

თ. ოზაძე

მათემატიკური მოდელირების კურსი  
(დინამიკური სისტემები და ქაოსი)

VI ტომი

თბილისი  
2013

უაკ 517.958

ნაშრომი ეძღვნება თანამედროვე არაწრფივი სისტემების თეორიისა და ქაოსის შესწავლის რთულ პრობლემებს. დღეს ფაქტობრივად არ მოიძებნება ანალოგიური თემატიკის სახელმძღვანელო ქართულ ენაზე, რამაც ამ სფეროში მუშაობის სტიმული მოგვცა. ნაშრომში განხილულია არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების განსაკუთრებული წერტილების გამოკვლევისა და კლასიფიკაციის ამოცანები. განხილულია ჰამილტონური სისტემების აგების ტექნიკა. შესწავლილია ქაოსის წარმოქმნისა და არაწრფივი სისტემების თვითორგანიზაციის ამოცანების დინამიკის მოდელირების მეთოდები. ყოველი თავის ბოლოს დართულია შესაბამისი პრაქტიკული სავარჯიშოები.

რეცენზენტი სრული პროფესორი ზ. გასიტაშვილი



საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2013  
ISBN 99940-57-16-2 (ყველა ტომი)  
ISBN 978-9941-20-209-4 (VI ტომი)

ედღვნება  
ჩემი მასწავლებლის  
აკადემიკოს  
გიორგი ივანეს ძე პეტროვის  
ნათელ ხსოვნას

## წინასიტყვაობა

რეალური სისტემები, ძირითადად, არაწრფივია, ამიტომაც მათი მოდელირებისა და მუშაობის კანონზომიერებების დადგენას დიდი მნიშვნელობა აქვს. არაწრფივი სისტემები გვხვდება, როგორც ხელსაწყოებისა და მათი მართვის რეჟიმების მოდელირებისას, ასევე, სოციალურ-ეკონომიკური პროცესების შესწავლისას; ეკოლოგიური პროცესების მართვის რეჟიმებისა და სიგნალების გადაცემისას; საფრენი აპარატებისა და წყალქვეშა ხომალდების მართვის დინამიკური პროცესების მოდელირებისას; ტექნოლოგიური პროცესების მართვის ავტომატიზაციისა და რთული სისტემების ფუნქციონირების მოდელირებისას. დიდ ინტერესს იწვევს, არაწრფივ დეტერმინირებულ სისტემებში ქაოსის წარმოქმნის მექანიზმებიც. ვინაიდან, ახალი სისტემების პროექტირებისას, გასათვალისწინებელია მათი ფუნქციონირების რეჟიმების ცვლილებათა თავისებურებანი და სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლის შესაძლებლობები, რამაც შეიძლება სისტემა დაანგრეოს ან უმართავი გახადოს.

შემოთავაზებულ კურსს, ავტორი წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში და ამჟამად, კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდური მითითებების მიმართ მიდგომა, წარმოადგენს ჩემი სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. წიგნი ადაპტირებულია ტექნიკური უნივერსიტეტის პირველი კურსის მაგისტრანტებისა და დოქტორანტების მომზადების დონის გათვალისწინებით.

ავტორი მადლობას უხდის პროფ. ა.ფრანგიშვილს, წიგნზე მუშაობისას გაწეული ხელისშეწყობისა და გვერდზე დგომისათვის; დიდ მადლობას უხდის პროფ. ზ.გასიტაშვილს იმ სიტბოსა და მეგობრობისათვის, რამაც ხელი შეუწყო მოცემული სახელმძღვანელოს შექმნას.

## ნაწილი 1. მეორე რიგის, ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა

### შესავალი

ადამიანი ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში აგროვებს გარკვეულ გამოცდილებას, რომელიც თავიდან ცოდნის მოუწესრიგებელ მარაგს ქმნის.

შემდეგ, ხდება შეგროვილი ინფორმაციის სისტემატიზაცია და კლასიფიკაცია. ამ ეტაპზე დაგროვილი ცოდნა წარმოადგენს – მოძღვრებას, კარლ ლინეის ტიპთა შესახებ მოძღვრების ანალოგიურად.

ამის შემდეგ, შეისწავლება მოძღვრებაში განხილულ ობიექტთა განვითარებისა და ურთიერთქმედების ძირითადი კანონზომიერებები, რომლებიც ძირითადად დაკავშირებულია ცოდნის სხვა უფრო ღრმად შესწავლილ სფეროებთან, ანალოგიისა და ინტუიციის გზით, ამიტომ ხშირად ატარებენ სუბიექტურ-შემოქმედებით ხასიათს. ცოდნის განვითარების ამ ეტაპს – ხელოვნება ეწოდება.

შემდეგ ეტაპზე, ხდება ძირითად ცნებათა და კანონზომიერებათა მწყობრ, აქსიომატურ სისტემად ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას გვაძლევს ცოდნის მოცემული სფეროს ფარგლებში გაწარმოთ შესაბამის მოვლენათა პროგნოზირება. ამ ეტაპზე, ჩვენი ცოდნათა მარაგი იძენს მეცნიერულ დონეს.

თანამედროვე მათემატიკის მიღწევებმა(მანდელბროტის ფრაქტალების თეორია) საშუალება მოგვცა აგვეხსნა „მშვენიერების“ არსიც.

აღმოჩნდა, რომ ჩვენ მოგვწონს ხელოვნების ესა თუ ის ნიმუში, ფორმისა და შინაარსის ჰარმონიის შერწყმით, „შემთხვევით-გამოუცნობთან“(ოქროს კვეთის ფარგლებში), რაც დამალულია უცხო დამკვირვებლის თვალთაგან.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა, დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. ჩვენი განვითარებისა და ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენებიც (სამყაროს მოდელები) იცვლებიან.

**განასხვავებენ მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას.**

- ა) ფიზიკური მოდელირება;
- ბ) იმიტაციური მოდელირება;
- გ) მათემატიკური მოდელირება.

**განსაზღვრება:** მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ ამ მოვლენის

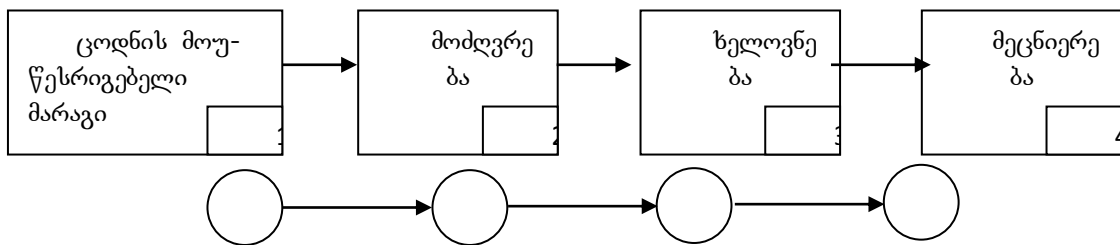
ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები მოდელირება ეწოდება.

- ა) **ფიზიკური მოდელი** – არის ნატურალურ, ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტალურად;
- ბ) **იმიტაციური მოდელი** – არის კომპიუტერული მოდელი, რომელიც გაითამაშებს მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ რეალიზაციებს;

გ) **მათემატიკური მოდელი** – არის მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის სურათი, განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის მოცემული სიზუსტით.

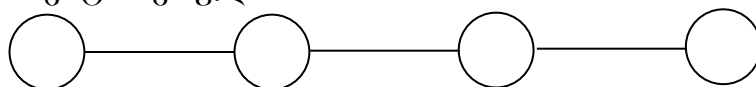
უმარტივესი მათემატიკური მოდელის მაგალითია, რაიმე პროცესის ბლოკ-სქემა.

განვიხილოთ ცოდნის ევოლუციის მოდელი გრაფის მეშვეობით.



ნახ. 1. ცოდნის ევოლუციის ბლოკ-სქემა და გრაფი.

ცხადია, რომ მოყვანილი გრაფი არის მეტად გამარტივებული, სქემატური, რადგან ყოველ ეტაპზე, ხდება შებრუნებული პროცესიც, ანუ, ცოდნის მოუწესრიგებელი მარაგის მოძღვრებად გადაქცევის პარალელურად, ხდება ცოდნის მოცულობის გაფართოვებაც და ა.შ. ასე რომ, ცოდნის ევოლუციის გრაფი არ უნდა იყოს ორიენტირებული.



ნახ. 2. ცოდნის ევოლუციის არაორიენტირებული გრაფი.

მათემატიკური მოდელები, მოდელირების მეთოდების მიხედვით იყოფიან ორ ძირითად ჯგუფად: ა) უწყვეტი მათემატიკური მოდელები და ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელები; თუმცა, არსებობენ  
გ) შერეული ტიპის, რთული სისტემების - სინთეზური მათემატიკური მოდელებიც.

### თავი 1. არადემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემების მოდელირება

ჩვენს გარშემო არსებული მოვლენების უმრავლესობა, ხასიათდება განმსაზღვრელი პარამეტრების რხევითი ცვალებადობით რაიმე მონოტონურად ცვლადი პარამეტრის(დროის) მიმართ. ასეთ პროცესებს რხევითი პროცესები ეწოდებათ. რხევით სისტემებს, ზოგჯერ, ოსცილატორებს უწოდებენ.

ზოგად შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხასიათდება თავისუფლების ხარისხით, ანუ სისტემის განმსაზღვრელი პარამეტრების აუცილებელი რაოდენობით. მაგალითად, თუ ჩვენ ვსწავლობთ მყარი სხეულის ბრუნვით რხევებს სიმეტრიის ღერძის გარშემო, მაშინ მოძრაობის აღსაწერად საკმარისია ერთი პარამეტრი - მობრუნების კუთხე. რაც იმას ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთის ტოლია. რხევითი სისტემების ძირითადი თავისებურებები, ნათლად ჩანს უკვე ისეთ ოსცილატორების მაგალითზეც, რომელთა თავისუფლების ხარისხიც ერთის ტოლია. ამიტომ სიმარტივისათვის, ჩვენ განვიხილავთ რხევითი სისტემების ძირითად ცნებებს სწორედ ასეთი მარტივი ოსცილატორების მაგალითებზე, თუმცა, არსებობენ ისეთი რხევითი სისტემებიც, რომელთა თავისუფლების ხარისხიც მეტია ერთზე.

რხევითი სისტემების დახასიათება ხდება, ასევე, ორი ძირითადი მიმართულებით. ესენია, წრფივი და არაწრფივი რხევითი სისტემები. იმის მიხედვით, თუ, როგორ ტიპს მიეკუთვნება ის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც აღწერენ შესაბამის მათემატიკურ მოდელებს. რეალური რხევითი სისტემები ყოველთვის არაწრფივია, თუმცა, მიახლოებით, კვლევის გამარტივების მიზნით, ისინი შეიძლება შეიცვალოს შესაბამისი წრფივი სისტემებით.

ვთქვათ, განვიხილება რხევითი სისტემა ერთი განმსაზღვრელი  $x(t)$  პარამეტრით, რომელიც დამოკიდებულია მონოტონურად ცვლად  $t$  პარამეტრზე.

**განსაზღვრება:** ისეთ რხევით სისტემებს, რომელთათვისაც ადგილი აქვს ტოლობას  $x(t) = x(t+T)$  პერიოდული რხევითი სისტემა ეწოდება. ხოლო ისეთ მინიმალურ  $T$  მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ამ ტოლობას აქვს ადგილი რხევი პერიოდი ეწოდება.

**განსაზღვრება:** რხევის პერიოდის შებრუნებულ სიდიდეს  $f = \frac{1}{T}$  რხევის სიხშირე ეწოდება. რხევის სიხშირე გვიჩვენებს სრულ რხევათა რაოდენობას მონოტონური პარამეტრის(დროის) ერთი ერთეულით ცვლილების განმავლობაში. თუ, რხევის პერიოდს გავზომავთ წამებში, მაშინ რხევის სიხშირის ერთეული იქნება ჰერცი(რხევათა რიცხვი ერთ წამში).

რხევის სიხშირის დასახასიათებლად ზოგჯერ, იყენებენ კუთხურ სიხშირეს  $\omega$ , რომელიც გამოხატავს რხევათა რაოდენობას  $2\pi$  მონოტონური პარამეტრის მნიშვნელობის(წამის) განმავლობაში. ასე, რომ  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

საინტერესოა, თუ რა რიცხვითი მნიშვნელობები აქვთ იმ რხევითი პროცესების რხევის სიხშირეს, რაც გვხვდება ბუნებაში აი შესაბამისი მაგალითებიც, გამოსახული წმ<sup>-1</sup> ერთეულებში:

- $10^{-10}$  – პლანეტების საუკუნებრივი შემფოთებების სიხშირე ;
- $10^{-8}$  – პლანეტების ბრუნვის სიხშირე ;
- $10^{-5}$  – მოქცევა-უკუქცევის სიხშირე ;
- $10^1$  – რხევის სიხშირე მანქანებში ;
- $10^0$  – წამების ქანქარა ;
- $10^4$  – აკუსტიკური რხევები ;
- $10^5 - 10^8$  – ულტრაბერითი მექანიკური რხევები ;
- 50 – ცვლადი დენი ;
- $10^{12}$  – ინფრაწითელი გამოსხივება ;
- $10^{15}$  – ხილული ოპტიკური სპექტრი ;
- $10^{18}$  – რენტგენის სხივები ;
- $10^{20}$  -  $\gamma$  სხივები ;
- $10^{23}$  – კოსმოსური სხივები.

რხევითი პროცესები ხასიათდებიან აგრეთვე  $A$  ამპლიტუდით.

**განსაზღვრება:** ერთი სრული რხევის განმავლობაში გადახრის ნახევრის სიგრძეს ამპლიტუდა ეწოდება.

თუ,  $x_{\max}$  - უდიდესი და  $x_{\min}$  - უმცირესი მნიშვნელობებია ჰორიზონტული ზამბარის  $x(t)$  გადახრისთვის, რხევის ერთი პერიოდის განმავლობაში, მაშინ რხევის ამპლიტუდა  $A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$ .



პერიოდული რხევებისას, გადახრის განზოგადოებული კოორდინატი  $x(t)$ , ასრულებს რხევებს  $x_0$  საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში

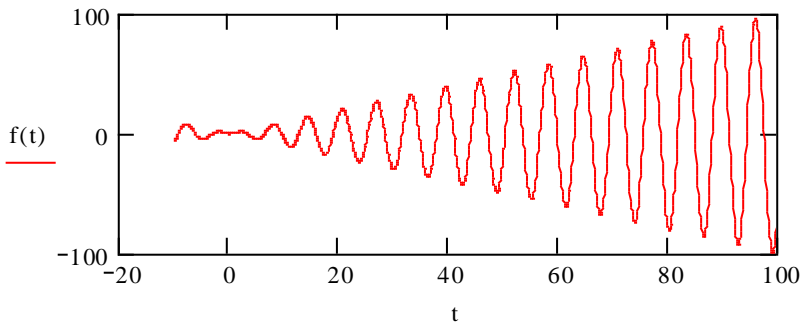
$$x_0 = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min}).$$

სიმეტრიული რხევების შემთხვევაში, ეს მნიშვნელობა შეესაბამება აგრეთვე წონასწორობის ან უძრაობის მდგომარეობას.

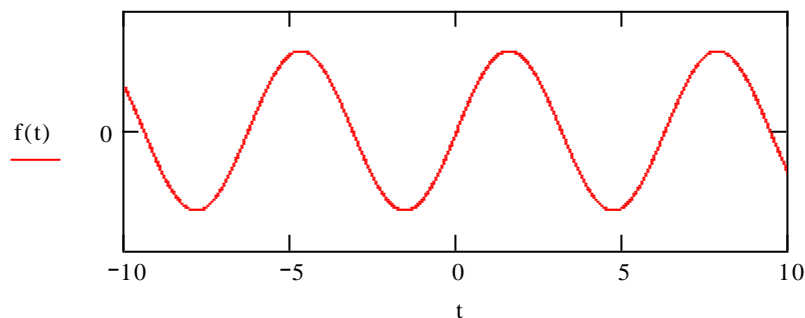
**განსაზღვრება:** თუ,  $x(t)$  ფუნქცია მხოლოდ მიახლოებითაა პერიოდული, ანუ  $|x(t) - x(t+T)| \leq \varepsilon$  წინასწარ არჩეული  $\varepsilon$ - მცირე სიდიდისათვის, მაშინ  $x(t)$  ფუნქციას თითქმის - პერიოდული ფუნქცია ეწოდება.

რხევითი სისტემები ხასიათდებიან რხევის ამპლიტუდის ცვლილების ხასიათით რაიმე მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით.

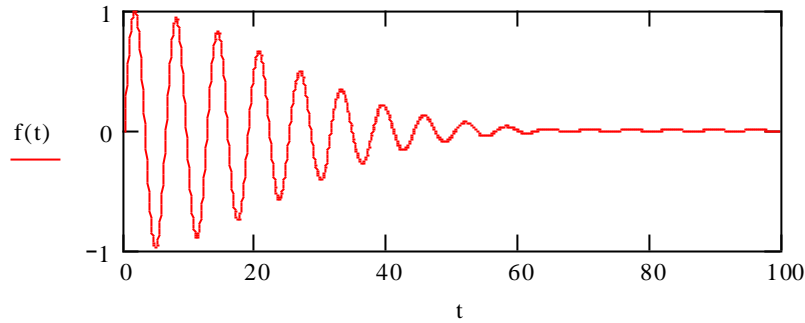
ამპლიტუდის მიხედვით, განასხვავებენ: რხევებს ზრდადი ამპლიტუდით (ნგრევადი სისტემები) ნახ. 3, მუდმივი ამპლიტუდით(პერიოდული) ნახ. 4 და რხევებს, კლებადი ამპლიტუდით (მიღევადი) ნახ 5.



ნახ. 3. რხევები ზრდადი ამპლიტუდით



ნახ. 4. რხევები მუდმივი ამპლიტუდით



ნახ. 5. რხევები მიღევადი ამპლიტუდით

რხევით სისტემებს განასხვავებენ, ასევე, წარმოქმნის მექანიზმიდან გამომდინარე შემდეგ ტიპებად:

1. საკუთრივი რხევითი სისტემები (თავისუფალი რხევები);
2. ავტორხევითი სისტემები (თვითაგზნებადი რხევები);
3. პარამეტრული რხევითი სისტემები (პარამეტრით აგზნებადი რხევები);
4. იძულებითი რხევითი სისტემები(მაიძულებელი ძალის გავლენით წარმოშობილი რხევები);
5. ბმული რხევითი სისტემები(რამოდენიმე რხევითი სისტემა ერთმანეთთანაა შებმულ-შეკავშირებული).

განვიხილოთ რხევითი სისტემის თითოეული ეს ტიპი.

**საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემები** ხასიათდებიან იმით, რომ მათი დინამიკა მთლიანად ემყარება საწყის ბიძგს და ამის შემდეგ ისინი აღარ იღებენ გარე ზემოქმედებას. ასე, რომ მათი ენერჯის გაზრდა არ ხდება სისტემის გარედან. განვიხილავთ ორი ტიპის საკუთრივ(თავისუფალ) რხევით სისტემებს: ესენია არადემპფირებული და დემპფირებული რხევითი სისტემები. დემპფირებული რხევითი სისტემები გამოირჩევიან იმით, რომ მათში ადგილი აქვს ენერჯის დახარჯვას წინააღმდეგობის ძალების დაძლევაზე.

**მაგალითად**, გრავიტაციული ქანქარა საწყისი ბიძგის შემდეგ იწყებს თავისუფალ რხევას. თავისუფალი რხევითი სისტემების დინამიკა აღიწერება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისაგან განსხვავებით, **ავტორხევით სისტემებში**, ადგილი აქვს ენერჯის შემოდინებას გარედან. ამასთან, ენერჯის წყარო არაა თვითონ რხევითი სისტემა. სისტემა იღებს გარედან, ზუსტად იმდენ ენერჯიას, რამდენსაც ხარჯავს. **მაგალითი:** განვიხილოთ საათი, რომელშიდაც ენერჯის წყაროს წარმოადგენს აწეული ტვირთი ან შეკუმშული ზამბარა. ასეთი საათი ავტორხევით სისტემას წარმოადგენს. **ავტორხევები**

ადიწერებიან არსებითად არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისა და ავტორხევითი სისტემების შემთხვევაში რხევის სიხშირე განისაზღვრება თვით რხევითი სისტემის ხასიათიდან გამომდინარე, ამიტომ ასეთ სისტემებს ავტონომიურ სისტემებს უწოდებენ.

მათგან განსხვავებით, პარამეტრულ და იძულებით რხევით სისტემებს ჰეტერონომიულ სისტემებს უწოდებენ, რადგან რხევის სიხშირე, ასეთ სისტემებში, განისაზღვრება გარე ზემოქმედებიდან გამომდინარე. პარამეტრული ავზნებადობის სისტემებში, გარე ზემოქმედება იწვევს სისტემის შიდა პარამეტრების პერიოდულ ცვალებადობას.

*მაგალითად*, მათემატიკური ქანქარა ძაფზე ჩამოკიდული ტვირთით, როცა ძაფის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. პარამეტრული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელები გამოირჩევიან იმით, რომ შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების ზოგიერთი კოეფიციენტი წარმოადგენს მონოტონური პარამეტრის(დროის) პერიოდულ ფუნქციას.

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე მოქმედებს აგრეთვე, გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ რხევით პროცესებს განსაზღვრავენ არა პერიოდული პარამეტრები, არამედ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც იწვევს შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას.

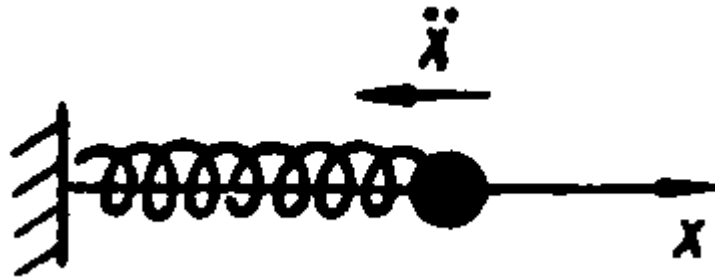
ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ორი ან მეტი რაოდენობის რხევით სისტემასთან, რომლებიც ახდენენ ერთმანეთზე გავლენას. თუ, ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც იმართება პირველი სისტემით.

**P.S.** არსებობენ შერეული ტიპის სისტემებიც, რომლებიც ერთდროულად არიან იძულებითი და ავტორხევითი სისტემები და ა.შ.

განვიხილოთ წრფივი რხევითი პროცესები. ანუ, ისეთი რხევითი პროცესები, რომელთა შესაბამისი მათემატიკური მოდელებიც წარმოადგენენ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს შესაბამისი საწყისი პირობებით.

## 1.1 არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თავისუფალი რხევითი პროცესები წარმოიშობიან მაშინ, როცა სისტემაზე საწყის მომენტში მოქმედებენ ამძრავი ძალები, რომლებიც შემდეგ ქრებიან და სისტემას აძლევენ საშუალებას გამოაჩინოს თავისი შინაგანი ბუნება. თავისუფალი რხევითი პროცესების დროს, სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები პერიოდულად ცვლიან ერთმანეთს. თუ, სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით არ იცვლება(მუდმივია), მაშინ ამ სისტემას კონსერვატული ეწოდება. კონსერვატულ სისტემებში გვაქვს არადემპფირებული (არამიღვევადი) რხევები.



ნახ.1.1. წრფივი ოსცილატორის მექანიკური მაგალითი

განვიხილოთ წრფივი ოსცილატორის მექანიკური რხევები ნახ.1.1. მაგალითზე. ამ შემთხვევაში,  $m$  მასის მქონე სხეული დაკავშირებულია  $c$  სიხისტის მქონე ზამბარით კედელთან, სადაც ზამბარის მეორე მხარე მჭიდროდაა ჩამაგრებული. ასეთ შემთხვევაში, ნიუტონის მეორე კანონს ჩავწერთ  $m$  მასის სხეულისათვის

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx. \quad (1.1)$$

მაშინ, ადვილად მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (1.3)$$

სადაც,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ - რხევის კუთხური სიხშირეა.}$$

კოშის (1.2)-(1.3) ამოცანის ანალიზური ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (1.4)$$

ან ფორმულით

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (1.5)$$

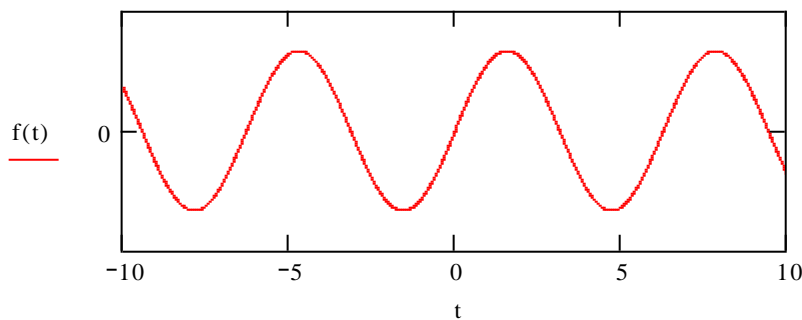
სადაც  $\varphi$  – რხევის საწყისი ფაზაა და

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \quad (1.6)$$

რხევის პერიოდი და სიხშირე შესაბამისად იქნება

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad f = \frac{1}{T}. \quad (1.7)$$

ასეთ რხევებს შეესაბამება ნახ.1.2



ნახ.1.2 თავისუფალი არადემპფირებული რხევითი სისტემის დინამიკა

როგორც ვხედავთ, ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს პერიოდული რხევები მუდმივი  $a$  ამპლიტუდით, რომელიც დამოკიდებულია რხევითი სისტემის საწყის მდგომარეობაზე, ზამბარის სიხისტეზე და მერხევი სხეულის  $m$  მასაზე.

თეორემა: თავისუფალი რხევითი სისტემის სრული მექანიკური ენერჯიის სიდიდე არ იცვლება დროის მიხედვით.

დამტკიცება: მართლაც განვიხილოთ დინამიკის განტოლება, გავამრავლოთ ორივე ნაწილი  $\dot{x}$  სიჩქარეზე და ვაინტეგრროთ, მაშინ მივიღებთ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = 0 \Leftrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + c\dot{x}x = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{c}{2} x^2 \right) = \frac{d}{dt} (E_{kin} + E_{pot}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{kin} + E_{pot} = const$$

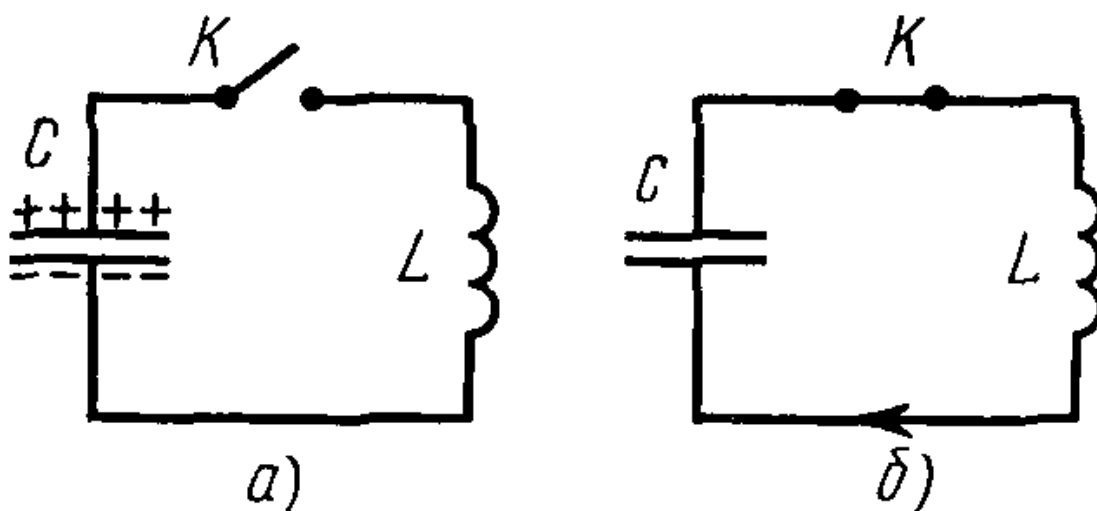
რ.დ.გ.

თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერჯია

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2 \right) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2$$

ანუ, სისტემის ენერგია პირდაპირპროპორციულია რხევის ამპლიტუდის კვადრატისა.

12. არადემფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება



ნახ.13. რხევითი კონტური

თუ, ელექტრული წრედი შეიცავს  $C$  ტევადობის კონდენსატორსა და  $L$  ინდუქციურობის მქონე კოჭას, მაშინ ამ წრედში შეიძლება აღიძვრას ელექტრული რხევები. ამიტომ, ასეთ წრედს რხევით კონტურს უწოდებენ(ნახ.13). ვთქვათ, ჯერ კონდენსატორის ზედა ფირფიტა დამუხტულია დადებითად, ხოლო ქვედა ფირფიტა – უარყოფითად(ნახ.13, a). ამავე დროს, რხევითი კონტურის მთელი ენერგია თავმოყრილია კონდენსატორში. ჩაერთოთ  $K$  ჩამრთველი, მაშინ კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და  $L$  კოჭაში გავა დენი. კონდენსატორის ელექტრული ენერგია დაიწყებს კოჭას მაგნიტურ ენერგიად გარდაქმნას. ეს პროცესი დამთავრდება, როცა მოხდება კონდენსატორის მთლიანი განმუხტვა და წრედში გვექნება მაქსიმალური დენის ძალა(ნახ.13, b). ამ მომენტიდან დენის ძალა დაიწყებს შემცირებას ისე, რომ არ შეიცვლის მიმართულებას. მაგრამ შემცირება მოხდება თანდათან, ვინაიდან მის შემცირებას ეწინააღმდეგება კოჭას თვითინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალა. დენის ხარჯზე დაიწყება კონდენსატორის დამუხტვა, წარმოიქმნება ელექტრული ველი, რომელიც ამცირებს დენის ძალას. ბოლოსდაბოლოს კონდენსატორი მიიღებს მაქსიმალურ მუხტს, ხოლო დენი გათავდება. ამის შემდეგ, კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და დენი დაიძვრება საპირისპირო მიმართულებით და ა. შ. კონტურში

თუ არა გვაქვს წინაღობა, მაშინ მივიღებთ მკაცრად პერიოდულ რხევებს.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $Q$  არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე,  $U_c$  კონდენსატორზე მოდებული ძაბვაა. მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}. \quad (1.8)$$

ასევე, თუ  $I$  არის დენის ძალა და  $U_L$  კოჭაზე მოდებული ძაბვაა

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (1.9)$$

კირხოფის კანონის თანახმად, ამ შემთხვევაში გვექნება განტოლება

$$U_L + U_c = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.10)$$

მაგრამ, დენის ძალა არის მუხტის ცვლილების სიჩქარე, ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.11)$$

(1.10)-(1.11) ტოლობებიდან ცხადია, რომ გვექნება განტოლება

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (1.12)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (1.13)$$

მაშინ, რხევითი კონტურის განტოლება (1.12) გადაიწერება თავისუფალი რხევების კანონიკური განტოლების სახით

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (1.14)$$

ცხადია, რომ მიიღება ჰარმონიული ელექტრული რხევები  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  სიხშირის, ხოლო რხევის პერიოდი იქნება

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \text{ ამ ფორმულას ელექტროდინამიკაში ტომპსონის}$$

ფორმულას უწოდებენ.

რხევითი სისტემის დინამიკა ისეთივეა, როგორც ნახ.1.2 გამოსახული.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, მივიღეთ იგივე სახის მათემატიკური მოდელი, როგორც თავისუფალი მექანიკური რხევების დროს. რაც იმას ნიშნავს, რომ ბუნება ერთიანია და თავისუფალი რხევითი სისტემები ელექტრული სისტემებისათვის, ემორჩილებიან იგივე კანონზომიერებებს, როგორც მექანიკური სისტემებისათვის.

### 1.3. არადემპფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, გვაქვს ორი სახის ცხოველები. აქედან, ერთი სახის ცხოველები იკვებებიან მეორე სახის ცხოველებით. ხოლო მეორე სახის ცხოველები იკვებებიან ბალახით. ისმის კითხვა, მოსალოდნელია, თუ არა რომ პირველმა სახემ მოლიანად გაანადგუროს მეორე სახის ცხოველები ?

ავაგოთ, ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $N_1(t)$  არის პირველი სახის(მტაცებლების) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო  $N_2(t)$  - მსხვერპლის შესაბამისი რაოდენობა. თუ, მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება და გვაქვს კანონი

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2, \quad (1.15)$$

სადაც  $\varepsilon_2$  არის ზრდის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ასევე, თუ მტაცებლები აღმოჩნდებიან მარტო, მაშინ მათი რაოდენობა შიმშილის გამო განადგურდება. შესაბამის კანონს აქვს სახე

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1, \quad (1.16)$$

სადაც  $\varepsilon_1$  არის მტაცებლების სიკვდილიანობის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ეხლა განვიხილოთ, ამ ორი სახეობის ერთდროული თანაცხოვრება შესაბამის არეალზე. მაშინ, მტაცებლების გამრავლების სისწრაფე დამოკიდებული იქნება მსხვერპლთან მათი შეხვედრების რაოდენობაზე, რომელიც პროპორციულია  $N_1 \cdot N_2$  სიდიდის. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ ვოლტერას მოდელს

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2, \quad (1.17)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2, \quad (1.18)$$

სადაც  $\gamma_1$  - მსხვერპლის სიკვდილიანობის კოეფიციენტია მტაცებლებთან შეხვედრის გამო;  $\gamma_2$  - მტაცებლების გამრავლების კოეფიციენტია.

ეხლა, განვიხილოთ ამ მოდელის წონასწორობის წერტილები, ანუ ის მნიშვნელობები, რომელთა დროსაც სისტემა სტაციონარულია

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2 = 0, \quad (1.19)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2 = 0. \quad (1.20)$$

ამ სისტემის არატრივიალური ამონახსნია



$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}. \quad (1.21)$$

სახეობათა რაოდენობების წონასწორული მნიშვნელობების მცირე მიდამოში, ანუ როცა  $n_1(t)$  და  $n_2(t)$  მცირე სიდიდეებია, გვაქვს თანადობები

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (1.22)$$

თუ, ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ ვოლტერას (1.19)-(1.20) მოდელში და მოვახდენთ მიღებული განტოლებების ლინეარიზაციას, მივიღებთ სისტემას

$$\dot{n}_1 = \frac{\gamma_2 \varepsilon_2}{\gamma_1} n_2, \quad (1.23)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\gamma_2} n_1. \quad (1.24)$$

თუ, განტოლება (1.23)-ს გავაწარმოებთ დროით და გავითვალისწინებთ განტოლება (1.24)-ს, მივიღებთ

$$\ddot{n}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 = 0. \quad (1.25)$$

სადაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (1.26)$$

მივიღებთ თავისუფალი სისტემების რხევის კანონიკურ განტოლებას

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (1.27)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, აქაც მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემების რხევის მათემატიკური მოდელი. აქ ნათლად ჩანს, რომ ის თუ, როგორი იქნება შედეგი, ორი სახეობის თანაცხოვრებისა დამოკიდებულია მათი გამრავლებისა და სიკვდილიანობის სიჩქარეთა კოეფიციენტების მნიშვნელობებზე.

#### 1.4. არადემპფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელი)

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (1.28)$$

სადაც,  $C(t)$  - მოხმარებაა,

$I(t)$  - ინვესტიციები,

$X(t)$  - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot X(t), \quad (1.29)$$

სადაც  $\beta(t)$  - აქსელერაციის კოეფიციენტი. გარდა ამისა,  $C(t)$  - მოხმარება წარმოადგენს ეროვნული შემოსავლის ფუნქციას და ის დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (1.30)$$

თუ, (1.29) და (1.30) თანადობებს შევიტანთ (1.28) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (1.31)$$

განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t]. \quad (1.32)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის ფრანგიშვილი-ობგაძის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (1.33)$$

რადგან,  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (1.33) განტოლება გავეყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (1.34)$$

თუ, ფრანგიშვილი-ობგაძის განზოგადებულ განტოლებაში (1.34), მოვახდენთ ჩასმას

$$\beta(t) = t \text{ და } F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega^2 \cdot X(t), \quad (1.35)$$

მაშინ, დინამიკის (34) განტოლებიდან მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემების კანონიკურ განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0. \quad (1.36)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

## ამოცანები და სავარჯიშოები

1. შეადგინეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ მიღებული სისტემის: რხევის პერიოდი, სიხშირე, ფაზა და ამპლიტუდა, სისტემის საწყისი მდგომარეობიდან გამომდინარე.

2. შეისწავლეთ ენერჯის შენახვის კანონი თავისუფალი რხევითი სისტემებისათვის.
3. გამოიკვლიეთ თავისუფალი რხევითი სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე. იპოვეთ ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეზე.
4. შეადგინეთ მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (ზამბარაზე გამობმული ტვირთი ნახ.1.1.) იმ შემთხვევაში, როცა  $m$  მასის ტვირთზე მოქმედებს ხახუნის ძალაც. იქნება, თუ არა ასეთი სისტემა თავისუფალი? რხევები იქნებიან დემპფირებული, თუ არა?
5. ჩამოთვალეთ რხევითი სისტემების ტიპები.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн, Наука, Москва, 1984
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, Москва, 1959
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование, Наука, Москва, 1976
4. Магнус К. Колебания, пер. с немецкого, Мир, Москва, 1982
5. Шмидт Г. Параметрические колебания, пер. с нем., Мир, Москва, 1978
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны, изд. Саратовского ГУ, Саратов, 2002
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн, пер. с англ., Мир, Москва, 1979
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2, Наука, Москва, 1972
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1973
10. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
11. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
12. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973

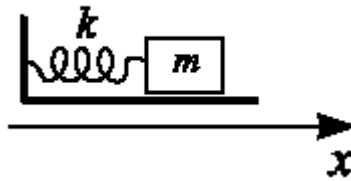
- 15.თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
- 16.თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
- 17.М.Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988

## თავი 2. დემპფირებული თავისუფალი (საკუთრივი) რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თუ, რხევითი სისტემის მთლიანი ენერგია მცირდება (წინააღმდეგობის ძალების გადალახვაზე შესრულებული მუშაობის გამო), მაშინ ასეთ სისტემას დემპფირებული სისტემა ეწოდება. დემპფირებულ თავისუფალ სისტემებში, გვაქვს დემპფირებული (პერიოდული-მილევადი ან არაპერიოდული-მილევადი) რხევები.

### 2.1. დემპფირებული თავისუფალი (საკუთრივი) მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული საკუთრივი(თავისუფალი) მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი (ნახ. 2.1). როცა ზამბარის სიხისტეა  $c$ , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი  $k$ ; მაშინ  $F_{\text{max}} = -kx$



ნახ. 2.1. დემპფირებული საკუთრივი რხევები  $m$  მასის ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის გათვალისწინებით

შევადგინოთ  $m$  მასის ტვირთის თავისუფალი რხევის მათემატიკური მოდელი ხახუნის ძალის გათვალისწინებით.

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}. \quad (2.1)$$

თუ, გავყოფთ  $m$  მასის მნიშვნელობაზე (2.1) განტოლების ორივე მხარეს და შემოვიღებთ ადნიშვნებს

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{c}{m} = 2\gamma, \quad (2.2)$$

მივიღებთ, დემპფირებული თავისუფალი(საკუთარი) რხევითი სისტემის მოდელს

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (2.3)$$

სადაც  $\omega_0$  - სისტემის თავისუფალი რხევების სიხშირეა, ხოლო  $\gamma$  - მილევადობის კოეფიციენტი.

თუ, (2.3) დიფერენციალურ განტოლებაში მოვახდენთ ეილერის ჩასმას  $x(t) = e^{rt}$ , მაშინ მივიღებთ შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (2.4)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (2.3) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (2.5)$$

აქ უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) თუ,  $\gamma < \omega_0$ , მაშინ (41) ტოლობიდან გამომდინარე, გვაქვს მახასიათებელი ალგებრული განტოლების ორი კომპლექსური ურთიერთშეუღლებული  $r$  ამონახსნი. ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმით

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (2.6)$$

რხევის პერიოდი გამოითვლება ფორმულით

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad \text{ხოლო } A_0 \text{ და } \varphi \text{ მუდმივი რიცხვები}$$

განისაზღვრებიან საწყისი პირობებიდან გამომდინარე.

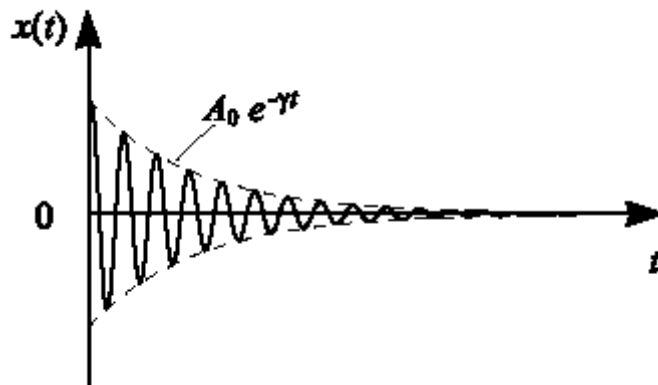
$$x(0) = 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (2.8)$$

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2 / \omega^2} \quad (2.9)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0 / A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 + \gamma x_0) / (\omega A_0) \quad (2.10)$$

ეს შემთხვევა, შეესაბამება მიღევად რხევით პროცესებს ნახ. 2.2.



ნახ. 2.2. მიღევადი რხევები

ამპლიტუდის მიღევადობის სისწრაფე იმართება  $\gamma$  პარამეტრით. ხოლო დემპფირებული (2.3) სისტემის რხევების სიხშირე  $\omega < \omega_0$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალა ამცირებს სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირეს, ანუ, დემპფირებული სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირე ნაკლებია შესაბამისი არადემპფირებული სისტემის რხევების სიხშირეზე.

$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$  - სიდიდეს მიღევადი რხევების ამპლიტუდას უწოდებენ. როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, რხევის ამპლიტუდა

ასეთ შემთხვევებში, კლებულობს ექსპონენციალურად. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $A_n$  - ით აღნიშნოთ წრფივი თავისუფალი დემპფირებული სისტემის, წონასწორობის მდგომარეობიდან დადებითი მიმართულებით მაქსიმალური მიმდევრობითი გადახრის სიდიდეები. ცხადია რომ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებენ რეკურენტულ თანადობას

$$A_{n+1} = e^{-\gamma \cdot T} A_n. \quad (2.11)$$

გამოვითვალთ, რამდენჯერ შემცირდება რხევის ამპლიტუდა ერთი პერიოდის განმავლობაში, მივიღებთ

$$(A_{t+T} = A_0 \cdot e^{-\gamma(t+T)}, \quad A_t = A_0 \cdot e^{-\gamma t}), \Rightarrow \frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\gamma T} \Rightarrow d = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \gamma \cdot T.$$

**განსაზღვრება:** სიდიდეს  $d = \gamma T$  ოსცილატორის მიღევადობის(ჩაქრობის) **ლოგარითმულ დეკრემენტს** უწოდებენ.

$d$  - ლოგარითმული დეკრემენტის შებრუნებული სიდიდე  $N = \frac{1}{d}$

გვიჩვენებს იმ რხევათა რიცხვს, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა კლებულობს  $e$ - ჯერ.

$T$  - რხევის პერიოდის განმავლობაში ამპლიტუდა მცირდება  $e^{-d}$ -ჯერ.

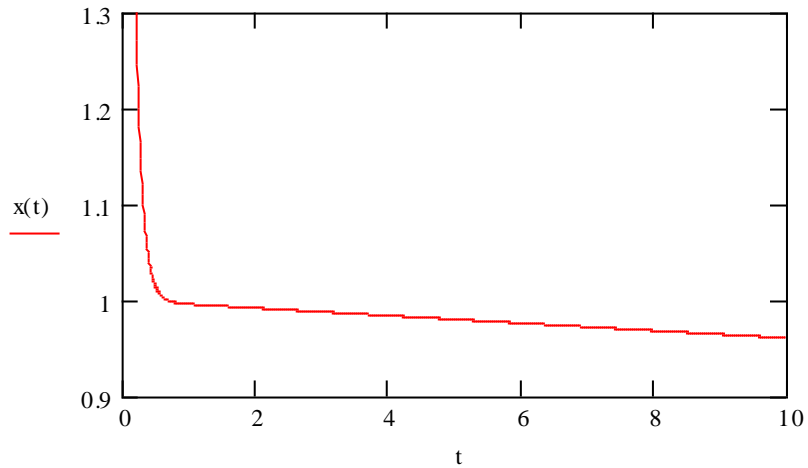
როგორც ვიცით, ენერგია რხევით სისტემაში რხევის ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია, ამიტომ, ამ შემთხვევაში მთლიანი მექანიკური ენერგია მცირდება(ხახუნის გამო სითბოში გარდაიქმნება) კანონით

$$E = E_0 \cdot e^{-2\gamma t}.$$

2) თუ,  $\gamma > \omega_0$  მაშინ  $r$ -ის ორივე მნიშვნელობა ნამდვილ რიცხვს წარმოადგენს და ამავე დროს, ორივე მნიშვნელობა უარყოფითია. დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ შემთხვევაში, აქვს სახე

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (2.12)$$

ამ შემთხვევაში, გვაქვს მოძრაობის აპერიოდული ჩაქრობა ნახ. 2.3.



ნახ. 2.3. აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობა

3) თუ,  $\gamma = \omega_0$ , მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ორჯერადი ფესვი  $r = -\gamma$ . როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}. \quad (2.13)$$

ესეც, აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევაა ნახ. 2.4.

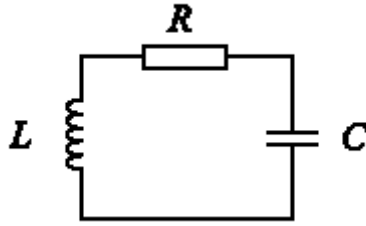


ნახ. 2.4. აპერიოდული მიღვევადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევა

## 2.2. დემპფირებული საკუთრივი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული ელექტრული რხევითი სისტემა ნახ. 2.5.





ნახ. 2.5. დემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი სისტემა

ამ სისტემაში (ნახ.2.5), არადემპფირებული რხევითი კონტურისაგან განსხვავებით, ჩართულია  $R$  წინაღობა, რაც იწვევს ენერჯიის დანაკარგებს და თავისუფალი სისტემა ხდება დემპფირებული.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $Q$  არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე,  $U_c$  კონდენსატორზე მოდებული ძაბვაა. მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}, \quad (2.14)$$

ასევე, თუ  $I$  არის დენის ძალა და  $U_L$  კოჭაზე მოდებული ძაბვაა, მაშინ

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (2.15)$$

ასევე, ძაბვის ვარდნა  $R$  წინაღობაზე იქნება

$$U_r = R \cdot I. \quad (2.16)$$

კირხოფის კანონის თანახმად, ამ შემთხვევაში გვექნება განტოლება

$$U_L + U_r + U_c = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.17)$$

მაგრამ, დენის ძალა არის მუხტის ცვლილების სიჩქარე, ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.18)$$

(2.17)-(2.18) ტოლობებიდან ცხადია, რომ გვექნება განტოლება

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.19)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad (2.20)$$

მაშინ, განტოლება (2.19) მიიღებს სახეს

$$\ddot{Q} + 2\gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (2.21)$$

სადაც  $\omega_0$  - სისტემის საკუთარი (თავისუფალი) რხევების სიხშირეა, ხოლო  $\gamma$  - მიღვეადობის კოეფიციენტი.

**P.S.** როგორც ვხედავთ დემპფირებული თავისუფალი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის (57) განტოლება იდენტურია შესაბამისი დემპფირებული, თავისუფალი, მექანიკური სისტემის დინამიკის (39) განტოლებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ერთნაირად ეხება როგორც მექანიკურ, ასევე, ელექტრულ რხევით სისტემებს.

### 2.3. დემპფირებული საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, გვაქვს ორი სახის ცხოველები. აქედან, მეორე სახის ცხოველები იკვებებიან პირველი სახის ცხოველებით. ხოლო პირველი სახის ცხოველები იკვებებიან ბალახით. შევისწავლოთ ამ სისტემის შესაბამისი დინამიკა. ამისათვის აუცილებელია სისტემის მათემატიკური მოდელის შედგენა.

ავაგოთ, ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $N_1(t)$  არის პირველი სახის(მსხვერპლის) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო  $N_2(t)$  - მტაცებლების შესაბამისი რაოდენობა. თუ, მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება მუდმივი  $k_0$  სიჩქარით, მაგრამ მტაცებლებთან მათი შეხვედრა იწვევს მათი ზრდის სიჩქარის შემცირებას  $k_2$  სიჩქარის კოეფიციენტით. მტაცებლებისა და მსხვერპლის შეხვედრის სიხშირე დამოკიდებულია მათი რაოდენობების ნამრავლზე და მაშასადამე შეგვიძლია, შევადგინოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება

$$N_1(t) = k_0 - k_1 N_1 N_2. \tag{2.22}$$

ანალოგიურად, მტაცებლების რაოდენობის ზრდა დამოკიდებულია მსხვერპლთან შეხვედრების რაოდენობაზე, რაც პირდაპირპროპორციულია მათი რაოდენობების ნამრავლისა. მაგრამ, მტაცებლებიც იღუპებიან სიბერით, ავადმყოფობით ან უფრო ძლიერ მტაცებელთან ბრძოლაში. მათი სიკვდილიანობის კოეფიციენტია  $k_2$ . მაშინ, შესაბამის დინამიკის განტოლებას ექნება სახე

$$\dot{N}_2 = k_1 N_1 N_2 - k_2 N_2. \tag{2.23}$$

სტაციონალური წერტილის საპოვნელად, გაუტოლოთ ნულს (2.22),(2.23) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები. მიღებული სისტემის ამონახსნია

$$N_1^0 = \frac{k_2}{k_1}, \quad N_2^0 = \frac{k_0}{k_2}. \quad (2.24)$$

შევისწავლოთ (2.22),(2.23) სისტემა სტაციონარული (2.24) ამონახსნის მახლობლობაში. ამისათვის საძიებელ რაოდენობებს, მივცეთ მცირე ნაზრდები  $n_1(t)$  და  $n_2(t)$ . ანუ, (2.22), (2.23) განტოლებებში შევიტანოთ ახალი სიდიდეები და უკუვაგლოთ კვადრატული წევრები მცირე ნაზრდების მიმართ

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad (2.25)$$

$$N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (2.26)$$

მაშინ, მივიღებთ

$$\dot{n}_1(t) = -k_2 n_2 - \frac{k_1 k_0}{k_2} n_1, \quad (2.27)$$

$$\dot{n}_2(t) = \frac{k_0 k_1}{k_2} n_1. \quad (2.28)$$

თუ, გავაწარმოებთ (2.27) განტოლებას და შევიტანოთ  $\dot{n}_2(t)$ -ს მნიშვნელობას განტოლებიდან (2.28), მაშინ მივიღებთ

$$\ddot{n}_1 + \frac{k_1 k_0}{k_2} \dot{n}_1 + k_0 k_1 n_1 = 0. \quad (2.29)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\frac{k_1 k_0}{k_2} = 2 \cdot \gamma \quad \text{და} \quad k_0 k_1 = \omega_0^2,$$

მაშინ, განტოლება (2.29) გადაიწერება დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკური სახით

$$\ddot{n}_1 + 2\gamma \dot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (2.30)$$

ეს სისტემა კი, ჩვენ უკვე შესწავლილი გვაქვს ზემოთ.

**P.S.** როგორც ვხედავთ დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა გვხვდება, ასევე, სოციალურ სისტემებშიც. რაც იძლევა იმის საფუძველს, რომ ჩვენ ჩაუღრმავდეთ სხვადასხვა პროცესების აღწერას და ნაკლებად დავიხარჯოთ მიღებული მონაცემების აღმწერი განტოლებების გამოკვლევაზე.

**2.4. დემპფირებული, საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე**

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (2.31)$$

სადაც,  $C(t)$  - მოხმარებაა,

$I(t)$  - ინვესტიციები,

$X(t)$  - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (2.32)$$

სადაც  $\beta(t)$  - აქსელერაციის კოეფიციენტი. გარდა ამისა,

$C(t)$  - მოხმარება წარმოადგენს ეროვნული შემოსავლის ფუნქციას და ის დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (2.33)$$

თუ, (2.32) და (2.33) თანადობებს შევიტანთ (2.31) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (2.34)$$

განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t]. \quad (2.35)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (2.36)$$

რადგან,  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (2.36) განტოლება გაავყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (2.37)$$

თუ, ფრანგიშვილი-ობგაძის განზოგადებულ განტოლებაში (2.37), მოვახდენთ ჩასმას

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left( \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega_0^2 X(t). \quad (2.38)$$

მაშინ, მივიღებთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკურ განტოლებას.

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = 0. \quad (2.39)$$

რომელიც, ჩვენ უკვე შევისწავლეთ სხვა შინაარსის პროცესებისათვის.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორ სისტემებს უწოდებენ დემპფირებულს ?
2. როგორ გამოითვლება დემპფირებული საკუთრივი რხევითი სისტემის მიღევადი რხევების პერიოდი, რა არის ლოგარითმული დეკრემენტი და რისთვისაა საჭირო ?
3. რა შემთხვევაში გვაქვს თავისუფალ, დემპფირებულ სისტემაში არაპერიოდული მიღევადი რხევები ?
4. შეადგინეთ ელექტრული, დემპფირებული რხევითი სისტემის სქემა და ააგეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.
5. მოიყვანეთ სოციალური დემპფირებული სისტემის მაგალითი და აჩვენეთ კოეფიციენტების რა მნიშვნელობებისთვისაა მოსალოდნელი, მიღევადი რხევითი პროცესები და რა შინაარსი შეესაბამება ამ შემთხვევას.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн, Наука, Москва, 1984
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, Москва, 1959
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование, Наука, Москва, 1976
4. Магнус К. Колебания, пер. с немецкого, Мир, Москва, 1982
5. Постников Л.В., Королев В.И. Сборник задач по теории колебаний, Наука, Москва, 1978
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны, изд. Саратовского ГУ, Саратов, 2002
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн, пер. с англ., Мир, Москва, 1979
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2, Наука, Москва, 1972
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1973

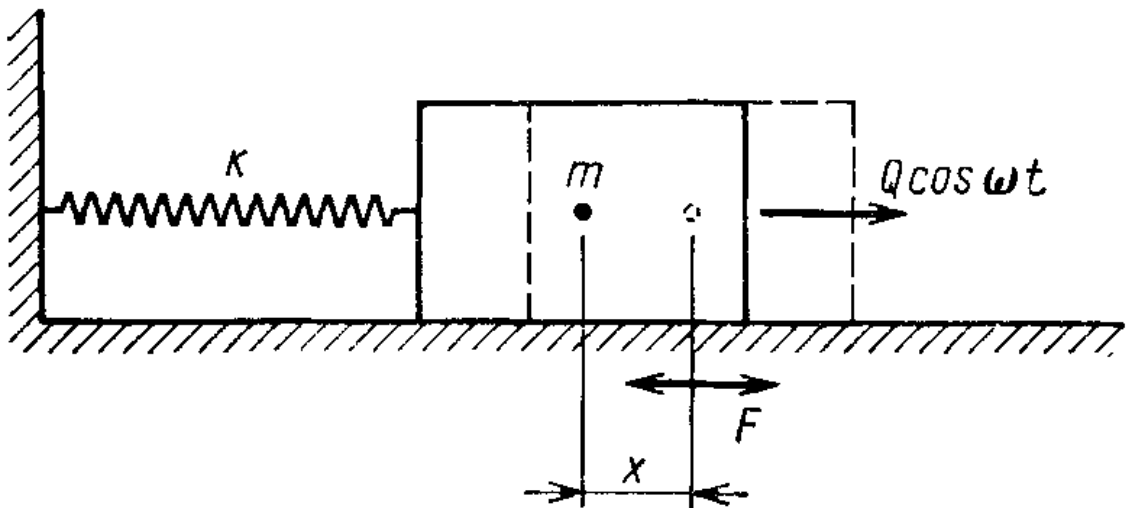
- 10.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 11.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 12.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 13.Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
- 14.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
- 15.თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი(რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
- 16.თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
- 17.М.Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988

### თავი 3. იძულებითი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ, რხევით პროცესებს განსაზღვრავენ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც იწვევს შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას.

#### 3.1. იძულებითი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ მექანიკური რხევითი სისტემა იმ პირობებში, როცა გვაქვს მაიძულებელი ძალის მოქმედება.



ნახ. 3.1. იძულებითი მექანიკური რხევითი სისტემა  $f = Q \cos \omega t$  მაიძულებელი პერიოდული ძალის მოქმედების პირობებში

თუ, გვაქვს რხევითი სისტემა (ნახ.3.1), რომელიც შედგება  $m$  მასის სხეულისაგან, როცა ზამბარის სიხისტეა  $c$ , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი  $k$  ანუ,  $F_{max} = -kx$ . ხოლო მოძრაობის გამომწვევი გარე პერიოდული ძალაა  $f = Q \cos \omega t$ , ადვილი მისახვედრია რომ ნიუტონის დინამიკის კანონიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება  $m$  მასის სხეულის  $x$  გადაადგილებების შესასწავლად

$$m\ddot{x} = -cx - kx + Q \cos(\omega \cdot t). \quad (3.1)$$

გავყოთ ამ განტოლების ორივე მხარე  $m$  მასის სიდიდეზე და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{k}{m} = 2\gamma, \quad \frac{Q}{m} = H. \quad (3.2)$$

მაშინ, განტოლება (3.1) გადაიწერება ფორმით

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.3)$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი(3).

ეხლა შევისწავლოთ ამ სისტემის თავისებურებები. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

- 1) იძულებითი რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული;
- 2) დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემა.

1) თუ, რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული, მაშინ  $\gamma = 0$  და დინამიკის განტოლება მიიღებს სახეს :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.4)$$

როგორც ცნობილია, წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ჯამისა.

$$x = x_{ertg \text{ var. } zogadi} + x_{araertg. \text{ ker } dzo}. \quad (3.5)$$

(3.4) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს არადემპფირებულ, თავისუფალი რხევითი სისტემის ამონახსნს

$$x_{ertg \text{ var. } zogadi} = a \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (3.6)$$

სადაც  $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{tg}\varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}.$

არაერთგვაროვანი (3.4) სისტემის კერძო ამონახსნს ეძებენ სახით

$$x_{araertg. \text{ ker } dzo} = h \cos(\omega \cdot t). \quad (3.7)$$

თუ, (3.7) გამოსახულებას ჩავსვამთ განტოლებაში (3.4), მივიღებთ რომ

$$-h\omega^2 \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 h \cos(\omega \cdot t) = H \cos(\omega \cdot t),$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$h = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

რაც, იმას ნიშნავს რომ (3.4) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე

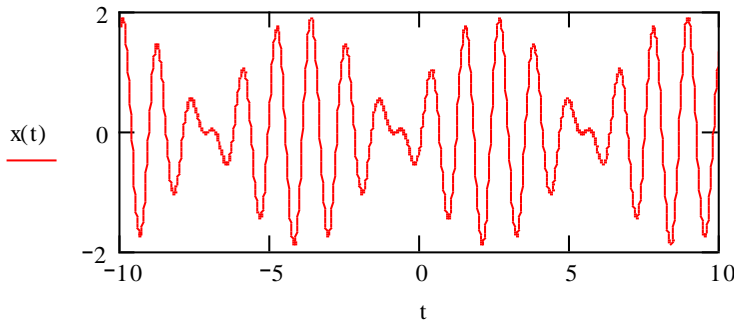
$$x_{araertg. \text{ ker } dzo} = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (3.8)$$



ასე, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს არაერთგვაროვანი (3.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნი (3.5), რომელიც გადაიწერება ფორმით

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (3.9)$$

ფორმულა (3.9) ძალაშია, თუ  $\omega_0 \neq \omega$ . ასეთ შემთხვევაში, ჩვენ გვაქვს ორი სხვადასხვა სიხშირის რხევათა ჯამი, სისტემის დინამიკა გამოსახულია ნახ.3.2.



ნახ.3.2 ორი სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევების ჯამი

თუ, სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე  $\omega_0$  ემთხვევა, მაიძულებელი პერიოდული ძალის რხევის  $\omega$  სიხშირეს, გვაქვს რეზონანსი.

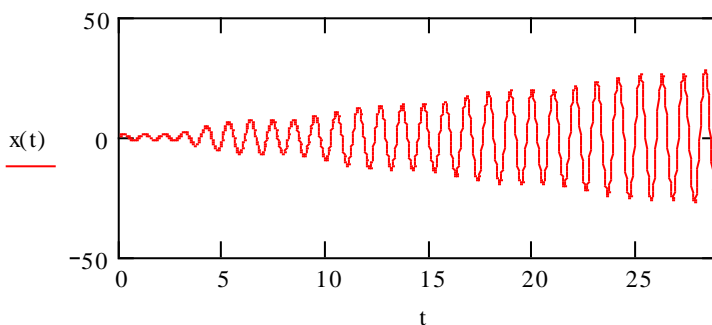
ასეთ შემთხვევაში, (3.4) განტოლების ზოგადი ამონახსნის საპოვნელად, (3.9) ამონახსნი გადაიწერება სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_0 \cdot t)). \quad (3.10)$$

თუ, (3.10) ფორმულაში გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\omega \rightarrow \omega_0$  ლოპიტალის წესის გამოყენებით, მივიღებთ ზოგად ამონახსნს

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (3.11)$$

როგორც (3.11) ამონახსნიდან ჩანს, რეზონანსის შემთხვევაში რხევის ამპლიტუდა წრფივი კანონით იზრდება(ნახ.3.3).



ნახ.3.3. რეზონანსული რხევების დინამიკა

როდესაც, მაიძულებელი ძალის რხევის სიხშირე ახლოსაა სისტემის საკუთრივი რხევების სიხშირესთან, ადგილი აქვს რხევების ცემას ორი მახლობელი სიხშირით.

2) ეხლა განვიხილოთ, წრფივი, დემპფირებული იძულებითი რხევითი სისტემის შემთხვევა. ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს მათემატიკური მოდელი

$$x + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.12)$$

ვეძებთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი სახით

$$x = \xi \cos(\omega \cdot t) + \eta \sin(\omega \cdot t), \quad (3.13)$$

თუ, (3.13) ფორმულას შევიტანთ (3.12) განტოლებაში, მაშინ  $\xi$  და  $\eta$  კოეფიციენტების საპოვნელად, გვექნება განტოლება

$$-\xi \cdot \omega^2 \cos(\omega \cdot t) - \eta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \xi \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \eta \cdot \sin(\omega \cdot t) = H \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.14)$$

(3.14) განტოლებიდან, თუ გავუტოლებთ შესაბამის კოეფიციენტებს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან, მივიღებთ სისტემას:

$$-\xi \cdot \omega^2 + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega + \xi \cdot \omega_0^2 = H \quad (3.15)$$

$$-\eta \omega^2 - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega + \omega_0^2 \cdot \eta = 0$$

ამ სისტემის ამონახსნებია

$$\xi = \frac{H \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}, \quad (3.16)$$

$$\eta = \frac{2\gamma \cdot \omega \cdot H}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}. \quad (3.17)$$

გამოსახულებაში (3.13) შემოვიღოთ დამატებითი კუთხე, მაშინ (3.16)-(3.17) თანადობების გათვალისწინებით, მივიღებთ (3.12) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს ფორმით:

$$x_{araertgvar.Krdzo} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{H}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2]}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi^*). \quad (3.18)$$

ჩვენ შევისწავლეთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი, თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემების შესწავლის დროს. გვქონდა სამი შემთხვევა:

ა) თუ,  $\gamma < \omega_0$ , მაშინ  $x_{ertg var} = A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  ;

ბ) თუ,  $\gamma > \omega_0$ , მაშინ  $x_{ertg var} = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \cdot t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \cdot t}$  ;

გ) თუ,  $\gamma = \omega_0$ , მაშინ  $x_{ertg var} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma \cdot t}$ .

მაშასადამე, არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება

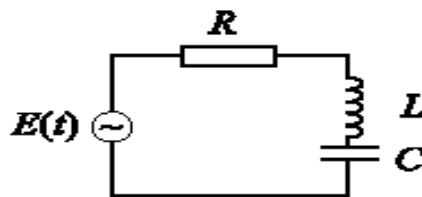
$$x(t) = x_{araertgvar.Krdzo} + x_{ertg var}. \quad (3.20)$$

ცხადია, რომ აქაც გვექნება სამი სხვადასხვა შემთხვევა.

**P.S. დაგაგება სტუდენტებს: Mathcad –ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ სამი შემთხვევის შესაბამისი რხევითი სისტემების დინამიკა.**

### 3.2. იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესი (ნახ. 3.4)



ნახ.3.4 რხევითი კონტური ელექტრული დენის წყაროთი რომლის ელექტომამოძრავებელი ძალაა  $E(t)$

კირხოფის კანონს ამ წრედისათვის აქვს სახე

$$U_L + U_r + U_c = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t), \quad (3.21)$$

სადაც  $Q$  არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე,  $U_c$  კონდენსატორზე მოდებული ძაბვაა.  $U_c = \frac{Q}{C}$ .  $I$  არის დენის ძალა და  $U_L$

კოჭაზე მოდებული ძაბვაა, ამასთან,  $U_L = L \frac{dI}{dt}$ . ძაბვის ვარდნა  $R$  წინააღობაზე არის  $U_r = R \cdot I$ . ხოლო, ელექტრული დენის მამოძრავებელი ძალაა  $E(t)$ . მაშასადამე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.22)$$

თუ, (3.22) ფორმულაში გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ დენის ძალა არის მუხტების მოწესრიგებული ნაკადი და დენის ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$I = \dot{Q}, \quad (3.23)$$

მივიღებთ დენის წყაროს შემცველი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის განტოლებას

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.24)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad F(t) = \frac{E(t)}{L}, \quad (3.25)$$

მაშინ, (3.24) განტოლება მიიღებს იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის სახეს. რომელიც ჩვენ უკვე გამოვიკვლიეთ წინა თავში

$$\ddot{Q} + 2\gamma \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = F(t). \quad (3.26)$$

**P.C.** როგორც ვხედავთ, იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ემთხვევა, შესაბამისი მექანიკური სისტემის მათემატიკურ მოდელს.

### 3.3. იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ სოციუმის დინამიკა დროში. ვთქვათ,  $N(t)$  არის სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონი დროში.  $m$  ამ სოციუმის საარსებო არეალია, ხოლო  $f_1(t)$  - სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალაა. ამიტომ, სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონის საპოვნელად განვიხილოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება

$$m \ddot{N} = f_1(t). \quad (3.27)$$

ცხადია, რომ სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა შედგება სამი ნაწილისაგან: ა) დადებითი წევრი რომელიც გამოწვეულია გარედან მიგრაციით მოცემულ სოციუმში  $f(t)$ ;

ბ) უარყოფითი წევრით  $-kN$ , რაც შეესაბამება სოციუმის შემცირების გამომწვევ ძალას ბუნებრივი სიკვდილიანობის გამო,  $k$  - შესაბამისი სიკვდილიანობის კოეფიციენტი; გ)  $-2\lambda N$  ეს ის ძალაა, რომელიც იწვევს სოციუმის შემცირებას სხვა სოციუმებთან ბრძოლაში მარცხის გამო. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$f_1(t) = f_2(t) - 2\lambda N - kN. \quad (3.28)$$

თუ, (3.28) თანადობას შევიტანთ (3.27) განტოლებაში, მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$m \ddot{N} + 2\lambda \dot{N} + kN = f_2(t). \quad (3.29)$$

ამ განტოლების გაყოფით  $m$  არეალის სიდიდეზე და შესაბამისი აღნიშვნების შემოღებით

$$\frac{\lambda}{m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{f_2(t)}{m} = f(t). \quad (3.30)$$

განტოლება (3.28) გადაიწერება სახით

$$\ddot{N} + 2\gamma \dot{N} + \omega_0^2 N = f(t). \quad (3.31)$$

ეს განტოლება კი ემთხვევა **წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს**. რაც იმას ნიშნავს, რომ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის აღწერს, სრულიად სხვადასხვა შინაარსის პროცესებს.

### 3.4. იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.32)$$

სადაც,  $C(t)$  - მოხმარებაა,

$I(t)$  - ინვესტიციები,

$X(t)$  - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot X(t), \quad (3.33)$$

სადაც  $\beta(t)$  - აქსელერაციის კოეფიციენტი. გარდა ამისა,

$C(t)$  - მოხმარება წარმოადგენს ეროვნული შემოსავლის ფუნქციას და ის დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.34)$$

თუ, (3.33) და (3.34) თანადობებს შევიტანთ (3.32) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (3.35)$$

განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t]. \quad (3.36)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (3.37)$$

რადგან,  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (3.37) განტოლება გავეყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t),t] = 0. \quad (3.38)$$

თუ, ფრანგიშვილი-ობგაძის განზოგადებულ განტოლებაში (3.38), მოვახდენთ ჩასმას

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left( \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t),t] = \beta(t) \cdot [\omega_0^2 X(t) - f(t)]. \quad (3.39)$$

მივიღებთ წრფივი, იძულებითი, თავისუფალი რხევითი სისტემის დინამიკის მათემატიკურ მოდელს

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = f(t). \quad (3.40)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი პერიოდული, არა აუცილებლად ჰარმონიული ფუნქციაა.

2. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი, საზოგადოდ - არაპერიოდული ფუნქციაა.

3. შეადგინეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის გამოსაკვლევი პროგრამა Mathcad –ის ბაზაზე.

4. რა თავისებურებები ახასიათებს არადემპფირებულ, იძულებით რხევით სისტემებს ?

5. რით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან იძულებითი, წრფივი, რეზონანსული დემპფირებული და არადემპფირებული რხევითი სისტემები ?

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн, Наука, Москва, 1984
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, Москва, 1959

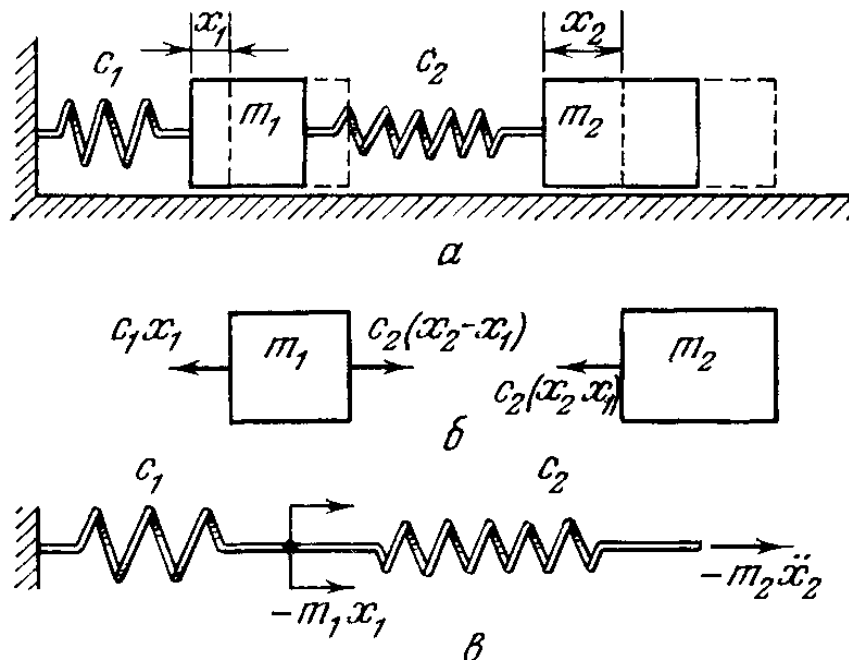
- 3.Волтерра В. Математическая теория борьбы за существование, Наука, Москва, 1976
- 4.Магнус К. Колебания,пер. с немецкого,Мир,Москва,1982
- 5.Трубцеков Д.И., Рожнев А.Г.Линейные колебания и волны, изд. Саратовского ГУ, Саратов,2002
- 6.Пейн Г. Физика колебаний и волн,пер. с англ.,Мир,Москва,1979
- 7.Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах,т.2,Наука, Москва,1972
- 8.მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1,თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი,1973
- 9.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელების კურსი(უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 10.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 11.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 12.Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
- 13.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
- 14.Obgadze T.A., Prangishvili A.I.,Sakvarelidze N., Iashvili L. MATHEMATICAL MODELLING OF EXCESSIVE DEMAND FOR ESSENTIAL COMMODITIES DYNAMICS AT PERIODIC, PANIC PR-EXCITER, Transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi , 2009

## თავი 4. ბმული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირება

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ორ ან მეტი რაოდენობის რხევით სისტემასთან რომლებიც ახდენენ ერთმანეთზე გავლენას. თუ, ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში ძირითადი(პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც იმართება პირველი სისტემით.

### 4.1. ბმული მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ წრფივი, ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითები(ნახ.4.1), (ნახ.4.2).



ნახ.4.1 ბმული მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი

ა) ეს სისტემა შედგება ორი  $m_1$  და  $m_2$  მასის სხეულებისაგან, რომლებიც კედელთან და ართმანეთთან დაკავშირებული არიან შესაბამისად,  $c_1$  და  $c_2$  სიხისტის მქონე ზამბარებით, რომლებიც ემორჩილებიან ჰუკის კანონს.

პირველი სხეულის გადაადგილება საწყისი მდგომარეობიდან აღვნიშნოთ  $x_1$  და მეორე სხეულის გადაადგილება, შესაბამისად  $x_2$ . მაშინ, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს



$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot (x_2 - x_1), \quad (4.1)$$

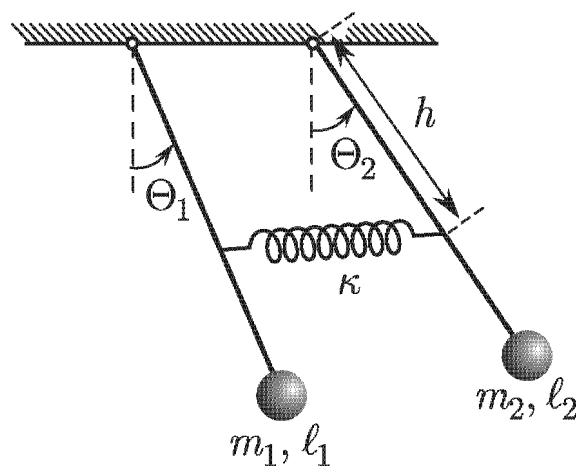
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (x_2 - x_1). \quad (4.2)$$

$$x_1(0) = x_1^0; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0, \quad (4.3)$$

$$x_2(0) = x_2^0; \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0. \quad (4.4)$$

**დავალება სტუდენტებს:** Mathcad –ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა.

ბ) ესეა განვიხილოთ ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება ორი ერთმანეთთან ზამბარით დაკავშირებული მათემატიკური ქანქარისაგან (ნახ.4.2). თუ, დავწერთ ნიუტონის დინამიკურ განტოლებას თითოეული ქანქარისათვის, ზამბარიანი კავშირის გათვალისწინებით და მოვახდენთ სტანდარტულ გარდაქმნებს, მივიღებთ ბმული მექანიკური (ნახ.4.2) რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს.



ნახ. 4.2 ბმული მექანიკური სისტემა ზამბარით დაკავშირებული ორი ქანქარით

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\ddot{\Theta}_1 + \omega_{01}^2 \cdot \Theta_1 = -\sigma_1 \cdot (\Theta_1 - \Theta_2), \quad (4.5)$$

$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_{02}^2 \cdot \Theta_2 = -\sigma_2 \cdot (\Theta_2 - \Theta_1). \quad (4.6)$$

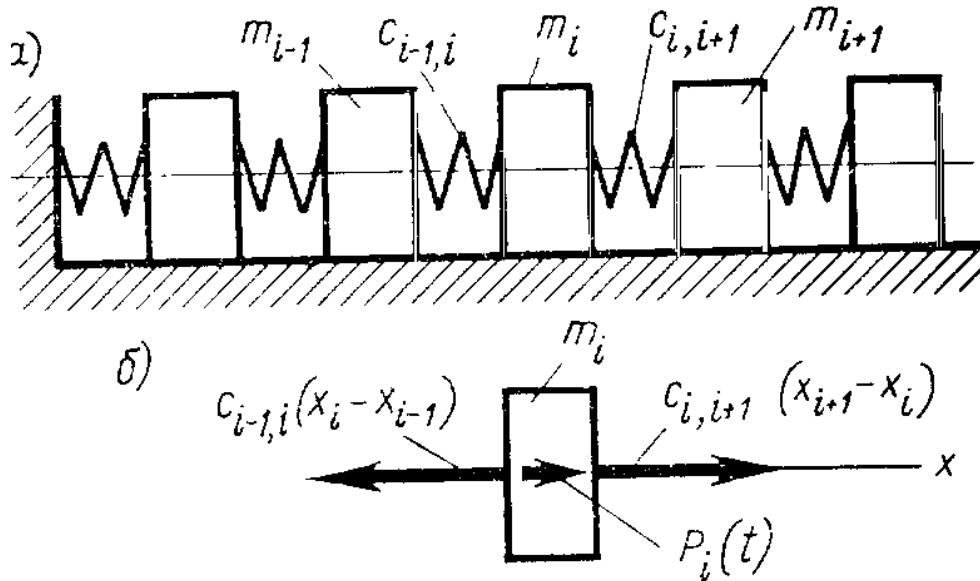
სადაც,  $\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$  და  $\omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$  ქანქარების საკუთარი რხევის

სიხშირეებია, ხოლო  $\sigma_1$  და  $\sigma_2$  კოეფიციენტები ასახავენ ქანქარების ურთიერთქმედებას, რომელიც განპირობებულია  $k$  სიხისტის მქონე ზამბარით.

$$\sigma_1^2 = \frac{kh^2}{m_1 \cdot l_1}, \quad \sigma_2^2 = \frac{kh^2}{m_2 \cdot l_2}. \quad (4.7)$$

**დავალება სტუდენტებს:** Mathcad –ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა.

გ) განვიხილოთ ბმული მექანიკური სისტემა, შედგენილი  $N$  რხევითი სისტემისაგან (ნახ.4.3).



ნახ.4.3.  $N$  რხევითი სისტემისაგან შედგენილი ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება  $N$  რხევითი სისტემისაგან, თითოეული რხევითი სისტემა შედგება შესაბამისი  $m_i$  მასის სხეულისაგან და ეს სხეულები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან ზამბარებით, ისე რომ  $m_i$  და  $m_{i+1}$  მასის სხეულები დაკავშირებული არიან დრეკადი ზამბარით, რომლის სიხისტეა  $c_{i,i+1}$ . ადვილი მისახვედრია, რომ თუ, ჩავწერთ ნიუტონის დინამიკის განტოლებას  $m_i$  მასის სხეულისათვის ამ სისტემაში, მივიღებთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = -c_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) + c_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i) + F_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.8)$$

სადაც  $F_i(t)$  არის  $i$ -ურ სხეულზე მოქმედი გარეშე ძალა.

**P.S.** ხშირად, როცა უნდათ შეისწავლონ დრეკადი მყარი სხეულის რხევები, მას განიხილავენ როგორც  $N$  ერთნაირი მასის სხეულს დაკავშირებულს ერთნაირი  $c$  სიხისტის ზამბარებით. მაშინ, მყარი, დრეკადი სხეულის რხევები შეიძლება შევისწავლოთ,

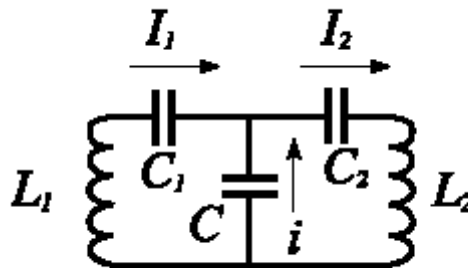
როგორც შესაბამისი ბმული, წრფივი დისკრეტული, მექანიკური რხევითი სისტემის რხევები. შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე

$$m \cdot \ddot{x}_i = c \cdot (-2 \cdot x_i + x_{i-1} + x_{i+1}), \quad i = \overline{1, N} \quad (4.9)$$

დავალება სტუდენტებს: Mathcad –ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა, როცა  $N = 3$ .

## 4.2. ბმული ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ, ბმული რხევითი ელექტრული სისტემა, რომლის შემადგენლობაშიცაა ორი რხევითი კონტური დაკავშირებული ერთმანეთთან კონდენსატორით.



ნახ.4.4 ბმული ელექტრული რხევითი სისტემა

ჩავწეროთ კირხოფის კანონები ნახ.4.4 გამოსახული რხევითი კონტურებისათვის

$$i = I_1 - I_2 \Rightarrow \dot{q} = q_1 - q_2 \Rightarrow q = q_1 - q_2. \quad (4.10)$$

$$L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot q_1 + \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (4.11)$$

$$L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot q_2 - \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (4.12)$$

სადაც,  $I_1 = \dot{q}_1$  და  $I_2 = \dot{q}_2$ .

ამიტომ, სისტემა (4.11), (4.12) შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1 L_1} q_1 = \frac{1}{C L_1} (q_2 - q_1), \quad (4.13)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2 L_2} q_2 = -\frac{1}{C L_2} (q_2 - q_1). \quad (4.14)$$

**P.S.** ბმული რხევითი ელექტრული სისტემები გამოიყენება ელექტროტექნიკაში, სიგნალების გასაფილტრად.

### 4.3. ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ, ორი ურთიერთმოქმედი სოციალური ჯგუფი რომელთა მოცულობებსაც აღვნიშნავთ, შესაბამისად  $N_1$  და  $N_2$ . ამ ორი სოციუმის მოქმედების არეალები აღვნიშნოთ  $m_1$  და  $m_2$ . მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ სოციალური ჯგუფები ურთიერთქმედებენ ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალებით, რომლებიც პირდაპირპროპორციულია მათი მოცულობების სხვაობისა, ანუ  $k_2 \cdot (N_2 - N_1)$ . ამასთან, თუ ჩავთვლით რომ ჯგუფების მოქმედების  $m_1$  და  $m_2$  არეალი შეზღუდულია და მაშასადამე რაც უფრო გაიზრდება სოციუმის  $N_1$  და  $N_2$  მოცულობა, მით უფრო ნაკლები იქნება ამ სოციუმის ზრდის სიჩქარე, მივიღებთ ბმული სოციალური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m_1 \cdot \ddot{N}_1 = -k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot (N_2 - N_1), \quad (4.15)$$

$$m_2 \cdot \ddot{N}_2 = -k_3 \cdot N_2 - k_2 \cdot (N_2 - N_1). \quad (4.16)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა.

### 4.4. ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ორი, ურთიერთკონკურენტუნარიანი პროდუქციის, ბაზარზე რეალიზებულ მოცულობათა  $X_1$  და  $X_2$  დინამიკა. ცხადია, რომ რაც უფრო დიდია რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა, მით უფრო ნაკლებია რეალიზებული პროდუქციის ზრდის სიჩქარის ცვლილება, ბაზრის გაჯერების გამო. ასევე, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია მოცულობათა სხვაობისა. ამავე დროს, მოქმედი ძალები სიდიდით ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო. თუ,  $m_1$  და  $m_2$  არიან შესაბამისი პროდუქციის ფასები, მივიღებთ ბმული ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m_1 \cdot \ddot{X}_1 = -k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot (X_2 - X_1), \quad (4.17)$$

$$m_2 \cdot \ddot{X}_2 = -k_3 \cdot X_2 - k_2 \cdot (X_2 - X_1). \quad (4.18)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა. ამ მოდელის აგება შესაძლებელია ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ წრფივი, ბმული რხევითი სისტემა და ააგეთ შესაბამისი მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

2. გამოიკვლიეთ ბმული რხევითი სისტემა Mathcad პროგრამის საშუალებით.

3. ააგეთ ბმული რხევითი სოციალური სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.

4. ააგეთ ბმული რხევითი ეკონომიკური სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილი-ობგაძის (2.37) მოდელის ბაზაზე და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.

5. ააგეთ ბმული რხევითი ფსიქოლოგიური სისტემის მათემატიკური მოდელი.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн, Наука, Москва, 1984
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, Москва, 1959
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование, Наука, Москва, 1976
4. Магнус К. Колебания, пер. с немецкого, Мир, Москва, 1982
5. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны, изд. Саратовского ГУ, Саратов, 2002
6. Пейн Г. Физика колебаний и волн, пер. с англ., Мир, Москва, 1979
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2, Наука, Москва, 1972
8. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1973
9. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
10. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი

Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007

11.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008

## თავი 5. რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები

მათემატიკური მოდელების ასაგებად, ხშირად, იყენებენ უნივერსალურ ვარიაციულ პრინციპებს. რომლებიც ემყარება საუკუნოვან პრაქტიკულ გამოცდილებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. ცნობილია, რომ ბუნება ერთიანია, ანუ, მეცნიერების ერთ სფეროში მიმდინარე პროცესები, ანალოგიურია, მეორე სფეროში მიმდინარე პროცესებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ პროცესების მსგავსების კრიტერიუმები, რომ შეგვიძლია ფიზიკაში დამუშავებული მოდელები გამოვიყენოთ სხვადასვა ინტელექტუალურ სფეროებში.

### 5.1. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი. ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი. თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლისთვის მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატია  $Q(t)$ . შესაბამისად,  $\dot{Q}$  წარმოადგენს განმსაზღვრელი პარამეტრის ცვლილების სიჩქარეს. განვსაზღვროთ დინამიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც სხვაობა მის კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს შორის

$$L(Q, \frac{dQ}{dt}) = E_k - E_p. \quad (5.1)$$

სადაც

$E_k$ , და  $E_p$  - შესაბამისად, სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიებია.

განვიხილოთ, სიდიდე რომელსაც მოქმედებას უწოდებენ და აღწერენ ფორმულით

$$S(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (5.2)$$

ამ სიდიდეზეა დამოკიდებული სისტემის ყოფაქცევა. ჰამილტონის უნივერსალური პრინციპი ამბობს, რომ თუ სისტემა რეალურია, მაშინ  $Q(t)$  არის  $S(Q)$  ფუნქციონალის სტაციონალური ფუნქცია, ანუ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(Q + \varepsilon p)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (5.3)$$

ჰამილტონის პრინციპში მოქმედი  $\varphi(t)$  ფუნქცია, არის საცდელი ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს დროის  $t_1$

და  $t_2$  მომენტებში.  $\varepsilon \cdot \varphi(t)$  ფუნქციას  $Q(t)$  ფუნქციის ვარიაცია ეწოდება. ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა ავაგოთ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ სისტემის თავისუფალი რხევები, როცა მოცემული გვაქვს ზამბარა  $m$  მასის ტვირთით და ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია  $c$ . მაშინ, სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია იქნება

$$L = \frac{m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2}{2} - c \cdot \frac{X^2}{2}. \quad (5.4)$$

ქმედებისათვის გვექნება გამოსახულება

$$S(X) = \int_{t_1}^{t_2} L(X, \frac{dX}{dt}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2}{2} - \frac{c}{2} X^2 \right] dt. \quad (5.5)$$

გამოვითვალთ ქმედება  $\varepsilon \cdot \varphi(t)$  ვარიაციის შემთხვევაში

$$S(X + \varepsilon \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m \left( \frac{d(X + \varepsilon \varphi)}{dt} \right)^2}{2} - \frac{c}{2} (X + \varepsilon \varphi)^2 \right] dt. \quad (5.6)$$

გავაწარმოთ ეს ფუნქცია  $\varepsilon$  ცვლადის მიხედვით, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon \varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left\{ \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X^2 + 2\varepsilon X\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left\{ \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X\varphi + \varepsilon \varphi^2 \} \right] dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

თუ, დავეშვებით რომ  $\varepsilon = 0$ , მივიღებთ რომ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon \varphi)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - c X \varphi \right] dt = 0. \quad (5.8)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ , მივიღებთ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon \varphi)_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[ m \frac{d^2 X}{dt^2} + c X \right] dt = 0. \quad (5.9)$$

რადგან,  $\varphi(t)$  ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + c X = 0. \quad (5.10)$$

ანუ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (5.11)$$



მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის კლასიკურ მათემატიკურ მოდელს

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \quad (5.12)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ვარიაციულ მეთოდს მივყავართ იგივე მათემატიკურ მოდელამდე თავისუფალი რხევითი სისტემისათვის.

## 5.2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედებს მაიძულებელი ძალა  $F_0$ , იცვლება მხოლოდ პოტენციალური ენერჯიის ფორმულა და იღებს სახეს

$$E_p = c \frac{X^2}{2} + \int_0^X F_0 dX = c \frac{X^2}{2} + F_0 X. \quad (5.13)$$

ხოლო, კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულება რჩება უცვლელი

$$E_k = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2}. \quad (5.14)$$

შესაბამის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე

$$L = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \frac{X^2}{2} - F_0 X. \quad (5.15)$$

თუ, განვახორციელებთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ გარდაქმნებს, მაშინ მივიღებთ იძულებითი, არადემპფირებული, რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -cX + F_0. \quad (5.16)$$

**დავალება სტუდენტებს:** ააგეთ იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ვარიაციული მეთოდით.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. ჩამოაყალიბეთ ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.
2. ააგეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ბაზაზე.

3. ააგეთ იძულებითი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის პრინციპის ბაზაზე.
4. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის კავშირი.
5. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის ერთმანეთისაგან განსხვავება.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ოზგაძე თ., ოზგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
3. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001
5. Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества, Москва, 2005

## თავი 6. არაწრფივი სისტემების მოდელირება

### 6.1. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

არაწრფივი რხევითი სისტემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები აღიწერებიან არაწრფივი განტოლებებით. რეალური სისტემები არაწრფივია და მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით, შეიძლება შევცვალოთ წრფივი სისტემებით. წრფივი რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხები ჩვენ უკვე განვიხილეთ და ეხლა შევუდგებით არაწრფივი სისტემების შესწავლას.

განვიხილოთ, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი სისტემა. ამ შემთხვევაში, არაწრფივია აღმდგენელი ძალის დამოკიდებულება განმსაზღვრელ პარამეტრზე, ანუ, გვაქვს დამოკიდებულება  $f(x)$ . ასე, რომ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0. \quad (6.1)$$

ამ განტოლების ამოხსნა კვადრატურებში, საზოგადოდ, შეუძლებელია. თუმცა, შესაძლებელია ამ განტოლების ზოგადი თვისებების შესწავლა ენერგეტიკული მეთოდის მეშვეობით.

განტოლება (6.1) გავამრავლოთ  $x$  სიდიდესზე და ვაინტეგრლოთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \int f(x) \cdot x dt = const = E_0. \quad (6.2)$$

ამასთან,

$$\int f(x) \cdot x dt = \int f(x) dx = E_{pot}, \quad (6.3)$$

ასე, რომ (6.2) განტოლება წარმოადგენს ენერჯის შენახვის კანონს

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0. \quad (6.4)$$

ცხადია, რომ (6.2) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ თანადობა

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = E_0 - E_{pot}. \quad (6.5)$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ რხევის სიჩქარე

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}. \quad (6.6)$$

ფაზურ სიბრტყეზე,  $x_0$  წერტილიდან  $x$  წერტილამდე გადაადგილების დრო გამოითვლება ფორმულით

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (6.7)$$

შესაბამისად რხევის პერიოდის გამოსათვლელად მივიღებთ ფორმულას

$$T = 2 \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (6.8)$$

ეს ფორმულა(6.8), რა თქმა უნდა, სამართლიანია, მხოლოდ შეკრული ფაზური ტრაექტორიებისათვის.

## 6.2. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

განვიხილოთ, რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით.

$$f(x) = h \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} h, & \text{if } x > 0 \\ -h, & \text{if } x < 0 \end{cases}. \quad (6.9)$$

ასეთი სიტუაცია გვაქვს რელეურ მართვის სისტემებში.

ამ შემთხვევაში, ამონხსნი უნდა ვეძებოთ ცალ-ცალკე იმ შემთხვევებისათვის, როცა  $x > 0$  და როცა  $x < 0$ .

იმ შემთხვევაში, როცა  $x > 0$ , გვაქვს განტოლება

$$m \cdot \ddot{x} = -f(x) = -h, \quad (6.10)$$

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} \cdot t + v_0, \quad (6.11)$$

$$x = -\frac{h}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (6.12)$$

თუ, ჩავთვლით რომ, რხევითი სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება თავის ზღვრულ მდებარეობაში, მივიღებთ საწყის პირობებს ფორმით

$$x_0(0) = A, \quad (6.13)$$

$$v_0(0) = 0. \quad (6.14)$$

თუ, (6.11) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ  $t$  პარამეტრს და ჩავსვავთ (6.13) ტოლობაში, მივიღებთ ფაზური ტრაექტორიების

$(x; \dot{x})$  განტოლებას.

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A - x)}. \quad (6.15)$$

### 6.3. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

დემპფირების შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხარჯავს ენერგიას წინააღმდეგობის ძალის დაძლევაზე. შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, წინააღმდეგობის ძალა, დამოკიდებულია განმსაზღვრელი პარამეტრის  $x$  წარმოებულზე.

ზოგად შემთხვევაში, დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$\ddot{x} + g(x) + f(x) = 0. \quad (6.16)$$

ზოგჯერ, დემპფირების ძალები და აღმდგენი ძალები ისე მჭიდროდ არიან დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მათი განცალკევება არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს განტოლება

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (6.17)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის შესაბამისი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა  $x = v$ , მაშინ  $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$ . აქედან გამომდინარე, (6.17) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v}. \quad (6.18)$$

ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.

ეხლა განვიხილოთ ამ სისტემის შესაბამისი ენერგეტიკული განტოლება. ამ განტოლების მისაღებად, გავამრავლოთ (6.16) განტოლება  $x$  სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ. მაშინ, მივიღებთ რომ

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^t g(x) \cdot x dt + \int_0^x f(x) dx = E_0. \quad (6.19)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას  $E_D$  - დემპფირების ძალების გადაღახვაზე დახარჯული ენერგიისათვის, მივიღებთ ენერჯის განტოლებას

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - E_D. \quad (6.20)$$

ამ განტოლებიდან, ნათლად ჩანს, რომ დემპფირებულ თავისუფალ რხევით სისტემაში აღგილი აქვს ენერჯის დისიპაციას.

#### 6.4. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით

მშრალ ხახუნს მყარ სხეულებს შორის, ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთმანეთს ეხება ორი სხეული რომლებიც გადაადგილდებიან ერთმანეთის მიმართ, ისე რომ, მათ შორის არ არის თხევადი მასა. ამ შემთხვევაში, ხახუნის ძალები თითქმის არ არიან დამოკიდებული გადაადგილების სიჩქარეზე და მიმართული არიან ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უმეტეს შემთხვევაში, მშრალი ხახუნის ძალა მიახლოვებით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$K_r = \begin{cases} -r & \text{if } v > 0 \\ +r & \text{if } v < 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

ასე რომ,

$$K_r = -r \cdot \text{sgn } x. \quad (6.22)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში, პროცესის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \text{sgn } \dot{x} + f(x) = 0. \quad (6.23)$$

ეს განტოლება, ცალ-ცალკე იხსნება იმ შემთხვევებისათვის როცა  $v > 0$  და როცა  $v < 0$ .

თუ,  $v > 0$  მაშინ (6.23) განტოლებიდა მივიღებთ რომ

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = -r. \quad (6.24)$$

მის შესაბამის ენერგეტიკულ განტოლებას აქვს სახე

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - r \cdot x = \bar{E}_0. \quad (6.25)$$

ამ რხევითი სისტემისათვის **ფაზური ტრაექტორიების განტოლებას** ექნება სახე

$$v = + \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - r \cdot x - E_{pot})} \quad \text{თუ, } v > 0. \quad (6.26)$$

$$v = - \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 + r \cdot x - E_{pot})} \quad \text{თუ, } v < 0. \quad (6.27)$$

#### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. გამოიყვანეთ არადემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერგეტიკული განტოლება.
2. გამოიყვანეთ თავისუფალი, რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება, ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალის შემთხვევაში.

3. შეადგინეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.
4. გამოიყვანეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ტრაექტორიების განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე მშრალი ხახუნის შემთხვევაში
5. გამოიყვანეთ არაწრფივი სისტემის ტრაექტორიების ზოგადი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
3. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001
5. Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества, Москва, 2005
6. Магнус К. Колебания. Пер. с англ., Мир, Москва, 1982

## თავი 7. ავტორხვეითი სისტემები

**ავტორხვეები** - განსაკუთრებული ტიპის რხევებია. ამ ტიპის რხევების წარმოშობისათვის, დამახასიათებელია ენერჯის წყაროს არსებობა, რომელიც ავსებს სისტემის ენერგეტიკულ დანაკარგებს.

### 7.1. ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები

სტრუქტურისა და მოქმედების პრინციპის მიხედვით განასხვავებენ ავტორხვეითი სისტემების ორ ტიპს:

1. ოსცილატორული სისტემა;
2. დაგროვებითი სისტემა.

ოსცილატორული ტიპის სისტემისათვის დამახასიათებელია სტრუქტურული სქემა ნახ. 7.1



ნახ.7.1 ოსცილატორული ტიპის ავტორხვეითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

ოსცილატორული ტიპის სისტემებში, ჩამრთველი მოქმედებს, როგორც უკუკავშირი რხევით სისტემასა და ენერჯის წყაროს შორის, რომელიც ირთვება საჭირო მომენტში და სისტემას ამარაგებს საჭირო ენერჯით.

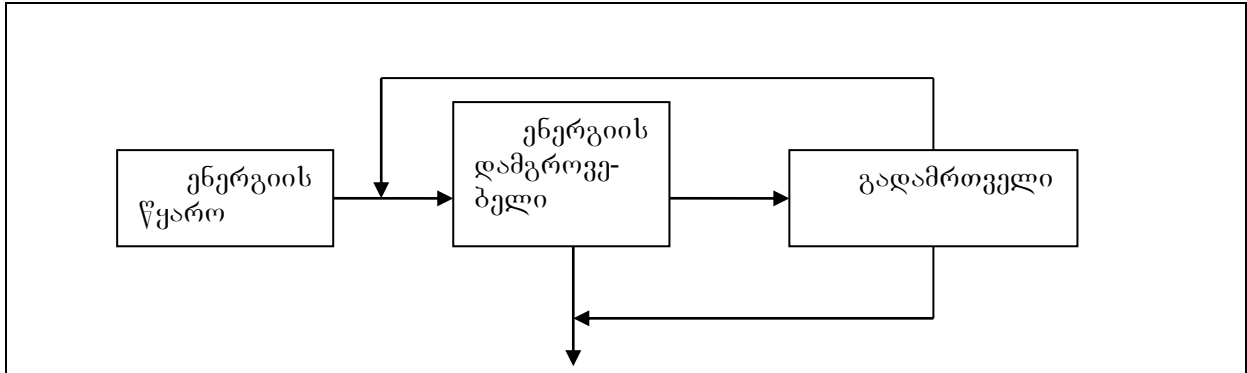
განვიხილოთ, შესაბამისი ტიპის პრაქტიკული მაგალითები, ცხრილი 7.1

ცხრილი 7.1.

№	ავტორხვეითი სისტემა	ენერჯის წყარო	ოსცილატორი	უკუკავშირის საშუალება
1	ზარი	ელექტრობატარეა	ჩაქუჩი	კონტაქტი
2	საათი	დეფორმირებული ზამბარა	ბალანსირი	ჩამომშვები რეგულატორი
3	ვილენენქლოს სიმი	მოძრავი ხეში	სიმი	მშრალი ხახუნი ქრობადი მახასიათებლით
4	თვითმფრინავის მზიდი ფრთა	ჰაერის ნაკადი	დრეკადი ფრთა	ჰაერის ნაკადისა და ფრთის ურთიერთქმედების არასტაციონარული ძალები



დაგროვებითი, ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია ნახ.7.2.

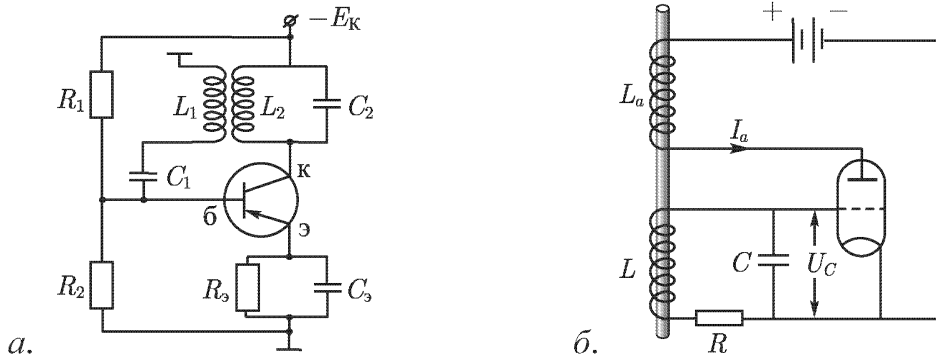


ნახ. 7.2. დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემა, ხშირად, ასრულებს წყვეტად(დისკრეტულ) რხევებს.

## 7.2. ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის სქემა ნახ. 7.3.



ნახ.7.3. ვან-დერ-პოლის გენერატორის სქემა  
ა) ტრანზისტორზე; ბ) ელექტრონულ ლამფაზე

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

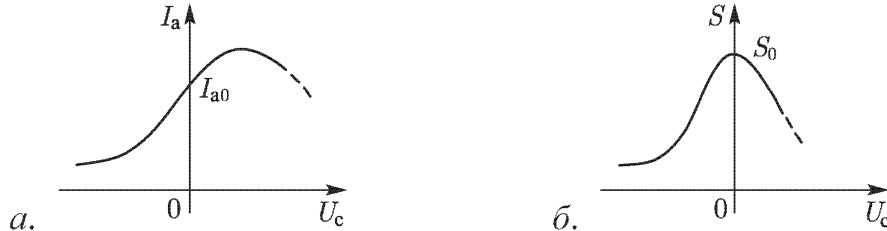
$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (7.1)$$

მნიშვნელოვანია, რომ ელექტრონულ ლამფის ბადეზე  $U_a$  ძაბვის გაზრდა, იწვევს ანოდური  $I_a$  დენის გაზრდას. იმისათვის,

რომ მივიღოთ ანოლური დენის თვითაგზნება, უნდა ვიცოდეთ დამოკიდებულება  $I_a = I_a(U_c)$ . წარმოებულს

$$S(U_c) = \frac{dI_a}{dU_c}, \quad (7.2)$$

ბადური მახასიათებლის სიმრუდე ეწოდება. შესაბამისი გრაფიკები მოცემულია ნახ. 7.4.



ნახ.7.4. ა) ანოლური დენისა და ბ) ბადური სიმრუდის, ბადურ ძაბვაზე დამოკიდებულების გრაფიკები

მუშა მდგომარეობაში, ადგილი აქვთ დამოკიდებულებებს:

$$S = S_0 - S_2 U_c^2, \quad (7.3)$$

$$I_a = I_{a0} + S_0 U_c - \frac{1}{3} S_2 U_c^3. \quad (7.4)$$

თუ, (7.3) და (7.4) ფორმულებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (7.1) გადაიწერება სახით

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} - \frac{M}{LC} \left[ S_0 - S_2 U_c^2 - \frac{RC}{M} \right] \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0, \quad (7.5)$$

სადაც, გათვალისწინებულია რომ

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (7.6)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$x = U_c \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - RC}}, \quad 2\gamma = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad (7.7)$$

მაშინ, მივიღებთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკურ მოდელს, რომელიც აღწერს ერთ-ერთი, ცნობილი ავტორხევითი სისტემის დინამიკას.

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x}(1-x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.8)$$

### 7.3. ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები (ფლატერი და დივერგენცია)

ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები - წარმოადგენენ დრეკად კონსტრუქციებს, რომლებიც მოთავსებული არიან ჰაერის ან წყლის ნაკადებში და განიცდიან შესაბამის ურთიერთქმედებას.

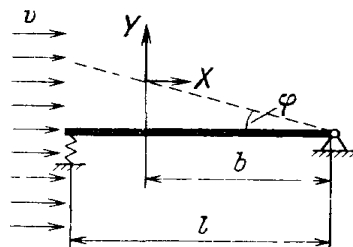
ჰიდროაეროდრეკადი სისტემების მაგალითს წარმოადგენენ სამშენებლო ნაგებობები, რომლებიც მოთავსებული არიან ქარის ზემოქმედების ქვეშ. ჰაერის ნაკადის მოქმედების შედეგად ნაგებობებში აღიძრება რხევები და თუ, ნაგებობას არ შეუძლია ქარის მიერ აღძრული რხევების ჩაქრობა, შესაძლოა ნაგებობის დანგრევა, რაც არაერთხელ მომხდარა. ამიტომ, პროექტირების ეტაპზე, აუცილებელია ქარის დატვირთვების შესწავლა ნებისმიერი მაღლივი შენობა-ნაგებობის ან კიდული-ვანტური ხიდებისათვის.

დატვირთვების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს ავიცილოთ ფლატერი, ანუ, მავნე - გამანადგურებელი რხევები და სწორად დავაპროექტოთ ესა თუ ის ნაგებობა.

ფლატერის შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს საფრენი აპარატების პროექტირების დროსაც.

ჰაერის ზემოქმედების შედეგად, თვითმფრინავის ფრთა განიცდის დეფორმაციას და ამ დეფორმაციის შედეგად იცვლება გარსდენის რეჟიმი, ამ მოვლენას დივერგენციას უწოდებენ. დივერგენციის შედეგად იცვლება ფრთის გეომეტრია, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ნაკადის პერიოდული მოწყვეტა და შესაბამისი სიხშირის რხევები. ასეთ შემთხვევაში, შესაძლოა რეზონანსული რხევების წარმოქმნა და ფრთის დამსხვრევა გარკვეული - კრიტიკული სიჩქარით ფრენის შემთხვევაში. ამიტომ, ფრთის პროექტირებისას, აუცილებელია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარის დაანგარიშება, რათა თავიდან ავიცილოთ კონსტრუქციის არასაიმედობა მუშა სიჩქარეების დიაპაზონში. ფლატერი შეიძლება წარმოიქმნას კონსტრუქციის თავისებურებიდან გამომდინარე, გარე ზემოქმედების გარეშეც, ფლატერის კრიტიკული სიჩქარის გადამეტებისას ან სიჩქარეთა გარკვეული დიაპაზონის შემთხვევაშიც.

ა) დივერგენციის შესასწავლად, განვიხილოთ ფრთის სქემატური, გამარტივებული მოდელი ნახ. 7.5



ნახ.7.5. ფრთის დივერგენციის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ბრტყელი ფირფიტა, რომელიც მარცხენა მხარეს დრეკადადაა ჩამაგრებული(ფრთის თავისუფალი მხარე), მარჯვენა მხარეს კი, აქვს სახსრული ჩამაგრება(ფრთის ჩამაგრება

ფუზელაჟთან). ფირფიტა მოთავსებულია ჰაერის ნაკადში, რომლის სიჩქარეცაა  $v$ . ვიპოვოთ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე.

ფრთის გადახრისას  $\varphi$  კუთხით, წარმოიქმნება წნევის ძალები, რომლებიც შეიძლება დაეშალოთ ორ მდგენელად (შუბლური წინაღობის ძალა და ამწევი ძალა).

$$X = C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi; \quad Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.9)$$

სადაც

$C_x$  - შუბლური წინაღობის კოეფიციენტია ;

$C_y$  - ამწევი ძალის კოეფიციენტია ;

$\rho$  - ჰაერის სიმკვრივეა;

$l$  - ფრთის ქორდაა;

$b$  - მანძილია სახსრული შეერთებიდან აეროდინამიკური წნევების ტოლქმედის მოდების წერტილამდე.

ფირფიტაზე(ფრთაზე) მოდებული ძალების მომენტების ჯამი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ იქნება

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + X \cdot b \cdot \varphi + Y \cdot b, \quad (7.10)$$

სადაც,  $c_0$  - დრეკადი ჩამაგრების ზამბარის სიხისტეა, აგრეთვე გათვალისწინებულია რომ  $\varphi$  მცირე კუთხეა და  $\sin \varphi \approx \varphi$ . ჩავსვათ (7.10) ფორმულაში (7.9), მაშინ მივიღებთ

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi^2 + C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.11)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $I$  - ფირფიტის ინერციის მომენტია სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ. თუ, გავითვალისწინებთ შესაბამის განტოლებას ფირფიტისათვის

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M. \quad (7.12)$$

მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$I \cdot \ddot{\varphi} + (c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b) \cdot l \cdot \varphi = 0, \quad (7.13)$$

წინაღობის ძალის მომენტის შესაბამისი წევრი გამოტოვილია, რადგან ის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა.

ვინაიდან,  $\varphi$  უსასრულოდ მცირე შემფოთებაა, სისტემის მდგრადობისათვის, ანუ, საწყისი შემფოთების ჩაქრობისათვის გვაქვს პირობა

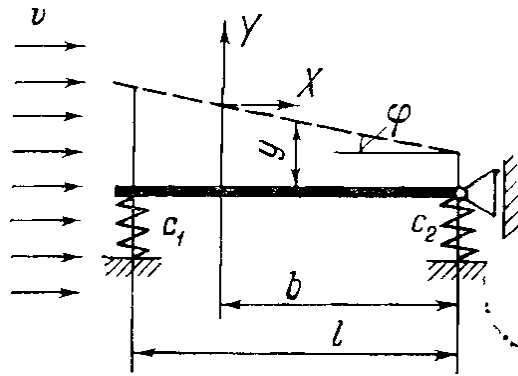
$$c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b > 0. \quad (7.14)$$

აქედან, ცხადია რომ, დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე იქნება

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_0 \cdot l}{C_y \cdot \rho \cdot b}}. \quad (7.15)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რაც უფრო მეტია ფრთის სიხისტე, მით უფრო მეტია დიფერენციის კრიტიკული სიხარეც. რაც მეტია დიფერენციის სიხარე, მით უფრო უკეთესია თვითმფრინავის ფრთისათვის.

ბ) ეხლა განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის მოდელი შესასწავლად განვიხილება გამარტივებული – სქემატური მოდელი ნახ. 7.6



ნახ. 7.6. თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის სქემატური მოდელი

ეხლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ფირფიტის ორივე მხარეს გვაქვს დრეკადი ჩამაგრება. ასეთ შემთხვევაში, მოსალოდნელია სხვა ტიპის არამდგრადობაც, რომელიც დაკავშირებულია ორგანზომილებიანი სისტემის არაკონსერვატულობასთან.

განვიხილოთ მცირე შეშფოთებები ამ სისტემაში;

$y(t)$  - ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის გადაადგილება;

$\varphi(t)$  - ფირფიტის მობრუნების კუთხე.

$c_1$  და  $c_2$  დრეკადი სახრდენების სიხისტეებია ;

$\frac{m \cdot l^2}{12}$  - ფირფიტის ინერციის მომენტი, მისი სიბრტყის პერპენდიკულარულად სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ;

$l$  - ფირფიტის სიგრძეა ნაკადის მიმართ ;

$b$  - მანძილია ამწევი ძალის მოდების წერტილიდან მის მარჯვენა ბოლომდე.

$$Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.16)$$

დრეკად რეაქციის ძალებს აქვთ სახე

$$R_1 = c_1 \cdot (y + \frac{\varphi \cdot l}{2}); \quad R_2 = c_2 \cdot (y - \frac{\varphi \cdot l}{2}). \quad (7.17)$$

შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს აქვთ სახე

$$-R_1 - R_2 + Y = m \cdot \ddot{y}; \quad (7.18)$$

$$-R_1 \cdot \frac{l}{2} + R_2 \cdot \frac{l}{2} + Y \cdot \left(b - \frac{l}{2}\right) = \frac{m \cdot l^2}{12} \cdot \ddot{\varphi}. \quad (7.19)$$

თუ, ამ განტოლებებში შევიტანთ (7.16) და (7.17) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\ddot{y} + c_{11} \cdot y + c_{12} \cdot \varphi = 0; \quad (7.20)$$

$$\ddot{\varphi} + c_{21} \cdot y + c_{22} \cdot \varphi = 0. \quad (7.21)$$

სადაც

$$c_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2) \cdot l}{2 \cdot m} - \frac{C_y}{m} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l. \quad (7.22)$$

$$c_{21} = \frac{6 \cdot (c_1 - c_2)}{m \cdot l}; \quad c_{22} = \frac{3 \cdot (c_1 + c_2)}{m} + 6 \cdot \frac{C_y}{m \cdot l^2} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot (l - 2 \cdot b). \quad (7.23)$$

ამ სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.24)$$

ანუ,

$$\lambda^4 + \lambda^2 \cdot (c_{11} + c_{22}) + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0. \quad (7.25)$$

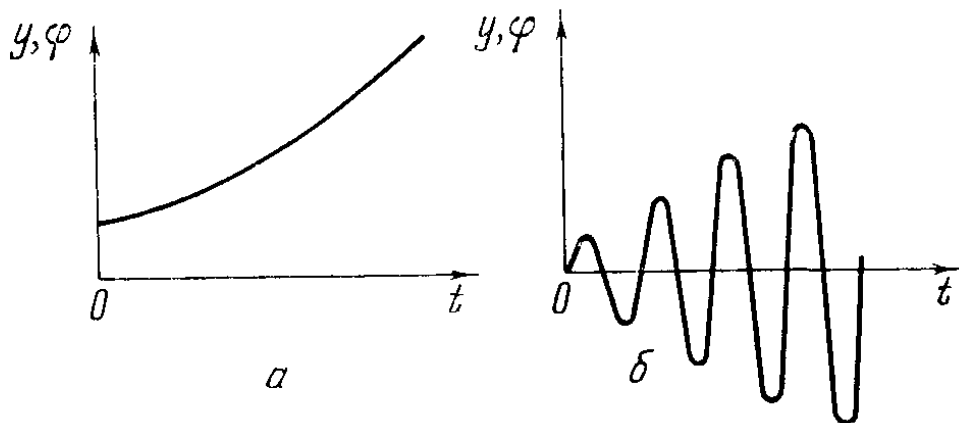
ასე, რომ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს ექნებათ სახე

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21})}}. \quad (7.26)$$

ცხადია, რომ სისტემის მდგრადობის პირობებს აქვს სახე

$$0 < c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (7.27)$$

პირველი უტოლობის დარღვევისას ამ სისტემაში გვექნება დივერგენცია ნახ. 7.7 a, ხოლო, მეორე უტოლობის დარღვევისას გვაქვს ფლატერი ნახ. 7.7 b.



ნახ.7.7. ფრთის მდგრადობის დაკარგვის გრაფიკები,  
a) დივერგენცია ; b) ფლატერი

მდგრადობის ზღვართი მნიშვნელობები (7.27) უტოლობებში, გვაძლევენ შესაბამისი კრიტიკული სიჩქარეების მნიშვნელობებს, თუ, გავითვალისწინებთ (7.22) და (7.23) თანადობებს, მივიღებთ რომ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარეა

$$v_{div} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot l}{\rho \cdot C_y [c_1 \cdot (b-l) + c_2 \cdot b]}} \quad (7.28)$$

ფლატერის კრიტიკული სიჩქარეა

$$v_{flat} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3\rho \cdot C_y} \cdot \frac{c_1^2 - c_1 \cdot c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}} \quad (7.29)$$

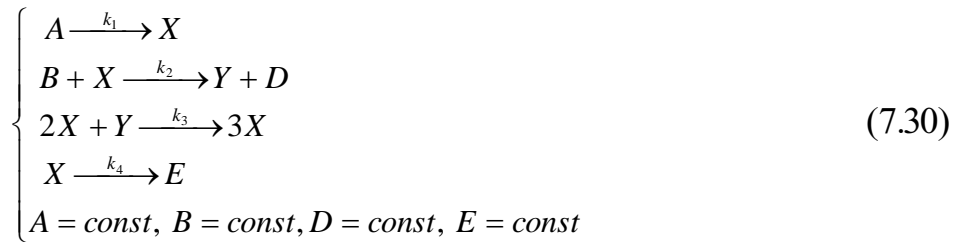
#### 7.4. ქიმიური ავტორხვეითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლუფვერის მოდელი)

ავტორხვეითი სისტემები გვხვდება ზოგიერთი ქიმიური რეაქციის შესწავლისასაც. ცნობილია ბ. ბელოუსოვის მიერ 1950 წელს აღმოჩენილი და მოგვიანებით, ა.ჟაბოტინსკის მიერ შესწავლილი ქიმიური რეაქცია. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია წარმოადგენს მალონის მუავის დაჟანგვის პროცესს, იონების კატალიზატორის არსებობისას. ამ რეაქციის მიმდინარეობისას, ხდება კონცენტრაციის რხევები, რის გამოც, ნარევის ფერი იცვლება: ცისფერი-წითელი-ცისფერი . . . გარდა პერიოდული რხევებისა, ქიმიური პროცესების დინამიკა უფრო რთულია და ბოლომდე არაა შესწავლილი. არსებობს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქციის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები, როგორცაა ფილდის, კერესის, ნოიესის და სხვა. მაგრამ არცერთი მათგანი ბოლომდე ვერ აღწერს ქიმიურ დინამიკას.

განვიხილოთ ჰიპოტეტური ქიმიური რეაქციის მოდელი, რომელსაც ბრიუსელიატორი ქვია და შემუშავებულია

ი. პრიგოჟინის სკოლის მიერ. პრიგოჟინ-ლუფვერის მოდელი არის, ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებული იქნა ქ. ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით, ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელიატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლუფვერის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემა ც ღიაა ე.ი. ემატება ან აკლდება  $A, B, D, E$  ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შეინარჩუნება ერთ ღონეზე.

პრიგოჟინ-ლევენერის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (7.30) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = k_1 A + k_3 X^2 Y - (k_2 B + k_4) X \\ \frac{dY}{dt} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{array} \right. \quad (7.31)$$

ჩავწეროთ (7.31) განტოლებები უგანზომილებო სახით, ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადები ფორმულებით

$$\tau = k_4 \cdot t, \quad x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot Y, \quad (7.32)$$

მაშინ (7.31) გადაიწერება სახით

$$\dot{x} = a - (b+1) \cdot x + x^2 \cdot y, \quad (7.33)$$

$$\dot{y} = b \cdot x - x^2 \cdot y. \quad (7.34)$$

სადაც,

$$a = \sqrt{\frac{k_1^2 \cdot k_3}{k_4^3}} \cdot A, \quad b = \frac{k_2}{k_4} \cdot B. \quad (7.35)$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ მეორე რიგის დინამიკური სისტემა ორი  $a$  და  $b$  მართვის პარამეტრით.

წონასწორობის პირობებს აქვთ სახე

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}. \quad (7.36)$$

წონასწორობის წერტილში არ ხდება  $x$  და  $y$  კონცენტრაციების ცვლილება.

ვიპოვოთ წონასწორობის მდგომარეობის არამდგრადობის პირობები. ანუ, ის პირობები, როცა სისტემაში წარმოიქმნებიან ავტორხევეები.

ამისათვის, წონასწორობის წერტილს მივცეთ მცირე შეშფოთებები და ვნახოთ როდის შორდება სისტემა წონასწორობის წერტილს. განვიხილოთ შეშფოთებული მდგომარეობა



$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta. \quad (7.37)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (7.33),(7.34) განტოლებებში, მაშინ გვექნება

$$\xi = a - (b+1)a - (b+1) \cdot \xi + (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right), \quad (7.38)$$

$$\eta = b \cdot (a + \xi) - (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right). \quad (7.39)$$

ამ სისტემის ლინეარიზაცია გვაძლევს

$$\xi = (b-1) \cdot \xi + a^2 \cdot \eta, \quad (7.40)$$

$$\eta = -b \cdot \xi - a^2 \cdot \eta. \quad (7.41)$$

ამ სისტემის ყოფაქცევის გამოსაკვლევად შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება, რისთვისაც უნდა მოვახდინოთ ჩასმა

$$\xi \rightarrow e^{p\tau}, \quad \eta \rightarrow e^{p\tau}. \quad (7.42)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$(p-b+1) \cdot (p+a^2) = -a^2 \cdot b. \quad (7.43)$$

თუ, გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$p^2 + p \cdot (a^2 + 1 - b) + a^2 = 0. \quad (7.44)$$

მისი ფესვებია

$$p = -\frac{a^2 + 1 - b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 1 - b)^2}{4} - a^2}. \quad (7.45)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს რომ წერტილში

$$b_{kr} = a^2 + 1, \quad (7.46)$$

სისტემა კარგავს მდგრადობას და იწყება ავტორხევეები პრიგოჟინ-ლეფევრის ჰიპოტეტიურ ქიმიურ სისტემაში.

## ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორი ავტორხევეითი სისტემებია თქვენთვის ცნობილი? აღწერეთ მათი მუშაობის პრინციპები.
2. ვან-დერ-ჰოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი.
3. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
4. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის დივერგენციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
5. პრიგოჟინ-ლეფევრის მათემატიკური მოდელი და ავტორხევეების წარმოქმნის პირობა

## გამოყენებული ლიტერატურა

- 1.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 2.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008

## თავი 8. პარამეტრული რხევითი სისტემები

პარამეტრული რხევითი სისტემებისათვის დამახასიათებელია, რხევების აგზნება რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრის დროში ცვლილების გამო. ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება, ასეთი პარამეტრების პერიოდული ცვლილება. პარამეტრული რხევები სისტემაში არ აღიძრება, თუ სისტემა წონასწორობის მდგომარეობაშია. ეს განასხვავებს პარამეტრულ რხევებს იძულებითი რხევებისაგან.

### 8.1. ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას (მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ ფიზიკური ქანქარა (სხეული), რომელსაც შეუძლია ბრუნვა  $A$  ჰორიზონტალური ბრუნვის ღერძის მიმართ. მოძრაობა ხასიათდება ბრუნვის  $\varphi$  კუთხით ღერძის მიმართ. დავუშვათ, რომ ბრუნვის  $A$  ღერძი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში გარკვეული  $a = a(t)$  კანონით. ქანქარას მოძრაობის განტოლების შედგენისას ღერძთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ, უნდა გავითვალისწინოთ, როგორც სიმძიმის ძალის მომენტის სიდიდე

$$M_s = -mgs \cdot \sin \varphi, \quad (8.1)$$

ასევე, ინერციის ძალის მომენტიც

$$M_b = -m \cdot \ddot{a} \cdot s \cdot \sin \varphi. \quad (8.2)$$

აქედან გამომდინარე, ფიზიკური ქანქარის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M_s + M_b = -m \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi, \quad (8.3)$$

ან სხვანაირად

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0, \quad (8.4)$$

სადაც

$a(t)$  - დროის პერიოდული ფუნქციაა;

$I$  - ფიზიკური ქანქარას ინერციის მომენტი;

$s$  - მანძილია ქანქარას მოცემული წერტილიდან ბრუნვის

$A$  - ღერძამდე.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას როცა  $a = A \cdot \cos \Omega \cdot t$ , მივიღებთ რომ

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + A \cdot \cos \Omega \cdot t) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0. \quad (8.5)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს  $\omega^2 = \frac{mgs}{I}$  და  $\varepsilon = \frac{mAs}{I}$ , მაშინ (8.5) მოდელი გადადის მათივე მოდელში

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot \sin \varphi = 0. \quad (8.6)$$

ამრიგად, მივიღეთ პარამეტრული რხევითი სისტემა.

## 8.2. ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)

ელექტრული რხევითი სისტემისათვის, რომელიც შედგება  $C$  - ტევადობის კონდენსატორისაგან და  $L$  - ინდუქციურობის მაგნიტური კოჭასაგან, გვაქვს თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0. \quad (8.5)$$

თუ, კონდენსატორის ტევადობა დროის პერიოდული ფუნქციაა  $C = C(t)$ , მაშინ გვაქვს პერიოდულკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც შესაძლოა პარამეტრული რხევების წარმოქმნა. ასეთი რხევები, როგორც წესი, მაგნეტური რხევითი სისტემისათვის. ასეთ შემთხვევაში, ცდილობენ სისტემა ისე დააპროექტონ რომ აიცილონ პარამეტრული რხევები.

თუმცა, ზოგიერთი ჭირი მარგებელიაო და ლ. მანდელშტამმა და ნ. პაპალექსმა დააპროექტეს ცვლადი დენის გენერატორი, რომლის მუშაობის პრინციპიც დამყარებულია კონდენსატორის ტევადობის ცვლილებაზე. ტევადობის ცვლილება ხდება იმის ხარჯზე, რომ კონდენსატორის ფირფიტების ნაწილი შეადგენს მბრუნავ კბილანა ბორბალს.

$$\text{თუ, } \frac{1}{L \cdot C} = P_0 + \Delta P \cdot \text{sign} \cos \Omega \cdot t, \quad \tau = \Omega \cdot t, \quad \lambda = \frac{P_0}{\Omega^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2} \quad \text{მაშინ (8.5)}$$

გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\ddot{Q} + (\lambda + \gamma \cdot \text{sign}(\cos \tau)) \cdot Q = 0. \quad (8.6)$$

პარამეტრული რხევითი სისტემის მოდელი (8.6), მეისნერის განტოლებას წარმოადგენს.

## 8.3. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში(მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვადგენთ წონასწორობის განტოლებას.

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (8.7)$$

სადაც,  $C(t)$  მოხმარებაა,  $I(t)$  – ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (8.8)$$

სადაც,  $\beta(t)$  აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა,  $C(t)$  მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, ამასთან ის დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე, ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე:

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (8.9)$$

(8.8)-ის და (8.9)-ის (8.7)-ში შეტანით მივიღებთ

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (8.10)$$

(8.10) განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \quad (8.11)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t)] = 0. \quad (8.12)$$

რადგან,  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (8.12) განტოლება გავეყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[x(t)] = 0. \quad (8.13)$$

თუ (8.13)-ში შევარჩევთ  $\beta(t)$  და  $F[x(t)]$

$$\beta(t) = t \quad ; \quad F[X(t)] = t(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) \quad (8.14)$$

მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის მატეის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) = 0. \quad (8.15)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატეის განტოლება, რომლისთვისაც დამახასიათებელია პარამეტრული რხევების არსებობა.

## ამოცანები და საუარჯიშოები

1.რით განსხვავდებიან პარამეტრული რხევები თავისუფალი რხევებისაგან ?

2.გამოიყვანეთ ფიზიკური საქანის პარამეტრული რხევების განტოლება.

3.გამოიყვანეთ მატეის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.

4.გამოიყვანეთ ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

5.გამოიყვანეთ მესნერის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის

### გამოყენებული ლიტერატურა

- 1.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 2.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 4.Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания, Москва, 2002
- 5.Магнус К. Колебания. Пер. с англ., Мир, Москва, 1982

## თავი 9. არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ, რხევით პროცესებს განსაზღვრავენ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც იწვევს შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას.

წრფივი იძულებითი რხევითი სისტემებისაგან განსხვავებით, არაწრფივ, იძულებით რხევით სისტემებში ადგილი აქვს არაწრფივი რეზონანსის მოვლენას. ამ მოვლენის სახელწოდებით ერთიანდებიან ის მოვლენები, რომელთაც ადგილი აქვთ არაწრფივ სისტემებში, გარე პერიოდული ზემოქმედების დროს და რომლებიც მქლავნდება, რხევების თვისობრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლების ცვლილებით გარე ზემოქმედების ამპლიტუდისა და სიხშირის მიხედვით.

### 9.1. ამოცანის ზოგადი დასმა

ინერციის კოეფიციენტზე გაყოფის შემდეგ, არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ზოგად შემთხვევაში, ჩაიწერება ასეთი სახით

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) = \psi(t). \quad (9.1)$$

აქ

$\psi(t)$  - გარე მაიძულებელი ძალაა;

$g(q)$  - აღმდგენი ძალაა;

$f(q, \dot{q})$  - დისიპაციისა და ამაჩქარებელი ძალების

კომბინაციაა; პირველი მათგანი მიმართულია  $q$  - სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო მეორე - სიჩქარის მიმართულებით.

ზოგად შემთხვევაში, (9.1) განტოლების ამოხსნა შეუძლებელია, თუმცა, კერძო შემთხვევებში ეს შესაძლებელია. ზოგად შემთხვევაში, განტოლება შეიძლება გამოკვლეულ იყოს კომპიუტერის დახმარებით.

**9.2. ფრანგიშვილი-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)**

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა, ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა ტოლია მიწოდებისა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი  $X(t)$ , რამდენიც სჭირდება ბაზარს  $Y(t)$ .

$$X(t) = Y(t). \quad (9.2)$$

$X(t)$  არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა),  $Y(t)$  - მოთხოვნა.

(9.2) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (9.3)$$

სადაც,  $C(t)$  – მოთხოვნის ფუნქციაა,  $I(t)$  – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ჰიკსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t), \quad (9.4)$$

სადაც  $\beta$ -აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთელ წინა ისტორიაზე გავლილ  $t$  დროში. სხვანაირად,

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau, \quad (9.5)$$

წონასწორობის (9.3) განტოლებაში (9.4) და (9.5) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau)] d\tau. \quad (9.6)$$

(9.6) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \quad (9.7)$$

ანუ, მივიღებთ ფრანგიშვილი-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta} \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta} F[X(t)] = 0. \quad (9.8)$$

ვთქვათ:

$$\beta = -\frac{1}{e}; \quad (9.9)$$

მაშინ მივიღებთ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0, \quad (9.10)$$

სადაც:



$e = const$ , ხოლო  $F_1[X(t)]$  მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (9.11)$$

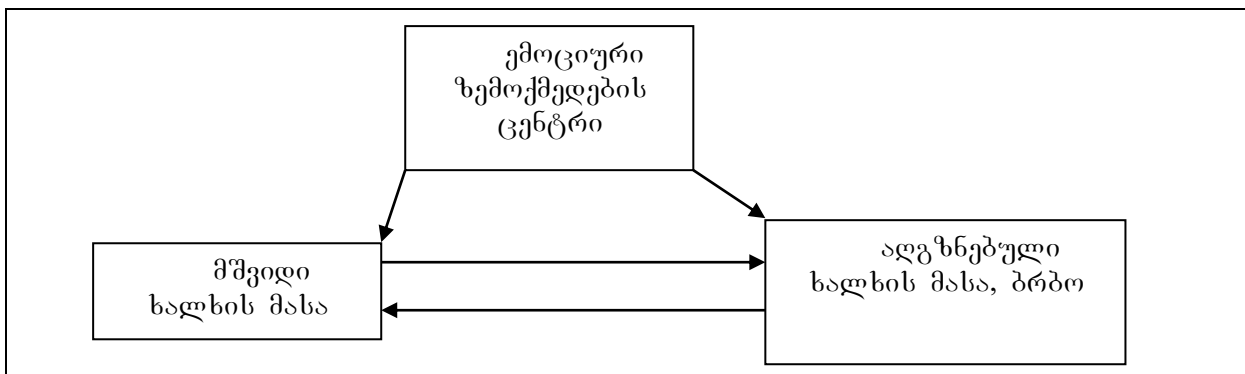
მაშინ (9.11)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A \cos(\omega \cdot t). \quad (9.12)$$

რომელიც აღწერს არაწრფივ, იძულებით რხევებს, ფრანგიშვილი - ობგაძის ეკონომიკურ სისტემაში.

### 9.3. ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, პერიოდული გარე PR – გამდიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში

განვიხილოთ ხალხის მასის ემოციური ქმედების მათემატიკური მოდელი. ხალხის მასისათვის დამახასიათებელია გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, გარე ემოციური ზემოქმედების გავლენით, რომლის როლს შეიძლება ასრულებდეს საეკლესიო პირი, პოლიტიკოსი, ავანტურისტი ან ტელეჟურნალისტი. ამ ზემოქმედებათა ერთობლიობას PR – გამდი-ზიანებლის ზემოქმედებას უწოდებენ. განვიხილოთ ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი ნახ.9.1



ნახ.9.1 ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი

ხალხის მასის ემოციური დინამიკის მათემატიკური მოდელი დგება ნიუტონის მეორე კანონის ბაზაზე

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (9.13)$$

სადაც

$n$  – ბრბოს შემადგენელი ხალხის რაოდენობაა

$P_2$  – იმის ალბათობაა, რომ ხალხის მასა აღზნებულ მდგომარეობაშია;

$f$  – ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდეა;

$\varepsilon$  - ხალხის ემოციური აგზნების სიდიდის მახასიათებელი პარამეტრია;

$P_1$  – იმის ალბათობაა, რომ ხალხის მასა მშვიდ მდგომარეობაშია..

ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდე, პირდაპირპროპორციულია მათი ორმაგი მოცულობისა და იმის ალბათობისა, რომ მასა მშვიდ მდგომარეობაში იმყოფება; ასევე, როცა იზრდება აღზნებადობის ალბათობა, ემოციური ზემოქმედების ძალა მცირდება. ასე, რომ გვექნება

$$f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot \dot{P}_2, \text{ დაუშვათ, რომ } \gamma = 1. \quad (9.14)$$

(9.13) და (9.14) იძლევა მოდელს

$$\ddot{P}_2 = -2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2. \quad (9.15)$$

განვიხილოთ, შემთხვევა როცა სისტემაზე მოქმედებს პერიოდული PR – გამლიზიანებელი. მაშინ (9.13) და (9.14) თანადობების ნაცვლად გვექნება

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f + n \cdot A \cdot \sin \omega \cdot \varepsilon, \quad f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot \dot{P}_2, \quad \gamma = 1, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (9.16)$$

მაშინ მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = -2n P_1 \dot{P}_2 + n \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon), \quad (9.17)$$

სადაც

$$P_1 = 1 - P_2. \quad (9.18)$$

ამიტომ, გვაქვს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{P}_2 + 2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon). \quad (9.19)$$

ამრიგად, მივიღეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი, პერიოდული გარე

PR – გამლიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში. რაც წარმოადგენს არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის აშკარა მაგალითს.

## ამოცანები და სავარჯიშოები

1. არაწრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის ზოგადი სახე.

2.გამოიყვანეთ არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე(დიუფინგის განტოლება).

3.**Mathcad** – ის ბაზაზე ამოხსენით დიუფინგის განტოლება და შეისწავლეთ ამონახსნების ყოფაქცევა ფაზურ სიბრტყეზე.

4.გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ **Mathcad** – ის ბაზაზე.

5. გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი გარე, პერიოდული PR – გამღიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში

### გამოყენებული ლიტერატურა

- 1.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 2.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი **Mathcad** – ისა და **Matlab** – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 4.Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М.Теоретическая физика, т.1, Механика, Наука, Москва, 1972
5. Prangishvili A., Obgadze T., Sakvarelidze N., Iashvili L. MATHEMATICAL MODELLING OF EXCESSIVE DEMAND FOR ESSENTIAL COMMODITIES DYNAMICS AT PERIODIC, PANIC PR-EXCITER, Transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi , 2009
- 6.Obgadze T., Sakvarelidze N., Modebadze T. MATHEMATICAL MODELLING PEOPLE MASSES EMOTIONAL BEHAVIOUR DYNAMICS AT PERIODIC PR-EXCITER, Transactions automated control systems № 1(6), Tbilisi , 2009

## ნაწილი II. უწყვეტი, ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელების გამოკვლევის პრაქტიკული მეთოდები

იმ შემთხვევაში, როცა გვინტერესებს მოცემული მათემატიკური მოდელის კერძო რეალიზაცია კონკრეტული საწყისი პირობების დროს (კოშის ამოცანა), ჩვენ ვიყენებთ, უმეტესწილად, რუნგე-კუტას რიცხვით მეთოდს ცვლადი ბიჯით, რაც იძლევა ამონახსნების გრაფიკული გამოსახვის საშუალებას.

თუმცა, გვაქვს ისეთი მოდელებიც, რომლებსაც გააჩნიათ პარამეტრების ისეთი, გარკვეული მნიშვნელობები (ბიფურკაციის წერტილები), სადაც პროცესი შეიძლება წარიმართოს სხვადასხვა სცენარებით. ეს დამახასიათებელია, როგორც წესი, არაწრფივი სისტემებისათვის. სისტემას შეიძლება ქონდეს პერიოდული ამონახსნები (ზღვართი ციკლები), ან სისტემა პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობებისათვის გადიოდეს ქაოსურ რეჟიმზე. არაწრფივი სისტემების ასეთი გამოკვლევებისათვის, შემუშავებულია გეომეტრიული მეთოდები, რომელთაც ზოგჯერ სისტემების თვისობრივ თეორიასაც უწოდებენ. სწორედ ასეთი მეთოდების შესწავლას ემსახურება ჩვენი სახელმძღვანელოს ეს ნაწილი.

### თავი 10. ჩვეულებრივი სისტემების ანალიზური ამონახსნები და ელიფსური ფუნქციები

განვიხილოთ თავისუფალი არადემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (10.1)$$

ეს მოდელი, როგორც უკვე ვიცით, შეიძლება შეესაბამებოდეს მატერიალური ნაწილაკის მცირე რხევებს, რომლებიც გამოწვეულია წონასწორობის მდგომარეობისაკენ მიმართული ძალით. ასეთ შემთხვევაში  $\omega = \sqrt{g/L}$ , სადაც  $L$  - შეესაბამება ზამბარის სიხისტეს, ხოლო  $g$  - ზამბარაზე გამობმული სხეულის მასაა. ასეთი მარტივი

წრფივი სისტემისათვის, ადვილია ზუსტი ამონახსნის პოვნა  $x(t) = e$  ჩასმის საშუალებით:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta) \quad (10.2)$$

ინტეგრების ორ ცვლადს - რხევის ამპლიტუდასა და ფაზის წანაცვლებას, განსაზღვრავენ  $x$  და  $\dot{x}$  საწყისი პირობებიდან გამომდინარე

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}^2(0) + \omega^2 x^2(0)}, \quad \delta = \arctg\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}\right) \quad (10.3)$$

### 10.1. წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელის ინტეგრება კვადრატურებში

ეხლა დავუბრუნდეთ (10.1) დიფერენციალურ განტოლებას და ამოვხსნათ სხვანაირად, ისე, რომ შემდეგ, ამ მეთოდის განზოგადებაც შეგვეძლოს უფრო რთული სისტემების ამოსახსნელად. ამისათვის გადავწეროთ განტოლება ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (10.4)$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \quad (10.5)$$

ასეთ წარმოდგენას, დიდი მნიშვნელობა აქვს ჰამილტონური(ინტეგრებადი) სისტემებისათვის, რომლებზედაც გვექნება საუბარი მოგვიანებით. თუ გავამრავლებთ (10.4) განტოლების ორივე მხარეს  $y$ , ხოლო (10.5) განტოლების ორივე მხარეს  $x$  და შევსებთ და შედეგებს შევკრიბავთ, მივიღებთ

$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) = 0. \quad (10.6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (10.6) შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) = 0. \quad (10.7)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება მუდმივი სიდიდეა

$$\frac{1}{2} (y^2 + \omega^2 x^2) = I_1. \quad (10.8)$$

ინტეგრების ცვლადს მოძრაობის ინტეგრალს, ანუ პირველ ინტეგრალს უწოდებენ. თუ, გავითვალისწინებთ იმას, რომ  $\dot{x} = \omega y$ , ადვილი მისახვედრია რომ  $I_1 =$  სიდიდეს აქვს სისტემის მექანიკური ენერჯის შინაარსი. ამ ინტეგრალის გამოყენებით შეგვიძლია (10.4)-(10.5) სისტემის რიგი, დავწიოთ ერთი ერთეულით. ამისათვის, გამოვსახოთ (10.8) თანადობიდან

$$y = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2)}. \quad (10.9)$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (10.4) განტოლებიდან. გვექნება უკვე პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2)}. \quad (10.10)$$

ამ განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები, მაშინ მივიღებთ

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2)}}, \quad (10.11)$$

თუ, ვაინტეგრებთ (10.11) განტოლებას, მივიღებთ ინტეგრირების კიდევ ერთ მუდმივას:

$$t + I_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \frac{\omega x}{\sqrt{2I_1}} \right) \quad (10.12)$$

თუ, გავამრავლებთ (10.12) ტოლობას ცვლადზე და ავიღებთ ორივე მხარიდან სინუსს, მივიღებთ ამონახსნს

$$x(t) = \frac{\sqrt{2I_1}}{\omega} \sin(\omega t + I_2), \quad (10.13)$$

ეს ამონახსნი, ცხადია რომ იდენტურია, ადრე სხვა გზით მიღებული (10.2) ამონახსნისა. ინტეგრების მეორე მეთოდი უფრო რთული ჩანს, თუმცა, ამ მეთოდს ამონახსნამდე მივყავართ არაწრფივი განტოლებების ისეთ შემთხვევებშიც, როცა პირდაპირი მარტივი ინტეგრება(ჩასმის ხერხით) არ გამოდის.

ამრიგად, ამ პარაგრაფის მეთოდით, სისტემის ამონახსნის პოვნის ალგორითმს აქვს ოთხი ეტაპი:

1. პირველი ინტეგრალის იდენტიფიკაცია;
2. პირველი ინტეგრალის გამოყენება სისტემის ხარისხის ერთი ერთეულით დასაწევად;
3. ამოცანის ამოხსნა კვადრატურებში, ანუ ანალიზური ამონახსნის პოვნა;
4. შებრუნებული ფუნქციის პოვნა, რომელსაც მივყავართ ცალსახა ამონახსნამდე.

უნდა აღინიშნოს, რომ საზოგადოდ, არაწრფივი განტოლებების კვადრატურებში ამოხსნა არ ხერხდება, მითუმეტეს, თუ მათი რიგი ორზე მეტია.

წრფივი ოსცილატორის რხევის პერიოდს ადვილად ვპოულობთ (10.2) ამონახსნიდან

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.14)$$

თუმცა, რხევის პერიოდის პოვნა შესაძლებელია მეორე, გეომეტრიული (10.9),(10.11) მიდგომიდანაც. მართლაც, თუ გავიხსენებთ რომ  $I_1 = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2$  შეესაბამება სისტემის მექანიკურ ენერგიას, ადვილად ვიპოვით სისტემის ზღვრული წონასწორობის წერტილებს (10.9) ტოლობიდან  $\dot{x} = 0 \implies x = \pm \sqrt{\frac{I_1}{\omega^2}}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ სისტემის სრული რხევის პერიოდი (10.11) თანადობიდან გამომდინარე იქნება

$$T = 2 \int_{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}} =. \quad (10.15)$$

P.S. ცხადია, რომ ოხევის პერიოდი წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი ოხევის შემთხვევაში არაა დამოკიდებული ენერგიაზე და მაშასადამე საწყის პირობებზე.

## 10.2. არაწრფივი ოსცილატორის თავისუფალი ოხევების მოდელირება

განვიხილოთ, მარტივი არაწრფივი სისტემის თავისუფალი ოხევების მოდელი წონასწორობისაკენ მიმართული არაწრფივი ძალით

$$\ddot{x} + \alpha x^3 =. \quad (10.16)$$

გადავწეროთ ეს სისტემა ნორმალური სახით

$$\dot{x} = \quad (10.17)$$

$$\dot{y} = -\beta \quad (10.18)$$

გავამრავლოთ (10.17) განტოლების ორივე მხარე  $\beta$ , ხოლო (10.18) განტოლების ორივე მხარე  $\alpha$  სიდიდეებზე და შედეგები შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\dot{x}\beta x^3 + y\dot{y} = y\beta x^3 + (-y\beta\alpha) \quad (10.19)$$

(10.19) ადვილად გარდაიქმნება მარტივ განტოლებად

$$y\dot{y} + \beta x^3 \dot{x} = \quad (10.20)$$

რომელსაც გადავწეროთ სახით



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} \beta x^4 \right) = \quad (10.21)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრჩხილებსი მოთავსებული გამოსახულება მუდმივი სიდიდეა და მას ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი ქვია, ხოლო შინაარსით, ის არის ამ არაწრფივი სისტემის მექანიკური ენერგია

$$E = I_1 = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} f. \quad (10.22)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (10.17) ტოლობას, (10.22) ტოლობიდან მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{4} f)}. \quad (10.23)$$

ცვლადთა განცალკევა გვაძლევს განტოლებას

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{4} f)}}, \quad (10.24)$$

საიდანაც, წინა მაგალითის ანალოგიურად ვპოულობთ რხევის პერიოდს

$$T = 2 \int_{-\left(\frac{4E}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2(E - \frac{1}{4} f)}}^{\left(\frac{4E}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - \frac{1}{4} f)}}. \quad (10.25)$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება გამა-ფუნქციის მეშვეობით

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi \beta^{\frac{1}{2}}}} \Gamma^2 \left( \frac{1}{4} \right). \quad (10.26)$$

P.S. რხევის პერიოდი ეხლა უკვე დამოკიდებულია ენერგიაზე. რაც მეტია ნაწილაკის ენერგია, მით უფრო მცირეა მისი რხევის პერიოდი.

ამ შემთხვევაში რხევის სიხშირეც ენერგიაზეა დამოკიდებული და მაშასადამე საწყის პირობებზეც. ესაა, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი განმასხვავებელი ნიშანი წრფივ და არაწრფივ სისტემებს შორის.

### 10.3. მეორე რიგის არაწრფივი სისტემები და ელიფსური ფუნქციები

პრაქტიკაში არსებული მოდელების უმრავლესობა, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება. დიფერენციალურ განტოლებათა საკმაოდ დიდ კლასს შეადგენენ ისეთი მოდელები, რომლებიც აღიწერებიან

$$\ddot{x} = F(x), \tag{10.27}$$

ტიპის განტოლებებით. სადაც  $F(x)$  - პოლინომი, რაციონალური ან ტრანსცენდენტული ფუნქციაა დამოკიდებული ცვლადზე.

პოლინომის შემთხვევაში, მაგალითად

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \tag{10.28}$$

ჩვენ შეგვიძლია, განტოლება (10.27) ვაინტეგროთ (10.28) ფუნქციის გათვალისწინებით, რისთვისაც გადავწერთ მათ ნორმალური სახით

$$\dot{x} = \dots \tag{10.29}$$

$$\dot{y} = \sum_{i=0}^n a_i x^i \tag{10.30}$$

გავამრავლოთ (10.29) განტოლების ორივე მხარე -  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  გამოსახულებაზე, ხოლო (10.30) განტოლების ორივე მხარე გამოსახულებაზე და შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$y\dot{y} - \dot{x} \sum_{i=0}^n a_i x^i = \dots \tag{10.31}$$

რომელსაც ადვილად გადავწერთ ინტეგრებადი სახით

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} y^2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} \right) = \quad (10.32)$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ პირველ ინტეგრალს

$$I_1 = \frac{1}{2} y^2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} \quad (10.33)$$

საიდანაც ამოვხსნით ცვლადს

$$y = \sqrt{2 \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \dots \right)}, \quad (10.34)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (10.29) ტოლობას გვექნება

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2 \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \dots \right)} \quad (10.35)$$

ცვლადთა განცალგებით მივიღებთ, რომ

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2 \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \dots \right)}}. \quad (10.36)$$

ეხლა უკვე ამოცანის ამოხსნა დავიდა მარჯვენა მხარის ინტეგრალის გამოთვლამდე. თუ, ფესვქვეშა მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება სამს, მაშინ ინტეგრალი გამოისახება „ელიფსური“ ფუნქციებით.

ელიფსური ფუნქციები, ჩვეულებრივი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების (sinx, cosx, . . .) განზოგადებაა. ხოლო, ელიფსური ინტეგრალები შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების (arcsinx, arccosx . . .) განზოგადებაა. ელიფსური ფუნქციების თეორია განავითარეს აბელმა და იაკობმა. მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი მოდელების რაოდენობა არც ისე დიდია, რომლებსაც ვხსნით ელიფსური ფუნქციებით, მაინც ბევრი საინტერესო ამოცანა (ქანქარას

რხევების ამოცანა . . .) ხვდება ელიფსური ფუნქციების მოქმედების არეშიც. თუ (10.28) ფუნქციის ხარისხი, არ აღემატება სამს, მაშინ მისი ამონახსნი მოიცემა იაკობის ელიფსური ფუნქციებით. ხოლო, თუ მისი ხარისხი არ აღემატება ორს, ამონახსნი მოიცემა ვაიერშტრასის ელიფსური ფუნქციებით.

#### 10.4. იაკობის ელიფსური ფუნქციები

განვიხილოთ სისტემა

$$\ddot{x} = A + Bx + Cx^2 + L. \quad (10.37)$$

ამ სისტემის შესაბამისი (10.33) პირველი ინტეგრალი შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \left( Ax + \frac{1}{2} Bx^2 + \frac{1}{3} Cx^3 + \frac{1}{4} Dx^4 \right) \quad (10.38)$$

სიმარტივისათვის, გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგნაირად

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \epsilon. \quad (10.39)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი შეიძლება დაიშალოს მამრავლებად და შემდეგ გარდაიქმნას ლეჟანდრის კანონიკური სახემდე

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = (1 - x^2)(1 - kx^2). \quad (10.40)$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვაძლევს გამოსახულებას

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2)}}. \quad (10.41)$$

რომლის მარჯვენა ნაწილში მდგარ ინტეგრალს პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი ეწოდება და აღნიშნება

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2)}}. \quad (10.42)$$

ცხადია, რომ როცა  $k = 0$  ეს ფუნქცია ემთხვევა ჩვეულებრივ  $\arcsin$  ფუნქციას, რაც შეესაბამება ჩვენს მიერ ადრე ამოხსნილ ამოცანას (10.12).

P.S. იაკობის ელიფსური ფუნქციები, არიან ელიფსური ინტეგრალების შექცეული ფუნქციები.

(10.42) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა  $x = sn$ , მაშინ გვექნება პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \theta)}}. \quad (10.43)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 \theta)}}, \quad (10.44)$$

მაშინ  $\operatorname{sn}(u, k)$  ელიფსური ფუნქცია იქნება

$$\operatorname{sn}(u, k) = \sin \theta.$$

განიხილავენ სხვა ტიპის ელიფსურ ფუნქციებსაც

$$\operatorname{cn}(u, k) = \cos \theta.$$

გვაქვს ანალოგია ჩვეულებრივ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან

$$u = \operatorname{arc sn}(\sin \theta, k) = \operatorname{arc cn}(\cos \theta, k).$$

## ამოცანები და სავარჯიშოები:

1. იაკობისა და ვეიერშტრასის ელიფსური ფუნქციების ცნება;

2. დამოკიდებულია, თუ არა თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის რხევის პერიოდი სისტემის ენერგიაზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

3. დამოკიდებულია, თუ არა არაწრფივი, კუბური რხევითი სისტემის რხევის პერიოდი სისტემის ენერგიაზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

## გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ოზგაძე თ., ოზგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
3. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
6. თ. ოზგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
7. თ. ოზგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
8. М. Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988

## თავი 11. დინამიკური სისტემების გამოკვლევა ფაზურ სივრცეში

დინამიკური სისტემის ფაზურ სივრცეში გამოკვლევა, საშუალებას იძლევა, სისტემის ანალიზურად ამოუხსნელად იქნას შესწავლილი, ამ სისტემის ამონახსნების ძირითადი თვისებები: განსაკუთრებული წერტილები, ბიფურკაციები, ზღვართი ციკლები . . .

განსაკუთრებულად ხელსაყრელია ფაზური სივრცის ცნება იმ შემთხვევაში, როცა ცვლადების რიცხვია ორი და მაშასადამე, ფაზური სივრცე ფაზურ სიბრტყეს წარმოადგენს.

### 11.1. წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი

განვიხილოთ წრფივი დინამიკური სისტემა:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b \quad (11.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = cy + d, \quad (11.2)$$

1. ამ დინამიკური სისტემის შესასწავლად, უნდა ამოვიწეროთ სისტემის კოეფიციენტების მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad (11.3)$$

ვიპოვოთ ამ მატრიცის კვალი და დეტერმინანტი:

$$\text{tr}A = a + \dots \quad \text{det}A = ad - \dots \quad (11.4)$$

2. ცხრილი 11.1 მიხედვით, დავადგინოთ განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ტიპი;

ცხრილი 11.1

$\text{det}A > 0$	$\text{tr}A < 0$	$\text{det}A < \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	მდგრადი კვანძი
$\text{det}A > 0$	$\text{tr}A < 0$	$\text{det}A > \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	მდგრადი ფოკუსი
$\text{det}A > 0$	$\text{tr}A > 0$	$\text{det}A < \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	არამდგრადი კვანძი
$\text{det}A > 0$	$\text{tr}A > 0$	$\text{det}A > \frac{(\text{tr}A)^2}{2}$	არამდგრადი ფოკუსი
$\text{det}A < 0$	ჰიპერბოლური-უნაგირა წერტილი		
$\text{det}A > 0$	$\text{tr}A = 0$	ცენტრი	

3. ვიპოვოთ განსაკუთრებული მიმართულებები:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = \dots \quad (11.5)$$

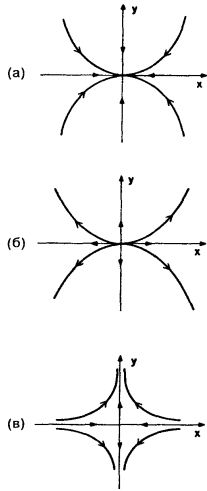
$$y = -\frac{a}{b}x; \quad y = -\frac{c}{d}x \quad (11.6)$$

4. თუ, განსაკუთრებული წერტილი კვანძია ან უნაგირა წერტილი, მაშინ ვპოულობთ ასიმპტოტებს ჩასმით  $y = \dots$

5. ვპოულობთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებს.

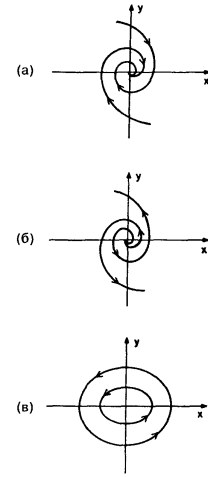
განსაკუთრებული წერტილების მახლობლობაში, ორი ცვლადის მქონე დინამიკური სისტემის ფაზურ ნაკადს, შეიძლება ქონდეს ერთ-ერთი სახე ნახ.11.1 და ნახ.11.2-დან:





ნახ.11.1. ლოკალური ფაზური ნაკადები ნაკადები

ა) მდგრადი კვანძი; ბ) არამდგრადი კვანძი; ვ) ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილი.



ნახ.11.2. ლოკალური ფაზური

ა) მდგრადი ფოკუსი; ბ) არამდგრადი ფოკუსი; ვ) ცენტრი.

კვლევის ეს სქემა ძალაშია, ზოგადად, ყველა წრფივი ავტონომიური სისტემისათვის

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=\overline{1,n} \quad (11.7)$$

ამ შემთხვევაში,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (11.8)$$

განვიხილოთ პრაქტიკული მაგალითი:

1. ვთქვათ, მოცემულია დინამიკური სისტემა

$$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}. \quad (11.9)$$

გადაწეროთ სისტემა ნორმალური სახით

$$\frac{dx}{dt} = 3x + \dots \quad (11.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + \dots \quad (11.11)$$

სისტემის კოეფიციენტების მატრიცას აქვს სახე:

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (11.12)$$

$$\det A = - \quad \operatorname{tr} A =$$

- რადგან (11.10)-(11.11) სისტემის დეტერმინანტი უარყოფითია, ცხრილი 11.1 გვაძლევს, რომ განსაკუთრებული (0;0) წერტილი ჰიპერბოლური- უნაგირის ტიპს მიეკუთვნება;
- განსაკუთრებულ მიმართულებებს მივიღებთ (11.10) და (11.11) განტოლებების მარჯვენა მხარეების ნულთან გატოლებით და ამოხსნით ცვლადის მიმართ:

$$y = -\frac{3}{4}x; \quad y = - \quad (11.13)$$

პირველ წრფეს ფაზური ტრაექტორიები კვეთენ ვერტიკალური მიმართულებით, ხოლო მეორეს ჰორიზონტული მიმართულებით.

- ვპოულობთ ასიმპტოტებს:

$$k = \frac{2x+kx}{3x+4kx} = \frac{2}{3}; \quad (11.14)$$

ამ ტოლობიდან ვიღებთ კვადრატულ განტოლებას

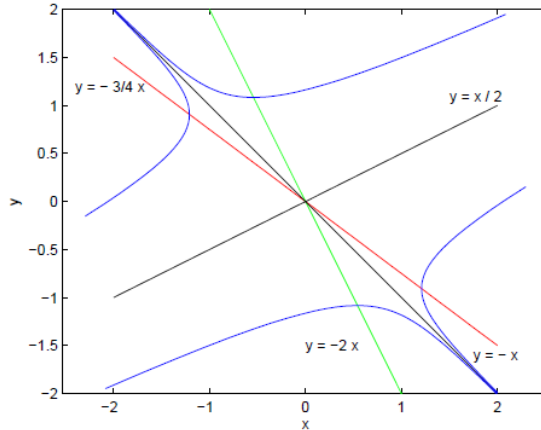
$$4k^2 + 2k - 2 = 0, \quad \text{ანუ,} \quad 2k^2 + k - 1 = 0. \quad (11.15)$$

ამ განტოლების ფესვებია  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ . რაც იმას ნიშნავს რომ გვაქვს ასიმპტოტები:  $y = -x$  და  $y = \frac{1}{2}x$ .

- ეხლა განვსაზღვროთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებები (ნახ.11.3) ამისათვის ავიღოთ რაიმე წერტილი ასიმპტოტზე, მაგალითად (1;-1) და გამოვითვალოთ ამ წერტილში (11.9) ფორმულიდან გამომდინარე

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)} = -1,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია კლებადია -ის ზრდისას და უახლოვდება განსაკუთრებულ (0;0) წერტილს.



ნახ.11.3. უნაგირის ტიპის განსაკუთრებული წერტილის ფაზური ტრაექტორიები

## 11.2. ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური პორტრეტი

დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის შესახებ ყველაზე სრულ ინფორმაციას იძლევა მისი გამოკვლევა ფაზურ სიბრტყეზე. ორი და ცვლადი, საშუალებას გვაძლევს, შევისწავლოთ (11.1),(11.2) სისტემის ამონახსნის ყოფაქცევა - **ფაზურ სივრცეში** და რადგან ცვლადების რაოდენობა ორია, ფაზური სივრცე წარმოადგენს **ფაზურ სიბრტყეს**.

იმ შემთხვევაში, თუ, საქმე გვაქვს პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემასთან (11.7), ან უფრო ზოგად, არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემასთან

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (11.16)$$

მაშინ თითოეული  $x_1, x_2, \dots$  ცვლადებიდან, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც **განზომილებიანი ფაზური სივრცის** დამოუკიდებელი ცვლადი. **ფაზური სივრცის** ცნებას აზრი აქვს ნებისმიერი დიფერენციალური განტოლებებისათვის, თუმცა, როგორც დავინახავთ, მას განსაკუთრებულად მდიდარი გეომეტრიული სტრუქტურა აქვს **ჰამილტონური სისტემებისათვის**.

მოცემული მომენტისათვის, ფაზური და კოორდინატების ნებისმიერი მნიშვნელობა ფაზურ სიბრტყეზე, მთლიანად განსაზღვრავს (11.1),(11.2) სისტემის მდგომარეობას, დროის ამ მომენტისათვის. როგორც წესი, ამ სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს, ფაზურ სიბრტყეზე შეესაბამება გლუვი წირი, რომელსაც **ფაზურ ტრაექტორიას** (ან დონის წირს) უწოდებენ. ხოლო ამ ტრაექტორიის გასწვრივ მოძრაობას - **ფაზურ ნაკადს** ეძახიან. რადგან დიფერენციალური განტოლებების ფუნდამენტური თვისებაა, ამონახსნის ცალსახა ხასიათი, ნათელია, რომ სხვადასხვა ფაზური ტრაექტორიები არ იკვეთებიან.

თუ, ერთ ნახაზზე დავიტანთ, სხვადასხვა საწყისი პირობების შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული სისტემის ფაზური ტრაექტორიებისაგან შემდგარ რთულ სურათს, რომელსაც სისტემის **ფაზურ პორტრეტს** უწოდებენ. განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი რხევითი სისტემა-წრფივი ოსცილატორი (ამ სახით რხევითი სისტემის წარმოდგენა ხელსაყრელია ჰამილტონური სისტემებისათვის, რომლებსაც შემდგომში დაწვრილებით განვიხილავთ):

$$\dot{x} = \dots \quad (11.17)$$

$$\dot{y} = -\omega \dots \quad (11.18)$$

გავამრავლოთ (11.17) განტოლების ორივე მხარე  $\omega$  გამოსახულებაზე, ხოლო (11.18) განტოლების ორივე მხარე  $-\omega$ -ზე. მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

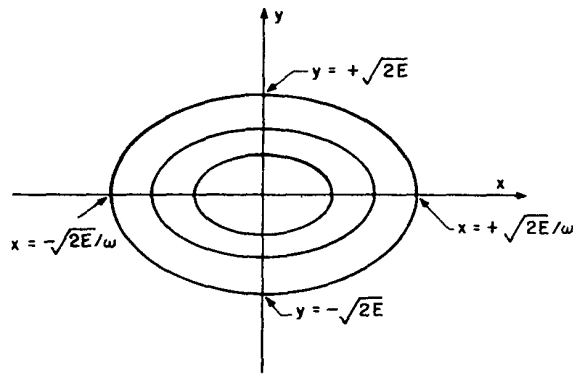
$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = \dots \quad (11.19)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ფაზური ტრაექტორიებისა და ნაკადის სახე, განვიხილოთ, ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი. ჩვენ

სისტემის შემთხვევაში, ის ადვილად მიიღება (11.19) განტოლების ინტეგრებით

$$E = \frac{1}{2}(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2) \quad (11.20)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ინტეგრალი სისტემის მექანიკურ ენერგიას წარმოადგენს. პირველი ინტეგრალი (11.20) საშუალებას გვაძლევს, ფაზური და კოორდინატების სიბრტყეში, წარმოვადგინოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი, რომლის თითოეული ფაზური ტრაექტორია ელიფსია და ნახევარღერძების სიდიდე, დამოკიდებულია საწყის პირობებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემის ენერგიის სიდიდეს. ხოლო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები კი, ადვილად განისაზღვრება (11.20) თანადობიდან ნახ.11.4.



#### 11.4. თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი

თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ნაკადი, შემოსაზღვრულია ფაზურ სივრცეში, სისტემის საწყისი ენერგიის შესაბამისი ელიფსური ფაზური ტრაექტორიით. ფაზური ნაკადი, წარმოადგენს კონცენტრული ელიფსების ერთობლიობას, რომლებიც ფაზურ სივრცეში განლაგებული არიან განსაკუთრებული წერტილის (0;0) გარშემო. განსაკუთრებული წერტილი ამ ელიფსების ცენტრს წარმოადგენს. ჩაკეტილი ფაზური ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეში, შეესაბამება პერიოდულ რხევებს. ასეთი ტიპის განსაკუთრებულ წერტილს - ცენტრს უწოდებენ.

#### 2. განვიხილოთ ეხლა დემპფირებული რხევითი სისტემა

$$\dot{x} = \quad (11.21)$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x - \quad (11.22)$$

რომელიც მიიღება დემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელიდან

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \alpha = 0. \quad (11.23)$$

როგორც ვიცით, ამ განტოლების ამონახსნი, მოიცემა ფორმულით

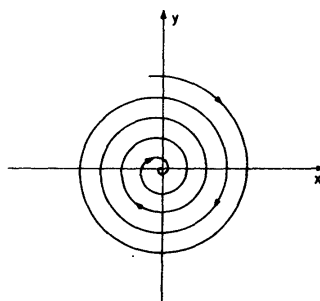
$$x(t) = ae^{-\lambda t/2} \sin(\nu t + \quad (11.24)$$

სადაც  $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}$ , თუ, ფესქვემა გამოსახულება მეტია ნულზე, ხოლო, განისაზღვრება ამოცანის საწყისი პირობებით.

ამ სისტემისათვის, მექანიკური ენერგია აღარაა მუდმივი და ის ექსპონენციალურად კლებულობს

$$E(t) = E(0)e^{-\lambda t} \quad (11.25)$$

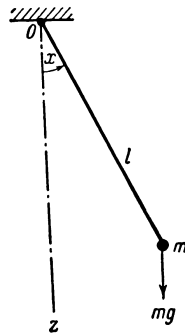
განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ირგვლივ, ამონახსნები ეხვევა სპირალურად ნახ.11.5.



ნახ.11.5.დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიები

ამ ტიპის განსაკუთრებულ წერტილებს - მდგრად ფოკუსს უწოდებენ.

### 3. მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის აგება



ნახ.11.6 მათემატიკური ქანქარას სქემა

მათემატიკური ქანქარას, რხევითი სისტემის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება, ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია იმ არაწრფივი განტოლებებიდან, რომლის ანალიზური ამოხსნაც შეუძლებელია აიგოს იაკობის ელიფსური ფუნქციების მეშვეობით. ნახ.11.6 გათვალისწინებით და ნიუტონის მეორე კანონზე დაყრდნობით, ადვილად ავაგებთ მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის დინამიკის, დიფერენციალურ განტოლებას

$$ml\ddot{x} + mg\sin x = 0 \quad (11.26)$$

სადაც,  $m$  დაკიდული ტვირთის მასაა;  $l$  საკიდელის სიგრძეა; ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა.

თუ, (11.26) განტოლების ორივე მხარეს, შევკვეცავთ მასაზე და გავყოფთ საკიდელი სიგრძეზე, გვექნება

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin x = 0. \quad (11.27)$$

თუ, განვიხილავთ მცირე გადახრების შემთხვევას  $x \ll \pi$  მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ  $\sin x \approx x$ . ასეთ შემთხვევაში, ქანქარის არაწრფივი განტოლება (11.27) გარდაიქმნება წრფივ განტოლებად და ის შეესაბამება, უკვე შესწავლილ თავისუფალ, არადემპფირებულ რხევით სისტემას

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

$$(11.28)$$

ამ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე იქნება

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$(11.29)$$

საწყისი (11.27) არაწრფივი სისტემის პირველი ინტეგრალი, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სისტემის დაყვანილი მექანიკური ენერგია და ჩავწეროთ სახით

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 - \frac{g}{l} \cos x = E',$$

$$(11.30)$$

მართლაც, (11.30) პირველი ინტეგრალის წარმოებული გვაძლევს (11.27) განტოლებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ (11.27) განტოლების ინტეგრებით, შეიძლება მიღებულ იქნას (11.30) პირველი ინტეგრალი. (11.30) პირველი ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$t = \int \frac{dx'}{\sqrt{2(E' + \frac{g}{l} \cos x')}}. \quad (11.31)$$

გარდავქმნათ ეს ინტეგრალი პირველი გვარის ელიფსურ ინტეგრალად. ამისათვის, ჯერ შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\cos \omega = -k^2,$$

$$(11.32)$$

მაშინ (11.31) ინტეგრალი გადაიწერება სახით

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\cos x' - c}}.$$

$$(11.33)$$

თუ, გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას  $\cos x = 1 - 2k^2(\sin^2 \varphi)$ , სადაც  $k = \sin \frac{\omega}{2}$ , მივიღებთ

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2(\sin^2 \varphi')}}.$$

$$(11.34)$$

სადაც მოდულის ცხადი სახე იქნება  $k = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{E'l}{g} \right)}$  იაკობის ელიფსური ფუნქციების გამოყენებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ



$sn\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, k\right) = \sin\varphi = \frac{1}{k} \sin\psi$  და ჩვენ მივდივართ გადახრის კუთხის, ცხადად გამოსახვის ფორმულაზე დროის მიხედვით, რასაც ვეძებდით

$$x(t) = 2 \arcsin \left[ k \operatorname{sn} \left( t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) \right] \quad (11.35)$$

ეხლა ავაგოთ მათემატიკური ქანქარის (11.27) რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი. ამისათვის, გადავწეროთ ის ნორმალური ფორმით

$$\dot{x} = \quad (11.36)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x \quad (11.37)$$

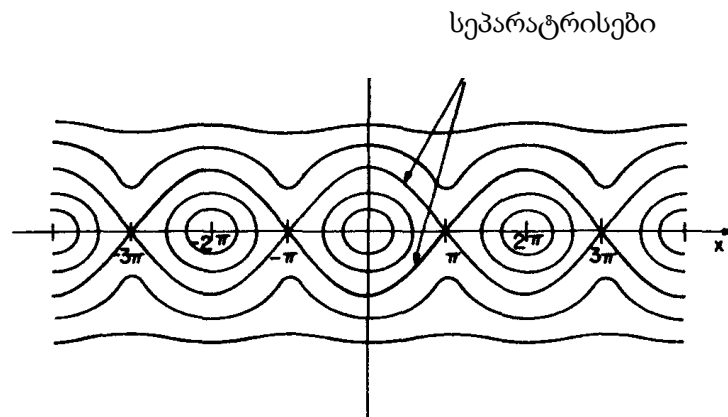
ამ განტოლებათა სისტემას შეესაბამება პირველი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2} y^2 - \frac{g}{l} \cos x = \text{const} \quad (11.38)$$

ცხადია, რომ ენერგიის მცირე სიდიდის მნიშვნელობებისათვის,  $(0;0)$  წონასწორობის წერტილის მახლობლობაში, გვექნება წრფივი პერიოდული ხასიათის რხევები. გასაგებია, რომ ამ დროს ფაზური პორტრეტი წარმოადგენს კონცენტრულ წრეწირებს ცენტრით წონასწორობის წერტილში. ენერგიის სიდიდის ზრდის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდებიც გაიზრდება, ვიდრე არ მიაღწევს ისეთ ენერგიას როდესაც სურათი მკვეთრად იცვლება და ქანქარა აცდება ჩვეულებრივ რხევის რეჟიმს და ენერგიის შემდგომი ზრდისას, იწყებს ბრუნვით მოძრაობებს საკიდელი წერტილის მიმართ. ეს მოხდება, მაშინ როცა სხეული  $x = \pi$  წონასწორობის მდგომარეობიდან გადადის  $x = 0$  კუთხის შესაბამის მდგომარეობაში და ეს მოხდება როცა ენერგია იქნება  $E' = 2mgl$  წერტილი  $x = \pi$ , როცა ქანქარა ყირამალა დგას და

$y = 0$  ქანქარას არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა უკავია. შემდგომ, დამაბრუნებელი ძალის პერიოდულობის გამო, ფაზური პორტრეტი პერიოდულად უნდა გამეორდეს  $(0;0)$  წერტილიდან მარჯვნივ და მარცხნივ პერიოდით. ამგვარად,  $x = \pm 2\pi$

წერტილები მდგრადი წონასწორობის წერტილებია და  $x = \pm(2n + 1)$  არამდგრადი წონასწორობის წერტილებია. უნდა აღინიშნოს, რომ არამდგრადი წონასწორობის წერტილებში ადგილი აქვს რხევითი მოძრაობის გადასვლას ბრუნვით მოძრაობაში. რაც გამოიხატება ფაზური ტრაექტორიების გამლაში. მთლიანად, მათემატიკური ქანქარის ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ. 11.7



ნახ.11.7.მათემატიკური ქანქარის ფაზური პორტრეტი

ფაზური ტრაექტორიების წყვილს, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფენ რხევითი და ბრუნვითი მოძრაობის შესაბამის ტრაექტორიებს და იკვეთებიან არამდგრადი წონასწორობის შესაბამის წერტილებში - **სეპარატრისები ეწოდებათ**. ფაზურ სიბრტყეზე, სეპარატრისის გასწვრივ მოძრაობას შეესაბამება მოძრაობა უსასრულო პერიოდით. სეპარატრისები გამოყოფენ, სისტემის მუშაობის თვისობრივად სხვადასხვა რეჟიმებს. ასე, რომ ისინი **ბიფურკაციის** მრუდებს წარმოადგენენ.

### 11.3. კონსერვატიული სისტემების ფაზური პორტრეტები

წინა განხილულ მაგალითებში არსებობდა მუდმივი პირველი ინტეგრალი სისტემის მექანიკური ენერჯიის სახით, რაც გვიმარტივებდა სისტემისათვის გლობალური ფაზური პორტრეტის აგებას.

ისეთ სისტემებს, რომლებისთვისაც ენერჯია წარმოადგენს პირველ ინტეგრალს - კონსერვატიული სისტემები ეწოდებათ.

იმ შემთხვევებში, როდესაც სისტემის მთლიანი ენერგია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (ტრადიციული ფორმით), როგორც კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი, ფაზური ტრანსფორმირების სტრუქტურა (რომლებსაც ამ შემთხვევაში დონის წირებს უწოდებენ) განსაკუთრებულად მარტივდება. ასეთი სისტემებისათვის, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$E = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) \quad (11.39)$$

სადაც, „პოტენციალური  $V(x)$  ფუნქცია“, როგორც წესი ცვლადის არაწრფივი ფუნქციაა. მაგალითად, მათემატიკური ქანქარისათვის  $V(x) = -\frac{g}{l}cx$ ; ხოლო კუბური ოსცილატორისათვის  $V(x) = ax^2 + L$ . თუ, გავითვალისწინებთ, რომ დინამიკის განტოლება ჩაწერილი სახით

$$\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0 \quad (11.40)$$

შეესაბამება ნაწილაკის მოძრაობას პოტენციალურ ორმოში  $V(x)$ , (სადაც, სრულებით არაა სავალდებულო, რომ ეს განტოლება მექანიკურ პროცესებს აღწერდეს), ფიზიკური ინტუიციით ადვილად ავაგებთ შესაბამის დონის წირებს.

მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემა (წრფივი ოსცილატორი).

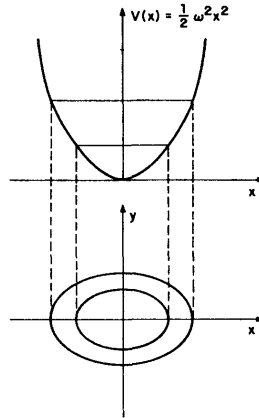
მოძრაობის განტოლება

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

გადავწეროთ (11.40) სახით

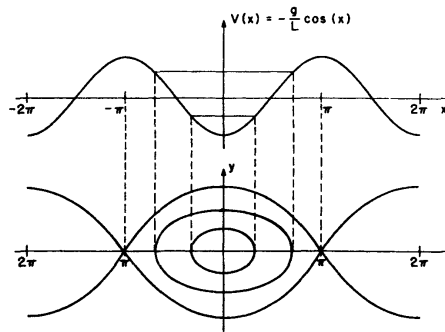
$$\ddot{x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) = 0$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში  $V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$  ავაგოთ ამ კვადრატული ფუნქციის შესაბამისი დონის წირები და შესაბამისი ფაზური პორტრეტი ნახ.11.8.



ნახ.11.8 თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის (კონსერვატიული სისტემა) ფაზური პორტრეტის აგება

2. მათემატიკური ქანქარის შემთხვევაში, გვაქვს პერიოდული პოტენციალური ორმო  $V(x) = -\frac{g}{l} cx$ . შესაბამის ფაზურ პორტრეტსაც ადვილად ავაგებთ ანალოგიურად, ნახ.11.9.



ნახ.11.9 მათემატიკური ქანქარას (კონსერვატიული სისტემის) ფაზური პორტრეტის აგება პოტენციალური ორმოს გრაფიკის საშუალებით

3. კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

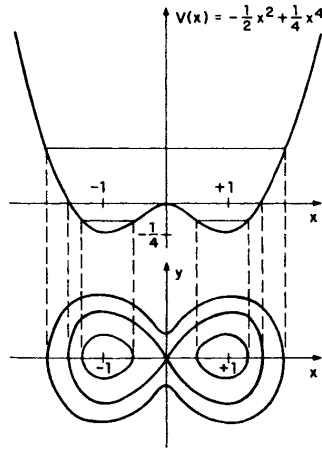
განვიხილოთ კუბური ოსცილატორი რომლის დინამიკის განტოლებას აქვს სახე

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0,$$

მაშინ შესაბამის პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე:

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

პოტენციალური ფუნქციის გრაფიკის მეშვეობით ადვილად ავაგებთ სისტემის ფაზურ პორტრეტსაც ნახ.11.10

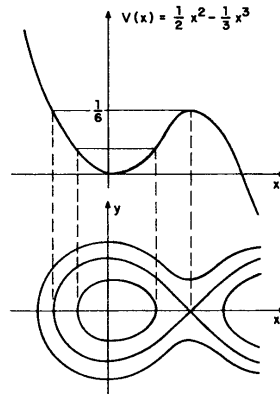


ნახ.11.10 კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

4. კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

განვიხილოთ სისტემა

$\ddot{x} + x - x^2 = 0$ , ამ სისტემის პოტენციალურ ფუნქციას ექნება სახე:  $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ . ამ პოტენციალური ფუნქციის დონის წირები საშუალებას გვაძლევენ ავაგოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი ნახ.11.11



ნახ.11.11 კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

11.4. სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი, განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა

გლობალური ფაზური პორტრეტის აგება, განსაკუთრებულად მარტივია ერთგანზომილებიანი კონსერვატიული სისტემებისათვის. მნიშვნელოვანი როლი უკავიათ განსაკუთრებულ (წონასწორობის) წერტილებს, რომლებიც ხასიათდებიან ცნობილი ლოკალური

ყოფაქცევით: მდგრადი წონასწორობის წერტილების გარშემო წარმოიქმნებიან ფაზური, შეკრული მრუდები; ხოლო, არამდგრადი წერტილების გარშემო წარმოიქმნებიან ჰიპერბოლური ფაზური წირები. არაკონსერვატიული სისტემების შემთხვევაში, თუ, ზუსტი ამონახსნი არაა ცნობილი, ფაზური პორტრეტის შედგენა მეტად რთული პროცესია. თუმცა, ყოველთვის შესაძლებელია მიახლოებითი ლოკალური ფაზური პორტრეტის შედგენა, თუ, განვსაზღვრავთ წონასწორობის წერტილებს (რომლებსაც, შემდგომში უძრავ წერტილებს ვუწოდებთ) მათ გარშემო გამოვხაზავთ შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს. უძრავი წერტილები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფაზური ტრაექტორიების მაორგანიზებელი ფაქტორები. ასე, რომ თუ, ვიპოვით უძრავ წერტილებს და გამოვიკვლევთ მათი მდგრადობის საკითხს, მაშინ შესაძლებელი ხდება ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.

განვიხილოთ ზოგადი სახის, მეორე რიგის სისტემები:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (11.41)$$

$$\dot{y} = g(x, y) \quad (11.42)$$

სადაც და ნებისმიერი ორი ცვლადის, საზოგადოდ, არაწრფივი გლუვი ფუნქციებია.

უძრავი ეწოდებათ ისეთ  $(x_0, y_0)$  წერტილებს, რომელთათვისაც ფაზური ნაკადი სტაციონარულია ანუ,  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ :

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad (11.43)$$

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad (11.44)$$

**P.S.** მაშასადამე, უძრავი წერტილების საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა (11.43),(11.44). ამ განტოლებათა სისტემას, საზოგადოდ, შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რაოდენობის ამონახსნი.

მას შემდეგ, რაც ვიპოვით ყველა უძრავ წერტილს, უნდა მოვახდინოთ თითოეული მათგანის გამოკვლევა მდგრადობაზე.

სისტემის უძრავი წერტილის მდგრადობაზე გამოკვლევისათვის, უნდა შევისწავლოთ სისტემის ყოფაქცევა, ამ წერტილის მცირე მიდამოში  $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$  ამისათვის და ფუნქციები გავშალოთ ამ ნაზრდების მიმართ ტეილორის მწკრივებად, უძრავი წერტილის მიდამოში

$$\delta \dot{x} = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (11.45)$$

$$\delta \dot{y} = g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (11.46)$$

თუ, შემოვიფარგლებით, მხოლოდ პირველი რიგის წევრებით, მაშინ არაწრფივი სისტემა (11.45),(11.46), შეგვიძლია გადავწეროთ წრფივი მიახლოების სახით (11.47)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad (11.47)$$

სადაც 2x2 მატრიცას, რომელსაც ავღნიშნავთ A ასოთი, მდგრადობის მატრიცას უწოდებენ. უძრავი წერტილების მდგრადობის შესასწავლი, (11.47) პირველი რიგის, წრფივ, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ადვილად ზოგადდება იმ შემთხვევისათვის, როცა ცვლადთა რაოდენობაა და მოცემული გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = \overline{1, n} \quad (11.48)$$

უძრავი წერტილების მდგრადობის პირობების ჩამოყალიბება ადვილად ზოგადდება (11.47) სისტემიდან (11.48) სისტემისათვის, საკუთრივი რიცხვების ენაზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნები  $\delta X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$  ხოლო ორი საკუთრივი ვექტორია და , რომლებიც შეესაბამებიან, შესაბამისად, ორ



საკუთრივ და რიცხვს. მაშინ (11.47) სისტემის ზოგადი ამონახსნი, როგორც ვიცით, მოიცემა ფორმულით

$$\delta X = c_1 D_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 D_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (11.49)$$

სადაც და ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, ხოლო საკუთრივი რიცხვები წარმოადგენენ მდგრადობის მატრიცის მახასიათებელი (11.50) განტოლების ფესვებს

$$\det|A - \lambda I| = \quad (11.50)$$

$I$  - ერთეულოვანი მატრიცაა. ჩვენი წინა მსჯელობებიდან ცხადია, რომ თუ, და საკუთრივი რიცხვები წმინდა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მახლობელი წერტილებიდან დაწყებული ლოკალური ფაზური ტრაექტორიები, წარმოადგენენ ელიფსებს და შეესაბამებიან მდგრად უძრავ წერტილებს. ხოლო, თუ საკუთრივ რიცხვებს გააჩნიათ არანულოვანი ნამდვილი ნაწილი, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მდგრადობა-არამდგრადობის საკითხი დამოკიდებულია მის ნიშანზე. აქ ბევრი სხვადასხვა შემთხვევაა და ჩვენ მათ შვეისწავლით, მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს და საკუთრივი ვექტორების წვლილიც. მათი მიმართულებები მიუთითებენ, ლოკალური ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებზე.

#### 11.4.1. უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია

1. თუ,  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , მაშინ გვაქვს *მდგრადი კვანძი* ნახ.11.1a, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხრიდან ჩაქრობადია უძრავი წერტილისაკენ;

2. თუ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , მაშინ - *არამდგრადი კვანძი* ნახ.11.1.ბ, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხარეს ექპონენციალურად იზრდება, უძრავი წერტილიდან გამოსვლისას;

3. თუ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , მაშინ - *უნაგირა(ჰიპერბოლური) წერტილია*. ექსპონენციალური ზრდა გვაქვს ერთ მხარეს და ექსპონენციალური



კლება მეორე მხარეს ნახ. 11.1.ბ. სწორედ ასეთ ტიპს მიეკუთვნებიან მათემატიკური ქანქარასა და ზოგიერთი სხვა, არაწრფივი ოსცილატორის განხილული, არამდგრადი უძრავი წერტილები. უძრავ წერტილში შემავალ და გამომავალ მიმართულებებს, ხშირად, მდგრად და შესაბამისად, არამდგრად მრავალსახეობებს (სეპარატრისები) უწოდებენ;

4. თუ,  $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$ , ( $\alpha, \beta >$ , მაშინ - *მდგრადი ფოკუსია*. ნაკადი ეხვევა და შედის უძრავ წერტილში ნახ. 11.2.ა;

5. თუ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , ( $\alpha, \beta >$ , მაშინ - *არამდგრადი ფოკუსია*. ასეთ შემთხვევაში საკუთრივი რიცხვის ნამდვილი ნაწილი დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ სპირალი გამოდის უძრავი წერტილიდან და თანდათან იხსნება ნახ.11.2.ბ;

6. თუ,  $\lambda_1 = i\beta$ ,  $\lambda_2 = -i\beta$ , ( $\alpha, \beta >$ , მაშინ - *მდგრადი ელიფსური (ცენტრი) წერტილი*. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს ელიფსური ფაზური ტრაექტორიები უძრავი წერტილის გარშემო.

P.S. ზოგჯერ, მაგალითად 4,5,6 შემთხვევებში ისმის კითხვა, თუ საითაა მიმართული ფაზური ტრაექტორიები, საათის ისრის მიმართულებით, თუ მის საწინააღმდეგოდ. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მოცემული უძრავი წერტილისათვის, უნდა განვიხილოთ გაწრფივებული (11.47) განტოლება. დავუშვათ, რომ  $\delta y = 0 \wedge \delta x \neq 0$ . თუ, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ  $\delta \dot{y} \neq 0$ , მაშინ „გვაქვს დაღმასვლითი მოძრაობა“, ანუ ლოკალურად, ფაზური ტრაექტორიები მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო თუ,  $\delta \dot{y} >$ , მაშინ გვაქვს „აღმასვლითი მოძრაობა“ და მაშასადამე, საათის ისრის საწინააღმდეგოდ.

აქამდე განვიხილავდით არაგადაგვარებული და ფესვების შემთხვევებს.

თუ, ფესვები გადაგვარებულია, მაშინ (11.47) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით

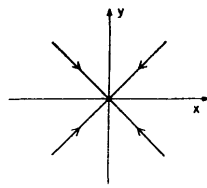
$$\delta X = (c_1 D_1 + c_2 (D_2 + D_1 t)). \quad (11.51)$$

ასეთ შემთხვევებში, უძრავი წერტილის ტიპი, ცხადია, რომ დამოკიდებულია და საკუთრივი ვექტორების ნიშანზე და ტიპზე.

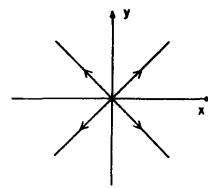
7. თუ,  $D_2 = (0,0) \wedge (\forall)$ , მაშინ ნაკადის წირები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ ურთიერთმკვეთ წრფეებს, რომლებიც ქმნიან:

a) მდგრად ვარსკვლავს, თუ  $\lambda < \text{ნახ.11.12a}$ ;

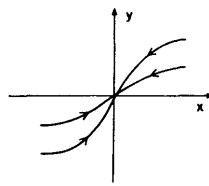
ბ) არამდგრად ვარსკვლავს, თუ  $\lambda \geq \text{ნახ.11.12b}$ .



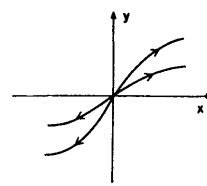
(a)



(b)



(c)



(d)

ნახ.11.12.ლოკალური ფაზური ნაკადები: a)მდგრადი ვარსკვლავი; ბ)არამდგრადი ვარსკვლავი; ვ)მდგრადი არასაკუთრივი კვანძი; გ)არამდგრადი არასაკუთრივი კვანძი

8. თუ, საკუთრივი ვექტორი  $D_2 \neq (0)$ , მაშინ ფაზური ტრაექტორიები იქნებიან მრუდი წირები და წარმოქმნიან:

a)მდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ  $\lambda < \text{ნახ.11.12.ვ}$ ;

ბ)არამდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ  $\lambda \geq \text{ნახ.11.12.გ}$

### 11.4.2. უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები

ეხლა განვიხილოთ ზემოთმოცემული მეთოდების გამოყენება ჩვენს ნაცნობ რხევით სისტემებზე.

a) დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა

ასეთ სისტემას, აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . სისტემის შესაბამისი მოდელი წრფივია და გაწრფივება აღარ ჭირდება

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \quad (11.52)$$

მდგრადობის მატრიცაა  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix}$ . მისი საკუთრივი რიცხვებია  $\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4}$  და  $\lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4}$ . იმის მიხედვით, თუ, როგორია ფესქვემა გამოსახულება, გვაქვს სხვადასხვა ვარიანტები:

- თუ,  $\lambda^2 > 4$ , მაშინ  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , შესაბამისად წერტილი (0 მდგრადი კვანძია;
- თუ,  $\lambda^2 < 4$ , მაშინ  $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\frac{\lambda}{2} + i\frac{\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}}{2}$  და შესაბამისად გვაქვს მდგრადი სპირალი(ფოკუსი);თუ (11.52) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ  $\delta y = 0 \wedge \delta x \neq 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ  $\delta \dot{y} \neq 0$ , აქედან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობა წარმოებს საათის ისრის მიმართულებით ნახ.11.5;
- თუ,  $\lambda^2 = 4$ , მაშინ  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$ , შესაბამისად, ამ შემთხვევაში, გვაქვს არასაკუთრივი მდგრადი კვანძი.

ბ) მეორე მაგალითია თავისუფალი მათემატიკური ქანქარა

ამ სისტემას აქვს უძრავი წერტილების უსასრულო რაოდენობა  $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}$  და გაწრფივებულ მოდელს აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad (11.53)$$

საკუთრივი რიცხვები იქნება  $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l} \cos x_n}$ . როცა  $x_n = 2\pi n$ , მაშინ  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს

მდგრადი, ელიფსური (ცენტრი) უძრავი წერტილები, ხოლო, როცა  $x_n = (2n + 1)\pi$ , მაშინ  $\lambda_{1,2} = \pm i$ , რაც შეესაბამება ჰიპერბოლურ (უნაგირა) არამდგრად უძრავ წერტილებს.

ბ) ეხლა განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარის თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემა

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$\dot{x} = -\lambda x \tag{11.54}$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x - \lambda y \tag{11.55}$$

ამ სისტემას იგივე  $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}$  უძრავ წერტილთა სისტემა აქვს, რაც თავისუფალ მათემატიკურ ქანქარას. მაგრამ შესაბამის გაწრფივებულ სისტემას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \tag{11.56}$$

სისტემის მდგრადობის მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია:

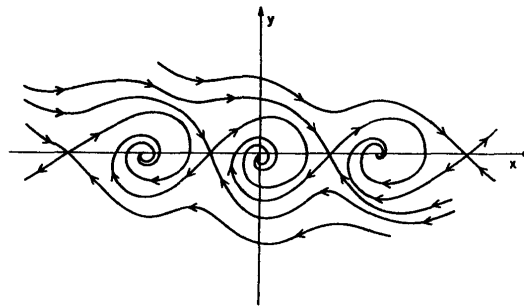
$$\lambda_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{l} \cos x_n}$$

უძრავ წერტილებში  $(x_n, y_n) = (\pm(2n + 1)\pi, 0)$  კვლავ აქვს ადგილი უტოლობებს  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , რაც იმას ნიშნავს რომ ეს წერტილები, ჰიპერბოლური (უნაგირა) ტიპს განეკუთვნებიან. ხოლო წერტილებში  $(x_n, y_n) = (\pm 2\pi n, 0)$  კი ადგილი აქვს რამოდენიმე შემთხვევას:

- $\lambda^2 < \frac{4g}{l} \cos x_n$ ,  $\lambda_1 \wedge \lambda_2$  კომპლექსურად შეუღლებული ფესვებია უარყოფითი ნამდვილი ნაწილით, მაშინ გვაქვს მდგრადი ფოკუსი მბრუნავი საათის ისრის მიმართულებით ნახ.11.13;
- $\lambda^2 > \frac{4g}{l} \cos x_n$ , რასაც მივყავართ უტოლობებამდე  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს მდგრადი კვანძი;

- $\lambda^2 =$ , მაშინ ჩვენ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, როცა  $\lambda_1 = \lambda_2 =$ , რაც შეესაბამება მდგრად არასაკუთრივ კვანძს.

რადგან ამ შემთხვევაში, ენერგია არაა მუდმივი, დონის წირებს ზუსტად ვერ დავხაზავთ, როცა არ ვიცით ზუსტი ამონახსნი, თუმცა, უძრავი წერტილების იდენტიფიკაცია და ფაზური ტრაექტორიების ლოკალური ანალიზი, საშუალებას გვაძლევს, მიახლოებით ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.



ნახ.11.13. ჩაქრობადი(დემპფირებული) მათემატიკური ქანქარას ფაზური პორტრეტი იმ შემთხვევაში, როცა  $\lambda^2 <$

**r) განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელი**

ეს მოდელი პირველად ააგო ვოლტერამ პოპულაციური დინამიკის შესასწავლად. განვიხილოთ ერთ-ერთი, ამ ტიპის მოდელებიდან

$$\dot{x} = x - , \tag{11.57}$$

$$\dot{y} = -y + . \tag{11.58}$$

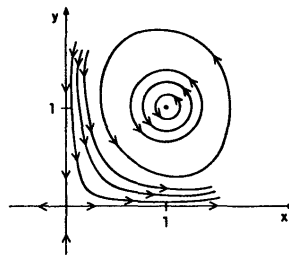
სადაც შეიძლება აღნიშნავდეს, მაგალითად კურდღლების პოპულაციას (კურდღლების ზუსტ რაოდენობას პოპულაციაში), ხოლო მელიების პოპულაციას. შესაძლოა ტრივიალური შემთხვევა, როცა  $y = 0, x \geq$ , მაშინ კურდღლების პოპულაცია უსასრულოდ იზრდება, რადგან მელიები არ არიან. შებრუნებულ შემთხვევაში, როცა  $x =$  და  $y \geq$ , მელიები განწირული არიან შიმშილით სიკვდილისათვის, რადგან არ არიან მათი საკვები კურდღლები. ორივე პოპულაციის თანაცხოვრებისათვის, არსებობს ბალანსის შესაძლებლობა, რადგან მელიები ამცირებენ კურდღლების პოპულაციას და თუ ბევრს შეჭამენ თვითონ კი გამრავლდებიან, მაგრამ შემდგომში საჭმელი აღარ ეყოფათ

და მათი პოპულაციაც შემცირდება. (11.57),(11.58) განტოლებათა სისტემა უმარტივესია და მისი უფრო დაზუსტება მარტივია იმის გათვალისწინებით, რომ კურდღლების კვების არეალიც შეზღუდულია, არსებობს ავადმყოფობა, უჭკუო საქციელი, კურდღლების მიერ კურდღლების დახოცვა . . .

სისტემას აქვს ორი უძრავი წერტილი  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  და  $(x_2, y_2) = (1, 1)$ . გაწრფივებულ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y_i & -x_i \\ y_i & -1 + x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (11.59)$$

პირველი უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია  $\lambda = 0, 1$ , რაც იმის მიმანიშნებელია რომ  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილია. ხოლო მეორე უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია  $\lambda = 0, -1$ , რაც შეესაბამება ელიფსურ წერტილს. შესაბამის მიახლოებით ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ.11.14



ნახ.11.14.მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელის ფაზური პორტრეტი

P.S. უნდა აღინიშნოს, რომ გაწრფივებული მოდელით მდგრადობის შესწავლა, ყოველთვის არ იძლევა რეალურ შედეგს არაწრფივი სისტემებისათვის.

### 11.4.3. ზღვართი ციკლები

**ზღვართი ციკლი**, წარმოადგენს ფაზური ტრაექტორიების განსაკუთრებულ ტიპს, რომელსაც ჩვენ ვერ ავაგებთ გაწრფივებული ანალიზის მეშვეობით. ყველაზე უფრო პოპულარულია ზღვართი ციკლი, რომელიც აქვს ვან-დერ-პოლის ცნობილ რხევით სისტემას:



$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (11.60)$$

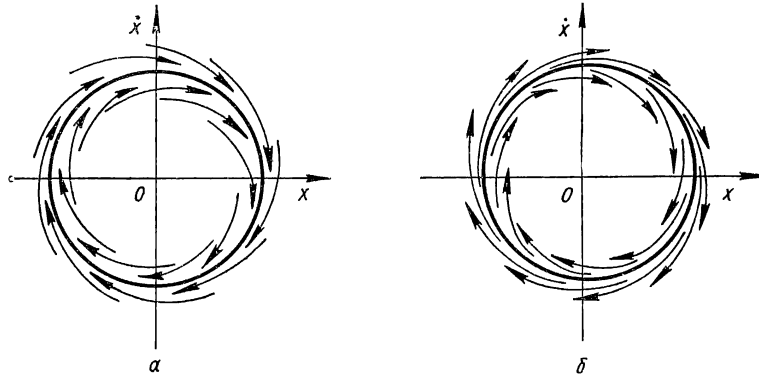
გაწრფივებული, პირველი რიგის მიახლოების დონეზე ჩატარებული მდგრადობის ანალიზი ამ სისტემისათვის

$$\dot{x} = 0 \quad (11.61)$$

$$\dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - \alpha, \quad (11.62)$$

გვიჩვენებს, რომ სისტემას აქვს უძრავი წერტილი  $x = y = 0$ , რომელიც წარმოადგენს არამდგრად კვანძს, თუ  $\lambda^2 > 4$  და წარმოადგენს არამდგრად ფოკუსს, თუ  $\lambda^2 < 4$ . განვიხილოთ აქედან მეორე შემთხვევა. რადგან (11.62) განტოლების მარჯვენა ნაწილში, და ცვლადების ზრდისას, დომინირებს არაწრფივი წევრი ( $\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{y} = -\lambda x$ ), შეგვიძლია დავუშვათ, რომ პირიქით, უძრავი წერტილისაკენ მიახლოებისას, ხდება არაწრფივი წევრის ჩაქრობა. ასე, რომ უძრავი წერტილიდან მოშორებით, ხდება ფაზური ტრაექტორიების მოძრაობა პერიფერიიდან ცენტრისაკენ. ამონახსნის უწყვეტობა ითხოვს, რომ არსებობდეს ამონახსნი მათ შორისაც. ეს ამონახსნი არის ზღვართი ციკლი, რომელიც წარმოადგენს უძრავი წერტილის მომცველ შეკრულ მრუდს. სისტემის სხვა ამონახსნები, რომლებიც გამოდიან ამ მრუდის გარედან, ასევე, შიგნიდან მიიზიდებიან ზღვართი ციკლის მიერ. მისკენ მიისწრაფიან, მაგრამ არასოდეს არ კვეთენ. ამ სისტემის ზუსტი ამონახსნი ცნობილი არ არის, თუმცა, უბრალო ფიზიკურ მსჯელობას მივყავართ ზღვართი ციკლამდე. მისი ზუსტი გეომეტრიული ფორმის დადგენა შესაძლებელია მხოლოდ სისტემის მიახლოებითი ამონახსნით სხვადასხვა საწყისი პირობების შემთხვევაში.

საზოგადოდ, ზღვართი ციკლი შეიძლება იყოს მდგრადი (როდესაც შიგნითაც და გარეთაც დაწყებული ფაზური ტრაექტორიები ზღვართი ციკლისაკენ მიისწრაფიან) ნახ.11.15a, ან არამდგრადი, როცა ზღვართი ციკლის მახლობლობაში დაწყებული ტრაექტორიები თანდათან სცილდებიან მას, ნახ. 11.15b.



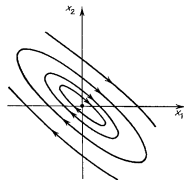
ნახ. 11.15 ზღვართი ციკლის სქემატური ნახაზები: ა) მდგრადი ზღვართი ციკლი; ბ) არამდგრადი ზღვართი ციკლი

ამოცანები და სავარჯიშოები:

1. შეადგინეთ მოცემული სისტემების ფაზური პორტრეტები და პასუხი დაასაბუთეთ:

ა)

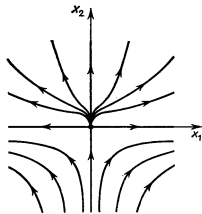
$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2.$$



პასუხი:

ბ)

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2^2.$$

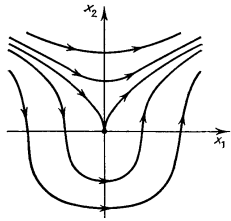


პასუხი:

ვ)

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1.$$





პასუხი:

2. ჩამოაყალიბეთ უძრავი წერტილების მდგრადობის გამოკვლევის ალგორითმი და განიხილეთ უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია;
3. შეადგინეთ კონსერვატიული სისტემის მაგალითები, ააგეთ შესაბამისი პოტენციალური ორმო და ფაზური პორტრეტი.

#### გამოყენებული ლიტერატურა:

- 1.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 2.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
- 6.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
- 7.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012

8. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988

9. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989

10. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 ([www.study.com.ru](http://www.study.com.ru))

11. Берже П., Помо И., Видадь К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991

### ნაწილი III. ჰამილტონური სისტემების დინამიკა

ჩვენს მიერ, წინა თავებში განხილული სისტემების უმრავლესობა ჰამილტონური სისტემების რიგს მიეკუთვნება. ანუ, მათი შესაბამისი მოდელები, შეიძლება გადაიწეროს ჰამილტონის ფორმით. ჰამილტონური იყო ყველა კონსერვატიული სისტემა. თუმცა, ჩვენს მიერ განხილული სისტემებიდან ზოგი დემპფირებულ (დისიპატიურ) პროცესებსაც შეიცავდა და ისინი *დისიპატიური სისტემების რიგს* მიეკუთვნებიან, რომელთა შესახებაც, ამ ტომში არ გვექნება საუბარი. აქ კი, განვიხილავთ კლასიკური მექანიკის მოდელებს და მათი გამოკვლევის მეთოდებს. შესაბამისად, განვიხილავთ ლაგრანჟისა და ჰამილტონის ფორმალიზმს.

#### თავი 12. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები

სივრცეში, მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს  $\vec{r}(x, y, z)$ . ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$  სიჩქარე და  $\vec{W} = \ddot{\vec{r}}(t)$  აჩქარება. თუ, მოცემული გვაქვს  $n$ -მატერი-ალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვჭირდება  $n$  - ცალი რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე,  $3n$ -კოორდინატი.

**განსაზღვრება:** იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას - მისი თავისუფლების ხარისხი ეწოდება.

$n$  - მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სამგანზომილებიან სივრცეში, სისტემის თავისუფლების ხარისხი  $3n$  - ის ტოლია.

**P.S.** ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი, რომ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები იყვნენ.

**განსაზღვრება:** ნებისმიერ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას,  $n$ - თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებს

უწოდებენ, ხოლო მათი, დროით წარმოებულების ერთობლიობას:  $\dot{q}_i$ , განზოგადებულ სიჩქარეებს.

### 12.1. ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი

სისტემის მხოლოდ კონფიგურაციის ცოდნა, არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება სისტემას დროის სხვა მომენტებში. როგორც ექსპერიმენტებით იქნა დადგენილი, მექანიკური სისტემის მდგომარეობის საპოვნელად დროის ნებისმიერ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ სისტემის საწყისი კონფიგურაცია  $q_i(0)$  და შემადგენელი მატერიალური წერტილების საწყისი  $\dot{q}_i(0)$  სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი ფიზიკური პარამეტრის ცოდნა, კლასიკურ მექანიკაში, საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ  $\dot{q}_i$  აჩქარებებიც დროის ნებისმიერ მომენტში.

თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i$  (მდგომარეობიდან  $q_i$  (მდგომარეობაში, მაშინ ჰემმარიტი მოძრაობის საპოვნელად, უნდა ვისარგებლოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპით.

ეს პრინციპი მოითხოვს რომ, თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i$  (მდგომარეობიდან, რომელიც დროის მომენტში ეკავა, ახალ,  $q_i$  (მდგომარეობაში დროის მომენტისათვის, მაშინ ინტეგრალს ამ დროის მომენტებს შორის მოცემული  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  ფუნქციიდან, რომელსაც ლაგრანჟიანს უწოდებენ, იყოს ექსტრემალური, ანუ, ნულს უნდა უდრიდეს ქმედების ინტეგრალის პირველი ვარიაცია  $\delta W =$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (12.1)$$

ეხლა, ჰამილტონის პრინციპზე დაყრდნობით, გამოვიყვანოთ მოძრაობის განტოლება.

სიმარტივისათვის, ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთის ტოლია. ასე, რომ საპოვნელია  $q$  ფუნქცია, რომელიც ექსტრემუმს მიაჩნებს ქმედების ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან და სისტემას გადაიყვანს  $q$  (მდგომარეობიდან, რომელიც დროის მომენტში ეკავა, ახალ,  $q$  (მდგომარეობაში დროის მომენტისათვის).

ვთქვათ  $q$  ჩვენი საძებნი ფუნქციაა. მივცეთ მას მცირე  $\delta q$  ნაზრდი-ვარიაცია, მაშინ გვექნება ახალი  $q(t) + \delta q$  ფუნქცია. რადგან ამ ფუნქციამ უნდა გაიაროს  $q$  (და  $q$  (წერტილებში, ცხადია რომ  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ ).

$$(12.2)$$

შესანიშნავია ის ფაქტი, რომ ჩვენ ვეძებთ გადაადგილების ვარიაციას და თვითონ გადაადგილება ჯერ არ ვიცით. ქმედების ინტეგრალის ექსტრემუმის საპოვნელად, მისი პირველი ვარიაცია ნულს უნდა გავუტოლოთ

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

$$(12.3)$$

თუ, პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გავშლით ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნებთ, მხოლოდ წრფივ წევრებს, გვექნება

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

$$(12.4)$$

სადაც  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  (ა, ამ ფაქტის გათვალისწინებით და (12.4) ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0$$

$$(12.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (12.2) სასაზღვრო პირობებს გადაადგილების პირველი ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ (12.5) ფორმულაში პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშინ ცხადია, რომ მეორე ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაც უნდა ნულის ტოლი იყოს. ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის განტოლება ლაგრანჟის ფორმით

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

$$(12.6)$$

თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ცვლადებისათვის, ცალ-ცალკე უნდა შევადგინოთ ვარიაციები  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ . მაშინ, ანალოგიურ პროცედურას, მივყავართ ლაგრანჟის ცნობილ განტოლებებამდე

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12.7)$$

თუ, მოცემული სისტემისათვის ცნობილია ლაგრანჟიანის სახე, მაშინ (12.7) განტოლებები წარმოადგენენ მოძრაობის განტოლებებს და ცნობილი საწყისი პირობების  $q_i(0); \dot{q}_i$  შემთხვევაში ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის ევოლუციას.

ლ.ლანდაუსა და ე.ლიფშიცის წიგნში დასაბუთებულია, რომ თავისუფალი, არაურთიერთქმედი ნაწილაკებისათვის, ერთგვაროვან, იზოტროპულ სივრცეში, ლაგრანჟიანი პირდაპირპროპორციულია განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატისა და თუ, პროპორციულობის კოეფიციენტად მასის ნახევარს ავიღებთ, მივიღებთ რომ ლაგრანჟიანი სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ტოლია

$$L = T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2. \quad (12.8)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მატერიალური ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ გარკვეული კანონით, რომელიც მოიცემა პოტენციალური ენერჯიის  $V(q_1, q_2, \dots, t)$  ფუნქციით, როგორც ექსპერიმენტებმა აჩვენეს, ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, t). \quad (12.9)$$

პოტენციალური ენერჯიის ფუნქცია ისეთია, რომ სისტემის თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (12.10)$$

როცა, პოტენციალური ენერჯია არაა დამოკიდებული სიჩქარეებზე, (12.7) განტოლებებიდან (12.9) და (12.10) ფორმულების გათვალისწინებით, მიიღება ნიუტონის დინამიკის ცნობილი განტოლებები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის

$$m_i \ddot{q}_i = F_i. \quad (12.11)$$

## 12.2. ლაგრანჟიანის თვისებები

განვიხილოთ, ურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემის ლაგრანჟიანი. მისი სრული წარმოებული იქნება

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12.12)$$

ასე, რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \dot{Q} \quad (12.13)$$

ა) ჩაკეტილი სისტემების შემთხვევაში, ანუ, როდესაც ნაწილაკები არ ურთიერთქმედებენ გარე ძალებთან, ლაგრანჟიანი, არაა დამოკიდებული დროზე  $\left( \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right)$  ამიტომ, ასეთი სისტემის ენერგია მუდმივი სიდიდეა (სისტემა კონსერვატულია)

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const.} \quad (12.14)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (12.9) ტოლობას, მივიღებთ

$$E = T + U \quad (12.15)$$

ბ) ანუ, ჩაკეტილი სისტემის მთლიანი მექანიკური ენერგია, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამის ტოლია.

თუ, გავითვალისწინებთ ლაგრანჟიანის განსაზღვრებას, შეგვიძლია განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები ფორმულით

$$F_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (12.16)$$

ასევე, განისაზღვრება განზოგადებული იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (12.17)$$

რომელთათვისაც ტოლობა  $p_i = m \dot{q}_i$  სრულდება, მხოლოდ დეკარტულ კოორდინატებში. ამ ორი განსაზღვრების შემდეგ, ლაგრანჟის განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით

$$\dot{p}_i = F_i \quad (12.18)$$

ცხადია, რომ თუ, რომელიმე განზოგადებული კოორდინატა, არ შედის ლაგრანჟიანში, მაშინ მისი შესაბამისი განზოგადებული ძალაც არ შედის (12.18) განტოლებათა სისტემაში და მაშასადამე, შესაბამისი იმპულსი  $p_k = \text{const.}$

**განსაზღვრება:** იმ კოორდინატებს, რომლებიც არ შედიან ლაგრანჟიანში, ციკლურ კოორდინატებს უწოდებენ.

ცხადია, რომ ციკლური კოორდინატების არსებობა, გვიმარტივებს დინამიკის განტოლებების ამოხსნას. ზემოთმოყვანილი, იმპულსის



(12.17) განსაზღვრის გათვალისწინებით, მექანიკური სისტემის ენერჯიის (12.14) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i . \quad (12.19)$$

თუ, სისტემა ჩაკეტილია და სივრცე ერთგვაროვანია, მაშინ სისტემის შიგნით ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია  $\sum_i F_i = 0$  ამ კანონს ჩვენ ვიცნობთ ორი ძალისათვის ნიუტონის მესამე კანონის სახელწოდებით. ამ შემთხვევაში, ჩვენ მივიღებთ (12.18) ტოლობის გათვალისწინებით, რომ

$$\sum_i p_i = 0 \quad (12.20)$$

განუ, ჩაკეტილი სისტემის იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

P.S. როგორც ვხედავთ, ჩაკეტილი სისტემისათვის, სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების თვისებიდან, გამომდინარეობს ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონები. ეს შედეგები არიან, უფრო ზოგადი, ნიოტერის თეორემის კერძო შემთხვევები. რომელიც ამბობს რომ ლაგრანჟიანის გარდაქმნის ყოველი ჯგუფისათვის, დამახასიათებელია ამ გარდაქმნასთან დაკავშირებული ინვარიანტები. სივრცის ტრანსლაციის ჯგუფები გვაძლევენ ენერჯიისა და იმპულსის შენახვის კანონებს; ბრუნვითი მოძრაობის ინვარიანტები - იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს . . .

### 12.3. განზოგადებული იმპულსის თვისებები

განზოგადებული კოორდინატები და სიჩქარეები ლაგრანჟის ფორმალიზმში, განიხილებიან, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები. ამას გარდა, ჩვენ განვიხილეთ განზოგადებული იმპულსის ცნებაც. მისი ღრმა და არატრივიალური ხასიათი ნათლად ჩანს ჰამილტონური სისტემების ფაზური სივრცის გეომეტრიის განხილვისას.

იმპულსების კოვარიანტული ხასიათის ყველაზე უფრო ნათელი გამოვლინებაა, ის ფაქტი, რომ შესაძლებელია მათი წარმოდგენა, სკალარული ველის გრადიენტულ ველად. ამის დასამტკიცებლად, დავუბრუნდეთ ქმედების ინტეგრალს. მოცემული ექსტრემალური წირისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ლაგრანჟის განტოლებებს, განვიხილოთ ახალი ექსტრემალური ამოცანა. სხვადასხვა ექსტრემალულებისათვის, რომელთაც საერთო საწყისი წერტილი აქვთ.



ბოლო წერტილს კი ვაძლევთ მცირე ვარიაციას და ვხსნით იგივე ვარიაციულ ამოცანას

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0 \quad (12.21)$$

რადგან ვხსნით იგივე ამოცანას, ინტეგრალი ნულის ტოლია და (12.21) განტოლებაში გვრჩება მხოლოდ საზღვრის წერტილებში მნიშვნელობები. საწყისი წერტილი დაფიქსირებულია  $\delta q(t_1) = 0$ . აღვნიშნოთ  $\delta q$ , როგორც და გავითვალისწინოთ, რომ  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . მაშინ (12.21) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ  $\delta W = 0$ , ან სხვანაირად,  $n$  თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის გვექნება

$$\delta W = \sum_i p_i \delta q_i = 0 \quad (12.22)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$p_i = 0 \quad (12.23)$$

მაშასადამე, იმპულსები წარმოადგენენ ქმედების სკალარული ველის გრადიენტს, მოცემული ექსტრემალის გასწვრივ, დროის მოცემულ მომენტში.

რაც შეეხებათ, განზოგადებულ სიჩქარეებს მათი ველი, საზოგადოდ, არაა კოვარიანტული, ანუ, მათი წარმოდგენა გრადიენტულ ველად საზოგადოდ შეუძლებელია.

#### 12.4. ჰამილტონის ფორმალიზმი

ჰამილტონის მექანიკაში, მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული კოორდინატებისა და განზოგადებული იმპულსების ცვლადებში. თუმცა, ფიზიკური შინაარსის მიხედვით, ჰამილტონური ფორმალიზმი, არ განსხვავდება ლაგრანჟის ფორმალიზმისაგან, მაგრამ უფრო ესადაგება კვანტური მექანიკის, სტატისტიკური მექანიკისა და შეშფოთებათა თეორიის გადმოცემის სილამაზეს. კერძოდ, ჰამილტონური ფაზური სივრცის ცნება, გაცილებით ამარტივებს ჰამილტონური სისტემების ინტეგრებადობის საკითხის შესწავლასა და იმ ქაოსური რეჟიმების აღწერას, რომლებიც შეიძლება არსებობდეს არაინტეგრებად სისტემებში.

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება ლეჟანდრის გარდაქმნით

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (12.24)$$

აქ,  $\mathbf{p}, t$  არიან განზომილებიანი ვექტორი, ხოლო  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  სიდიდეს ჰამილტონიანი ეწოდება. როგორც ვიცით,

$$p_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (12.25)$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად, (12.25) ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვსახოთ ცვლადის საშუალებით, თუ,  $\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$ .

განვიხილოთ მაგალითი, თუ როგორ უნდა გადავიდეთ ლაგრანჟის ფორმალიზმიდან, ჰამილტონის ფორმალიზმზე: განვიხილოთ ლაგრანჟიანი

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, t) \quad (12.26)$$

ვიპოვოთ შესაბამისი იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i \quad (12.27)$$

შებრუნებული გარდაქმნა გვაძლევს

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} \quad (12.28)$$

მაშასადამე, შესაბამის ჰამილტონიანს ექნება სახე

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right) - \left\{ \frac{1}{2} m_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(q_1, q_2, \dots, q_n) \right\} \quad (12.29)$$

## 12.5. ჰამილტონის განტოლება

ლაგრანჟის განტოლებები, მიიღებოდა სისტემის ლაგრანჟიანზე ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებით. ეხლა ცხადია, რომ ჩვენ გვინდა მოძრაობის განტოლებები გამოვიყვანოთ ჰამილტონის ფორმალიზმის ფარგლებში. (12.24) ფორმულიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ ჰამილტონის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (12.30)$$

მარჯვენა მხარეში, პირველი და მესამე წევრი ერთმანეთს აბათილებენ, რადგან  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . ამას გარდა  $\dot{p}_i = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ (12.30) მიიღებს სახეს

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (12.31)$$

მაგრამ, რადგან

$$dH(p, q, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (12.32)$$

ცხადია, რომ (12.31), (12.32) განტოლებებიდან, შეგვიძლია ჩავწეროთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (12.33)$$

ამას გარდა, თუ, სისტემის ლაგრანჟიანი და ჰამილტონიანი ცხადადაა დამოკიდებული დროზე, გვექნება დამატებით თანადობა

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\dot{L} \quad (12.34)$$

P.S. ჰამილტონის კანონიკური (12.33) განტოლებათა სისტემა შედგება  $2n$  პირველი რიგის განტოლებისაგან, მაშინ როცა შესაბამისი ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემა შედგებოდა  $n$  ცალი მეორე რიგის განტოლებისაგან.

ჰამილტონის (12.33) განტოლებებს, გააჩნიათ რიგი საინტერესო თვისებებისა. ჩვენ ჯერ-ჯერობით განვიხილავთ ისეთ ჰამილტონიანებს, რომლებიც დროზე არა არიან ცხადად დამოკიდებული. ამ სისტემის კანონიკური ცვლადები და , რომელთა სერთო რაოდენობაა  $2n$ , ქმნიან ფაზურ სივრცეს. დროის განმავლობაში  $\mathbf{p}$  და  $\mathbf{q}$  ცვლადები  $2n$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში, შემოწერენ გარკვეულ არეს. ისმის კითხვა, თუ როგორია ეს არე და რა ზოგადი თვისებები შეიძლება ქონდეს მას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (12.33) განტოლებებიდან მიიღება ლიუვილის ცნობილი ფორმულა „უკუმშვადი სითხეებისათვის“, ამჯერად, სითხის როლს, თამაშობს ფაზური სივრცის ნაკადის „ნაწილაკი“

$$\sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = . \quad (12.35)$$

P.S. ასე, რომ ჰამილტონური სისტემის ფაზური ნაკადის ელემენტის მოცულობა არ იცვლება, თუმცა, დეფორმირდება გადაადგილებისას.

ჰამილტონის განტოლებები, იმდენად სიმეტრიულია  $\mathbf{p}$  და  $\mathbf{q}$  ცვლადების მიმართ, რომ ზოგჯერ მათ თვლიან თანაბარი უფლებისმქონე დამოუკიდებელ ცვლადებად და განიხილავენ ახალ ცვლადს,  $2n$  კომპონენტით  $\mathbf{z} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ . ეს, საშუალებას იძლევა ახალი ჰამილტონიანისათვის  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H$ , ჰამილტონის განტოლება ჩაიწეროს მოკლედ

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \cdot \nabla H, \quad (12.36)$$

სადაც სიმპლექტიკური მატრიცაა  $2n \times 2n$  ზომებით

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.37)$$

- ერთეულოვანი მატრიცაა.

## 12.6. პუასონის ფრჩხილები

ჰამილტონის განტოლებების ინტეგრებადობის ამოცანა, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საკითხია. თუ, სისტემის თავისუფლების ხარისხია ერთი და მაშასადამე, აღიწერება ორი კანონიკური ცვლადით  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , მაშინ ის ინტეგრებადია. ასეთი შემთხვევები, ჩვენ უკვე განვიხილეთ კურსის მეორე ნაწილში. თავისუფლების ხარისხის რიცხვის მიუხედავად, სისტემის ამოხსნისას, ყველაზე მნიშვნელოვანია ინტეგრალების პოვნის პროცედურა. ჰამილტონის მიდგომას, მივყავართ, დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულების, მოხდენილად პოვნამდე.

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია  $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ , ვიპოვოთ მისი სრული წარმოებული დროით

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dH}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dH}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$(12,38)$$

სადაც  $[H$  - პუასონის ფრჩხილებია და ფუნქციებისათვის. მჭიდრო კავშირი არსებობს კლასიკური მექანიკის პუასონის ფრჩხილებსა და კვანტური მექანიკის კომუტატორის ცნებებს შორის. მართლაც, პუასონის ფრჩხილები შეგვიძლია ჩავწეროთ ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dg}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dg}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \quad (12.39)$$

თუ, რომელიმე დინამიკური ცვლადი არაა დამოკიდებული დროზე, ანუ,  $f = f(p)$ . მაშინ მისი პუასონის ფრჩხილები ნულის ტოლია და მაშასადამე, ის მუდმივი სიდიდეა, რაც ნათლად ჩანს (12.38) ფორმულიდან. ცხადია, რომ დროზე დამოუკიდებელი სისტემებისათვის, სისტემის ენერგია  $E =$  მუდმივი სიდიდეა, რადგან ჰამილტონიანის თავის თავთან პუასონის ფრჩხილები, ნულის ტოლია.

პუასონის ფრჩხილების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი სამი ფუნქციისათვის, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ რიგი თვისებებისა

$$[f, g] = -[g, f] \quad (12.40)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h] \quad (12.41)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h] \quad (12.42)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \quad (12.43)$$

პუასონის ფრჩხილების (12.43) თვისებას იაკობის იგივეობას უწოდებენ. ეს თვისებები, ნათელყოფს, რომ პუასონის ფრჩხილები შეესაბამება ლის ალგებრის სტრუქტურას.

თუ,  $J$  მოძრაობის ინვარიანტული ფუნქციაა, მაშინ მათი პუასონის ფრჩხილებიც მუდმივი იქნება მოძრაობის მიმართ. მართლაც, თუ, განვიხილავთ პუასონის ფრჩხილების (12.43) თვისებას, მაშინ იქიდან რომ  $J$  ინვარიანტებია, გამოდის რომ  $[g, H] = 0$ ,  $[f, H] =$  , მაგრამ მაშინ  $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] =$  იაკობის იგივეობიდან მივიღებთ, რომ  $[H, [f, g]] = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $[f, H]$  აგრეთვე ინვარიანტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორი ნაპოვნი ინტეგრალის პუასონის ფრჩხილები

ისევ სისტემის ინტეგრალი იქნება. თუმცა, ინტეგრალების ასეთი მეთოდით ძებნა, არაა ეფექტური.

საზოგადოდ, პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის ბოლომდე ანალიზურად ამოსახსნელად, საჭიროა  $n$  - ინტეგრალის პოვნა. მაგრამ ჰამილტონური სისტემების სიმპლექტიკური სტრუქტურის გამო პირველი რიგის ჰამილტონური სისტემებისათვის საკმარისია ინტეგრალის პოვნა.

### 12.7. ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

ჰამილტონური სისტემების ამოსახსნელად ეძებენ კანონიკურ გარდაქმნებს, ანუ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც სისტემას ისე გაამარტივებს, რომ შევძლებთ მის ინტეგრებას. თუ, კანონიკური გარდაქმნა არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ძველი ჰამილტონიანიდან ახალზე გადასვლა, ხორციელდება უბრალოდ ცვლადთა გარდაქმნით

$$H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q), t) \quad (12.44)$$

თუ, გამოვიყენებთ გარდაქმნის ფორმულებს

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, t) \quad (12.45)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, t) \quad (12.46)$$

სადაც არიან ახალი კოორდინატები, შეუღლებულები ძველ იმპულსებთან. შესაბამისად, (12.44) განტოლებიდან მივიღებთ

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots, q_n\right) = H'(\alpha_1, \alpha, \dots, t) \quad (12.47)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილს, უნდა ვუყუროთ, როგორც მუდმივ სიდიდეს, ჰამილტონიანის მნიშვნელობას. ამ, პირველი რიგის კერძოწარ-მოებულის განტოლებაში, უცნობია სიდიდე, ხოლო  $q_1, q_2, \dots$  დამოუკიდებელი ცვლადებია. ამ განტოლებას ეძახიან სტაციონარულ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას.

ასეთი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს ნებისმიერ მუდმივს, რომელთა როლშიც შეგვიძლია განვიხილოთ სიდიდეები. ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა, ექვივალენტურია



შესაბამისი ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა. სეპარაბელური სისტემების გარდა, ასეთი განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუმცა, თუ, გავითვალისწინებთ (12.45) ფორმულებს, დაფიქსირებული სიდიდეების შემთხვევაში, შეგვიძლია, საზოგადოდ შევხედოთ ამონახსნის სტრუქტურას. მართლაც

$$dW = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i \dot{q}_i, \quad (12.48)$$

ასე, რომ თუ (12.48) ტოლობას ვაინტეგრებთ ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ, მივიღებთ წირით ინტეგრალს

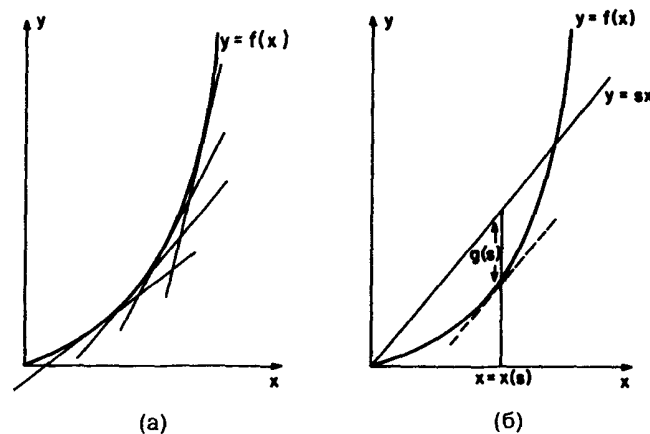
$$W = \int_{q_0}^q \sum_i p_i \dot{q}_i dt. \quad (12.49)$$

### 12.8. ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება ლეჟანდრის გარდაქმნით. ამიტომ, საინტერესოა თვით ამ გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი და სტრუქტურა.

მრუდი წირი შეიძლება აღვწეროთ, როგორც წერტილების ერთობლიობით, ასევე, მხები სიბრტყეების ერთობლიობითაც. ლეჟანდრის გარდაქმნა კი კავშირს ამყარებს ამ ორ წარმოდგენას შორის. ამ საკითხში, გავყვეთ ვარნოლდის გადმოცემის ფორმას, ვინაიდან ის საუკეთესოა მეთოდური თვალსაზრისით.

განვიხილოთ  $y = f(x)$  ფუნქცია. დავუშვათ, რომ ის ამოხსნილია ან ჩაზნექილი. ამ ფუნქციის ლეჟანდრის გარდაქმნა, გვამღებს სხვა  $g(s)$  ფუნქციას ნახ.12.1



ნახ.12.1.a)  $y = f(x)$  ფუნქცია და მასთან დაკავშირებული მხებები;  
 ნ) ლეჟანდრის გარდაქმნის აგება  $g(s)$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $g(s)$  წარმოადგენს უდიდეს მანძილს ვერტიკალის გასწვრივ  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკსა და  $y = sx$  წრფეს შორის, ანუ,

$$g(s) = sx - f(x) = G(s, x). \quad (12.50)$$

რადგან  $x$  წერტილი განისაზღვრება მაქსიმუმის პირობებიდან,  
 $\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0$ .

ასე, რომ ახალი ცვლადი წარმოადგენს,  $f(x)$  ფუნქციის მხების დახრის კუთხეს  $s = f'(x)$ .

განვიხილოთ, მექანიკური ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, გვაქვს ჰამილტონიანი  $y = H(x, p)$  ზემოთმოყვანილი ალგორითმით მივიღებთ, რომ ახალ  $L$  ფუნქციას აქვს სახე

$$L(s) = sp - H(x). \quad (12.52)$$

ამ შემთხვევაში, ახალი ცვლადი  $s = \frac{\partial H}{\partial p}$ , ასე, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნა ამ შემთხვევაში, შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით

$$L(\dot{q}) = \dot{q}p - H(q, p). \quad (12.53)$$

ეს მაგალითი არის, ჩვენს მიერ უკვე განხილული ფორმულების (12.24) ნათელი ილუსტრაცია

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}; t). \quad (12.54)$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (12.55)$$

## 12.9. კლასიკური მექანიკის გეომეტრია

ტენზორულ ალგებრაში  $\vec{a}$  ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლოურ აღნიშვნებს

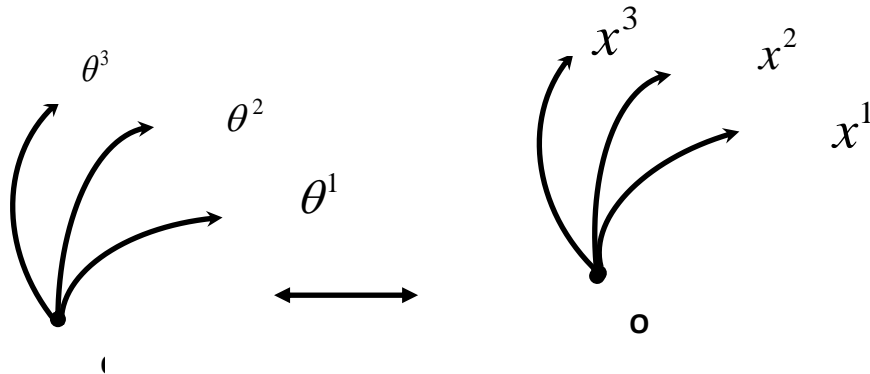
$$a_i \text{ და } a^i; \quad (12.56)$$

თუ, ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ  $a^i$ , მაშინ ის მიუთითებს კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე, ხოლო თუ,  $a_i$  - ქვემოთ, მაშინ კოვარიანტულ კომპონენტებზე.



ერთგანზომილებიან ტენზორს ვექტორს უწოდებენ. განვიხილოთ ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების ცნებები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ერთი  $\theta^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემიდან, მეორე  $x^i$  კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები



ნახ. 12.2.  $\theta^i$  და  $x^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\} \quad (12.57)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (12.58)$$

ჩავთვალოთ, რომ (12.58) გარდაქმნები არიან ჰომეომორფული P წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (12.59)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (12.58)  $\theta^i$  კოორდინატების მიმართ

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3). \quad (2.60)$$

დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები ლოკალურად. (12.58)  
 ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^{21}} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (12.61)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით (12.61) გადაიწერება მოკლედ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (12.62)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ. ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება.

**განსაზღვრება:** იმ ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება **ყრუ ინდექსი** ეწოდება. იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში გვხვდება ერთხელ, **თავისუფალი ინდექსი** ქვია.

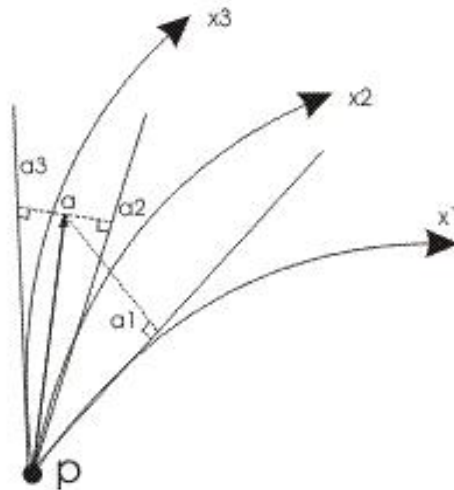
**განსაზღვრება:** ტენზორის თითოეულ წევრში, თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობას, ტენზორის რანგი ეწოდება.

**მაგალითად, ვექტორი-პირველი რანგის ტენზორია; სკალარული ფუნქცია** - ნულ რანგის ტენზორია . . .

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრულ  $a^i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ, კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების დიფერენციალები (12.62). ანუ,

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (12.63)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული შინაარსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა P-წერტილში ნახ.12.3, სადაც მოდებულია ეს ვექტორი



ნახ.12.3.  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული  $x^i$  ღერძების მხებები P წერტილში. მაშინ  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ მის ორთოგონალურ პროექციებს შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხებების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებულია P წერტილში.

განვიხილოთ ოპერატორი

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (12.64)$$

ახალ კოორდინატებზე გადასვლას მივყავართ ფორმულამდე

$$\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \quad (12.65)$$

სადაც

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (12.66)$$

როგორც ვხედავთ, კომპონენტები გარდაიქმნებიან როგორც კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

ეხლა განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება  $\varphi$  ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ მოცემული გვაქვს  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ . ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \quad (12.67)$$

განსაზღვრება: P წერტილში განსაზღვრულ  $a_i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან, როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტის კომპონენტები

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j \quad (12.68)$$

როგორც ვნახეთ, განზოგადებული იმპულსები ქმედების გრადიენტებს წარმოადგენენ, ამიტომ ცხადია, რომ განზოგადებული იმპულსები კოვარიანტულ ვექტორს წარმოადგენენ.

P.S. ოპერატორი (12.64) წარმოადგენს მხები ვექტორის მაგალითს. მოცემულ  $x =$  წერტილში, რომელიმე სკალარულ  $h = h(x_1, x_2, \dots)$  ფუნქციაზე ამ ოპერატორის მოქმედების შედეგია მოცემული ფუნქციის ზედაპირის მხები მოცემულ წერტილში

$$\xi h = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial h}{\partial x_i} I_x \quad (12.69)$$

განვიხილოთ ეხლა, რაიმე წირი  $\varphi = \varphi$ , რომელიც პარამეტრიზებულია ცვლადით, ისე, რომ გადის მოცემულ  $x =$  წერტილზე, როცა  $s =$  თუ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  ფუნქციის კოორდინატული წარმოდგენაა  $\varphi_i(s)$ , მაშინ ნებისმიერი სიდიდის წარმოებული  $\varphi$  -ის გასწვრივ, მოცემულ  $x =$  წერტილში განისაზღვრება მხები ვექტორით

$$\xi = \frac{d}{ds} I_{s=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} I_x, \quad (12.70)$$

სადაც

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} I_s \quad (12.71)$$

ცხადია, რომ თუ  $\varphi$  მოცემული  $q$  სისტემის ტრაექტორიაა, სადაც დროა, მაშინ სხვა არაფერია, თუ არა  $\dot{q}_i$  სიჩქარის კომპონენტები. აქედან გამომდინარეობს სიჩქარის ვექტორის კონტრავარიანტულობა.

მოცემულ  $x =$  წერტილზე შეიძლება გაიაროს მრავალმა სხვადასხვა ტრაექტორიამ და ყოველივე მათგანს შეესაბამება თავისი მხები ვექტორი. ამ ვექტორების ერთობლიობა მოცემულ წერტილში ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც **მხები სივრცე** ეწოდება. ამ სივრცეს აღნიშნავენ სიმბოლოურად  $T$ , სადაც მრავალსახეობაა, ანუ სისტემის მიერ დაკავებული განზომილებიანი სივრცე. **მხები განფენის** სივრცე აერთიანებს ყველა მხებ სივრცეს, მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის და მას აღნიშნავენ როგორც  $\dot{M}$ .

**P.S. 1. ლაგრანჟის ფორმალიზმში**, სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება განზოგადებული კოორდინატებითა და სიჩქარეებით. ამ დროს ნებისმიერ წერტილში, დროის ნებისმიერ მომენტში გვაქვს მხები ვექტორი

$$\xi = \sum_i \dot{q}_i(t) \frac{\partial}{\partial q_i} L. \quad (12.72)$$

ასე, რომ სისტემის მდგომარეობა შეიძლება დავახასიათოთ წერტილის მეშვეობით მხები განფენის სივრცეში. **ლაგრანჟიანი** კი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მხები განფენის სივრცის გადასახვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ანუ,  $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ .

**2. ჰამილტონურ ფორმალიზმში** მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული კოორდინატებითა და მათი შეუღლებული იმპულსებით. შესაბამისი ფაზური სივრცე წარმოადგენს სიმპლექტიკურ სივრცეს და ხასიათდება რიგი თვისებებით. ჰამილტონური სისტემების განსაკუთრებული თვისებაა, ფაზური მოცულობის შენარჩუნება ჰამილტონური ნაკადის ზემოქმედებისას.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ლაგრანჟის განტოლების გამოყვანა;
2. ჰამილტონის ფორმალიზმი და ჰამილტონის განტოლებების გამოყვანა;
3. პუასონის ფრჩხილების თვისებები;
4. ლაგრანჟიანისა და ჰამილტონიანის გეომეტრიული შინაარსი;
5. ლეჟანდრის გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1988

2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т.1, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. თბგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988
15. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 ([www.study.com.ru](http://www.study.com.ru))
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001

### თავი 13. შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები

ბოლომდე ინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემები, გამონაკლისს წარმოადგენს. მიუხედავად ამისა, ისინი დიდ როლს თამაშობენ, არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემების სტრუქტურული თავისებურებების შესწავლის საქმეში. ეს ხდება იმიტომ, რომ ზოგჯერ ხელსაყრელია არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემის წარმოდგენა, ინტეგრებადი და მცირე შეშფოთების ჯამის სახით,

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q) \quad (13.1)$$

სადაც  $\varepsilon \ll 1$ . ესაა შეშფოთებათა თეორიის იდეა და დიდი გამოყენება აქვს მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის დინამიკის შესწავლის საქმეში. თუ, შევისწავლით ორი სხეულის ამოცანას, მაგალითად, დედამიწის მოძრაობას მზის გარშემო, ეს ამოცანა იხსნება ბოლომდე და მივიღებთ, რომ დედამიწა მოძრაობს მზის გარშემო კეპლერის ელიფსურ ტრაექტორიებზე, მაგრამ მის მოძრაობაზე მცირე შეშფოთების სახით, გავლენას ახდენს იუპიტერი, რომლის ზემოქმედებაც მცირე შეშფოთების სახით ემატება ორი სხეულის პრობლემის ამონახსნს. ასეთი, თითქოს მარტივი ამოცანაც კი, არაა დღემდე ამოხსნილი ბოლომდე. რადგან აქ მიიღება სუსტად კრებადი მწკრივები და მათი კრებადობის დაცქარება დიდ სიძნელეებს აწყდება.

მიუხედავად ამისა, შეშფოთებათა თეორია საჭიროებს შესწავლას, თუნდაც იმიტომ რომ გავერკვეთ, სამი სხეულის პრობლემაში არსებულ სირთულეებში.

შეშფოთებათა თეორიის ძირითადი იდეაა, ამონახსნის წარმოდგენა სახით, სადაც  $\varepsilon <$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (13.2)$$

$x_0$  - ინტეგრებადი სისტემის ზუსტი ამონახსნია. ხოლო დანარჩენი  $x_i, i = 1, 2, \dots$  მიახლოებების პოვნა წარმოებს რეკურენტული ფორმულე-ებით. აქ არის იმის მოლოდინი, რომ როცა  $\varepsilon$  - (13.2) ამონახსნი მიისწრაფის ზუსტი  $x_0$  ამონახსნისაკენ, თანაც დამატებითი წევრები დააზუსტებენ შეშფოთებულ ამონახსნამდე. თუმცა, ამის იმედია ვერ გვექნება დროის დიდ შუალედების შემთხვევაში. ასე, რომ ნებისმიერი ამოცანის ამონახსნის (13.2) წარმოდგენისათვის, დგება მისი ფიზიკური კრებადობის საკითხი.

### 13.1. შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივები

განვიხილოთ უბრალო კვადრატული განტოლება

$$x^2 + x - 6\varepsilon = 0, \quad \varepsilon < 1 \quad (13.3)$$

ნულოვან მიახლოებაში, გვაქვს „ინტეგრებადი“ შემთხვევის ანალოგი განტოლება

$$x^2 + x = 0, \quad (13.4)$$

მისი ამონახსნებია  $x = 0$  და  $x = -1$ . ეხლა შევეცადოთ შეშფოთებული (13.3) ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენა მწკრივის სახით

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \quad (13.5)$$

სადაც „ინტეგრებადი“ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია.

თუ, ჩავსვამთ (13.5) წარმოდგენას (13.3) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მაშინ მივიღებთ  $O(\varepsilon^0)$  სიზუსტის ფარგლებში განტოლებებს, გაშლის კოეფიციენტებისათვის

$$O(\varepsilon^0): \quad a_0^2 + a_0 = 0 \quad (13.6)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad 2a_0 a_1 + a_1 - 6 = 0 \quad (13.7)$$



$$O(\varepsilon^2): \quad a_1^2 + 2a_0a_2 + a_2 = \quad (13.8)$$

ამ განტოლებების მიმდევრობით ამოხსნა გვაძლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ (13.3) განტოლების ამონახსნები შესაბამისი (13.5) მწკრივებით

$$x_1 = 6\varepsilon - 36\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (13.9)$$

$$x_2 = -1 - 6\varepsilon + 36\varepsilon^2 - O(\varepsilon^3). \quad (13.10)$$

ეს არის შემფოთებათა რეგულარული მწკრივი. ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ , (13.9), (13.10) მიახლოებები მიისწრაფიან შესაბამისი „ინტეგრებადი“ განტოლების ზუსტი ამონახსნებისაკენ.

### 13.2. შემფოთებათა სინგულარული მწკრივები

ეხლა განვიხილოთ სინგულარული განტოლება

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (13.11)$$

ეს ამოცანა არაა რეგულარული, რადგან ზღვარში როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$  განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი, მაშინ როცა შემფოთებულ (13.11) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი. ასეთ ამოცანებს, შემფოთებათა თეორიის სინგულარული ამოცანები ეწოდებათ. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ყველა ამონახსნი შეიძლება ვერ წარმოვადგინოთ ხარისხოვანი (13.5) მწკრივის სახით.

ამ განტოლების არაშემფოთებული ნაწილის  $x - 1 = 0$  ამონახსნია  $x = 1$ . ამ ამონახსნის პოვნა ადვილად შეგვიძლია (13.5) მწკრივის სახით, რადგან ეს რეგულარული ნაწილის ფესვია. მისი ჩასმა (13.11) განტოლებაში, საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ წარმოდგენა

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (13.12)$$

ამოცანის სინგულარული ნაწილი დაკავშირებულია მეორე ფესვთან, რომელიც უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x_2 = O(\varepsilon^{-1})$ . ეს იმაზე მიუთითებს, რომ მიზანშეწონილია ცვლადთა გარდაქმნა ფორმულით  $x = \varepsilon^{-1}y$ , თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ , განტოლებაში (13.11) წევრებმა  $\varepsilon x^2$  და  $x$  ერთმანეთი უნდა დააბალანსონ უსასრულობისაკენ სწრაფვის სიჩქარის თვალსაზრისით, ანუ,  $\varepsilon x^2$  და  $x$  ერთნაირი სისწრაფით უნდა მიისწრაფოდნენ უსასრულობისაკენ, როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ეს

კი იმას ნიშნავს, რომ  $2n - 1 = n \Leftrightarrow n =$ , ანუ, ერთადერთი მისაღები ცვლადთა გარდაქმნაა  $x =$ . მაშინ (13.11) განტოლება გარდაიქმნება განტოლებად

$$y^2 + y - \varepsilon =, \quad x = \quad (13.13)$$

ეხლა უკვე მივიღეთ რეგულარული ამოცანა და მისი წარმოდგენა შეგვიძლია სტანდარტული ხარისხოვანი მწკრივებით

$$y_1 = \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (13.14)$$

$$y_2 = -1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (13.15)$$

თუ, გამოვიყენებთ უკუ გარდაქმნას (13.13), მივიღებთ საწყისი სინგულარული ამოცანის ამონახსნების წარმოდგენებს

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (13.16)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (13.17)$$

### 13.3. რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები დიფერენციალური განტოლებებისათვის

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = x + \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (13.18)$$

და საწყისი პირობები

$$x(0) =. \quad (13.19)$$

თუ, გამოვიყენებთ ამონახსნის (13.5) წარმოდგენას, ჩავსვათ (13.18) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მივიღებთ სისტემას

$$O(\varepsilon^0): \quad \dot{x}_0 =, \quad (13.20)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \dot{x}_1 = x_1 +, \quad (13.21)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_1. \quad (13.22)$$

ამოცანის ინტეგრებადი ნაწილი (13.20), ადვილად ინტეგრდება და მივიღებთ

$$x_0(t) = t, \quad (13.23)$$

ამ ამონახსნის ჩასმა (13.21) განტოლებაში გვაძლევს განტოლებას

$$\dot{x}_1 = x_1 + t, \quad (13.24)$$

განტოლებას, საწყისი პირობით

$$x_1(0) = 0. \quad (13.25)$$

ასეთ, ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ვსვამთ ყველა შემდგომი მიახლოებისათვის, რათა მთლიანმა შემოფოთებულმა წარმოდგენამ დააკმაყოფილოს (13.19) პირობა. (13.24),(13.25) ამოცანის ამოხსნაა

$$x_1(t) = A^2 e^t (e^t - 1), \quad (13.26)$$

თავის მხრივ, თუ, ამ ამონახსნს ჩავსვამთ (13.22) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x_2(t) = A^3 e^t (e^t - 1)^2. \quad (13.27)$$

ასე, რომ  $O(\varepsilon^3)$  სიზუსტით (13.18),(13.19) ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე

$$x(t) = A e^t [1 + \varepsilon A (e^t - 1) + \varepsilon^2 A^2 (e^t - 1)^2] + O(\varepsilon^3). \quad (13.28)$$

**P.S.** აქ მოყვანილი განტოლებების ამოხსნიდან, შეიძლება შეიქმნას შთაბეჭდილება, რომ შემოფოთებათა თეორია ყოველთვის წარმატებით ხსნის ამოცანებს, მაგრამ სამწუხაროდ ასე არაა. როგორც არაერთმა მცდელობებმა აჩვენა, მრავალგანზომილებიანი ჰამილტონური სისტემებისათვის, შემოფოთებათა თეორიას შევყავართ პუანკარეს „მცირე მნიშვნელების“ ჩიხში და მხოლოდ კოლმოგოროვ-არნოლდ-მოზერის ეგრეთწოდებულმა KAM თეორიამ შეძლო ამ ჩიხიდან ნაწილობრივი გამოსვლა. თუმცა, ეს თეორია გვერდს უქცევს, ჰამილტონური სისტემების ამოცანის გლობალური ამოხსნის ამოცანას და კმაყოფილდება კერძო ამოცანებით ფაზური ტრაექტორიების ტორზე ყოფაქცევის შესახებ.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$x^2 + \varepsilon x - 1 =;$$

2. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\varepsilon^2 x^2 - 2x + 2 =;$$

3. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\dot{x} = 5x - \varepsilon;$$

4. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x - 7\varepsilon =;$$

5. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\varepsilon \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x =.$$

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, т. I, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т. 1, т. 2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ. 1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006

14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988
15. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
19. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1984

#### თავი 14. ქაოსი ჰამილტონურ სისტემებში

როგორც ვხედავთ, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემები ინტეგრებადია. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ფაზური სივრცე, უკვე ოთხგანზომილებიანია. თუ, სისტემა ამავე დროს, კონსერვატიულია, მაშინ ენერგეტიკული ზედაპირი სამგანზომილებიანია. ასეთ შემთხვევაშიც კი, სისტემის ქალაქდზე დატანით გამოკვლევა რთულია. ამიტომ, მეოცე საუკუნის უდიდესი მათემატიკოსების, პუანკარესა და ბირგოფის შრომებში შემუშავებული იქნა *კვეთის ზედაპირების* მეთოდი. ის, განსაკუთრებით ეფექტურია, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე, კონსერვატიული სისტემებისათვის. თუმცა, მისი გამოყენება შეიძლება უფრო მაღალი განზომილების

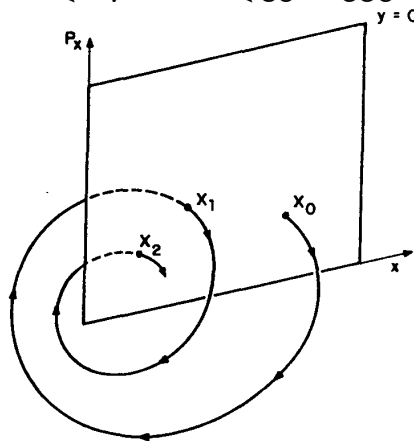
სისტემებისთვისაც. კვეთის ზედაპირების მეთოდი, პირველი რიცხვითი მეთოდი იყო, რომელიც შემუშავებული იქნა არაინტეგრებადი სისტემების გამოსაკვლევად.

### 14.1. კვეთის ზედაპირების მეთოდი ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემებისათვის

განვიხილოთ, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე, კონსერვატიული სისტემის ჰამილტონიანი

$$E = H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y) \quad (14.1)$$

ამ სისტემის ტრაექტორიების შესწავლის ამოცანა, შეიძლება დავიყვა-ნოთ ორგანზომილებიან ამოცანად. მოცემულ ენერგეტიკულ დონეზე, ვიხილავთ რაიმე კვეთას, მაგალითად  $y = y_0$ . ამის შემდეგ რიცხვითი ანალიზის მეშვეობით, მივყვებით რომელიმე ტრაექტორიას და ვპოულობთ შესაბამის მნიშვნელობებს და ცვლადებისათვის. თუ,  $V(x, y_0)$  პოტენციალი შემოფარგლავს ტრაექტორიებს, მაშინ აღნიშნულ კვეთაში გავლისას, ჩვენ კვლავ მივიღებთ და ცვლადებისათვის ახალ მნიშვნელობებს და ა.შ. ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ გადასახვას, რომელიც შედგება  $(p_x, y_0)$  წერტილებისაგან (ნახ.14.1.) და წარმოადგენს კვეთის ზედაპირს.



ნახ.14.1. კვეთის ზედაპირი აგება

კვეთის ზედაპირზე მყოფი წერტილი, განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობა ნიშნის სიზუსტით, რაც გამომდინარეობს (14.1) ფორმულიდან, როცა  $E = c_0$  და  $y = y_0$ . მართლაც, მაშინ

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2m} p_x^2 - V(x, y_0) \right)} \quad (14.2)$$

კვეთის ზედაპირი, როგორც წესი იგება ისე, რომ სიდიდეს ქონდეს განსაზღვრული ნიშანი, მაგალითად  $p_y \geq$ . თუ, მოცემული ტრანექტორიისათვის საწყის მონაცემებს  $p_x; E; x; y =$  კვეთის ზედაპირზე აღვნიშნავთ ასოთი, მაშინ შემდგომი გადაკვეთის წერტილები  $X_1; X_2; \dots;$  ადგენენ გადასახვას ფაზურ სიბრტყეში. ამ წერტილებმა შეიძლება შეავსონ გლუვი წირი, ან მოგვცენ დისკრეტული წერტილების სიმრავლე. ცალკეულ შემთხვევებში კი (არაინტეგრებადი), შეიძლება მოხდეს ამ წერტილების ქაოსური განლაგება კვეთის ზედაპირზე. თუმცა, მარტო ვიზუალური შედეგით ვერ ვიტყვით, რომ საქმე გვაქვს ქაოსთან.

P.S. იმისათვის, რომ გამოვიკვლიოთ ქაოსურია, თუ, არა ტრანექტორია ფაზურ სივრცეში, საჭიროა, დამატებითი გამოკვლევები, ლიაპუნოვის მაჩვენებლები იქნება, თუ, ენერგეტიკული სპექტრი.

### 14.2. ჰენონ-ჰეილესის ჰამილტონიანი

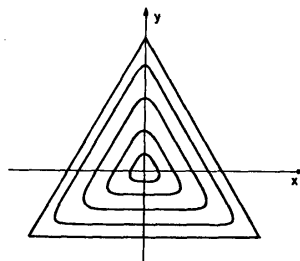
განვიხილოთ, ჰენონ-ჰეილესის ჰამილტონიანი

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (14.3)$$

ეს არის ვარსკვლავის მოძრაობის ჰამილტონიანი, ცილინდრული სიმეტრიის მქონე გრავიტაციულ ველში, გლუვი გალაქტიკური პოტენციალის პირობებში. პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე

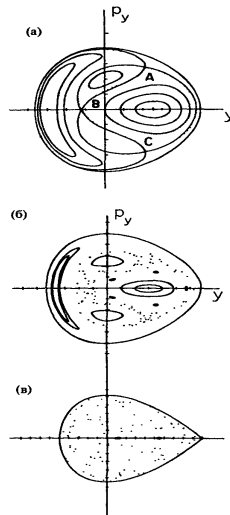
$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \quad (14.4)$$

ეს პოტენციალი გამოსახულია ნახ.14.2. დონის წირები აგებულია ენერგიის  $E =$  მნიშვნელობიდან,  $E :$  მნიშვნელობამდე.



ნახ.14.2. პოტენციალური ენერგიის დონეები. გარე დონეს შეესაბამება  $E$  შესაბამის კვეთის ზედაპირებზე, დონის წირების განლაგება, პოტენციალური ენერგიის დონეების მიხედვით, მოცემულია ნახ.14.3.





ნახ.14.3.ჰენონ-ჰეილესის სისტემის კვების ზედაპირები:

$$a) E = \frac{1}{12}, b) E = \frac{1}{8}, c) E$$

### 14.3. ბრტყელი გადასახვები, რომლებიც ინახავენ ფართს განვიხილოთ ბრტყელი გადასახვები:

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i) \quad (14.5)$$

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i) \quad (14.6)$$

ეს გადასახვა შეინარჩუნებს ფართს, თუ,

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = 1 \quad (14.7)$$

თუ, და პოლინომებია, მაშინ ამ გადასახვას **მთელი კრემონული გადასახვა** ეწოდება. ამ გადასახვის თვისებები, სწორედ ამ ფუნქციების სახეზეა დამოკიდებული. თუ, ისინი შეიძლება ჩავწეროთ წრფივი ფუნქციებით, მაგალითად ასე

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha \quad (14.8)$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha \quad (14.9)$$

მაშინ, გადასახვა წარმოადგენს ბრუნვას მაგალითი, წრფივი გარდაქმნით

კუთხით. მეორე

$$x_{i+1} = x_i + \dots \quad (14.10)$$

$$y_{i+1} = \dots \quad (14.11)$$



შესაბამება პარალელურ გადატანას X ღერძის პარალელურად.  
 ჰენონმა მოიფიქრა შემფოთებული გარდაქმნა

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha \quad (14.12)$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha \quad (14.13)$$

ჰენონის მთავარი შედეგი ის არის, რომ (14.12),(14.13) გარდაქმნა წარმოადგენს ორი გარდაქმნის კომპოზიციას. რომელთაგან ერთი არაწრფივი(დეფორმაციით) გადატანაა და მეორე - მობრუნება, ე.ი. შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$T = T_1 \quad (14.14)$$

სადაც

$$x_{i+1/2} = \quad (14.15)$$

$$y_{i+1/2} = (y_i - x_i^2) \quad (14.16)$$

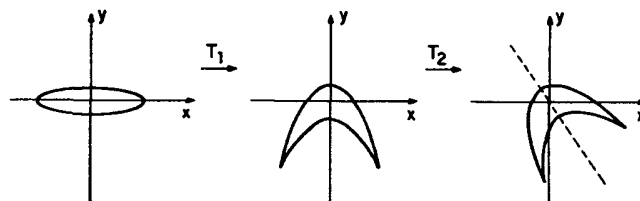
არაწრფივი დეფორმაცია-გადატანაა, ხოლო

$$x_{i+1} = x_{i+1/2} \cos \alpha - y_{i+1/2} \sin \alpha \quad (14.8)$$

T2:

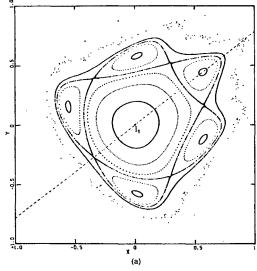
$$y_{i+1} = x_{i+1/2} \sin \alpha + y_{i+1/2} \cos \alpha \quad (14.9)$$

შესაბამისი გარდაქმნების გეომეტრიული სურათები მოცემულია ნახ.14.4.

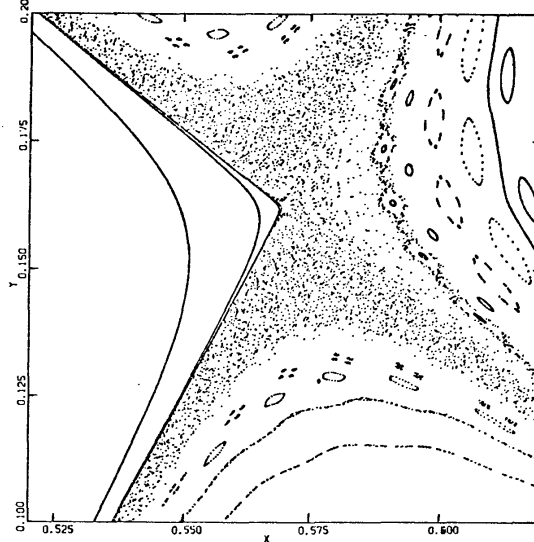


ნახ.14.4.ელიფსური დისკის გარდაქმნა ჰენონის გარდაქმნათა კომპოზიციით

შესაბამის ფაზურ სიბრტყეში სისტემა იძლევა სურათებს ნახ.14.5, ნახ.14.6



ნახ.14.5.ჰენონის გარდაქმნის ფაზური სიბრტყე, როცა  $\alpha = 0.21$



ნახ.14.6.არის დაშლა ჰიპერბოლურ წერტილთან

ამშედეგების მიღება მარტივია კომპიუტერის გამოყენებით. როგორც ნახ 14.6 გვიჩვენებს სისტემაში, ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლობაში წარმოიქმნება ქაოსი, რომელიც თანდათან ვრცელდება მტელ არეში.

#### 14.4. კავშირი ფართის შემნახველ ასახვებსა და ჰამილტონურ სისტემებს შორის

ჰენონის გადასახვას აქვს, არაინტეგრებადი ჰამილტონიანის ყველა თვისება, თუმცა, მისი მიღების წესი ამ ჰამილტონიანიდან არაა მარტივი.

ამიტომ, შევეცადოთ ვუპასუხოთ კითხვაზე: შეგვიძლია, თუ, არა ჰამილტონიანიდან მივიღოთ ფართის შემნახველი ასახვები?

განვიხილოთ, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მარტივი ჰამილტონიანი

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V, \quad (14.10)$$

რომლისთვისაც ჰამილტონური განტოლებები ჩაიწერება მარტივად

$$\dot{q} = \quad (14.11)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial v}{\partial q} \quad (14.12)$$

ჰამილტონურ (14.11),(14.12) განტოლებებში დროით წარმოებულები, შევცვალოთ სასრული სხვაობებით, მაშინ მივიღებთ

$$q_{i+1} = q_i + p, \quad (14.13)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left( \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)_q, \quad (14.14)$$

თუმცა, ეს გადასახვა არ ინახავს ფართობს, რადგან

$$\frac{\partial(q_{i+1}, p_{i+1})}{\partial(q_i, p_i)} \neq 1, \quad (14.15)$$

მაგრამ, თუ, ჩვენ (14.14) სხვაობიან სქემაში პოტენციალური ფუნქციის წარმოწულს გამოვითვლით წერტილში  $q = q$ , მაშინ მივიღებთ სქემას

$$q_{i+1} = q_i + p, \quad (14.16)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left( \frac{\partial v}{\partial q_i} \right)_{q=c}. \quad (14.17)$$

რომელიც, უკვე ინახავს ფართოს.

ეხლა, ამოვწეროთ ჰამილტონიანი, რომელსაც შეესაბამება (4.16),(4.17) სასრულ-სხვაობიანი სქემა. ამისათვის, (14.10) ჰამილტონიანის მაგივრად განვიხილოთ ჰამილტონიანი

$$H(p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} p^2, & \text{if } 0 < t < \gamma T \\ \frac{1}{1-\gamma} V(q), & \text{then} \end{cases} \quad (14.18)$$

სადაც  $0 < \gamma < 1$ . ასეთი ტიპის ჰამილტონიანები გამოიყენება ტალღამტარებში გამავალი სიგნალების მოდელირებისათვის.

თუ, განვიხილავთ ჰამილტონიანს

$$H(p, q, t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} V(q), & \text{if } 0 < t < \gamma T \\ \frac{1}{2(1-\gamma)} p^2, & \text{then} \end{cases} \quad (4.19)$$

მაშინ მივიღებთ დისკრეტულ ასახვას, რომელიც ასევე, ინარჩუნებს ფართოს

$$q_{i+1} = q_i + Tp, \quad (14.20)$$

$$p_{i+1} = p_i - T \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_q. \quad (14.21)$$

### 14.5. ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა

ყველაზე უფრო მეტად პოპულარულია ასახვა, რომელიც მიიღება, თუ (14.21) ფორმულაში, პოტენციალური ენერჯის ფუნქციას ჩავწერთ სახით

$$V(q) = -\frac{k}{(2\pi)^2} \cos(2\pi q). \quad (14.22)$$

მაშინ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებებს

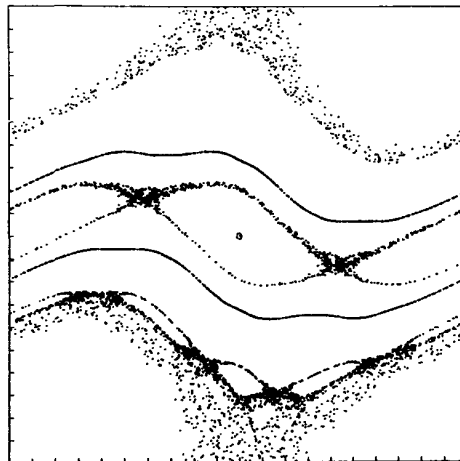
$$q_{i+1} = q_i + p, \quad (14.23)$$

$$p_{i+1} = p_i + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q). \quad (14.24)$$

სადაც დავუშვით, რომ  $T = 1$ . ამასთან, ამ მოდელის განხილვისას, თვლიან, რომ ცვლადები იცვლებიან პერიოდით 1, ანუ,

$$mod q = 1; \quad mod p = 0. \quad (14.25)$$

ამ ასახვას ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტულ ასახვას უწოდებენ. მისი ტიპიური ფაზური სიბრტყე მოცემულია ნახ.14.7.



ნახ.14.7. ტეილორ-ჩირიკოვის ასახვის ფაზური პორტრეტი, როცა  $k=0.97$

ამ ფაზური პორტრეტიდან, ნათლად ჩანს, თუ, როგორ ენაცვლებიან ერთმანეთს რეგულარული და ქაოსური ნაწილები. აქ ვხედავთ კუნძულებსაც, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ ინვარიანტული

წირები ტორები კი არ არიან აქ, არამედ კანტორები (დაკავშირებულია კანტორის სიმრავლესთან).

#### 14.6.ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმი (ლიაპუნოვის მაჩვენებლები)

ჰამილტონურ სისტემებში, ქაოსური მოძრაობის დამახასიათებელი თვისებაა, ძლიერი დამოკიდებულება საწყის პირობებზე. ქაოსურობის შემთხვევაში, საწყის პირობებში ახლოსმდგომი ინტეგრალური წირები, შემდგომში, ექსპონენციალური სისწრაფით შორდებიან. თუმცა, ფაზური სივრცის შემოფარგულობის გამო, ისინი უსასრულოდ ვერ დაშორდებიან. დაშორების სიჩქარის შესაფასებლად, იყენებენ ლიაპუნოვის მაჩვენებლებს.

მათი გამოყენების არეალი, სცილდება ჰამილტონურ სისტემებს და ისინი გამოიყენება საზოგადოდ, ყველა სახის დინამიკური სისტემებისათვის.

როგორც ვიცით, ატრაქტორები არსებობს სხვადასხვა სახის: მდგრადი ფოკუსი, ზღვართი ციკლი, ტორი და ბოლოს, უცნაური ატრაქტორი. ისმის კითხვა: როგორი იქნება კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვასხვავოთ ეს ატრაქტორები ერთმანეთისაგან? ასეთ კრიტერიუმს გვამღევს ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, რომლის შესწავლასაც ვაპირებთ ამ პარაგრაფში.

ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ავტონომიური დინამიკური სისტემა

$$\dot{q} = F(q). \quad (14.26)$$

ამ შემთხვევაში, ერთადერთი შესაძლო ატრაქტორი არის, მდგრადი უძრავი წერტილი(ერთგანზომილებიანი კვანძი). ხოლო, მისი ტრაექტორია, არის ერთი უძრავი წერტილი  $q = q_0$ . იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ამ უძრავი წერტილის მდგრადობა, გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ უკვე შესწავლილი, გაწრფივებული სისტემის მდგრადობის ანალიზის მეთოდი. ამისათვის, განვიხილოთ უძრავი წერტილის მცირე შემფოთება

$$q(t) = q_0 + \delta q. \quad (14.27)$$

ჩავსვათ ეს ფუნქცია (14.26) განტოლებაში და მარჯვენა მხარე გავშალოთ მწკრივად უძრავი წერტილის მიდამოში. მიღებულ

გამლაში, შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები შემფოთების მიმართ. მაშინ გვექნება განტოლება

$$\frac{d}{dt} \delta q = L, \quad (14.28)$$

სადაც  $L = \frac{\partial F}{\partial q}$  - მუდმივი სიდიდეა. ცხადია, რომ (14.28)

განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$\delta q(t) = \delta q(0). \quad (14.29)$$

თუ,  $L < \infty$  მაშინ უძრავი წერტილი მდგრადია. ამ მარტივ ამოცანაში სიდიდის პოვნა, არ წარმოადგენს არავითაე სირთულეს, თუმცა სხვა შემთხვევაში, მის საპოვნელად კომპიუტერი დაგვჭირდებოდა. თუმცა, იმ რთული შემთხვევებისათვისაც კი შეგვიძლია ვიპოვოთ სიდიდე, საკმაოდ მარტივი ფორმულით

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta q|. \quad (14.30)$$

ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, აზოგადებს (14.30) ფორმულას ორი მიმართულებით

1) ტრაექტორიები შეიძლება მოძრაობდნენ მრავალგანზომილებიან სივრცეში:  $q$  - რადიუს-ვექტორია, რომლის ბოლოც დროის განმავლობაში, მოძრაობს ტრაექტორიის გასწვრივ;

2) სისტემის მდგომარეობის მდგრადობას ვსწავლობთ  $q_0$  ცნობილი ამონახსნის მახლობლობაში.

წინა მაგალითის (14.27) ანალოგიურად, განვიხილოთ შემფოთებული ამონახსნი, მხოლოდ, ეხლა უკვე ვექტორული ტოლობა გვექნება, რადგან მრავალგანზომილებიან ამოცანას ვიხილავთ

$$q(t) = q_0 + \delta q. \quad (14.31)$$

$\delta q$  - შემფოთების დინამიკა გვიჩვენებს, თუ, როგორია ამონახსნის მეზობელი,  $q$  ტრაექტორიის დინამიკა. ის, დროთა განმავლობაში შორდება, თუ, უახლოვდება ტრაექტორიას.  $\delta q$  სიდიდის დინამიკის შესასწავლად, ჩავსვათ (14.31) ტოლობები ვექტორულ, არაწრფივ სისტემაში

$$\dot{q}(t) = F(q), \quad (14.32)$$

სადაც ამ სისტემის ამონახსნია. მარჯვენა ნაწილი, გავშალოთ მწკრივად  $\delta q$  შემფოთების მიმართ და მოვახდინოთ მისი გაწრფივება. მაშინ მივიღებთ განტოლებათა წრფივ სისტემას

$$\frac{d}{dt} \delta q_i(t) = \sum_k \frac{\partial F_i(q(t))}{\partial q_k} \Big|_{q=q_0} \delta q_k. \quad (14.33)$$

თუ, განვაზოგადებთ (14.30) თანადობას, მივიღებთ ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოსათვლელ ფორმულას

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\delta q|. \quad (14.34)$$

ეხლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ კრიტერიუმი, სხვადასხვა ტიპის ატრაქტორების განსხვავებისათვის.

1. **ერთგანზომილებიან შემთხვევაში** არსებობენ მხოლოდ ისეთი მდგრადი, უძრავი წერტილები, რომელთათვისაც ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია (-);

2. **ორგანზომილებიან შემთხვევაში**, შესაძლებელია, მხოლოდ ორი ტიპის ატრაქტორები: მდგრადი უძრავი წერტილები და ზღვართი ციკლები.

თუ, ატრაქტორი მდგრადი, უძრავი წერტილია (ფოკუსი), მაშინ ლიაპუნოვის ორივე მაჩვენებელი უარყოფითია (-,-).

თუ, ატრაქტორი ზღვართი ციკლია, მაშინ მისი ტრანსვერსალური შემფოთების შესაბამისი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია, ხოლო ტანგენციალურისა ნულის ტოლი (-,0). თუმცა, ასეთივე მნიშვნელობები შეიძლება გვქონდეს „პათოლოგიურ“ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს წირი, რომელიც უზღავი წერტილებისაგან შედგება;

3. **სამგანზომილებიან შემთხვევაში**,

გვაქვს მდგრადი ფოკუსი, თუ, ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია (-,-,-);

მდგრადი ზღვართი ციკლი, თუ, (-,-,-);

მდგრადი ტორი, თუ, (-,0,-);

თუ, ლიაპუნოვის რომელიმე მაჩვენებელი დადებითია, შეიძლება გვქონდეს სისტემაში ქაოსი. თუ, გვაქვს (+,0) მაშინ შეიძლება გვქონდეს არამდგრადი ტორი, რომელიც არაა ატრაქტორი.

თუ, სისტემის ატრაქტორის ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია (+,0,0), მაშინ ის ითვლება უცნაურ ატრაქტორად. უცნაური ატრაქტორის მეზობელი ტრაექტორიები სწრაფად შორდებიან მას.



### 14.7.ჰამილტონური ქაოსი ჰიდროდინამიკურ სისტემებში

ჰიდროდინამიკაში არსებობს ორგვარი მიდგომა. ესაა ეილერის მიდგომა და ლაგრანჟის მიდგომა. ეილერის მიდგომის დროს, სწავლობენ სითხის მოძრაობას მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში და სითხის მოძრაობას ახასიათებენ სიჩქარის კომპონენტებით

$$u = u(x, y, z, t) \quad (14.35)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (14.36)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (14.37)$$

ხოლო, ლაგრანჟის მიდგომის დროს მიყვებიან თითოეული ნაწილაკის ტრაექტორიას და სიჩქარეთა ველს წარმოადგენენ შემდეგნაირად

$$\dot{x} = u(x, y, z, t) \quad (14.38)$$

$$\dot{y} = v(x, y, z, t) \quad (14.39)$$

$$\dot{z} = w(x, y, z, t) \quad (14.40)$$

სადაც უნდა გვქონდეს საწყისი პირობებიც

$$(x(0), y(0), z(0)) \quad (14.41)$$

ორგანზომილებიანი უკუშეხების სითხისათვის, ადგილი აქვს უკუშეხების პირობას

$$u_x + v_y = 0 \quad (14.42)$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ უნდა არსებობდეს დენის ფუნქცია  $\psi$ , ისეთი, რომ

$$u = -\psi_y, \quad (14.43)$$

$$v = \psi_x. \quad (14.44)$$

ლაგრანჟის მიდგომის ფარგლებში, შეგვიძლია ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლებები ფორმით



$$\dot{x} = ,$$

(14.45)

$$\dot{y} = -.$$

(14.46)

ამ განტოლებებს, როგორც ვხედავთ, აქვთ ჰამილტონის განტოლებების სტრუქტურა, სადაც  $\psi \leftarrow, x \leftarrow, y \leftarrow$ . თუ, დენის ფუნქცია არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ (14.45),(14.46) სისტემა ავტონომიურია და ინტეგრებადი. ხოლო, თუ, გვაქვს დროზე დამოკიდებულება, მაშინ სისტემაში შეიძლება გვექონდეს ქაოსი. თუმცა, სამგანზომილებიან შემთხვევაში, ქაოსი შეიძლება წარმოიქმნას სტაციონარულ შემთხვევაშიც.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. კვეთის ზედაპირის არსი და გამოყენების არეალი;
2. ჰენონ-ჰელიესის ჰამილტონიანი;
3. ააგეთ ფართის შემნახავი ასახვა სიბრტყეზე და შეისწავლეთ მისი დინამიკა კომპიუტერზე;
4. კავშირი ფართის შემნახავ ასახვასა და ჰამილტონიანებს შორის;
5. ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოთვლა და ატრაქტორების განმასხვავებელი კრიტერიუმები.

### გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т.1, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977

10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
15. Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н.Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
19. Хакен Г.Синергетика Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, пер.с англ.,Мир, Москва,1985