიდან ავიცილოთ სხეულის რღვევა.

მოყვანილია ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტების რიცხვითი გამოთვლები პრაქტიკული გამოყენებითი ტიპის მნიშვნელოვანი

ამოცანებისათვის, I-II თავში აგებული ალგორითმებით და მოყვანილია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების ცხრილი. პროგრამები დაწერილია Mathematica სიმბოლურ ენაზე.

§ 3.2 თერმოიზოლირებული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

უსასრულო სხეულზე $|x| \leq a, y = 0$ ზოლის გასწვრივ, მოცემულია თერმოიზოლირებული ბზარი. სხეულზე ბზარის გარეშე ტემპერატურის განაწილება აღიწერება მოცემული ჰარმონიული $t_0(x, y)$ ფუნქციის საშუალებით. ზოგადი ტემპერატურა $T(x, y)$ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით $T(x, y) = t_0(x, y) + t(x, y)$, (3.2.1)

$t(x, y)$ – შემფოთებული ტემპერატურული ველია, რომელიც გამოწვეულია ბზარით. ვინაიდან ბზარი თერმოიზოლირებულია, ამიტომ სრულდება პირობა მის საზღვარზე [3]

$$\frac{\partial T^+}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad |x| < a, y = 0, \quad (3.2.2)$$

რომელიც (3.2.1)-დან გამომდინარე

$$\frac{\partial t^+}{\partial y} = \frac{\partial t^-}{\partial y} = -\frac{\partial t_0}{\partial y} = \varphi(x), \quad |x| < a, y = 0 \quad (3.2.3)$$

ბზარის წვეროებში ტემპერატურის უწყვეტობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$t^+(x, 0) = t^-(x, 0), \quad \text{roca } x = \pm a. \quad (3.2.4)$$

ამოცანა მიიყვანება უსასრულობაში ქრობადი ჰარმონიული $t(x, y)$ ფუნქციის განსაზღვრაზე, სადაც (3.2.3) და (3.2.4) პირობები დაკმაყოფილებულია.

გამოვსახოთ $t(x, y)$ ტემპერატურა შემდეგი სახით

$$t(x, y) = \operatorname{Re} f(z), \quad (3.2.5)$$

$f(z)$ ნებისმიერი უბან-უბან ჰოლომოფრული ფუნქციაა.

მაშინ

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \operatorname{Re} F(z); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = -\operatorname{Im} F(z), \quad F(z) = f'(z) \quad (3.2.6)$$

შემოვიტანოთ გადანაწილების ფუნქცია. ამის გამო ცნობილი იქნება ბზარის წვეროს მცირე მიდამოში ძაბვის განაწილება, თუ ძაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტი იქნება განსაზღვრული. ამიტომ არსებითი მნიშვნელობა აქვს k_1^\pm და k_2^\pm ინტენსივობის კოეფიციენტების განსაზღვრას.

$$\psi(x) = \frac{1}{2} [t^+(x, 0) - t^-(x, 0)], \quad |x| < a, \quad (3.2.7)$$

რომელიც აღწერს $t(x, y)$ ტემპერატურის ნახტომს ბზარის წირზე გადასვლის დროს. როგორც ცნობილია [3] $\psi(x)$ -ის მიმართ მიიღება შემდეგი პირველი

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\psi'(t) dt}{t-x} = \varphi(x), \quad |x| < a$$

გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება

(3.2.8)

დამატებითი პირობით

$$\int_{-a}^{+a} \psi'(t) dt = 0 \quad (3.2.9)$$

(3.2.8.) - (3.2.9) სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია I-II თავებში აგებული ალგორითმებით. $F(z)$ ფუნქციის სახე იქნება [61].

$$F(z) = \frac{F^*(z)}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \varphi(t) dt}{t - z}, \quad (3.2.10)$$

სადაც

$$F^*(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \varphi(t) dt}{t - z}$$

ნაცნობი იქნება $F(z)$ ფუნქცია და (3.2.6) დამოკიდებულებიდან გამომდინარე ვიპოვოთ $f(z)$ ფუნქცია, ხოლო (3.2.5) დამოკიდებულებით კი $t(x, y)$ ტემპერატურას.

$F(z)$ ინტეგრალი ფიქსირებული z წერტილისათვის გამოვთვალოთ ჩვეულებრივი კვადრატურული ფორმულით, მაგრამ სიზუსტის რიგი არსებითად შემცირდება როდესაც z - წერტილი რაგინდ უახლოვდება $-a, +a$ საზღვრის წერტილებს .

$F^*(z)$ ინტეგრალს გამოვთვლით II-თავში აგებული კვადრატული ფორმულით და გამარტივებული სქემით.

$$F^*(z) \approx F_n^*(z) = F^*(1; z) L_n(\varphi; t_0) + p_{v-10}(t_0; z) \frac{\varphi(\tau_{v-1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{v-1} - t_0} + [p_{v-11}(t_0, z) + p_{v0}(t_0, z) + p_{v1}(t_0, z) + p_{v+10}(t_0, z)] \frac{\varphi(\tau_{v+1}) - \varphi(\tau_v)}{\tau_{v+1} - \tau_v} + p_{v+11}(t_0, z) \frac{\varphi(\tau_{v+2}) - \varphi(t_0)}{\tau_{v+2} - t_0} + \sum_{\sigma \neq v \pm 1}^n \sum_{k=0}^e p_{\sigma k}(t_0, z) \frac{\varphi(\tau_{v+1}) - \varphi(t_0)}{\tau_{v+k} - t_0},$$

სადაც

$$p_{\sigma k}(t_0, z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\tau_\sigma \tau_{\sigma+1}} \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)(t-t_0)}}{t-z} l_{\sigma k}(t) dt$$

($\sigma = 1, 2, \dots, n$).

მოცემულია $F(z)$ ინტეგრალის მიახლოებებით გამოთვლის ცხრილი, n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობით $z = \pm 1$ წერტილის მახლობლობაში, როდესაც $\varphi(t) = \operatorname{Re}(t) + \operatorname{Im}(t)$.

ცხრილი 19

n	z	$F(z)$	$F_n(z)$	$R_n(z) = F(z) - F_n(z)$
5	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.8148 + 3.66829i$	$0.21307 + 0.19914i$
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.81848 + 3.66829i$	$-0.21307 + 0.19914i$
10	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$0.09075 + 0.06038i$
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$-0.09075 + 0.06038i$
30	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.69248 + 3.52953i$	$0.04035 + 0.09338i$
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.69248 + 3.52953i$	$-0.04035 + 0.09338i$
	$-1 + 0.005i$	$3.60173 + 3.46915i$	$3.63742 + 3.45305i$	$0.03569 - 0.01610i$

50				
	$1 + 0.005i$	$-3.60173 + 3.46915i$	$-3.63742 + 3.45305i$	$-0.03569 - 0.01610i$

როგორც ცხრილდან ჩანს ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის საშუალებით $z = \pm 1 + 0,005i$ გზარის ბოლო წერტილებში $n = 50$ მიიღწევა 10^{-2} სიზუსტის რიგი.

§ 3.3 დრეკად სხეულზე გრძივი გადაადგილების მქონე გზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

ანტისიმეტრიული დეფორმაციის ქვეშ იგულისხმება ცილინდრულ სხეულში დაძაბული მდგომარეობა, გამოწვეული ცილინდრის მსახველის გასწვრივ გამოწვეული დატვირთვით, რომელიც მუდმივია ამ მსახველის მიმართულებით [3]. თუ დეფორმაციის დერძი (x, y, z) მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მიმართულია z დერძის გასწვრივ სტატიკურ შემთხვევაში დრეკადი u, v და w გადაანაცვლებები შეიძლება წარმოდგენილი იქნას სახით: [3]

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y). \quad (3.3.1)$$

ჰუკის კანონიდან გამომდინარე ძაბვის ტენზორის არანულოვანი τ_{xz} და τ_{yz} კომპონენტები x და y ცვლადის ფუნქციებია, რომლებიც $w(x, y)$ გადაადგილებით გამოისახებიან შემდეგნაირად

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (3.3.2)$$

სადაც μ -ძვრის მოდულია.

ერთ განტოლებაზე მიიყვანება წონასწორობის განტოლებათა სისტემა, რომელსაც მასის ძალის არსებობის შემთხვევაში -

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.3.3)$$

ასევე, ერთადერთი განტოლება დეფორმაციასთან შეთანხმებული იგივეურად კმაყოფილდება.

$\mu w(x, y)$ წარმოადგენს ჰარმონიულ ფუნქციას, წარმოვიდგინოთ იგი $f(z)$ კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი სახით

$$w(x, y) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Re} f(z) \quad (3.3.4)$$

(4.3.2) – დან გამომდინარე

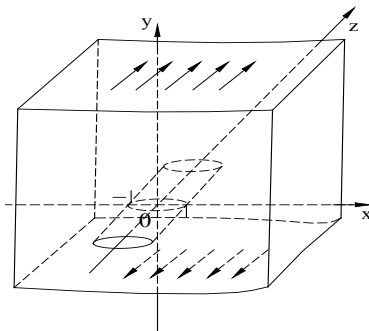
$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = f'(z) = F(z) \quad (3.3.5)$$

სადაც $f(z)$ ანალიზური ფუნქციაა.

ძალვის მთავარი ვექტორი, სხეულის მიერ დაკავებული არის ნებისმიერ AB რკალზე მოქმედებით გამოითვლება

$$R = \operatorname{Im}[f(z_B) - f(z_A)]. \quad (3.3.6)$$

უსასრულო სხეულზე, რომელიც გრძივი ძვრის დეფორმაციის პირობებშია, $|x| \leq a, \quad y = 0$ მოცემულია ზოლის გასწვრივ ჭრილი (ბზარი) (სურ.9).



სურ. 9

განხილულია შემთხვევა, როცა ბზარის ზედაპირებზე მოქმედებს თვითგაწონასწორებადი დატვირთვა [3]

$$\tau_{yz}^+ = \tau_{yz}^- = \varphi(x), \quad |x| < a \quad (3.3.7)$$

ხოლო ძაბვა უსასრულობაში ნულის ტოლია.

$2\mu(x)/\mu$ გადაადგილების წყვეტაა, სიბრტყის გასწვრივ ჭრილზე გადასვლის დროს:

$$w^+(x,0) - w^-(x,0) = \frac{2\mu(x)}{\mu} |x| < a. \quad (3.3.8)$$

ცნობილია, რომ $F(z)$ -ის მიმართ მიიღება შეუღლების ამოცანა [3]

$$F^+(x) - F^-(x) = 2\mu'(x), \quad |x| < a \quad (3.3.9)$$

საიდანაც, უსასრულობაში ქრობადი უბან-უბან პოლომორფული $F(z)$ ფუნქცია განისაზღვრება კოშის ტიპის ინტეგრალით

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{+a} \frac{\mu'(t) dt}{t - x} = \varphi(x), |x| < a \quad (3.3.10)$$

$x = \pm a$ ბოლოებზე შემოუსაზღვრელი ამოხსნისას დამატებითი პირობა უნდა შესრულდეს

$$\int_{-a}^{+a} \mu'(t) dt = 0 \quad (3.3.11)$$

(3.3.10)– (3.3.11) სინგულარული ინტეგრალური განტოლების მიახლოებით ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია I-II თავებში აგებული ალგორითმებით, საიდანაც ვიპოვით $\mu'(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობას.

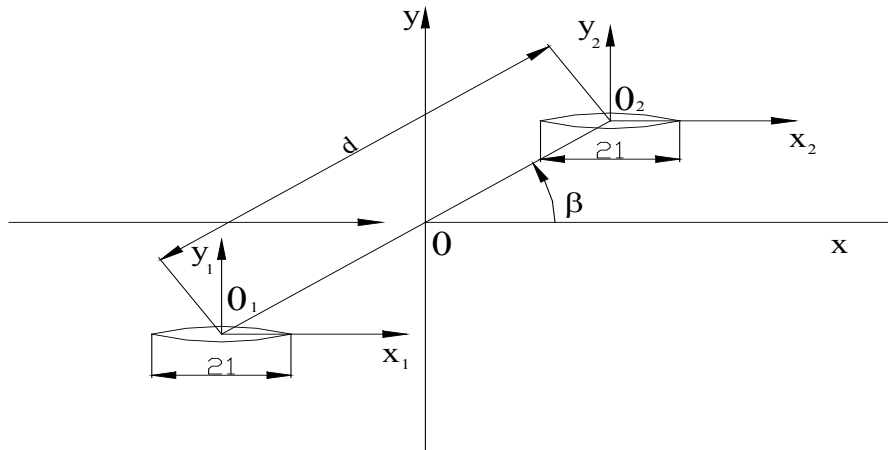
ანალოგიურად $F(z)$ ფუნქციისათვის

$$F(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2} \varphi(t) dt}{t - z} \quad (3.3.12)$$

ეხლა (3.3.6) ადვილია ძაბვების გადაადგილებების პოვნა სხეულის მიერ დაკავებულ მთელ არეში, კერძოდ ბზარის წვეროს მცირე მიდამოში. (3.3.12) ინტეგრალს ჩვენ მიახლოებით გამოვთვლით II თავში ჩვენს მიერ აგებული მიახლოებებითი გამოთვლის ალგორითმით და გამარტივებული სქემით..

§ 3.4 ორი თანაბარი სიგრძის პარალელური ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

ორი თანაბარი სიგრძის სიმეტრიულად განლაგებული ბზარი მოცემულია უსასრულო ფირფიტაზე, დატვირთვით, რომელიც აკმაყოფილებს სიმეტრიის პირობას (სურ.9). ეს ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის ინტეგრალურ განტოლებაზე



სურ. 9

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{\varphi_0(t)}{t-t_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} k(t_0, t) \varphi_0(t) dt = f(t_0), \quad (3.4.1)$$

სადაც

$$k(t_0, t) = \frac{t + t_0 + d \cos \beta}{(t + t_0 + d \cos \beta)^2 + d^2 \sin^2 \beta}, \quad 3.4.2$$

სადაც β - ბზარის სიბრტყის კუთხესა და წრფეს შორის, რომელიც გადის ბზარის ცენტრებს შორის. (3.4.1) მუდმივი დატვირთვის დროს ადვილად მიიღება ცნობილი ინტეგრალური განტოლება უძრავი ან $2l(d \cos \beta = 2l)$ გადანაცვლებული პარალელური ბზარების შემთხვევაში.

(3.4.1) განტოლება არის პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლება. ამ განტოლებას ვხსნით II-ე თავში აგებული ალგორითმებით.

ქვემოთ მოყვანილია (3.4.1)-ე განტოლების ამოხსნის ცხრილები §2.5-ში აგებული მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ალგორითმით, რამდენიმე კონკრეტულ შემთხვევაში. პროგრამა შედგენილია *Matematica* სიმბოლურ ენაზე.

ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $\varphi(t) = 1$

φ_{00}	0,98437	φ_{21}	0,9955	φ_{42}	0,99942	φ_{63}	0,99695
φ_{01}	0,98641	φ_{22}	0,99734	φ_{43}	0,99891	φ_{70}	0,99695
φ_{02}	0,98811	φ_{23}	0,99769	φ_{50}	0,99891	φ_{71}	0,99856
φ_{03}	0,98955	φ_{30}	0,99769	φ_{51}	0,99077	φ_{72}	0,99879
φ_{10}	0,98955	φ_{31}	0,99802	φ_{52}	0,99184	φ_{73}	0,99899
φ_{11}	0,99356	φ_{32}	0,99830	φ_{53}	0,99277	φ_{80}	0,99899
φ_{12}	0,99431	φ_{33}	0,99919	φ_{60}	0,99277	φ_{81}	0,99963
φ_{13}	0,99496	φ_{40}	0,99919	φ_{61}	0,99606	φ_{82}	0,99860
φ_{20}	0,99496	φ_{41}	0,99931	φ_{62}	0,99653	φ_{83}	1,10160

$$k(t_0, t) = (t + t_0 + 4 \cos \pi / 3) / ((t + t_0 + 4 \cos \frac{\pi}{3})^2 + 16 \sin^2 \frac{\pi}{3}), f = 2, n = 10$$

ინტეგრალური განტოლების ზუსტი ამონახსნია $\varphi(t) = 2$.

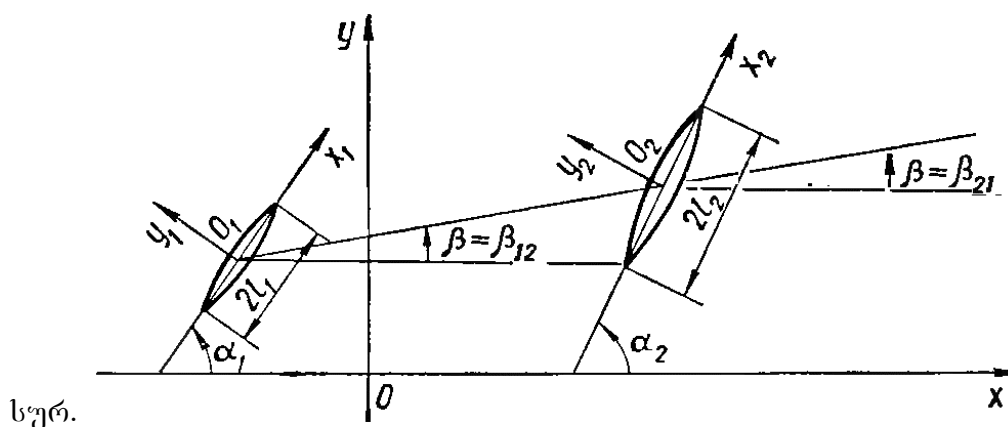
φ_{00}	2,03931	φ_{21}	1,95791	φ_{42}	1,86391	φ_{63}	1,93347
φ_{01}	2,03231	φ_{22}	1,92563	φ_{43}	1,85699	φ_{70}	1,93347
φ_{02}	2,0469	φ_{23}	1,91797	φ_{50}	1,85699	φ_{71}	1,89614
φ_{03}	2,01678	φ_{30}	1,91797	φ_{51}	2,00858	φ_{72}	1,88928
φ_{10}	2,01678	φ_{31}	1,91049	φ_{52}	2,00021	φ_{73}	1,88826
φ_{11}	1,98325	φ_{32}	1,90321	φ_{53}	1,99175	φ_{80}	1,88826

φ_{12}	1,97474	φ_{33}	1,87622	φ_{60}	1,99175	φ_{81}	1,85258
φ_{13}	1,96663	φ_{40}	1,87622	φ_{61}	1,94963	φ_{82}	1,84524
φ_{20}	1,96663	φ_{41}	1,86991	φ_{62}	1,941481	φ_{83}	1,87185

როგორც მოყვანილი ცხრილებიდან ჩანს $n = 10$ -სათვის მიიღწევა 10^{-3} სიზუსტის რიგი.

§ 3.5 უსასრულო სიბრტყეზე ორი ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილის (ბზარის) რიცხვითი ამოხსნის შესახებ

ვთქვათ დრეკად იზოტროპულ სიბრტყეზე, რომელიც დამოკიდებულია დეკარტის xOy სისტემასთან, მოცემულია ორი წრფივი ჭრილი (ბზარი) სიგრძით $2l_k (k = 1, 2)$. ჭრილების (ბზარების) O_k ცენტრებში განისაზღვრება კოორდინატები $Z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0 (k = 1, 2)$. O_k წერტილებში ვიგულისხმობთ, რომ განთავსებულია $x_k O y_k$ ლოკალური მართკუთხა კოორდინატა სისტემა. ვიგულისხმობთ, რომ $x_k (k = 1, 2)$ დერძები ემთხვევა ბზარების წირებს და წარმოქმნიან კუთხეებს $\alpha_k^{-1} x$ დერძებში. (იხ. სურ.)



ვთქვათ ბზარების ნაპირებზე მოცემულია დატვირთვები

$$\sigma_k^\pm - i\tau_k^\pm = p_k(x_k), \quad |x_k| < l_k \quad (k = 1, 2) \quad (3.5.1)$$

ხოლო ძაბვა უსასრულობაში ნულია.

საჭიროა განისაზღვროს ასეთი არის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა.

σ_k და T_k წარმოადგენენ შესაბამისად ნორმალურ და მხებ ძაბვებს $x_k 0_k y_k$ ლოკალურ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ცნობილია, რომ (იხ.[1]) აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე.

$$\int_{l_2}^{l_1} \frac{g'_1(t) dt}{t-x} + \int_{-l_2}^{l_2} [g'_2(t)K_{12}(t,x) + g_2'(t)L_{12}(t,x)] dt = \pi \rho_1(x), \quad |x| < l_1$$

$$\int_{l_2}^{l_1} \frac{g'_2(t) dt}{t-x} + \int_{-l_2}^{l_2} [g'_1(t)K_{21}(t,x) + g_1'(t)L_{21}(t,x)] dt = \pi \rho_2(x), \quad |x| < l_2$$

(3.5.2)

$$K_{nk}(t,x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t - \bar{x}_{kn}} + \frac{e^{2i\alpha_{kn}}}{t - x_{kn}} \right), \alpha_{kn} = \alpha_k - \alpha_n$$

$$L_{nk}(t,x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t - x_{kn}} + \frac{t - \bar{x}_{kn}}{(t - x_{kn})^2} e^{2i\alpha_{kn}} \right];$$

$$x_{kn} = e^{i\alpha_{nk}} [x - d_{nk} e^{i(\alpha_k - \beta_{nk})}] \quad (n = 1, k = 2 \text{ ან } n = 2, k = 1)$$

ცნობილია, რომ (3.5.2) სისტემა მიიყვანება შემდეგ ერთ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\int_{-l_n}^{l_n} [E_{nk}(t,x)g'_n(t) + F_{nk}(t,x)g_n(t)] dt = S_n(x), \quad |x| < l_n \quad (3.5.3)$$

$$(n = 1, k = 2 \text{ ან } n = 2, k = 1)$$

სადაც

$$E_{nk}(t,x) = \frac{e^{i\alpha_{nk}}}{4} \left\{ \frac{1}{\bar{x}_{kn} - T_{kn}} + \frac{e^{2i\alpha_{kn}}}{x_{kn} - \bar{T}_{kn}} + \frac{2e^{2i\alpha_{kn}}}{T_{kn} - x_{kn}} + (T_{kn} - \bar{T}_{kn}) \left[\frac{e^{2i\alpha_{nk} - 1}}{(T_{kn} - x_{kn})^2} + \frac{2(\bar{T}_{kn} - T_{kn})}{(T_{kn} - x_{kn})^3} \right] + \frac{1}{\sqrt{x_{kn}^2 - l_k^2}} \left[\frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{T_{kn} - \bar{x}_{kn}} + \frac{\sqrt{\bar{T}_{kn}^2 - l_k^2}}{T_{kn} - x_{kn}} \right] + \frac{e^{2i\alpha_{kn}}}{\sqrt{x_{kn}^2 - l_k^2}} \times \left\{ \frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{T_{kn} - x_{kn}} + \frac{\sqrt{\bar{T}_{kn}^2 - l_k^2}}{T_{kn} - x_{kn}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& (T_{kn} - \overline{T_{kn}}) \times \left[\frac{e^{2i\alpha_{nk}-1} \sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{(X_{kn} - \overline{T_{kn}})^2} + 2e^{2i\alpha_{kn}} \frac{\overline{T_{kn}} - T_{kn} \sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{(X_{kn} - \overline{T_{kn}})^3} - \frac{e^{2i\alpha_{nk}} (T_{kn} - \overline{T_{kn}})}{(X_{kn} - \overline{T_{kn}})^2 \sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}} \right] + \\
& \frac{X_{kn} (\overline{X_{kn}} - X_{kn}) (T_{kn} - \overline{T_{kn}})}{\sqrt{(X_{kn}^2 - l_k^2)^3}} \times \left[\frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{(X_{kn} - \overline{T_{kn}})^2} + \frac{\overline{T_{kn}}}{(X_{kn} - \overline{T_{kn}}) \sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}} \right]; \\
F_{nk}(t, x) = & \frac{e^{i\alpha_{nk}}}{4} \left\{ \frac{\overline{T_{kn}} - T_{kn}}{(T_{kn} - \overline{X_{kn}})^2} + \frac{T_{kn} - \overline{T_{kn}}}{(\overline{T_{kn}} - X_{kn})^2} + \frac{\overline{T_{kn}} - T_{kn}}{\sqrt{X_{kn}^2 - l_k^2}} \left[\frac{e^{2i\alpha_{kn}} T_{kn}}{(T_{kn} - X_{kn}) \sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{(X_{kn} - \overline{T_{kn}})^2} \right] + \frac{T_{kn} - \overline{T_{kn}}}{\sqrt{X_{kn}^2 - l_k^2}} \left[\frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{(\overline{X_{kn}} - T_{kn})^2} + \frac{X_{kn}}{(\overline{X_{kn}} - T_{kn}) \sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}} \right] + \right. \\
& \left. \frac{e^{2i\alpha_{kn}} X_{kn} (\overline{X_{kn}} - X_{kn})}{\sqrt{(X_{kn}^2 - l_k^2)^3}} \left[\frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{X_{kn} - \overline{T_{kn}}} + \frac{\sqrt{T_{kn}^2 - l_k^2}}{X_{kn} - X_{kn}} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n(x) = & \\
& \pi \rho_n(x) + \\
& \frac{1}{2} \int_{-l_k}^{l_k} \left\{ \rho_k(t) \left[\frac{1}{(t - \overline{X_{kn}}) \sqrt{\overline{X_{kn}}^2 - l_k^2}} + \frac{e^{2i\alpha_{kn}}}{(t - X_{kn}) \sqrt{X_{kn}^2 - l_k^2}} \right] + \overline{\rho_k(t)} \left[\frac{1}{(t - X_{kn}) \sqrt{X_{kn}^2 - l_k^2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(X_{kn} - \overline{X_{kn}}) e^{2i\alpha_{kn}}}{(t - X_{kn})^2 \sqrt{X_{kn}^2 - l_k^2}} + \frac{(l_k^2 - X_{kn} \overline{X_{kn}}) e^{2i\alpha_{kn}}}{(t - X_{kn}) \sqrt{(X_{kn}^2 - l_k^2)^3}} \right] \right\} \sqrt{l_k^2 - t^2} dt;
\end{aligned}$$

$$T_{nk} = e^{i\alpha_{nk}} [t - d_{nk} e^{t(\alpha_k - \beta_{nk})}];$$

$$X_{nk} = e^{i\alpha_{nk}} [x - d_{nk} e^{t(\alpha_k - \beta_{nk})}].$$

(3.5.3) განტოლებას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\psi_0(t) dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi} \int_a^b N(t_0, t) \psi_0(t) dt = f(t_0) \quad (3.5.4)$$

სადაც $N(t_0, t), f(t_0)$ ცნობილი ფუნქციებია, რომლებიც გამოსახებიან $E_{nk}(t, x), F_{nk}(t, x), S_n(x)$ ფუნქციების საშუალებით, ხოლო $\psi_0(t)$ საძებნი ამონახსნია.

ვევებით (3.5.4) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია a - ბოლოზე და შემოუსაზღვრელია b - ზე. ასეთ ამონახსნს, როგორც ცნობილია (იხ. [40]) აქვს შემდეგი სახე:

$$\psi_0(t) = \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \psi(t)$$

სადაც N და f -ზე მოთხოვნილ დაშვებებში ($N, f \in H$). (იხ. [41]) ψ ფუნქცია ab კონტურზე აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. (3.5.4) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{\pi} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} \frac{\psi(t)}{t-t_0} + \frac{1}{\pi} \int_{ab} \sqrt{\frac{t-a}{t-b}} N(t_0, t) \psi(t) dt = f(t_0) \quad (5)$$

ამ განტოლებას ვხსნით (იხ. [10], [12]) აგებული რიცხვითი სქემებით როცა ვეძებთ ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია ორივე ბოლოზე (როგორც ცნობილია (იხ. [40]) ამ შემთხვევაში (3.5.4) განტოლების ინდექსი 1-ის ტოლია

$$\psi_0(t) = \frac{\psi(t)}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}$$

და (3.5.4) განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{1}{\pi} \int_{ab} \frac{\psi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-t_0)}} + \frac{1}{\pi} \int_{ab} \frac{N(t_0, t) \psi(t) dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = f(t_0) \quad (3.5.6)$$

ამასთან უნდა სრულდებოდეს დამატებითი პირობა

$$\int_{ab} \psi(t) dt = C$$

სადაც C - მუდმივი რიცხვია.

როცა ვეძებთ ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია ორივე ბოლოზე მიიღება შემდეგი განტოლება

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{(t-a)(t-b)} \psi(t) dt + \frac{1}{\pi i} \int_{ab} \sqrt{(t-a)(t-b)} N(t_0, t) \psi(t) dt \\ = f(t_0) \quad (3.5.7) \end{aligned}$$

შენიშვნა: (3.5.7)-ე განტოლებას (ამ დროს განტოლების ინდექსი უარყოფითია $\kappa = -1$) ყოველთვის არ აქვს ამონახსნი, ის რომ არსებობდეს მარჯვენა მხარე $f(t_0)$ უნდა აკმაყოფილებდეს დამატებით

პირობას

$$\int_{ab} \frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} = 0$$

ასეთ შემთხვევაში (იხ.[41]) (3.5.7) განტოლებას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და იგი ერთადერთია.

(3.5.5), (3.5.6) და (3.7.7) განტოლებებს ჩვენ მიახლოებით ვხსნიით (იხ. [2], [10], [12]) მოყვანილი რიცხვითი სქემით.

ნაშრომში [69] განიხილება უსასრულო ფირფიტა რომელიც შესუსტებულია ნებისმიერად ორიენტირებული ორი ჭრილით (ბზარით). უნდა განვსაზღვროთ ფირფიტის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე გახსნილი კონტურებით. ხდება ამ განტოლებების რიცხვითი ამოხსნები (იხ. [2];[10];[12]) მაღალი რიგის სიზუსტის სქემებით

§ 3.6 ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა

განხილულია ნახევარსიბრტყის საზღვრის პერპენდიკულარული ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. მოცემულია სასრული სიგრძის ბზარი ღრეკად ნახევარსიბრტყეში, რომელიც მართობულია სიბრტყის საზღვრის, მოცემულია თვითგაწონასწორებადი $f(x)$ დატვირთვა ბზარის ნაპირზე. აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება ინტეგრალურ განტოლებაზე [66]:

$$1/\pi \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_0(\tau)d\tau}{\tau - y} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} k(\tau, y) \varphi_0(\tau)d\tau = f(y) \quad 3.6.1$$

სადაც

$$k(\tau, y) = \frac{y^2 + 6y + 4\tau y + 2\tau - \tau^2 + 4}{(\tau + y + 2)^3} \quad (3.6.2)$$

ხოლო $f(y)$ მოდებული დატვირთვაა ბზარის ნაპირებზე. $k(\tau, y)$ გულს გარდა განსაკუთრებულობისა, $\tau = y = -1$ წერტილში აქვს უძრავი სინგულარობა. აგებულია დაფუძნებადი ალგორითმი ასეთი გულით განტოლების რიცხვითი ამოხსნისათვის გარკვეულ ფუნქციონალურ სივრცეში.

მაგალითად, როცა ბზარის ნაპირზე მოდებულია მუდმივი ნორმალური $f_k = -1$ დატვირთვა.

ქვემოთ მოყვანილია განტოლების (3.6.2) გულით რიცხვითი ამოხსნის საფუძველზე მიღებული ინტენსიობის კოეფიციენტების ცხრილი n -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

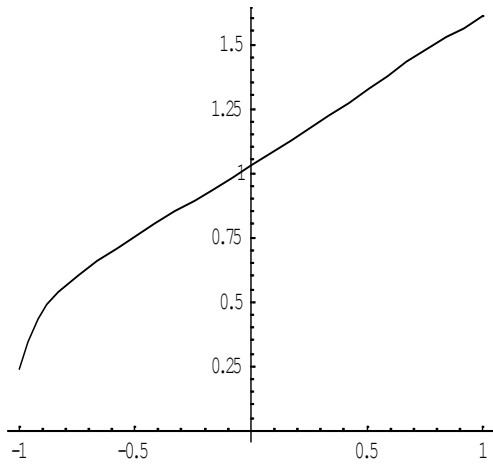
n	6	10	20	40	60	80	120
$f \cdot k_1 / \sqrt{l}$	1,1392	1,1248	1,1224	1,1224	1,1219	1,1217	1,1216
	1,1138	1,1182	1,12064	1,12129	1,12142	1,12146	1,1218

წინა პარაგრაფში განხილული ამოცანისათვის ე.ი. როცა

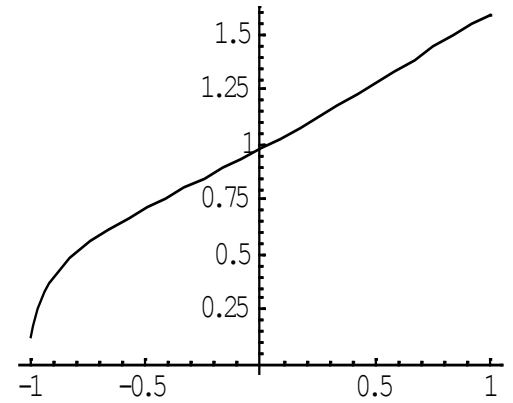
$$k(t, t_0) = k(t_0, t) = (t + t_0 + 4 \cos \pi / 3) / ((t + t_0 + 4 \cos \frac{\pi}{3})^2 + 16 \sin^2 \frac{\pi}{3}), f = 2.$$

n	6	10	20	40	60	80	120
$f \cdot k_1 / \sqrt{l}$	1,25457	1,2539	1,25384	1,25298	1,25281	1,25275	1,25279
	1,25362	1,25319	1,25285	1,25279	1,25276	1,25278	1,25277

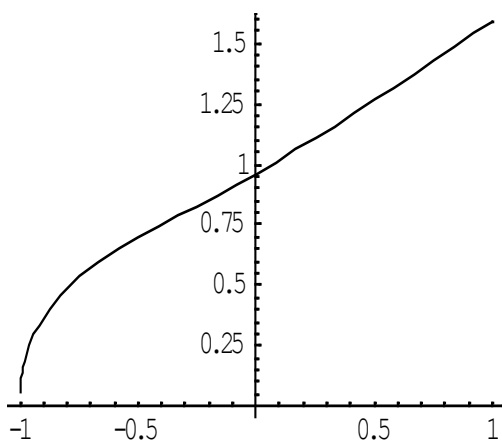
ქვემოთ მოყვანილი გრაფიკები (სურ. 10, 11, 12, 13, 14, 15) ასახავს ცხრილის შესაბამისად, ინტენსივობის კოეფიციენტების გადახრის ეპიურებს $n = 10, 20, 40, 60, 80, 120$ - მნიშვნელობებისათვის.



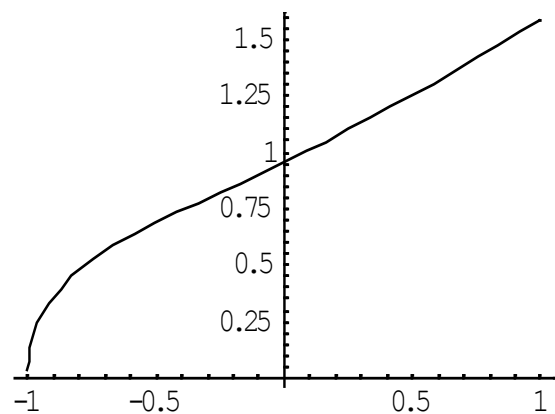
სურ.10



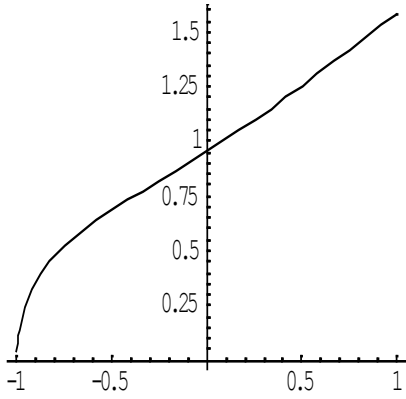
სურ.11



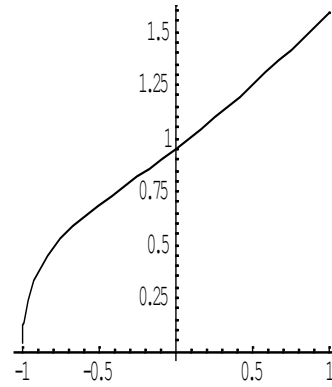
სურ. 12



სურ. 13



სურ. 14



სურ. 15

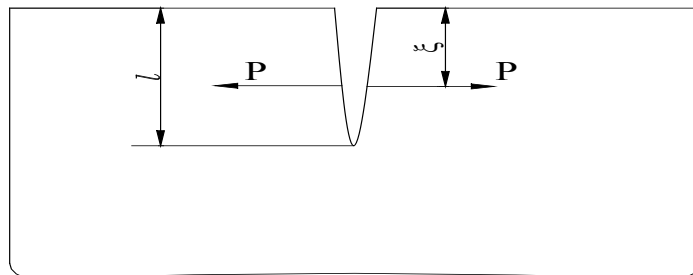
ეხლა კი განვიხილოთ განტოლების რიცხვითი ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა ბზარის ნაპირებზე $x = \xi$ წერტილში მოდებულია შეყურსული p ძალა (სურ. 16). ე. ი. $p(x) = -p\delta(x - \xi)$ ამ შემთხვევაში განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\tau) \left[\frac{1}{\tau - y} + K(\tau, y) \right] d\tau = -\frac{2p}{\pi l} \sqrt{1 - \eta^2} \int_{-1}^{+1} \frac{K(\tau, y) d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2} (\eta - \tau)}, \quad |y| < 1, \quad (3.6.3)$$

სადაც

$$\delta(y, x) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

$$\eta = \frac{2\xi}{l} - 1$$

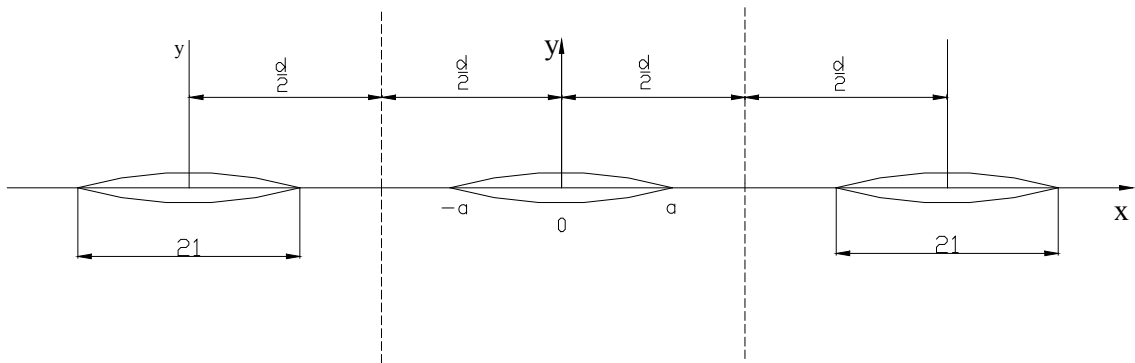


სურ.16

(3.6.3)-ში მარჯვნივ გვაქვს ფუნქცია, რომელიც შემოსაზღვრულია ყოველი $|y| < 1$ და $|\eta| < 1$ მნიშვნელობებისათვის, ამიტომ (3.6.3) განტოლების რიცხვითი ამოხსნა ჩვენ შეგვიძლია განვახორციელოთ ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდით.

§ 3.7 ბზარების ამოცანები სიბრტყეზე, რომლებიც I გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებაზე მიიყვანება

უსასრულო სიბრტყის Ox ღერძზე მოთავსებულია კოლინიალური ბზარების პერიოდული სისტემა (სურ. 17), რომლის ნაპირები ნებისმიერი არათვითგაწონასწორებადი გარე დატვირთვით არის დატვირთული



სურ.17

ბზარის ეს ამოცანა მიიყვანება შემდეგი სახის, პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{R_1(\tau) d\tau}{\tau - y} = -\frac{iR}{d} \cdot \frac{y}{(1 + y^2)} + \frac{p_1(y)}{1 + y^2}, \quad |y| < a \quad (3.7.1)$$

სადაც R

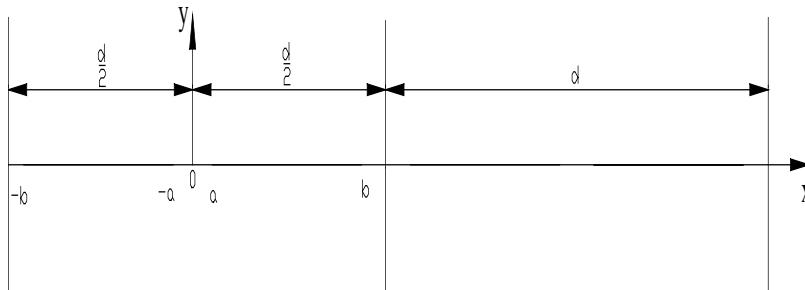
$$\int_{-l}^{+l} R(t) dt = i \frac{\aleph - 1}{\aleph + 1} \int_{-l}^{+l} q(t) dt = iR.$$

იმ შემთხვევაში, როცა უსასრულო სიბრტყე შესუსტებულია ორი ტოლი ნახევარღერძის მიმართ (სურ. 18) სიმეტრიულად განლაგებული ბზარების მიმართ მიიღება შემდეგი სახის კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლება:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c_0}^{+c_0} \varphi(\eta) \frac{d\eta}{\eta - y} = p(y) \quad |y| < c_0, \quad (3.7.2)$$

სადაც

$$P(y) = p(x); \quad c_0 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi a}{d} - \cos \frac{2\pi b}{d} \right).$$

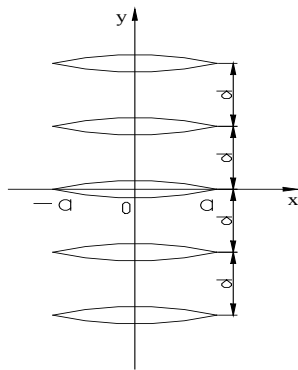


სურ. 18

ვთქვათ ესლა უსასრულო სიბრტყეზე ბზარები განლაგებული არიან სურ. 19-ის შესაბამისად. მაშინ აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება

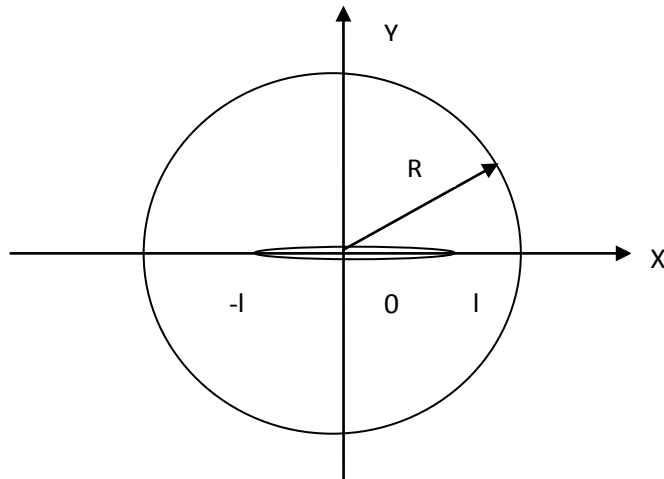
$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - y} = f(y) + \frac{ABy}{(1 - y^2)\pi} \quad |y| < a \quad (3.7.3)$$

განტოლებაზე.



სურ. 19

განვიხილოთ R რადიუსიანი წრიული დისკი, რომელსაც ცენტრში გააჩნია $2l$ სიგრძის ბზარი (სურ. 20)



სურ. 20

ბზარის წირის გასწვრივ სიმეტრიული დატვირთვის დროს

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - \xi} + M_1(\eta, \xi) \right] v'(\eta) d\eta = \pi \sigma(\xi), \quad |\xi| < 1 \quad (3.7.4)$$

და ანტისიმეტრიული დატვირთვის დროს

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\eta - \xi} + M_2(\eta, \xi) \right] v'(\eta) d\eta = \pi\tau(\xi), \quad |\xi| < 1$$

(3.7.5),

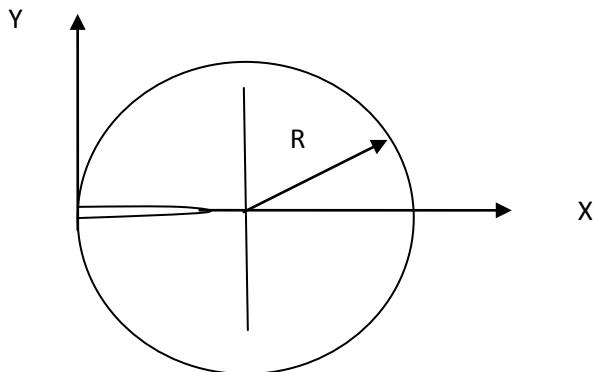
$$M_1(\eta, \xi) = K(\eta, \xi) + L(\eta, \xi); \quad M_2(\eta, \xi) = K(\eta, \xi) - L(\eta, \xi);$$

$$K(\eta, \xi) = \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda^2 \eta \xi)^2} \left[4\xi - 5\eta + \lambda^2 \eta (\xi \eta + 3\eta^2 - 3\xi^2) + \lambda^4 \xi \eta^2 (\xi \eta + \xi^2 - \eta^2) - \lambda^6 \eta^4 \xi^3 \right];$$

$$L(\eta, \xi) = \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda^2 \eta \xi)^2} \left[2\xi - \eta + \lambda^2 \eta (\eta^2 - 2\eta \xi - \xi^2) + \lambda^4 \xi \eta^2 (\xi \eta + \xi^2 - \eta^2) + \lambda^4 \eta^3 \xi^2 \right];$$

$$\lambda = l/R, \quad \eta = t/l, \quad \xi = x/l.$$

განვიხილოთ R რადიუსიანი წრიული დისკი, რომელსაც საზღვარზე აქვს l სიგრძის რადიალური ბზარი. (სურ. 21)



სურ. 21

ბზარის ნაპირებზე სიმეტრიული დატვირთვის

$$\int_0^1 K(\eta, \xi) v'(\eta) d\eta = \pi\sigma(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.7.6)$$

და ანტისიმეტრიული დატვირთვის დროს

$$\int_0^1 L(\eta, \xi) v'(\eta) d\eta = \pi\tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.7.7)$$

სადაც

$$K(\eta, \xi) = R(\eta, \xi) + S(\eta, \xi), \quad L(\eta, \xi) = R(\eta, \xi) - S(\eta, \xi),$$

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\eta - \xi} + \frac{1}{2(\eta + \xi - \lambda\eta\xi)^2} [2(\xi^2 + 4\xi\eta - \eta^2) - 2\lambda\eta(3\xi^2 + 7\xi\eta + 2\eta^2) + 2\lambda^2\eta(\xi^2 + 6\xi^2\eta + 7\xi\eta^2 + \eta^2) - \lambda^2\eta^2\xi(5\xi^2 + 11\xi\eta + 4\eta^2) + \lambda^4\eta^3\xi^2(4\xi + 3\eta) - \lambda^5\eta^4\xi^3]$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda\eta}{2(\eta + \xi - \lambda\eta\xi)^2} [-4\eta + 2\lambda(\xi + \eta)^2 - \lambda^2\eta\xi(3\xi + 2\eta) + \lambda^3\xi^2\eta^2]$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = t/l, \quad \lambda = l/R.$$

(3.7.1-3.7.7) განტოლებები, წარმოადგენს პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებს რომელთა რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმებიც განვიხილეთ არაერთხელ.

ჩვენ განვიხილეთ ტიპური ამოცანები ბზარებზე, რომლებიც მიიყვანება პირველი გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებებზე. აღნიშნული ალგორითმებით შესაძლებელია უფრო ფართო კლასის გამოყენებით ტიპის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები.

დასკვნა

დისერტაციაში მიღებული ძირითადი შედეგები

წონიანი სუნგულარული ინტეგრალებისთვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარტივი ტიპის ახალი კვადრატურული ფორმულები.

წონიანი სინგულარული ინტეგრალებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის ახალი კვადრატურული ფორმულები

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისათვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის გამარტივებული ახალი რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი, რომელიც

აუმჯობესებს აკადემიკოსების ბელოცერკოვსკისა და ლიფანოვის ცნობილ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმს :დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდს“, ასევე ჯ.სანიკიძისა და მ . კუბლაშვილი ცნობილ რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმებს.

პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებებისთვის გახსნილი კონტურების შემთხვევაში აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის მარკოვის ტიპის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმი.

ბზარების ამოცანებისათვის რთულ შემთხვევებში (როცა ბზარს აქვს ნებისმიერი გლუვი ან უბან-უბან გლუვი წირის ფორმა, თვით უკუქცევის წერტილების ჩათვლით), როცა კლასიკური რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები (სასრულ-სხვაობათა, სასრულ ელემენტთა, ფრედგოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა, ვარიაციული და ა.შ.) ნ საერთოდ უძლურია ან არ არის ეფექტური. აგებულია ახალი გამარტივებული და მარკოვის ტიპის პირდაპირი მაღალი რიგის სიზუსტის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები.

ზემოთ მოყვანილი შედეგების შესაბამისი ალგორითმებით შექმნილია პაკეტის ტიპის პროგრამები Mathematica სიმბოლურ ენაზე, რომელიც მოყვანილია დიესრტაციის დანართში.

სამუშაოს აპრობაცია

კვლევის შედეგები განხილული იქნა შემდეგ სამეცნიერო კონფერენციებზე და სემინარებზე:

1. სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლა მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულებით. სტუდენტთა 83-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2016

2. კოშის გულიანი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისებები. სტუდენტთა 82-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2014

3. სინგულარული ინტეგრალებისათვის მარკოვის ტიპის კვადრატული ფორმულების შესახებ. სტუდენტთა 81-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, 2013

დისერტაციის მასალებზე მომზადდა და გამოქვეყნდა შრომები:

1. გ. ყიფიანი., მირიან კუბლაშვილი. უსასრულო სიბრტყეზე ორი ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილის (ზზარის) რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(50), 2019

2. გ. ყიფიანი. მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატული ფორმულების შესახებ სინგულარული ინტეგრალებისთვის. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(48), 2018

3. გ. ყიფიანი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(48), 2018

ლიტერატურა

1. Muskhelishvili N. I. Singular integral equations. // M.: Nauka, 1968, 511 p.
2. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. – M.: Nauka, 1966 – 707 p.
3. Panasyuk V. V., Savruk M. P., Datsyshin A. P. Distribution of stresses near cracks in plates and shells. // Kiev, «Naukova dumka», 1976, p. 443.
4. Belozerkovskiy S. M., Lifanov I. K. Numerical methods in singular integral equations. – M.: Nauka, 1985. – 256 p.
5. Krylov V. I. Approximate calculation of integrals. // M.: Nauka, 1967, 500 p.
6. Korneychuk, A. A. Quadrature formulas for singular integrals. Computational mathematics and mathematical physics / A. A. Korneychuk. – M.: Nauka, 1962.
7. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М.: Физматгиз. 1962.
8. Д. Г. Саникидзе, К. Р. Купатадзе, Ш. С. Хубежты. Об одном классе квадратурных формул повышенной точности для сингулярных интегралов с ядром Коши. Труды XVI Международного симпозиума МДОЗМФ, Харьков-Херсон, 2013, С. 345-348.
9. Саникидзе Д. Г. Кублашвили М. Д. О Квадратурных формулах для сингулярных интегралов, близких по точности к гауссовским. Сборник статей IX Международной научно-технической конференции, Россия, г. Пенза, 28-31 октября 2014 г.
10. მ. კუბლაშვილი. ბზარების მქონე სხეულების დაძაბულ-დეფორმირებული და რღვევის პროცესების კვლევის მეთოდების დამუშავება სინგულარულ ინტეგრალური განტოლების მეთოდის გამოყენებით. სადოქტორო დისერტაცია. თბილისი, 2004 წ. 235 გვ

11. Саникидзе Д.Г. О приближенном вычислении криволинейных Сингулярных интегралов.- Аннотации Докл. семинара Ин-та прикл. матем. Тбилисского гос ун-т; 3, 1970, с 15-17
12. ზ. კაპანაძე - ბზარების ამოცანების რიცხვითი ამოხსნები სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით. დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაცია, ავტორეფერატი, თბილისი 2015 წელი
13. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989, 208с.
14. მ. კუბლაშვილი. ჭრილების მქონე ძელის გრების ამოცანის რიცხვითი ამოხსნების შესახებ. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2002, გვ. 20.
15. მ. კუბლაშვილი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნა დისკრეტულ განსაკუთრებულობათა მეთოდით გახსნილი კონტურებით. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2002, გვ. 20.
16. მ. კუბლაშვილი. კოშის ტიპის ინტეგრალების აპროქსიმაცია გახსნილი კონტურების შემთხვევაში და მათი ზოგიერთი გამოყენება. // სტუ-ს 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი პროფესორ-მასწავლებელთა ღია საიუბილეო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენციის მოხსენებათა თეზისები. თბილისი, 2002, გვ. 214.
17. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Тип. К. Маттисева, Юрьев, 1909.
18. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир. 1987. – 311 с.

19. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. // В кн.: «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурных формула». – М.: Наука, 1964. – с. 64-74.
20. *მ. კუბლაშვილი*. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. // პროფესორ-მასწავლებელთა და სტუდენტთა პირველი რესპუბლიკური სამეცნიერო კონფერენცია. აბასთუმანი, 1995წ, 18-20 მაისი, გვ. 29.
21. *მ. კუბლაშვილი*. ბზარის ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. // საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია "მართვის ავტომატიზირებული სისტემები". სამეცნიერო შრომები ქ. თბილისი, 27-28 სექტემბერი, 1996 წ. , გვ. 28-31
22. *Кублашвили М. Д.* Приближенное вычисление сингулярных интегралов с кусочно-дифференцируемыми плотностями. // Сборник трудов международного симпозиума посвященного проблемам тонкостенных пространственных систем. Тбилиси. 4-5. 07. 2001 г. с.125-131..
23. *Кублашвили М. Д.* О численном решении некоторых задач бесконечны пластин с трещинами // Сборник трудов международного симпозиума посвященного проблемам тонкостенных пространственных систем. Тбилиси. 4-5. 07. 2001 г. с.132-136.
24. *მ. კუბლაშვილი*. კომის ტიპის ინტეგრალების მიახლოებითი გამოთვლა გახსნილი კონტურების შემთხვევაში მაკორექტირებელი პარამეტრის საშუალებით და მათი ზოგიერთი გამოყენება. // მეცნიერება და ტექნოლოგიები, თბილისი. №10-12, 2002. გვ. 54-58
25. *Кублашвили М.Д.* Численное решение задачи тонкого профиля с помощью сингулярного интегрального уравнения. //Международный научный журнал. “ Проблемы прикладной механики”. №2(11) /2003 г. с.119-122.

26. *Кублашвили М.Д.* О Численном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений. // Международный научный журнал . GEN , No. 1,2003. p. 38-40.
27. *Кублашвили М.Д.* О построении вычислительной схемы повышенного порядка точности метода дискретных вихрей в случае разомкнутых контуров // Международный научный журнал . GEN , No. 1,2003. p. 44-46
28. *Купрадзе В.Д.* Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. -Л.
29. Кутателадзе Г. А., Некоторые краевые задачи теории аналитических функции для круга с разрезами,, Докл. расш. засед. семин. ин-та Прикл. мат. (ТГУ) им. И.Н. Векуа, Т.5, 1990,стр.110-113.
30. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М:Издательство Физико-Математической литературы, 1963, 639 с.
31. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.-М.:Наука. 1978. 352с.
32. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи.-М:Издательство Физико-математической литературы, 1963, 639 с.
33. *Канторович Л. В. Акилов Г.П. Функциональный анализ. // М:Наука 1977, 744с.*
34. Джишқариани А.В. К решению сингулярных интегральных уравнений приближёнными преционными методами. //ЖВМ и МФ, 1979, т19, №5 с.1149-1161.
35. Джишқариани А.В. К вопросу приближённого решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. // Труды Тбилис. матем. ин-та - 1986 г. 86.-с. 41-49.
36. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. // М ТОО „Янус“, 1995-504с.

37. Лифанов И.К. О методе дискретных вихрей, - Прикл. Мат. И ме. 1979,43, №1, с184-188.
38. Мусаев Б.И. О приближенное решение полного сингулярного интегрального уравнения на отрезке // Инст кибернетики АН АССР, Баку, -1985-34с. , Деп. в ВИНТИ, 23.10.85, №73,77-85.
39. Мусаев Б.И. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений при отрицательном индексе методом механических квадратур. Докл. АН СССР. 1988. т. 298, №2 с. 286-290.
40. Саникидзе Д.Г. О приближенном вычислении криволинейных Сингулярных интегралов.- Аннотации Докл. семинара Ин-та прикл. матем. Тбилисского гос ун-т; 3, 1970, с 15-17
41. Саникидзе Д.Г. Кублашвили М. Д. О квадратурных формулах для Сингулярных интегралов, Близких по точности к Гауссовским.
42. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. // М.: Наука, 1968.
43. Kublashvili M.D., Kublashvili M.M. Numerical solution of singular integral equation with opened Contour in the nonzero index case, Scientific-technical journal "Building", 3(18), 2010. 19-27.
44. Kublashvili M.D., Kublashvili M.M. On numerical solution of the first kind singular integral equation, Oriceedings of the International Scientific Conference "Information an Computer Technologies, Modelling Control", GTU, Tbilisi, 2011.
45. *Колосов Г.В.* Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теорий упругости. Тип. К. Маттисева, Юрьев, 1909.
46. Griffith A. A. The fenomenon of repture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc., 1920, A 221, 163-198
47. Griffith A. A The theory of repture. Proc. First Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924, 55-63.

48. *Irwin G.R., Wells A.A.* A continuum mechanics view of crack propagation. // *Metallurg. Revs*, 1965, 10, 38, 223-270.
49. *Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Ковчик С.Е.* О развитии произвольно ориентированной прямолинейной трещины при растяжении пластины.-*ПМ*, 1965, 1, 2, 48-55.
50. *Черепанов Г.П.* Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин.-*ПММ*, 1963, 27,1, 150-153.
51. *Панасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. <<Наукова думка>> Киев, 1968.
52. Мусаев Б. И. О приближенном решении сингулярных уравнений. – Препринт / Ин-т физики АН АзССР. – Баку, 1986. – №17, 48 с.
53. Мусаев Б. И. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // В сб.: Сингулярные интегральные операторы, Азерб. гос. ун-т, Баку, 1986. – с. 33-61.
54. Мусаев Б. И. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений при отрицательном индексе методом механических квадратур. Докл. АН СССР. 1988. т. 298, №2, с. 286-290.
55. Габдулхаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задачу – Казань: Казан. ун-е. – 1980. – 232 с.
56. Джишқариани А. В. К решению сингулярных интегральных уравнений приближёнными проекционными методами. // *ЖВМ и МФ*, 1979, т. 19, №5, с. 1149-1161.
57. Джишқариани А. В. Решению сингулярных интегральных уравнений приближёнными коллокационными методами. // *ЖВМ и МФ*, 1981, т. 21, №2, - с. 355-362.
58. Джишқариани А. В. К вопросу приближённого решения одного класса сингулярных интегральных уравнений. // *Труды Тбилис. матем. ин-та.* - 1986, т. 86, - с. 41-49.

59. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 1963, 639 с.
60. Бережницкий Л. Т. Щ предельном равновесии пластины, ослабленной системой трещин, расположенных вдоль прямой под углом в направлении растяжения – В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», Киев, 1965, 46-52.
61. Корнейчук, А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Вычислительная математика и математическая физика / А. А. Корнейчук. – М.: Наука, 1962.
62. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М.: Физматгиз. 1962.
63. Д. Г. Саникидзе, К. Р. Купатадзе, Ш. С. Хубежты. Об одном классе квадратурных формул повышенной точности для сингулярных интегралов с ядром Коши. Труды XVI Международного симпозиума МДОЗМФ, Харьков-Херсон, 2013, С. 345-348.
64. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Б., «Наука», 1979.
65. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. М., Гостехиздат., 1953.
66. Панасюк В.В. Саврюк М.П. Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.// Киев. Наукова думка, 1984, 344с.
67. გ. ყიფიანი. პირველი გვარის სინგულარული ინტეგრალური განტოლების რიცხვითი ამოხსნები გახსნილი კონტურების შემთხვევაში. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(48),2018
68. გ. ყიფიანი. მაღალი რიგის სიზუსტის კვადრატული ფორმულების შესახებ სინგულარული ინტეგრალებისთვის. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(48),2018

69. გ. ყიფიანი., მირიან კუბლაშვილი. უსასრულო სიბრტყეზე ორი ნებისმიერად ორიენტირებული ჭრილის (ბზარის) რიცხვითი ამოხსნის შესახებ. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა“ 1(51), 2019

დანართი

damxmare funqciebi

$\backslash(r=4;\backslash)$

Gantolebebi

$\backslash(R1=2\backslash(@t0[1]\backslash((t0[1]-t0[2]))\backslash((t0[1]-t0[3]))\backslash((t0[1]-t0[4]))\backslash)\backslash[\text{IndentingNewLine}]\backslash(R2=2\backslash(@t0[2]\backslash((t0[2]-t0[1]))\backslash((t0[2]-t0[3]))\backslash((t0[2]-t0[4]))\backslash)\backslash[\text{IndentingNewLine}]\backslash(R3=2\backslash(@t0[3]\backslash((t0[3]-t0[1]))\backslash((t0[3]-t0[2]))\backslash((t0[3]-t0[4]))\backslash)\backslash[\text{IndentingNewLine}]\backslash(R4=2\backslash(@t0[4]\backslash((t0[4]-t0[1]))\backslash((t0[4]-t0[2]))\backslash((t0[4]-t0[3]))\backslash)\backslash)$

$\backslash(A1=\backslash[Integral]_0\%1\backslash(t\^2)\backslash((t\^4-t0[2]))\backslash((t\^4-t0[3]))\backslash((t\^4-t0[4]))\backslash[\text{DifferentialD}]t//\text{Expand};\backslash)\backslash[\text{IndentingNewLine}]\backslash(A2=\backslash[Integral]_0\%1\backslash(t\^2)\backslash((t\^4-t0[1]))\backslash((t\^4-t0[3]))\backslash((t\^4-t0[4]))\backslash[\text{DifferentialD}]t//\text{Expand};\backslash)\backslash[\text{IndentingNewLine}]\backslash(A3=\backslash[Integral]_0\%1\backslash(t\^2)\backslash((t\^4-t0[1]))\backslash((t\^4-t0[2]))\backslash((t\^4-t0[4]))\backslash[\text{DifferentialD}]t//\text{Expand};\backslash)\backslash[\text{IndentingNewLine}]\backslash(A4=\backslash[Integral]_0\%1\backslash(t\^2)\backslash((t\^4-t0[1]))\backslash((t\^4-t0[2]))\backslash((t\^4-t0[3]))\backslash[\text{DifferentialD}]t//\text{Expand};\backslash)$

klasteridan erT da or elementiani jgufebis gadayra

```
\(gadayra[x_]:=Module[{xx,n},\[IndentingNewLine]xx=x;\n=Length[x];\[IndentingNewLine]z={};\[IndentingNewLine]Do\[IndentingNewLine]\(I\nf[Length[xx\[k]]>3,\nz=Append[z,xx\[k]];)\[IndentingNewLine],{k,n});\[IndentingNewLine]z\[Indent\ningNewLine])
```

gantolebaTa sistemebi

```
\(\(eq={A1-R1\[Equal]0,A2+R2\[Equal]0,A3-R3\[Equal]0,A4+R4\[Equal]0};)\)\[IndentingNewLine]\(\([CapitalPhi]=\((A1-R1)\)^2+\((A2+R2)\)^2+\((A3-R3)\)^2+\((A4+R4)\)^2;)\)
```

gamoTvlebi

damxmare gamoTvlebi

```
\(\([Epsilon]=1\[5 10^5];)\)\[IndentingNewLine]\(\(sol2=bade2\[CapitalPhi],120,\[Epsilon]//Timing;)\)\[IndentingNewLine]\(\{sol2\[1],sol2\[2]}\[Length])\)\[IndentingNewLine]\(\(sol2>> \"<solution>\"\)\)\[IndentingNewLine]\(\(y=\[CapitalGamma][\[CapitalPhi],sol2\[2]];)\)\[IndentingNewLine]\(\{Min[y],Max[y],y/[Length])\)\[IndentingNewLine]\(\(sol2\[2]//Sort)\[MatrixForm])\)\[IndentingNewLine]\(\(rez=klasterizacija[sol2\[2],y,0.009];)\)\[IndentingNewLine]\(\(rez/[Length])\)\[IndentingNewLine]\(\(a12=Table[rez21\[k]//Length,{k,Length[rez21]})\)\[IndentingNewLine]\(f7c9{1.7502837226599854`^8,8.739616122629467`^7,40}\:f7c0
```

```

\\(centrebi=Table[Centro[\\[CapitalPhi],rez21[\\([k]\\)],{k,Length[rez21]}];\\)

\\({rez21//Length,centrebi//Length}\\)

\\:f7c9{38,38}\\:f7c0

\\(tt=Table[t0[i],{i,r}]\\)

\\:f7c9{t0[1],t0[2],t0[3],t0[4]}\\:f7c0

\\(centrebi//MatrixForm\\)

\\(\\(rezult=Table[sol=FindRoot[eq,MapThread[#{#1,#2}&,{tt,centrebi[\\([k]\\)]}],Working
Precision->50],{k,Length[centrebi]}];\\)

\\({rezult[\\([1]\\)],rezult[\\([2]\\)],rezult[\\([4]\\)],rezult[\\([17]\\)]}\\)/MatrixForm\\)

□□□□ TagBox[RowBox[
GridBox[{{ItemBox[\\(t0[1]\\[Rule]0.3250353791009949346462413964838713333884
445751350202538506934974274`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[2]\\[Rule]0.408217359396351520056084043605511448692084849291
4587550449860540836`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[3]\\[Rule]0.624026745284627088349656627591968435944421018320
2928131346634787716`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[4]\\[Rule]0.624026745284627088349656627591968435944421018320
2928136031982104016`50.\\)]},
{ItemBox[\\(t0[1]\\[Rule]0.346216337638644555995772356726393578733546377169
8103844764257109283`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[2]\\[Rule]0.510984740480190495664591514943616901404540947733
3244253104114260747`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[3]\\[Rule]0.510984740480190495664591514943616901404540947733
3244253104114068682`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[4]\\[Rule]0.510984740480190495664591514943616901404540947733
3244253104157531284`50.\\)]},
{ItemBox[\\(t0[1]\\[Rule]0.453907379121454855487653281228493372168967143809
4728460679382505711`50.\\)],
ItemBox[\\(t0[2]\\[Rule]0.453907379121454855487653281228493372168967143809

```

```

4728460679382505847`50.\\),
ItemBox[\\(t0[3]\\[Rule]0.453907379121454855487653281228493372168967143809
4728460679382505877`50.\\),
ItemBox[\\(t0[4]\\[Rule]0.453907379121454855487653281228493372168967143809
4728460679382505872`50.\\)]},
{ItemBox[\\(t0[1]\\[Rule]0.165826093430524688578588073807285437579250167497
4962087873252298196`50.\\),
ItemBox[\\(t0[2]\\[Rule]0.165826093430524688578588073807285437579250167497
4962087873248520865`50.\\),
ItemBox[\\(t0[3]\\[Rule]0.767507239902808644754745259526047895754083165835
8371245460116200254`50.\\),
ItemBox[\\(t0[4]\\[Rule]0.767507239902808644754745259526047895754083165835
8371245460130392325`50.\\)]}], "", ""}], Function[BoxForm`e$,
MatrixForm[BoxForm`e$]]]□

\\(result[\\([1]\\)\\)

\\:f7c9{t0[1]-
>0.325035379100994934646241396483871333388444575135020253850693497427
4`50.,t0[2]-
>0.408217359396351520056084043605511448692084849291458755044986054083
6`50.,t0[3]-
>0.624026745284627088349656627591968435944421018320292813134663478771
6`50.,t0[4]-
>0.624026745284627088349656627591968435944421018320292813603198210401
6`50.}\\:f7c0

\\(eq/.result[\\([1]\\)\\)

\\([CapitalPhi]/.result[\\([1]\\)\\)

\\:f7c90`99.87246621657793\\:f7c0

\\([meoreBade=Table[subSet[\\([CapitalPhi],10,0.14,centrebi[\\([k]\\)],0.01],{k,Length[c
entrebi]]};\\)\\)

```

$\{\{xy=meoreBade;\}\}$

$\{\{xy>Delete[xy,1];\}\}$

$\{\{Table[xy[\{[k]\}]/Length,\{k,Length[xy]\},Length[xy]]\}$

$\{f7c9\{16069,42268,178903,48118\},4\}f7c0$

$\{\{yy//Length,centrebi//Length\}$

$\{f7c9\{99753,26\}f7c0$

$\{\{centrebi2=Table[Centro[\{Phi\},xy[\{[k]\}],\{k,Length[xy]\}]\}$

$\{centrebi2//MatrixForm\}$

$\{\{mesameBade=Table[subSet[\{CapitalPhi\},8,0.135,centrebi2[\{[k]\}],0.002],\{k,Length[centrebi2]\}]\}$

$\{Table[mesameBade[\{[k]\}]/Length,\{k,Length[mesameBade]\}\}$

$\{f7c9\{0,0,0,0\}f7c0$

$r=4$

$f[x_]:= \int 1/(u-x) \text{ DifferentialD}u$

$\text{pirveliSesakrebi}[x_]:= (f[x]/.u->1)-(f[x]/.u->-1)$

$\text{CapitalGamma}[x_]:= \text{Re}[\text{pirveliSesakrebi}[x]]$

$\text{NSolve}[N[\{ \int$

$\text{SubsuperscriptBox}[\int, \{0\}, \{1\}]$

$\int_0^1 t^2 dt$

$\int_0^1 (t^3 - y) dt$

$\int_0^1 (t^3 - z) dt = 2x^2 (3)^{-1} (x - y)(x - z)$

$\int_0^1 dt$

$\int_0^1 t^2 dt$

$\int_0^1 (t^3 - x) dt$

$\int_0^1 (t^3 - z) dt = 2y^2 (3)^{-1} (y - x)(y - z)$

$\int_0^1 dt$

$\int_0^1 t^2 dt$

$\int_0^1 (t^3 - x) dt$

$\int_0^1 (t^3 - y) dt = 2z^2 (3)^{-1} (z - x)(z - y)$

$N[Power[0.00885238178271547694372751084774805741`24.862310374016836, (3)^{-1}, 22]$

0.20686485443486627328451015

$N[Power[0.66967064532616042925372951376215177214`24.862310374016836, (3)^{-1}, 22]$

0.8748906074186820253766

$N[Power[0.66967064532616042926267810333612604808`24.862310374016836, (3)^{-1}, 22]$

0.8748906074186820253805

$N[\text{Power}[0.02747572685222671103359258446515016271` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.3017517031835172156894

$N[\text{Power}[0.38537550918933112413464824268453961684` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.7277150731016115605432

$N[\text{Power}[0.4707916941992898430847500022320740875` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.7779343185075439912877

$N[\text{Power}[0.66967064532616041328819528590858236574` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.8748906074186820184239

$N[\text{Power}[0.66967064532616040432847757934875271754` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.8748906074186820145221

$N[\text{Power}[0.47079169419928993562089014806357895912` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.7779343185075440422565

$N[\text{Power}[0.38537550918933102287009852901236348904` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.7277150731016114968030

$N[\text{Power}[0.02747572685222673305563354526224136677` 24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.3017517031835172963083

$N[\text{Power}[0.00885238178271547694372751084774805741`24.862310374016836,$
 $(3)^{-1}],22]$

0.20686485443486627328451015

$t=\{0.2068648544348662732845101475853975929,$
 $0.87489060741868202537664557265147445762,$
 $0.87489060741868202538054253156331971648,0.301751703183517215689353959$
 $45721406533,0.72771507310161156054316061710469724652,0.7779343185075439$
 $9128774597501518646327,0.87489060741868201842392633379465687055,0.87489$
 $060741868201452212130904043262387,0.7779343185075440422565289906824985$
 $325,0.72771507310161149680295793141481215794\}$

$\{0.206864854434866273284510147585397593,0.87489060741868202537664557265$
 $14744576,0.8748906074186820253805425315633197165,0.30175170318351721568$
 $93539594572140653,0.72771507310161156054316061710469724652,0.7779343185$
 $0754399128774597501518646327,0.8748906074186820184239263337946568706,0.$
 $8748906074186820145221213090404326239,0.777934318507544042256528990682$
 $4985325,0.72771507310161149680295793141481215794\}$

$\backslash[\text{CapitalPhi}][x_]:=2/(2/(-t[[1]]-x)+2/(t[[1]]-x)-1/(-t[[2]]-x)-1/(t[[2]]-x)+1/(t[[3]]-x)$
 $+1/(-t[[3]]-x)-1/(-t[[4]]-x)-1/(t[[4]]-x)+1/(-t[[5]]-x)+1/(t[[5]]-x)-1/(-t[[6]]-x)-$
 $1/(t[[6]]-x)+1/(-t[[7]]-x)+1/(t[[7]]-x)-1/(-t[[8]]-x)-1/(t[[8]]-x)+1/(-t[[9]]-x)+1/(t[[9]]-x)$
 $-1/(-t[[10]]-x)-1/(t[[10]]-x)-1/x)$

$\backslash[\text{CapitalPhi}][x]//\text{Chop}$

2 $(1/(-0.8748906074186820253805425315633197165-x)-1/(-$
 $0.8748906074186820253766455726514744576-x)+1/(-$

$0.8748906074186820184239263337946568706-x)-1/(-$
 $0.8748906074186820145221213090404326239-x)+1/(-$
 $0.7779343185075440422565289906824985325-x)-1/(-$
 $0.77793431850754399128774597501518646327-x)+1/(-$
 $0.72771507310161156054316061710469724652-x)-1/(-$
 $0.72771507310161149680295793141481215794-x)-1/(-$
 $0.3017517031835172156893539594572140653-x)+2/(-$
 $0.206864854434866273284510147585397593-$
 $x)+2/(0.206864854434866273284510147585397593-x)-$
 $1/(0.3017517031835172156893539594572140653-x)-$
 $1/(0.72771507310161149680295793141481215794-$
 $x)+1/(0.72771507310161156054316061710469724652-x)-$
 $1/(0.77793431850754399128774597501518646327-$
 $x)+1/(0.7779343185075440422565289906824985325-x)-$
 $1/(0.8748906074186820145221213090404326239-$
 $x)+1/(0.8748906074186820184239263337946568706-x)-$
 $1/(0.8748906074186820253766455726514744576-$
 $x)+1/(0.8748906074186820253805425315633197165-x)-1/x)$

Plot[\[CapitalGamma][x]-\[CapitalPhi][x],{x,-1,1}]

FindRoot[\[CapitalGamma][x]-\[CapitalPhi][x],{x,-0.99}]/Chop

t={0.000000,0.206864, 0.3017510, 0.7277150,0.7779343,0.87489}

{0.,0.206864,0.301751,0.727715,0.777934,0.87489}

$\backslash[\text{CapitalPhi}][x_]:=2(1/(-t[[1]]-x)+1/(t[[1]]-x)-1/(-t[[2]]-x)-1/(t[[2]]-x)+1/(t[[3]]-x)+1/(-t[[3]]-x)-1/(-t[[4]]-x)-1/(t[[4]]-x)+1/(-t[[5]]-x)+1/(t[[5]]-x)-1/(-t[[6]]-x)-1/(t[[6]]-x))$

$\backslash[\text{CapitalPhi}][x]//\text{Chop}$

2 (-1/(-0.87489-x))+1/(-0.777934-x)-1/(-0.727715-x)+1/(-0.301751-x)-1/(-0.206864-x)-1/(0.206864 -x)+1/(0.301751 -x)-1/(0.727715 -x)+1/(0.777934 -x)-1/(0.87489 -x)-2/x

$\text{Plot}[\backslash[\text{CapitalGamma}][x]-\backslash[\text{CapitalPhi}][x],\{x,-1,1\}]$

t={0.2068648544348662732845101475853975929,
0.87489060741868202537664557265147445762,
0.30175170318351721568935395945721406533,0.727715073101611560543160617
10469724652,0.77793431850754399128774597501518646327,0.0000000000000000
0000}

{0.206864854434866273284510147585397593,0.87489060741868202537664557265
14744576,0.3017517031835172156893539594572140653,0.72771507310161156054
316061710469724652,0.77793431850754399128774597501518646327,0.*10^-20}

$\backslash[\text{CapitalPhi}][x]//\text{Chop}$

2 (-1/(-0.8748906074186820253766455726514744576-x))+1/(-0.77793431850754399128774597501518646327-x)-1/(-0.72771507310161156054316061710469724652-x)+1/(-0.3017517031835172156893539594572140653-x)+1/(-0.206864854434866273284510147585397593-x)+1/(0.206864854434866273284510147585397593-x)+1/(0.3017517031835172156893539594572140653-x)-1/(0.72771507310161156054316061710469724652-

$x) + 1/(0.77793431850754399128774597501518646327 - x) -$

$1/(0.8748906074186820253766455726514744576 - x) + 2/x$

`Plot[\[CapitalGamma][x] - \[CapitalPhi][x], {x, -1, 1}]`