

თამაზ ობგაძე

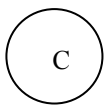
მათემატიკური მოდელირების კურსი
(უწყვეტი მათემატიკური მოდელები)
1 ტომი

“ტექნიკური უნივერსიტეტი”
თბილისი
2006

თ. ობგაძე. “მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები)”, ტომი 1, აკად. ა.ფრანგიშვილის რედაქციით, მონოგრაფია, თბილისი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2006, 100გვ.

მონოგრაფია ‘მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები)’, ტომი 1, აკად. ა.ფრანგიშვილის რედაქციით, მიძღვნილია მათემატიკური მოდელირების რთული და პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი პრობლემისადმი. ნაშრომის წყობა და იდეოლოგია ემყარება ავტორისეულ ხედვას განხილული საგნისადმი. პირველ ტომში განხილულია უწყვეტი მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა და ტექნოლოგია: ბიოლოგიიდან, ქიმიიდან, ეკონომიკიდან და მექანიკიდან. განხილულია შესაბამისი მათემატიკური აპარატიც. ნაშრომი საინტერესო იქნება ინჟინერ-მკვლევარებისათვის, რომლებიც კვლევის პროცესში იძულებული არიან ააგონ განსახილველი პროცესების მათემატიკური მოდელები.

რეცენზენტები: სრული პროფესორი, ტ.მ.დ. ნ.ჯიბლაძე
სრული პროფესორი, ტ.მ.დ. ზ.გასიტაშვილი



გამომცემლობა “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2006 რ.

ISBN – 99940-57-16-2
99940-57-22-7

წინასიტყვაობა

მათემატიკური მოდელირება – ადამიანის ინტელექტუალური მოღვაწეობისა და გარემო პირობების აღქმის შედეგად წარმოიშვა. ადამიანი თავიდანვე ცდილობდა აღეწერა სამყარო, მისთვის ცნობილი კატეგორიებისა და ცოდნის საფუძველზე. ცოდნის დაგროვებასთან ერთად იცვლებოდა შესაბამისი მოდელიც და სამყაროს სურათიც. მათემატიკის განვითარებამ, განაპირობა შესაბამისი ცოდნის მოქცევა და აღწერა მათემატიკის სიმბოლოებისა და მეთოდების ფარგლებში. ასე, თანდათან წარმოიშვა მეცნიერების ის მიმართულება, რომელსაც მათემატიკურ მოდელირებას ვუწოდებთ.

მათემატიკური მოდელირების ჭერქვეშ, ხშირად აერთიანებენ, როგორც თვით მათემატიკური მოდელის შედგენის ტექნოლოგიასა და ტექნიკას, ასევე, შესაბამისი მოდელის ანალიზისა და პარამეტრების გამოთვლების მეთოდებს, ასეთი მიდგომით შეიძლება ყველა მეცნიერება მათემატიკური მოდელირების ნაწილად ვაქციოთ.

ნაშრომი წარმოადგენს ავტორისეულ ხედვას მათემატიკური მოდელირების საგნისა და ცნებათა სისტემის შესახებ. ავტორი მთლიანად იღებს თავზე პასუხისმგებლობას ნაშრომის ყველა პუნქტსა და სტრუქტურაზე. ნაშრომში აგებულია ინფორმაციის სტრუქტურული სქემა, რაც საშუალებას იძლევა, გამოვეყოთ მათემატიკური მოდელირების ადგილი მეცნიერების მთლიან სისტემაში.

მათემატიკური მოდელირება გამოყენებული მათემატიკური აპარატის მიხედვით, იყოფა ორ ძირითად ნაწილად: ა) უწყვეტი მათემატიკური მოდელის და ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელი; თუმცა, არსებობენ გ) შერეული ტიპის რთული სისტემების - სინთეზური, მათემატიკური მოდელიც, რომლებშიც გამოიყენება როგორც უწყვეტი-კონტინუალური სიმძლავრის ცვლადი პარამეტრები, ასევე, დისკრეტული-თვლადი სიმძლავრის ცვლადი პარამეტრებიც.

წინამდებარე ნაშრომის პირველი ტომი წარმოადგენს შესავალს უწყვეტი მათემატიკური მოდელის თეორიაში. ეს ტომი შედგება ხუთი თავისაგან, რომლებიც განაწილებული არიან ორ ნაწილში.

პირველი ნაწილი - ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, მოიცავს იმ მათემატიკურ მოდელს, რომელთა შესადგენად საკმარისია ალგებრული და ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემები; შეიცავს სამ თავს. პირველ თავში მოცემულია რეაქტორული სქემების აგების ტექნიკა, რაც საშუალებას იძლევა სისტემის სქემატური მოდელიდან გადავიდეთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელზე; განხილულია ბიოქიმიური მოდელის აგების ტექნიკა, ასევე, მარკოვის უწყვეტ ჯაჭვებთან კავშირი. მეორე თავში აგებულია ეკონომიკის მათემატიკური მოდელი, ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელის ფარგლებში. მესამე თავში-კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მოდელი, აგებულია ლაგრანჟისა და ჰამილტონის განტოლებები მატერიალურ წერტილთა სისტემისათვის, განხილულია ორი და სამი სხეულის პრობლემა.

მეორე ნაწილი – განაწილებულპარამეტრიანი მათემატიკური მოდელი, აერთიანებს ორ თავს. მეოთხე თავში აგებულია სტატისტიკური მექანიკის მათემატიკური მოდელი; განხილულია ლიუვილისა და ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი; ტენზორული აღრიცხვის ბაზაზე აგებულია სითხეებისა და გაზების რეოლოგიური განტოლებები. მეხუთე თავში აგებულია სითხეებისა და გაზების დინამიკის მათემატიკური მოდელი; განხილულია ელასტიურობის თეორიის მოდელის აგების ტექნიკა კოშის მიდგომის ფარგლებში.

ავტორი მადლობას უხდის აკადემიკოს არჩილ ფრანგიშვილს, დოქტორ პანტიკო თორდიას და ნონა თორდიას თანადგომისა და თანამშრომლობისათვის, რამაც საშუალება მომცა შემექმნა ეს ნაშრომი.

შესავალი

ფიზიკური, სოციალურ-ეკონომიკური, ფსიქოლოგიური ან ეკოლოგიური პროცესების შესწავლისას ჩვენს წინაშე დგება ამოცანა: დიდი მოცულობის ინფორმაციის გადამუშავების შედეგად, მივიღოთ გარკვეული ოპტიმალური გადაწყვეტილება. ასეთ შემთხვევებში, განსაკუთრებულ როლს თამაშობს პროცესის მათემატიკური მოდელირება.

ჩვენს გარშემო არსებული რთული პროცესების შესასწავლად, ჩვენ ჯერ ვაგროვებთ ამ პროცესებთან დაკავშირებულ ყოველგვარ ინფორმაციას. ასე რომ, ამ ეტაპზე ჩვენ საქმე გვაქვს **ცოდნის მოუწესრიგებელ მარაგთან**.

შემდეგ, ხდება შეგროვილი ინფორმაციის სისტემატიზაცია და კლასიფიკაცია. ამ ეტაპზე დაგროვილი ცოდნა წარმოადგენს – **მოძღვრებას**, კარლ ლინეის ტიპთა შესახებ მოძღვრების ანალოგიურად.

ამის შემდეგ, შეისწავლება მოძღვრებაში განხილულ ობიექტთა განვითარებისა და ურთიერთქმედების ძირითადი კანონზომიერებები, რომლებიც ძირითადად დაკავშირებულია ცოდნის სხვა უფრო ღრმად შესწავლილ სფეროებთან, ანალოგიისა და ინტუიციის გზით, ამიტომ ხშირად ატარებენ სუბიექტურ-შემოქმედებით ხასიათს. ცოდნის განვითარების ამ ეტაპს – **ხელოვნება** ეწოდება.

შემდეგ ეტაპზე, ხდება ძირითად ცნებათა და კანონზომიერებათა მწყობრ აქსიომატურ სისტემად ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას გვაძლევს ცოდნის მოცემული სფეროს ფარგლებში ვაწარმოოთ შესაბამის მოვლენათა პროგნოზირება. ამ ეტაპზე, ჩვენი ცოდნათა მარაგი იძენს **მეცნიერულ** დონეს.

თანამედროვე მათემატიკის მიღწევებმა (ფრაქტალების თეორია) საშუალება მოგვცა გაგვეხსნა „მშვენიერების“ არსიც.

აღმოჩნდა, რომ ჩვენ მოგვწონს ხელოვნების ესა თუ ის ნიმუში, ფორმისა და შინაარსის ჰარმონიის შერწყმით „შემთხვევით-გამოუცნობთან“ (ოქროს კვეთის ფარგლებში), რაც დამალულია უცხო დამკვირვებლის თვალთაგან.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. ჩვენი განვითარებისა და ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენებიც (სამყაროს მოდელები) იცვლებიან.

განასხვავებენ მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას.

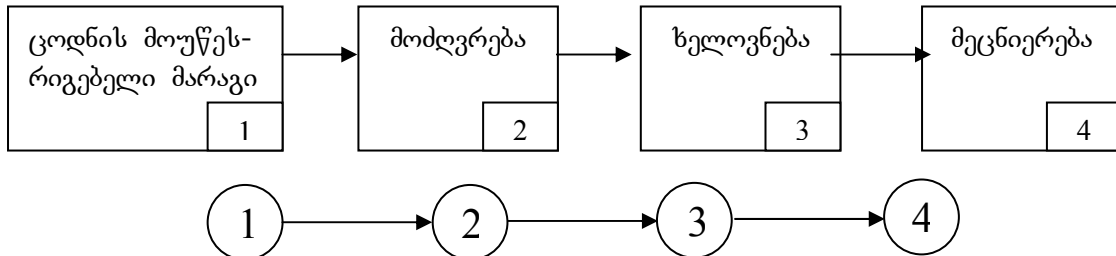
- ა) ფიზიკური მოდელირება;
- ბ) იმიტაციური მოდელირება;
- გ) მათემატიკური მოდელირება.

განსაზღვრება: მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ ამ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები მოდელირება ეწოდება.

- ა) **ფიზიკური მოდელი** – არის ნატურალურ, ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტალურად;
- ბ) **იმიტაციური მოდელი** – არის კომპიუტერული მოდელი, რომელიც გაითამაშებს მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ რეალიზაციებს;

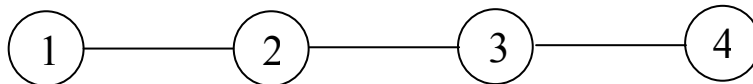
გ) მათემატიკური მოდელი – არის მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის სურათი, განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის მოცემული სიზუსტით.

უმარტივესი მათემატიკური მოდელის მაგალითია პროცესის ბლოკ-სქემა. განვიხილოთ ცოდნის ევოლუციის მოდელი გრაფის მეშვეობით.



ნახ. 1. ცოდნის ევოლუციის ბლოკ-სქემა და გრაფი.

ცხადია, რომ მოყვანილი გრაფი არის მეტად გამარტივებული სქემატური, რადგან ყოველ ეტაპზე ხდება შებრუნებული პროცესიც, ანუ, ცოდნის მოუწესრიგებელი მარაგის მოძღვრებად გადაქცევის პარალელურად, ხდება ცოდნის მოცულობის გაფართოვებაც და ა.შ. ასე რომ ცოდნის ევოლუციის გრაფი არ უნდა იყოს ორიენტირებული.



ნახ. 2. ცოდნის ევოლუციის არაორიენტირებული გრაფი.

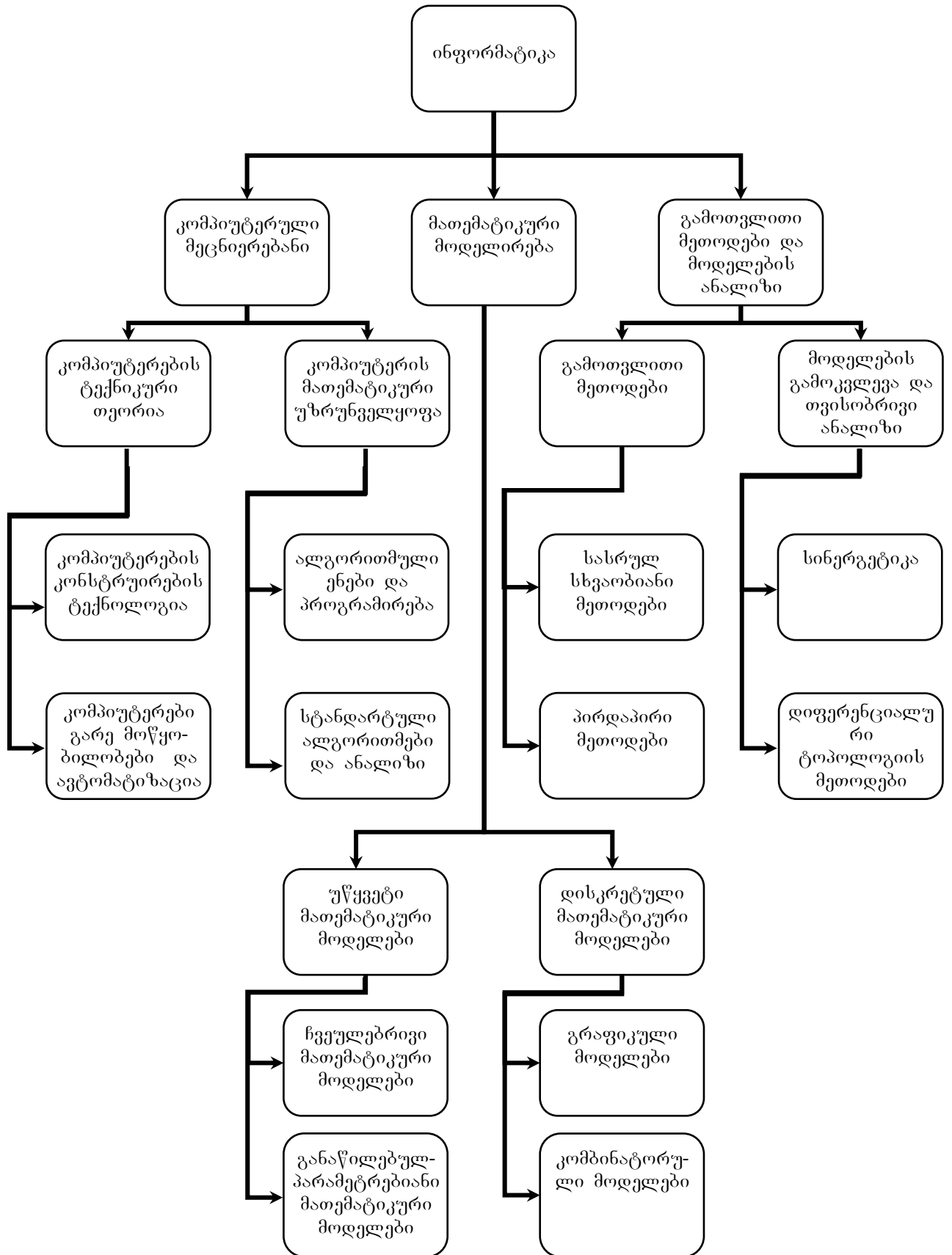
მათემატიკური მოდელები მოდელირების მეთოდების მიხედვით იყოფიან ორ ძირითად ჯგუფად: ა) უწყვეტი მათემატიკური მოდელები და ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელები; თუმცა, არსებობენ გ) შერეული ტიპის, რთული სისტემების - სინთეზური მათემატიკური მოდელებიც.

მაგალითად, ცოდნის ევოლუციის გრაფი – დისკრეტული მათემატიკური მოდელია. ხოლო ჰარმონიული რხევების განტოლება, შესაბამისი საწყისი პირობებით:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$$

წარმოადგენს უწყვეტი მათემატიკური მოდელის მაგალითს.

მათემატიკური მოდელირება წარმოადგენს ინფორმატიკის ერთ-ერთ ძირითად ნაწილს. მათემატიკური მოდელირების ადგილი კარგად ჩანს ინფორმატიკის სტრუქტურის ამსახველი სქემიდან №1.



სქემა №1. ინფორმატიკის სტრუქტურული სქემა

ნაწილი I

ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები

თავი I. რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება მოდელირებაში

1.1 ძირითადი ცნებები

განსაზღვრება: მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც აღიწერებიან ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით და შესაბამისი ალგებრული პირობებით – ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები ეწოდებათ.

ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით შევისწავლოთ რთული პროცესები: ქიმიაში, ბიოლოგიაში, ეკოლოგიაში, პოლიტიკაში, ფსიქოლოგიაში, ეკონომიკაში, ფიზიკაში და ა.შ.

იმისათვის, რომ შევადგინოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, საჭიროა, ჯერ შევადგინოთ კონცეპტუალური (აღწერითი) მოდელი ე.ი. გამოვყოთ ძირითადი – განმსაზღვრელი პარამეტრები და შევადგინოთ მოვლენის რეაქტორული სქემა.

განსაზღვრება: იმ სქემას, რომელიც მოცემული მოვლენის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის ამყარებს ქიმიური რეაქციების მაგვარ კავშირებს, რეაქტორული სქემა ეწოდება.

ჩვენ განვიხილავთ რეაქტორული სქემების სხვადასხვა სახეებს.

განსაზღვრება: რეაქტორულ სქემას რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ წარმომქმნელ ელემენტს, მონომოლეკულური სქემა ეწოდება.

განასხვავებენ შექცევად და შეუქცევად სქემებს.

ა) განვიხილოთ შეუქცევადი მონომოლეკულური სქემა:



A - სქემის წარმომქმნელი ელემენტია;

B - სქემის შედეგი;

k_1 - A -დან B -ს წარმოქმნის სიჩქარე (რეაქციის სიჩქარე).

ამ რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

a - არის A წარმომქმნელი ელემენტის კონცენტრაცია, b - არის წარმოქმნილი B ელემენტის კონცენტრაცია.

რადგან (1.1) სქემიდან გამომდინარე, a - ელემენტის კონცენტრაცია მცირდება k_1 სიჩქარით (ე.ი. $\frac{da}{dt} < 0$), ხოლო b - ელემენტის კონცენტრაცია იზრდება იგივე

სიჩქარით (ე.ი. $\frac{db}{dt} > 0$) მივიღებთ ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -k_1 a \\ \frac{db}{dt} = k_1 a \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

სადაც a_0 და b_0 - შესაბამისი კონცენტრაციების საწყისი მნიშვნელობებია.

(1.2) – წარმოადგენს შეუქცევადი მონომოლეკულური სქემის შესაბამის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს.

ბ) ეხლა განვიხილოთ შექცევადი მონომოლეკულური რეაქტორული სქემა:



სადაც k_{-1} - არის სქემის წარმომქმნელი ელემენტის აღდგენის სიჩქარე (უკუ რეაქციის სიჩქარე).

შექცევადი მონომოლეკულური რეაქტორული სქემის შესაბამის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = k_{-1}b - k_1a \\ \frac{db}{dt} = k_1a - k_{-1}b \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.2) – მოდელის შესაბამისი პროცესია – რადიოაქტიური დაშლის რეაქცია, ხოლო (1.4) – მოდელს შეესაბამება მაგალითად A სითხის აორთქლება, ერთდროულად კონდენსაციით B - ორთქლიდან.

1.2 ბიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები

განსაზღვრება: რეაქტორულ სქემას ორი წარმომქმნელი ელემენტით, ბიმოლეკულური ეწოდება.

განასხვავებენ შეუქცევად და შექცევად ბიმოლეკულურ სქემებს:

ა) განვიხილოთ შეუქცევადი ბიმოლეკულური რეაქტორული სქემა:



ორი ელემენტიდან A და B წარმოიქმნება ერთი C ელემენტი, k_1 სიჩქარით.

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -k_1ab \\ \frac{db}{dt} = -k_1ab \\ \frac{dc}{dt} = k_1ab \\ a(0) = a_0; \quad b(0) = b_0; \quad c(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

ბ) ეხლა განვიხილოთ შექცევადი ბიმოლეკულური რეაქტორული სქემა:



შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = k_{-1}c - k_1ab \\ \frac{db}{dt} = k_{-1}c - k_1ab \\ \frac{dc}{dt} = k_1ab - k_{-1}c \\ a(0) = a_0; b(0) = b_0; c(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

1.3 ტრიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები

განსაზღვრება: რეაქტორულ სქემას სამი წარმომქმნელი ელემენტით ტრიმოლეკულური ეწოდება.

განვიხილოთ შექცევადი ტრიმოლეკულური სქემა:



სადაც A ელემენტს აქვს სტეხეომეტრული კოეფიციენტი ($2A = A + A$).

(1.9) სქემის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

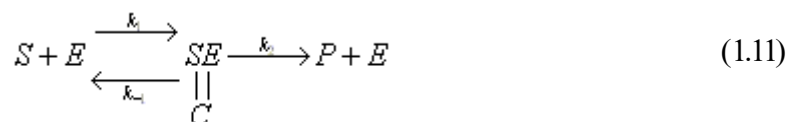
$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = 2k_{-1}c - k_1a^2b \\ \frac{db}{dt} = k_{-1}c - k_1a^2b \\ \frac{dc}{dt} = k_1a^2b - k_{-1}c \\ a(0) = a_0; b(0) = b_0; c(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

პრაქტიკული ამოცანები, როგორც წესი, უფრო რთულია ვიდრე ზემოთ განხილული სქემები. განვიხილოთ ზოგიერთი არსებული ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, რომლებიც უკვე კლასიკას მიეკუთვნებიან.

1.4 მისაელის-მენტენის მათემატიკური მოდელი

მისაელის-მენტენის რეაქცია ერთ-ერთი ყველაზე მარტივი ფერმენტული რეაქციაა; სადაც S - სუბსტრატი შეუქცევადად გარდაიქმნება P - პროდუქტად ერთი E - ფერმენტის მეშვეობით და ქმნის შეუქცევად SE - ფერმენტ-სუბსტრატულ კომპლექსს.

მისაელის-მენტენის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



თუ, გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ მეთოდს, (1.11) რეაქტორული სქემა შეიძლება მივიყვანოთ მათემატიკურ მოდელამდე:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = k_{-1}c - k_1se \\ \frac{de}{dt} = -k_1se + (k_{-1} + k_2)c \\ \frac{dc}{dt} = k_1se - (k_{-1} + k_2)c \\ \frac{dp}{dt} = k_2c \\ s(0) = s_0; e(0) = e_0; c(0) = p(0) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

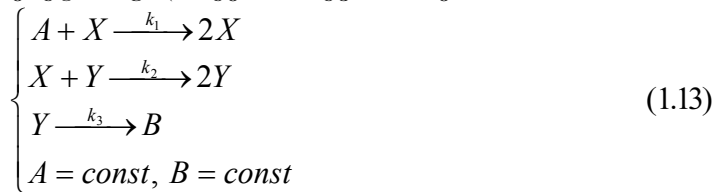
(1.12) მათემატიკურ მოდელს მიხაელის-მენტენის მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ.

1.5 ლოტკა-ვოლტერას მათემატიკური მოდელი

სხვადასხვა პოპულაციათა ურთიერთქმედების შესწავლის შემდეგ, ვოლტერამ შეადგინა ეკოლოგიური პროცესების მათემატიკური მოდელი, რომელიც მათემატიკის თვალსაზრისით, დაემთხვა ლოტკას რეაქციის მათემატიკურ მოდელს.

ეს მოდელი აღწერს ორ X და Y სუბიექტს შორის ბრძოლისა და კონკურენციის პროცესს არსებობისათვის ბრძოლაში. ცხადია, რომ ეს მოდელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ეკონომიკაშიც.

ლოტკა-ვოლტერას პროცესის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



სისტემა ღიაა ე.ი. ხდება ურთიერთქმედება გარემოსთან ($A \wedge B$).

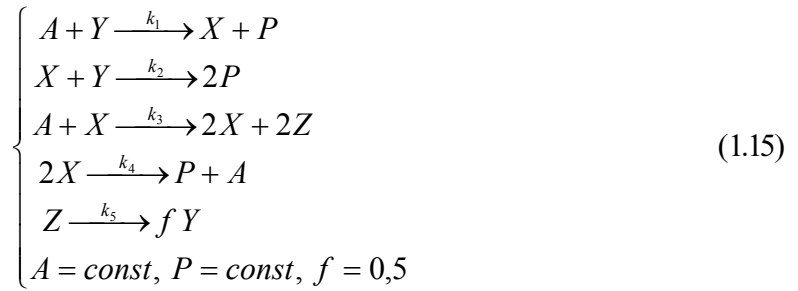
შესაბამის მათემატიკურ მოდელს შევადგენთ ზემოთ შესწავლილი მეთოდით, (1.13) სქემიდან გამომდინარე.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1ax - k_2xy \\ \frac{dy}{dt} = k_2xy - k_3y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

(1.14) მოდელს ლოტკა-ვოლტერას მოდელი ეწოდება.

1.6 ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკური მოდელი

ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია – არის რხევითი რეაქცია, რომელიც დეტალურად შეისწავლეს ფილდმა, კიორესმა და ნოიესმა. ჩვენ არ ჩაუღრმავდებით ამოცანის ქიმიურ არსს და პირდაპირ ჩავწერთ რეაქციის რეაქტორულ სქემას:



ეს სისტემა ღიაა რადგან A -ს უმატებენ იმდენს რამდენიც დააკლდება, რომ შეინარჩუნონ $A = const$, f -სტეხეომეტრული კოეფიციენტი.

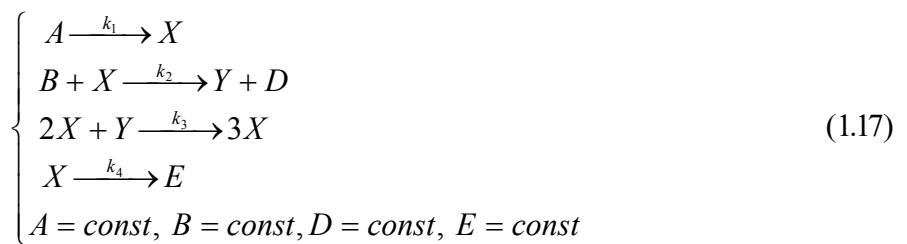
(1.15) რეაქტორული სქემის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ბელოუსოვ-ჯაბოტინსკის მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = k_1ay - k_2xy + k_3ax - k_4x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -k_1ay - k_2xy + k_5fz \\ \frac{dz}{dt} = 2k_3ax - k_5z \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0 \end{array} \right. \quad (1.16)$$

1.7 პრიგოჟინ-ლევინის მათემატიკური მოდელი

პრიგოჟინ-ლევინის მოდელი არის, ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებული იქნა ქ. ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით, ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელიატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლევინის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემაც ღიაა ე.ი. ემატება ან აკლდება A , B , D , E ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შეინარჩუნება ერთ დონეზე.

პრიგოჟინ-ლევინის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (1.17) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 a + k_3 x^2 y - (k_2 b + k_4) x \\ \frac{dy}{dt} = k_2 b x - k_3 x^2 y \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

1.8 რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება კოლმოგოროვის განტოლებების შესადგენად მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვებისათვის

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება სიტუაცია, როცა ერთი მდგომარეობიდან სისტემა შემთხვევით გადადის მეორე მდგომარეობაში. მაგალითად, აპარატურის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება გამოვიდეს წყობიდან დროის ნებისმიერ მომენტში, მისი შეკეთებაც შეიძლება მოხდეს დროის შემთხვევით მომენტში და ა.შ.

ასეთი პროცესების აღსაწერად გამოიყენებენ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის რეაქტორულ სქემას, დისკრეტული მდგომარეობათა სივრცით და უწყვეტი დროით.

ვთქვათ S_1, S_2, \dots, S_n - სისტემის მდგომარეობათა დისკრეტული მიმდევრობაა, ე.ი. $\{S_k\}_{k=1}^n$ არის იმ მდგომარეობათა სიმრავლე რომელშიც შეიძლება იყოს ჩვენი სისტემა დროის სხვადასხვა მომენტში, სიტუაციის მიხედვით.

ამა თუ იმ S_i -მდგომარეობაში სისტემის ყოფნის ალბათობა აღვნიშნოთ $p_i(t)$ -თი. $p_{ij}(t)$ -არის სისტემის S_i -მდგომარეობიდან S_j -მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა.

განსაზღვრება: სისტემის S_i -მდგომარეობიდან S_j -მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობის სიმკვრივე λ_{ij} -ეწოდება, შესაბამისი გადასვლის ალბათობის ცვლილების სიჩქარეს, ე.ი.

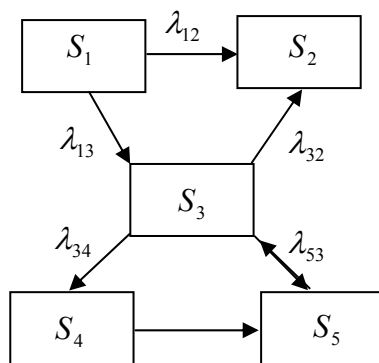
$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \quad (1.19)$$

ცხადია, რომ დროის მცირე Δt შუალედებისათვის

$$p_{ij}(t) \approx \lambda_{ij} \Delta t \quad (1.20)$$

თუ λ_{ij} -გადასვლის ალბათობათა სიმკვრივეები არ არიან დამოკიდებული t -დროზე, მაშინ მარკოვის პროცესს **ერთგვაროვანი** ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში **არაერთგვაროვანი**ა.

განვიხილოთ მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფი (ნახ. 1.1). მაშინ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელების, რეაქტორული სქემიდან აგების წესის გამოყენება, მოგვცემს კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემას მარკოვის პროცესისათვის, რომელიც შეესაბამება (ნახ. 1.1).



ნახ. 1.1. მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფი

ნახაზზე მოცემულ გრაფს (ამჯერად ამ გრაფს ვუყურებთ როგორც რეაქტორულ სქემას), მაშინ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{53}p_5 - (\lambda_{32} + \lambda_{34} - \lambda_{35})p_3 \\ \frac{dp_4}{dt} = \lambda_{34}p_3 - \lambda_{45}p_4 \\ \frac{dp_5}{dt} = \lambda_{45}p_4 - \lambda_{53}p_5 + \lambda_{35}p_3 \end{array} \right. \quad (1.21)$$

თუ ვიცით, რომ საწყის $t=0$ მომენტში სისტემა იმყოფებოდა S_1 -მდგომარეობაში, მაშინ საწყის პირობებს ექნებათ სახე:

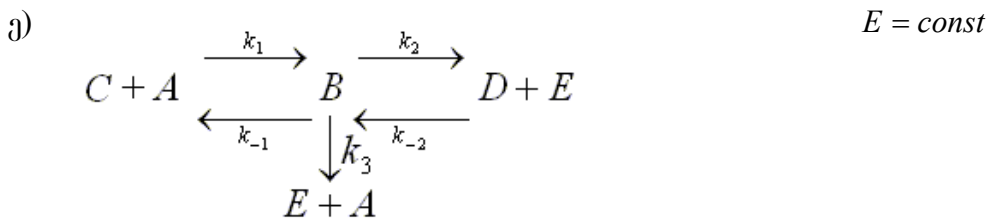
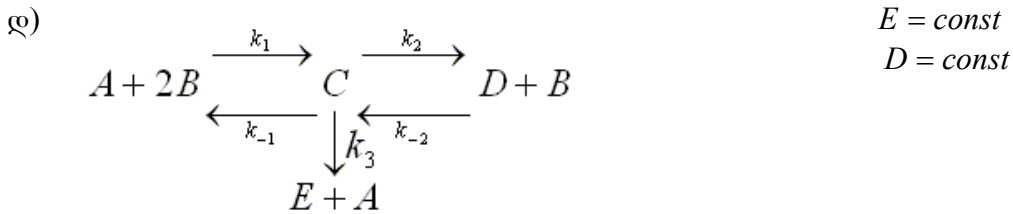
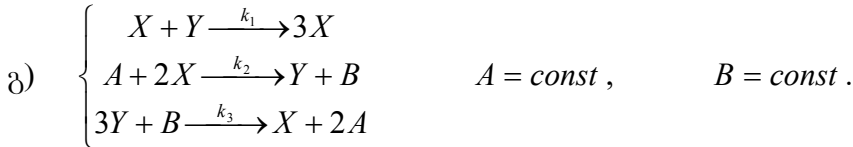
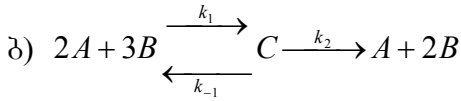
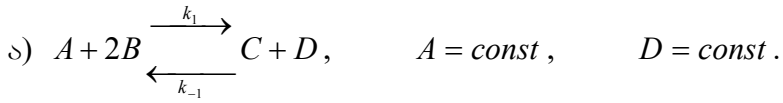
$$p_1(0) = 1; \quad p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = 0 \quad (1.22)$$

(1.21), (1.22) – წარმოადგენს მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვის ნახ.1.1-ზე მოცემული მდგომარეობათა გრაფის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს.

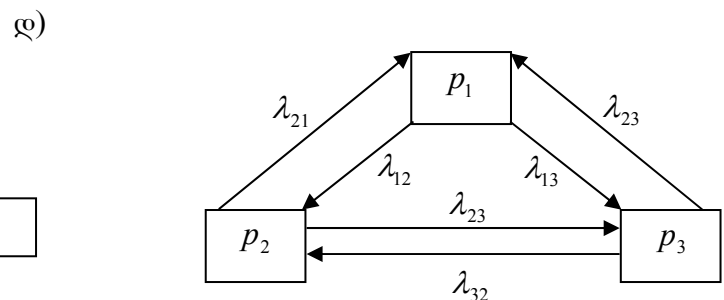
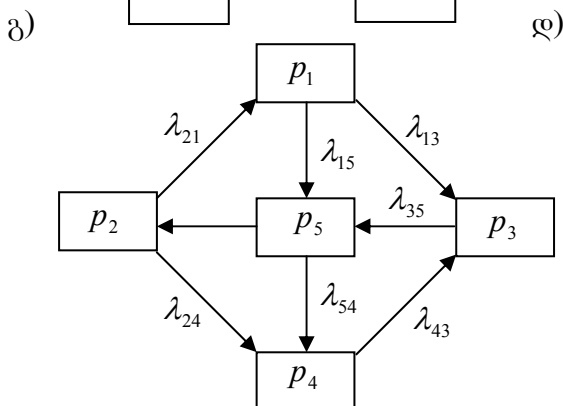
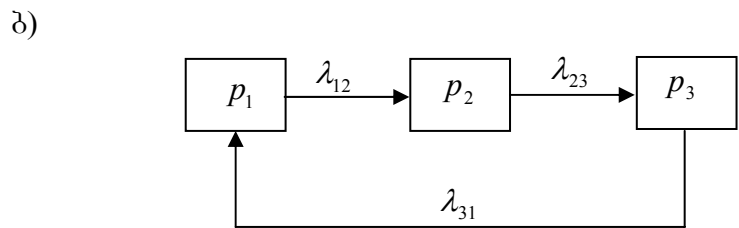
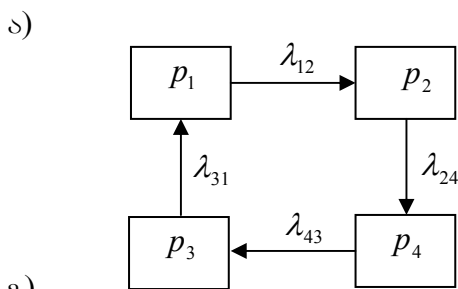
ანალოგიურად, შეიძლება ავაგოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები რთული პროცესებისათვის, რომლებისთვისაც წინასწარ აიგება შესაბამისი მდგომარეობათა მიმართული გრაფი.

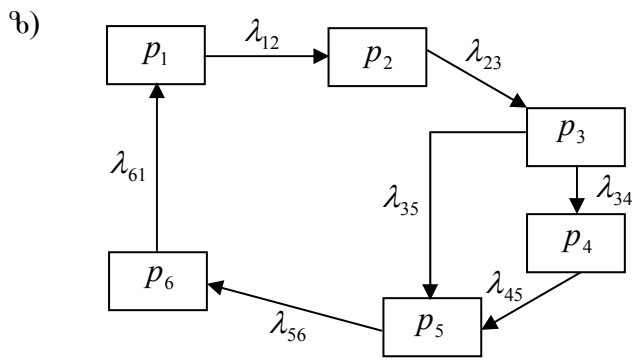
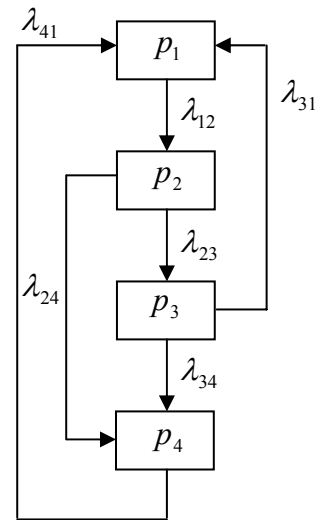
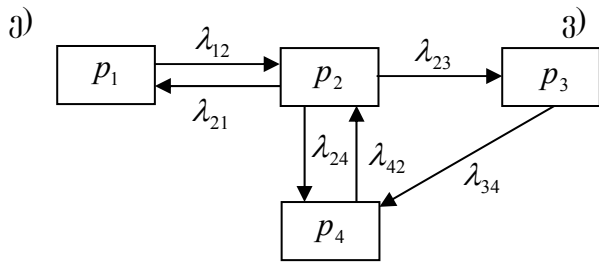
ამოცენები და სავარჯიშოები

1. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები:



2. ააგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით.





ლიტერატურა

1. Холодник М., Клич А., Кубичек М., Марек М., Методы анализа нелинейных динамических моделей, М., Мир, 1991.
2. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования, учеб. пос., ГПИ, Тбилиси, 1989.
3. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, М., Мир, 1985.
4. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. Иерархии неустойчивостей. –М., Мир, 1979.
5. Паулинг Л. Природа химической связи. –М., -Л.: Госхимиздат, 1947.
6. Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. Новосибирск, 1966
7. Пригожин И. Молекулярная теория растворов. –М.: Металлургия, 1990.
8. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур, М., Мир, 2002ю
9. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии, М., 2002.

თავი II ეკონომიკის მათემატიკური მოდელები

2.1 საქონლის საშუალო ფასის დადგენა რეგიონში სტატისტიკური მეთოდით

საქონლის საშუალო ფასის დასადგენად რეგიონში, გამოიყენება სტატისტიკური მეთოდი. იდეალში, უნდა ვნახოთ ყველა სავაჭრო წერტილი მოცემული რეგიონიდან, სადაც იყიდება მოცემული სახის საქონელი და ვიპოვოთ ყველა ფასების საშუალო არითმეტიკული. მაგრამ, პრაქტიკულად ეს ძნელად განსახორციელებელია, მითუმეტეს, თუ საქმე ეხება ფართო მოხმარების საქონელს, რომლისთვისაც სავაჭრო ობიექტების სიმრავლე რეგიონში შეიძლება იყოს მეტად დიდი $N \geq 1000$.

ასეთ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია მოვახდინოთ n ობიექტის ($n \ll N$), სასრული ამორჩევა, რომლებშიდაც შევისწავლით მოცემული საქონლის ფასს. ამავე დროს, უნდა გავითვალისწინოთ თანაბარი არჩევითობის პრინციპი, ე.ი. ამორჩეულ „ n “ ობიექტთა შორის, მოცემული რეგიონიდან ყველა რაიონს უნდა ჰქონდეს თანაბარი წარმომადგენლობა სავაჭრო ობიექტთა პროპორციულად.

ამის შემდეგ, ჩვენ ვსწავლობთ საქონლის ფასს ამ ამორჩეულ n -ობიექტებში და ვახდენთ მიღებული მონაცემების სტატისტიკურ დამუშავებას.

ვთქვათ $n=100$ და $N=1000$. შევავსოთ შესაბამის მონაცემთა ვარიაციული მწკრივი იმ შემთხვევისათვის, როცა ვსწავლობთ პურის X ფასს, f -მნიშვნელობათა გამეორების სისშირეა.

ცხრილი №1

X	45 თ	50 თ	55 თ	60 თ	65 თ	70 თ	49 თ
f	10	40	5	2	3	10	30

$$\sum_{i=1}^n f_i = 100.$$

ა) პირველ რიგში, საჭიროა მოვახდინოთ ვარიაციული მწკრივის რანჟირება, ე.ი. X მონაცემები უნდა განვალაგოთ ზრდადობის ან კლებადობის მიხედვით (ცხრილი №2):

ცხრილი №2

X	45	49	50	55	60	65	70
f	10	30	40	5	2	3	10

ბ) ესეა გამოვთვალოთ ვარიაციული მწკრივის საშუალო მახასიათებლები: მედიანა, მოდა და საშუალო მნიშვნელობა.

განსაზღვრება: რანჟირებული ვარიაციული მწკრივის მნიშვნელობათა x_i მიმდევრობის შუა წერტილს – მედიანა ეწოდება. აღინიშნება MeX - სიმბოლოთი. ე.ი. ცხრილი №2-დან გამომდინარე, დავასკვნით რომ

$$MeX = 50 \tag{2.1}$$

განსაზღვრება: რანჟირებული ვარიაციული მწკრივის შესასწავლი X სიდიდის მოდა ეწოდება X -ის იმ მნიშვნელობას, რომელსაც ყველაზე დიდი f სისშირე შეესაბამება (ანუ ფასის იმ მნიშვნელობას, რომელიც ყველაზე ხშირად გვხვდება შესასწავლ ამორჩეულ n სავაჭრო ობიექტებს შორის). აღინიშნება MoX .

განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ცხადია რომ ცხრილი №2-დან სისშირის უდიდესი მაჩვენებელი $f_{\max} = 40$, შეესაბამება საქონლის X ფასის შემდეგ მნიშვნელობას $X = 50$, ე.ი.

$$MoX = 50. \quad (2.2)$$

განსაზღვრება: ვარიაციული მწკრივის შესასწავლი X სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით:

$$X_{\text{საშ}} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} X_i f_i}{\sum_{i=0}^{k-1} f_i} \quad (2.3)$$

სადაც k არის X -ის განსხვავებულ მნიშვნელობათა საერთო რაოდენობა. ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში $k = 7$, ე.ი.

$$X_{\text{საშ}} = \frac{\sum_{i=0}^6 X_i f_i}{\sum_{i=0}^6 f_i} = 52.1 \quad (2.4)$$

გ) ეხლა უნდა შევისწავლოთ X სიდიდის გაბნევის ხარისხი საშუალო მნიშვნელობასთან შედარებით.

გაბნევის ხარისხის მახასიათებლებია: დისპერსია და რისკი.

განსაზღვრება: შესასწავლი X სიდიდის, საშუალო X მნიშვნელობიდან გადახრის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობას, X სიდიდის გაბნევის დისპერსია ეწოდება.

დისპერსია S^2 გამოითვლება ფორმულით:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (X_i - X_{\text{საშ}})^2 f_i}{\sum_{i=0}^{k-1} f_i} \quad (2.5)$$

ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=0}^6 (X_i - X_{\text{საშ}})^2 f_i}{\sum_{i=0}^6 f_i} = 48.39 \quad (2.6)$$

დისპერსიას აქვს კვადრატული განზომილება X -თან შედარებით, ამიტომ განიხილება გაბნევის მეორე მახასიათებელი რომელსაც S - რისკს ან საშუალო კვადრატულ გადახრას უწოდებენ და გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \sqrt{S^2} \quad (2.7)$$

ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში

$$S = 6.956 \quad (2.8)$$

ვარიაციული მწკრივის შესწავლისას, დიდი მნიშვნელობა აქვს შესასწავლი სიდიდის ცვლილების მახასიათებლების გამოთვლას, როგორც არიან: ვარიაციის კოეფიციენტი და გაქანება.

განსაზღვრება: შესასწავლი X -სიდიდის მნიშვნელობათა გაქანება ეწოდება სხვაობას, მის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობებს შორის. აღინიშნება RaX .

$$RaX = X_{\max} - X_{\min} \quad (2.9)$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში (ცხრილი №2), გვექნება

$$RaX = 70 - 45 = 25 \quad (2.10)$$

განსაზღვრება: შესასწავლი X -სიდიდის ვარიაციის ν კოეფიციენტი წარმოადგენს შესასწავლი სიდიდის გაზომვის სიზუსტის პროცენტულ(ფარდობით) მახასიათებელს და გამოითვლება ფორმულით:

$$\nu = \frac{S}{X_{\text{საშ}}}.100\% \quad (2.11)$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში გვექნება:

$$\nu \approx 13.352; \quad (2.12)$$

ითვლება, რომ ვარიაციული მწკრივი რეალურია, თუ $\nu \leq 15\%$. თუ $\nu \geq 100\%$ ეს ნიშნავს იმას, რომ ან ცხრილია შედგენილი არასწორად ან მოცემული ამოცანა არ იხსნება სტატისტიკაში.

იმისათვის, რომ გადავიდეთ ამორჩევის $X_{\text{საშ}}$ -მნიშვნელობიდან, საშუალო $XR_{\text{საშ}}$ ფასზე მთელი რეგიონის მასშტაბით(გენერალური ერთობლიობისათვის), საჭიროა გამოვიყენოთ ფორმულები.

$$a) \text{ თუ } \frac{n}{N} \ll 1, \text{ მაშინ } X_{\text{საშ}} - \frac{S}{\sqrt{n}} \leq XR_{\text{საშ}} \leq X_{\text{საშ}} + \frac{S}{\sqrt{n}}; \quad (2.13)$$

$$b) \text{ თუ } 0.5 \leq \frac{n}{N} \leq 0.9, \text{ მაშინ}$$

$$X_{\text{საშ}} - \sqrt{\frac{S^2}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{n}{N}\right)} \leq XR_{\text{საშ}} \leq X_{\text{საშ}} + \sqrt{\frac{S^2}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}. \quad (2.14)$$

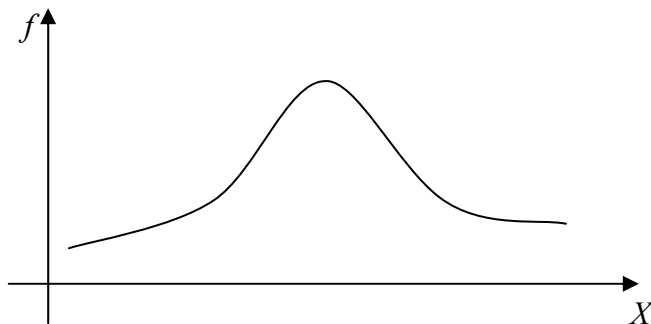
ჩვენ შემთხვევაში მოქმედებს ფორმულა (2.13)

$$X_{\text{საშ}} - \frac{S}{\sqrt{n}} = 51.4;$$

$$X_{\text{საშ}} + \frac{S}{\sqrt{n}} = 52.8.$$

მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავებისას, დიდ როლს თამაშობენ გრაფიკული მეთოდებიც.

განსაზღვრება: f -სიხშირეების X -მნიშვნელობებზე დამოკიდებულების გრაფიკს, სიხშირეთა პოლიგონი ეწოდება.



ნახ. 2.1 სიხშირეთა პოლიგონი

მონაცემთა მნიშვნელობების განაწილების კანონის დასახასიათებლად განიხილავენ: ასიმეტრიულობის μ კოეფიციენტს და E -ექსცესს.

განსაზღვრება: ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი $\mu X = 0$ - თუ განაწილების ფუნქცია სიმეტრიულია, $\mu X > 0$ - თუ სიმეტრია ირღვევა მოდის მარჯვნივ და $\mu X < 0$ - თუ სიმეტრია ირღვევა მარცხენა მხარეს.

ასიმეტრიულობის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$\mu X = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (X_i - X_{\text{საშ}})^3 f_i}{S^3 \sum_{i=0}^{k-1} f_i} \quad (2.15)$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში:

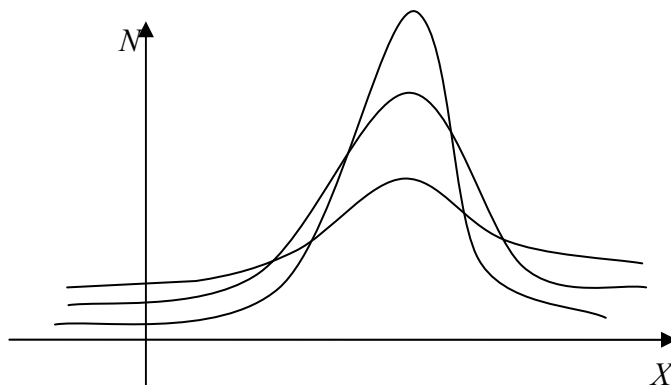
$$\mu X \approx 1.8 \quad (2.16)$$

განსაზღვრება: თუ X -სიდიდის განაწილების გრაფიკი ემთხვევა გაუსის ნორმალური განაწილების გრაფიკს, მაშინ ექსცესი $EX = 0$, თუ X -სიდიდე უფრო სწრაფად იცვლება, მაშინ $EX > 0$, ხოლო თუ უფრო ნელა, მაშინ $EX < 0$.

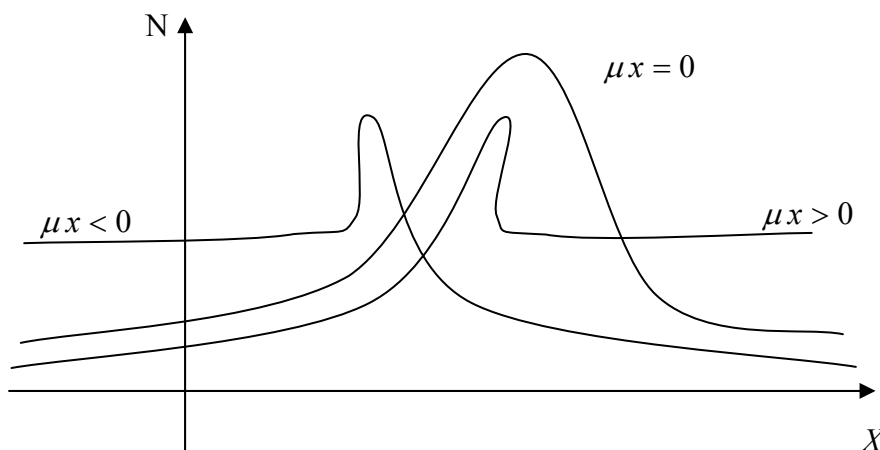
ექსცესი EX - გამოითვლება ფორმულით:

$$EX = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} (X_i - X_{\text{საშ}})^4 f_i}{S^4 \sum_{i=0}^{k-1} f_i} - 3. \quad (2.17)$$

$$EX = 1.9$$



ნახ. 2.2 ექსცესის განსაზღვრებისათვის



ნახ. 2.3. ასიმეტრიულობის კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის

2.2. საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობისა და რისკის გამოთვლა

განვიხილოთ საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობისა და რისკის ცნებები კონკრეტული ამოცანის პირობებში.

განსაზღვრება: მოსალოდნელი შემოსავლის ფულადი რაოდენობის მაჩვენებლის ფარდობას საინვესტიციო კაპიტალის მოცულობასთან, ინვესტიციის რენტაბელობის მაჩვენებელი ეწოდება.

მაგ. თუ ჩვენს პროექტს ესაჭიროება \$20 ათასი და მოსალოდნელი შემოსავალია \$30 ათასი, მაშინ რენტაბელობის მაჩვენებელი

$$\text{Re } X = \frac{30}{20} = 1.5 \quad (2.18)$$

ამოცანა. პროექტში \$20 ათასი დოლარის ინვესტირებისას მოსალოდნელია 30% წლიური მოგება. მაგრამ იმის ალბათობა, რომ პროექტი ჩაიშლება $p = 0.05$. შეისწავლეთ რენტაბელობა და პროექტის რისკი.

ამოხსნა: \$20 ათასი დოლარის ინვესტირებისას, წარმატების შემთხვევაში, წლის ბოლოს გვექნება $20000 + 20000 \cdot 0,3 = 20000 \cdot 1,3 = 26000$ დოლარი, წინააღმდეგ შემთხვევაში, დაკარგავთ 20 000 დოლარს. შევადგინოთ შემოსავლის განაწილების ფუნქცია:

ცხრილი №3		
X	26000	0
p	0,95	0,05

საშუალო მოსალოდნელი თანხა გამოითვლება, როგორც X -შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი MX :

$$MX = \sum X_i p_i = 26000 \cdot 0,95 + 0 \cdot 0,05 = 24700 (\$)$$

პროექტის რენტაბელობა იქნება:

$$\text{Re } X = \frac{MX}{20000} = \frac{24700}{20000} \approx 1,2 \quad (2.19)$$

დისპერსია გამოითვლება ფრმულით:

$$S^2 = (26000 - 24700)^2 \cdot 0,95 + (0 - 24700)^2 \cdot 0,05 = 32110000 \quad (2.20)$$

რისკი (საშუალო კვადრატული გადახრა) იქნება:

$$S = \sqrt{S^2} = 5666.569 \quad (2.21)$$

ვარიაციის კოეფიციენტი (რისკის ფარდობითი მაჩვენებელი)

$$\nu = \frac{S}{MX} \cdot 100\% \quad (2.22)$$

$$\nu = 22.9\%$$

2.3. ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია

განსაზღვრება: ორი საინვესტიციო პროექტს ეწოდებათ ალტერნატიული, თუ, მათგან ერთ-ერთის ინვესტირება, გამოორიცხავს მეორის ინვესტირებას.

ორი პროექტის ალტერნატიულობის შემთხვევაში, ხდება მათი რენტაბელობის მაჩვენებლისა და რისკის გამოთვლა.

- ა) თუ ორივე პროექტს აქვს ერთნაირი რენტაბელობის მაჩვენებელი, მაშინ აირჩევა ის, რომელსაც შეესაბამება ნაკლები რისკი;
- ბ) თუ ორივე პროექტს აქვს ერთნაირი რისკი, მაშინ აირჩევა ის, რომელიც უფრო რენტაბელურია.
- გ) თუ ერთი მათგანის რენტაბელობა მეტია მეორეზე და რისკი ნაკლებია მეორეზე, აირჩევა პირველი პროექტი;
- დ) თუ პირველის რენტაბელობა მეტია მეორისაზე, მაგრამ რისკიც მეტია მეორისაზე, მაშინ უნდა დაითვალოს ვარიაციის კოეფიციენტები და შევადაროთ ამ პროექტების უპირატესობანი. ამ შემთხვევაში მენეჯერს ააქვს სუბიექტურად გადაწყვეტის შესაძლებლობა გარკვეულ ფარგლებში.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

მოცემულია ორი ალტერნატიული პროექტი A და B . A პროექტი მოითხოვს \$100 ათას, 25% წლიურ მოგების პირობით, პროექტის ჩაშლის ალბათობა $p_A = 0,011$. B პროექტი მოითხოვს \$250 ათას, 30% წლიური მოგების პირობით, პროექტის ჩაშლის ალბათობა $p_B = 0,012$.

რომელი პროექტია უფრო მიზანშეწონილი ინვესტირებისათვის?

ამოხსნა: ორივე პროექტისათვის უნდა შედგეს განაწილების ფუნქციები და ცალ-ცალკე დაითვალოს რენტაბელობა შესაბამისი რისკებით.

ცხრილი №3

A	$100 \cdot 1,25$ ათ	0
PA	0.989	0.011

საშუალო შემოსავალი A -პროექტიდან MA იქნება

$$MA = \sum_{i=0}^1 A_i P A_i = 123.625$$

რენტაბელობა A -დან იქნება RA ,

$$Re A = \frac{MA}{100000} = 1.236$$

დისპერსია

$$S2A = \sum_{i=0}^1 (A_i - MA)^2 P A_i = (100 \cdot 1,25 - 123.625)^2 0.989 = 169.98$$

რისკი A -დან იქნება SA ,

$$SA = \sqrt{S2A} = 13.04$$

$$vA = \frac{SA}{MA} \cdot 100 = 10.5\%$$

ცხრილი №4

B	$250 \cdot 1.30$ ათ	0
PB	0.988	0.012

საშუალო შემოსავალი B -პროექტიდან იქნება MB

$$MB = \sum_{i=0}^1 B_i PB_i = 321.1$$

რენტაბელობა B -დან იქნება RB

$$Re B = \frac{MB}{250000} = 1.284$$

დისპერსია

$$S2B = \sum_{i=0}^1 (B_i - MB)^2 PB_i = (250 \cdot 1.3 - 321.1)^2 0.988 = 12523$$

რისკი B -დან იქნება SB ,

$$SB = \sqrt{S2B} = 35.39$$

$$vB = \frac{SB}{MB} \cdot 100 = 11.02\%$$

შესადარებლად შევადგინოთ ცხრილი
ცხრილი №5

არჩევის უპირატესობა

$Re A$	vA	1.236	10.5%
$Re B$	vB	1.284	11.02%

როგორც ვხედავთ ეს პროექტები დაახლოებით თანაბრად რენტაბელური და ნაკლებ რისკიანია.

2.4. დაგრთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ დაგრთაშორის ბალანსის ამოცანა, რომლის არსიც იმაში მდგომარეობს, რომ მიმდინარე წლის ბალანსის მონაცემებისა და გარკვეული დარგების უპირატესი განვითარების აუცილებლობის პირობებში სწორად დავეგეგმოთ მომავალი წლის საერთო გამოშვება თითოეული დარგისათვის, რეგიონისა თუ სახელმწიფოს ფარგლებში.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ სამდარგიანი ბალანსი და შევისწავლოთ შესაბამისი დარგთაშორისი ბალანსი ლეონტიევის მათემატიკური მოდელის ბაზაზე.

ამოცანა: 2003 წელს სამმა დარგმა: სოფლის მეურნეობა, მანქანათმშენებლობა, ენერგეტიკა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსი (ცხრილი №6):

		მოხმარება				
წარმოება	№	სოფლის მეორეობა	მანქანათმშენებლობა	ენერგეტიკა	საბოლოო პროდუქტი y_i	მთლიანი გამოშვება x_i
	1	სოფლის მეორეობა	$x_{11} = 10$	$x_{12} = 20$	$x_{13} = 30$	$y_1 = 40$
2	მანქანათმშენ.	$x_{21} = 30$	$x_{22} = 20$	$x_{23} = 10$	$y_2 = 30$	$x_2 = 90$
3	ენერგეტიკა	$x_{31} = 20$	$x_{32} = 30$	$x_{33} = 20$	$y_3 = 50$	$x_3 = 120$

იპოვეთ მთლიანი გამოშვების ახალი x_i -გეგმა 2004 წლისათვის, თუ სოფლის მეურნეობის საბოლოო y_i - პროდუქტი უნდა გაიზარდოს 10%-ით, მანქანათმშენებლობისა-20%-ით, ხოლო ენერგეტიკა- 8%-ით.

ამოხსნა: ვთქვათ, x_i -არის i -ური დარგის მთლიანი გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა ფულად გამოსახულებაში, x_{ij} -არის i -ური დარგის პროდუქციის ის მოცულობა, რომელიც გამოიყენება j -ური დარგის წარმოებაში, y_i -არის საბოლოო პროდუქციის მოცულობა i -ური დარგისათვის, რომელიც გამოიყენება არაწარმოებითი დანიშნულებით ფულად გამოსახულებაში.

მაშინ, ლეონტიევის დარგთაშორისი ბალანსის განტოლებას აქვს სახე:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_{ij}, \quad (2.23)$$

შემოვლითი აღნიშვნა:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (2.24)$$

a_{ij} -არის i -ური დარგის პროდუქციის ის მოცულობა, რომელიც საჭიროა ერთეული მოცულობის პროდუქციის შესაქმნელად j -ურ დარგში, (a_{ij}) -მატრიცას ტექნოლოგიური მატრიცას უწოდებენ.

$$(2.23) \wedge (2.24) \Rightarrow$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \quad (2.25)$$

თუ, შემოვიღებთ მატრიცულ აღნიშვნებს

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

მაშინ (2.25) გადაიწერება სახით:

$$X = A \cdot X + Y \quad (2.27)$$

ამ განტოლებიდან უნდა ვიპოვოთ X -მატრიცა,

$$(E - A) \cdot X = Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1} \cdot Y \quad (2.28)$$

ეს არის ლეონტიევის ფორმულა, რომელიც იძლევა დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანის ამოხსნას.

ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში,

$$Y = \begin{pmatrix} 40 \cdot 1,1 \\ 30 \cdot 1,2 \\ 50 \cdot 1,08 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{20}{90} & \frac{30}{120} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{90} & \frac{10}{120} \\ \frac{20}{100} & \frac{30}{90} & \frac{20}{120} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

მაშინ, საძებნი გეგმა იქნება

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y$$

ანუ

$$X = \begin{pmatrix} 111.362 \\ 103.481 \\ 132.919 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

2.5. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა

შპს ცეხმა უნდა გამოუშვას სამი ტიპის სულ 100 ერთეული მოცულობის პროდუქცია. თითოეული სახის პროდუქცია უნდა იყოს არანაკლებ 20 ერთეული. პროდუქციის თითოეული ერთეულზე ტიპის მიხედვით, იხარჯება შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ მეტალი, რომლის საერთო მარაგიც 340 კგ-ია, ასევე 4.75, 11 და 2 კგ პლასტმასი, რომლის საერთო მარაგიც 700 კგ-ია. თითოეული ტიპის რა მოცულობის პროდუქცია უნდა იყოს გამოშვებული, რომ მივიღოთ მაქსიმალური ამონაგები თანხა, თუ თითოეული ტიპის ერთეული მოცულობის პროდუქციის ფასი არის 4, 3 და 2 დოლარი?

ამოხსნა: შევადგინოთ მათემატიკური მოდელი.

x_1 -პირველი ტიპის პროდუქციის გამოსაშვები მოცულობაა,

x_2 -მეორე ტიპის,

x_3 -მესამე ტიპის.

მაშინ, მიზან-ფუნქციას ექნება სახე:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \quad (2.31)$$

ამ ფუნქციამ უნდა მიიღოს მაქსიმალური მნიშვნელობა, რადგან ის გამოსახავს საერთო ამონაგები თანხის სიდიდეს.

ამას გარდა, x_1 , x_2 , x_3 - ცვლადები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემოფარგვლის პირობებს, რომლებიც გამომდინარეობენ ამოცანის პირობიდან:

$$\begin{cases} x_1 \geq 20 & x_2 \geq 20 & x_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ 4 \cdot x_1 + 3.4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340 \\ 4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700 \end{cases} \quad (2.32)$$

მაშასადამე, მივიღეთ წრფივი პროგრამირების ამოცანა:

ვიპოვოთ ისეთი x_1, x_2, x_3 მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.32) შემოფარგლის პირობებს და რომელთათვისაც (2.31) მიზან-ფუნქცია იღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ეს ამოცანა Mathcad-2001-ში იხსნება ადვილად, თუ შევადგენთ შესაბამის პროგრამას:

$f(x_1, x_2, x_3) = 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$ $x_1 := 1 \quad x_2 := 1 \quad x_3 := 1$ <p>Given</p> $x_1 \geq 20 \quad x_2 \geq 20 \quad x_3 \geq 20$ $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ $4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 340$ $4.75 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leq 700$ $R := \text{Maximize}(f, x_1, x_2, x_3)$ $R = \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$	<p>მიზან-ფუნქცია</p> <p>ნებისმიერი საწყისი პირობები</p> <p>ამონახსნის ბლოკი Mathcad-2001-ში</p> <p>შემოფარგლის პირობები</p> <p>მაქსიმუმის პოვნა Mathcad-ში</p> <p>ამონახსნი</p>
--	---

ე.ი. $x_1 = 56, x_2 = 20, x_3 = 24$.

წრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე და შესაბამის მოდელზე დაიყვანებიან სხვადასხვა ტიპის ეკონომიკური ამოცანები:

- ა) სატრანსპორტო ამოცანა;
- ბ) საარსებო მინიმუმის პოვნის ამოცანა;
- გ) რესურსების ოპტიმალურად განაწილების ამოცანა;
- დ) დასათესი სავარგულების ოპტიმალურად განაწილების ამოცანა
- და ა.შ.

ჩვენ ამ ამოცანებზე არ გავჩერდებით, რადგან ისინი არიან შესაბამისი საგნის ობიექტები, შეისწავლებიან საგნებში: ოპერაციის კვლევა და ოპტიმიზაციის მეთოდები.

2.6. საერთაშორისო ვაჭრობის მათემატიკური მოდელი

ვთქვათ, საერთაშორისო ვაჭრობაში მონაწილეობენ n -რაოდენობის სხვადასხვა ქვეყნები S_1, S_2, \dots, S_n , რომელთა შესაბამისი ეროვნული შემოსავალიც არის x_1, x_2, \dots, x_n . შემოვიღოთ აღნიშვნა: a_{ij} -არის S_j -ქვეყნის ეროვნული შემოსავლის ნაწილი, რომელიც იხარჯება S_i -ქვეყნის პროდუქციის შესაძენად. ჩავთვალოთ, რომ მთელი ეროვნული შემოსავალი იხარჯება ან შიდა ან იმპორტული პროდუქციის შესაძენად, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (2.33)$$

განვიხილოთ A მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

ამ მატრიცას საერთაშორისო ვაჭრობის სტრუქტურულ მატრიცას უწოდებენ. (2.33)-დან გამომდინარე, A -მატრიცის ნებისმიერი სვეტის ელემენტების რიცხვი 1-ის ტოლია.

ნებისმიერი S_i -ქვეყნის ამონაგები შიდა და გარე ვაჭრობიდან შეადგენს

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (2.35)$$

სბალანსირებული ვაჭრობისათვის აუცილებელია, რომ ნებისმიერი S_i -ქვეყნისათვის ვაჭრობა იყოს არადეფიციტური, ანუ ამონაგები P_i უნდა იყოს არა ნაკლები ვიდრე დანახარჯი ეროვნული შემოსავალი X_i , ე.ი.

$$P_i \geq X_i \quad (2.36)$$

მკაცრი უტოლობა (2.36)-ში შეუძლებელია, რადგან ყველა ქვეყანა ვაჭრობაში მოგებულ ვერ იქნება, თუ ვიღაცა იგებს, ე.ი. სხვა ვიღაცა აგებს.

ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ გვინდა ჰუმანური და სბალანსირებული ვაჭრობა, მაშინ იდეალში (2.36)-ში უნდა იყოს ტოლობები:

$$P_i = X_i \quad (2.37)$$

ეს ტოლობები მატრიცულად ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$AX = X \quad (2.38)$$

ე.ი. საერთაშორისო ვაჭრობის მოცემული სტრუქტურული A მატრიცის პირობებში, მოვაჭრე ქვეყნების ეროვნული შემოსავლების საპოვნელად, უნდა ვიპოვოთ ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცის ის საკუთრივი X -ვეკტორი, რომელიც შეესაბამება $\lambda=1$ საკუთრივ რიცხვს.

განვიხილოთ მაგალითი:

მოცემულია საგარეო ვაჭრობის სტრუქტურული მატრიცა სამი S_1, S_2, S_3 ქვეყნისათვის:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

იპოვეთ ამ ქვეყნების ეროვნული შემოსავლების ისეთი $x_1 : x_2 : x_3$ თანაფარდობა, რომლის დროსაც შესაძლებელია მათ შორის სბალანსირებული ვაჭრობა.

ამოხსნა:

$$A \cdot X = X \quad (2.38)$$

ე.ი.

$$(A - E)X = 0 \quad (2.39)$$

მივიღეთ სისტემა:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი $|A-E| \neq 0$, ე.ი. $\text{rang}A \leq 2$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \neq 0 \quad \text{ე.ი. } \text{rang}A = 2$$

$x_3 = c$, მაშინ (2.40)-დან მივიღებთ, რომ $x_2 = 2c$ და $x_1 = \frac{3}{2}c$.

ე.ი. ამ ქვეყნებს შორის უდუფიციტო ვაჭრობა შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, თუ მათი ეროვნული შემოსავლები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{3}{2}c : 2c : c = 3 : 4 : 2 \quad (2.41)$$

P.S. როგორც ვხედავთ საერთაშორისო ვაჭრობა მხოლოდ იდეალშია ყველასთვის სასარგებლო. ძირითადად, ეს არის ერთი ქვეყნის მიერ მეორე ქვეყანაზე ეკონომიკური ზეწოლის იარაღი და წარმოადგენს ეკონომიკური ომის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ნაწილს.

2.7. აქციების ფასის პროგნოზირება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით

ვთქვათ მოცემული გვაქვს ცხრილი აქციების y -ფასის ცვლილებისა x თვეების მიხედვით და გვინდა ვიწინასწარმეტყველოთ ფასის მნიშვნელობა უახლოეს XI, XII მომავალ თვეებში.

ცხრილი №7

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	20	15	14	18	20	19	20	20	14	18	?	?

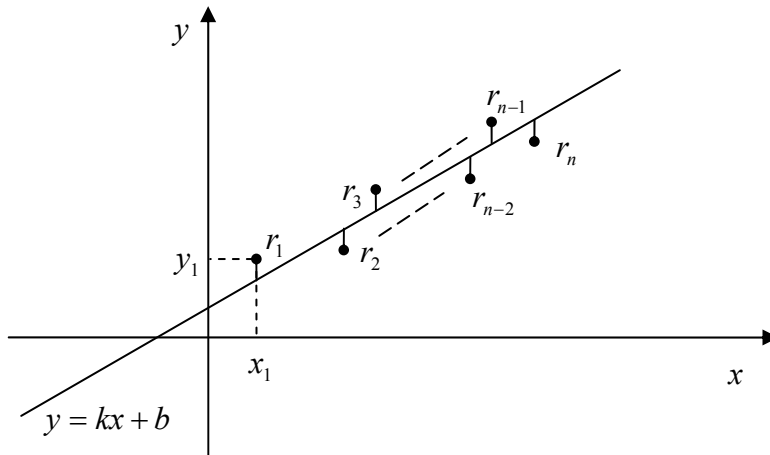
ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი (წრფივი რეგრესია).

ამოხსნა:

ამოხსნათ ჯერ ამოცანა ზოგადი მონაცემებით:

ცხრილი №8

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n



ნახ. 2.4. წრფივი რეგრესია

ცხრილი №8, სიბრტყეზე გვაძლევს ექსპერიმენტალურ წერტილთა (x_i, y_i) -სიმრავლეს. ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ისეთი $y=k \cdot x+b$ წრფე, რომელიც ”საუკეთესოდ“ უახლოვდება ამ ექსპერიმენტულ წერტილთა ერთობლიობას. საუკეთესოდ მიახლოების კრიტერიუმად უნდა ავიღოთ გაუსის დისკრეტული ნორმის მინიმუმი:

$$I(k, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2} \rightarrow \min \quad (2.42)$$

r_i -არის სხვაობა, ფასის თეორიულ და ექსპერიმენტალურ მნიშვნელობებს შორის. (2.42)-ში, $I(k, b) = I(k, b)^2$ -ფუნქციამ უნდა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა. მაშინ, ფერმას თეორემის ძალით მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

(2.43)-გადაიწერება სახით:

$$\begin{cases} k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ k \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (2.44)$$

ამ სისტემის (k, b) ამონახსნი გვაძლევს, სწორედ, იმ ოპტიმალურ თეორიულ $y=k \cdot x+b$ ფუნქციას, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ვიწინასწარმეტყველოთ აქციის ფასის მნიშვნელობა, როცა $x=11$ ან $x=12$.

ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში,

$$y(11) = 18.133 \quad (2.45)$$

$$y(12) = 18.194 \quad (2.46)$$

2.8. კეინსის მათემატიკური მოდელი

“დიდი დეპრესიის” დასაწყისი იყო ის მოვლენა, როცა ერთი დღის განმავლობაში ამერიკის ფასიანი ქაღალდების ფასი კატასტროფულად დაეცა. მოგვიანებით ამ დღეს “შავი ორშაბათი” უწოდეს. ამ დღიდან მიეცა დასაბამი კეინსის მაკროეკონომიკურ კონცეფციას, რომლის მიხედვითაც – წარმოება, განაწილება და გასავალი ეროვნულ მეორნეობაში განისაზღვრებიან ერთი აგრეგირებული ფაქტორით – ეროვნული შემოსავლით. ეროვნული შემოსავალი განისაზღვრება ეფექტური მოთხოვნილებით, ანუ მოთხოვნით. მაკროეკონომიკურ თეორიას, ხშირად, შემოსავლების თეორიას უწოდებენ. “დიდი დეპრესია” აღინიშნება კეინსის თეორიის აღიარებით და აქედან დაიღო დასაბამი მათემატიკურმა მაკროეკონომიკამ.

განვიხილოთ ეროვნული შემოსავლის ეფექტური მოთხოვნილების მეშვეობით განსაზღვრის მექანიზმი.

ეფექტური მოთხოვნილების მექანიზმი ამბობს, რომ დროის მცირე შუალედებისათვის, როცა წარმოების საშუალებები ფიქსირებულია, ეროვნული შემოსავალი განისაზღვრება იმ ფაქტორებით, რომლებიც დამოკიდებულია მოთხოვნაზე.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ჯამური ეფექტური მოთხოვნილება D , განისაზღვრება, როგორც C - მოხმარებისა და I - ინვენსივობის ჯამი:

$$D = C + I \tag{2.47}$$

მომხმარებელთა მოთხოვნა შეიძლება წარმოვადგინოთ ფორმით:

$$C = \alpha \cdot X + A \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2.48}$$

სადაც C -მოხმარება არის X ეროვნული შემოსავლის წრფივი ფუნქცია, A = (საარსებო მინიმუმი) × (მცხოვრებთა რიცხვი), ხოლო α - მოხმარებისაკენ სწრაფვის კოეფიციენტი (A -ს ხშირად ბაზურ მოხმარების მაჩვენებელს უწოდებენ).

.შ. ჩ=ჩონსუმპციონ (მოხმარება), I =ინვესტიციები (კაპიტალდაბანდება), = ემანდ (მოთხოვნა)

ინვესტიციების საპოვნელად ვისარგებლოთ ინვესტიციების დამოუკიდებლობის ხასიათის ჰიპოთეზით, რომლის მიხედვითაც ინვესტიციების დონე განისაზღვრება წარმოების გრძელვადიანი მოსალოდნელობით, რომელიც არაა განსაკუთრებულად დამოკიდებული შემოსავლებზე მოკლე დროში.

წონასწორული ეროვნული X^* -შემოსავალი, რომელიც შეესაბამება მოთხოვნილებისა და წინადადების ტოლობას

$$D = X^* \tag{2.49}$$

განისაზღვრება როგორც

$$C + I = X^* \tag{2.50}$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც მიიღება (2.47)^(2.49)-დან. თუ, გავითვალისწინებთ (2.48), მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$\alpha \cdot X^* + A + I = X^* \tag{2.51}$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$A + I = (1 - \alpha)X^* \tag{2.52}$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი X^* :

$$X^* = (1 - \alpha)^{-1} \cdot (A + I) \tag{2.53}$$

განსაზღვრება: გამოსახულებას $(1 - \alpha)^{-1}$ -რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენად იზრდება ეროვნული შემოსავალი, ინვესტიციების მოცემული ზრდის პირობებში, ინვესტიციების მულტიპლიკატორი ეწოდება.

წონასწორობის X^* -მოცულობა, შეესაბამება იმ ეროვნულ შემოსავალს, რომლის დროსაც დაკმაყოფილებულია მეწარმეთა და კერძო მეურნეთა ინტერესები, მაგრამ არ შეესაბამება იმ დონეს, როცა დაძლეულია უმუშევრობა. ამიტომ, სახელმწიფო ყოველთვის უნდა ცდილობდეს გაზარდოს ეროვნული შემოსავალი ისე, რომ $X_f > X^*$, ინვესტიციების მოზიდვის მეშვეობით.

2.9. სამუელსონ-ჰიკსის მოდელი

თუმცა, დროის დიდი შუალედისათვის ეკონომიკას აქვს გაზრდის ტენდენცია, მაგრამ მისი განვითარებისათვის დამახასიათებელია ტალღური ბუნება, რომლის გამოც ეროვნული შემოსავალი ხან იზრდება და ხან მცირდება.

ეკონომიკური დინამიკისათვის დამახასიათებელი ტალღური ბუნების შესასწავლად, სამუელსონმა და ჰიკსმა შეადგინეს შესაბამისის მათემატიკური მოდელი. ამ მოდელში

X -ის რხევის მექანიზმი ახსნილია აქსელერაციის პრინციპისა და მულტიპლიკატორის კონცეფციით.

აქსელერაციის პრინციპი ამბობს, რომ ინვესტირების მასშტაბები დამოკიდებულია საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის ზრდის ტემპზე. ინვესტიციური მოთხოვნა საბოლოო პროდუქციის მოთხოვნის პროპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტს, აქსელერაციის ფაქტორს უწოდებენ. სამუელსონ-ჰიკსის მოდელში აქსელერაციის პრინციპზე დამყარებულ ინვესტიციების განტოლებას აქვს სახე:

$$I(t) = \beta(X(t-1) - X(t-2)) \quad (2.54)$$

სადაც β -აქსელერაციის კოეფიციენტი (ფაქტორია).

$C(t)$ -მოხმარების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ მისი წრფივი დამოკიდებულება X მოთხოვნაზე, სადაც განვიხილავთ ერთ პერიოდთან ლავს (დაგვიანებას):

$$C(t) = \alpha \cdot X(t-1) + A \quad (2.55)$$

აქაც, ისევე როგორც კეინსის მოდელში

$$\alpha \in (0,1), \quad A = (\text{საარსებო მინიმუმი}) \times (\text{მცხოვრებთა რაოდენობა}) \quad (2.56)$$

თუ გავითვალისწინებთ მოთხოვნისა და წინადადების წონასწორობის პირობას, მივიღებთ განტოლებას

$$X(t) = C(t) + I(t) \quad (2.57)$$

ამ ტოლობაში თუ შევიტანთ $C(t)$ -ს (2.55)-დან და $I(t)$ -ს (2.54)-დან მივიღებთ:

$$X(t) = (\alpha + \beta) \cdot X(t-1) - \beta \cdot X(t-2) + A \quad (2.58)$$

ამ განტოლებას სამუელსონ-ჰიკსის მათემატიკური მოდელი ეწოდება.

აქსელერაციის β -კოეფიციენტის მიხედვით, ეკონომიკური განვითარების დინამიკამ შეიძლება მიგვიყვანოს ქრობად რხევებზე ან რხევებზე, მზარდი ამპლიტუდით.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. პომიდორის ფასის დასადგენად $N=1000$ გენერალური ერთობლიობიდან გაკეთდა სავაჭრო წერტილების $n=100$ მოცულობის ამორჩევა და შედგენილ იქნა ვარიაციული მწკრივი

X	70	60	50	40	65	55	45
f	40	10	40	2	3	3	2

იპოვეთ: ამორჩევის ფასის საშუალო მნიშვნელობა, მედიანა, მოდა, დისპერსია, რისკი, ვარიაციის კოეფიციენტი გენერალური ერთობლიობის საშუალო ფასი.

ააგეთ სიხშირეთა განაწილების პოლიგონი, გამოთვალეთ ასიმეტრიის კოეფიციენტი და ექსცესი.

2. გამოთვალეთ A პროექტის რენტაბელობა, რისკი და მოსალოდნელი მოგება, თუ სავაჭრო ინვესტიციაა I , წლიური ნამატია $\Delta\%$, ხოლო პროექტის ჩაფუშვის ალბათობა p :

- ა) $I = \$20 \cdot 10^3$, $\Delta = 30\%$, $p = 0,1$
- ბ) $I = \$30 \cdot 10^3$, $\Delta = 25\%$, $p = 0,02$
- გ) $I = \$40$ ათასი, $\Delta = 20\%$, $p = 0,03$
- დ) $I = \$35$ ათასი, $\Delta = 25\%$, $p = 0,4$
- ე) $I = \$45$ ათასი, $\Delta = 15\%$, $p = 0,001$
- ვ) $I = \$100$ ათასი, $\Delta = 10\%$, $p = 0,002$
- ზ) $I = \$200$ ათასი, $\Delta = 12\%$, $p = 0,001$

3. შეადარეთ ორი ალტერნატიული A და B პროექტი, თუ IA, IB -არიან მოთხოვნილი ინვესტიციების მოცულობები; $\Delta A, \Delta B$ -არიან შესაბამისი წლიური ნამატის პროცენტები; ხოლო PA, PB -არიან შესაბამისი პროექტების ჩაფუშვის ალბათობები:

ა)

A	$IA = \$30$	$\Delta A = 15\%$	$PA = 0.03$
B	$IB = \$40$	$\Delta A = 17\%$	$PB = 0.01$

ბ)

A	$IA = \$50$	$\Delta A = 18\%$	$PA = 0.01$
B	$IB = \$60$	$\Delta A = 16\%$	$PB = 0.01$

გ)

A	$IA = \$60$	$\Delta A = 19\%$	$PA = 0.01$
B	$IB = \$70$	$\Delta A = 17\%$	$PB = 0.07$

4. მიმდინარე წლის დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილის მეშვეობით, შეადგინეთ მომავალი წლის გამოშვების გეგმა დარგების მიხედვით ისე რომ, პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი გაიზარდოს 15%-ით, მეორე დარგისა შემცირდეს 5%-ით, მესამე დარგისა დარჩეს ძველ დონეზე:

ა)

წარმოება	მოხმარება			საბოლოო პროდუქტი	მთლიანი გამოშვება
	1	2	3		
1	20	40	40	50	150
2	40	20	40	60	160
3	80	10	10	55	155

ბ)

	1	2	3	საბოლოო პროდუქტი	მთლიანი გამოშვება
1	100	200	300	100	700
2	200	100	300	200	800
3	300	100	200	300	900

გ)

	1	2	3	საბოლოო პროდუქტი	მთლიანი გამოშვება
1	40	60	200	100	400
2	200	40	60	100	400
3	60	200	40	100	400

5. მიიყვანეთ ამოცანები წრფივი დაპროგრამების მოდელზე და ამოხსენით Mathcad-2001-ის გამოყენებით

ა) ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შედგება სამი პროდუქტისაგან: თივა, სილოსი და კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმს და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში. ერთ ძროხაზე გათვლით დღე-ღამეში ცილებისა და კალციუმის ნორმატიული რაოდენობა 2000გ და 210გ შესაბამისად. ვიტამინების შემცველობა მკაცრად დოზირებულია და შეადგენს 87 მგ დღე-ღამეში.

შეადგინეთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ 1 კგ თივა ღირს \$1.5, სილოსი -\$2, კონცენტრატი - \$6.

პროდუქტი	საკვები ნივთიერებები		
	ცილები	კალციუმი გ/კგ	ვიტამინები მგ/კგ
თივა	$a_{11} = 50$	$a_{21} = 10$	$a_{31} = 2$
სილოსი	$a_{12} = 70$	$a_{22} = 6$	$a_{32} = 3$
კონცენტრატი	$a_{13} = 180$	$a_{23} = 3$	$a_{33} = 1$

ამოხსნა: $1,5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$
 $50x_1 + 70x_2 + 180x_3 \geq 2000$
 $10x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 210$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 87$
 $x_1 > 0 \quad x_2 > 0 \quad x_3 > 0$

პასუხი: $x_1 = 6$ კგ თივა; $x_2 = 25$ კგ სილოსი; $x_3 = 0$ კგ კონცენტრატი.

6. სამი ქვეყნის ვაჭრობის A -სტრუქტურული მატრიცის საშუალებით, დაადგინეთ დაბალანსებული – უდუფიციტო ვაჭრობისათვის აუცილებელი თანაფარდობა ამ ქვეყნების ეროვნულ შემოსავლებში:

ა)
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

ბ)
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

გ)
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{7} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

დ)
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

7. იპოვეთ დოლარის კურსი ნოემბერსა და დეკემბერში თუ წინა თვეების კურსი მოცემულია ცხრილში:

ა)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	2.1	2.0	1.8	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	1.8	1.8	?	?

ბ)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	2.1	2.0	1.8	1.9	1.9	1.8	1.7	1.72	1.8	1.81	?	?

8. გამოთვალეთ კეინსის მოდელის პირობებში X - ეროვნული შემოსავალი, თუ მოხმარებისკენ სწრაფვის ფსიქოლოგიური კოეფიციენტია α , საარსებო მინიმუმია 184 ლარი, მოსახლეობის რაოდენობაა 1.5 მილიონი, ხოლო ინვესტიციების მოცულობაა I :

ა) $\alpha = 0.5$; $I = 200000000$ ლარი

ბ) $\alpha = 0.5$; $I = 1000000000$ ლარი

გ) $\alpha = 0.6$; $I = 1000000000$ ლარი

დ) $\alpha = 0.7$; $I = 1000000000$ ლარი

ე) $\alpha = 0.8$; $I = 1000000000$ ლარი

9. სამუელსონ-ხიკსის მოდელის პირობებში Mathcad-2001-ის გამოყენებით იპოვეთ

β -აქსელერაციის კოეფიციენტის ის მნიშვნელობა: ა) როცა ეროვნული შემოსავლის მნიშვნელობა ასრულებს მიღევად რხევებს; ბ) როცა მისი ამპლიტუდა იზრდება, თუ

9.1. $\alpha = 0.5$; $A = 1,5 \cdot 10^8$;

9.2. $\alpha = 0.6$; $A = 1,5 \cdot 10^8$;

9.3. $\alpha = 0.7$; $A = 1,5 \cdot 10^8$;

9.4. $\alpha = 0.8$; $A = 1,5 \cdot 10^8$;

9.5. $\alpha = 0.9$; $A = 1,5 \cdot 10^8$.

ლიტერატურა

1. Дьяконов В. Mathcad 2001, учебный курс, численные и символьные вычисления, Питер, 2001.
2. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. М., Финансы и статистика, 1997.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М., Наука, 1984.
4. Маленво Э. Математическая экономика, пер. с франц., 2000.
5. Замков Ю. Математическое моделирование в экономике, Москва, 2000.
6. Джонстон Д. Эконометрические методы., М., Мир, 1980.
7. Крушевский А.В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам, М., Мир, 1982.
8. Роде Э. Банки, биржи, валюты современного капитализма, М., Мир, 1986.
9. Самуэльсон П. Экономика, М., Мир, 1964
10. Фишер С. Экономика, М., Мир, 1993.
11. Макконнел К., Брю. Экономика. Принципы, проблемы и политика. Т.1, Т.2, М., Мир, 1996.
12. Корнаи Я. Дефицит, М., Мир, 1990.
13. Маршалл Д. Основные принципы экономики, Т.1, Т.2, Т.3, М., Мир, 1995.
14. Кристофер Доугерти. Введение в эконометрику. Пер. с англ. МГУ им. Ломоносова, М.: ИНФРА-М, 2001.
15. Сигел Э. Практическая бизнес – статистика. Пер. с англ., М., изд. дом „Вильямс“, 2002.

კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მოდელები

3.1. მატერიალური წერტილის ცნება და დინამიკის განტოლებები. n-სხეულის პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ლანჯევანის მათემატიკური მოდელი

განსაზღვრება: სხეულს, რომლის ზომებიც შეიძლება უგულებელვყოთ მოცემული ამოცანის პირობებში, მატერიალური წერტილი ეწოდება. მაგ: პლანეტების ურთიერთის მიმართ მოძრაობის შესასწავლად, ისინი შეიძლება ჩავთვალოთ მატერიალურ წერტილებად, რომელთაც გააჩნიათ შესაბამისი პლანეტის ტოლი მასები- m_i , მაგრამ, თუ გვინტერესებს პლანეტის ბრუნვითი მოძრაობის მოდელირება საკუთარი ღერძის გარშემო, მას უკვე ვერ ჩავთვლით მატერიალურ წერტილად და იძულებული ვართ, სხვა გზები ვეძიოთ შესაბამისი პროცესების მათემატიკური მოდელების შესადგენად.

თანამედროვე ტექნიკის მიღწევები მთლიანად (თვითმფრინავები, რაკეტები, მანქანა-მექანიზმები, მშენებლობების პროექტირება და ა.შ.) ემყარება კლასიკურ-ნიუტონურ მექანიკას.

კლასიკური მექანიკის საფუძველს შეადგენენ ნიუტონის კანონები, რომლებიც ემყარებიან ექსპერიმენტებს და სად-მეტაფიზიკურ აზროვნებას.

განვიხილოთ ნიუტონის კანონები:

ა) ნიუტონის პირველი კანონი:

თუ სხეულზე არ მოქმედებენ სხვა სხეულები, ან მათი მოქმედება კომპენსირებულია, მაშინ სხეული ან უძრავია ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად;

ანუ თუ \vec{F} (ძალების ჯამი)=0, მაშინ \vec{a} (აჩქარება)=0.

შენიშვნა: ეს კანონი ძალაშია, მხოლოდ მაშინ როცა დაკვირვებას ვაწარმოებთ ისეთი ათვლის სისტემების მიმართ, რომლებიც მოძრაობენ აჩქარების გარეშე. ასეთ ათვლის სისტემებს ინერციულ ათვლის სისტემებს უწოდებენ.

ბ) ნიუტონის მეორე კანონი:

აჩქარება, რომლითაც მოძრაობს სხეული პირდაპირპროპორციულია მოძრაობის გამომწვევი ძალისა და უკუპროპორციულია სხეულის მასისა:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{3.1}$$

ამ კანონიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.2}$$

შენიშვნა: ნიუტონის მეორე კანონიც ძალაშია მხოლოდ ინერციული სისტემებისთვის.

გ) ნიუტონის მესამე კანონი:

ორი სხეულის ურთიერთქმედებისას, \vec{F}_{12} -ძალა რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს მეორეზე, სიდიდით ტოლია და მიმართულია \vec{F}_{21} -ძალის საპირისპიროდ, რომლითაც მეორე სხეული მოქმედებს პირველზე. ანუ:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (3.3)$$

შენიშვნა: ეს კანონი ძალაშია, თუ ურთიერთქმედება სორციელდება მყისიერად, მაგრამ რეალურად, სხეულთა შეჯახებისას დეფორმაცია გადაეცემა სასრული სიჩქარით.

კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონია ნიუტონის მეორე კანონი:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F} \quad (3.4)$$

სადაც $\vec{P} = M \cdot \vec{v}$ - იმპულსია, \vec{F} - ძალა. ეს კანონი ძალაშია ინერციული სისტემებისათვის.

თუ სხეულის მასა $M = \text{const}$ მუდმივია, მაშინ (3.4) მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (3.5)$$

დ) მსოფლიო მიზიდულობის კანონი:

პლანეტების ურთიერთქმედების შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს ამ კანონს, რომლის თანახმადაც: ბუნებაში ნებისმიერი M_1 -მასის სხეული მიიზიდავს ნებისმიერ სხვა M_2 -მასის სხეულს ძალით, რომელიც პირდაპირპროპორციულია ამ მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია ამ მასების ცენტრებს შორის მანძილის (r^2) კვადრატისა:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\gamma \cdot M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r}_{12} = -\frac{\gamma \cdot M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \quad (3.6)$$

სადაც $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ ნმ}^2/\text{კმ}^2$ - უნივერსალური გრავიტაციული მუდმივაა, \vec{r}_{12} - ერთეული სიგრძის ვექტორია, რომელიც მიმართულია M_1 -დან M_2 -საკენ.

$$\vec{r}_{12} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

მოცემული გამარტივებული მოდელების პირობებში განვიხილოთ, რიგი საინტერესო ფაქტებისა.

ამოცანა 3.1.1. ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა დედამიწის გარშემო, წრიულ ორბიტაზე.

ვთქვათ თანამგზავრის მოძრაობის მიმართულება ემთხვევა დედამიწის ბრუნვის მიმართულებას. თანამგზავრის ორბიტის r -რადიუსის რა მნიშვნელობისათვის მოეჩვენება დედამიწაზე მყოფ დამკვირვებელს თანამგზავრი უძრავად?

ამოხსნა: წრიული ორბიტისათვის მიზიდულობის ძალა უნდა უდრიდეს ცენტრისკენულ ძალას სიდიდით და მიმართულებით უნდა იყოს მისი საპირისპირო, ე.ი.

$$\frac{\gamma M_d M_t}{r^2} = M_t \omega_t^2 \cdot r \quad (3.7)$$

სადაც M_d -დედამიწის მასაა, M_t -თანამგზავრის მასა, ω_t -თანამგზავრის კუთხური სიხარე. ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r^3 = \frac{\gamma M_d}{\omega_t^2} = \frac{\gamma M_d \cdot T_t^2}{(2\pi)^2} \quad (3.8)$$

სადაც T_t -თანამგზავრის ბრუნვის პერიოდია, $M_d = 5,98 \cdot 10^{27}$ დნ იმისათვის, რომ დედამიწაზე მყოფმა დამკვირვებელმა ვერ შენიშნოს თანამგზავრის ბრუნვა, საჭიროა რომ თანამგზავრის კუთხური სიხარე ω_t იყოს ტოლი დედამიწის ბრუნვის ω_d -კუთხური სიხარისა, ანუ

$$\omega_t = \omega_d \quad (3.9)$$

მაგრამ

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{8,64 \cdot 10^4} \text{წმ}^{-1} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{წმ}^{-1} \quad (3.10)$$

მაშინ

$$r^3 = \frac{(6,67 \cdot 10^{-8}) \cdot (5,98 \cdot 10^{27})}{(7,3 \cdot 10^{-5})^2} \text{სმ}^3 \approx 75 \cdot 10^{27} \text{სმ}^3 \quad (3.11)$$

ანუ

$$r \approx 4,2 \cdot 10^9 \text{სმ}^3 \quad (3.12)$$

რადგან დედამიწის რადიუსი $R \approx 6,38 \cdot 10^8$ სმ. (3.12) მანძილი წარმოადგენს მთვარემდე მანძილის 1/10-ს.

ამოცანა 3.12. **პლანეტების მოძრაობის ტრაექტორიის დადგენა.** პლანეტები ურთიერთქმედებენ მსოფლიო მიზიდულობის კანონით (3.6). იპოვეთ n -პლანეტის მოძრაობის ტრაექტორიები, თუ მოცემულია მათი საწყისი განლაგებანი $\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}$ და საწყისი სიხარეები $\vec{r}'_i(0) = \vec{v}_{i0}$.

შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შესადგენად ვისარგებლოთ დინამიკის განტოლებებით (3.5), სადაც მოძრაობის გამომწვევი \vec{F} -ძალები წარმოადგენენ მსოფლიო მიზიდულობის (3.6) გრავიტაციულ ძალებს:

$$M_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma M_i \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (3.13)$$

სადაც შტრიხი ჯამის სიმბოლოში გამორიცხავს იმ შემთხვევას, როცა $i=j$;

$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, სადაც \vec{r}_{ij} -არის i -წერტილიდან j -საკენ მიმართული ვექტორი.

(3.13)-მოდელის გასამარტივებლად შტრიხიანი ჯამი გავყოთ ორ ნაწილად:

$$M_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma M_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_j}{|r_{ij}|^3} \vec{r}_{ij} - \gamma M_i \cdot \sum_{j=i+1}^n \frac{M_j}{|r_{ij}|^3} \vec{r}_{ij} \quad (3.14)$$

საწყის პირობებს აქვთ სახე:

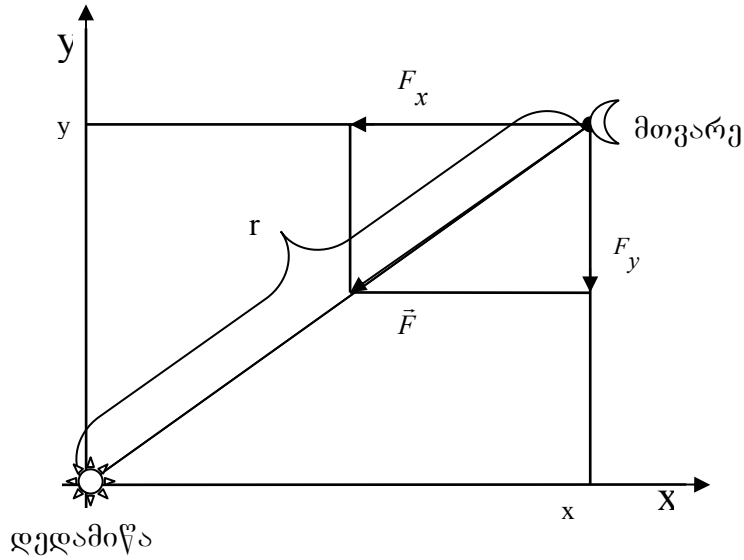
$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0} \quad (3.15)$$

$$\vec{r}_i(0) = \vec{v}_{i0} \quad (3.16)$$

ამ მოდელის რეალიზაცია საჭიროა კომპიუტერზე.

ამოცანა 3.1.3. შეადგინეთ ორი სხეული პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ ერთი სხეულია დედამიწა მეორე სხეულია მთვარე. შეადგინეთ ამ პლანეტების მოძრაობის მათემატიკური მოდელი.

ამოხსნა:



ნახ. 3.1. დედამიწის მოქმედება მთვარეზე

განვიხილოთ მოძრაობა დედამიწის მიმართ ე.ი. ჩავთვალოთ, რომ დედამიწა უძრავია და მთვარე მოძრაობს დედამიწის მიზიდულობის ძალის გავლენით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{F}_x}{|\vec{F}|} = -\frac{x}{|\vec{r}|} \Rightarrow F_x = -|\vec{F}| \cdot \frac{x}{|\vec{r}|} \\ \frac{\vec{F}_y}{|\vec{F}|} = -\frac{y}{|\vec{r}|} \Rightarrow F_y = -|\vec{F}| \cdot \frac{y}{|\vec{r}|} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|F| = \gamma \frac{M_d \cdot M_{mt}}{|\vec{r}|^2}$ მივიღებთ, რომ

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{m_i} \cdot \frac{dv_x}{dt} = -\gamma \frac{M_d \cdot M_{m_i}}{|\vec{r}|^3} \cdot x \\ M_{m_i} \cdot \frac{dv_y}{dt} = -\gamma \frac{M_d \cdot M_{m_i}}{|\vec{r}|^3} \cdot y \\ |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{საწყისი პირობები} \\ x(0) = 0,5 \\ y(0) = 0 \\ v_x(0) = 0 \\ v_y(0) = 1,63 \end{array} \quad (3.18)$$

ამოცანა 3.14. შეადგინეთ n -სხეულის პრობლემის მათემატიკური მოდელი. მოახდინეთ გათვლები ჩვენი მზის სისტემის პლანეტებისათვის.

ამოხსნა: წინა ამოცანიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ i -ური პლანეტის j -ურ პლანეტაზე მოქმედ ძალის x -მდგენელი იქნება: $\frac{-\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (x_i - x_j)$. თუ გავითვალისწინებთ ყველა სხვა პლანეტებთან ურთიერთქმედების ძალებს და შევკრიბავთ, მივიღებთ:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i \frac{dv_{ix}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (x_i - x_j) \right]' \\ M_i \frac{dv_{iy}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (y_i - y_j) \right]' \\ M_i \frac{dv_{iz}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (z_i - z_j) \right]' \\ |\vec{r}_{ij}| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

შტრიხი ჯამის სიმბოლოსთან ნიშნავს, რომ გამოირიცხება ის შემთხვევები, როცა $i=j$ (პლანეტა თავის თავს არ იზიდავს). (3.19) მოდელს უნდა მივუერთოთ შესაბამისი საწყისი პირობები:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(0) = x_{i0}; y_i(0) = y_{i0}; z_i(0) = z_{i0} \\ v_{ix}(0) = v_{ix0}; v_{iy}(0) = v_{iy0}; v_{iz}(0) = v_{iz0} \end{array} \right.$$

ჩავწეროთ განტოლებათა სისტემა ნორმალური სახით:

$$i := 1 \dots 3; \quad j := 1 \dots 3 \quad r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (3.20)$$

$$u_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (3.21)$$

$$m_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \left[-\gamma \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} (x_i - x_j) \right] \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = u_1; \frac{dy_1}{dt} = v_1; \frac{dz_1}{dt} = w_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = u_2; \frac{dy_2}{dt} = v_2; \frac{dz_2}{dt} = w_2; \\ \frac{dx_3}{dt} = u_3; \frac{dy_3}{dt} = v_3; \frac{dz_3}{dt} = w_3; \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{du_1}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} (x_1 - x_2) - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (x_1 - x_3) \\ m_2 \frac{du_2}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r_{1,2}^3} (x_2 - x_1) - \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (x_2 - x_3); \\ m_3 \frac{du_3}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{1,3}^3} (x_3 - x_1) - \gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_2}{r_{1,3}^3} (x_3 - x_2) \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{dv_1}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} (y_1 - y_2) - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (y_1 - y_3) \\ m_2 \frac{dv_2}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r_{1,2}^3} (y_2 - y_1) - \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{2,3}^3} (y_2 - y_3) \\ m_3 \frac{dv_3}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{1,3}^3} (y_3 - y_1) - \gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_2}{r_{2,3}^3} (y_3 - y_2) \\ m_1 \frac{dw_1}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} (z_1 - z_2) - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (z_1 - z_3) \\ m_2 \frac{dw_2}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r_{1,2}^3} (z_2 - z_1) - \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{2,3}^3} (z_2 - z_3) \\ m_3 \frac{dw_3}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{1,3}^3} (z_3 - z_1) - \gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_2}{r_{2,3}^3} (z_3 - z_2) \end{cases} \quad (3.25)$$

ამოცანა 3.1.5. ლანჟევენის მათემატიკური მოდელი. შეადგინეთ ნაწილაკის სითხეში მოძრაობის მათემატიკური მოდელი. სითხეში მოძრაობისას ნაწილაკზე მოქმედებს სიჩქარის პროპორციული ძალა. ამას გარდა ადგილი აქვს შემთხვევით სითბურ შემფოტებებს $m\vec{X}(t)$.

ამოხსნა: ლანჟევენის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{st} + \vec{F}_{fl} \quad (3.26)$$

სადაც \vec{F}_{st} -სტოქსის წინააღმდეგობის ძალაა;

\vec{F}_f -შემთხვევითი ფლუქტუაციებისგან გამოწვეული ძალაა;

$$\vec{F}_{st} = -\gamma m \vec{v} \quad ; \quad \vec{F}_f = m \cdot \vec{X}(t);$$

ასე, რომ ლანჟევენის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$m\dot{v} = -\gamma m v + mX(t) \quad ;$$

თუ მოვახდენთ შეკვეცას, მივიღებთ:

$$\dot{v} = -\gamma \cdot v + X(t). \tag{3.27}$$

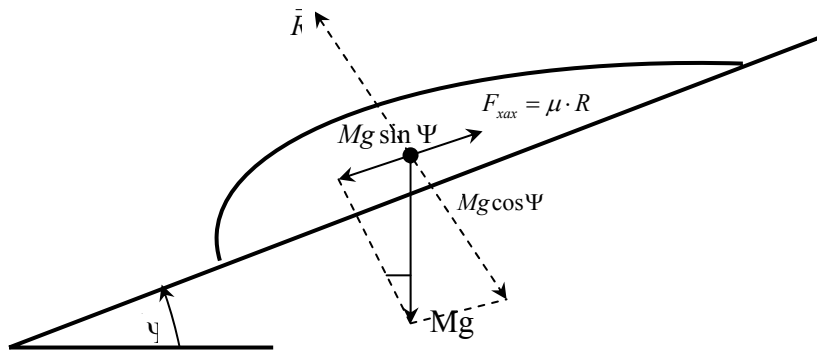
სადაც γ -ერთეული მასისათვის გადაანგარიშებული ხახუნის კოეფიციენტი, $X(t)$ -ფლუქტუაციური ძალის მდგენელია და მაშასადამე მისი საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლია $\langle X(t) \rangle = 0$.

ლანჟევენის (3.27) განტოლების ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:

$$v(t) - v(0)e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t} \cdot \int_0^t e^{\gamma x} \cdot X(x) dx \quad . \tag{3.28}$$

ამოცანა 3.1.6. სელური ნაკადის დინამიკა

მოდელი №1



ნახ. 3.2. სელური ნაკადის დინამიკა

ნიუტონის მეორე კანონს სიმძიმის O-ცენტრისთვის აქვს სახე:

$$M \cdot W_0 = Mg \sin \Psi - \mu \cdot mg \cos \Psi, \tag{3.29}$$

მაშინ

$$W_0 = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi). \tag{3.30}$$

სადაც W_0 -სელური მასის O-სიმძიმის ცენტრის აჩქარებაა, g -თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა, Ψ -ფერდობის კორიზონტისადმი დახრის კუთხეა, μ -ხახუნის კოეფიციენტია სელურ მასასა და ფერდობის უძრავ ნაწილს შორის.

ფორმულა (3.30)-დან გამომდინარეობს, რომ:

- ა) თუ $\mu = tg\Psi$, მაშინ $W=0$ და მაშასადამე მოძრაობა ხდება მუდმივი სიჩქარით, რადგან $W = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = const = v_0$, ამასთან მოძრაობა იქნება წრფის გასწვრივ, რადგანაც

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} = v_0; \quad (3.31)$$

აქედან

$$r = v_0 t + r_0 . \quad (3.32)$$

ბ) თუ $\mu \neq \operatorname{tg} \Psi$, მაშინ მოძრაობა არის თანაბრად აჩქარებული და W-აჩქარება გამოითვლება (3.30) ფორმულით, გამოუთვალეთ სიჩქარე v, ფორმულიდან

$$W = \dot{v} = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi) . \quad (3.33)$$

ცხადია რომ

$$v(t) = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi) \cdot t + v_0 . \quad (3.34)$$

სადაც $v_0 = v(0)$ საწყისი სიჩქარეა.

რადგან $v = \frac{dr}{dt}$, ცხადია, რომ მოძრაობის კანონს ექნება სახე:

$$r(t) = \frac{gt^2}{2} (\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi) + v_0 t + r_0 . \quad (3.35)$$

სადაც v_0 -სიძიმის ცენტრის საწყისი მდებარეობაა.

მოდელი №2

ეხლა ვთქვათ, რომ სიჩქარე იმდენად დიდია რომ გასათვალისწინებელია ჰაერის აეროდინამიკური წინააღმდეგობაც (ე.ი. დავუშვათ $v \geq 100$ კმ/სთ), მაშინ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა იქნება სიჩქარის კვადრატის პროპორციული და მიმართული იქნება მოძრაობის საწინააღმდეგოდ,

$$F_1 = kMg v^2, \quad k = \frac{1}{v_a^2}, \quad v_a \geq 100 \text{ კმ/სთ} . \quad (3.36)$$

ნიუტონის მეორე კანონს ექნება სახე:

$$M \cdot W = Mg \sin \Psi - \mu \cdot Mg \cos \Psi - kMg v^2 . \quad (3.37)$$

მაშინ სიჩქარისთვის გვაქვს განტოლება:

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi - k \cdot v^2) ; \quad (3.39)$$

$$v(0) = v_0 - \text{საწყისი პირობით} . \quad (3.40)$$

ამოვხსნათ (3.39)-(3.40) კოშის ამოცანა(დავალება სტუდენტებს):

ა) **Mathcad-2001 PRO-ს** გამოყენებით, μ -ხახუნის კოეფიციენტისა და k -პროპორციულობის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, $\mu \div 0,01 - 0,05$; $k \div 0,01 - 0,9$
 ბ) მოძრაობის კანონის დასადგენად გვაქვს კოშის ამოცანა:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi - k \cdot v^2); \quad (3.41)$$

$$v(0) = v_0 ; \quad (3.42)$$

$$r(0) = r_0 . \quad (3.43)$$

ჩავწეროთ (3.41) ამოცანა ნორმალური სახით და (3.42)-(3.43) პირობებში და ამოვხსნათ კოშის ამოცანა **Mathcad-2001 PRO-ს** ფარგლებში.

მათ. მოდელი №3

წინა მოდელები იყვნენ მეტისმეტად გამარტივებულები, ეხლა თანდათანობით შევიტანოთ დაზუსტებები. ამ ეტაპზე ჩავთვალოთ რომ μ -ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ფერდობის r -კოორდინატზე სტოქასტიკურად,

$$\mu = \sin^2 f(r); \quad (3.44)$$

სადაც $f(r)$ -ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, r -ის მიხედვით, $r \in [0; l]$, $\mu \in [0; 1]$, $k = 10^{-4}$ კმ/სთ

მაშინ გვაქვს მოძრაობის განტოლება:

$$\ddot{r} = g(\sin \Psi - \sin^2 f(r) \cdot \cos \Psi - k \cdot \dot{r}^2); \quad (3.45)$$

$$\dot{r}(0) = 0; \quad (3.46)$$

$$r(0) = 0. \quad (3.47)$$

გადავწეროთ (3.45)-(3.47) კოშის ამოცანა ნორმალური ფორმით:

$$\dot{r} = v; \quad (3.48)$$

$$\dot{v} = g(\sin \Psi - \sin^2 f(r) - k \cdot v^2); \quad (3.49)$$

$$v(0) = 0; \quad (3.50)$$

$$r(0) = 0. \quad (3.51)$$

(დავალება სტუდენტებს): (3.48)-(3.51) ამოცანა ამოვხსნათ Mathcad-2001 PRO-ს მეშვეობით, ავაგოთ $r(t)$ და $v(t)$ გრაფიკები, აგრეთვე $v(r)$ -გრაფიკი, როცა $r \in [0; l]$

მოდელი №4(დავალება სტუდენტებს)

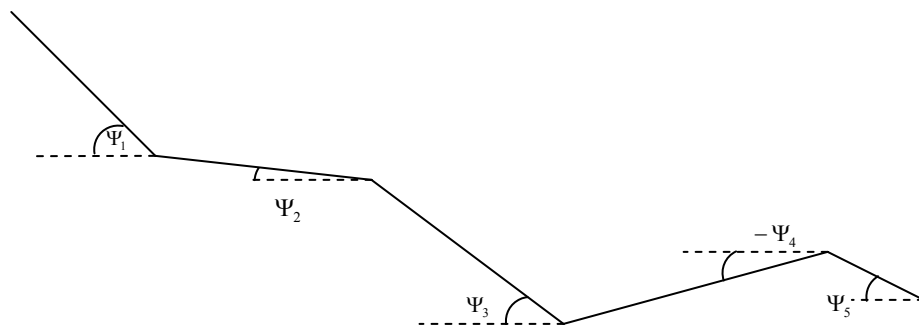
ეხლა, შევეცადოთ გავითვალისწინოთ მასის ცვლილებაც მოძრაობისას. სელური მასა წარიტაცებს გზაზე გრუნტს თუ მისი კინეტიკური ენერგია მეტია E_{0+} -კრიტიკულზე; ხოლო თუ კინეტიკური ენერგია ნაკლებია E_{0+} - კრიტიკულზე, მაშინ ხდება მასის დაღეჭვა ანუ მოძრავი მასის შემცირება.

მოდელი №5(დავალება სტუდენტებს)

ეხლა გავითვალისწინოთ ის ფაქტიც, რომ სელური ნაკადი მიედინება არა ერთიდაიგივე დახრილობის ფერდობზე, არამედ Ψ -დახრილობა იცვლება წერტილის r -კოორდინატის მიხედვით, ე.ი. $\Psi = \Psi(r)$.

მოცემული $\Psi(r)$ -ფუნქციის პირობებში ამოხსენით კოშის ამოცანა მოდელის ბაზაზე.

შესაძლებელია $\Psi(r)$ დამოკიდებულება ვიპოვოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, განზოგადოებული წრფივი რეგრესიის პირობებში.



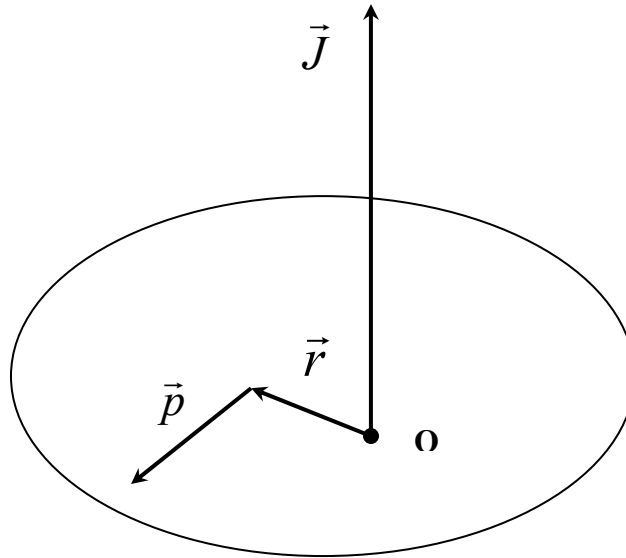
ნახ. 3.3. ცვლადი დახრილობის მთის ფერდობის სქემა

3.2 მყარი სხეულის დინამიკის მათემატიკური მოდელი.

განსაზღვრება: მატერიალური i - წერტილის იმპულსის მომენტი O წერტილის მიმართ, ეწოდება ვექტორულ ნამრავლს:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times M \cdot \vec{v} . \quad (3.21)$$

სადაც p -იმპულსია (ნახ.3.4.)



ნახ 3.4. მატერიალური i -წერტილის \vec{J} მომენტი O -წერტილის მიმართ

განსაზღვრება: მატერიალურ i - წერტილზე მოქმედი \vec{F} ძალის ბრუნვითი მომენტი ეწოდება ვექტორულ \vec{N} ნამრავლს:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} , \quad (3.22)$$

სადაც \vec{F} -ძალაა.

(3.21)-ის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} ; \quad (3.23)$$

რადგან

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times M \cdot \vec{v} = 0 . \quad (3.24)$$

და ამასთან ერთად ადგილი აქვს ნიუტონის მეორე კანონს

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} . \quad (3.25)$$

(3.23)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} . \quad (3.26)$$

ე.ი. იმპულსის \vec{J} მომენტის ცვლილების სიჩქარე ბრუნვის მომენტის ტოლია.

ესლა განვიხილოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მომენტის იმპულსის ცვლილების სიჩქარე.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის იმპულსის ჯამური (ნაკრები) მომენტი \vec{J} -გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{J} = \sum_{n=1}^N M_n \cdot \vec{r}_n \times \vec{v}_n . \quad (3.27)$$

ცხადია, რომ \vec{J} -ს სიდიდე დამოკიდებულია ათვლის O-წერტილის არჩევაზე. თუ $R_{s.c}$ -ით ავლნიშნავთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის რადიუს – ვექტორს, არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ, მივიღებთ:

$$\vec{J} = \sum_{n=1}^N M_n (\vec{r}_n - \vec{R}_{s.c}) \times \vec{v}_n + \sum_{n=1}^N M_n \vec{R}_{s.c} \times \vec{v}_n = \vec{J}_{s.c} + \vec{R}_{s.c} \times \vec{P} ; \quad (3.28)$$

სადაც $\vec{J}_{s.c}$ -წერტილთა სისტემის იმპულსის ნაკრები მომენტია სიმძიმის ცენტრის მიმართ, $\vec{P} = \sum_{n=1}^N M_n \vec{v}_n$ -სისტემის სრული იმპულსია. $\vec{R}_{s.c} \times \vec{P}$ -სიმძიმის ცენტრის იმპულსის ნაკრები მომენტია ათვლის O-სისტემის მიმართ.

თუ, ათვლის სისტემად ავირჩევთ სიმძიმის ცენტრს, მაშინ

$$\frac{d\vec{J}_{s.c}}{dt} = \vec{N}_{gare} . \quad (3.29)$$

შეგა ძალების მომენტები ერთმანეთს აწონასწორებენ, ამიტომ (3.29)-ის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს გარე ძალების ბრუნვის მომენტების ჯამი (ნაკრები ბრუნვის მომენტი).

სიმძიმის ცენტრის საპოვნელად ვიყენებთ ფორმულას:

$$\vec{R}_{s.c} = \frac{\sum M_n \cdot \vec{r}_n}{\sum M_n} . \quad (3.30)$$

n-ური მატერიალური წერტილის წირითი სიჩქარე ათვლის O-წერტილის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n . \quad (3.31)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\vec{J} = \sum M_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n = \sum M_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) . \quad (3.32)$$

როგორც ვიცით ვექტორული ანალიზიდან:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) ; \quad (3.33)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{r}_n \quad \vec{B} \rightarrow \vec{\omega} \quad \vec{C} \rightarrow \vec{r}_n ;$$

მაშინ

$$\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = \vec{\omega} \cdot r_n^2 - \vec{r}_n \cdot (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}) ; \quad (3.34)$$

თუ შევიტანთ (3.34)-ს (3.32)-ში მივიღებთ:

$$\vec{J} = \sum M_n [\vec{\omega} \cdot r_n^2 - \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega})] . \quad (3.35)$$

განვიხილოთ, ამ ვექტორის კომპონენტი x-ღერძზე

$$J_x = \omega_x \sum M_n r_n^2 - \sum M_n x_n (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}) = \omega_x \sum M_n r_n^2 - \omega_x \sum M_n x_n^2 - \omega_y \cdot \sum M_n x_n y_n - \omega_z \sum M_n x_n z_n . \quad (3.36)$$

ასეთივე გამოსახულებები გვქვია J_y და J_z -თვისაც.

ჩვენ ვხედავთ, რომ (3.36) შეიცავს ინერციულ კოეფიციენტებს, რომლებიც დამოკიდებული არიან მასების განაწილებაზე კოორდინატთა ღერძის მიმართ:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \sum M_n (r_n^2 - x_n^2) \\ I_{xy} &= -\sum M_n x_n y_n \\ I_{xz} &= -\sum M_n x_n z_n \end{aligned} \right\} . \quad (3.37)$$

ანალოგიურად ჩაიწერება J_y და J_z -ის შესაბამისი კოეფიციენტები:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ J_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ J_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \end{aligned} \right\} . \quad (3.38)$$

ანუ

$$J_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik} \omega_k .$$

მყარი სხეული შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ერთმანეთის მიმართ უძრავ წერტილთა ერთობლიობა.

ინერციულ სისტემაში მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე (3.26)

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N} . \quad (3.39)$$

ინერციული I_{ij} -კოეფიციენტები მარტივად გამოითვლებიან იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომლებიც მოთავსებულია მბრუნავ სხეულში, რომელთანაც დაკავშირებულია არაინერციული სისტემა. როგორც ვიცით, ინერციული სისტემიდან მბრუნავ სისტემაში ვექტორის გადასაყვანად გამოიყენება ფორმულა:

$$\left(\frac{d\vec{J}}{dt} \right)_{in} = \frac{d\vec{J}}{dt} + \omega \times \vec{J} . \quad (3.40)$$

სადაც ω -არის მბრუნავი კოორდინატთა სისტემის კუთხური სიჩქარე. მაშინ, მოძრაობის (3.39) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} + \omega \times \vec{J} = \vec{N} . \quad (3.41)$$

სადაც \vec{J} -არის გამოთვლილი მბრუნავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ვთქვათ, კოორდინატთა ღეძები მიმართულია მთავარი ღერძების მიმართ, მაშინ (3.38) თანადობები მიიღებენ მარტივ სახეს:

$$J_1 = I_{11} \omega_1; \quad J_2 = I_{22} \omega_2; \quad J_3 = I_{33} \omega_3 . \quad (3.42)$$

და (3.41) გვაძლევს ვიღერის განტოლებებს მყარი სხეულისათვის.

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_{33} - I_{22}) \omega_2 \omega_3 &= N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_{11} - I_{33}) \omega_1 \omega_3 &= N_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_{22} - I_{11}) \omega_1 \omega_2 &= N_3 \end{aligned} \right\} . \quad (3.43)$$

ესეა, განვიხილოთ სხეულის(მატერიალური წერტილის) მოძრაობა არაინერციული სისტემების მიმართ.

ინერციულ სისტემაში ნიუტონის მეორე კანონი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$m \frac{dv_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} . \quad (3.44)$$

სადაც U -მოქმედი გარე ძალების პოტენციალია, v_0 -მატერიალური წერტილის სიჩქარეა აბსოლუტური (უძრავი) კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, გვაქვს k' -კოორდინატთა სისტემა, რომელიც k_0 -ის მიმართ მოძრაობს $\vec{v}(t)$ -სიჩქარით (გადატანითი მოძრაობა). სიჩქარეები \vec{v}_0 და \vec{v}' ამ კოორდინატთა k_0 და k' სისტემების მიმართ დაკავშირებული არიან ტოლობით: $\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{v}(t)$.

თუ, შევიტანთ სიჩქარის v_0 -მნიშვნელობას (3.44)-ში, მივიღებთ:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W}(t) . \quad (3.46)$$

სადაც $\vec{W}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ -არის k' -კოორდინატთა სისტემის გადატანითი მოძრაობის

სიჩქარეა. შემოვიღოთ ახალი k კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავეც ემთხვევა k' -სისტემის სათავეს, მაგრამ k -სისტემა ბრუნავს k' -ს მიმართ $\Omega(t)$ -კუთხური სიჩქარით, ხოლო k_0 -ის მიმართ k -სისტემა ასრულებს როგორც გადატანით ასევე ბრუნვით მოძრაობასაც.

k' -სისტემის მიმართ მოძრაობის სიჩქარე \vec{v}' შედგება, \vec{v} -სიჩქარისაგან k -ს მიმართ და $[\Omega, \vec{r}]$ ბრუნვის სიჩქარისაგან k -სისტემასთან ერთად:

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\Omega, \vec{r}] . \quad (3.47)$$

თუ შევიტანთ (3.47)-ს (3.46)-ში, მივიღებთ:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W}(t) - m \frac{d}{dt} [\Omega, \vec{r}] . \quad (3.48)$$

მოვახდინოთ გამარტივება

$$\frac{d}{dt} [\Omega, \vec{r}] = -[\dot{\Omega}, \vec{r}] - [\Omega, \dot{\vec{r}}] = [\vec{r}, \dot{\Omega}] - [\Omega, 2\vec{v} + [[\Omega, \vec{r}]]] = [\vec{r}, \dot{\Omega}] + 2[\vec{v}, \Omega] + [\Omega[\vec{r}, \Omega]] ; \quad (3.49)$$

მაშინ (3.48) მიიღებს სახეს:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W}(t) + m[\vec{r}, \dot{\Omega}] + 2m[\vec{v}, \Omega] + m[\Omega[\vec{r}, \Omega]] . \quad (3.50)$$

$m[\vec{r}, \dot{\Omega}]$ -არის ძალა, რომელიც დაკავშირებულია ბრუნვის არათანაბარ მოძრაობასთან,

$2m[\vec{v}, \Omega]$ -კორიოლისის ძალაა,

$m[\Omega[\vec{r}, \Omega]]$ - არის ცენტრისკენული ძალა.

3.3. საფრენი აპარატის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი

საფრენი აპარატები: რაკეტა, ფრთიანი რაკეტა, კოსმოსური ხომალდი, კოსმოსური თვითმფრინავი და ა.შ. დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან მოძრაობის ერთნაირი კანონზომიერებით, რომლებიც განისაზღვრებიან, წვეის ტრაექტორიისა და სიჩქარის ცვლილებით.

რადგან წვევის ძალა დამოკიდებულია საწვავის წვაზე, რაკეტის მასა იცვლება დროის მიხედვით. ატმოსფეროში მოძრავ საფრენ აპარატზე მოქმედი აეროდინამიკური დატვირთვები, დამოკიდებულია მოძრაობის სიჩქარესა და ატმოსფეროს სიმკვრივეზე. საჭიროა, გათვალისწინებულ იქნას სიმკვრივის ცვლილება 0-დან 150კმ სიმაღლეზე, რათა გათვლილ იქნას აპარატზე ზღვრული დატვირთვების სიდიდეები. გამოვიყენოთ საფრენი აპარატის მოძრაობის განტოლებები. ჩავთვალოთ, რომ დროის t - მომენტში საფრენი აპარატი წარმოადგენს მყარ სხეულს, რომელზედაც მოქმედებენ:

ა) გარე ძალები $\sum_i \vec{F}_i$, ბ) ძრავის წვევის \vec{P} -ძალა, გ) კორიოლისის ძალა \vec{F}_k

რაკეტის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$m\vec{W}_c = \sum_i \vec{F}_i + \vec{P} + \vec{F}_k + m\vec{W}_{cr} + 2m[\vec{\omega}, \vec{v}_{cr}]. \quad (3.51)$$

\vec{W}_{cr} -არის სიმძიმის ცენტრის აჩქარება რაკეტის კორპუსის მიმართ, \vec{v}_{cr} -სიმძიმის ცენტრის სიჩქარეა რაკეტის კორპუსის მიმართ. სიმძიმის ცენტრის გადაადგილების სიჩქარე და აჩქარება კორპუსის მიმართ, მცირეა და ამიტომ ისინი შეიძლება უგულებელვყოთ, მაშინ მივიღებთ სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლებას:

$$m\vec{W}_c = \sum_i \vec{F}_i + \vec{P} + \vec{F}_k. \quad (3.52)$$

ეხლა განვიხილოთ რაკეტის მოძრაობა სიმძიმის ცენტრის მიმართ

რაკეტის იმპულსის მომენტი (კინეტიკური მომენტი) სიმძიმის ცენტრის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{J}_c = I \cdot \vec{\omega}; \quad (3.53)$$

სადაც I -ინერციის ტენზორია (შეესაბამება მატრიცა I_{ij}), $\vec{\omega}$ -რაკეტის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა.

მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე (3.41):

$$\frac{d\vec{J}_c}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{J}_c] = \vec{N}_c. \quad (3.54)$$

სადაც $\frac{d\vec{J}_c}{dt}$ -კინეტიკური მომენტის წარმოებულია მბრუნავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც ბრუნავს რაკეტასთან ერთად, \vec{N}_c -ნაკრები მომენტია ყველა გარე ძალების, კორიოლისის ძალის და წვევის ძალისა.

$$\vec{N}_c = \sum_i \vec{N}_{ci} + \vec{N}_{cp} + \vec{N}_{ck}. \quad (3.55)$$

დროის მოცემულ მომენტში $I = \text{const}$, ამიტომ გვაქვს განტოლება:

$$\frac{d\vec{J}_c}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (3.56)$$

მაშინ, (3.54)-დან მივიღებთ, რომ

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + [\vec{\omega}, I\vec{\omega}] = \vec{N}_c. \quad (3.57)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\vec{N}_\Sigma = \vec{N}_c - [\vec{\omega}, I\vec{\omega}], \quad (3.58)$$

მაშინ, (3.57) გადაიწერება სახით:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I^{-1} \cdot \vec{N}_\Sigma \quad (3.59)$$

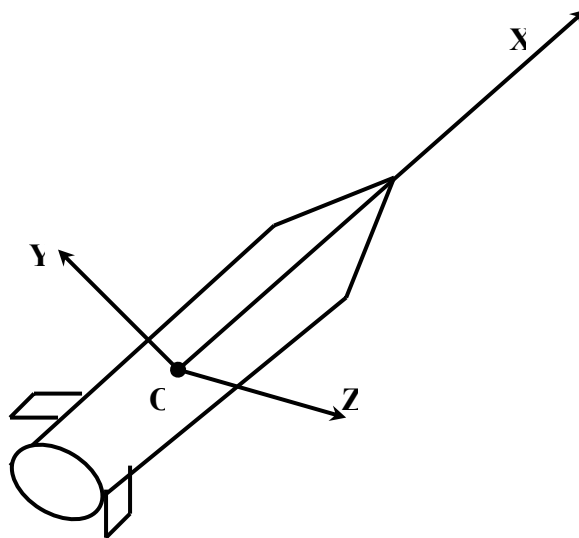
ეხლა განვიხილოთ ის ძალები და მომენტები, რომლებიც მოქმედებენ საფრენ აპარატზე ატმოსფეროში ფრენისას.

ატმოსფეროში ფრენისას, საფრენ აპარატზე მოქმედებენ ძალები და მომენტები, რომლებიც გამოწვეული არიან ჰაერის გარსდენისაგან. წნევის ცენტრში მოქმედ $\vec{F}_{sr} = \sum F_i$ ძალას, **სრულ აეროდინამიკურ ძალას** ეძახიან. რომელსაც, როგორც წესი გადაიტანენ ხოლმე სიმძიმის ცენტრში და უმატებენ შესაბამის მომენტს. ნაკრებ მომენტს სიმძიმის ცენტრის მიმართ \vec{N}_{sr} -ს **სრულ აეროდინამიკურ მომენტს** უწოდებენ.

სრული აეროდინამიკური ძალის მდგენელების კოეფიციენტებს და სრული აეროდინამიკური მომენტის მდგენელების კოეფიციენტებს პოულობენ აეროდინამიკურ მილში შებერვის ექსპერიმენტებისა და რიცხვითი გათვლების მეშვეობით. ეს კოეფიციენტები შეიძლება დაზუსტდეს საფრენი გამოცდის მეშვეობითაც.

სრულ აეროდინამიკურ ძალას შლიან საფრენ აპარატთან **თანმხვედრ კოორდინატა სისტემის მიმართ, ან სიჩქარის ღერძების მიმართ**, ხოლო **სრულ აეროდინამიკურ მომენტს – მხოლოდ თანმხვედრი კოორდინატა სისტემის მიმართ.**

თანმხვედრი კოორდინატა სისტემის სათავე – მოთავსებულია სიმძიმის ცენტრში (კორპუსის), Ox-ღერძი მიმართულია საფრენი აპარატის ღერძის გასწვრივ მოძრაობის მიმართულებით(ნახ 3.5.), Oy-ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით საფრენი აპარატის მიმართ, ხოლო Oz-ღერძი მიმართულია ფრენის მიმართულების განივად, ისე რომ Oxyz-სისტემა იყოს მარჯვენა სისტემა.



ნახ. 3.5. თანმხვედრი კოორდინატა სისტემა

სიჩქარითი სისტემის სათავე მოთავსებულია საფრენი აპარატის სიმძიმის ცენტრში, Ox-ღერძის მიმართულია ფრენის სიჩქარის მიმართულებით, ამწვევი ძალის Oy-ღერძი მიმართულია აპარატის სიმეტრიის სიბრტყეში, ხოლო გვერდითი Oz-ღერძი მიმართულია ისე რომ Oxyz-იყოს მარჯვენა სისტემა.

$$\vec{F}_{sr} = (X_{S.t.sin.}, Y_{ams.dz.}, Z_{gv.dz.}); \quad (3.60)$$

$X_{S.t.sin.}$ - შუბლური წინააღმდეგობის ძალაა;

$Y_{ams.dz.}$ - ამწვევი ძალაა;

$Z_{gv.dz.}$ - გვერდითი ძალა.

$$X_{S.t.sin.} = C_x \cdot q \cdot S, \quad Y_{ams.dz.} = C_y \cdot q \cdot S, \quad Z_{gv.dz.} = C_z \cdot q \cdot S. \quad (3.61)$$

სადაც C_x, C_y, C_z - წინააღმდეგობის, ამწვევი ძალის და გვერდითი ძალის უგანზომილებო აეროდინამიკური კოეფიციენტებია;

$q = \frac{\rho v^2}{2}$ - სიჩქარის ნაკადის შემხვედრი ჰაერის ნაკადისთვის, ρ - ჰაერის სიმკვრივეა,

v - გარსდენის სიჩქარეა, S - მახასიათებელი ფართობი (ფრთის ფართობია კოსმოსური თვითმფრინავისთვის ან მიღელია - რაკეტის ყველაზე დიდი კვეთის ფართობი).

აეროდინამიკური კოეფიციენტები დამოკიდებული არიან საფრენი აპარატის ფორმაზე, მის ორიენტაციაზე გარსდენის \vec{v} - სიჩქარის მიმართ, მასის $M = \frac{v}{a}$

რიცხვზე და რეინოლდსის $Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$ რიცხვზე. a - ბგერის სიჩქარეა, ν - ჰაერის სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტი, l - მახასიათებელი სიგრძე (თვითმფრინავისათვის - ფრთის საშუალო ქორდაა, რაკეტისათვის - მისი სიგრძეა).

ამწვევი ძალის აეროდინამიკური C_y - კოეფიციენტი თითქმის წრფივადაა დამოკიდებული იერიშის α - კუთხეზე.

$$C_y = C_y^\alpha \cdot \alpha; \quad (3.62)$$

სადაც $C_y^\alpha = \frac{\partial C_y}{\partial \alpha}$.

ბგერამდელი ფრენის სიჩქარეებისათვის ($M < 1$), აეროდინამიკური წარმოებული C_y^α - როგორც წესი, უფრო მეტი სიდიდისაა ვიდრე ჰიპერბგერითი ($M > 8$) სიჩქარეებისათვის. ფრენის სიმაღლე თითქმის არ მოქმედებს C_y^α - ს სიდიდეზე.

აეროდინამიკური ხარისხის $k = \frac{C_y}{C_x}$ სიდიდე დამოკიდებულია M - მასის რიცხვსა და იერიშის α - კუთხის სიდიდეზე. მაგალითად, ჰიპერბგერითი აეროდინამიკური ხარისხი, თვითმფრინავის ტიპის საფრენი აპარატისათვის $k \approx 1,9$, ხოლო ბგერამდელი აეროდინამიკური ხარისხის ასეთი აპარატისათვის $k \approx 4,5$.

შუბლურ C_x - კოეფიციენტსა და C_y - ამწვევი ძალის კოეფიციენტს შორის დამოკიდებულება დაახლოებით პარაბოლურია:

$$C_x \approx C_{x0} + A_y \cdot C_y^2 \quad (3.63)$$

სადაც C_{x0} - შუბლური წინააღმდეგობის კოეფიციენტის ტოლია, როცა ამწვევი ძალის კოეფიციენტი $C_y = 0$, A_y - რაღაც კოეფიციენტი (ექსპერიმენტული)

გვერდითი ძალის C_z - თითქმის წრფივადაა დამოკიდებული დაცურების β - კუთხეზე:

$$C_z = C_z^\beta \cdot \beta. \quad (3.64)$$

სადაც

$$C_z^\beta = \frac{\partial C_z}{\partial \beta}. \quad (3.65)$$

სრული აეროდინამიკური \vec{N}_{sr} -მომენტი როგორც წესი განიხილება თანხვედრ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

$$\vec{N}_{sr} = (N_x, N_y, N_z). \quad (3.66)$$

ამ მდგენელებს, შესაბამისად უწოდებენ **კრენის N_x -მომენტს, რისკანიის - N_y მომენტს და ტანგაჟის - N_z მომენტს**. ისინი გამოითვლება ფორმულებით:

$$N_x = m_x \cdot q \cdot S \cdot l, \quad N_y = m_y \cdot q \cdot S \cdot l, \quad N_z = m_z \cdot q \cdot S \cdot l, \quad (3.67)$$

სადაც m_x, m_y, m_z -არიან სრული აეროდინამიკური მომენტის უგანზომილებო კოეფიციენტები.

კრენისა და რისკანიის მომენტის კოეფიციენტები ძირითადად დამოკიდებული არიან დაცურების β -კუთხესა და მახის M-რიცხვზე, ამასთან

$$m_x = m_x^\beta \cdot \beta; \quad m_y = m_y^\beta \cdot \beta; \quad (3.68)$$

სადაც

$$m_x^\beta = \frac{\partial m_x}{\partial \beta}; \quad m_y^\beta = \frac{\partial m_y}{\partial \beta}. \quad (3.69)$$

ტანგაჟის მომენტის კოეფიციენტი დამოკიდებულია იერიშის α -კუთხესა და მახის M-რიცხვზე.

3.4. განზოგადოებული კოორდინატები და ლაგრანჟის მათემატიკური მოდელი მატერიალურ წერტილთა დინამიკის აღსაწერად. ჰამილტონის მოდელი. პუასონის ფრჩხილები

ძირითადი ცნებები: სივრცეში მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება \vec{r} რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც შემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს $\vec{r}(x, y, z)$. ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$ სიჩქარე და $\vec{W} = \dot{\vec{r}}(t)$ აჩქარება. თუ მოცემული გვაქვს n-მატერიალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვიჭირდება n-რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე, 3n-კოორდინატი.

განსაზღვრება: იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას – მისი **თავისუფლების ხარისხის რიცხვი ეწოდება**.

n-მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სისტემის თავისუფლების ხარისხი 3n-ის ტოლია. ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი რომ იყვნენ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები.

განსაზღვრება: ნებისმიერ q_1, q_2, \dots, q_s -პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ-სისტემის განლაგებას, S-თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის **განზოგადოებული კოორდინატები** ეწოდებათ, ხოლო წარმოებულებს

\dot{q}_i -**განზოგადოებული სიჩქარეები**. სისტემის მექანიკური განლაგების ცოდნა არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება მას დროის სხვა მომენტში. ექსპერიმენტებით დადგინდა, რომ მექანიკური სისტემის მდგომარეობის

საპოვნელად დროის მოცემულ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ საწყისი $q_i(0)$ -განლაგება და საწყისი

$\dot{q}_i(0)$ -სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი პარამეტრის ცოდნა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ \dot{q}_i -აჩქარებებიც დროის ნებისმიერ მომენტში, რაც დგინდება მათემატიკური აპარატის მეშვეობით.

განსაზღვრება: განტოლებებს, რომლებიც აჩქარებას აკავშირებენ კოორდინატებთან და სიჩქარეებთან – მოძრაობის განტოლებები ეწოდებათ.

$q(t)$ -პარამეტრების მიმართ, მოძრაობის განტოლება – დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს.

ჰამილტონის პრინციპი: ნებისმიერი მექანიკური სისტემა ხასიათდება ფუნქციით $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$, ისე რომ, თუ დროის t_1 და t_2 მომენტებში სისტემა იმყოფებოდა შესაბამისად $q^{(1)}$ და $q^{(2)}$ მდგომარეობაში, მაშინ (t_1, t_2) -შუალედში სისტემა მოძრაობს ისე, რომ ინტეგრალი

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad \text{იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას.}$$

L-ფუნქციას, ლაგრანჟის ფუნქციას უწოდებენ.

ჰამილტონის პრინციპის მეშვეობით გამოვიყვანოთ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთი ტოლია, ასე რომ საპოვნია მხოლოდ ერთი $q(t)$ ფუნქცია, რომელიც ექსტრემალურ მნიშვნელობას ანიჭებს ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან.

ვთქვათ, $q = q(t)$ ჩვენი საძებარი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი სხვა ფუნქცია, სადაც $\sigma q(t)$ -მცირე ნაზრდია,

$$q(t) + \sigma q(t); \quad (3.70)$$

დაარღვევს ექსტრემუმის არსებობის პირობებს. რადგან t_1 და t_2 მომენტში ყველა განსახილველმა ფუნქციამ უნდა მიიღოს შესაბამისად $q^{(1)}$ და $q^{(2)}$ მნიშვნელობები, მივიღებთ რომ

$$\sigma q(t_1) = \sigma q(t_2) = 0. \quad (3.71)$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალის ცვლილება, როცა $q(t)$ იცვლება $q(t) + \sigma q(t)$ -ფუნქციით:

$$\sigma S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \sigma q, \dot{q} + \sigma \dot{q}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (3.72)$$

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა, რომ პირველი ვარიაცია იყოს ნულის ტოლი, ე.ი.

$$\sigma S = 0. \quad (3.73)$$

თუ (3.72) სხვაობაში მოვახდენთ ვარირებას, მივიღებთ:

$$\sigma S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \sigma q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \sigma \dot{q} \right) dt = 0. \quad (3.74)$$

აქ უგულებელყოფილია უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები ანუ $\sigma q^2; \sigma \dot{q}^2; \sigma q^3; \sigma \dot{q}^3; \dots$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sigma \dot{q} = \frac{d}{dt} \sigma q. \quad (3.75)$$

მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \sigma q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d}{dt} \sigma q \right) dt = 0. \quad (3.76)$$

მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\sigma S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \sigma q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \sigma q dt = 0. \quad (3.77)$$

(3.71)-პირობის გამო პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. ინტეგრალი კი ნული უნდა იყოს σq -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, ეს კი შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (3.78)$$

ამ განტოლებას წერენ სახით:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3.79)$$

და უწოდებენ **ლაგრანჟის განტოლებას**.

შენიშვნა: ა) თუ გვაქვს S-თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა, მაშინ მიიღება ლაგრანჟის მოდელი ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = \overline{1, S}. \quad (3.80)$$

ბ) თუ ჩვენ გვაქვს S-წერტილთა სისტემა, მაშინ ლაგრანჟიანს აქვს სახე:

$$L = \sum_{i=1}^S \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_S). \quad (3.81)$$

სადაც U-არის სისტემის წერტილების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია. თუ, გავითვალისწინებთ იმას, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $q_i = r_i$ და $\dot{q}_i = \dot{r}_i = v_i$, მაშინ (3.80) გადაიწერება ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}. \quad (3.82)$$

ხოლო (3.81)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ ცნობილ ნიუტონის მეორე კანონს:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r_i}. \quad (3.83)$$

სადაც $- \frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i$ -არის i-ურ წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი.

გ) თუ გავიხსენებთ ნიუტონის მეორე კანონს

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F}. \quad (3.84)$$

მისი შედარება (3.80) ლაგრანჟის განტოლებასთან, გვაძლევს

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{და} \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

ანუ $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ -განზოგადოებული იმპულსებია, ხოლო $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ -განზოგადოებული ძალებია.

დ) ლაგრანჟის მათემატიკური მოდელი მატერიალურ წერტილთა სისტემას შეისწავლის განზოგადოებული კოორდინატებისა q_i და განზოგადოებული \dot{q}_i -სიჩქარეების მიხედვით.

არსებობს სხვა მიდგომაც, როცა განტოლებები ჩაიწერება q_i განზოგადოებული კოორდინატებისა და P_i -იმპულსების მიხედვით. ამ მიდგომას გვაძლევს ჰამილტონის მათემატიკური მოდელი.

ჰამილტონის ფუნქცია $H(p,q)$ -წარმოადგენს მექანიკური სისტემის ენერგიას, რომელიც ჩაწერილია (p,q) ცვლადებში:

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L; \quad (3.85)$$

მართლაც

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (3.86)$$

ჰამილტონის განტოლების გამოსაყვანად, ვიპოვოთ ლაგრანჟიანის სრული დიფერენციალი:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_i p_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i. \quad (3.87)$$

$\sum_i p_i dq_i$ -ნიუტონის მეორე კანონიდან, $\sum_i p_i d\dot{q}_i$ -განზოგადოებული იმპულსებია.

გარდავქმნათ მეორე შესაკრები:

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - \sum_i \dot{q}_i dp_i. \quad (3.88)$$

მაშინ (3.87)-დან მივიღებთ, რომ

$$dH = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum_i p_{ii} dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i; \quad (3.89)$$

ანუ (3.85)-ის ძალით:

$$dH = -\sum_i p_{ii} dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i. \quad (3.90)$$

სრული დიფერენციალის განმარტების ძალით (3.90)-დან მივიღებთ ჰამილტონის განტოლებებს:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.91)$$

ე) პუასონის ფრჩხილები. ვთქვათ $f(p,q,t)$ -რადაც ფუნქციაა. შევადგინოთ მისი სრული წარმოებული:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right); \quad (3.92)$$

თუ \dot{q}_i და \dot{P}_i ცვლადებს შევცვლით ჰამილტონის (3.91) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H \cdot f\}; \quad (3.93)$$

სადაც

$$\{H \cdot f\} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \right); \quad (3.94)$$

(3.94)-გამოსახულებას პუასონის ფრჩხილებს უწოდებენ.

თუ, f -ფუნქცია არ არის ცხადად დამოკიდებული t -დროზე მაშინ

$$\{H \cdot f\} = 0. \quad (3.95)$$

ნებისმიერი ორი, f და g ფუნქციების პუასონის ფრჩხილები განიმარტება ანალოგიურად:

$$\{f \cdot g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial P_i} \right). \quad (3.96)$$

პუასონის ფრჩხილებს აქვთ შემდეგი თვისებები(დავალება სტუდენტებს-დაამტკიცეთ):

$$1. \{f \cdot g\} = -\{g \cdot f\}; \quad (3.97)$$

$$2. \{f \cdot c\} = 0; \quad (3.98)$$

$$3. \{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 \cdot g\} + \{f_2 \cdot g\}; \quad (3.99)$$

$$4. \{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 \cdot g\} + f_2 \{f_1 \cdot g\}; \quad (3.100)$$

$$5. \frac{\partial}{\partial t} \{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}; \quad (3.101)$$

$$6. \{f \cdot q_i\} = \frac{\partial f}{\partial P_i}; \quad (3.102)$$

$$7. \{f \cdot P_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}; \quad (3.103)$$

$$8. \{q_i q_k\} = 0, \{P_i P_k\} = 0, \{P_i q_k\} = \sigma_{ik}; \quad (3.104)$$

$$9. \text{იაკობის იგივეობა} \\ \{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0. \quad (3.105)$$

P.S. პუასონის ფრჩხილების ცნება M-მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ წრფივ ვექტორულ ველს, აქცევს ლის ალგებრად.

განსაზღვრება: ლის ალგებრა ეწოდება წრფივ სივრცეს, მასზედ განსაზღვრული ორადწრფივი ირიბსიმეტრიული ოპერაციით $L \times L \rightarrow L$, რომელიც აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას.

P.S. ლის ალგებრის ცნება ფართოდ გამოიყენება დინამიკური სისტემების თეორიაში.

3.5. გიროსკოპული სისტემების მათემატიკური მოდელირება

განსაზღვრება: გიროსკოპი ეწოდება მყარ სხეულს, რომელიც იმყოფება ბრუნვით მოძრაობაში.

ეს იმას ნიშნავს, რომ რეალურად მბრუნავი სხეულის დეფორმაციები იმდენად მცირეა, რომ ვერ ახდენს საგრძნობ გავლენას სხეულის ბრუნვით მოძრაობაზე.

რა თქმა უნდა, ეს დაშვება საშუალებას იძლევა, შევადგინოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი (ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით), მაშინ როცა დეფორმაციების გათვალისწინება მოგვცემდა განაწილებულპარამეტრებიან მათემატიკურ მოდელს (კერძო წარმოებულებიან განტოლებებს).

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის მათემატიკური მოდელი ჩვენ უკვე განვიხილეთ. ეხლა, შემოგვყავს შესაბამისი ცნებები და უნდა აღვნიშნოთ მათი ფართო გამოყენებანი ნავიგაციაში: თვითმფრინავების, რაკეტებისა და საზღვაო სომალდების სამართავად.

გიროსკოპის მაგალითს წარმოადგენს: ჩიკორი (ბზრიალა), ბადრო, მფრინავი ჭურვი, ბუმერანგი, ჰაერში მყოფი ფეხბურთის ბურთი და ა.შ. გიროსკოპების თეორია, კონსტრუირება და მათი დამზადების ტექნოლოგია მეტად მნიშვნელოვანი სამხედრო დარგებია და არსებობს ბევრი საინტერესო სახელმძღვანელო ამ მიმართულებით. თუმცა, ამ დარგში უფრო მეტად ჩაღრმავება არ შედის ჩვენი ინტერესების სფეროში.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორია დედამიწის ცენტრის მზის გარშემო ორბიტაზე მოძრაობის სიჩქარე? (ჩათვალეთ, რომ ორბიტა წრიულია, ორბიტის რადიუსი $r = 1,49 \cdot 10^{23}$ სმ, დედამიწის მასა $M_d = 5,98 \cdot 10^{27}$ გ, მზის მასა $M_m = 1,99 \cdot 10^{33}$ გ
პასუხი: $3,0 \cdot 10^6$ სმ/წმ

2. შეადგინეთ მთვარის დედამიწის გარშემო მოძრაობის მათემატიკური მოდელი და კომპიუტერი მეშვეობით შისწავლეთ მოძრაობის ტრაექტორია, თუ საწყის მომენტში დედამიწა იმყოფება კოორდინატთა სათავეში და წარმოადგენს ათვლის სისტემას, ხოლო მთვარე იმყოფება $(x(0); y(0))$ წერტილში და მისი სიჩქარეა $v_x(0), v_y(0)$: (მთვარის მასა $M_m = 7,34 \cdot 10^{25}$ გ), (მზის მოქმედება უგულვებელყავით)

ა) $x(0) = 0,5$ $y(0) = 0$

$$v_x(0) = 0 \quad v_y(0) = 1,63$$

ბ) $x(0) = 2,0$ $y(0) = 0$

$$v_x(0) = 0 \quad v_y(0) = 3,0$$

გ) $x(0) = 3,0$ $y(0) = 0$

$$v_x(0) = 1 \quad v_y(0) = 1$$

3. შეადგინეთ მზის, მთვარისა და დედამიწის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი და კომპიუტერი მეშვეობით შეისწავლეთ მოძრაობის ტრაექტორიები მზესთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში.

4. შეისწავლეთ ნეპტუნის, იუპიტერის, ურანის, ვენერას, მერკურის, მარსის, დედამიწის, სატურნის, პლუტონის მოძრაობა მზის გარშემო ცალ-ცალკე, ხოლო შემდეგ გაითვალისწინეთ მათი ურთიერთგავლენა და შეეცადეთ ააგოთ მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ამ პლანეტების განლაგების შესახებ დროის საწყის მომენტში, ისარგებლეთ ტქვენს მიერ ინტერნეტით მოპოვებული ინფორმაციით, ასევე მოიპოვეთ მათი საშუალო საწყისი სიჩქარეების შესახებ ინფორმაცია.

5. ა) იპოვეთ ბირთვის პრეცესია, თუ მასზედ არ მოქმედებენ მახრუნებელი \vec{N} -მომენტები.

ამოხსნა: რადგან ბირთვი ერთგვაროვანია $I_1 = I_2 = I_3$, ამიტომ თუ $\vec{N} = 0$, მაშინ ეილერის (3.43) განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ $\omega = const$ ე.ი. ან უძრავია ან ბრუნავს მუდმივი სიჩქარით.

ბ) იპოვეთ სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა: რადგან ბზრიალა (ჩიკორი) სიმეტრიულია $I_1 = I_2 \neq I_3$, თუ არ მოქმედებენ მახრუნებელი მომენტები \vec{N} , მაშინ ეილერის (3.43) განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \text{სადაც} \quad \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \cdot \omega_3.$$

ამ სისტემის ამონახსნს აქვს სახე:
$$\begin{cases} \omega_1 = A \cos \Omega t \\ \omega_2 = A \sin \Omega t \\ \omega_3 = \text{const} \end{cases} \quad (*)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ბზრიალა ბრუნავს ჩიკორის ღერძის გარშემო ω_3 -კუთხური სიჩქარით და Ω -კუთხური სიჩქარით ბრუნავს თვით ღერძი A-რადიუსის წრეწირზე.

P.S. დედამიწისათვის $I_1 \neq I_3$, რადგან დედამიწა არ წარმოადგენს ზუსტ სფეროს. სიმეტრიული ბზრიალას (*) ტიპის რხევები აღმოჩენილი იქნა დედამიწისათვის ექსპერიმენტულად, რასაც განედის ვარიაციას უწოდებენ.

6. იპოვეთ რაკეტის მოძრაობის კანონი (სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა), თუ რაკეტა გაისროლეს ჰორიზონტისადმი α -კუთხით მისი მასაა m_0 , წვევის ძალაა P, წინააღმდეგობის ძალა (ჰაერის) არის $F_{t \sin} = kv^2$, კორიოლისის ძალა

უგულვებელყავით. ($\alpha = 90$); ($m_0 \frac{dv}{dt} = -mg + P - kv^2$)-მოდელი.

ა) $m_0 = 300$ კგ; $g \approx 9,8$ მ/წმ²; $k = 0,02$; $v_0 = 340$ მ/წმ.

ბ) $m_0 = 300$ კგ; $g \approx 9,8$ მ/წმ²; $k = 0,02$; $v_0 = 400$ მ/წმ.

გ) $m_0 = 300$ კგ; $g \approx 9,8$ მ/წმ²; $k = 0,02$; $v_0 = 800$ მ/წმ.

7. შეადგინეთ მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, თუ რაკეტას ისვრიან $\alpha \neq 90$ კუთხით. გამოთვალეთ ტრაექტორია, დაცემის დრო და ადგილი.

8. შეადგინეთ რაკეტის კორპუსის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი სიმძიმის ცენტრის მიმართ და გამოთვალეთ ω -კუთხური სიჩქარე (3.59) მოდელიდან გამომდინარე. მონაცემები აირჩიეთ თვითონ საღი აზრიდან გამომდინარე (დასაბუთებულად) და მოიძიეთ შესაბამისი ინფორმაცია ინტერნეტში.

ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1973
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, т. I, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва 1974
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т. 1, т. 2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. пер. с нем. Москва, Мир, 1974
14. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем, изд. АН СССР 1963
15. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. Гостехиздат, Москва 1956
16. Павлов В.А. Авиационные гироскопические приборы. Оборонизд. М 1954
17. Биценко К. Граммель Р. Техническая динамика, т. I, Гостехиздат, Москва 1952

ნაწილი II
განაწილებულპარამეტრიანი მათემატიკური მოდელები

თავი 4
მრავალნაწილაკიანი სისტემების მათემატიკური მოდელირება
კლასიკურ მექანიკაში

4.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა შედგება მეტად მრავალრიცხოვანი ნაწილაკებისაგან, თითოეული ნაწილაკისათვის ლაგრანჟის განტოლების ჩაწერა, ან მოძრაობის განტოლების რომელიმე სხვა ფორმით ჩაწერა, არ გვაძლევს საიმედო შედეგს, რადგან კომპიუტერის ოპერატიულ მესსიერებაც შემოფარგლულია, ამასთან შეუძლებელია საწყისი პირობების ზუსტი ცოდნაც.

ასეთ შემთხვევაში, მაგალითად, თუ საქმე გვაქვს გაზთან, სითხესთან, ან დეფორმირებად სხეულთან, რომლებიც უამრავი მოლეკულებისაგან შედგება, ჩვენ ვერ გამოვიყენებთ პირდაპირ, იმ მოდულებს, რომლებიც განვიხილეთ წინა თავში. ამიტომ, უნდა ვეძიოთ სხვა მახასიათებლები და განმსაზღვრელი პარამეტრები, რომლებიც შესასწავლ გარემოს არა მოლეკულურ დონეზე, არამედ უფრო გლობალური – საშუალო მახასიათებლების დონეზე წარმოადგენენ, ან განვიხილოთ სისტემის ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლები.

სისტემის, ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლებით მოდელირებას ახდენენ სტატისტიკურ მექანიკასა და კვანტურ ფიზიკაში.

განვიხილოთ, ჰამილტონის განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.1)$$

n-მატერიალური წერტილისათვის, როდესაც n-იმდენად დიდია, რომ წერტილთა საწყისი განლაგებანი $q_i(0)$ და მათი საწყისი იმპულსები $p_i(0)$ - განისაზღვრებიან მხოლოდ გარკვეული ალბათობით, გარკვეულ საზღვრებში მაგალითად, 1см^3 გაზი ნორმალურ პირობებში შეიცავს დაახლოებით 10^{23} მოლეკულას, ამიტომ ცხადია, რომ შეუძლებელია მათი ზუსტი განლაგებისა და იმპულსების დადგენა.

თუ $f_N(\vec{p}, \vec{q}, \vec{t}) = C$ -არის (4.1) სისტემის პირველი ინტეგრალი ანუ თუ ის შეესაბამება, მოცემული სისტემის რეალურ მოძრაობას, მაშინ სისტემის მოძრაობისას ის რჩება მუდმივი, ე.ი.

$$\frac{df_N}{dt} = 0. \quad (4.2)$$

მაგრამ, თუ გავშლით (4.2) ტოლობას სრული წარმოებულის ფორმულით, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left(\frac{\partial f_N}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (4.3)$$

ამ განტოლებაში, თუ შევიტანთ (4.1) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left(\frac{\partial f_N}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (4.4)$$

ამ განტოლებას **ლიუვილის** განტოლებას უწოდებენ. თუ გამოვიყენებთ პუასონის ფრჩხილების ცნებას, ლიუვილის (4.4) განტოლება გადაიწერება სახით:

$$\frac{df_N}{dt} + \{H \cdot f\} = 0. \quad (4.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ სისტემის სტატისტიკურ განხილვას და f_N -ფუნქციას განვიხილავთ, როგორც შესაძლო საწყისი მონაცემების განაწილების სიმკვრივეს, მაშინ (4.5) ლიუვილის მოდელი, სწორედ ის მოდელია, რომელიც საფუძვლად უდევს მთელ სტატისტიკურ მექანიკას.

(4.5)-მოდელი აღწერს, $(p,q) \rightarrow (p+dp, q+dq)$ ფაზურ სივრცეში, სისტემის ყოფნის f_N -აღბათობის სიმკვრივის განაწილებას დროის მიხედვით თუ არ ხდება სხვადასხვა ნაწილაკების ურთიერთშეჯახება. ხოლო, თუ გვინდა გავითვალისწინოთ სისტემაში შემავალი მატერიალური წერტილების შეჯახებებიც, მაშინ უნდა მივმართოთ ბოლცმანის მათემატიკურ მოდელს.

4.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ გაზი, რომელიც შეიცავს N -ერთნაირ მოლეკულას, რომლებიც მოთავსებული არიან V მოცულობის ჭურჭელში. დაუშვათ, რომ მოლეკულები წარმოადგენენ იდეალურად დრეკად ბურთულებს. შეჯახებისას, მოლეკულების სრული ენერჯია და იმპულსი ინახება (არ იცვლება). გაზის სიმკვრივე იმდენად მცირეა, რომ ორი მოლეკულის შეჯახებაზე, მეზობელი მოლეკულები არ მოქმედებენ. ამასთან, ჩვენ შემოვიფარგლებით თითქმის იდეალური გაზით.

ავლნიშნოთ $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ -იმ მოლეკულების რაოდენობა ($\leq N$) რომელთა სიჩქარეების კომპონენტებიც მოთავსებული არიან v_x და $v_x + dv_x$, v_y და $v_y + dv_y$, v_z და $v_z + dv_z$ -ს შორის. $f_N(\vec{v})$ - ფუნქციას უწოდებენ სიჩქარეების განაწილების ფუნქციას. განვიხილოთ ერთგვაროვანი და იზოტროპიული გაზი და უგულებელყოთ გარეშე მოქმედი ძალები. ასეთ შემთხვევაში, განაწილების ფუნქცია არაა დამოკიდებული სივრცით კოორდინატებზე და დამოკიდებულია, მხოლოდ სიჩქარის სიდიდეზე, ე.ი. $f_N(\vec{v}) = f_N(v^2)$. განაწილების ფუნქციის ნორმირების პირობას აქვს სახე:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(\vec{v})d\vec{v} = N. \quad (4.6)$$

ცხადია, რომ უსასრულო სიჩქარეები არ არსებობს, ამიტომ f_N -ფუნქცია უნდა ქრებოდეს $\pm\infty$ -საკენ (\vec{v})-ს მისწრაფებისას. გაზი იმყოფება მოლეკულური ქაოსის მდგომარეობაში. განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევას, როცა ეჯახება ორი მოლეკულა. (ე.ი. სამი მოლეკულის ან მეტის ერთდროული დაჯახება არ განიხილება). ვთქვათ, დაჯახებამდე მოლეკულებს ჰქონდათ \vec{v} და \vec{v}_1 სიჩქარეები.

დაჯახების შემდეგ, მათი სიჩქარეებია \vec{v}' და \vec{v}'_1 . ვგულისხმობთ, რომ მაშინ ერთ-ერთი უახლოვდება მეორეს $\vec{g} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ ფარდობითი სიჩქარით და სცილდება მას $\vec{g}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'$ სიჩქარით. დაჯახების მიმართულება ავლნიშნოთ ერთეულოვანი \vec{n} -ვექტორით, მიმართულია \vec{g} და \vec{g}' -ს შორის კუთხის ბისექტრისის გასწვრივ. მაშინ, $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g})$; $|\vec{g}| = |\vec{g}'|$; (4.7)

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}). \quad (4.8)$$

თუ, გამოვთვლით (4.7) და (4.8) გარდაქმნის იაკობიანს მოცემული \vec{n} და \vec{g} ვექტორებისათვის, მივიღებთ რომ

$$d\vec{v}d\vec{v}_1 = d\vec{v}'d\vec{v}'_1. \quad (4.9)$$

ასე, რომ სიჩქარეების ფაზურ სივრცეში ელემენტარული მოცულობა დაჯახების მიმართ ინვარიანტულია.

განვიხილოთ ნაწილაკ-სამიზნის ზედაპირის კონცენტრული სფერო რომლის რადიუსიცაა a და ავადოთ შეჯახების ცილინდრი, რომლის ფუძეც მდებარეობს სფეროს ზედაპირზე და ცენტრების ხაზზე. ცილინდრის მსახველი პარალელურია პირველი ნაწილაკის სიჩქარისა დაჯახებამდე. ვთქვათ, დახრილი ცილინდრის ფუძის ფართობია $a^2 \sin \Psi d\Psi d\Phi$, ხოლო მსახველის სიგრძეა $l \sin \Psi \times g$. დროის ერთეულის განმავლობაში სამიზნეს დაეჯახებიან ყველა ნაწილაკები, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$ შუალედში, ხოლო ცენტრები ვარდებიან ამ ცილინდრში. ასეთი ნაწილაკების რაოდენობაა $f_N(\vec{v}) d\vec{v}$ გამრავლებული ცილინდრის მოცულობაზე:

$$f_N(\vec{v}) d\vec{v} \cdot (g \sin \Psi) a^2 \cos \Psi d\Psi d\Phi = f_N(\vec{v}) d\vec{v} \cdot gI(\theta, g) d\Omega; \quad (4.10)$$

სადაც

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\Phi; \quad (4.11)$$

θ -გაბნევის კუთხეა,

$\pi \cdot I(\theta, g)$ - გაბნევის კვეთია, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში უდრის $\frac{\pi a^2}{4}$

ასეთი გაბნევის ცენტრების რაოდენობა, ანუ იმ მოლეკულების რაოდენობა, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$ შუალედში, უდრის $f_N(\vec{v}) d\vec{v}$. ამიტომ, აღნიშნული ტიპის დაჯახებათა რაოდენობა დროის ერთეულში იქნება:

$$A = f_N(\vec{v}) f_N(\vec{v}_1) d\vec{v} d\vec{v}_1 \cdot gI(\theta, g) d\Omega. \quad (4.12)$$

არსებობენ, აგრეთვე მოცემული დაჯახებების შექცეული დაჯახებებიც, რომელთა რაოდენობა:

$$B = f_N(\vec{v}') f_N(\vec{v}'_1) d\vec{v}' d\vec{v}'_1 \cdot gI(\theta, g) d\Omega. \quad (4.13)$$

განაწილების ფუნქციის სრული ცვლილება $\frac{df_N}{dt} d\vec{v}$ იქნება B-A სხვაობის

ინტეგრალი \vec{v}_1, \vec{v}'_1 და კუთხეების მიხედვით:

$$\frac{df_N}{dt} = \int (f'_N f'_{1N} - f_N f_{1N}) gI(\theta, g) d\vec{v}_1 d\Omega. \quad (4.14)$$

$$\text{სადაც } f_N = f_N(\vec{v}), f_{1N} = f_N(\vec{v}_1), f'_N = f_N(\vec{v}'), f'_{1N} = f_N(\vec{v}'_1). \quad (4.15)$$

(4.14) განტოლებას **ბოლცმანის** განტოლებას უწოდებენ.

სტატისტიკური მექანიკის ძირითადი ამოცანაა, გამოსახოს მაკროსკოპული სიდიდეები: T-ტემპერატურა, p-წნევა, ρ -სიმკვრივე და ა.შ. განაწილების აღბათობათა f_N სიმკვრივის მეშვეობით ფაზურ სივრცეში. შესაბამისი ტექნიკა მოითხოვს **განზოგადოებული ფუნქციების** ცოდნას, რაც საკმაოდ რთულია, ამიტომ უწყვეტ ტანთა მექანიკის მოდელების შესადგენად ჩვენ გამოვიყენებთ ტენზორულ აღრიცხვას და შენახვის კანონებს.

4.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ტენზორული აღგებრა არის ვექტორული აღრიცხვის განზოგადოება მრუდწირული კოორდინატების შემთხვევაში. ტენზორული აღნიშვნები საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ უწყვეტ ტანთა მათემატიკური მოდელები.

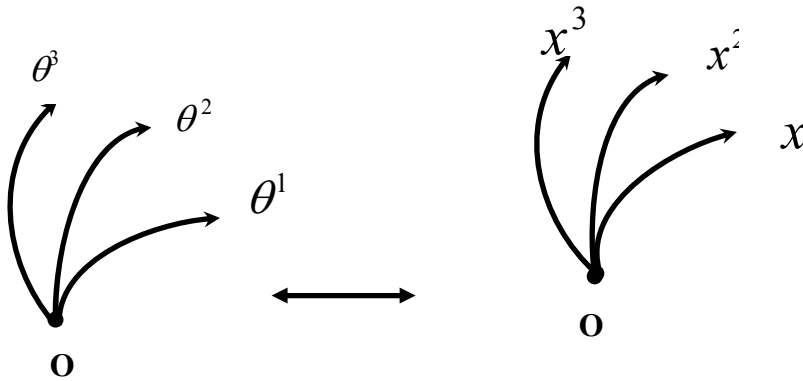
ტენზორულ აღგებრაში \vec{a} - ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს:

$$a_i \text{ და } a^i; \quad (4.16)$$

თუ ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ – მაშინ მათ უწოდებენ \vec{a} -ვექტორის

a^i -კონტრავარიანტულ კომპონენტებს, ხოლო თუ, ინდექსები ჩაწერილია ქვემოთ, მაშინ მათ უწოდებენ \vec{a} -ვექტორის a_i -კოვარიანტულ კომპონენტებს.

ტენზორის, კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების განსასაზღვრად, განვიხილოთ ერთი θ^i -მრუდწირული კოორდინატთა სისტემიდან მეორე x^i -კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები.



ნახ. 4.1. θ^i და x^i მრუდწირული კოორდინატთა სისტემებია

ვთქვათ, გარდაქმნის ფორმულებს აქვს სახე:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

ეს საში ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში:

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (4.18)$$

ჩავთვალოთ, რომ (4.18) გარდაქმნები არიან, ურთიერთცალსახა და ორმხრივ უწყვეტნი (ჰომეომორფიზმი), P-წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (4.19)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (4.18)

ფორმულები შეიძლება შევაბრუნოთ P-წერტილის მიდამოში, ანუ ამოვხსნათ θ^i -კოორდინატების მიმართ,

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (4.20)$$

(4.18) ფორმულების ბაზაზე, დავადგინოთ თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები.

$P \in \mathbb{R}^3$ წერტილის მიდამოში, (4.18)-დან მივიღებთ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (4.21)$$

სიმბოლური აღნიშვნების მეშვეობით (4.21) გადაიწერება მოკლედ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (4.22)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ, ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ j -ინდექსით ხდება შეჯამება $j = \overline{1,3}$.

განსაზღვრება: იმ j -ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება – **ყრუ ინდექსი** ეწოდება.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ყრუ ინდექსი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი სხვა ინდექსით, რომელიც არ გვხვდება მოცემულ ჩანაწერში.

განსაზღვრება: იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში არ მეორდება **თავისუფალი ინდექსი** ეწოდება.

(4.22)-ჩანაწერში i -არის თავისუფალი ინდექსი, j -ყრუ ინდექსია.

განსაზღვრება: ტენზორის კომპონენტების თავისუფალ ინდექსთა რიცხვს – ტენზორის **რანგი** ეწოდება.

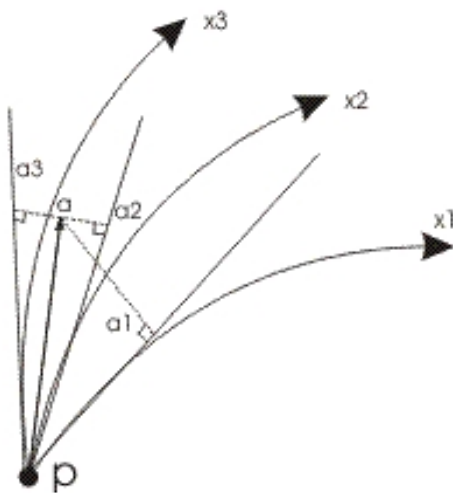
მაგალითად: a_i და a^i - პირველი რანგის ტენზორის (რანგის) კომპონენტებია;

a_{ij}, a^{ij}, a_i^j -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებია $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ -სკალარული ფუნქცია, ანუ, ნულ-რანგის ტენზორია.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ a^i -სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების (4.22) დიფერენციალები, ანუ, თუ ძველ სისტემაში a^j და ახალ სისტემაში a'^i -კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (4.23)$$

იმისათვის, რომ გავიგოთ კონტრავარიანტული კომპონენტების არსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 4.2) P-წერტილში, სადაც მოდებულია \vec{a} -ვექტორი.



ნახ. 4.2. \vec{a} -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავაგლოთ მრუდწირული x^i -ღერძების მხებები P-წერტილში. მაშინ \vec{a} -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ ამ ვექტორის

ორთოგონალურ პროექციებს a^i , შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებული არიან P-წერტილში.

მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტებიც გარდაიქმნებიან (4.23) ფორმულების ანალოგიურად.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ σ^{ij} -სიდიდეებს ეწოდებათ **მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები**, თუ კოორდინატთა შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^m} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^n} \sigma^{mn} . \quad (4.24)$$

ამ ფორმულებში აინშტაინის შეთანხმების თანახმად, იგულისხმება ორმაგი შეჯამება m და n ყრუ ინდექსებით, ხოლო i და j – თავისუფალი ინდექსებია.

უფრო მაღალი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

ეხლა განვიხილოთ ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება φ -ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ,

მოცემული გვაქვს $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ - სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} . \quad (4.25)$$

ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} . \quad (4.26)$$

(4.26) – ფორმულაში იგულისხმება შეჯამება j-ყრუ ინდექსით (ეს არის რთული ფუნქციის წარმოებულის), i-თავისუფალი ინდექსია.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ a_i - სიდიდეებს ეწოდებათ **პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტები**, თუ კოორდინატთა

მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ძველ კოორდინატთა სისტემაში a_j და

ახალ კოორდინატთა სისტემაში a'_i დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან

სკალარული ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის (4.26) ფორმულების მსგავსად:

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j . \quad (4.27)$$

ამ ფორმულებში j-ყრუ ინდექსია (ხდება შეჯამება ამ ინდექსით), i-თავისუფალი ინდექსია.

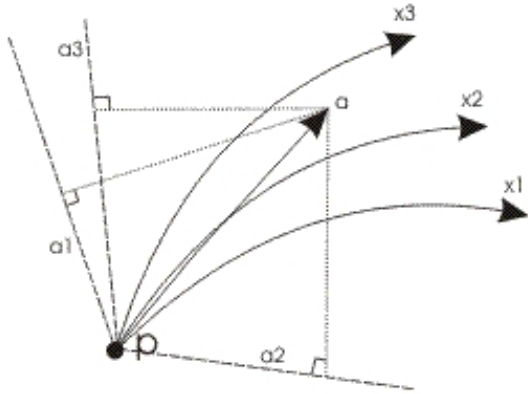
მეორე რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების განსაზღვრისთვის გამოიყენება (4.27) ფორმულების მსგავსი გარდაქმნები.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრული σ_{ij} სიდიდეებს ეწოდებათ **მეორე რანგის კოვარიანტული კომპონენტები**, თუ კოორდინატთა გარდაქმნისას ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \sigma_{mn} . \quad (4.28)$$

ამ ფორმულებში m და n ყრუ ინდექსებია (ორმაგი ჯამია), ხოლო i და j – თავისუფალი ინდექსებია.

პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული აზრის ასახვად, განვიხილოთ ნახ. 4.3 პირველი რანგის ტენზორი, ანუ, \vec{a} -ვექტორი მოდებულია P-წერტილში.



ნახ. 4.3. \vec{a} -ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

\vec{a} -ვექტორის a_i - კოვარიანტული კომპონენტა წარმოადგენს \vec{a} -ვექტორის ორთაგონალურ პროექციას x^2 და x^3 ღერძებზე მოჭიმული მინიმალური ზედაპირის P-წერტილში აღმართულ დადებით ნორმალურ (პერპენდიკულარ) მიმართულებაზე,

$$\hat{e}_1 = \frac{\hat{e}^2 \times \hat{e}^3}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}; \quad (4.29)$$

აქ $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$ - P-წერტილში განსაზღვრული კონტრავარიანტული ბაზისია Ox^1, x^2, x^3 მრუდწირული კოორდინატთა სისტემისათვის, რომელთაც აქვს ღერძებისადმი მხები მიმართულება, $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ - შესაბამისი კოვარიანტული ბაზისია, სადაც

$$\hat{e}_2 = \frac{\hat{e}^3 \times \hat{e}^1}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\hat{e}^1 \times \hat{e}^2}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}. \quad (4.30)$$

ხოლო $[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]$ - კონტრავარიანტული ბაზისის ვექტორების შერეული ნამრავლია.

მაშასადამე, საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ \vec{a} -ვექტორის, a_i -კოვარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ \vec{a} -ვექტორის ორთოგონალურ პროექციებს, შესაბამისი

\hat{e}_i -კოვარიანტული ბაზისის ვექტორის მიმართულებაზე.

P.S. თუ გამოვიყენებთ (4.28) გარდაქმნის ფორმულების ანალოგიურ ფორმულებს, შეგვიძლია შემოვიყვანოთ უფრო მაღალი რანგის ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტების ცნებაც.

ზოგჯერ, განიხილავენ ტენზორის შერეულ კომპონენტებს, ე.ი. ისეთ კომპონენტებს, რომლებსაც ზოგიერთი ინდექსი აქვთ კოვარიანტული და ზოგიც კონტრავარიანტული.

განვიხილოთ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრული $T_{.nq}^{m..}$ -სიდიდეებს ეწოდებათ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$T_{.sp}^{r..} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} \cdot T_{.nq}^{m..} \quad (4.31)$$

შენიშვნა: ამ კომპონენტებში s და p –კოვარიანტული ინდექსებია, r- კონტრავარიანტული. მარჯვენა მხარეში, იგულისხმება შეჯამება სამი ინდექსით (სამმაგი ჯამი) m, n და q.

4.4. სიმბოლური აღნიშვნები

მათემატიკური მოდელების კომპაქტურად ჩასაწერად იყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს (ხშირად განიხილავენ დეკარტულ ტენზორებს).

განვიხილოთ ველის თეორიის ოპერატორები (როგორც დეკარტული ტენზორები, სადაც არ ანსხვავებენ კონტრავარიანტულ და კოვარიანტულ კომპონენტებს):

სკალარული ველის გრადიენტი

$$\text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) \equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) \quad (4.32)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად: $\varphi_{,i}$ (4.33)

მაშასადამე,

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}; \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}; \quad \varphi_{,3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \quad (4.34)$$

ანალოგიურად, \vec{v} -ვექტორული ველის დივერგენცია,

$$\text{div}\vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) \quad (4.35)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ასე: $v^i_{,i}$ (4.36)

აქ i-ყრუ ინდექსია (იგულისხმება შეჯამება i-ინდექსით).

ვექტორული \vec{v} -ველის როტორი, როგორც ვიციტ გამოითვლება დეტერმინანტით:

$$\text{rot}\vec{v} \equiv \begin{vmatrix} \hat{e}^1 & \hat{e}^2 & \hat{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} \quad (4.37)$$

ამ ოპერატორის ჩასაწერად სიმბოლური ფორმით, უნდა განვიხილოთ **ლევი-ჩივიტას**

ფსევდოტენზორი, რომლის კოვარიანტული \mathcal{E}_{ijk} -კომპონენტებიც განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \\ -1, \\ 0, \end{cases} \quad \text{შესაბამისად,} \quad (4.38)$$

თუ, (i,j,k) ღუწი ჩასმაა (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;

თუ, (i,j,k) კენტი ჩასმაა (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;

თუ, (i,j,k)-ში, რომელიმე ორი ან სამივე ინდექსი ერთმანეთის ტოლია.

მაგალითად: $\varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = -1$, $\varepsilon_{122} = 0$ და ა.შ.

ლევნი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის ε_{ijk} -კომპონენტები, საშუალებას გვაძლევენ კომპაქტურად ჩავწეროთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. მაგალითად, თუ

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}; \quad (4.39)$$

მაშინ

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (4.40)$$

ასევე, სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი,

$$\lambda = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (4.41)$$

მაშასადამე, ლევნი-ჩივიტას ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების მეშვეობით, მოკლედ ჩაიწერება ვექტორული ნამრავლი, შერეული ნამრავლი და ასევე დეტერმინანტიც.

რადგან ვექტორული \vec{v} -ველის როტორი წარმოადგენს ნაბლა

\vec{v} -ოპერატორისა და \vec{v} -ვექტორის, ვექტორულ ნამრავლს

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} \quad (4.42)$$

სიმბოლურად, ველის როტორის კომპონენტები ჩაიწერებიან ფორმულით:

$$(\text{rot} \vec{v})_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}. \quad (4.43)$$

განვიხილოთ ესლა, ლაპლასის Δ -ოპერატორი:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}. \quad (4.44)$$

$$\text{სიმბოლურად, ჩაიწერება ფორმით} \quad \Delta \varphi = \varphi_{,ii}. \quad (4.45)$$

აქ i-ყრუ (მუნჯი) ინდექსია ე.ი. იგულისხმება შეჯამება.

სიმბოლურ აღნიშვნებში გაწარმოების ოპერატორი აღინიშნება მძიმეთი, ყველა ინდექსი რომელიც მძიმეს მოყვება, წარმოადგენს იმ ცვლადის ინდექსს, რომლითაც ხდება გაწარმოება. მაგალითად:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = T_{,ij} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} = \sigma_{ij,mn}. \quad (4.46)$$

4.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორები.

განსაზღვრება: ორი ტენზორის გარე ნამრავლი ეწოდება ისეთ ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც წარმოადგენენ თანამამრავლი ტენზორების კომპონენტების ყველა შესაძლო ნამრავლს. მაგალითად:

$$a_i \cdot b_j = T_{ij} \quad v_i \cdot T_{jk} = T_{ijk}.$$

P.S. გარე ნამრავლის რანგი წარმოადგენს თანამამრავლთა რანგების ჯამს.

$$\text{rang}T_{ij} = \text{ranga}_i + \text{rang}b_j = 1 + 1 = 2$$

განსაზღვრება: ტენზორის ნახვევის ოპერაცია, ეწოდება ისეთ ოპერაციას, როცა ერთმანეთს უტოლდება რომელიმე ორი ინდექსი და ხდება შეჯამება ამ ინდექსით.

მაგალითად: ε_{ijk} -ტენზორის კომპონენტებზე ნახვევის ოპერაცია მოგვცემს:

$$\varepsilon_{iik} \vee \varepsilon_{iji} \vee \varepsilon_{ijj}.$$

P.S. ნახვევის ოპერაციის შედეგად, ტენზორის რანგი მცირდება ორით.

მაგალითად: მეორე რანგის ტენზორის ნახვევი – სკალარული ფუნქციაა, σ_{ij} -ს ნახვევია σ_{ii} -სკალარი.

განსაზღვრება: ორი ტენზორის შიგა ნამრავლი, ეწოდება ისეთ ნამრავლს, რომელზედაც მოქმედებს ისეთი ნახვევის ოპერაცია, რომ უტოლდებიან რომელიმე ორი ინდექსი სხვადასხვა თანამამრავლებიდან.

მაგალითად: თუ გვაქვს ორი ვექტორი (პირველი რანგის ტენზორები) \vec{a} და \vec{b} , მაშინ მათი გარე ნამრავლია $a_i b_j$, ხოლო შიგა ნამრავლი იქნება: $a_i b_i$ -ე. სკალარული ნამრავლი.

მაღალი რანგის ტენზორებს გააჩნიათ რამოდენიმე შიგა ნამრავლი.

მაგალითად: ძაბვის- σ_{ij} ტენზორისა და დეფორმაციის ε_{mn} ტენზორებისათვის, გვაქვს შიგა ნამრავლები:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{in} ; \sigma_{ij} \varepsilon_{mi} ; \sigma_{ij} \varepsilon_{jn} ; \sigma_{ij} \varepsilon_{mj}. \quad (4.47)$$

მეტრიკული ტენზორის შემოსატანად, განვიხილოთ IR^3 -ში მახლობელი წერტილები $P(x)$ და $Q(x+dx)$. ამ ორ წერტილს შორის მანძილის დიფერენციალის კვადრატი, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში არის:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (4.48)$$

სიმბოლურ აღნიშვნებში გვაქვს ჩანაწერი:

$$ds^2 = dx^i dx^i. \quad (4.49)$$

თუ, გადავალთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემაში

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \quad \text{და} \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p. \quad (4.50)$$

მაშინ (4.49) მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^q d\theta^p. \quad (4.51)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$g_{qp} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} . \quad (4.52)$$

g_{qp} -წარმოადგენენ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს, რომელსაც მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ.

ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის (4.51) კვადრატი, (4.52)-მეტრიკული ტენზორის მეშვეობით მოიცემა მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში:

$$ds^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j . \quad (4.53)$$

განსაზღვრება: მრავალსახეობას, სადაც მეტრიკა (მანძილი) განისაზღვრება დადებითად-განსაზღვრული (4.53) კვადრატული დიფერენციალური ფორმით-რიმანის მრავალსახეობა ეწოდება.

რიმანის მრავალსახეობაში არ არსებობს ერთიანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემა მთელი სივრცისათვის და ეს არის სივრცის შინაგანი თვისება. ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი, რიმანის მრავალსახეობაში შეიძლება იყოს რაღაც მრუდი (და არა წრფის მონაკვეთი), რომელსაც გეოდეზიურ წირს უწოდებენ. ეს ცნება შემოიღო გაუსმა, რომელიც სწავლობდა სფეროს ზედაპირზე მანძილების გამოთვლის ამოცანას (დედამიწისთვის).

ზოგად შემთხვევაში მეტრიკული ტენზორის g_{ij} კომპონენტები დამოკიდებული არიან სივრცით კოორდინატებზე. თუ, მეტრიკული ტენზორი არ არის დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე, მაშინ ასეთ სივრცეს **ერთგვაროვან რიმანის მრავალსახეობას უწოდებენ**.

იმის მიუხედავად, რომ რიმანის სივრცეში, საზოგადოდ, შეუძლებელია ერთიანი დეკარტული კოორდინატთა სისტემის შემოტანა, ამ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის შეგვიძლია შემოვიღოთ ლოკალური(ადგილობრივი) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მოგვცემს საშუალებას შევისწავლოთ ამ წერტილის მახლობელი არეების გეომეტრია. ასეთ არეებს – **რუქებს უწოდებენ, ხოლო რუქების ერთობლიობას უწოდებენ რიმანის სივრცის ატლასს**.

მეტრიკული ტენზორის g^{kj} -კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$g_{ij} g^{kj} = g_{ji} g^{jk} = \delta_i^k . \quad (4.54)$$

სადაც δ_i^k -კრონეკერის ტენზორის შერეული კომპონენტებია. (4.54) ტოლობიდან ჩანს, რომ მეტრიკული ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტების g^{kj} -მატრიცა, წარმოადგენს მისი g_{ij} -კოვარიანტული კომპონენტების მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას.

მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები საშუალებას გვაძლევენ შემოვიღოთ ინდექსთა **ჟონგლირების ოპერაცია**, ანუ მათი აწევ-დაწვევის ოპერაცია.

მაგალითად:

$$g^{ij} T_{kj} = T_k^i ; \quad (4.55)$$

$$g_{ij} T_{mn}^i = T_{jmn} . \quad (4.56)$$

შემდგომი, მათემატიკური მოდელების განსახილველად, ჩვენთვის საკმარისია **დეკარტული ტენზორების განხილვა**.

განსაზღვრება: ისეთ ტენზორებს, რომელთათვისაც განიხილება კოორდინატთა სისტემის მხოლოდ ორთოგონალური გარდაქმნები, **დეკარტული ტენზორები ეწოდებათ**.

დეკარტული ტენზორებისათვის, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები ემთხვევიან კრონეკერის ტენზორის კომპონენტებს:

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \quad (4.57)$$

სადაც

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

შესაბამისად,

თუ, $i=j$;

თუ, $i \neq j$.

ანუ δ_{ij} -კომპონენტები ადგენენ ერთეულოვან მატრიცას.

შენიშვნა: დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევიან.

ჩვენ (ამ თავში) გამოვიყენებთ, მხოლოდ დეკარტულ ტენზორებს, რადგან არადეკარტული ტენზორები გამოიყენებიან, მხოლოდ სპეციალური, რთული მოდელებისათვის ფარდობითობის თეორიასა და გარსთა თეორიაში.

4.6 მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები.

ჰამილტონ-კელის თეორემა

განვიხილოთ, მეორე რანგის T ტენზორის შიგა ნამრავლი, პირველი რანგის n ტენზორზე:

$$\vec{v} = T \cdot \vec{n}; \quad (4.58)$$

ეს ტოლობა კომპონენტებში მიიღებს სახეს:

$$v_i = T_{ij} \cdot n_j; \quad (4.59)$$

მეორე რანგის T ტენზორს შეიძლება შევხედოთ, როგორც წრფივ ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს \vec{n} ვექტორულ ველზე და გვაძლევს ახალ \vec{v} ვექტორულ ველს.

ისმის კითხვა: არსებობენ, თუ არა ისეთი \vec{n} ვექტორები, რომლებიც წრფივი T ოპერატორის მოქმედების შემდეგ, არ იცვლიან მოქმედების წრფეს, ანუ λ -ინვარიანტულნი არიან T ოპერატორის მიმართ?

პასუხი: თუ \vec{n} ვექტორი ინვარიანტულია T ოპერატორის მიმართ, მაშინ $\vec{v} \updownarrow \vec{n}$ ანუ

$$v_i = \lambda \cdot n_j; \quad (4.60)$$

სადაც λ -ნულისგან განსხვავებული რიცხვია, მაშინ

$$T_{ij} n_j = \lambda \cdot n_j. \quad (4.61)$$

ასეთ, ინვარიანტულ მიმართულებებს, მეორე რანგის T ტენზორის მთავარ მიმართულებებს უწოდებენ, ხოლო შესაბამის λ -რიცხვებს, მთავარი მიმართულების შესაბამის საკუთრივ რიცხვებს (მნისვნელობებს) ეძახიან.

ცხადია, რომ

$$n_i = \delta_{ij} \cdot n_j; \quad (4.62)$$

ამიტომ, თუ შევიტანთ (4.61)-ში, გადავიტანთ მარცხენა მხარეში და ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ n_j -ს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას n_j -ის მიმართ:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (4.63)$$

ეს არის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა. იმისათვის, რომ მას ჰქონდეს არანულოვანი n_j ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს განტოლებას:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (4.64)$$

ამ განტოლებას საუკუნოვან(მახასიათებელ) განტოლებას უწოდებენ, რადგან ის შემოვიდა განხილვაში ცის მექანიკის ამოცანებიდან (პლანეტათა ორბიტების საუკუნოვანი ცვლილებების შესწავლიდან). გაშლილად (4.64) განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\lambda^3 - I_T \cdot \lambda^2 + II_T \cdot \lambda - III_T = 0. \quad (4.65)$$

ამ განტოლებას, მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ, ხოლო სკალარული კოეფიციენტები I_T , II_T და III_T წარმოადგენენ T_{ij} -მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტებს.

$$I_T = T_{jj} = tr T_{ij} \quad (\text{მატრიცის კვალი}) \quad (4.66)$$

$$II_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ij}) \quad (\text{მეორე ინვარიანტი}) \quad (4.67)$$

$$III_T = |T_{ij}| = \det T_{ij} \quad (\text{მესამე ინვარიანტი}) \quad (4.68)$$

(4.65) განტოლების $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - ფესვებს, T_{ij} -ტენზორის მთავარი (საკუთრივი) მნიშვნელობები ეწოდებათ.

სიმეტრიულ ტენზორებს (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ზემოთ), ყოველთვის აქვს ნამდვილი საკუთრივი მნიშვნელობები. თუ, ისინი, ყველა განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, მაშინ, მათი შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მთავარ ღერძებში, მეორე რანგის ტენზორს აქვს სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

თუ, $\lambda_1 = \lambda_2$, მაშინ ტენზორის დიაგონალური სახე არაა დამოკიდებული მათი შესაბამისი მიმართულებების არჩევაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ λ_3 -ის შესაბამის მიმართულებაზე. თუ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი მიმართულებაა.

$Ox_1x_2x_3$ -დან, მთავარ $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ ღერძებზე, გადასვლის მატრიცას აქვს სახე:

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
x_2^*	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
x_3^*	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

სადაც $n_i^{(j)}$ არის j-იური მთავარი მიმართულების მიმართული კოსინუსები.

იმისათვის, რომ T_{ij} -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტები გადავიყვანოთ

მთავარ მიმართულებებში T^* , საჭიროა გამოვიყენოთ გარდაქმნა:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T. \quad (4.70)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

გადასვლის მატრიცაა, ხოლო A^T -მისი ტრანსპონირებული მატრიცა. პირველ სტრიქონში (4.71) გვაქვს პირველი λ_1 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, მეორეში λ_2 -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, ხოლო მესამეში, λ_3 -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები.

ჰამილტონ-კელის თეორემა

მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა აკმაყოფილებს თავის საუკუნოვან (მახასიათებელ) განტოლებას.

დამტკიცება: მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა გადავიყვანოთ მთავარ დერძებში, მაშინ მას ექნება სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

განვიხილოთ მისი კვადრატი, მაშინ მივიღებთ $T^{*2} = T^* \cdot T^*$ და მაშასადამე,

$$(T^*)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

ასევე ვპოულობთ, რომ $(T^*)^3 = (T^*)^2 \cdot T^*$ და

$$(T^*)^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

თუ, შევადარებთ (4.69), (4.72), (4.73), (4.74) დავინახავთ, რომ ტენზორს და მის ხარისხებს ერთნაირი საკუთრივი (მთავარი) მიმართულებები აქვთ. ყველა საკუთრივი მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (4.65) მახასიათებელ განტოლებას, ამიტომ თვით T ტენზორიც აკმაყოფილებს მახასიათებელ განტოლებას

$$T_{ij}^3 - I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E = 0. \quad (4.75)$$

სადაც E -ერთეულოვანი მატრიცაა.

ამ თანადობას ჰამილტონ-კელის თანადობა ეწოდება.

შედეგი: (4.75)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$(T_{ij})^3 = I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E; \quad (4.76)$$

თუ, გავამრავლებთ (4.76) ტოლობას T_{ij} -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (T_{ij})^4 &= I_T \cdot T_{ij}^3 - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = I_T \cdot (I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E) - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = \\ &= (I_T^2 - II_T)T_{ij}^2 + (III_T - I_T \cdot II_T)T_{ij} + I_T \cdot III_T \cdot E \end{aligned} \quad (4.77)$$

კიდევ ერთხელ თუ გავამრავლებთ (4.77) ტოლობას T_{ij} -ზე მივიღებთ $(T_{ij})^5$ -ს გამოსახულებას, თუ გამოვიყენებთ წინა ფორმულებს მივიღებთ საბოლოოდ, რომ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ნებისმიერ ხარისხს აქვს სახე: $(T_{ij})^n = \varphi_0(I_T, II_T, III_T) \cdot E + \varphi_1(I_T, II_T, III_T) \cdot T_{ij} + \varphi_2(I_T, II_T, III_T)(T_{ij})^2$. (4.78)

სიმბოლური აღნიშვნებით ინტეგრალური ფორმულები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

სტოქსის თეორემა:

$$\oint_c F_i dx_i = \iiint_s n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} ds \quad (4.79)$$

გაუსის თეორემა:

$$\int_\Omega v_{i,i} d\omega = \int_{\partial\Omega} v_i \cdot n_i ds \quad (4.80)$$

4.7. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები

უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები ემყარებიან ისეთ ძირითად ცნებებს, როგორცაა ძაბვა და დეფორმაცია.

ძაბვის σ -ტენზორი – მეორე რანგის ტენზორია, ანუ მას გააჩნია კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცა:

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

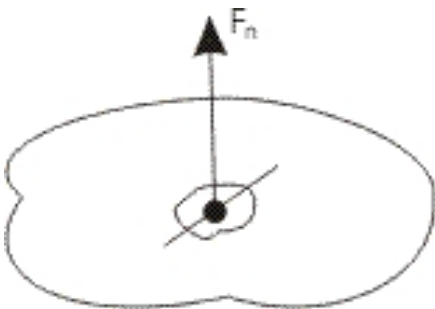
ამ მატრიცაში, დიაგონალურ $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ -კომპონენტებს ნორმალური ძაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი იწვევენ **გაჭიმვა-შეკუმშვის** დეფორმაციას.

ძაბვის ტენზორის დანარჩენ კომპონენტებს, **მხებ ძაბვებს** უწოდებენ და ისინი იწვევენ **სხეულის ფორმის ცვლილებას**.

ძაბვის ტენზორის ცნება – განაზოგადოებს, მექანიკური ძაბვის ცნებას სივრცითი სხეულისათვის. ამიტომ, ჯერ განვიხილოთ მექანიკური ძაბვის ცნება:

განსაზღვრება: მექანიკური ძაბვა σ -არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის \vec{n} ნორმალის მიმართულებით S-ფართის ერთეულზე მოქმედი F_n -ძალის სიდიდით.

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \quad (4.82)$$

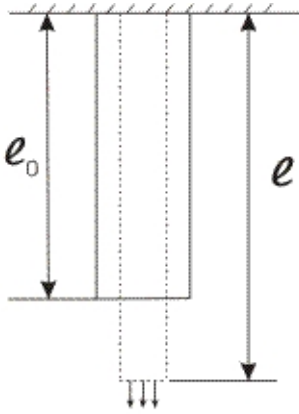


ნახ. 4.4. მექანიკური ძაბვა

სრულიად ანალოგიურად, დეფორმაციის (ε)-ტენზორის ცნება წარმოადგენს, ძელის ფარდობით ε -წაგრძელების ცნების სივრცულ განზოგადობას.

განსაზღვრება: ძელის ფარდობით ε -წაგრძელებას დეფორმაცია ეწოდება. დეფორმაცია ძელის გაჭიმვისას გამოითვლება ფორმულით:

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}. \quad (4.86)$$



დეფორმაციის ტენზორს IR^3 -ში შეესაბამება კომპონენტების მატრიცა

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.84)$$

აქ, ისევე როგორც ძაბვის ტენზორის შემთხვევაში, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ -ნორმალური დეფორმაციაა, ანუ **გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაცია**, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები შეესაბამებიან **ფორმის ცვლილებას, მათ მხები დეფორმაციები, ზოგჯერ ძვრის დეფორმაციები ეწოდებათ.**

როგორც ფიზიკიდან ვიცით, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ($\varepsilon \ll 1$) დრეკადი სხეულები ემორჩილებიან **ჰუკის კანონს:**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (4.85)$$

სადაც E -იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან დეფორმაციას, ანუ სიგრძის გაორმაგებას ($\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0$)

ჰუკის კანონს ზოგჯერ ჩაწერენ ასე:

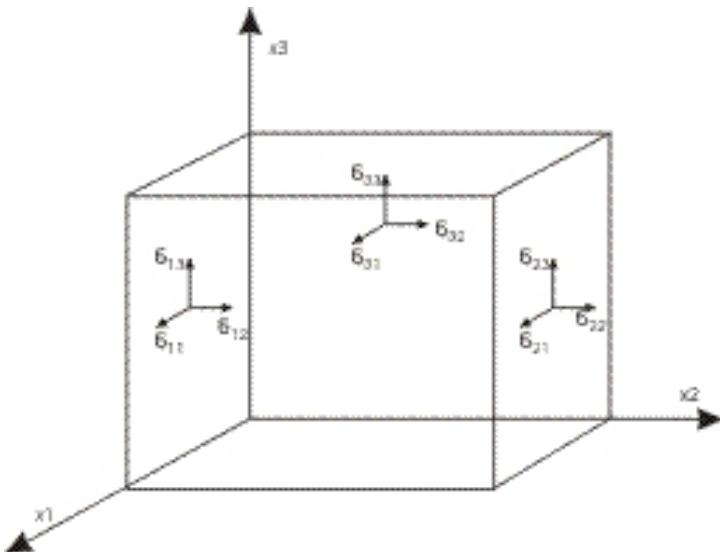
$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l-l_0}{S}; \quad (4.86)$$

თუ, ჩვენ გვინდა განვაზოგადოთ ჰუკის კანონი სივრცული შემთხვევისათვის, უნდა ჩავწეროთ წრფივი დამოკიდებულება ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (4.87)$$

(4.85)-ტოლობიდან განსხვავებით, სადაც საკმარისი იყო მასალის თვისებებიდან გამომდინარე, გვეპოვა ერთი E -მუდმივი (ექსპერიმენტებით), სივრცულ (4.87) შემთხვევაში გვაქვს 81 მუდმივი (თუ მასალა ერთგვაროვანია, თუ არაა, საზოგადოდ, 81-ფუნქცია კოორდინატებზე და დროზე დამოკიდებული), რომელთა რაოდენობაც იზოტროპული მასალებისათვის (როცა მასალის თვისება არაა დამოკიდებული მიმართულებაზე) დადის 2 მუდმივამდე, ასე რომ გვაქვს λ და μ ეგრეთწოდებული **ლამეს მუდმივები**. ამ მუდმივებს აქვთ სხვადასხვა მნიშვნელობა, სხვადასხვა მასალისათვის და მაშასადამე, დამოკიდებულია მასალის გვარობაზე.

ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების ფიზიკური აზრის ასახსნელად, განვიხილოთ დრეკადი მასალიდან ამოჭრილი კუბი ნახ. 4.5.



ნახ. 4.5. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრის ინტერპრეტაცია

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ σ_{ij} -არის ძაბვის კომპონენტი, რომელიც მოქმედებს i -ური ღერძების ნორმალურ ფართზე, j -ური ღერძის მიმართულებით. ასეთივეა დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრიც.

ზოგჯერ, ცდილობენ გამოყონ საშუალო ნორმალური ძაბვები და მხები ძაბვები. ამ მიზნით, ძაბვის ტენზორს წარმოადგენენ **სფერული და დევიატორული** ნაწილების ჯამის სახით.

განსაზღვრება: ძაბვის ტენზორის სფერული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც მოიცემა მატრიცით:

$$\sigma_{cp.} \cdot E = \begin{pmatrix} \sigma_{cp.} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp.} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (4.88)$$

სადაც $\sigma_{cp.} = -p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$ - საშუალო ნორმალური ძაბვაა.

განსაზღვრება: ძაბვის ტენზორის დევიატორული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომელიც ავსებს სფერულ ტენზორს, ძაბვის სრულ ტენზორამდე, ანუ

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{cp.} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{cp.} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (4.89)$$

ასე, რომ ძაბვის ტენზორი სიმბოლურ აღნიშვნებში შეიძლება ჩავწეროთ ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + S_{ij}. \quad (4.90)$$

ადვილად დასამტკიცებელია, რომ ძაბვის ტენზორის დევიატორის პირველი ინვარიანტი ნულის ტოლია (მართლაც (4.89)-ის მთავარ დიაგონალზე მდგარი წევრების ჯამი ნულის ტოლია).

ანალოგიურად, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ **სფერული და დევიატორული** ნაწილების ჯამის სახით.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + e_{ij} . \quad (4.91)$$

სადაც e_{ij} -დეფორმაციის ტენზორის დევიატორის კომპონენტებია.

თუ, გამოვიყენებთ (4.91) ფორმულას ჰუკის კანონისთვის იზოტროპული მასალი შემთხვევაში, მაშინ (4.87) გადაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} . \quad (4.92)$$

მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში, ე.ი. როცა გადაადგილების გრადიენტები გაცილებით მცირეა ერთზე, დეფორმაციის ტენზორისა და გადაადგილების გრადიენტის კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) ; \quad (4.93)$$

სადაც u_i -გადაადგილების ვექტორის კომპონენტი.

ხოლო თუ, დეფორმაციები არაა მცირე, ანუ გვაქვს სასრული დეფორმაციები, მაშინ (4.93)-ის მაგივრად გვაქვს ფიზიკურად არაწრფივი დეფორმაციები. (ეილერის დეფორმაციის ტენზორი)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} \cdot u_{k,j}) . \quad (4.94)$$

თუ, დრეკადობის თეორიას ავაგებთ ჰუკის (4.92) კანონზე და დეფორმაციის (4.93) ტენზორზე მივიღებთ წრფივ მათემატიკურ მოდელს, ხოლო თუ გამოვიყენებთ ეილერის არაწრფივი დეფორმაციის ტენზორს, მივიღებთ არაწრფივი დრეკადობის მათემატიკურ მოდელს, მიუხედავად ჰუკის კანონის წრფივი ხასიათისა. სინამდვილეში, მასალათა უმრავლესობას აქვს თავისი დეფორმაციის წესი (დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის), რომელსაც რეოლოგიას უწოდებენ ზოგჯერ. მასალათა რეოლოგიის დასადგენად საჭიროა ექსპერიმენტების ჩატარება და შედეგების სტატისტიკური დამუშავება.

4.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები, დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით

წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის ჰუკის განზოგადოებული კანონი გვაძლევს კავშირს ძაბვის ტენზორის σ_{ij} კომპონენტებსა და დეფორმაციის ტენზორის ε_{ij} კომპონენტებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn} . \quad (4.95)$$

ერთგვაროვანი მასალებისათვის A_{ijmn} მუდმივებისაგან შემდგარი მატრიცეს კომპონენტები არ არიან დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე. მათი რაოდენობაა 81. თუ, გავითვალისწინებთ ძაბვის ტენზორისა და დეფორმაციის ტენზორის სიმეტრიულობას:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{და} \quad \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm} ; \quad (4.96)$$

მივიღებთ, რომ

$$A_{ijmn} = A_{jimn} \quad \text{და} \quad A_{ijmn} = A_{jinn} \quad (4.97)$$

ე.ი. დამოკიდებულ მუდმივათა რიცხვი 81-დან მცირდება 36-მდე. თუ არსებობს დეფორმაციის W ენერჯიეს ფუნქცია, ანუ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} ; \quad (4.98)$$

სადაც

$$W = \frac{1}{2} A_{ijmn} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{mn} ; \quad (4.99)$$

მაშინ, კოეფიციენტების A_{ijmn} -მატრიცას მოეთხოვება სიმეტრიის უფრო მაღალი ხარისხი, ე.ი.

$$A_{ijmn} = A_{jinm} . \quad (4.100)$$

ამ ტოლობის (4.100) გათვალისწინებით, დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა A_{ijmn} -მატრიცაში მცირდება და ხდება 13.

განსაზღვრება: დრეკად მასალას, რომლის ელასტიურობის თვისებებიც სიმეტრიულია რომელიმე სამი ურთიერთმართობული სიბრტყეების მიმართ **ორთოტროპიული** მასალა (სხეული) ეწოდება.

ორთოტროპიული მასალისათვის დამოუკიდებელ მუდმივათა რიცხვი არის 12. ხოლო თუ, ორთოტროპიული მასალისათვის არსებობს დეფორმაციის ენერჯის (4.99) ფუნქცია, მაშინ მუდმივათა რიცხვია 9.

ცხადია, რომ რაც მეტია არანულოვან დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა A_{ijmn} მატრიცაში, მით უფრო რთული იქნება შესაბამისი მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელი.

მუდმივათა დიდი რაოდენობა დამახასიათებელია კომპოზიტური მასალებისათვის. ამიტომ, კომპოზიტთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები უფრო რთულია, ვიდრე იზოტროპიული მასალების მექანიკა.

იზოტროპიული, დრეკადი მასალებისათვის A_{ijmn} მატრიცა შეიცავს მხოლოდ ორ მუდმივ ელემენტს, რომელთაც λ და μ ლამეს მუდმივებს უწოდებენ.

ჰუკის კანონს იზოტროპული მასალისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (4.101)$$

ამ ფორმულის გადასაწერად იუნგისა E და პუასონის ν მუდმივების მეშვეობით, განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ძელის გაჭიმვის ამოცანა Ox_1 -ღერძის გასწვრივ, მაშინ იუნგის E-მოდული და პუასონის ν -კოეფიციენტი წარმოადგენენ პროპორციულობის კოეფიციენტებს, E-სიგრძივი დეფორმაციისას და ν -განივი დეფორმაციისას:

$$\sigma_{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \wedge \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} . \quad (4.102)$$

ამ ტოლობებისა და (4.101)-ის გათვალისწინებით, ზოგადი იზოტროპიული მასალისათვის მივიღებთ ჰუკის კანონს შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{\nu + 1} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) . \quad (4.103)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ადრე, ჰუკის კანონი ახასიათებს წრფივად-დრეკადი იზოტროპიული მასალის ელასტიურ თვისებებს, ამიტომ მას ზოგჯერ ელასტიური (დრეკადი) მასალის რეოლოგიურ განტოლებასაც უწოდებენ მცირე დეფორმაციების ($\varepsilon \ll 1$) შემთხვევაში.

ელასტიური (დრეკადი) მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად რეოლოგიური განტოლება, ის ძირითადი განტოლებაა, რომელიც აღწერს შესასწავლი მასალის ელასტიურ თვისებებს და რომელიც დგინდება, ექსპერიმენტული მასალების სტატისტიკური გადამუშავების შედეგად.

უმეტესწილად, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, რეოლოგიურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) ; \quad (4.104)$$

სადაც F -ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ფიზიკური ექსპერიმენტების შედეგად.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა განიხილება რთული რეოლოგიის მქონე მასალები, გამოიყენება ზოგადი სახის რეოლოგიური კანონი:

$$F(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \dots, x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (4.105)$$

F -ფუნქციის კონკრეტული სახე დამოკიდებულია შესასწავლი მასალის ელასტიურ და ბლანტ-პლასტიკურ თვისებებზე.

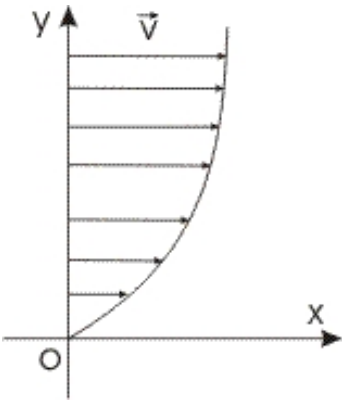
ამ ფუნქციის კონკრეტული სახის დასადგენად იყენებენ ფიზიკურ ექსპერიმენტებს და მიღებული შედეგების სტატისტიკური დამუშავებით ადგენენ უმარტივესი პროცესების შემთხვევისათვის (4.105) ტიპის თანადობას და შემდეგ ხდება ამ თანადობათა განზოგადოება და მიღებული რთული მოდელით ტესტური ამოცანების შესწავლა მოდელის ადეკვატურობის დასადგენად.

4.9. ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის

წყლისა და სხვა ბლანტი სითხეებისათვის, ნიუტონმა ცდებით დაადგინა კანონი:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}; \quad (4.106)$$

სადაც τ -ძვრის მხები ძაბვაა სითხის ფენებს შორის, რომელსაც ადგილი აქვს სითხის სიბლანტის გამო; μ -სიბლანტის კოეფიციენტი, v -სითხის სიჩქარე ნახ. 4.6.



ნახ. 4.6. ბლანტი სითხის მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა

როგორც (4.106) ფორმულიდან ჩანს, მხები ძაბვებსა და სიჩქარის გრადიენტს შორის დამოკიდებულება არის წრფივი. (4.106) არის ჰუკის კანონის ანალოგი:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.107)$$

თუმცა, ჰუკის კანონი იძლევა რეოლოგიურ თანადობას წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, ხოლო (4.106) აღწერს უკუმშვადი ნიუტონური ბლანტი სითხის რეოლოგიას.

ნიუტონის განზოგადოებულ კანონს ბლანტი სითხეებისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn}; \quad (4.108)$$

სადაც $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ -დეფორმაციის სიციქარის ტენზორის კომპონენტებია,

B_{ijmn} -სითხის თვისებებზე დამოკიდებული მუდმივათა მატრიცა 81

კომპონენტით. დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა, დამოკიდებულია, ისევე როგორც დრეკადი მასალის შემთხვევაში, სითხის შინაგანი, ფიზიკური თვისებების სიმეტრიის ხარისხზე.

იზოტროპული, ბლანტი უკუმშვადი სითხისათვის B_{ijmn} -მატრიცაში გვაქვს მხოლოდ ორი λ^* და μ^* დამოკიდებული მუდმივა (სიბლანტის კოეფიციენტი) და (4.108) ნიუტონის რეოლოგიური კანონი, ამ შემთხვევაში, ჩაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* \cdot D_{ij} ; \quad (4.109)$$

სადაც p -ჰიდროსტატიკური წნევაა,

D_{ij} -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია, რომლებიც მიიღებიან შესაბამისი დეფორმაციის ტენზორის გაწარმოებით დროით, მაშასადამე

$$D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (4.110)$$

სადაც v_i -სითხის ნაკადის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია

4.10. ნოლის თეორემა. რენერის დრეკადი მასალა. რენერ-რივლინის სითხის რეოლოგიური განტოლება. მასალები მესხიერებით. განზომილებათა მეთოდი

არსებობენ მასალები უფრო რთული რეოლოგიით, ვიდრე წრფივად-დრეკადი მასალები და ნიუტონური სითხეები.

განვიხილოთ უფრო ზოგადი დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორსა და დეფორმაციის ტენზორს შორის (ელასტიური მასალებისათვის).

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \quad (4.111)$$

და დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორსა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს შორის (ბლანტი სითხეებისათვის):

$$\sigma_{ij} = g(D_{ij}). \quad (4.112)$$

როგორც ვხედავთ, (4.111) და (4.112) თუმცა შეეხებიან სხვადასხვა ტიპის პროცესებს, ისინი იძლევიან ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ორ მეორე რანგის ტენზორს შორის და აქვთ ერთნაირი მათემატიკური სტრუქტურა.

იზოტროპიული არეებისათვის (მასალები, სითხეები, გაზები...), (4.111) და (4.112) უნდა აკმაყოფილებდნენ გარკვეულ ინვარიანტობის პირობებს, რომლებიც გამომდინარეობენ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების თვისებებისაგან.

(4.111) და (4.112) ტიპის თანადობათა ზოგადი სახის დასადგენად ნოლი დაამტკიცა თეორემა:

ნოლის თეორემა: თუ, გვაქვს ფუნქციონალური დამოკიდებულება ორი მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს შორის ($f \in C^\infty(\Omega)$),

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}); \quad (4.113)$$

მაშინ, ეს დამოკიდებულება ყველაზე ზოგად შემთხვევაში იქნება შემდეგი სახის:

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2. \quad (4.114)$$

დამტკიცება: გავშალოთ (4.113) ტეილორის მწკრივად (ε_{ij}) -ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2 + M_3 (\varepsilon_{ij})^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \cdot (\varepsilon_{ij})^k ; \quad (4.115)$$

$$\text{სადაც } M_k = \varphi_k(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon); \quad (4.116)$$

$$I_\varepsilon = \varepsilon_{ii}; \quad (4.117)$$

$$II_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}; \quad (4.118)$$

$$III_{\varepsilon} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki} . \quad (4.119)$$

ჰამილტონ-კელის თეორემის თანახმად ყოველი მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა, აკმაყოფილებს თავის მახასიათებელ განტოლებას, საიდანაც შეგვიძლია ვიპოვოთ ε_{ij}^3 , როგორც უფრო დაბალი ხარისხების წრფივი კომბინაცია:

$$\varepsilon_{ij}^3 = I_{\varepsilon} (\varepsilon_{ij})^2 - II_{\varepsilon} (\varepsilon_{ij}) + III_{\varepsilon} \cdot \delta_{ij} . \quad (4.120)$$

თუ გავამრავლებთ (4.120) ტოლობას ε_{ij} -ზე და ε_{ij}^3 -ისათვის გამოვიყენებთ (4.120) გამოსახულებას, მაშინ $(\varepsilon_{ij})^4$ -გამოსახება ε_{ij} -ს ხარისხების წრფივი კომბინაციით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, ანალოგიურად მივიღებთ რომ ნებისმიერი ხარისხი $(\varepsilon_{ij})^n$, იმ ხარისხების წრფივი კომბინაციით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს, ხოლო კოეფიციენტები იქნებიან ε_{ij} -ს ინვარიანტებზე დამოკიდებული φ_k -მრავალწევრები, ასე რომ

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 (I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}, III_{\varepsilon}) \delta_{ij} + \varphi_1 (I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}, III_{\varepsilon}) \varepsilon_{ij} + \varphi_2 (I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}, III_{\varepsilon}) \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} . \quad (4.121)$$

რაც ნიშნავს (4.114) დასამტკიცებელს.

განსაზღვრება: დრეკად (ელასტიურ) მასალებს, რომელთათვისაც რეოლოგიურ კანონს აქვს (4.121) სახე, **რეინერის დრეკადი მასალა** ეწოდებათ.

შენიშვნა: ჰუკის წრფივად-დრეკადი მასალა, რეინერის დრეკადი მასალის კერძო შემთხვევაა, მიიღება, როცა $\varphi_2 \equiv 0$. (4.121) რეოლოგიურ ტოლობაში კვადრატული φ_2 -წევრი საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ ისეთი კომპოზიტური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელი, რომლებიც სიგრძივი გაჭიმვისას შეიძლება გაიზარდონ სისქეშიც.

თუ, ნოლის თეორემას გამოვიყენებთ (4.112) თანადობისათვის, მივიღებთ რეოლოგიურ განტოლებას **რეინერ-რივლინის ბლანტი სითხეებისათვის:**

$$\sigma_{ij} = \psi_0 (I_D, II_D, III_D) \delta_{ij} + \psi_1 (I_D, II_D, III_D) D_{ij} + \psi_2 (I_D, II_D, III_D) D_{ik} D_{kj} . \quad (4.122)$$

სადაც I_D, II_D, III_D -დეფორმაციის სიჩქარის კომპონენტების D_{ij} მატრიცეს ინვარიანტებია.

განსაზღვრება: სითხეებს, რომლებიც ემორჩილებიან (4.122) რეოლოგიურ კანონს რეინერ-რივლინის ბლანტი სითხეები ეწოდებათ.

შენიშვნა: ნიუტონური სითხეები წარმოადგენენ რეინერ-რივლინის სითხეების კერძო შემთხვევას, მიიღებიან როცა $\psi_2 \equiv 0$.

(4.122) რეოლოგიურ ტოლობაში, კვადრატული ψ_2 წევრი იძლევა საშუალებას შევადგინოთ ისეთი სითხეების მათემატიკური მოდელები, რომელთაც ახასიათებთ **დილატაციის** თვისება, ანუ ფხვიერი, სითხით გაუქვნილი მასალების თვისება „ისუნთქონ“ მოძრაობისას (მოძრაობიადმი პერპენდიკულარული-განივი მიმართულებით).

უფრო რთული რეოლოგიის მქონე მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, იყენებენ **რივლინის რეოლოგიურ კანონს**. რივლინმა დაუშვა, რომ რივი რთული რეოლოგიის მასალები თავისში აერთიანებენ როგორც დრეკად ასევე სიბლანტის თვისებებს, ანუ გვაქვს დამოკიდებულება:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, D_{ij}) . \quad (4.123)$$

რიველინმა გამოიყენა ჰამილტონ-კელის განზოგადოებული თეორემა და დაამტკიცა (დაამტკიცეთ თვითონ), რომ (4.123) რეოლოგიურ კანონს, ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2 + M_3 D_{ij} + M_4 (D_{ij})^2 + M_5 (\varepsilon_{ik} D_{kj} + D_{ik} \varepsilon_{kj}) + \\ & + M_6 ((\varepsilon_{ij})^2 D_{ij} + D_{ij} (\varepsilon_{ij})^2) + M_7 (\varepsilon_{ij} \cdot (D_{ij})^2 + (D_{ij})^2 \cdot \varepsilon_{ij}) + \\ & + M_8 ((\varepsilon_{ij})^2 \cdot (D_{ij})^2 + (D_{ij})^2 \cdot (\varepsilon_{ij})^2) \end{aligned} \quad (4.124)$$

სადაც $M_k = F_k(I_\varepsilon, I_D, II_\varepsilon, II_D, III_\varepsilon, III_D)$.

ტრუსდელმა, იგივე მეთოდის გამოყენებით, ააგო **ჰიპო-დრეკადი** მასალების მუშაობის შესაბამისი რეოლოგიური განტოლება:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(D_{ij}, \sigma_{ij}). \quad (4.125)$$

ისეთი მასალებისათვის, რომელთაც ახასიათებთ **ბლანტი-ელასტიურობა** (მასალები მესხიერებით, სხვანაირად რომ ვთქვათ – ცოცვადი მასალები), რეოლოგიურ კანონს, აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = f(t, \varepsilon_{ij}, D_{ij}). \quad (4.126)$$

ასეთი მასალებისათვის განიხილება რეოლოგიური განტოლება ფორმით:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijmn}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (4.127)$$

სადაც $\varepsilon_{ijmn}(t)$ -მასალის **რელაქსაციის ფუნქციაა**.

ზოგჯერ (4.127)-ის ნაცვლად იხილავენ რეოლოგიურ განტოლებას ფორმით:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijmn}(t-\tau) \frac{d\sigma_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (4.128)$$

სადაც J_{ijmn} -ცოცვადობის ფუნქციაა.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ზოგად რეოლოგიურ კანონს აქვს სახე:

$$F(t, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad (4.129)$$

სადაც $\dot{\varepsilon}_{ij} = D_{ij}$ -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია. (მეორეზე უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები ართულებენ ანალიზს, მაგრამ სანაცვლოდ არ იძლევიან არაფერს).

P.S. რეოლოგიური კანონის დადგენა ხდება ექსპერიმენტის მეშვეობით, რასაც წინ უძღვის პროცესებისა და მასალების მეცნიერული ანალიზი. ექსპერიმენტული მასალების დამუშავება კი ხდება სტატისტიკის მეშვეობით.

ექსპერიმენტების ჩატარების მეთოდიკა და შედეგების დამუშავების ტექნიკა, ცალკე შესწავლის საგანია ადამიანის ინტელექტუალური მოღვაწეობის ამა თუ იმ სფეროში, ამიტომ ამ საკითხზე ჩვენ აღარ შევჩერდებით (არ განვიხილავთ π -თეორემას, რომელიც ბუკინგემს ეკუთვნის).

მათემატიკური მოდელირებისას, ზოგჯერ იყენებენ განზომილებათა მეთოდს (კერძო შემთხვევაა π -თეორემის).

ამ მეთოდის გასაცნობად, განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი: დაადგინეთ კავშირი, მათემატიკური ქანქარას რხევის T-პერიოდსა, ძაფის l-სიგრძესა და თავისუფალი ვარდნის g-აჩქარებას შორის.

ამოხსნა: დაუშვათ ჰიპოთეზა, რომ ამ კავშირს აქვს სახე

$$T = K \cdot l^\alpha \cdot g^\beta \quad (4.130)$$

სადაც α და β სიდიდეებს დავადგენთ იმ პირობებიდან, რომ (4.130) ტოლობაში, მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების განზომილებები უნდა იყვნენ ერთნაირი, K -მუდმივი უგანზომილებო სიდიდეა, რომლის საპონენელადაც საჭიროა ექსპერიმენტების ჩატარება.

$$[T] = [l^\alpha] \cdot [g^\beta] ; \quad (4.131)$$

ანუ

$$[T] = [l]^\alpha \cdot [g]^\beta \quad (4.132)$$

გამოვიყენოთ განზომილებათა საერთაშორისო SI-სისტემა, მაშინ

$$[T]=\text{წმ}; [l]=\text{მ}; [g]=\text{მ}\cdot\text{წმ}^{-2} \quad (4.133)$$

თუ, (4.133)-ს შევიტანოთ (4.132)-ში, მივიღებთ:

$$\text{წმ} = \text{მ}^\alpha \cdot (\text{მ}\cdot\text{წმ}^{-2})^\beta \quad (4.134)$$

ანუ

$$\text{წმ} = \text{მ}^{\alpha+\beta} \cdot \text{წმ}^{-2\beta} \quad (4.135)$$

(4.135)-დან, თუ გავეტოლებთ ერთნაირი განზომილებების ხარისხებს, მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} -2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (4.136)$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$$\beta = -\frac{1}{2} ; \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (4.137)$$

თუ, (4.137) ამონახსნებს ჩავსვამთ (4.130) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$T = K \cdot l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} ; \quad (4.138)$$

ანუ

$$T = K \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.139)$$

რაც მოგვაგონებს სკოლის ფიზიკის კურსიდან ცნობილ ფორმულას

K -კოეფიციენტის დასადგენად ესლა უნდა ჩატარდეს ექსპერიმენტი მათემატიკურ ქანქარაზე. რაც საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ (4.130) თანადობა საბოლოოდ. ეს ექსპერიმენტი სტუდენტობისთვის კარგი სავარჯიშოა. თუმცა, მარტივად ჩასატარებელია, მაგრამ K -ს საპონენელად საჭიროა ცდის რამოდენიმეჯერ გამეორება და შემდეგ შედეგების სტატისტიკურად დამუშავება.

ანალოგიურ მოსაზრებებს, ხშირად იყენებენ, უფრო რთული რეოლოგიური კანონების დასადგენადაც.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. იპოვეთ ჰამილტონის H -ფუნქცია ერთი მატერიალური წერტილისათვის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში.

პასუხი: $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$. (შეამოწმეთ!)

2. როდის ემთხვევა, ბოლცმანის განტოლება ლიუვილის განტოლებას?

3. სამგანზომილებიან სივრცეში \mathbb{R}^3 , წარმოადგინეთ: $A_{ii}, B_{ij}, R_{ij}, a_i T_{ij}, a_i b_j, S_{ij}$ ტენზორები, კომპონენტების მეშვეობით.

4. დაამტკიცეთ, განსაზღვრებიდან გამომდინარე, რომ ლევი-ჩივიტას ε_{ijk} -ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

ა) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kij} = 6$; ბ) $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$.

5. დეკარტის კოორდინატებსა და სფერულ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ კოორდინატებს შორის გვაქვს კავშირი:

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ x_2 = \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ x_3 = \theta_1 \cos \theta_2 \end{cases}$$

იპოვეთ, $g_{pq} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_p} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_q}$ - მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები სფერულ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ კოორდინატთა სისტემაში.

6. იპოვეთ დეკარტული T -ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი მიმართულებები, თუ ის მოცემულია მატრიცით:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. ჰამილტონ-კელის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ B^4 , თუ B -ტენზორის კომპონენტები მოცემიან მატრიცით:

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. ელასტიურ (დრეკად) სხეულებში ძაბვების განაწილება მოიცემა ძაბვის ტენზორით:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \cdot x_2 & (1-x_2^2)x_1 & 0 \\ (1-x_2^2)x_1 & (x_2^3 - 3x_2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ, ძაბვის ტენზორის დევიატორის მთავარი მნიშვნელობები $P(a, 0, 2\sqrt{a})$ -წერტილში.

ლიტერატურა

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954.
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
5. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел, пер. с англ., Мир, Москва, 1956.
6. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, пер. с болгарского, Мир, Москва, 1979.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986.
8. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956.
9. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. методы и приложения, Наука, Москва. 1986.
10. Новиков С.П., Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Задачи по геометрии (дифференциальная геометрия и топология), МГУ им.М.В.Ломоносова, Москва, 1978.
11. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004.
12. Литвинов Д.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости, Москва, 1982.
13. Амензаде Ю.А. Теория упругости, Москва, 1976.
14. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, пер. с англ., Москва, 1979.
15. Лодж А.С. Эластичные жидкости. Введение в реологию конечнодеформируемых полимеров, пер. с англ., Москва, 1969.
16. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности, пер. с англ., Мир, Москва, 1987.
17. Трусделл К. первоначальный курс рациональной механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1975.

თავი 5 უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები

5.1. დრეკადობის(ელასტიურობის) თეორიის მათემატიკური მოდელები. ლამეს მოდელი. ბელტრამი-მიჩელას მოდელი. რენერის მოდელი. თერმოდრეკადობის ამოცანა.

დრეკადი(ელასტიური) მასალებისათვის, ფიზიკური ექსპერიმენტების მეშვეობით ადგენენ დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის რეოლოგიურ კანონს.

ჭრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, იზოტროპიულ შემთხვევაში გვაქვს რეოლოგიური თანადობა, რომელსაც ჰუკის კანონს უწოდებენ.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (5.1)$$

უფრო რთული მოდელებიდან, ხშირად გამოიყენება რენერის დრეკადი მასალის რეოლოგიური განტოლება

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} . \quad (5.2)$$

სადაც φ_i - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვარიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

ჩვენ ადრე განვიხილეთ უფრო რთული რეოლოგიური განტოლებებიც(4.129), მაგრამ უწყვეტ ტანთა მექანიკაში, მათემატიკური მოდელების შესადგენად მხოლოდ რეოლოგიური კანონი არაა საკმარისი.

საჭიროა: წონასწორობის(ან დინამიკის) განტოლება, კინემატიკური თანადობანი და სასაზღვრო(ან სასაზღვრო და საწყისი) პირობები.

განვიხილოთ იზოტროპიული მასალებისათვის ელასტიური მუშაობის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები:

- ა) **წრფივად-დრეკადი იზოტროპიული მასალებისათვის სტატიკის(წონასწორობის) ამოცანა ისმება შემდეგნაირად:**

წონასწორობის განტოლება კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 , \quad (5.3)$$

სადაც ρ - ელასტიური მასალის სიმკვრივეა,

ბ- ერთეულ მოცულობაზე მოქმედი გარეშე ძალის ვექტორის კომპონენტებია; კინემატიკური თანადობები მცირე დეფორმაციების ($\varepsilon \ll 1$) შემთხვევაში:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) ; \quad (5.4)$$

ჰუკის რეოლოგიური განტოლება:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (5.5)$$

(5.3),(5.4) და (5.5) განტოლებები უნდა დაკმაყოფილდეს ელასტიური Ω მასალის ნებისმიერ წერტილში. ამასთან, აუცილებელია სასაზღვრო პირობებიც Ω - არის $\partial\Omega$ - საზღვრის ნებისმიერი წერტილისათვის.

სასაზღვრო პირობების მიხედვით სტატიკაში განიხილება სამი ტიპის ამოცანა:

- ა.1) **საზღვრის თითოეულ წერტილში მოცემულია გადაადგილებები:**

$$u_{i\alpha} = g(x_1, x_2, x_3) ; \quad (5.6)$$

ასეთ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია გარდაეკმნათ (5.3),(5.4) და (5.5) ამოცანა ისე, რომ გვექონდეს ერთი განტოლება გადაადგილებების მიმართ შესაბამისი სასაზღვრო (5.6) პირობებით.

ამისათვის (5.4) ჩავსვათ (5.5)-ში და მიღებული შედეგი შევიტანოთ (5.3)-ში. მართლაც, თუ (5.4)-ს ჩავსვამთ (5.5)-ში მივიღებთ

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \lambda (u_{k,k} + u_{k,k}) \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) ; \quad (5.7)$$

თუ, ამ გამოსახულებას შევიტანთ დინამიკის (5.3) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \rho b_i = 0, \quad (5.8)$$

ანუ, თუ გავამარტივებთ გვექნება განტოლება გადაადგილებებისათვის

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0 . \quad (5.9)$$

ამ განტოლებას ლამეს განტოლებას უწოდებენ, ზოგჯერ კი ნავიე-კოშის მოდელს.

ამ განტოლებებისათვის განიხილება დირიხლეს (5.6) ამოცანა.

P.S. (5.6) – არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები შეგვიძლია გავანულოთ (ვაქციოთ ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანად) თუ, მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას

$$u_i = v_i + g(x_1, x_2, x_3). \quad (5.10)$$

მაშინ (5.9) განტოლება გადაიწერება v_i -ს მიმართ და სასაზღვრო (5.6) პირობები მიიღებენ ერთგვაროვან ფორმას

$$v_{i;\alpha\Omega} = 0, \quad (5.11)$$

რაც აადვილებს ამოცანის ამოხსნას;

ა.2) მეორე ტიპის სასაზღვრო ამოცანა მიიღება იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია ძაბვები საზღვრის ყოველი წერტილისათვის:

$$(\sigma_{ij} n_j)_{\partial\Omega} = \sigma_{0i}. \quad (5.12)$$

ამ შემთხვევაში, ჰუკის კანონის, წონასწორობის განტოლებისა და სენ-ვენანის პირობებიდან შესაძლებელი დეფორმაციებისათვის

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0, \quad (5.13)$$

მიიღება ელასტიურობის განტოლება ძაბვების მიმართ:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho (b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0. \quad (5.14)$$

ამ განტოლებას ბელტრამი-მიჩელას განტოლებას უწოდებენ.

ბელტრამი-მიჩელას განტოლებებით დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად (5.14) განტოლებას ხსნიან (5.12) პირობებში, (5.3) წონასწორობის განტოლებების გათვალისწინებით.

ა.3) მესამე ტიპის ამოცანა – ეს არის შერეული ტიპის ამოცანა, როცა საზღვრის ერთ $\partial\Omega_1$ - ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები, ხოლო მეორე

$\partial\Omega_2$ - ნაწილზე მოცემულია ძაბვები და

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2. \quad (5.15)$$

ამასთან, მოითხოვება განისაზღვროს ძაბვები და დეფორმაციები Ω - არის ნებისმიერი წერტილისათვის.

ამ შემთხვევაში, ხსნიან ამოცანას ზოგადი სახით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0; \quad (5.16)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (5.17)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (5.18)$$

$$(u_i)_{\partial\Omega_1} = g(x_1, x_2, x_3); \quad (5.19)$$

$$(\sigma_{ij} n_j)_{\partial\Omega_2} = \sigma_{0i}. \quad (5.20)$$

ბ) ეხლა განვიხილოთ დინამიკის ამოცანების მათემატიკური მოდელირება.

ასეთ შემთხვევებში, ჩვენ ვიხილავთ დინამიკის განტოლებას კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (5.21)$$

კინემატიკურ თანადობებს:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (5.22)$$

რეოლოგიურ კანონს(ჰუკის კანონი);

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (5.23)$$

სტატიკის ამოცანებისაგან განსხვავებით, დინამიკის შესწავლისას სასაზღვრო პირობებთან ერთად განიხილავენ საწყის პირობებსაც.

ბ.1) თუ გვაქვს ამოცანა საზღვარზე მოცემული გადაადგილებებით, ვიყენებთ ლამეს მატემატიკურ მოდელს:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (5.24)$$

ამავე დროს, გვაქვს სასაზღვრო პირობები

$$(u_i)_{\partial \Omega_1} = g_i(x_1, x_2, x_3, t); \quad (5.25)$$

და საწყისი პირობები

$$(u_i)_{t=0} = f_i(x_1, x_2, x_3). \quad (5.26)$$

ბ.2) რთული რეოლოგიის მასალებისათვის ხშირად იყენებენ რეინერის ელასტიური მასალის მათემატიკურ მოდელს(კომპოზიტები, სელები, ზეგებები, მრავალფაზიანი მასალები და ა.შ.), რომელსაც აქვს სახე: დინამიკის განტოლება

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (5.27)$$

კინემატიკური თანადობები

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.28)$$

რეინერის რეოლოგიური განტოლება

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}; \quad (5.29)$$

სადაც

φ_i - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვარიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

ამ ფუნქციების კონკრეტული სახე დგინდება ხანგრძლივი და მძიმე ექსპერიმენტების შედეგად.

სასაზღვრო და საწყისი პირობები აქ ისმება ისეთივე სახით, როგორც წრფივად-დრეკადი მასალების შემთხვევაში (5.25), (5.26).

ბ.3) წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის მათემატიკური მოდელი.

წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის შემთხვევაში, ასევე მოქმედებს დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (5.30)$$

კინემატიკური თანადობები

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.31)$$

დამატებით, განიხილება შესაბამისი რეოლოგიური კანონი

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}; \quad (5.32)$$

სადაც

α - წრფივი გაფართოების ტემპერატურული კოეფიციენტი;

T_0 - ელასტიური მასალის საწყისი ტემპერატურა;

λ და μ - ლამეს კოეფიციენტებია, რომლებიც ახასიათებენ მასალის თვისებებს დეფორმაციების თვალსაზრისით; და ენერჯის განტოლება

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T \varepsilon_{kk} ; \quad (5.33)$$

სადაც

k - მასალის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი;

$c^{(v)}$ - კუთრი სითბოტევადობაა მუდმივი დეფორმაციის(მოცულობის) პირობებში.

ამ მათემატიკურ მოდელში უცნობებია: $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ და T .

უცნობების საპონენლად აგებულ განტოლებათა (5.30) – (5.33) სისტემას, უნდა მივუერთოთ შესაბამისი სასაზღვრო და საწყისი პირობები.

5.2. სითხეთა დინამიკის მათემატიკური მოდელები. ავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით. ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური მოდელები.

სითხეთა დინამიკას შეისწავლის ჰიდროაერომექანიკა. ისევე, როგორც დრეკადი(ელასტიური) მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაერომექანიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის(გაზის ანუ აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად.

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადოებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn} ; \quad (5.35)$$

სადაც

$D_{mn} = \dot{\varepsilon}_{mn}$ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია.

თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ B_{ijmn} - მუდმივი სიდიდეებისაგან შედგება, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სითხის ბლანტ თვისებებს.

თუ, განვიხილავთ იზოტროპიულ ნიუტონურ სითხეს, მაშინ მუდმივათა მატრიცაში 81 კომპონენტიდან მხოლოდ ორია λ^* და μ^* დამოუკიდებელი.

შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} ; \quad (5.36)$$

სადაც

λ^* და μ^* - სითხის სიბლანტის დინამიური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} ; \quad (5.37)$$

სადაც χ^* - სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტი.

თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ

$$\chi^* = 0, \quad (5.38)$$

მაშინ (4.176)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p, \quad (5.39)$$

ანუ, ჰიდროსტატიკური წნევა ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით. ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა – მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

გარდა რეოლოგიური (5.36) კანონისა, მათემატიკური მოდელის ასაგებად იზოტროპიული ნიუტონური სითხეებისათვის, საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის(უწყვეტობის) განტოლება, ენერჯის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს სახე

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho v_i; \quad (5.40)$$

სადაც v_i - სითხის ნაწილაკების მოძრაობის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება ფორმით:

$$\rho + \rho v_{i,i} = 0. \quad (5.41)$$

ენერჯის შენახვის კანონს აქვს ფორმა:

$$U = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}C_{i,i} + Z; \quad (5.42)$$

სადაც

U – შინაგანი ენერჯიაა, C_i - სითხური ნაკადის ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც გადის სითხეგამტარობის ხარჯზე, დროის ერთეულში, ერთეულ ფართობში, Z – ერთეულ დროში გამოსხივებული სითხის მუდმივაა, გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება(ექსპერიმენტებიდან) ჩაიწერება ასე:

$$p = p(\rho, T). \quad (5.43)$$

თუ, საჭიროა სითხური ეფექტების გათვალისწინებაც, რაც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, მაშინ (5.36),(5.40) – (5.43) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ფურიეს სითხეგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითხეგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ მოკლედ:

$$C_i = -kT_{,i} \quad (5.44)$$

სადაც k – სითხეგამტარობის კოეფიციენტი.

კალორიული განტოლება ჩაიწერება ექსპერიმენტებზე დაყრდნობით

$$U = U(\rho, T). \quad (5.45)$$

მიიღება 16 განტოლება 16 უცნობით, ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც სითხის მიკვრის პირობებს უწოდებენ:

$$(v_i)_{\alpha} = 0. \quad (5.46)$$

ა) ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება.

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითხური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ.

თუ, კინემატიკურ თანადობებს:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (5.47)$$

შევიტანთ ნიუტონის (5.36) რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k}) + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (5.48)$$

შემდეგ, (5.48) განტოლებას თუ შევიტანთ მოძრაობის (5.40) განტოლებაში, გვექნება:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,jj} + v_{j,ji}) + \rho b_i. \quad (5.49)$$

ანუ, საბოლოოდ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (5.50)$$

ამ (5.50) განტოლებას ნავიე - სტოქს - დიუგემის განტოლება ეწოდება ბლანტი სითხეებისათვის.

P.S. თუ სითხე უკუმშავია(როგორც წყალი), მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (5.51)$$

ბ) ნავიე - სტოქსის განტოლება უკუმში სითხეებისათვის.

თუ განვიხილავთ უკუმში სითხეებს, მაშინ სითხის უკუმშვადობის (5.51) პირობის გათვალისწინებით (5.50) - დან მივიღებთ ნავიე - სტოქსის მათემატიკურ მოდელს:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (5.52)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (5.53)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (5.54)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (5.55)$$

მიღებული (5.52) - (5.55) მათემატიკური მოდელი აღწერს ბლანტი, უკუმში სითხის მოძრაობას Ω - არეში, $\partial\Omega$ - საზღვრით.

გ) ნავიე - სტოქსის განტოლება გაზებისათვის.

თუ ნავიე - სტოქს - დიუგემის მოდელში, გავითვალისწინებთ სტოქსის პირობას

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^* \quad (5.56)$$

მაშინ, მივიღებთ ნავიე - სტოქსის განტოლებას გაზებისათვის:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \rho b_i. \quad (5.57)$$

ამ განტოლებას უნდა მივუერთოთ მდგომარეობის (5.43) განტოლება, ენერჯის (5.42) განტოლება და უწყვეტობის (5.41) განტოლება(თუ არა გვაქვს სითხური ეფექტები).

დ) განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბლანტი, უკუმში სითხის დინება. შესაბამისი მათემატიკური მოდელი გადავწეროთ უგანზომილებო სახით და

დავადგინოთ მსგავსების კრიტერიუმები, დინებათა ფიზიკური მოდელების შესადგენად (ექსპერიმენტების ჩასატარებლად).

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = b_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right); \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = b_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right); \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (5.60)$$

$$(v_i)_{\infty} = 0; \quad (5.61)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (5.62)$$

თუ (5.58) – (5.62) განტოლებებში გადავალთ უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე ფორმულებით:

$$x_i = l_0 x'_i; \quad v_i = v_0 v'_i; \quad t = \frac{l_0}{v_0} t'; \quad p = \rho v_0^2 p'; \quad b_i = g b'_i. \quad (5.63)$$

მაშინ, მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_1}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} = g b'_1 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_1} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_1; \quad (5.64)$$

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_2}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = g b'_2 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_2; \quad (5.65)$$

$$\frac{v_0}{l_0} \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) = 0; \quad (5.66)$$

$$(v'_1)_{t=0} = v'_{10}; \quad (v'_2)_{t=0} = v'_{20}; \quad (5.67)$$

$$(v'_1)_{\infty} = 0; \quad (v'_2)_{\infty} = 0. \quad (5.68)$$

თუ, (5.64) – (5.68) განტოლებებში შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$Re = \frac{v_0 l_0 \rho}{\mu^*}; \quad Fr = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}; \quad (5.69)$$

და აღარ დაგვწერთ შტრიხებს, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს უგანზომილებო ფორმით:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{Re} \Delta v_1; \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{Re} \Delta v_2; \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (5.72)$$

$$(v_1)_{t=0} = v_{10}; \quad (v_2)_{t=0} = v_{20}; \quad (5.73)$$

$$(v_i)_{\infty} = 0. \quad (5.74)$$

მუდმივ კოეფიციენტს Re – რეინოლდსის რიცხვი ეწოდება, ხოლო Fr – ფრუდის რიცხვია.

იმისათვის რომ, სხვადასხვა მასშტაბის ორი მოდელი იყოს ექვივალენტური, მათ შორის უნდა არსებობდეს მსგავსება. ცხადია, რომ ორი მოდელი მსგავსი იქნება, თუ მოდელის რეჟიმის განმსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტები (Re და Fr), იქნებიან შესაბამისად ტოლები, ანუ, თუ

$$Re_1 = Re_2; \quad Fr_1 = Fr_2. \quad (5.75)$$

ამ პირობების ერთდროულად დაცვა კი ძალზედ რთულია, განსაკუთრებით იმ ამოცანებში, სადაც მნიშვნელობა აქვს სიმძიმის ძალის გავლენას. მოდელის მატემატიკურად გამოსაკვლევეად, მათ როგორც წესი, გადაწერენ უგანზომილებო ფორმით. გათვლების შედეგების პრაქტიკაში გადასატანად იყენებენ შესაბამისი გადასვლის ფორმულებს (5.63).

ე) ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის.

განვიხილოთ ბლანტი, უკუმშვადი სითხის დინამიკა იმ შემთხვევაში, როცა რეინოლდსის რიცხვი იზრდება. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ მოცემული ამოცანის პირობებში, არსებობს რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, ისე რომ, თუ $Re \leq Re_{kr}$ გვაქვს ლამინარული(ფენოვანი) დინება, ხოლო, თუ $Re \geq Re_{kr}$ გვაქვს ფენების შერევა-დიფუზია, ამ რეჟიმს ტურბულენტური დინება ეწოდება.

თუ განვიხილავთ დინებას, რომლის დროსაც $Re \rightarrow \infty$, მივიღებთ ისეთ ტურბულენტურ დინებას, რომლის დროსაც განვითარებული დიფუზიის გამო, სიბლანტის თვისებას აღარ აქვს ფიზიკური გავლენა, ანუ დინება შეიძლება განხილული იყოს, როგორც ისეთი სითხის დინება, რომლის ფენებს შორისაც არა გვაქვს ხახუნის ძალა(ასეთ სითხეებს იდეალურს უწოდებენ).

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი შეიძლება მივიღოთ ბლანტი სითხის მოდელიდან, თუ მოვახდენთ შესაბამის ზღვარზე გადასვლას იმ პირობით, რომ $Re \rightarrow \infty$. მაშინ, (5.70) –(5.74) მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (5.78)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}; \quad (5.79)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.80)$$

მათემატიკურ მოდელს, რომელიც მოიცემა (5.76) – (5.80) სახით ეილერის მოდელი ეწოდება.

5.3. უწყვეტ გარემოში სითხის განაწილების მათემატიკური მოდელირება(დიფუზიის განტოლება).

განვიხილოთ, R^3 - ში რაიმე უწყვეტი Ω გარემო(სითხე, გაზი, ელასტიური მასალა ...), $\partial\Omega$ საზღვრით.

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ დროის Δt მონაკვეთში, $\partial\Omega$ ზედაპირს გასჭოლავს ΔQ რაოდენობის სითხე, რომელიც გამოითვლება ზედაპირული ინტეგრალით:

$$\Delta Q = \iint_{\Sigma} k \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dS \Delta t; \quad (5.81)$$

სადაც

n – არის საზღვრის გარეწორმალური (x, y, z) ვერტიკალი;

k – შიდა სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

ვთქვათ, ადგილი აქვს უწყვეტი გარემოს(მასალის) გაცივების პროცესს, მაშინ

$$\frac{\partial T}{\partial n} \leq 0; \quad (5.82)$$

და მაშასადამე, (5.81) მიიღებს სახეს

$$\Delta Q_1 = - \iint_{\Sigma} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \Delta t. \quad (5.83)$$

ΔQ_1 – საზღვრის ზედაპირს გადაკვეთს ΔQ_1 – სითბოს რაოდენობა, რომელიც დაკარგა Ω მოცულობის უწყვეტმა გარემომ(მასალამ).

Ω მოცულობის m მასისა და c კუთრი სითბოტევადობის, ρ სიმკვრივის გარემო გასცემს ΔQ_2 სითბოს რაოდენობას, რომელიც გამოითვლება ჯერადი ინტეგრალით

$$\Delta Q_2 = - \iiint_{\Omega} c \rho [T(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - T(x_1, x_2, x_3, t)] d\omega; \quad (5.84)$$

უარყოფითი ნიშანი მიუთითებს იმაზე, რომ ხდება მასალის გაცივება. თუ უწყვეტი გარემოს შიგნით არიან სითბოს განაწილებული წყაროები

$I(x_1, x_2, x_3)$ კუთრი სიმძლავრეებით, მაშინ Δt დროში წყაროების მიერ გამოძეუებული სითბოს ΔQ_3 რაოდენობა იქნება:

$$\Delta Q_3 = \iiint_{\Omega} I(x_1, x_2, x_3, t) d\omega \Delta t. \quad (5.85)$$

სითბური ბალანსის განტოლებას აქვს სახე:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3; \quad (5.86)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} - \iint_{\Sigma} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \Delta t &= - \iiint_{\Omega} c \rho [T(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - T(x_1, x_2, x_3, t)] d\omega + \\ &+ \iiint_{\Omega} I(x_1, x_2, x_3, t) d\omega \Delta t \end{aligned} \quad (5.87)$$

რადგან

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad} T \cdot n_0; \quad n_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}; \quad (5.88)$$

და $n_0 dS = d\vec{S}$, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\iint_{\Sigma} k \frac{\partial T}{\partial n} dS = \iint_{\Sigma} k \text{grad} T \cdot d\vec{S}; \quad (5.89)$$

მაგრამ, გაუსის ფორმულის თანახმად

$$\iint_{\Sigma} k \text{grad} T \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \text{div}(k \text{grad} T) d\omega; \quad (5.90)$$

თუ (5.88) – (5.90)-ს, შევიტანთ (5.87)-ში მივიღებთ

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} \text{div}(k \text{grad} T) d\omega \Delta t &= - \iiint_{\Omega} c \rho [T(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - T(x_1, x_2, x_3, t)] d\omega + \\ &+ \iiint_{\Omega} I(x_1, x_2, x_3, t) d\omega \Delta t \end{aligned}; \quad (5.91)$$

თუ, ყველა ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას ერთი ინტეგრალის ქვეშ მოვაქცევთ, გაეყოფთ Δt -ზე და გადავაღოთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad} T) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + I(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (5.92)$$

ამ განტოლებას სითბოსგამტარობის(დიფუზიის) განტოლებას უწოდებენ.

ამ განტოლებაში

$$k = f_1(T, x_1, x_2, x_3, t); \quad c = f_2(T, x_1, x_2, x_3, t). \quad (5.93)$$

ე.ი. (5.92), (5.93) ზოგად შემთხვევაში გვაძლევს არაწრფივ მოდელს.

თუ, დაუშვებთ, რომ

$$k = \operatorname{const} \wedge c = \operatorname{const}, \quad (5.94)$$

მაშინ, მივიღებთ წრფივ განტოლებას ერთგვაროვანი გარემოსათვის:

$$\Delta T = \zeta \frac{\partial T}{\partial t} - I(x_1, x_2, x_3, t); \quad (5.95)$$

სადაც

$$\zeta = \frac{c\rho}{k}; \quad \Delta T = T_{,ii} \quad (5.96)$$

თუ, უწყვეტ გარემოში არ არიან განაწილებული სითბური წყაროები, მაშინ (5.95) განტოლება მიიღებს სახეს

$$\Delta T = \zeta \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (5.97)$$

5.4. მასალათა პლასტიკური მუშაობის მათემატიკური მოდელირება

დრეკადი(ელასტიური) მასალები, მოდებული დატვირთვებისაგან(ძალებისაგან) განთავისუფლების შემდეგ, მთლიანად აღიდგენენ თავის საწყის არადეფორმირებულ მდგომარეობას. მაგრამ, არსებობენ ელასტიური მასალები, რომლებიც ნაწილობრივ ინარჩუნებენ დაძაბულ – დეფორმირებულ მდგომარეობას, მოდებული დატვირთვების მოხსნის შემდეგაც. ასეთ მასალებს პლასტიკური მასალები ეწოდებათ, ხოლო ნარჩენ დეფორმაციებს – პლასტიკური დეფორმაციები.

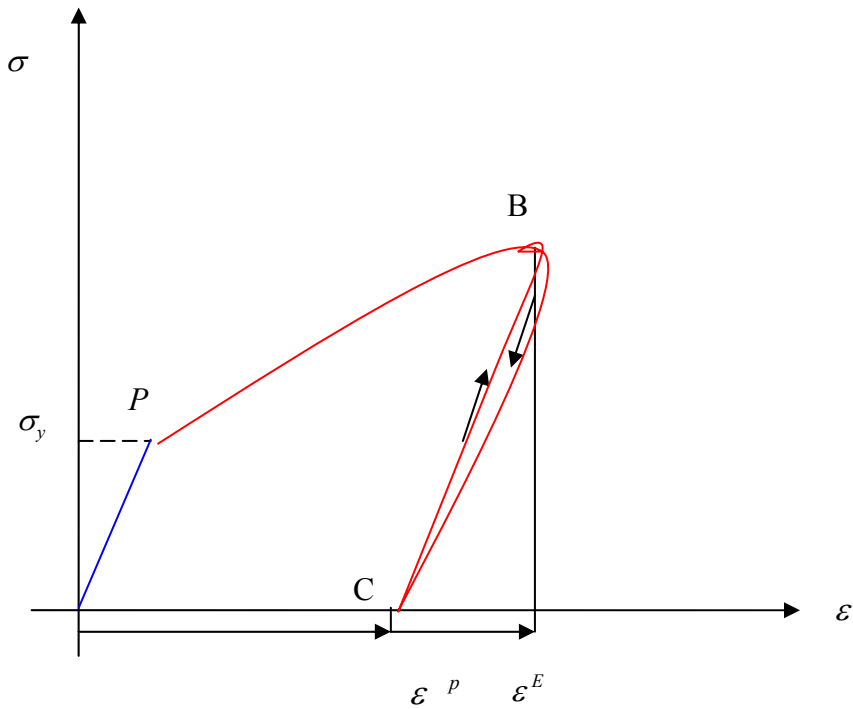
პლასტიკური დეფორმაციები წარმოიშობიან დეფორმირებად მასალაში, როცა ძაბვის ინტენსივობა მიიღებს გარკვეულ σ_y - მნიშვნელობას, რომელსაც

დრეკადობის ზღვარი ან დენადობის ზღვარი ეწოდება.

პლასტიკური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, საჭიროა დადგინდეს შესაბამისი რეოლოგიური თანადობა და ის პირობები, რომლის დროსაც იწყება პლასტიკური დეფორმაციები. მიკროსკოპიულ დონეზე პლასტიკური დეფორმაციების შესწავლა არის მყარი სხეულის ფიზიკის ამოცანა, ჩვენ კი, შევისწავლით მაკროსკოპიულ ფენომენოლოგიურ მიდგომას.

პლასტიკურ ზონაში მუშაობისას(სითხეებისაგან განსხვავებით), მასალებისათვის დამახასიათებელია მხები ძაბვების არსებობა მაშინაც, როცა მისი ნაწილაკები არ მოძრაობენ.

პლასტიკური მუშაობისათვის დამახასიათებელი ცნებები განვიხილოთ პიპოტური – პლასტიკური მასალის, ძაბვა – დეფორმაციების დიაგრამის მეშვეობით, რომელიც იგება მასალის ლაბორატორიული შესწავლისას გაჭიმვა – შეკუმშვის დეფორმაციაზე(ასევე ძვრის დეფორმაციაზე) (ნახ. 5.1).



ნახ. 5.1. პლასტიკური მასალის მუშაობის დაძაბულ – დეფორმირებულ მდგომარეობის დიაგრამა.

ამ ნახაზზე σ - პირობითი ძაბვა(ძალა გაყოფილი საწყის კვეთზე); ხოლო ε - ან ტექნიკური ფარდობითი დეფორმაციაა

$$\varepsilon = e = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (5.98)$$

სადაც

L - ნიმუშის სიგრძეა,

L_0 - საწყისი სიგრძეა;

ან ნატურალური(ლოგარითმული) დეფორმაციაა

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(1 + e) = e - \frac{e^2}{2} + O(e^3). \quad (5.99)$$

მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, დეფორმაციის ეს ორი მახასიათებელი ერთმანეთს ემთხვევა ($\varepsilon = e$).

ნახაზზე P - წერტილი, რომელიც შეესაბამება დრეკადობის ზღვარს, დიაგრამას ყოფს ორ ნაწილად: **დრეკად ზონად(ლურჯი გრაფიკი) და პლასტიკურ(წითელი გრაფიკი) ზონად.**

ზოგჯერ, პლასტიკურ ზონად იღებენ ისეთი J - წერტილიდან, როცა მხების დახრილობა შეადგენს 50%-ს საწყის დახრილობასთან შედარებით(დენადობის ჯონსონის ზღვარი).

P - წერტილამდე(წრფივი დრეკადობის ზონა - ლურჯი), ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება, ამიტომ ძაბვების მოხსნისას მასალა აღიდგენს საწყის მდგომარეობას.

პლასტიკურ ზონაში(P - წერტილის მარჯვნივ - წითელი),სიტუაცია იცვლება. მაგალითად, თუ B - წერტილში დავიწყებთ განტვირთვას(თანდათან მოვხსნით მოქმედ ძაბვებს), მაშინ განტვირთვის მრუდი, რომელიც შესაბამის დაძაბულ – დეფორმირებულ მდგომარეობას აღწერს გაყვება BC - წრფეს, რომელიც პრაქტიკულად პარალელურია OP - წრფივი დრეკადობის ზონის მრუდის ნაწილისა. C - წერტილში, სადაც $\sigma = 0$, ჩვენ გვაქვს ნარჩენი ε^P - დეფორმაცია. ნახაზზე ε^E -

აღნიშნავს დეფორმაციის დრეკად ნაწილს(რომელიც მთლიანად აღდგება ძალების მოხსნის შემდეგ). ხელახლა დატვირთვისას მდგომარეობის მრუდი C – წერტილიდან წავა B – სკენ, მაგრამ არ გაუყვება BC – ს და არ მოხვდება ზუსტად B – წერტილში, რადგან დატვირთვა – განტვირთვისას ხდება ენერჯის დისიპაცია(ხარჯვა) და მაშასადამე, გვექნება **ჰისტერეზისის მრუდი.**

B – წერტილში დაბრუნებისას, დეფორმაციების გასაზრდელად საჭიროა ძაბვის გაზრდა, ამ მოვლენას **მასალის გამყარებას უწოდებენ.** ცხადია, რომ **პლასტიკურ ზონაში ძაბვა დამოკიდებულია დატვირთვა – განტვირთვისა და დეფორმაციის მთელ ისტორიაზე.**

P.S. ა) პლასტიკური დეფორმაციები ძლიერაა დამოკიდებული **ტემპერატურაზე,** მაგრამ მათემატიკური მოდელირებისას(სიმარტივისათვის) თვლიან, რომ ტემპერატურა მუდმივია და განიხილება **იზოთერმული პლასტიკური დეფორმაციები;**

ბ) ასევე(სიმარტივისათვის), პლასტიკურობის თეორიაში, **დატვირთვა – განტვირთვის სიჩქარეც** არ მიიღება მხედველობაში და თვლიან, რომ პლასტიკური დეფორმაციები არაა დამოკიდებული დროზე(ამ მიმართულებით ელასტიურობის მოდელების დასაზუსტებლად, პლასტიკურობის თეორიის პარალელურად, განიხილავენ მასალის ცოცვალობისა და რელაქსაციის მათემატიკურ მოდელებს).

5.4.1. პლასტიკური დეფორმაციების წარმოშობის კრიტერიუმები.

პლასტიკურობის კრიტერიუმები განაზოგადებენ დრეკადობის ზღვარის ცნებას სამგანზომილებიანი შემთხვევებისათვის. პლასტიკურობის კრიტერიუმები გვაძლევენ განტოლებებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები, იმისათვის რომ დაიწყოს პლასტიკური დინება:

$$f1(\sigma_{ij}) = C_y ; \tag{5.100}$$

სადაც

C_y - პლასტიკური დინების მუდმივაა მოცემული მასალისათვის.

ზოგჯერ (5.100) თანადობა ჩაიწერება ერთგვაროვანი ფორმით

$$f2(\sigma_{ij}) = 0 ; \tag{5.101}$$

ასეთ შემთხვევაში, $f2$ - ფუნქციას **დენადობის ფუნქციას** უწოდებენ.

ყველაზე უფრო გავრცელებული და მათემატიკურად მარტივი, პლასტიკურობის კრიტერიუმებია: **ტრესკის კრიტერიუმი და მიზესის კრიტერიუმი.**

განვიხილოთ თითოეული მათგანი ცალ – ცალკე:

ა) **ტრესკის კრიტერიუმი:** პლასტიკური დენადობა იწყება მაშინ, როდესაც მაქსიმალური მხები ძაბვები აღწევენ კრიტიკულ C_y - მნიშვნელობას.

თუ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ძაბვის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობებია და

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 ; \tag{5.102}$$

მაშინ ტრესკის კრიტერიუმს აქვს სახე:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = C_y = const = \frac{\sigma_y}{2} ; \tag{5.103}$$

ანუ

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y. \tag{5.104}$$

ბ) მიზესის კრიტერიუმი: პლასტიკური დენადობა იწყება მაშინ, როდესაც ძაბვის ტენზორის დევიატორის მეორე ინვარიანტი აღწევს კრიტიკულ C_y -მნიშვნელობას.

მათემატიკურად მიზესის კრიტერიუმი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6 \cdot C_y = 2\sigma_y^2. \quad (5.105)$$

P.S. პლასტიკური მასალებისათვის ერთიანი თეორია ჯერ-ჯერობით არ არსებობს, არსებობს რიგი მიახლოებითი ტექნიკური თეორიებისა, რომელთა გამოყენებაც შემოიფარგლება შესაბამისი მასალებით და რომელთა აღწერაც მოიცემა შესაბამის სპეციალურ კურსებში.

ლიტერატურა

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954.
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974.
5. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел, пер. с англ., Мир, Москва, 1956.
6. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, пер. с болгарского, Мир, Москва, 1979.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986.
8. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956.
9. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004.
10. Roahe P.J. Computational fluid dynamics, Albuquerque, New Mexico, 1976.
11. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and computational aspects of convective heat transfer, New York, 1984.
12. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая фэродинамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
13. Хемш М., Нилсен Дж. Аэродинамика ракет, том 1, том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1989.
14. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Данилов А.Н. и др. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пос., Москва, 1985.
15. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, Москва, 1976.
16. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, Москва, 1979.
17. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость, Москва, 1980.

შინაარსი

წინასიტყვაობა	88-3
შესავალი	4
სქემა №1 ინფორმატიკის სტრუქტურული სქემა	6
ნაწილი I ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები.	
თავი I. რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება მოდელირებაში	
1.1. ძირითადი ცნებები	7
1.2. ბიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები	8
1.3. ტრიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები	9
1.4. მიხაელის-მენტენის მათემატიკური მოდელი	9
1.5. ლოტკა-ვოლტერას მათემატიკური მოდელი	10
1.6. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკური მოდელი	10
1.7. პრიგოჟინ-ლეფვერის მათემატიკური მოდელი	11
1.8. რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება კოლმოგოროვის განტოლებების შესადგენად მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვებისათვის	12
ამოცანები და სავარჯიშოები	14
ლიტერატურა	16
თავი 2. ეკონომიკის მათემატიკური მოდელები.	
2.1. საქონლის საშუალო ფასის დადგენა რეგიონში სტატისტიკური მეთოდით	17
2.2. საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობისა და რისკის გამოთვლა	21
2.3. ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია	22
2.4. დაგრთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მათემატიკური მოდელი	23
2.5. წრფივი დაპროგრამების ამოცანა	25
2.6. საერთაშორისო ვაჭრობის მათემატიკური მოდელი	26
2.7. აქციების ფასის პროგნოზირება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით	28
2.8. კენსის მათემატიკური მოდელი	30
2.9. სამუელსონ-ჰიკსის მოდელი	31
ამოცანები და სავარჯიშოები	32
ლიტერატურა	35
თავი 3. კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მოდელები	
3.1. მატერიალური წერტილის ცნება და დინამიკის განტოლებები. n-სხეულის პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ლანჟევენის მათემატიკური მოდელი	36
3.2. მყარი სხეულის დინამიკის მათემატიკური მოდელი	45
3.3. საფრენი აპარატის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი	48
3.4. განზოგადოებული კოორდინატები და ლაგრანჟის მათემატიკური მოდელი მატერიალურ წერტილთა დინამიკის აღსაწერად. ჰამილტონის მოდელი. პუასონის ფრჩხილები	52
3.5. გიროსკოპული სისტემების მათემატიკური მოდელირება	56
ამოცანები და სავარჯიშოები	57
ლიტერატურა	59
ნაწილი II. განაწილებულპარამეტრიანი მათემატიკური მოდელები	
თავი 4. მრავალნაწილაკიანი სისტემების მათემატიკური მოდელირება კლასიკურ მექანიკაში	

4.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი	60
4.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი	61
4.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები	62
4.4. სიმბოლური აღნიშვნები	66
4.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორები	69
4.6. მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები. ჰამილტონ-კელის თეორემა	71
4.7. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები	74
4.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები, დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით	77
4.9. ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის	79
4.10. ნოლის თეორემა. რეინერის დრეკადი მასალა. რეინერ-რივლინის სითხის რეოლოგიური განტოლება. მასალები მესხიერებით. განზომილებათა მეთოდი	80
ამოცანები და სავარჯიშოები	84
თავი 5. უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები	
5.1. დრეკადობის(ელასტიურობის) თეორიის მათემატიკური მოდელები. ლამეს მოდელი. ბელტრამი-მიჩელას მოდელი. რეინერის მოდელი. თერმოდრეკადობის ამოცანა	86
5.2. სითხეთა დინამიკის მათემატიკური მოდელები. ნავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით. ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური მოდელები	89
5.3. უწყვეტ გარემოში სითბოს განაწილების მათემატიკური მოდელირება(დიფუზიის განტოლება)	93
5.4. მასალათა პლასტიკური მუშაობის მათემატიკური მოდელირება	95
5.4.1. პლასტიკური დეფორმაციების წარმოშობის კრიტერიუმები	97
ლიტერატურა	99
შინაარსი	100