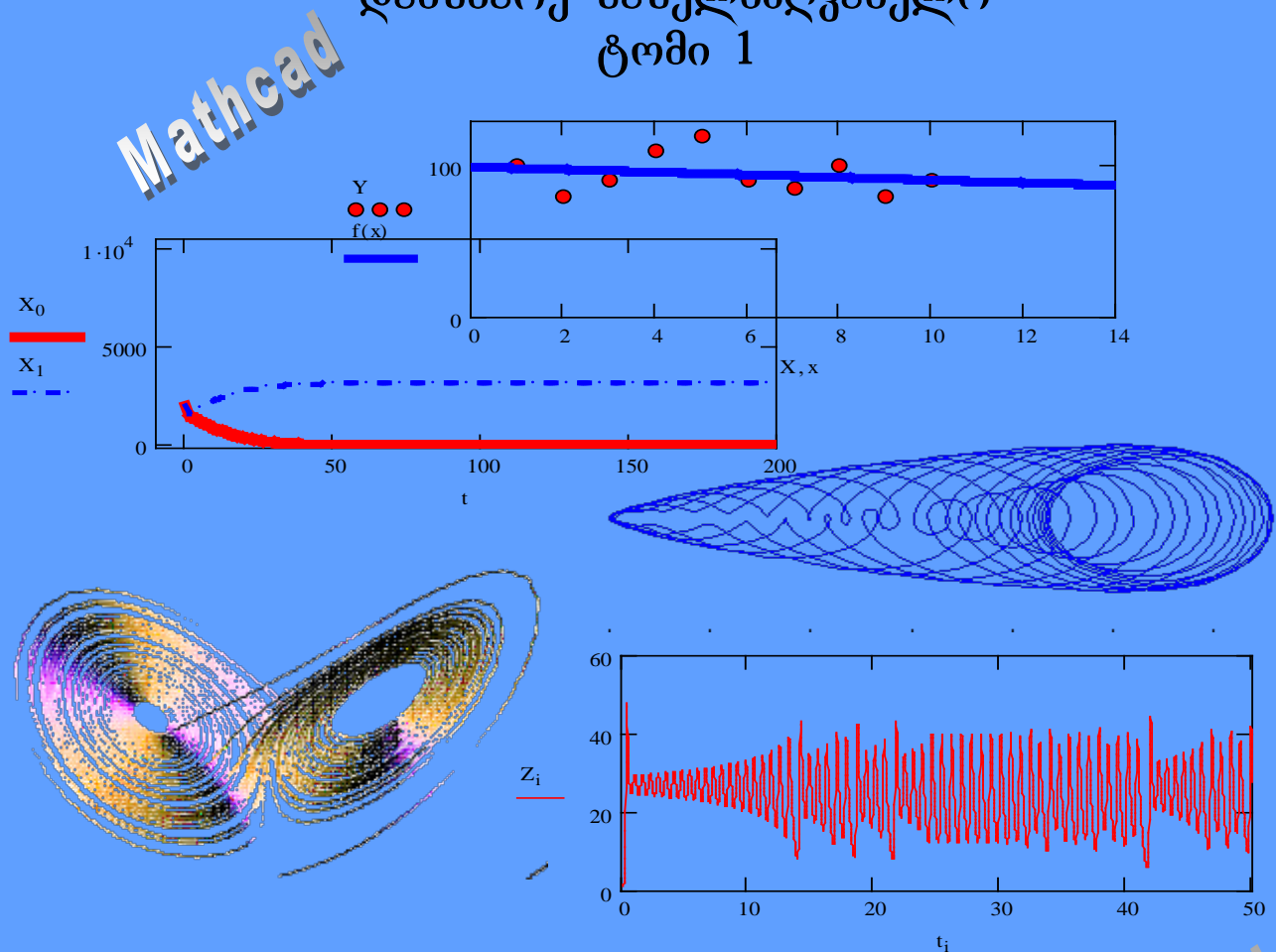


თ. ობგაძე, ნ.თუშიშვილი, ლ.გურგენიძე,
ს.მუსხაშავერიძე, ე.მეტრეველი, ნ.ვარძიაშვილი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები

დამხმარე სახელმძღვანელო
ტომი 1



„ ტექნიკური უნივერსიტეტი“

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თამაზ ობგაძე, ნატო თუშიშვილი, ლაშა გურგენიძე,
სალომე მუხაშაურია, ელენე მეტრეველი, ნინო ვარძიაშვილი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები

დამხმარე სახელმძღვანელო

ტ.1.

2014
თბილისი

ნაშრომი ძირითადად ემყარება პროფესორ თამაზ ოზგაძის ხელმძღვანელობით, მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევების შედეგებს და მთლიანად ეხმარება დარგის თანამედროვე განვითარების დონეს. მოიცავს ცოცხალი სისტემების ანალიზის ძირითად მათემატიკურ მეთოდებს. ცოცხალ სისტემებში შედიან როგორც ბიოფიზიკური, ასევე, სოციალურ-ეკონომიკური, ფინანსური და პოლიტიკური სისტემები.

განხილულია, ცოცხალი სისტემების, შესაბამისი დინამიკური სისტემების როგორც რაოდენობრივი გათვლის, ასევე, თვისობრივი კვლევის მეთოდები. გადმოცემულია, ცოცხალი დინამიკური სისტემების ბიფურკაციული ანალიზისა და ქაოსის კვლევის მეთოდები.

დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტი სრული პროფესორი სულხან ხუციშვილი

© საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2014

ISBN 978-9941-20-470-8 (ყველა ტომი)

ISBN 978-9941-20-471-5 (პირველი ტომი)

ნაშრომი ეძღვნება
საინჟინრო აკადემიის ნამდვილი წევრის,
ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორის,
ნოდარ ჯიბლაძის ნათელ ხსოვნას

წინასიტყვაობა

შემოთავაზებული წიგნის “ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები” - სხვადასხვა ნაწილებს, პროფესორი თამაზ ობგაძე, წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში და ამჟამად, კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდური მითითებების მიმართ მიდგომა წარმოადგენს ავტორის სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. დამხმარე სახელმძღვანელო წარმოადგენს ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტზე, ამჟამად მოქმედი პროგრამების საგანთა მთელი წყების, რთული ნაწილების გაღრმავებულ გადმოცემას.

ნაშრომში ფართოდ გამოიყენება **Mathcad 2013** -ის გამოყენებითი პროგრამების პაკეტი. ასევე, სხვა შესაბამისი ინფორმაციული ტექნოლოგიები. დამხმარე სახელმძღვანელოს ყოველი თავის ბოლოს, მოყვანილია ლიტერატურის სია და დამოუკიდებლად შესასრულებელი ამოცანები.

უნდა ავლნიშნოთ, რომ საქართველოში ჩატარებული განათლების რეფორმის შედეგად, ისე გამარტივდა მათემატიკის ზოგადი კურსის პროგრამა და იმდენად შემცირდა საათების რაოდენობა, რომ ჩვენ იძულებული ვიყავით, დაგვემატებინა უმაღლესი მათემატიკის რიგი საკითხების განხილვა, რათა შეგვემზადებინა სტუდენტები უფრო რთული, სპეციალური საკითხებისათვის.

შესავალი

ცოცხალი სისტემები – თვითორგანიზებადი და თვითწარმოქმნადი გარე სამყაროსთან ურთიერთქმედი სისტემებია, რომელთაც ახასიათებთ ცოცხალი ორგანიზმებისათვის დამახასიათებელი თვისებები.

არსებობს აზრი, რომ ცოცხალი ადამიანებისაგან შემდგარ სისტემებს, როგორცაა სოციალური და ეკონომიკური სისტემები, ახასიათებთ რიგი თვისებებისა, რომლებიც ანალოგიურია ცოცხალი ორგანიზმებისა. ეს ცოცხალი ორგანიზმებია, თავისი უჯრედებით, ნივთიერებათა ცვლით და ნერვული სისტემით. მასში, თითოეულ საზოგადოებრივ ინსტიტუტს, აქვს თავისი დანიშნულება ორგანიზმის სიცოცხლისუნარიანობის შენარჩუნებაში. მაგალითად, არმია მოქმედებს, როგორც ორგანიზმის იმუნური სისტემა, რათა დაიცვას ქვეყანა უცხოთა შემოჭრისაგან, ხოლო მთავრობა ასრულებს ტვინის ფუნქციას, რათა მიიღოს გადაწყვეტილება და შეასრულოს პროცესების მართვა. ეს აზრი, პირველად გაჟღერდა ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, **არისტოტელეს** მიერ.

ასეთ სისტემებში, პროცესები დეცენტრალიზებულია, წინასწარ ვერ პროგნოზირდება და მუდმივად იცვლება. რთული ადაპტირებული მოქმედება ხორციელდება ორგანიზმის სხვადასხვა ავტონომიური კომპონენტების ურთიერთქმედების ხარჯზე.

ყოველივე ამან მიგვიყვანა იქამდე, რომ ცოცხალი ორგანიზმის მსგავსი სისტემებისათვის 1978 წელს ჩამოყალიბდა **ცოცხალი სისტემების ზოგადი თეორია**, რომლის ავტორიც არის **ჯეიმს მილერი**.

ეკოლოგიაში განიხილება ეკოლოგიური სისტემები, როგორც ცოცხალი სისტემებისა და გარემო პირობების ერთიანობა.

ეკონომიკაში, ფართოდაა გაშლილი მუშაობა ცოცხალი სისტემების, როგორც თვითორგანიზებადი ღია სისტემების მოდელების შემუშავებისა და კვლევისათვის. ამ მიმართულებით კვლევები ემყარება **ჯ.მილერის**, **მ.ჟელენის** და **უ.მატურანოს** ფუნდამენტურ შრომებს.

ყველა ცოცხალი ორგანიზმისათვის დამახასიათებელია რიგი თვისებებისა, რაც მას განასხვავებს არაცოცხალი სისტემებისაგან. განვიხილოთ ცოცხალი ორგანიზმებისათვის დამახასიათებელი თვისებები:

1. **ქიმიური შემადგენლობის თავისებურება.** ცოცხალი ორგანიზმები აგებულია იგივე ქიმიური ელემენტებისაგან, რაც არაცოცხალი, თუმცა, მათი რაოდენობრივი

ურთიერთმიმართება სხვადასხვანაირია. არაცოცხალი ორგანიზმები ჟანგბადის გარდა შეიცავენ გოგირდს, რკინას, მაგნიუმს, ალუმინს და ა.შ. ცოცხალი ორგანიზმები კი ძირითადად (98%) შეიცავენ ოთხ ელემენტს – ნახშირბადი, ჟანგბადი, აზოტი და წყალბადი;

2. ნივთიერებათა ცვლა. ყველა ცოცხალი ორგანიზმისათვის დამახასიათებელია გარემოსთან ნივთიერებათა გაცვლა. გარემოდან შთაინთქმება ორგანიზმის ფუნქციონირებისათვის საჭირო ნივთიერებები და ორგანიზმიდან გარეთ გამოიყოფა გადამუშავებული პროდუქტები. ნივთიერებათა ცვლა, უზრუნ-ველყოფს ორგანიზმის ქიმიური და ორგანიზაციული შემადგენლობის სტაბილურობასა და ფუნქციონირებას გარემო პირობების ცვლის მიუხედავად;
3. თვითწარმოქმნა(რეპროდუქცია). ცოცხალი ორგანიზმების გამრავლებისას, შთამომავლობა გავს მშობლებს. ასე, რომ რეპროდუქციისას ხდება თავისი მსგავსი ორგანიზმების წარმოქმნა. ეს პროცესი ხორციელდება ცოცხალი ორგანიზმის ყველა დონეზე(უჯრედებში, ორგანელებში, მიტოხონდრიებში, პლასტიდებში და ა.შ.). თვითწარმოქმნის ინფორმაცია ძვეს დიზოქსირიბონუკლეინის მუავის ნუკლეოტიდების მიმდევრობა-ში. ასე, რომ რეპროდუქციის უნარი, ცოცხალი ორგანიზმის ერთ-ერთი ძირითადი თვისებაა, რომელიც მჭიდროდაა დაკავშირებული მემკვიდრეობითობასთან.
4. მემკვიდრეობითობა. მდგომარეობს ცოცხალი ორგანიზმის თვისებაში, გადასცეს თავისი თვისებები შთამომავლობას. ეს ინფორმაცია გადაეცემა დიზოქსირიბონუკლეინის მოლეკულის საშუალებით. ამასთან ერთად, გარემო პირობების ცვლილება იწვევს ბიოლოგიური მატრიცის ცვლილებას, რაც საშუალებას აძლევს ცოცხალ ორგანიზმს, შეეგუოს შეცვლილ გარემო პირობებს. რამაც შეიძლება წარმოქმნას სიცოცხლის ახალი ფორმები ან სხვა სახეობის ორგანიზმები;
5. განვითარება. ესაა მატერიის ზოგადი თვისება. განვითარების შედეგად, ცოცხალ ორგანიზმში წარმოიქმნება ახალი შემადგენლობა და სტრუქტურა. ეს განპირობებულია ონტოგენეზით და ისტორიული განვითარებით, ან ფილოგენეზით. ონტოგენეზში თანდათანობით ვლინდება ცოცხალი ორგანიზმის

ინდივიდუალური თვისებები. განვითარების პროცესში წარმოიქმნება ინდივიდის სპეციფიკური სტრუქტურული ორგანიზაცია, ხოლო მისი მასის ცვლილება განპირობებულია მაკრომოლეკულების, უჯრედის ელემენტარული სტრუქტურების და თვით უჯრედების რეპროდუქციით. **ფილოგენეზი**, ანუ ევოლუცია ცოცხალი ბუნების განვითარების შეუქცევადი პროცესია, რომლის დროსაც ხდება ადაპტაცია შეცვლილ გარემო პირობებთან და შესაბამისად, ახალი სახეობების წარმოქმნა, რაც იწვევს ცხოვრების პროგრესულ გართულებას.

6. **გალიზიანება.** ნებისმიერი ცოცხალი ორგანიზმი დაკავშირებულია გარემოსთან, იღებს საკვებს და განიცდის ზემოქმედებას სხვა ორგანიზმებისაგან. ყველა ორგანიზმს გააჩნია გარე გამლიზიანებელზე გარკვეული ტიპის რეაქცია. გალიზიანებაზე რეაქცია, ხორციელდება ნერვული სისტემის მეშვეობით და მას, რეფლექსს უწოდებენ;
7. **დისკრეტულობა.** თითოეული ინდივიდი იზოლირებულია სხვებისაგან სივრცეში. ასევე, ორგანიზმის თითოეული სტრუქტურული ელემენტი გამოყოფილია სხვა ელემენტებისაგან. ორგანიზმის დისკრეტული სტრუქტურა საშუალებას იძლევა შეიცვალოს დაძველებული ელემენტი(მოლეკულა, ფერმენტი, უჯრედის ორგანოიდი, უჯრედი) ახლით და განახლდეს ორგანიზმი მისი ფუნქციონირების შეწყვეტის გარეშე. ასევე, დისკრეტულობა საშუალებას იძლევა ბუნებაში მოხდეს ბუნებრივი გადარჩევა;
8. **თვითრეგულაცია(ავტორეგულაცია).** ესაა ცოცხალი ორგანიზმის თვისება, მიუხედავად გარემო პირობების უწყვეტი ცვლილებისა, შეინარჩუნონ საკუთარი სხეულის ქიმიური შემადგენლობა და ფიზიოლოგიური პროცესების მიმდინარეობის ინტენსივობა. ასეთი პროცესები ხორციელდება რეგულატორული სისტემების მეშვეობით, როგორცაა ნერვული და ენდოკრინული სისტემები. ამ სისტემების ჩართვის სიგნალს იძლევა რომელიმე აუცილებელი ნივთიერების არასაკმარისი კონცენტრაცია ან სასიცოცხლო რომელიმე სისტემის ცუდი მდგომარეობა;
9. **რითმულობა.** ეს თვისება ახასიათებს, როგორც ცოცხალ, ასევე, არაცოცხალ ბუნებას და ის განპირობებულია სხვადასხვა კოსმოსური მოვლენებით: დედამიწის ბრუნვით მზის გარშემო, მთვარის ფაზებით და ა.შ. გარემო

პირობების პერიოდული ცვლა იწვევს ცოცხალი ორგანიზმის საკუთარი რითმების რხევას;

10. **ენერგოდამოკიდებულება.** ცოცხალი ორგანიზმები ღია სისტემებს წარმოადგენენ ფიზიკის თვალსაზრისით. ანუ, ცოცხალი დინამიკური სისტემების წონასწორობის მდგომარეობის მდგრადობა, მოითხოვს გარე სამყაროდან ენერჯიის ზემოქმედებას. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ცოცხალი ორგანიზმები ფუნქციონირებენ მანამ, სანამ ისინი იღებენ ენერჯიას და საკვებს გარედან.

ყოველივე ზემოთქმულიდან, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ცოცხალი სისტემები წარმოადგენენ ღია, თვითრეგულირებად და თვითწარმოქმნად სისტემებს, რომელთაც მულტიფრაქტალური სტრუქტურა აქვთ.

ამ წიგნში ჩვენ განვიხილავთ ცოცხალ სისტემებს და მათი ანალიზის თანამედროვე მეთოდებს. ცოცხალ სისტემებს, ზოგჯერ, აქტიურ სისტემებსაც უწოდებენ. აქტიური სისტემების დისკრეტული თეორია საკმაოდ კარგადაა გამოკვლეული ბურკოვ-ნოვიკოვის სკოლის მიერ. ამიტომ ჩვენ, ძირითადად განვიხილავთ უწყვეტ ცოცხალ სისტემებს.

თავი I. ბულის ალგებრების კატეგორია

შესავალი

კატეგორიათა თეორია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც მათემატიკურ სტრუქტურებს და მათ შორის კავშირებს სწავლობს გარკვეული აბსტრაქტული მეთოდების გამოყენებით. კატეგორიები პირველად შემოიტანეს სონდერს მაკლეინმა და სამუელ აილენბერგმა. კატეგორიათა თეორიის საბაზისო ცნებებია: კატეგორია, ფუნქტორი, ბუნებრივი გარდაქმნა, შეუღლება და ა.შ. კატეგორიათა თეორია ფართოდ გამოიყენება თეორიულ ინფორმატიკაში. ჩვენ განვიხილავთ ბულის ალგებრების კატეგორიას, სადაც მორფიზმების როლს ასრულებენ ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

1.1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგესხენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ გამონათქვამებს უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

მაგალითად: p – “სოკრატე ადამიანია”;

q – “ადამიანი მოკვდავია”;

r – “სოკრატე მოკვდავია”.

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ უნარული და ბინარული ოპერაციები.

განსაზღვრება: *უნარული* ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე (გამონათქვამზე). *უნა* – ლათინურად ნიშნავს ერთს.

განსაზღვრება: *ბინარული* ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე (გამონათქვამზე). *ბი* – ლათინურად ნიშნავს ორს.

განსაზღვრება: ორი p და q გამონათქვამის *დიზიუნქცია* (“ \vee ” – ან) ეწოდება ისეთ $p \vee q$ გამონათქვამს (p ან q), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან p ან q (ერთ-ერთი მაინც).

არისტოტელეს მოდელში[1-3] (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი(**true**) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი(**false**) გამონათქვამისა კი, უდრის 0-ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის(ცხრილი 1):

ცხრილი 1

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის **კონიუნქცია** (“**^**” – და) ეწოდება ისეთ $p \wedge q$ გამონათქვამს(**p** და **q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია **p** და **q** (ორივე ერთდროულად).

კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი(ცხრილი 2):

ცხრილი 2

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

განსაზღვრება: ორ **p** და **q** გამონათქვამს **ექვივალენტური** (\equiv) ეწოდებათ (ჩაწერენ $p \equiv q$), თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები, მათში შემავალი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი ორი ბინარული ოპერაციის (“**v**” და “**^**”) თვისებები. ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად(ცხრილი 3).

გამონათქვამების თვისებები	თვისების დასახელება	შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის	ემთხვევიან(+), თუ, არ ემთხვევიან(-) თვისებები
$p \vee q \equiv q \vee p$	კომუტაციურობის თვისება	$a+b=b+a$	+
$p \wedge q \equiv q \wedge p$		$axb=bxa$	+
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	ასოციურობის თვისება	$(a+b)+c=a+(b+c)$	+
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		$(axb)xc=ax(bxc)$	+
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	დისტრიბუციულობის თვისება	$(a+b)xc=axc+bx c$	+
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$		$(axb)+c \neq (a+c)x(b+c)$	-
$p \vee p \equiv p$	იდემპოტენტობის თვისება	$a+a \neq a$	-
$p \wedge p \equiv p$		$axa \neq a$	-

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან შედარებით. რაც იმის მომასწავებელია, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართებაში (აღგებრის თვალსაზრისით) უფრო სხვა სტრუქტურული სისტემაა ბულის აღგებრასთან შედარებით.

ეხლა, განვიხილოთ უარყოფის უნარული ოპერაცია, რომელიც განისაზღვრება გამონათქვამებზე:

განსაზღვრება: p გამონათქვამის უარყოფა (“ \neg ”-არა) ეწოდება ისეთ $\neg p$ გამონათქვამს(არა p), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა p მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა p ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე(ცხრილი 4) :

ცხრილი 4

p	$\neg p$
1	0
0	1

ამრიგად, გამონათქვამთა აღგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია (\vee, \wedge, \neg). ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს მთელ გამონათქვამთა აღგებრას. ანალოგიურ, აღგებრულ სისტემებს ბულის აღგებრებს უწოდებენ.

ყველა სხვა ოპერაცია გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას: “თუ p , მაშინ q ”. ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად : $p \Rightarrow q$ (p – დან გამომდინარეობს q). “ \Rightarrow ” - სიმბოლოს იმპლიკაციის უწოდებენ.

იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებები, საჭიროა გამოვეყნოთ ის ძირითადი კანონები, რომლებსაც ჩვენ აზროვნების კანონებს ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალიზაცია გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას(ცხრილი 5) :

ცხრილი 5

კანონის ფორმალური ჩაწერა	კანონის დასახელება
$p \vee (\neg p) \equiv 1$	გამორიცხული მესამის კანონი
$p \wedge (\neg p) \equiv 0$	წინააღმდეგობის კანონი
$p \vee 1 \equiv 1$; $p \vee 0 \equiv p$; $p \wedge 1 \equiv p$; $p \wedge 0 \equiv 0$	შთანქმის კანონები
$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$	კონტრაპოზიციის კანონი
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r)$	სილოგიზმის კანონი
$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$	დე მორგანის კანონები
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$	
$\neg(\neg p) \equiv p$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	ექვივალენტობის კანონი

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა : სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალიზაცია გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

მაგალითად: ვთქვათ, გვაქვს წინადადება - “თუ, დიდია ტენიანობა და მაღალია ტემპერატურა, მაშინ ჩვენ, თავს ვერ ვგრძნობთ კარგად”. მოვახდინოთ მისი ფორმალიზაცია. ამისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები :

“დიდია ტენიანობა” – აღვნიშნოთ **P** ასოთი ;

“მაღალია ტემპერატურა” – აღვნიშნოთ **Q** ასოთი ;

“თავს ვგრძნობთ კარგად” – აღვნიშნოთ **C** ასოთი ;

მაშინ, შემოთავაზებული წინადადება შეიძლება ფორმალურად ჩაწეროთ შემდეგი სახით:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg C). \tag{1.1}$$

ასეთნაირად აგებულ ფორმალურ გამოსახულებებს **ბულის ფორმულებს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც აიგებიან ატომებზე - საწყის გამონათქვამებზე, ბულის ალგებრის სამი ოპერაციისა, იმპლიკაციის ცნებისა და ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით **ბულის ფორმულები** ეწოდებათ.

მაგალითად: $P \wedge$; და $\Rightarrow (\neg C)$ - არა არიან ბულის ფორმულები.

განსაზღვრება: ბულის ფორმულებს **ექვივალენტური** ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები მართლაც ექვივალენტური არიან. ამისათვის, განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების (p,q) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 6) და ვახვეთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \text{ დე მორგანის პირველი კანონი} \quad (1.2)$$

დამტკიცება :

						ცხრილი 6
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. ანუ, ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური.

განსაზღვრება: ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების (გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – **ტავტოლოგია** ეწოდება.

მაგალითად : 1) $G \equiv p \vee (\neg p)$ – ტავტოლოგიაა, გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

2) განვიხილოთ ფორმულა : $H \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$. მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად, საჭიროა, ან შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი, ან გავამარტივოთ ის აზროვნების ზემოთ მოყვანილი კანონების მიხედვით. ჩვენ, ამ მაგალითში, ვირჩევთ ბულის ფუნქციის გამარტივების გზას :

$$H \equiv (((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \vee Q) \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q) \equiv \quad (1.3)$$

$$\equiv (0 \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q \equiv ((Q \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (\neg(Q \wedge P)) \vee Q \equiv (\neg Q) \vee (\neg P) \vee Q \equiv 1 \vee (\neg P) \equiv 1.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა *წინააღმდეგობრივია* (არაა სწორი), თუ, ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების(მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად : $G \equiv p \wedge (\neg p)$ ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

სავარჯიშო: აჩვენეთ, რომ ფორმულა

$$H \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge (\neg Q)) - \text{წინააღმდეგობრივია.} \quad (14)$$

განსაზღვრება: ატომს ან ატომის უარყოფას *ლიტერა* ეწოდება.

მაგალითად : Q ; $\neg P$ - ლიტერებია. $P \Rightarrow Q$ – არაა ლიტერა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n ; \quad (15)$$

წარმოადგენილია *კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში*, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს *დიზიუნქტიურ ლიტერას*.

ანუ, კონიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა, შეიცავს ლიტერების დიზიუნქციათა კონიუნქციას.

$$\text{მაგალითად : } F \equiv (P \vee (\neg Q)) \wedge (\neg P \vee Q). \quad (16)$$

ანალოგიურად, განიხილავენ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ცნებას.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n \quad (1.7)$$

წარმოადგენილია **დიზიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს **კონიუნქტიურ ლიტერას**. ანუ, დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა შეიცავს ლიტერების კონიუნქციათა დიზიუნქციას.

მაგალითად : $F \equiv (P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q)$. (1.8)

თეორემა : ვთქვათ მოცემულია ფორმულები $F_1; F_2; \dots F_n$ და ფორმულა G . ფორმულა G გამომდინარეობს $F_1; F_2; \dots F_n$ ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow G$ ტავტოლოგიაა.

თეორემა : ვთქვათ მოცემულია ფორმულები $F_1; F_2; \dots F_n$ და ფორმულა G . ფორმულა G გამომდინარეობს $F_1; F_2; \dots F_n$ ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \wedge (\neg G)$ წინააღმდეგობრივი ფორმულაა.

P.S.

1) წარმოდგენილი თეორია, არა მარტო წარმოადგენს სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას **რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის შესახებ**, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით [4];

2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს **სამნიშნა ლოგიკაც**. აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია [3].

3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n-ნიშნა ლოგიკაც**. რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერ-ჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში [5].

4) შემუშავებულია **არამკაფიო ლოგიკაც** [6]. აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანაში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია.

5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, **ინტუიციონისტურ ლოგიკას**, რომლის ფუძემდებლებიც არიან ბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი [7]. ინტუიციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

1.2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგი-ურად. სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

მაგალითად:

A – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;

N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

M – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი **გეორგ კანტორი**[8]. სიმრავლის ცნებას ზუსტი განსაზღვრება არა აქვს, თუმცა ის მოიცემა ინტუიციურად გ.კანტორ-რის მიერ შემდეგი ფორმით:

მინიშნება: *სიმრავლე* არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

განსაზღვრება: ორ სიმრავლეს ეწოდებათ **ტოლი**, თუ, ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად: $A=B$.

შემოვიღოთ დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის **გაერთიანება** (“ \cup ” - *გაერთიანება*) ეწოდება ისეთ $A \cup B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის ან A , ან B სიმრავლეს(**ერთ-ერთს მაინც**).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{e | e \in A \vee e \in B\}. \quad (1.9)$$

ჩანაწერი $e \in A$ - წაიკითხება ასე "e ეკუთვნის (როგორც ელემენტი) A სიმრავლეს".

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განისაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის *თანაკვეთა* ("∩" - თანაკვეთა) ეწოდება ისეთ $A \cap B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A-საც და B - საც (ერთდროულად).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cap B = \{e | e \in A \wedge e \in B\}. \quad (1.10)$$

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განისაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ეხლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს *ცარიელი სიმრავლე* (\emptyset) ეწოდება.

P.S. ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ყველა სხვა სიმრავლეს *უნივერსალური* (E) სიმრავლე ეწოდება.

P.S.

1. უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

2. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას.

სიმრავლე, რომელიც თავის თავს შეიცავს ელემენტის სახით, ცოცხალი სისტემების სივრცეში მოხვედრისას, ფრაქტალად გარდაიქმნება, რადგან სხვადასხვა მასშტაბში აქვს, ერთიდაიგივე, ერთმანეთში უსასრულოდ ჩალაგებული განუსაზღვრელი სტრუქტურა.

ამდენად, ასეთი ტიპის წარმონაქმნები არ უნდა ჩავთვალოთ კლასიკურ სიმრავლედ, ანუ, უნივერსალური სიმრავლისათვის ასეთი წინააღმდეგობრივი სტრუქტურის მოთხოვნა არაა მართლზომიერი.

ის ფაქტი რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ჩართულია მასში როგორც ქვესიმრავლე, ჩაიწერება შემდეგნაირად: $A \subseteq B$.

ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდევ მას.

იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხებულია, ამბობენ რომ, A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი და ჩაწერენ $A \subset B$.

ეხლა განვიხილოთ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა (ცხრილი 7).

ცხრილი 7

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთის თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A \cup B = B \cup A$	კომუტაციურობა	$p \vee q \equiv q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ასოციურობა	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$		$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$A \cup A = A$	იდემპოტენტობა	$p \vee p \equiv p$
$A \cap A = A$		$p \wedge p \equiv p$
$A \cup E = E; A \cup \emptyset = A;$ $A \cap E = A; A \cap \emptyset = \emptyset$	შთანთქმის კანონები	$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p; p \wedge 0 \equiv 0$

ეხლა, შემოვიღოთ გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას **სიმრავლის დამატებას** ეძახიან.

განსაზღვრება: მოცემული A სიმრავლის **დამატება** E **უნივერსუმამდე** ეწოდება ისეთ A^c სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის E -ს და არ ეკუთვნის A -ს.

ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:
 $A^c = \{e \mid e \in E \wedge e \notin A\}$. (1.11)

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (1.12)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (1.13)$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგნაირად:

$$(A^c)^c = A. \quad (1.14)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაობისა, ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან.

განსაზღვრება: ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ **ჰომომორფული**, თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.

ასე, რომ ცხადია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა **ჰომომორფულია** სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.

1.2.1. ფრაქტალი, როგორც სიმრავლე

A სიმრავლე მოიცემა თავისი ელემენტების საშუალებით

$$A = \cup_{i \in I} A_i,$$

სადაც A_i მოცემული A სიმრავლის i -ური ელემენტია, ხოლო I ინდექსთა სიმრავლეა.

სიმრავლის თითოეული A_i ელემენტი, ის უმცირესი “აგურთაგანია”, რომლისგანაც A სიმრავლე შედგება. თუ, გვინდა A_i ელემენტის შიგნით შევიდეთ, მაშინ მას უნდა შევხედოთ, როგორც “დამოუკიდებელ” ახალ სიმრავლეს. ეს მოგვცემს

საშუალებას “დავინახოთ” მისი შემადგენელი $(A_i)_j$ ელემენტები. თუ გვინდა შევიდეთ უფრო ღრმად, ანუ, შევისწავლოთ $((A_i)_j)_k$ სიმრავლე, მაშინ $(A_i)_j$ ელემენტებს უნდა შევხედოთ როგორც დამოუკიდებელ სიმრავლეებს და ა.შ.

ცხადია, რომ A_i არის A სიმრავლისათვის წერტილი, ხოლო $(A_i)_j$ არის A_i სიმრავლის წერტილი და ა.შ. ანუ, შეგვიძლია შემოვიღოთ ცნება:

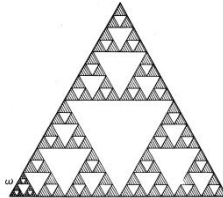
განსაზღვრება: A სიმრავლის ყოველ A_i ელემენტს, მისი წერტილი ეწოდება.

თუ, A სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა (ანუ, გვაქვს მასში მანძილის ცნება), მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ A სიმრავლის დიამეტრი არაა ნაკლები, მისი A_i წერტილების დიამეტრებზე, ანუ,

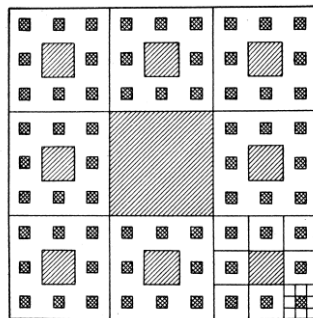
$$diam A \geq diam(\max_i(A_i)).$$

განსაზღვრება: თუ, $A, A_i, (A_i)_j \dots$ ერთნაირი გეომეტრიული სტრუქტურის სიმრავლეებია, მაშინ A სიმრავლეს **ფრაქტალი** ეწოდება.

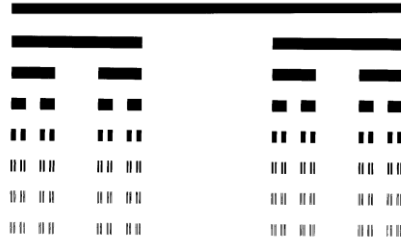
ფრაქტალებს ახასიათებს სხვადასხვა მასშტაბში განმეორებადი გეომეტრიული სტრუქტურა. მაგალითად, ცნობილი კლასიკური, ფრაქტალური სიმრავლეებია: სერპინსკის სამკუთხედი (ნახ.1.1); სერპინსკის კვადრატული ხალიჩა (ნახ.1.2); კანტორის სიმრავლე (ნახ.1.3).



ნახ. 1.1. სერპინსკის სამკუთხედი



ნახ. 1.2. სერპინსკის კვადრატული ხალიჩა



ნახ. 13. კანტორის სიმრავლე

ასევე, ფრაქტალია ტყეში ყოველი ხე, რომლის თითოეულ ტოტს აქვს ერთნაირი გეომეტრიული სტრუქტურა, თუმცა, რაც უფრო ზემოთ კენწეროსკენაა ტოტი, მისი ზომები უფრო მცირე მასშტაბისაა.

ფრაქტალური ფორმა აქვს ცოცხალი ორგანიზმების შინაგანი ორგანოების ქსოვილს(ფილტვს, ღვიძლს, გულს, სისხლძარღვებს), თუმცა, თითოეული მათგანის ფრაქტალური სტრუქტურა ინდივიდუალურია, ამდენად, ცოცხალი სისტემები მულტიფრაქტალური სტრუქტურის მატარებლები არიან.

13. რელაციური სისტემები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე. მაშინ ამ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს აღნიშნავენ $A \times A = A^2$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთი $(a;b)$ დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის A -ს, ხოლო მეორე B -ს.

სიმბოლოების საშუალებით ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$$A \times B = \{(a;b) | a \in A \wedge b \in B\}. \quad (1.15)$$

ეს განმარტება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ მიმართებისა და ფუნქციის ცნება.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ R ქვესიმრავლეს, მიმართება ეწოდება.

ე.ი. თუ R მიმართებაა, მაშინ $R \subset A \times B$. (1.16)

მაგალითი : თუ, A – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა(წრფის წერტილების სიმრავლე), მაშინ A^2 – დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს და ნებისმიერი

მონაკვეთი ამ სიბრტყეზე, ან ნებისმიერი წერტილთა ქვესიმრავლე, იქნება მიმართება განსაზღვრული A სიმრავლეზე.

განსაზღვრება: ისეთ მიმართებას, რომლის დროსაც a -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება b -ს ერთადერთი მნიშვნელობა *ფუნქცია* ეწოდება.

ე.ი. ფუნქცია ისეთი გადასახვაა $f:A \rightarrow B$, რომლისთვისაც A სიმრავლის ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, f ფუნქციას მოეთხოვება **ცალსახობა**.

P.S.

არსებობს სამი ტიპის გადასახვა: *სურექცია, ინექცია და ბიექცია*. სურექციის დროს გადასახვაში მონაწილეობენ A და B სიმრავლეების ყველა ელემენტი; ინექციის დროს A სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაშია B სიმრავლის რაღაც ნაწილთან; ხოლო ბიექციის დროს, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა A და B სიმრავლეებს შორის. ასე, რომ ბიექცია არის, ერთდროულად, ინექციაც და სურექციაც.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f:A \rightarrow B$, რომ A და B რაიმე აბსტრაქტული სიმრავლეებია (ფუნქციები, ადამიანები არჩეული გარკვეული ნიშნით, ქალაქები, ნეირონები . . .), მაშინ f გადასახვას **ოპერატორს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: ფუნქციებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება.

მაგალითი: $C^\infty(G)$ - თავის ნებისმიერი რიგის წარმოებულთან ერთად უწყვეტი, ფუნქციებისაგან შემდგარი სიმრავლეა.

L_2 - კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებისაგან შედგენილი ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა.

რაც შეეხება ოპერატორის ცნებას, ჩვენ ვიცით, წარმოებულის ოპერატორი $\frac{d}{dx}:L_2 \rightarrow L_2$; სადაც L_2 ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა; ასევე, ვიცით ინტეგრების ოპერატორი; კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ოპერატორი და.ა.შ.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f:A \rightarrow B$, რომ A რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა, ხოლო B რაიმე რიცხვითი სიმრავლე, მაშინ f გადასახვას **ფუნქციონალს** უწოდებენ.

ეს ფუნქციონალი პრაქტიკაში გამოიყენება შემდეგი ფორმით:

$$K(f) = \int_0^1 f(x)dx. \quad (1.17)$$

მაგალითი: $\int_0^1 dx : L_2 \rightarrow R$ ფუნქციონალი ნებისმიერ ფუნქციას

L_2 -ფუნქციონალური სივრციდან გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში. ანუ, ნებისმიერ ფუნქციას შეუსაბამებს, მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობას ამ ფუნქციიდან.

განსაზღვრება: თუ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე და მასზე განსაზღვრულია R მიმართება, მაშინ $\langle A; R \rangle$ წყვილს **რელაციური სისტემა** ეწოდება.

მაგალითი: თუ, A გამონათქვამთა ბულის ალგებრაა, ხოლო R მასში განსაზღვრული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle A; R \rangle$ იქნება რელაციური სისტემა. ასევე, თუ, B სიმრავლეთა ბულის ალგებრაა და S მასზე განსაზღვრებული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle B; S \rangle$ რელაციური სისტემაა.

განსაზღვრება: ორი $\langle A; R \rangle$ და $\langle B; S \rangle$ რელაციურ სისტემას ეწოდებათ **იზომორფული**, თუ, არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა $f:A \rightarrow B$, რომ ნებისმიერი $(\forall) x, y \in A$ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xRy \equiv f(x)Sf(y). \quad (1.18)$$

იზომორფული რელაციური სისტემებისათვის, თუ რაიმე თვისებას აქვს ადგილი $\langle A; R \rangle$ -ში, მაშინ, აქვს ადგილი $\langle B; S \rangle$ -შიც. მაშასადამე, **იზომორფული სისტემები ალგებრულად იდენტურია(ერთნაირია).**

P.S.

ჰომომორფიზმი, იზომორფიზმისაგან განსხვავებით, არ ითხოვს შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას. ხოლო, თუ ჰომომორფიზმის მოთხოვნას დავეუმატებთ შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას მივიღებთ იზომორფიზმს. რელაციური სისტემები ფართოდ გამოიყენება ინფორმაციის გეომეტრიული კოდირების თეორიაში [9-17] (**RO-ფუნქციის მეთოდი**).

1.4. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები

თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორია არის ხელოვნური ინტელექტის შემუშავების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა კომპიუტერის საშუალებით დაავადგინოთ, რომ მოცემული მრავალრიცხოვანი ინფორმაციიდან შესაძლებელია, თუ არა, გავაკეთოთ გარკვეული დასკვნა. მაშინ, როცა ჩვენი ამოცანა ფორმალიზებულია ბულის ფორმულების მეშვეობით, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა წარმოადგენს, თუ არა მოცემული ფორმულა, სხვა აგებულ ფორმულათა სიმრავლის ლოგიკურ შედეგს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ, აქციების კურსი ეცემა, თუ მათი საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება. დაუშვათ, ასევე, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურად გრძნობს თავს, როცა აქციების კურსი ეცემა. ვთქვათ, ცნობილი გახდა, რომ საწყისი საპროცენტო განაკვეთები იზრდება. მაშინ, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

იმისათვის, რომ გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა ავტომატურად, მოვახდინოთ მოცემული ამოცანის ფორმალიზაცია.

P – აქციების საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება;

S – აქციების ფასი ეცემა;

U – ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

მაშინ, ამ ამოცანის ფორმალიზაციას აქვს სახე:

$$P \Rightarrow S; \quad (1.19)$$

$$S \Rightarrow U; \quad (1.20)$$

$$P; \quad (1.21)$$

$$U. \quad (1.22)$$

ვაჩვენოთ, რომ (1.22) ჭეშმარიტია, როგორც კი ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულა:

$((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$. ჯერ, ეს ფორმულა გარდავქმნათ კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმამდე:

$$\begin{aligned} ((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P) &\equiv ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \wedge P \equiv (P \wedge ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ &\equiv (((P \wedge (\neg P)) \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv ((0 \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ &\equiv (P \wedge S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv (P \wedge S \wedge (\neg S)) \vee (P \wedge S \wedge U) \equiv P \wedge S \wedge U. \end{aligned} \quad (1.23)$$

ასე, რომ თუ, $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$ ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ $P \wedge S \wedge U$ ფორმულაც ჭეშმარიტია. რადგან ფორმულა $P \wedge S \wedge U$ ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია P, S და U გამონათქვამები ერთდროულად, ცხადია, რომ მაშინ ჭეშმარიტია U

გამონათქვამიც. რაც, იმას ნიშნავს რომ, ფორმულა U, არის (1.19), (1.20) და (1.21) ფორმულების შედეგი.

P.S. ანალოგიურად ხდება სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ფორმალიზაცია და მათი ავტომატური ამოხსნა კომპიუტერის მეშვეობით, რისთვისაც შემუშავებულია გილმორის, დევისის, რობინსონის, ჩენის, კოვალსკის და ერბრანის ალგორითმები[4].

1.5. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგაძის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდი

ჩვენს მიერ ადრე განხილულ გამონათქვამებს ქონდათ ფიქსირებული სახე: “სოკრატე ადამიანია”, “სოკრატე მოკვდავია” და.ა.შ. პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ გამონათქვამ-ფუნქციებს: “x რაციონალური რიცხვია”, “y კეთილი ადამიანია”. . .

განსაზღვრება: ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს პრედიკატებს უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა რვაჩოვმა შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც R – ფუნქციის მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად[9]. მოგვიანებით, R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგაძის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე [10-11], რაც საშუალებას იძლევა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბდეს R - ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადდეს მრავლადბმული შემთხვევებისათვის.

ესლა გადავიდეთ, თვით RO – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის მეშვეობით **ბულის ალგებრების კატეგორიაში (ბულის ალგებრების კატეგორია არის ბულის ალგებრების სიმრავლე, მათ შორის არსებულ გადასხვებთან (მორფიზმებთან) ერთად).**

$$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_r , \tag{1.24}$$

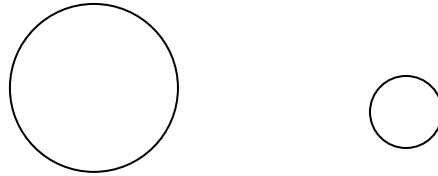
სადაც L_1 - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_2 - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_r - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

ეს ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია(ნახ.1.4)



ნახ.1.4. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(1.24) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ L_1 სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ **საყრდენ სიმრავლეებს**, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (1.25)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \geq 0\}, \quad (1.26)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (1.27)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \geq 0\}. \quad (1.28)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \quad (1.29)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით L_2 -ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით L_2 -ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (1.30)$$

სადაც P_1 - არის გამონათქვამი $x_1 \geq 0$,

P_2 - არის გამონათქვამი $x_2 \geq 0$,

P_3 - არის გამონათქვამი $x_3 \geq 0$,

P_4 - არის გამონათქვამი $x_4 \geq 0$,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$

$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2;$$

$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2. \quad (1.31)$$

ეხლა, გადავიდეთ L_r – ში რვაჩოვის ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (1.32)$$

მივიღებთ R – ფუნქციას :

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \quad (1.33)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (1.31) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია თ.ობგადის ჰომომორფიზმი[10] სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_{ro}, \quad (1.34)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (1.35)$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი” \Leftrightarrow “უდრის ნულს”;
“მცდარი” \Leftrightarrow “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \quad (1.36)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (1.37)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 ; \quad (1.38)$$

$$\text{ე.ი. } P = P_1 \vee P_2 ; \quad (1.39)$$

სადაც

$$P_1 - \text{არის გამონათქვამი } (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad (1.40)$$

$$P_2 - \text{არის გამონათქვამი } (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0 ; \quad (1.41)$$

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2].$$

როგორც ვხედავთ, თ.ობგადის[10] ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად გამარტივდა

R – ფუნქციის ანალიზური სახეც [12-17]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს ხშირად, რვაჩოვ-ობგადის RO – მეთოდს ეძახიან.

P.S.

სალაპარაკო ენა – ცოცხალი სისტემაა, მას ახასიათებს ევოლუცია, რაც გამოიხატება ახალი სიტყვებით შევსებასა და გრამატიკის დახვეწაში. ეს სისტემა ღია სისტემაა, რადგან მასზე მოქმედებას ახდენენ სხვა ენები. მაგრამ ცოცხალი სისტემებისათვის დამახასიათებელია თვითმყობადობის დაცვის მექანიზმებიც (იმუნური სისტემა), რაც ირთვება მაშინ, როდესაც გარედან ცდილობენ მის დარღვევა – დაზიანებას(ასე მოხდა როცა გარედან ცდილობდნენ ქართული ენის სახელმწიფო სტატუსის შეცვლას). ეს იყო ერთერთი მთავარი მიზეზთაგანი, რამაც გამოიწვია ეროვნული მოძრაობის აღმავლობის დაჩქარება და ხელისუფლების ბიფურკაციულად – სტიქიურად, შეცვლაც.

ამოცანები და საგარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით.
2. განსაზღვრეთ ბინარული ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cup A^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(p \vee (\neg q)) \wedge q \equiv ?$
5. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით?
6. რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან სურექცია და ბიექცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 2

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების მეშვეობით.
2. ჩამოწერეთ შთანთქმის კანონები სიმრავლეებისათვის.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:

$$(A \cap B) \cup (A \cap A^c) = ?$$

- ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(p \wedge 1) \vee (p \wedge (\neg p)) \equiv ?$
- გაქვთ 3 ლიტრიანი და 5 ლიტრიანი ქილები. როგორ ჩავასხათ მათი მეშვეობით ღოჭში 4 ლიტრი ღვინო ?
- რა განსხვავებაა მიმართებასა და ფუნქციას შორის ? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 3

- დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
- დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
- გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cup A^c) \cap (B \cap B^c) \cap (A \cup B \cup C)^c = ?$
- ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $((p \vee (\neg p)) \wedge (q \wedge (\neg q))) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv ?$
- რომელიდაც თვეში 3 კვირა დღე დაემთხვა ლუწო რიცხვს. რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვში?
- რა განსხვავებაა ოპერატორსა და ფუნქციონალ შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 4

- დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
- დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
- გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cup B \cup C) \cap A^c \cap (A \cap A^c) = ?$
- ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge (\neg r))) \equiv ?$
- ტურნირში მონაწილეობდა 7 მოჭადრაკე. სულ რამდენი პარტია გადამაშდებოდა?
- რა განსხვავებაა ფუნქციასა და ფუნქციონალს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 5

1. განსაზღვრეთ დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციები.
2. განსაზღვრეთ ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cup \emptyset) \cap (A \cap A) \cap (A \cup A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(p \vee 0) \wedge (p \wedge p) \wedge ((p \vee (\neg p))) \equiv ?$
5. 1983 წელს იყო 53 შაბათი დღე. კვირის რა დღე იყო 1 იანვარი ამ წელს?
6. რა განსხვავებაა რელაციური სისტემების ჰომომორფიზმსა და იზომორფიზმს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილის მეშვეობით.
2. განსაზღვრეთ მოცემული სიმრავლის დამატებით სიმრავლის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cup B) \cup (A \cup A^c) \cup (B \cap B^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(\neg q) \wedge ((q \vee (q \vee 0)) \wedge ((p \vee (\neg p))) \equiv ?$
5. ოცი ქალაქიდან თითოეული შეერთებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია?
6. რა კავშირია სურექციას, ინექციასა და ბიექციას შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 7

1. განსაზღვრეთ იმპლიკაციისა და ევივალენციის მიმართებები.
2. ჩამოაყალიბეთ მიმართების, ფუნქციის, ოპერატორისა და ფუნქციონალის ცნებები და აჩვენეთ ფუნქციისა და ფუნქციონალის განმასხვავებელი ნიშნები.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cap E) \cup (B \cap \emptyset) \cup (A^c \cap B) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(p \vee p) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (p \vee 1) \wedge (p \vee 0) \equiv ?$

5. 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?
6. რა განსხვავებაა კონიუნქტიურ და დიზიუნქტიურ ლიტერებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 8

1. რელაციური სისტემების იზომორფიზმის ცნება. იზომორფულია თუ ჰომომორფული გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა?
2. განსაზღვრეთ ფუნქციონალის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $(A \cup B^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
 $((p \wedge p \wedge ((q \vee (\neg q)))) \vee ((q \wedge (\neg q))) \equiv ?$
5. მოიტანეს 5 ჩემოდანი და 5 გასაღები. არ ვიცით, რომელი გასაღები აღებს ამა თუ იმ ჩემოდანს. ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ცდაა საჭირო რომ, ყველა ჩემოდანს მოვარგოთ თავისი გასაღები?
6. რა განსხვავებაა ბულის ფორმულის დიზიუნქტიურ და კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ლიტერატურა

1. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970
2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Princeton, 1963
3. Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965
4. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука, Москва, 1986
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, [McGraw-Hill](#), Inc., New York. 1995.
7. Heyting A. Intuitionism An introduction, Amsterdam, 1956
8. Kantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J.Reine Angew. Math., 73 1951

- 9.Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982
- 10.ОбгадзеТ.А.Элементы математического моделирования,Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн.инст, учеб.пос.,Тбилиси,1989
- 11.Обгадзе Т.А.,Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ,учеб.пос., Владимир,1999
- 12.Пескова М.В. Применение метода регулярных источников ОГ для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами, Тезисы докладов Воронежского симпозиума “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках” Воронеж, 20-27 января 2000
- 13.Аракелян С.М.,Папонов В.С.,Дроган Ю.Е.,Пигарина А.А.,Прокошев В.Г.,Обгадзе Т.А. Исследование гидродинамической устойчивости течения смеси топливо-газ в нагнетательных трубопроводах дизеля, Материалы международного Школа семинара “Нелинейные задачи гидродинамической теории устойчивости и турбулентность “ 12-20 февраля , Москва, 2000
14. Obgadze T.A.,Barinov V.V., Fedotova O.I. Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
15. Obgadze T.A.,Prokoshev V.G.,Parfionov S.D. Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material, Edited by M. Geiger , A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3rd LANE,Erlangen, August 28-31, 2001
16. Обгадзе Т.А. ,Прангишвили А.И.,Цвераидзе З.Н.,Матиашвили И.Г. Математическое моделирование лавинообразных потоков и расчет определяющих параметров на основе обратной вариационной постановки Купрадзе – Бреббия, Международный научный журнал. Проблемы прикладной механики, Тбилиси, № 4(21), 2005
- 17.Обгадзе Т.А.,Прангишвили, А.И.Цвераидзе, З.Н.,Матиашвили И.Г. Математическое моделирование грязевых селевых потоков, Международный научный журнал, Проблемы прикладной механики. Тбилиси, № 4(21), 2005

თავი II. რიცხვითი სიმრავლეები და ალგებრული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები

შესავალი

აღამიანი, ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში, დადგა სიმრავლეთა რაოდენობრივი შედარების აუცილებლობის წინაშე. ამგვარად, წარმოიშვა ნატურალური რიცხვის ცნება.

განსაზღვრება: თვლის პროცესში წარმოშობილ რიცხვებს, *ნატურალური რიცხვები* ეწოდებათ.

ნატურალური რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება N ასოთი.

$N = \{1; 2; 3; \dots\}$. (2.1)

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. იმისათვის, რომ შეადარონ უსასრულო სიმრავლეების ელემენტთა რაოდენობა, შემოაქვთ *სიმრავლის სიმძლავრის ცნება*.

განსაზღვრება: თუ, ორი უსასრულო სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია), მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს *ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ*.

განსაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს *თვლადი* უსასრულობა ეწოდება.

P.S. ცხადია, რომ ყველა სიმრავლე, რომლის ელემენტების გადანომრვაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით, აგრეთვე თვლადი იქნება.

ნატურალური რიცხვები არსებობს ორი სახის: *მარტივი* და *შედგენილი რიცხვები*.

განსაზღვრება: ერთისაგან განსხვავებულ რიცხვს *მარტივი* ეწოდება, თუ ის იყოფა მხოლოდ ერთზე და თავის თავზე. ხოლო, ერთზე მეტ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არაა მარტივი *შედგენილი* ეწოდება.

მაგალითი: მარტივი რიცხვებია

$P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \dots\}$.

შედგენილი რიცხვებია

$N \setminus P \setminus \{1\} = \{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; \dots\}$.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, დღემდე, ბევრი ამოუხსნელი ამოცანაა დაგროვილი; რომელთა ჩამოყალიბება ელემენტარულია, მაგრამ ამოხსნა ჯერ-ჯერობით ვერ ხერხდება. ეს პრობლემები,

ძირითადად ეხება მარტივ რიცხვთა განაწილების კანონს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობაში. ჩამოვყალიბოთ ზოგიერთი ასეთი ამოცანა(პრობლემა):

1. ვიცით ლუწი რიცხვების ზოგადი ფორმულა: $n = 2k$; ასევე, ვიცით კენტი რიცხვების ზოგადი ფორმულა: $n = 2k + 1$. ეს ფორმულები გვაძლევენ შესაბამისად, ყველა ლუწ და კენტ რიცხვებს, როცა k ცვლადი გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. საჭიროა, ვიპოვოთ ანალოგიური ფორმულა მარტივი რიცხვებისათვის.
2. ცნობილია ეილერის მრავალწევრი: $f(x) = x^2 + x + 41$, რომელიც იძლევა მარტივ რიცხვებს, თუ $x = 0; 1; 2; \dots; 39$. უცნობია, არსებობენ, თუ არა ისეთი ნატურალური $m > 41$ რიცხვები, რომ $f(x) = x^2 + x + m$ მრავალწევრი იძლეოდეს მარტივ რიცხვებს, როცა $x = 0; 1; 2; \dots; m - 2$.
3. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა $n^2 + 1$ სახის მარტივი რიცხვების სიმრავლე.
4. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა ისეთი მარტივი რიცხვების სიმრავლე, რომელთა შორის სხვაობა 2-ის ტოლია(ჰოლდბახის პრობლემა).
5. უცნობია, შესაძლებელია, თუ არა ნებისმიერი ლუწი რიცხვის წარმოდგენა ორი მარტივი რიცხვის სხვაობის სახით.

ზემოთ მოყვანილი პრობლემები, ძირითადად, დაკავშირებული არიან მარტივი რიცხვების ზოგადი ფორმულის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან. ამ პრობლემის ამოხსნის გზაზე საგრძნობ წინსვლას იძლევა ობგადის თეორემა.

ობგადის თეორემა(1972წ): მარტივი რიცხვების სიმრავლის ზოგად ფორმულას, არ შეიძლება ქონდეს $f(x) = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქციის სახე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $f(x) = ax^2 + bx + c$ კვადრატული ფუნქციის სასრული სხვაობები:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b;$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = 2a(x+1) + a + b - 2ax - a - b = 2a;$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = 0.$$

ცხადია, რომ უფრო მაღალი რიგის $k \geq 3$ სასრული სხვაობები კვადრატული ფუნქციიდან, აგრეთვე იქნებიან ნულის ტოლი. (აღვილად შემოწმდება, რომ ანალოგიური თვისებები აქვთ საზოგადოდ n ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციებს(პოლინომებს), რომელთათვისაც შესაბამისად ყველა $k \geq n + 1$ ხარისხის სასრული სხვაობები იქნებიან ნულის ტოლი).

ეხლა, განვიხილოთ მარტივი რიცხვების მიმდევრობა და მათი შესაბამისი სასრული სხვაობები მესამე რიგამდე ჩათვლით. თუ, მესამე რიგიდან დაწყებული ყველა სასრული სხვაობა არ აღმოჩნდა ნულის ტოლი, მაშინ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიძლება მოიცემოდეს კვადრატული ფუნქციით და ჩვენი თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და შესაბამისი სასრული სხვაობები:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
1	2	2	4	2	4	2	4	6	
1	0	2	-2	2	-2	2	2	2	
	-1	2	-4	4	-4	4	0		

როგორც ვხედავთ მესამე რიგის სასრული სხვაობა(მეოთხე სტრიქონი) არაა მხოლოდ ნულებისაგან შემდგარი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მარტივი რიცხვის ზოგად ფორმულას არ შეიძლება, რომ ჰქონდეს კვადრატული ფუნქციის სახე რ.დ.გ.

P.S. თეორემის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ეს თეორემა ადვილად ზოგადდება ნებისმიერი n სასრული ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციისათვის.

ზემოთმოყვანილი დანარჩენი პრობლემების ამოხსნა ავტორისათვის არაა ცნობილი და ამდენად, ახალგაზრდებს შეუძლიათ გამოსცადონ ძალები მათ ამოსახსნელად.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ყოველთვის შეიძლება ორი რიცხვის შეკრება. ასე, რომ ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ისევ ნატურალური რიცხვი იქნება. ამ ფაქტს მათემატიკაში ჩამოაყალიბებენ ასე: “ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების ოპერაციის მიმართ”. მაგრამ, ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობა, საზოგადოდ არაა ნატურალური რიცხვი.

მაგალითი: $5-7 \notin N$. რაც იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, შეუძლებელია $x+7=5$ განტოლების ამოხსნა.

ამიტომ, საჭირო გახდა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოვება მთელ რიცხვთა სიმრავლემდე.

განსაზღვრება: ნატურალური რიცხვების, მათი მოპირდაპირე რიცხვების და ნულის გაერთიანებას **მთელ რიცხვთა** სიმრავლე ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Z ასოთი. ფორმალურად, ეს განსაზღვრება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$Z = N \cup N_- \cup \{0\}. \quad (2.2)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$N \subset Z. \quad (2.3)$$

ამ სიმრავლეში განტოლება $x+7=5$, უკვე ამოხსნადია და $x=5-7 \Leftrightarrow x=-2$; (2.4)

მაგრამ, წრფივი განტოლება, საზოგადოდ, არაა ამოხსნადი.

მაგალითი: $2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \notin Z$. (2.5)

ამიტომ, საჭიროა რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოვება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლემდე.

განსაზღვრება: $\frac{a}{b}$ სახის რიცხვების სიმრავლეს, სადაც $a \in Z \wedge b \in N$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Q ასოთი.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \wedge b \in N \right\}. \quad (2.6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$Q \subset Z \subset N. \quad (2.7)$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, უკვე, შეგვიძლია ამოხსნათ წრფივი განტოლებები, თუმცა, არც ეს სიმრავლე აღმოჩნდა საკმარისი ალგებრული განტოლებების ამოსახსნელად. ასე შემოვიდა მათემატიკაში **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე**. ხოლო მოგვიანებით, **ჰიპერკომპლექსური და კლიფორდის რიცხვების** ცნებები. ამ რიცხვითი სიმრავლეების აგება მოითხოვს ფაქიზი მათემატიკური ცნებების ცოდნას და ჩვენი ამოცანებისათვის იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ ჩვენ ჩავუღრმავდებით თანდათანობით.

2.1. ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი

ნუმეროლოგიის ელემენტები. ნატურალური რიცხვის ცნებას ფართოდ იყენებს მეცნიერების ყველა დარგი. ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, როდესაც მეცნიერება და რელიგია ერთად

შეისწავლეთ, როგორც საერთო სიბრძნის ნაწილები, მეცნიერები სწავლობდნენ ამა, თუ იმ მოვლენის რიცხვით მახასიათებლებს: ზომავდნენ სამეურნეო სავარგულების ფართს, მანძილებს, ჭურჭლის მოცულობას და ა.შ. ზოგიერთ შემთხვევაში, კი ისეთი მეცნიერებიც კი, როგორც იყო პითაგორა სწავლობდნენ რიცხვთა მაგიას. მათ სჯეროდათ, რომ ადამიანის მთელი ცხოვრება და ხასიათი განპირობებულია არა მარტო ვარსკვლავთა და პლანეტების განლაგებით(ასტროლოგია), არამედ იმ რიცხვითი მახასიათებლებით, რაც დაკავშირებულია მოცემული ადამიანის დაბადების თარიღთან(ნუმეროლოგია)[1-2]. ნუმეროლოგიით იყო გატაცებული ისააკ ნიუტონიც.

მაგალითისათვის, თუ, ადამიანი დაიბადა 1976 წლის 19 ნოემბერს, მაშინ მისი პერსონალური რიცხვი იქნება დაბადების რიცხვის ციფრების ჯამი $1+9=10$ ანუ $1+0=1$. ხოლო დაბადების თარიღის პერსონალური რიცხვი რომ მივიღოთ, უნდა შევკრიბოთ მისი შესაბამისი თვის ნომრის ციფრებიც ნოემბერი=11 ე.ი. $1+1=2$, გარდა ამ რიცხვებისა უნდა შევკრიბოთ დაბადების წლის ციფრებიც ე.ი. $1+9+7+6=23$ ამ რიცხვის ციფრების ჯამია $2+3=5$, საბოლოოდ, უნდა შევკრიბოთ დაბადების რიცხვის, თვის და წლის ციფრები ერთად 19.11.1976. მაშინ მივიღებთ

$(1+9)+(1+1)+(1+9+7+6)=10+2+23=35$ თუ, ამ რიცხვის ციფრებსაც შევკრიბავთ, მივიღებთ $3+5=8$. რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ პიროვნებისათვის დამახასიათებელია რიცხვი 8-ის უპირატესი გავლენა. ეს ნიშნავს იმას, რომ განხილული პიროვნება უმეტესწილად, არის წარმატებული ყველა წამოწყებაში, ამასთან ერთად, მასზე მოქმედებს დაბადების რიცხვის(19) ციფრების ჯამი 1, რაც მიგვანიშნებს მისი პატრონის ლიდერულ თვისებებზე.

საზოგადოდ, ადამიანი განიცდის როგორც თავისი რიცხვების, ასევე, ცხოვრების ადგილისა და მოცემული თარიღის გავლენასაც.

განიხილავენ პერსონალური წლის 9 მიმდევრობით საფეხურს, ათვლილს დაბადებიდან:

- I წელი – შესაძლებლობათა წელია;
- II წელი – წონასწორობის წელია;
- III წელი – შემოქმედებითი აქტივობის წელია;
- IV წელი – მშენებლობის წელია;
- V წელი – კომუნიკაბელობის წელია;
- VI წელი – დავალებათა შესრულების წელია;
- VII წელი – განხორციელებების წელია;
- VIII წელი – კარმის წელია;

IX წელი – ციკლის დასრულების წელია.

P.S. ყოველი 9 წლის შემდეგ, ციკლი იწყებს განმეორებას.

ასევე, განიხილავენ დაბადების თვეთა გავლენას:

იანვარი – გმირული;

თებერვალი – წონასწორობა;

მარტი – სიხარული;

აპრილი – პასუხისმგებლობა;

მაისი – ცხოვრების ენერჯია;

ივნისი – შემსრულებლობა, მორჩილება და მზრუნველობა;

ივლისი – სინთეზურობა;

აგვისტო – ლიდერობა;

სექტემბერი – რწმენა;

ოქტომბერი – სიბრძნე;

ნოემბერი – შთაგონებული;

დეკემბერი – დასრულებულობა.

ყოველ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ხასიათი:

რიცხვი 1 - შეესაბამება ეგოცენტრულ ლიდერს;

რიცხვი 2 – მგრძობიარე, კომუნიკაბელური, უყვარს კუთხეების მომრგვალება;

რიცხვი 3 – მხიარული, ცდილობს მიიღოს სიამოვნება ფიზიკური შრომიდან, უყვარს ხელებით მუშაობა;

რიცხვი 4 – იწვევს დაუდებარ ხასიათს, რომელიც პერიოდულად, ცდილობს თავი დააღწიოს მონოტონურობას;

რიცხვი 5 – იწვევს ნათელ გონებას და კომუნიკაბელობისაკენ მიდრეკილებას. ამ რიცხვის ხალხს ახასიათებთ მაგნეტიზმი და ჰიპნოზის უნარი, რომელიც იზიდავს მათკენ ხალხს.

რიცხვი 6 – იძლევა თანაგრძობის მწვავე გრძობას. უყვარს წესრიგი, სამართლიანობისაკენ სწრაფვა. უყვარს კოლექტიური შრომა. არად დაგიდევს სხვის აზრს, თუ ისინი ეწინააღმდეგებიან მის საკუთარ ინტერესებს.

რიცხვი 7 – იწვევს განვითარებულ ინტუიციას. უყვარს მარტოობა. არის პუნქტუალური და აკურატული. ხშირად მოსდის შემაშფოთებელი აზრები და ეძებს პრობლემებს იქაც, სადაც ისინი არ არიან.

რიცხვი 8 – იძლევა მომთმენ, დინჯ ხასიათს და აღწევს წარმატებებს ყველა საქმეში. წარმატებული ადამიანია. თქვენი

გარშემომყოფნი გრძობენ თქვენს განსაკუთრებულობას და რესპექტაბელობას, ცდილობენ მოგექცენ მოწიწებით.

რიცხვი 9 – იწვევს ცოდნისაკენ და ფილოსოფიური აზროვნებისაკენ სწრაფვას. ადვილად პატიობთ სხვებს ცოდვებს. ვერ იტანთ ხეპრე ადამიანებს.

ასევე, მნიშვნელოვანია შესაბამისობა ასოებსა და რიცხვებს შორის(ინფორმაციის კოდირების ერთ-ერთი პირველი ისტორიული მაგალითი):

1	ა	ბ	გ	დ
2	ე	ვ	ზ	თ
3	ი	კ	ლ	მ
4	ნ	ო	პ	ჟ
5	რ	ს	ტ	ყ
6	უ	ჩ	ც	ც
7	ფ	ქ	შ	
8	თ	რ	ჩ	
9	ი	ს	ც	

ამ შესაბამისობის გამოყენების მაგალითისათვის განვიხილოთ სახელები:

იესო ქრისტე=ი+ე+ს+ო+ქ+რ+ი+ს+ტ+ე=9+5+9+5+4+8+9+9+1+5=64,
ციფრთა ჯამი=6+4=10; საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში;

ალაჰი=ა+ლ+ა+ჰ+ი=1+2+1+6+9=19, ციფრთა ჯამი=1+9=10;
ანუ საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში.

იელოვო=ი+ე+ღ+ო+ვ+ო=9+5+5+5+6+5=35, ციფრთა ჯამი=3+5=8;
ეშმაკი=ე+შ+მ+ა+კ+ი=5+7+3+1+1+9=26, ციფრთა ჯამი=2+6=8;
სატანა=ს+ა+ტ+ა+ნ+ა=9+1+1+1+4+1=17, ციფრთა ჯამი=1+7=8;
რაც შეესაბამება ამქვეყნიურ წარმატებებს სიამოვნებათა სფეროში, იმქვეყნიური სამუდამო ტანჯვის სანაცვლოდ.

კრიშნა=კ+რ+ი+შ+ნ+ა=1+8+9+7+4+1=30, ანუ 3+0=3, რაც შეესაბამება ღმერთის მსახურს მორჩილებით.
ნათელა=ნ+ა+თ+ე+ლ+ა=4+1+8+5+2+1=21, ციფრთა ჯამი=2+1=3;
ილია=ი+ლ+ი+ა=9+2+9+1=21, ციფრთა ჯამი=2+1=3;
ნათელა=ილია=3=სწრაფვა ღმერთისაკენ მორჩილებით.

$\text{ბიზანტია} = \text{ბ} + \text{ი} + \text{ზ} + \text{ა} + \text{ნ} + \text{ტ} + \text{ი} + \text{ა} = 2 + 9 + 7 + 1 + 4 + 1 + 9 + 1 = 34$, ციფრთა
 $\text{ჯამი} = 3 + 4 = 7$;
 $\text{რომი} = 8 + 5 + 3 + 9 = 25$, ციფრთა $\text{ჯამი} = 2 + 5 = 7$;
 $\text{ბაბილონი} = \text{ბ} + \text{ა} + \text{ბ} + \text{ი} + \text{ლ} + \text{ო} + \text{ნ} + \text{ი} = 2 + 1 + 2 + 9 + 2 + 5 + 4 + 9 = 34$, ციფრთა
 $\text{ჯამი} = 3 + 4 = 7$;
 $\text{ისრაელი} = 9 + 9 + 8 + 1 + 5 + 2 + 9 = 27 + 16 = 43$; ციფრთა $\text{ჯამი} = 3 + 4 = 7$;
 ციფრი 7 შეესაბამება ღმერთთან მებრძოლ, დაუდგარ ქვეყნებს,
 რომლებიც ადრე თუ, მალე ქრებიან რუკიდან.

$\text{ღმერთი} = \text{ღ} + \text{მ} + \text{ე} + \text{რ} + \text{თ} + \text{ი} = 5 + 3 + 5 + 8 + 8 + 9 = 38$, ციფრთა $\text{ჯამი} = 3 + 8 = 11$; ანუ
 $1 + 1 = 2$;
 $\text{ოსანა} = 5 + 9 + 1 + 4 + 1 = 20$ რაც იმას ნიშნავს, რომ 2 ღმერთის რიცხვია.
 $\text{აფხაზეთი} = \text{ა} + \text{ფ} + \text{ხ} + \text{ა} + \text{ზ} + \text{ე} + \text{თ} + \text{ი} = 1 + 3 + 4 + 1 + 7 + 5 + 8 + 9 = 38$, ციფრთა
 $\text{ჯამი} = 3 + 8 = 11$; ანუ $1 + 1 = 2$. რაც იმას ნიშნავს, რომ აფხაზეთი
 ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.
 $\text{ერაყი} = 5 + 8 + 1 + 6 + 9 = 29$; ციფრთა $\text{ჯამი} = 2 + 9 = 11$; ანუ $1 + 1 = 2$. რაც იმას
 ნიშნავს, რომ ერაყი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.

$\text{რუსეთი} = \text{რ} + \text{უ} + \text{ს} + \text{ე} + \text{თ} + \text{ი} = 8 + 2 + 9 + 5 + 8 + 9 = 41$; ანუ $4 + 1 = 5$; ძლიერი
 ქვეყანაა, ახასიათებს კომუნიკაბელობა და მაგნეტიზმი, რომელიც
 იზიდავს სხვადასხვა ჯურის ხალხს თავისაკენ.
 $\text{ებრაელი} = \text{ე} + \text{ბ} + \text{რ} + \text{ა} + \text{ე} + \text{ლ} + \text{ი} = 5 + 2 + 8 + 1 + 5 + 2 + 9 = 32$; ანუ $3 + 2 = 5$;
 ებრაელებისათვის მეტად ხელსაყრელი ქვეყანაა რუსეთი.

P.S. ცხადია, რომ დაინტერესებულმა მკითხველმა, ზემოთ
 მოყვანილი პითაგორისეული რიცხვთა მაგიის უფრო დეტალურად
 გასაცნობად, უნდა მიმართოს დამატებით ლიტერატურას[1-2].

2.1.1. რიცხვთა თეორიის ელემენტები

ამ გამოყენებათა გამო, ძველად, ხელისუფალთა ფართო
 მხარდაჭერით სარგებლობდნენ ბრძენნი(მეცნიერებისა და
ფილოსოფიის მსახურნი). სწორედ, ამან მისცა ანტიკურ ხანაში
 ბიძგი მეცნიერებისა და მათ შორის, რიცხვთა თეორიის
 განვითარებას. მოგვიანებით, დირიხლეს, გაუსისა და ეილერის
 ფუნდამენტალურმა შრომებმა, ახალი იმპულსი მისცა რიცხვთა
 თეორიის განვითარებას. გაუსის მიერ შემუშავებულ იქნა
შედარებათა თეორია[3-7] განუსაზღვრელი განტოლებების
 ამოსახსნელად **N** - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

მაგალითი: ვიპოვოთ $d=(664 ; 480)$; $a=664$; $b=480$.

მაშინ, ევკლიდეს ალგორითმის თანახმად გვექნება :

$$664=480 \cdot 1+184 ;$$

$$480=184 \cdot 2+112 ;$$

$$184=112 \cdot 1+72 ;$$

$$112=72 \cdot 1+40 ;$$

$$72=40 \cdot 1+32 ;$$

$$40=32 \cdot 1+8 ;$$

$$32=8 \cdot 4.$$

ე.ი $d=(664 ; 480)=8$.

არითმეტიკის ძირითადი თეორემა: ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით(თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად.

ანუ, თუ n ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$n = p_1 p_2 \dots p_n \quad (2.11)$$

ამ ნამრავლში ზოგიერთი თანამამრავლი შეიძლება რამდენიმეჯერ მეორდებოდეს, ამიტომ თუ, გამოვიყენებთ განმეორებათა რიცხვის ხარისხებს, მივიღებთ (2.11) გაშლის კანონიკურ წარმოდგენას

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} . \quad (2.12)$$

ამ (2.12) ჩანაწერიდან ნათლად ჩანს, რომ n რიცხვის განსხვავებულ გამყოფთა რაოდენობა იქნება:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) . \quad (2.13)$$

P.S. ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის მათ ნამრავლს გაყოფილს მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განისაზღვრება რიგი არითმეტიკული ფუნქციებისა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ეილერის $\varphi(n)$ ფუნქციას, რომელიც უდრის 1-დან n -მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც ურთიერთმარტივი არიან n -ის მიმართ.

მაგალითი: $\varphi(1) = 1$; $\varphi(2) = 1$; $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 2$; $\varphi(5) = 4$; $\varphi(6) = 2$.

ვთქვათ, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ მოცემული რიცხვის კანონიკური დაშლაა, მაშინ

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) . \quad (2.14)$$

თუ, p მარტივი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}. \quad (2.15)$$

კერძო შემთხვევაში,

$$\varphi(p) = p - 1. \quad (2.16)$$

მაგალითი: $\varphi(60) = 60(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 16;$

$$\varphi(81) = 81 - 27 = 54;$$

$$\varphi(5) = 5 - 1 = 4.$$

2.1.2. შედარებათა თეორიის ელემენტები

განვიხილოთ მთელი რიცხვები მოცემულ m ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას, მიღებული ნაშთების თვალსაზრისით. ამ m რიცხვს **მოდულს** უწოდებენ. ყოველ ნატურალურ რიცხვს, m რიცხვზე გაყოფისას შეესაბამება ნაშთის გარკვეული მნიშვნელობა $(0; 1; 2; 3; \dots; m-1)$ -ნაშთთა სრული სისტემიდან. სხვანაირად, რომ ვთქვათ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა $m-1$ კლასად. თითოეულ კლასში მოთავსებული არიან **ურთიერთსადარი რიცხვები m მოდულით**. თუ, განვიხილება შედარებათა თეორია უფრო ფართო რიცხვით სიმრავლეში, კერძოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ განვიხილავენ აბსოლუტურად უმცირეს ნაშთთა სრულ სისტემას:

$$-\frac{m-2}{2}; -\frac{m-4}{2}; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; \frac{m}{2}; \text{ როცა } m \text{ ლუწია};$$

$$-\frac{m-1}{2}; -\frac{m-3}{2}; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; \frac{m-1}{2}; \text{ როცა } m \text{ კენტია}.$$

განსაზღვრება: ორ მთელ a და $b > 0$ რიცხვს ეწოდებათ **ურთიერთსადარი მოდულით m** , თუ m - ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან.

შედარების დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (2.17)$$

(2.17) იკითხება ასე: a სადარია b -სი მოდულით m .

ცხადია, რომ თუ a სადარია b -სი, ანუ m - ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან, მაშინ მათი სხვაობა $(a-b)$ უნაშთოდ იყოფა m - ზე.

მაგალითი: $25 \equiv 15 \pmod{10}$, რადგან 25 და 15 10 -ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან 5 -ს. ასევე, ცხადია რომ $25-15=10$ და იყოფა 10 -ზე(შედარების მოდულზე).

შედარებათა თვისებები :

1. ერთნაირმოდულიანი შედარებები შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ, ანუ,

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}; a_2 \equiv b_2 \pmod{m}; \dots a_n \equiv b_n) \Rightarrow (\sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i \pmod{m}). \quad (2.18)$$

2. შედარებანი ერთნაირი მოდულით, შეიძლება წვერ-წვერად გადავამრავლოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}; a_2 \equiv b_2 \pmod{m}; \dots a_n \equiv b_n) \Rightarrow (\prod_{i=1}^n a_i \equiv \prod_{i=1}^n b_i \pmod{m}). \quad (2.19)$$

3. შედარების ორივე მხარე და მოდული შეიძლება ერთდროულად გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}) \Rightarrow (a_1 n \equiv b_1 n \pmod{mn}). \quad (2.20)$$

4. თუ, შრდარებას ადგილი აქვს რამდენიმე მოდულით, მაშინ ამ შედარებას ადგილი ექნება ახალი მოდულითაც, რომელიც მოცემული მოდულების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია, ანუ

$$(a \equiv b \pmod{m_1} \wedge a \equiv b \pmod{m_2}) \Rightarrow (a \equiv b \pmod{[m_1; m_2]}). \quad (2.21)$$

5. შედარების ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს, მათ ისეთ საერთო გამყოფზე, რომელიც მოდულთან ურთიერთმარტივია, ანუ

$$(an \equiv bn \pmod{m} \wedge (m; n) = 1) \Rightarrow (a \equiv b \pmod{m}). \quad (2.22)$$

ეილერის თეორემა: თუ m ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და $(a; m) = 1$, მაშინ

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \quad (2.23)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $m = p$ მარტივი რიცხვია და $(a; p) = 1$, $\varphi(p) = p - 1$, მიიღება ფერმას მცირე თეორემა :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (2.24)$$

განვიხილოთ ერთუცნობიანი შედარებების ამოხსნის მაგალითები.

1) $x^3 + x^2 - 3x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$

ეს შედარება მესამე ხარისხისაა. 5-ის მოდულით ნაშთთა სრული სისტემიდან: (0 ;1 ;2 ;3 ;4) ამ შედარებას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 1. ე.ი. მას აქვს ერთი ფესვი. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება

$$x \equiv 1 \pmod{5}.$$

2) $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{4}$

შედარება კვადრატულია. ნაშთთა სრული სისტემიდან 4-ის მოდულით: (0 ;1 ;2 ;3), მას არცერთი რიცხვი არ აკმაყოფილებს. ე.ი. მას ამონახსნი არა აქვს.

3) $12x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{6}$

ეს შედარებაც კვადრატულია, რადგან უფროსი კოეფიციენტი კუბთან მოდულზე იყოფა უნაშთოდ, ანუ $12 \equiv 0 \pmod{6}$. ასე, რომ იგი შემდეგი შედარების ექვივალენტურია :

$$3x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{6}.$$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 6-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5) მას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 3, ე.ი. მისი ერთადერთი ფესვი იქნება

$$x \equiv 3 \pmod{6}.$$

$$4) \quad x^5 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 7-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5;6) ამ შედარებას აკმაყოფილებს ორი რიცხვი 2 და 4; ამიტომ გვექნება ორი ამონახსნი:

$$x \equiv 2 \pmod{7}; \quad x \equiv 4 \pmod{7}.$$

განსაზღვრება: ორ მრავალწევრს ეწოდება ურთიერთმისადარი მოდულით m , თუ მათი სათანადო კოეფიციენტები ურთიერთსადარია m -ის მოდულით. ანუ,

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}. \tag{2.25}$$

P.S.

1. შედარებათა თეორიითა და მათი ინფორმატიკაში გამოყენებებით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიმართოს სათანადო ლიტერატურას[3-10].
2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებთან მიმართებაში ქმნის ალგებრულ სისტემას, რომელსაც მათემატიკაში კომუტაციურ, უნიტარულ რგოლს უწოდებენ[11-12].

2.2. რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიური აგება

რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში, მთელ რიცხვთა სიმრავლისაგან განსხვავებით, არსებობს მოცემული რიცხვის შებრუნებული რიცხვი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამიტომ, მათემატიკოსები ალგებრულ სისტემას, რომელსაც ქმნის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, მასში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ ველს[11-12] უწოდებენ. ალგებრის(ალგებრულ ოპერაციებთან მიმართებაში) თვალსაზრისით არ არის სხვაობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა

სიმრავლეს შორის. ასე, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც ალგებრული სისტემის თვალსაზრისით ქმნის ველს. თუმცა, ამ ორ სიმრავლეს შორის აშკარა სხვაობაა ტოპოლოგიის[11-12] თვალსაზრისით.

ტოპოლოგიის ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ ზღვარისა და უწყვეტი ფუნქციის ცნებები, რაც ესოდენ მნიშვნელოვანია ცოცხალი სისტემების მათემატიკური მოდელირებისათვის.

განსაზღვრება: მოცემულ Q სიმრავლეს, მისი ყოველი x ელემენტის შემცველ ღია $B(x)$ სიმრავლეებთან(ტოპოლოგიის ბაზა) ერთად ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიის ბაზას წარმოადგენს მისი ყველა ღია ინტერვალების $B(x)$ სიმრავლე. ამასთან ერთად, რადგან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, მისი ტოპოლოგიის ბაზაც თვლადია.

განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობის ცნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

განსაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გადასახვას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რაციონალურ რიცხვთა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ეწოდება.

განსაზღვრება: რაციონალურ რიცხვთა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას ეწოდება კოშის(ფუნდამენტალური მიმდევრობა), თუ

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} |q_m - q_n| = 0. \quad (2.26)$$

თეორემა: თუ, რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა კრებადია რაციონალური რიცხვისაკენ, მაშინ ის კოშის მიმდევრობას წარმოადგენს.

მაგრამ, თუ $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ კოშის მიმდევრობაა, მისი ზღვარი, საზოგადოდ, შეიძლება არც არსებობდეს(თუ ზღვართი წერტილი არაა რაციონალური რიცხვი).

განსაზღვრება: $x_0 \in Q$ წერტილს ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ზღვართი წერტილი, თუ ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე(ინტერვალი), შეიცავს რაციონალურ რიცხვს.

თეორემა: $x_0 \in Q$ წერტილი წარმოადგენს ზღვართ წერტილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს Q რაციონალურ რიცხვთა

ისეთი მიმდევრობა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, რომელიც კრებადია x_0 რიცხვისაკენ $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x_0$.

თუ, შევადგენთ რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობას ისეთნაირად, რომ ყოველი შემდეგი წევრი წარმოადგენდეს $\sqrt{2}$ -ის უკეთეს მიახლოებას, მაშინ მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა კოშის მიმდევრობას, რომელიც კრებადია არარაციონალური $\sqrt{2}$ რიცხვისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიცავს თავისი ზღვართი წერტილების მთლიან სიმრავლეს. თუმცა, ის შეიცავს რაციონალურ რიცხვებს და თითოეული რაციონალური რიცხვი ზღვართი წერტილია.

განსაზღვრება: Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანებას მისი ზღვართი წერტილების \bar{Q} სიმრავლესთან Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის \bar{Q} ჩაკეტვა ეწოდება.

$$\bar{Q} = Q \cup \bar{Q}. \quad (2.27)$$

განსაზღვრება: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის \bar{Q} ჩაკეტვას **ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე** ეწოდება.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოადგენს ზღვართი წერტილს და მაშასადამე, შეგვიძლია ავაგოთ მისკენ კრებადი მიმდევრობა.

განსაზღვრება: სიმრავლეს **სრული** ეწოდება, თუ ნებისმიერი კოშის მიმდევრობა კრებადია ამ სიმრავლეში.

მაგალითი: რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე არაა სრული, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე სრულია(რადგან ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს).

განსაზღვრება: A სიმრავლეს ეწოდება **მკვრივი B სიმრავლეში**, თუ B სიმრავლის ნებისმიერი x_0 ელემენტისათვის, მოიძებნება A სიმრავლის ელემენტების ისეთი მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება ამ x_0 ელემენტისაკენ.

მაგალითი: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა მკვრივი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში(დაასაბუთეთ რატომ?).

განსაზღვრება(ინტუიციური): სიმრავლეს **მეტრიკულ სივრცეს** უწოდებენ, თუ, მასში განსაზღვრულია ორ ელემენტს შორის მანძილის ცნება.

მაგალითი: მანძილი ორ რაციონალურ რიცხვს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(q_1; q_2) = |q_2 - q_1|. \quad (2.28)$$

ფორმულა (2.28)-ის გათვალისწინებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა. თუ, გავიხსენებთ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის მანძილის ცნებას, რომელიც (2.28) ფორმულის ანალოგიურია, მივიღებთ რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც მეტრიკული სივრცეა.

განსაზღვრება: მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება *სეპარაბელური*, თუ არსებობს არაუმეტეს ვიდრე თვლადი, მასში მკვრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითი: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სეპარაბელურია, რადგან მასში, არსებობს მასში ყველგან მკვრივი თვლადი, რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

P.S.

სეპარაბელობის თვისება საშუალებას იძლევა მეტრიკული სივრცის ელემენტებს მივუახლოვდეთ თვლადი სიმრავლის ელემენტების მიმდევრობით. ეს თვისება ფართოდ გამოიყენება ვარიაციულ(პირდაპირ) რიცხვით მეთოდებში.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, უკვე, საკმარისია საინჟინრო პრაქტიკაში გამოყენებელი ალგებრული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად.

2.2.1. არაწრფივი განტოლების ამოხსნა ნიუტონის ალგორითმით

შესავალი

განტოლებების ამოსახსნელად, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს, რომლებსაც ზოგჯერ პიკარის თანდათანობითი მიახლოების მეთოდებსაც უწოდებენ. ამ ტიპის მეთოდების არსის შესაცნობად, განვიხილოთ არაწრფივი განტოლება

$$f(x) = 0. \quad (2.29)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად, მას გადაწერენ შესაბამისი იტერაციული ფორმულის სახით

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (2.30)$$

აირჩევენ ფესვის საწყის მიახლოებას

$$x = x_0, \quad (2.31)$$

ამის შემდეგ, (2.30) ფორმულების მეშვეობით პოულობენ შემდგომ მიახლოებებს

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \dots \quad (2.32)$$

როგორ ვხედავთ, აღწერილი იტერაციული პროცედურა ყოველ x_{n+1} ეტაპზე, იყენებს წინა x_n ერთი ბიჯის მნიშვნელობას. ასეთ, (2.30) ტიპის იტერაციულ ფორმულებს, **ერთბიჯიან იტერაციულ ფორმულებს** უწოდებენ. არსებობენ ორბიჯიანი, სამბიჯიანი და ა.შ. იტერაციული ფორმულებიც

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}) - \text{ორბიჯიანი ფორმულა};$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) - \text{სამბიჯიანი ფორმულა და ა.შ.}$$

(2.30) იტერაციული ფორმულის აგების შემდეგ, ისმის კითხვები:

ა) რამდენი n მიახლოება უნდა ავიღოთ, ანუ, იტერაციული პროცესი როდის უნდა გავაჩეროთ, რომ მიღებული მიახლოება იყოს წინასწარ მოთხოვნილ ფარგლებში ?

ბ) კრებადია, თუ, არა (2.30) იტერაციული პროცესი (2.29) განტოლების ფესვისაკენ ?

ამ კითხვებს პასუხობენ შემდეგნაირად:

ა) წინასწარ ირჩევენ გამოთვლის დასაშვებ ε ცდომილებას და იტერაციულ პროცესს აჩერებენ როგორც კი გამოთვლის აბსოლუტური ცდომილება დააკმაყოფილებს პირობას

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon;$$

ბ) იტერაციული (2.30) პროცესის კრებადობისათვის, მისი აგებისას, უნდა გავითვალისწინოთ ბანახის თეორემა კუმშვადი ასახვების შესახებ, ანუ, კრებადობის საკმარისი პირობა.

განსაზღვრება: ვთქვათ M მეტრიკული სივრცეა ρ მეტრიკით, $A: M \rightarrow M$ ოპერატორს ეწოდება **მკუმშავი**, თუ, არსებობს ისეთი $\alpha \in [0; 1]$, რომ M სივრცის ნებისმიერი ორი x და y ელემენტებისათვის, ადგილი აქვს უტოლობას $\rho(Ax; Ay) \leq \alpha \rho(x; y)$.

ბანახის თეორემა. თუ, A არის მკუმშავი ოპერატორი სრულ M მეტრიკულ სივრცეში, მაშინ $x = Ax$ განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი ξ ამონახსნი, რომელიც შეიძლება მივიღოთ

როგორც ამ სივრცის u_n ელემენტების მიმდევრობის ზღვარი $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \xi$, სადაც $u_{n+1} = Au_n$ ხოლო საწყისი $u_0 \in M$ მიახლოება შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერად.

აქვე, შეგვიძლია შევადგინოთ ერთბიჯიანი კუმშვადი იტერაციული ფორმულების აგების წესიც. ამისათვის განვიხილოთ (2.30) ფორმულა და გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა სასრული ნაზრდების შესახებ, მაშინ მივიღებთ

$$x_{n+1} - x_{m+1} = \varphi(x_n) - \varphi(x_m) = \varphi'(\tau_k)(x_n - x_m), \quad (2.33)$$

აქედან ცხადია, რომ კუმშვადობის პირობა

$$|x_{n+1} - x_{m+1}| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = |\varphi'(\tau_k)(x_n - x_m)| \leq \alpha |x_n - x_m|,$$

შესრულდება თუ, $\max|\varphi'(\tau_k)| < 1$.

ეხლა, განვიხილოთ ნიუტონის იტერაციული ფორმულა.

ნიუტონის იტერაციული ფორმულისათვის უნდა ავირჩიოთ საწყისი მიახლოება, ამისათვის იყენებენ ვეიერშტრასის თეორემას:

თუ, $[a; b]$ შუალედის ბოლოებზე $f(x)$ უწყვეტ ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობები, ანუ, $f(a)f(b) < 0$, მაშინ ამ შუალედში არსებობს ისეთი ξ წერტილი რომ $f(\xi) = 0$.

მაშასადამე, საწყისი x_0 მიახლოება უნდა ავირჩიოთ ისეთ $[a; b]$ შუალედში, რომლის ბოლოებზეც სრულდება $f(a)f(b) < 0$ პირობა.

ცხადია, რომ რაც უფრო მოკლე იქნება $[a; b]$ შუალედი, მით უფრო ცოტა იტერაციები დაგვჭირდება ფესვის საპოვნელად. მიახლოების შესაფასებლად ვირჩევთ ანგარიშის დასაშვებ ε ცდომილებას.

(2.29) განტოლების ამოსახსნელად $f(x)$ ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად საწყისი x_0 მიახლოების მიდამოში

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots = 0, \quad (2.34)$$

თუ, ტეილორის (2.34) ფორმულაში უგულებელვყოფთ კვადრატულ და უფრო მაღალი რიგის წევრებს, მივიღებთ ფესვის შემდგომი მიახლოების საპოვნელ ფორმულას

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0, \quad (2.35)$$

აქედან ცხადია, რომ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (2.36)$$

ფესვის შემდგომი მიახლოებების საპოვნელად, ანალოგიური პროცედურის გავლით მივიღებთ

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad (2.37)$$

და საზოგადოდ, გვექნება ნიუტონის იტერაციული ფორმულა

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.38)$$

იტერაციული პროცესი გრძელდება, ვიდრე არ შესრულდება პირობა $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

P.S.

ნიუტონის იტერაციული ფორმულა პრაქტიკულად კარგად მუშაობს, მხოლოდ მაშინ, როცა საწყისი მიახლოება ახლოსაა ზუსტ ამონახსნთან. ამიტომ, უმეტესწილად, იყენებენ იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდს ან მონტე-კარლოს, ფესვის შემთხვევითი ძებნის მეთოდს.

2.2.2. არაწრფივი განტოლების ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით

მიუხედავად იმისა, რომ არსებობს არაწრფივი ალგებრული განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის, კლასიკური მეთოდების დიდი სიმრავლე, პრაქტიკაში, უფრო ხშირად იყენებენ იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდს. ის თავის თავში მოიცავს კლასიკური მეთოდების დადებით თვისებებს და საშუალებას იძლევა, ინდივიდუალურად მივუდგეთ ყოველ არაწრფივ განტოლებას და ავაგოთ შესაბამისი კრებადი იტერაციული ფორმულა.

განვიხილოთ, იაკობის იტერაციული ფორმულის აგების ალგორითმი.

ვთქვათ, ამოსახსნელი გვაქვს არაწრფივი ალგებრული განტოლება

$$f(x) = 0. \quad (2.39)$$

ა) განტოლების ორივე მხარეს ვამრავლებთ რაღაც λ რიცხვზე, რომლის მნიშვნელობასაც მოგვიანებით ავარჩევთ იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობიდან, მივიღებთ

$$\lambda f(x) = 0. \quad (2.40)$$

ბ) მიღებული (2.40) განტოლების ორივე მხარეს ვუმატებთ x -ს და მარცხენა მხარეს ავღნიშნავთ $\varphi(x)$ -ით, მაშინ გვექნება

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x. \quad (2.41)$$

გ) ვაგებთ შესაბამის (2.30) იტერაციულ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n). \quad (2.42)$$

დაგვრჩა მხოლოდ λ მამრავლის მნიშვნელობის პოვნა (2.42) იტერაციული პროცესის კრებადობის $\max|\varphi'(\tau_k)| < 1$ პირობიდან.

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x), \text{ ანუ, კრებადობის პირობა მიიღებს სახეს} \\ \max_{x \in [a; b]} |1 + \lambda f'(x)| < 1. \quad (2.43)$$

პრაქტიკაში იყენებენ უფრო მარტივ პირობას

$$|1 + \lambda f'(x_0)| < 1. \quad (2.44)$$

ამ პირობიდან პოულობენ λ მამრავლის λ_0 მნიშვნელობას, რაც საბოლოოდ, გვაძლევს იაკობის კრებად იტერაციულ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_0 f(x_n). \quad (2.45)$$

იტერაციული პროცესის გაჩერების პირობაა

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (2.46)$$

ამ შემთხვევაში, აბსოლუტური ცდომილებაა

$$\Delta(\xi) = \varepsilon, \quad (2.47)$$

ხოლო, ფარდობითი ცდომილებაა

$$\delta(\xi) = \frac{\Delta(\xi)}{|x_n|}. \quad (2.48)$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ განტოლება

$$2x - \lg x = 7, \quad (2.49)$$

$\varepsilon = 10^{-4}$ სიზუსტით.

ამოხსნა:

გადავწეროთ (2.49) განტოლება ზოგადი (2.39) ფორმით

$$f(x) = 7 + \lg x - 2x = 0. \quad (2.50)$$

ეხლა, გამოვიყენოთ მისთვის ზემოთმოყვანილი პროცედურა და ავაგოთ იაკობის, შესაბამისი იტერაციული ფორმულა

ა) $\lambda f(x) = \lambda(7 + \lg x - 2x) = 0; \quad (2.51)$

ბ) $\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x$, ანუ,
 $x = x + \lambda(7 + \lg x - 2x) = \varphi(x). \quad (2.52)$

გ) $x_{n+1} = x_n + \lambda(7 + \lg x_n - 2x_n), \quad (2.53)$

დარჩა ამოცანა: λ მამრავლისათვის ვიპოვოთ ისეთი λ_0 მნიშვნელობა, რომლისთვისაც დაკმაყოფილდება იტერაციული ფორმულის კრებადობის პირობა $|1 + \lambda f'(x_0)| < 1$, რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე

$$\left| 1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{x_0 \ln 10} \right| < 1. \quad (2.54)$$

საწყისი მიახლოების საპოვნელად ვიყენებთ ვეიერშტრასის თეორემას.

$$f(1) = 7 + \lg 1 - 2 \cdot 1 = 5 > 0 \\ f(10) = 7 + \lg 10 - 2 \cdot 10 = -12 < 0$$

ე.ი. $x_0 \in [1; 10]$. საწყის მიახლოებად ავირჩიოთ $x_0 = 4$. მაშინ კრებადობის (2.54) პირობა მიიღებს სახეს

$$|\varphi'(4)| = \left| 1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{4 \ln 10} \right| < 1. \quad (2.55)$$

ამ პირობას აკმაყოფილებს, მაგალითად $\lambda = 0.5$, ეს მნიშვნელობა ცხადია, რომ არაა ერთადერთი. მივიღეთ იაკობის იტერაციული ფორმულა მოცემული (2.49) განტოლებისათვის.

$$x_{n+1} = x_n + 0.5(7 + \lg x_n - 2x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = 0.5(7 + \lg x_n). \quad (2.56)$$

$$x_0 = 4. \quad (2.57)$$

ამ იტერაციული ფორმულებით გათვლა გვაძლევს, რომ

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5(7 + \lg 4) \approx 3.801 \\ x_2 &= 0.5(7 + \lg 3.801) \approx 3.7899 \\ x_3 &= 0.5(7 + \lg 3.7899) \approx 3.7893 \\ x_4 &= 0.5(7 + \lg 3.7893) \approx 3.7893 \end{aligned}$$

$|x_4 - x_3| < 0.0001$, რაც იმას ნიშნავს რომ მოცემული განტოლება ამოხსნილია მოთხოვნილი 10^{-4} სიზუსტით და მისი ფესვია 3.7893

ფარდობითი ცდომილება იქნება

$$\delta(\xi) = \frac{\Delta(\xi)}{|x_n|} = \frac{0.0001}{3.7893} \approx 0.00003 \quad (2.58)$$

რაც საკვებით მისაღებია მოცემული ამოცანისათვის.

2.2.3. ორ და სამ ცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა მატრიცული ხერხით Mathcad – ის ბაზაზე

ორ და სამცვლადიან, წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად, გამოიყენება არსებული პროგრამული პაკეტები რომლებიც ეყრდნობიან გაუსის მეთოდს, ესენია: Mathcad, Matlab, Mathematica და ა.შ. ჩვენ სიმარტივისათვის, გამოვიყენებთ Mathcad პაკეტს.

ვთქვათ, ამოსახსნელია მესამე რიგის, წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

გადავწეროთ მას მატრიცული ფორმით:

$$A \cdot X = B, \quad (*)$$

სადაც,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

მაშინ, მატრიცული (*) განტოლების ამონახსნს ექნება სახე $X = A^{-1} \cdot B$.

განვიხილოთ მაგალითი

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20,$$

$$7x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 24,$$

$$8x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 41.$$

შავადგინოთ შესაბამისი Mathcad პროგრამა

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 41 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში, Mathcad პროგრამა საკმაოდ მარტივია და ემთხვევა ამოცანის მატრიცულ ამოხსნას. ცხადია, რომ მაღალი რიგის ($n \geq 10^4$) სისტემების ასეთნაირად ამოხსნა, საკმაოდ მოუხერხებელია, მითუმეტეს, როდესაც სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი ახლოსაა ნულთან (სისტემა ცუდადაა განპირობებული).

2.2.4. მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით

მაღალი რიგის ($n \geq 3$) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს.

იმისათვის, რომ შევისწავლოთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ალგორითმების კრებადობა, ცდომილება და გამოთვლების მდგრადობა, იყენებენ ვექტორისა და მატრიცის ნორმის ცნებას, რომლებიც ვექტორის სიგრძის ცნების განზოგადებას წარმოადგენენ.

წრფივი R^n ვექტორული სივრცის $f \in R^n$ ელემენტის ნორმა ეწოდება $\|f\|$ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

- 1) $\|f\| \geq 0$; $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
- 2) $\|\alpha f\| = \alpha \|f\|$, $\alpha > 0$, $\alpha = const$;
- 3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ვექტორისათვის, როგორც წესი, განიხილავენ ორი ტიპის ნორმას

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad (2.59)$$

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (2.60)$$

კვადრატული $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ მატრიცის ნორმა განისაზღვრება \mathbf{x} და \mathbf{Ax} ვექტორების ნორმების საშუალებით:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (2.61)$$

დამტკიცებულია, რომ

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (2.62)$$

$$\|A\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (2.63)$$

ამასთან, თუ, მატრიცა სიმეტრიულია, ანუ, $A = A^T$, მაშინ

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|, \text{ და } \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}, \quad (2.64)$$

სადაც, $\lambda_i(A)$ მოცემული A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია, ანუ, $\det(A - \lambda E) = 0$ მახასიათებელი განტოლების ფესვებია.

განვიხილოთ ნორმის გამოთვლის მაგალითები Mathcad -ის ბაზაზე.

ა) x ვექტორის პირველი და მეორე ნორმა:

$$x := \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \max(x) = 10 \quad \sqrt{\sum_{i=0}^3 (x_i)^2} = 11.619$$

ბ) ეხლა განვიხილოთ, მოცემული არასიმეტრიული A მატრიცის პირველი ნორმა და მეორე ნორმის შეფასება ზემოდან:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad j := 0..2 \quad v_j := \sum_{i=0}^2 \left| \left[(A^T)^{\langle j \rangle} \right]_i \right| \quad v = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \max(v) = 11$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 (A_{i,j})^2} = 9.381$$

მატრიცის ნორმების გამოთვლა უფრო მარტივია, თუ გამოვიყენებთ **Mathcad** –ის სტანდარტულ პროგრამებს

$$\text{norm1}(A) = 11 \quad \text{norm2}(A) = 8.847$$

განვიხილოთ ნორმის თვისებები:

ა) $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$; $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|$;

ბ) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

რიცხვითი ალგორითმების რეალიზაციისას გარდაუვალია ცდომილებები, რომელთა შეფასებაც ხდება ცდომილების ρ ვექტორის ნორმის საშუალებით. ცდომილებები გამოწვეულია საწყისი მონაცემების ცდომილების ვექტორით, რომლის ნორმას ავლნიშნავთ ρ_1 , თვით მეთოდის ცდომილებებით, რომლის ვექტორის ნორმას ავლნიშნავთ ρ_2 და კომპიუტერში რიცხვების დამრგვალების ცდომილების ვექტორით ნორმით ρ_3 . ჯამური ρ ცდომილება ფასდება უტოლობით

$$\rho \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \tag{2.65}$$

როგორც წესი, თვლიან რომ მეთოდის ცდომილება 10-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს საწყისი მონაცემების ცდომილებაზე. თავის მხრივ, დამრგვალების ცდომილება 10-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს მეთოდის ცდომილებაზე.

ცვლადთა გამორიცხვის გაუსის მეთოდი ზუსტი მეთოდია, მას არა აქვს მეთოდის ცდომილება, თუმცა, საწყისი მონაცემების ან დამრგვალების მცირე ცდომილებასაც შეუძლია ამოხსნის შედეგში მოგვცეს მნიშვნელოვანი ცდომილება.

წრფივ განტოლებათა $Ax = b$ სისტემის x ამონახსნის ცდომილების შესაფასებლად მარჯვენა B მხარეზე დამოკიდებულებით, განიხილავენ სისტემის ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების შეფარდებას მარჯვენა მხარეების ფარდობით ცდომილებებთან

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\|r\|}{\|x\|}}{\frac{\|\eta\|}{\|b\|}} &= \frac{\|r\| \cdot \|b\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} = \frac{\|Ax\| \cdot \|A^{-1}\eta\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\eta\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} = \\ &= \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu(A), \end{aligned} \tag{2.66}$$

სადაც r ამონახსნის ცდომილებაა, η - მარჯვენა მხარეების ცდომილება.

$\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ რიცხვს A **მატრიცის განპირობებულობის რიცხვს უწოდებენ**. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი, ახასიათებს სისტემის მარჯვენა მხარეებში ცდომილების გავლენით, ამონახსნის ცდომილების ზრდის სისწრაფეს. თუ,

განპირობებულობის რიცხვი გაცილებით მეტია ერთზე, მაშინ სისტემას ცუდად განპირობებული ეწოდება და მისი ამხსნისას ცდომილება დიდია.

სიმეტრიული მატრიცებისათვის

$$\nu(A) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|} \geq 1. \quad (2.67)$$

განვიხილოთ მაგალითი Mathcad –ის ბაზაზე.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{\max(\text{eigenvals}(A))}{\min(\text{eigenvals}(A))} = 3.588$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში, მატრიცის განპირობებულობის რიცხვია 3.588.

ზუსტი მეთოდების გამოყენება წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად, მაღალი რიგის ($n \geq 10^4$) შემთხვევაში არაა მიზანშეწონილი, რადგან ოპერაციათა რიცხვი სწრაფად მატულობს განზომილებასთან ერთად და მაშასადამე მატულობს ანგარიშის ცდომილებაც. თუ, *სისტემის მატრიცა სამდიაგონალაა, მაშინ იყენებენ თომასის გაშვების მეთოდს*, რაც ფაქტიურად, გაუსის მეთოდია, თუმცა ოპერაციათა რიცხვი მცირდება, რადგან ნულოვან დიაგონალებთან არ ხდება ოპერაციები, რაც ამცირებს ოპერაციათა საერთო რაოდენობას და მაშასადამე ცდომილებას.

სასრულ-სხვაობათა მეთოდის გამოყენებას წრფივი, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად, მიყვარათ მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის აუცილებლობასთან. ასეთ შემთხვევაში, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს, რომელთაც საზოგადოდ აქვთ სახე

$$B \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{\tau_{n-1}} + Ax_{n-1} = b, \quad n \in N, \quad (2.68)$$

სადაც τ_{n-1} იტერაციის პარამეტრია. თუ, $B = E$, მაშინ იტერაციულ მეთოდს

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{\tau_{n-1}} + Ax_{n-1} = b, \quad n \in N, \quad (2.69)$$

ეწოდება *ცხადი იტერაციული სქემა* და ამონახსნი მოიცემა სქემით $x_n = x_{n-1} - \tau_{n-1}(Ax_{n-1} - b)$, $n \in N$. (2.70)

თუ, $B \neq E$ მაშინ *იტერაციულ სქემას ეწოდება არაცხადი* და ის მოიცემა ფორმულით

$$Bx_n = Bx_{n-1} - \tau_{n-1}(Ax_{n-1} - b), \quad n \in N. \quad (2.71)$$

არაცხადი იტერაციული სქემის შემთხვევაში, იტერაციის ყოველ ახალ ბიჯზე, უნდა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა (2.71).

იაკობის მარტივი იტერაციის სქემას წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის აქვს სახე

$$x_{n+1} = x_n - \tau(Ax_n - b) = (E - \tau A)x_n + \tau b = Dx_n + C, \quad (2.72)$$

$$D = E - \tau A, \quad C = \tau b, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

თეორემა. თუ, $\|D\| < 1$ მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და (2.72) იტერაციული პროცესი კრებადია სისტემის ამონახსნისაკენ გეომეტრიული პროგრესიის სისწრაფით.

იტერაციული პროცესით მიღებული ამონახსნის, ზუსტ ამონახსნთან აბსოლუტური ცდომილება ფასდება უტოლობით

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\|D\|}{1 - \|D\|} \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (2.74)$$

ეს უტოლობა საშუალებას გვაძლევს გავაჩეროთ იტერაციული პროცესი მაშინ, როცა მიღწეულია ამონახსნის შესაბამისი სიზუსტე.

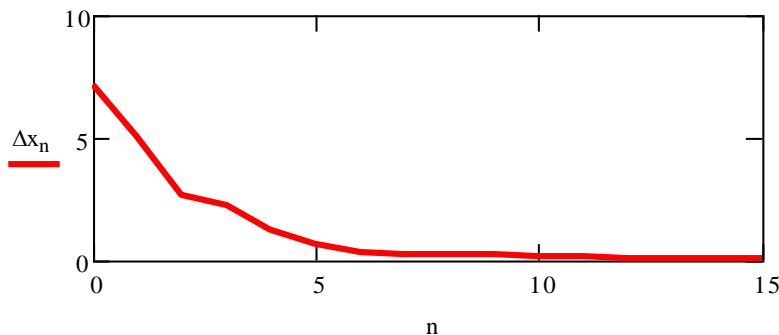
განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი **Mathcad**-ის ბაზაზე

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \tau := 0.4 \quad N := 15 \quad x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D := A^0 - \tau \cdot A$$

$$\text{norm2}(D) = 1.231 \quad n := 0..N \quad x^{(n+1)} := D \cdot x^{(n)} + c \quad \Delta x_n := |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$$

$$\Delta x_N = 9.19 \times 10^{-3} \quad \text{მიახლოებითი ამონახსნი} \quad x^{(N+1)} = \begin{pmatrix} 2.241 \\ -1.24 \\ 10.214 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.25 \\ 10.25 \end{pmatrix} \quad \text{ზუსტი ამონახსნი}$$



ცდომილების დინამიკა იტერაციების მიხედვით

2.2.5. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით

თუ, გვინდა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (2.75)$$

იტერაციული მეთოდით, მაშინ ისეთნაირადვე ვიქცევით, როგორც სკალარულ შემთხვევაში. (2.75) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ ვექტორული ფორმით, თუ შემოვიღებთ შესაბამის აღნიშვნებს

$$\begin{cases} F(x) = 0 \\ F^T = (f_1, f_2, \dots, f_n) \\ x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.76)$$

შესაბამის იტერაციულ სქემას ექნება სახე:

$$x_{n+1} = x_n + \tau F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.77)$$

თუ, იტერაციული პროცესის წარმომქმნელი $\varphi(x) = x + \tau F(x)$ ფუნქცია, აკმაყოფილებს ბანახის თეორემის პირობებს, მაშინ (2.77) პროცესი კრებადია (2.75) არაწრფივი განტოლების ამონახსნისაკენ.

განვიხილოთ, არაწრფივ განტოლებათა სისტემის იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით ამოხსნის მაგალითი.

ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა $F(x) = 0$. შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა **Mathcad**–ის ბაზაზე

ამოსახსნელი სისტემის მარცხენა მხარის ვექტორ-ფუნქცია.

$$F(x) := \begin{bmatrix} (x_0)^2 + x_1 - 1 \\ e^{-x_1} - x_1 \end{bmatrix}$$

იტერაციის პარამეტრი: $\tau := 1$

იტერაციათა რიცხვი: $N := 15$

უცნობების საწყისი მიახლოებები: $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

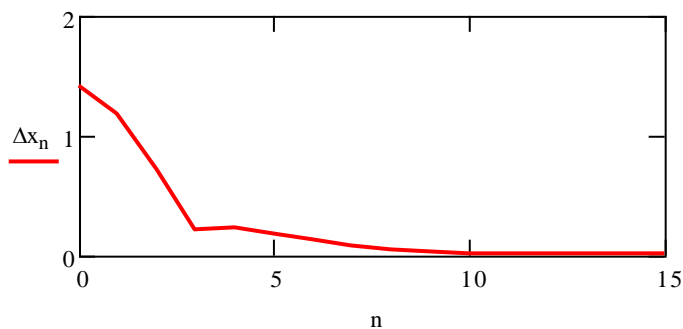
იაკობის მარტივი იტერაციის სქემა:

$$n := 0..N \quad x^{(n+1)} := x^{(n)} + \tau \cdot F(x^{(n)})$$

ცდომილებების დინამიკა იტერაციების ნომრის მიხედვით:

$$\Delta x_n := |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$$

ცდომილების დინამიკის გრაფიკული სურათი:



მიახლოებითი ამონახსნი მეთხუთმეტე იტერაციაზე:

$$x^{(N+1)} = \begin{pmatrix} -0.658 \\ 0.567 \end{pmatrix}$$

$F(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $F(x^{(N+1)})$:

$$F(x^{(N+1)}) = \begin{pmatrix} -4.699 \times 10^{-4} \\ 1.182 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

როგორც ვხედავთ, აბსოლუტური ცდომილებაა $\varepsilon \approx 10^{-4}$.

2.2.6. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიუტონის მეთოდით

განვიხილოთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

ამოხსნის ნიუტონის ალგორითმი. აქაც უნდა ვისარგებლოთ (2.76) ვექტორული აღნიშვნებით. ანუ, გვაქვს განტოლებათა სისტემა $F(x) = 0$. განვიხილოთ, ამ ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულებისაგან შედგენილი მატრიცა (იაკობის მატრიცა):

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

მაშინ, ნიუტონის იტერაციული სქემა არაწრფივ განტოლებათა სისტემისათვის, ჩაიწერება ვექტორული ფორმით:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} \cdot F(x_n). \quad (2.80)$$

თუ, სისტემის იაკობის მატრიცა არაა გადაგვარებული $|F'(x)| \neq 0$ და საწყისი პირობები “საკმაოდ ახლოსაა ამონახსნთან”, მაშინ ნიუტონის იტერაციული პროცესი კრებადია. თუმცა, ნიუტონის სქემით, არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა არაპრაქტიკულია, თეორიულად ის მრავალი ახალი იდეის მომცემია.

2.3. კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრფის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა-ბიექცია; რაც საშუალებას იძლევა, წრფესთან დაკავშირებული გეომეტრიული ამოცანები ჩავწეროთ ნამდვილი რიცხვების მეშვეობით და ამოვხსნათ ალგებრული მეთოდების საშუალებით. მაგრამ, წრფეების გარდა გეომეტრიაში არსებობენ სიბრტყეებიც (ორგანზომილებიანი სივრცე). ისმის კითხვა: ვიცით, რომ ერთგანზომილებიან სივრცეს - წრფეს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, არსებობენ თუ არა სიბრტყის შესაბამისი “ბრტყელი რიცხვები”?

ამ კითხვაზე პასუხი არის დადებითი: დიახ არსებობენ, თან ასეთი რიცხვითი სიმრავლეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

სიბრტყის ყოველ P წერტილს შეესაბამება ორი რიცხვი(მისი კოორდინატები) $P(x;y)$. ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ “ბრტყელი რიცხვები”. ვთქვათ, გვაქვს რიცხვები $A = (\alpha; \beta)$; $B = (\gamma; \delta)$. იმისათვის, რომ აზრი ქონდეს ახალი რიცხვების შემოღებას, უნდა გვქონდეს შესაბამისი ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები. ამის შემდეგ, შეგვეძლება დავახასიათოთ შესაბამისი ალგებრული სისტემა. ამიტომ, შემოვიღოთ ოპერაციები “ბრტყელ რიცხვებზე”.

$$A + B = (\alpha; \beta) + (\gamma; \delta) = (\alpha + \beta; \gamma + \delta) ; \quad (2.81)$$

$$A \cdot B = (\alpha; \beta) \cdot (\gamma; \delta) = (\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta; \alpha \cdot \delta + \beta \gamma) ; \quad (2.82)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(\alpha; \beta)}{(\gamma; \delta)} = \left(\frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \frac{\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right). \quad (2.83)$$

თუ, შემოვიღებთ ნულისა და ერთის შესაბამის ბრტყელ რიცხვებს

$$0 = (0;0); \quad (2.84)$$

$$1 = (1;0).$$

მივიღებთ ალგებრულ სისტემას, რომლის ოპერაციებიც ძირითადად აკმაყოფილებენ იგივე თვისებებს, რასაც ოპერაციები ნამდვილ რიცხვებზე(წრფივ რიცხვებზე), თუმცა, არის განსხვავებებიც. კერძოდ, თუ “ბრტყელ რიცხვებს” ჩავწერთ ალგებრული ფორმით $A = \alpha + i \cdot \beta$. სადაც, $i = (0;1)$; $\alpha = (\alpha; 0)$. მაშინ გვექნება

$$i^2 = i \cdot i = -1. \quad (2.85)$$

ასეთი ტოლობა შეუძლებელია ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში. ასე, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ახალი ტიპის ალგებრულ სისტემასთან რომელსაც C - კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს[13] უწოდებენ. $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

2.3.1. კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები

განსაზღვრება: $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება სიბრტყეზე ამ რიცხვის გამომსახველი წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილს $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე ; ხოლო ორი გვერდის სხვაობა ნაკლებია მესამე გვერდზე :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (2.86)$$

განსაზღვრება: $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება $\bar{z} = a - ib$ კომპლექსურ რიცხვს. ცხადია, რომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$|\bar{z}| = |z|; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \quad (2.87)$$

განსაზღვრება: $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება $\operatorname{Re} z = a$ რიცხვს, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება $\operatorname{Im} z = b$ რიცხვს.

კომპლექსური რიცხვი იგივე სიბრტყის წერტილია. სიბრტყის წერტილები კი, შეგვიძლია გამოვსახოთ, როგორც დეკარტის კოორდინატებში (შეესაბამება კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ჩაწერის ფორმა $z = x + iy$), ასევე, პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

ამ შემთხვევაში წერტილი ხასიათდება $|z|$ მოდულით (მანძილით კოორდინატთა სათავემდე) და კუთხით აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, რომელიც აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $2\pi k$ სიზუსტით და რომელსაც კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი $\arg z$ ეწოდება.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k; \quad (2.88)$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k; \quad (2.89)$$

$$k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (2.90)$$

შედგად, კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$z = a + ib = |z|(\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)). \quad (2.91)$$

თუ, გავიხსენებთ ეილერის ფორმულას

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi; \quad (2.92)$$

მაშინ, კომპლექსური რიცხვის (2.91) ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გადავალთ მის მაჩვენებლიან ფორმაზე;

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z}. \quad (2.93)$$

მაგალითი: $z = 1 + i \cdot 1$ კომპლექსური რიცხვი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით.

ამოხსნა: $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\arg z = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$ აქედან გამომდინარე,

ტრიგონომეტრიულ ფორმას ექნება სახე:

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad \text{ხოლო შესაბამის მაჩვენებლიან} \quad (2.93)$$

ფორმას, მივიღებთ სახით $z = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$.

2.3.2. ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \cdot \sin(\arg z_1 + \arg z_2)). \quad (2.94)$$

ამ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \arg z) + i \cdot \sin(n \cdot \arg z)); \quad (2.95)$$

ამ ფორმულიდან გვაქვს:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right). \quad (2.96)$$

სადაც

$$k = 0; 1; 2; \dots; n-1.$$

აქედან ნათლად ჩანს, რომ კომპლექსური რიცხვიდან n -ური ხარისხის ფესვს აქვს n მნიშვნელობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ n ხარისხის მრავალწევრს აქვს n ფესვი.

განვიხილოთ ორწევრა განტოლებები:

1) $x^2 = -1$ ამ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს. ეხლა ვნახოთ მისი ამონახსნები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x = \sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \cdot \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}$$

$k = 0; 1$ ანუ გვაქვს ორი ამონახსნი

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}.$$

2) $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ ფესქემა გამოსახულება გადავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით და მერე ვისარგებლოთ (2.96) ფორმულით.

$$x = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{0+2\pi k}{3} + i \sin \frac{0+2\pi k}{3} \right).$$

$k = 0; 1; 2$. მაშასადამე, გვაქვს სამი ამონახსნი:

$$x_1 = \sqrt[3]{2}; \quad x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$x_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

P.S.

კომპლექსურ რიცხვებს ფართო გამოყენება აქვს ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვის ამოცანების შესწავლისას და სიგნალების ფილტრაციის საქმეში [13-14]. ასევე, დიდია მათი გამოყენების არეალი უწყვეტ ტანთა მექანიკის ბრტყელი ამოცანების შესწავლის საქმეში [15-16]. არსებობენ კომპლექსური რიცხვებისაგან განსხვავებული სხვა ბრტყელი რიცხვებიც. კონკრეტულად, **ღუაღური და ორმაგი რიცხვები**, მაგრამ ამ რიცხვებისათვის გაყოფის ოპერაცია არაა ყოველთვის შესაძლებელი (აქ არაა ლაპარაკი ნულზე გაყოფაზე), ამიტომ პრაქტიკაში “ბრტყელი რიცხვებიდან”, ჯერ-ჯერობით, ფართო გამოყენება აქვთ, ძირითადად, კომპლექსურ რიცხვებს.

2.4. რიცხვითი სისტემების აგება გრასმან-კლიფორდის პროცედურით

კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა არაა დალაგებული, ანუ არაა მათთვის, საზოგადოდ, განმარტებული მეტობა-ნაკლებობის მიმართება. კომპლექსურმა რიცხვებმა დიდი გამოყენება პოვა ფიზიკასა და ტექნიკაში, მექანიკასა და მათემატიკაში. სწორედ ამიტომ, გაგრძელდა ახალი ტიპის განზოგადებული, რიცხვითი სისტემების ძიება და შესწავლა [19-23], იმ პირობით რომ, მათ ქონოდათ ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვების ძირითადი თვისებები. ასე წარმოიქმნა **ორმაგი და ღუაღური რიცხვითი სისტემები, კვატერნიონები, ოქტავეები, კლიფორდის რიცხვები, გრასმანის სისტემები** და ა.შ.

განვიხილოთ ახალი, განზოგადებული რიცხვითი სისტემების აგების **გრასმან-კლიფორდის პროცედურა**.

ვთქვათ a, b - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. განვიხილოთ

$$z = a + bi, \quad (2.97)$$

სახის რიცხვების სიმრავლე, სადაც i - რაღაც სიმბოლოა (ობიექტი), რომელიც ნამდვილ რიცხვებზე გამრავლებისას, აკმაყოფილებს კომუტაციურობის პირობას, ანუ, $bi = ib \quad \forall b \in \mathbb{R}$ და ადგილი აქვს ტოლობას $i^2 = -1 \vee i^2 = 1 \vee i^2 = 0$, ანუ,

$$i^2 = \varepsilon, \quad (2.98)$$

სადაც ε იღებს მნიშვნელობებს -1 , ან 1 ან 0 . a, b - რიცხვებს ეწოდებათ რთული z რიცხვის კომპონენტები, ხოლო i - ს უწოდებენ წარმოსახვით ერთეულს. ასე, რომ გრასმან-კლიფორდის პროცედურის პირველი ბიჯის შემდეგ, ხდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაორმაგება: ერთი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ადგენს a კომპონენტს, ხოლო მეორე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე b - კომპონენტს.

განსაზღვრება: (2.97) სახის რიცხვებს ეწოდებათ *კომპლექსური რიცხვები*, თუ, $i^2 = -1$, ეწოდებათ *ორმაგი რიცხვები*, თუ, $i^2 = 1$ და ეწოდებათ *ღუაღური რიცხვები*, თუ, $i^2 = 0$.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე, *კომპლექსური, ორმაგი და ღუაღური რიცხვების ნამრავლი* შესაბამისად, განისაზღვრება უბრალო არითმეტიკული ფორმულებით (2.98) პირობის გათვალისწინებით

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc) \cdot i, \quad (2.99)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bd + (ad + bc) \cdot i, \quad (2.100)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc) \cdot i. \quad (2.101)$$

ყველა შემთხვევაში, გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურიცაა და ასოციატიურიც.

ხოლო, ორმაგი და ღუაღური რიცხვები არიან სისტემები *გაყოფის გარეშე*, რადგან მათთვის გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის არაა შესაძლებელი (ორმაგი რიცხვები არ იყოფა $z = a \pm ai$ რიცხვებზე, ხოლო ღუაღური რიცხვები არ იყოფა $z = ai$ რიცხვებზე).

გამოვიკვლიოთ რომელი $z_1 \neq 0$ და $z_2 \neq 0$ რიცხვებისათვის აქვს ადგილი ტოლობას

$$z_1 \cdot z_2 = 0. \quad (2.102)$$

ასეთ რიცხვებს *ნულის გამყოფები* ეწოდებათ. *კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ნულის გამყოფები არ გვაქვს*, რადგან

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0. \quad (2.103)$$

ორმაგ რიცხვთა სიმრავლეში

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = a + ai \vee z_2 = a - ai. \quad (2.104)$$

ყველა ასეთი სახის რიცხვები როცა $a \neq 0$, ნულის გამყოფებია.

დუალურ რიცხვთა სიმრავლეში **ნულის გამყოფებია** ai რიცხვები, რომლებისთვისაც $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, რადგან

$$ai \cdot bi = abi^2 = 0, \quad (2.105)$$

ნებისმიერი ნამდვილი a, b რიცხვებისათვის.

გადავიდეთ გრასმან-კლიფორდის პროცედურის მეორე ნაბიჯზე. ვთქვათ, z_1 და z_2 , (2.97) სახის რაიმე რიცხვებია, სადაც წარმოსახვითი i ერთეული აკმაყოფილებენ (2.98) პირობას. შემოვიღოთ რაიმე მეორე j სიმბოლო (ობიექტი), რომელისთვისაც

$$j^2 = \delta, \quad (2.106)$$

სადაც δ იღებს მნიშვნელობებს -1 , ან 1 ან 0 . ამასთანავე, j სიმბოლოს ნამრავლი ნამდვილ რიცხვებზე არის კომუტაციური, ხოლო i წარმოსახვით ერთეულზე მარჯვენა ნამრავლი ანტიკომუტაციურია ($ji = -ij$), ან კომუტაციურია ($ji = ij$), ან გადაგვარებულია ($ji = 0$), ანუ,

$$ji = \alpha ij, \quad (2.107)$$

სადაც α იღებს მნიშვნელობებს -1 , ან 1 ან 0 . განვიხილოთ

$$u = z_1 + z_2j, \quad (2.108)$$

სახის რიცხვების სიმრავლე. რადგან $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$,

$$u = a + bi + cj + dij. \quad (2.109)$$

ამ ფორმულაში ij ნამრავლი წარმოადგენს ობიექტს ახალი თვისებებით. შემოვიღოთ აღნიშვნა $ij = k$. მაშინ მივიღებთ რომ

$$u = a + bi + cj + dk. \quad (2.110)$$

u ობიექტისათვის i, j, k სიმბოლოებს წარმოსახვით ერთეულებს უწოდებენ. მათ ნამრავლებს აქვთ სახე იხ. ცხრილი 2.1

ცხრილი 2.1

	i	j	k
i	ε	k	εj
j	αk	δ	$\alpha \delta i$
k	$\alpha \varepsilon j$	δi	$\alpha \varepsilon \delta$

2.4.1. კვატერნიონები

უფრო დეტალურად განვიხილოთ (2.110) ტიპის რიცხვები. როცა $\varepsilon = \delta = \alpha = -1$, ანუ, $i^2 = j^2 = -1$ და $ji = -ij$, მაშინ

წარმოსახვითი i, j, k ერთეულები მრავლდებიან ერთმანეთზე წესით, რომელიც მოცემულია ცხრილით 2.2

ცხრილი 2.2

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

ასეთ $u = a + bi + cj + dk$ რიცხვებს, კვატერნიონებს უწოდებენ. ეს რიცხვები პირველად განიხილა ჰამილტონმა.

ნებისმიერი კვატერნიონისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$u\tilde{u} = \tilde{u}u = \|u\|^2, \quad \overline{u_1 u_2} = \overline{u_2} \overline{u_1}, \quad \|u_1 u_2\| = \|u_1\| \cdot \|u_2\|, \quad (2.111)$$

სადაც $\tilde{u} = a - bi - cj - dk$ არის $u = a + bi + cj + dk$ კვატერნიონის შუღლებული კვატერნიონი, ხოლო $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ არის კვატერნიონის ნორმა. კვატერნიონების H სიმრავლე არის სისტემა გაყოფით. კვატერნიონების სიმრავლეს აქვს კომპლექსური რიცხვების მრავალი თვისება. კვატერნიონების გამრავლებას შეესაბამება სამგანზომილებიანი და ოთხგანზომილებიანი სივრცეების პარალელური გადატანა, ბრუნვა და მსგავსების გარდაქმნა, ცენტრალური და ღერძული სიმეტრია.

2.4.2. პაულის რიცხვები

თუ, გავაგრძელებთ ზემოთმოყვანილ გრასმან-კლიფორდის პროცედურას მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით, მაშინ n -ურ ბიჯზე მივიღებთ

$$w = v_1 + v_2 l, \quad (2.112)$$

სახის რიცხვებს, სადაც v_1, v_2 არის გრასმან-კლიფორდის პროცედურით $(n-1)$ ბიჯზე აგებული რიცხვები, ხოლო l ახალი სიმბოლოა, რომელსაც წარმოსახვითი ერთეულებისნაირი თვისებები აქვს. მაშინ ცხადია, რომ w რიცხვებს ექნებათ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_m i_m, \quad (2.113)$$

სადაც $m = 2^n - 1$, ხოლო a_0, a_1, \dots, a_m ნამდვილი რიცხვებია; i_1, i_2, \dots, i_m წარმოსახვითი ერთეულებია, რომლებიც გამრავლებისას კომუტირებენ ნამდვილ რიცხვებთან. ხოლო, ერთმანეთზე ნამრავლებისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$i_p^2 = \varepsilon_p, \quad i_q i_p = \alpha_{pq} i_p i_q, \quad p < q, \quad p, q = 1, 2, \dots, n, \quad (2.114)$$

სადაც $\varepsilon_p, \alpha_{pq}$ იღებს მნიშვნელობებს -1, ან 1 ან 0.

თუ, $n = 1$ და $\varepsilon_1 = -1$ მაშინ (2.112),(2.113) *კომპლექსური რიცხვებია*; თუ, $n = 1$ და $\varepsilon_1 = 1$ მაშინ (2.112),(2.113) *ორმაგი რიცხვებია*; თუ, $n = 1$ და $\varepsilon_1 = 0$ მაშინ (2.112),(2.113) *ღუალური რიცხვებია*; თუ, $n = 2$ და $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\alpha_{12} = -1$, მაშინ (2.112),(2.113) *კვატერნიონებია*; თუ, (2.114) ნამრავლებში ყველა $\alpha_{pq} = -1$, მაშინ (2.112),(2.113) *კლიფორდის რიცხვებია*; თუ, ყველა $\varepsilon_p = 0$, $\alpha_{pq} = -1$, მაშინ (2.112),(2.113) *გრასმანის რიცხვებია*; თუ, $n = 3$ და ყველა $\varepsilon_p = 1$, $\alpha_{pq} = -1$, მაშინ (2.112),(2.113) *პაულის რიცხვებია*; თუ, $n = 4$ და $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1$, $\alpha_{pq} = -1$, მაშინ (2.112),(2.113) *დირაკის რიცხვებია*.

პაულის რიცხვებს აქვთ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_{12} + a_5 i_{13} + a_6 i_{23} + a_7 i_{123}, \quad (2.115)$$

სადაც $i_{12} = i_1 i_2$, $i_{13} = i_1 i_3$, $i_{23} = i_2 i_3$, $i_{123} = i_1 i_2 i_3$. ამას გარდა,

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1, \quad i_2 i_1 = -i_1 i_2, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3, \quad i_3 i_2 = -i_2 i_3. \quad (2.116)$$

P.S.

პაულის რიცხვების ნამრავლი ასოციატიურია, მაგრამ არაა კომუტაციური. ასეთივე თვისება აქვთ კლიფორდის რიცხვებს, გარდა კომპლექსური რიცხვებისა.

2.4.3 ჰიპერკომპლექსური რიცხვები

ყველა, ზემოთგანხილული რიცხვები ჰიპერკომპლექსურ რიცხვებს მიეკუთვნებიან. ასე ეძახიან მათემატიკურ ობიექტებს, რომლებსაც აქვთ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \quad (2.117)$$

სადაც a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i_k , $k = 1, 2, \dots, n$ წარმოსახვითი ერთეულებია, რომლებიც კომუტირებენ ნამდვილ რიცხვებთან ნამრავლში. ასეთი რიცხვებისათვის ტოლობა და ჯამი ისევე განიმარტება, როგორც ვექტორებისათვის, ხოლო მათი ერთმანეთზე ნამრავლები განისაზღვრება, წარმოსახვითი ერთეულების გამრავლების დადგენილ წესზე დამოკიდებულებით

$$i_p i_q = \alpha_{pq0} + \alpha_{pq1} i_1 + \alpha_{pq2} i_2 + \dots + \alpha_{pqn} i_n, \quad (2.118)$$

სადაც $\alpha_{pq} \in \mathbb{R}$; $p, q = 1, 2, \dots, n$.

(2.117) სახის რიცხვების სიმრავლეს, მათზე ზემოთ განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით და

მათი ტოლობის ცნებით, $n + 1$ რანგის ჰიპერკომპლექსური რიცხვითი სისტემა ეწოდება.

2.5. კელი-დიქსონის პროცედურა

ვთქვათ, U არის (2.117) სახის ჰიპერკომპლექსური სისტემა რაიმე გარკვეული (2.118) ტიპის გამრავლების წესით. განვიხილოთ $U^{(2)}$ ტიპის რიცხვითი სისტემა

$$u = u_1 + u_2 e, \quad (2.119)$$

სადაც $u_1, u_2 \in U$, ხოლო e ახალი სიმბოლოა, რომელიც ნამრავლებში კომუტირებს ნამდვილ რიცხვებთან. განვსაზღვროთ ტოლობა, აგრეთვე, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები $U^{(2)}$ ტიპის რიცხვებისათვის შემდეგი წესით

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 e = v_1 + v_2 e &\Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2; \\ (u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) &= u_1 + v_1 + (u_2 + v_2) e; \\ (u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) &= u_1 v_1 - \tilde{v}_2 u_2 + (v_2 u_1 + u_2 \tilde{v}_1) e; \end{aligned} \quad (2.120)$$

სადაც $\tilde{u} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \dots - a_n i_n$.

განსაზღვრება: $2(n + 1)$ რანგის $U^{(2)}$ ჰიპერკომპლექსურ სისტემას *გაორმაგებული U სისტემა ეწოდება*, ხოლო თვით $U^{(2)}$ სისტემის აგების პროცედურას – *კელი-დიქსონის გაორმაგების პროცედურა*.

ეს პროცედურა განსხვავდება გროსმან-კლიფორდის პროცედურისაგან გამრავლების (2.120) წესით. ამას გარდა, საწყის U სისტემას შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რანგი (განზომილება) და გამრავლების ნებისმიერი (2.118) ტიპის წესი.

2.5.1. ოქტავები

განვიხილოთ, კლასიკური რიცხვითი სიმრავლეებიდან *კელი-დიქსონის* პროცედურის შედეგად მიღებული სისტემები.

- ა) თუ, $U = \mathbb{R}$, მაშინ $U^{(2)}$ არის კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე \mathbb{C} , ანუ, $U^{(2)} = \mathbb{C}$;
- ბ) თუ, $U = \mathbb{C}$, მაშინ $U^{(2)} = \mathbf{H}$ კვატერნიონების რიცხვითი სისტემაა;
- გ) თუ, $U = \mathbf{H}$, მაშინ $U^{(2)}$ არის

$$\mathbf{w} = u_1 + u_2 e = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) e =$$

$$= \sum_{k=0}^7 a_k i_k, \quad (2.121)$$

სახის რიცხვითი სისტემა, სადაც $u_1, u_2 \in H$ კვანტერნიონებია, $a_k \in \mathbb{R}$, ასევე, $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k, i_4 = e, i_5 = ie, i_6 = je, i_7 = ke$ წარმოსახვითი ერთეულებია, რომელთა ყველა შესაძლო ნამრავლები (2.120) წესების თანახმად მოცემულია ცხრილში 2.3

ცხრილი 2.3

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	i_3	$-i_2$	i_5	$-i_4$	$-i_7$	i_6
i_2	$-i_3$	-1	i_1	i_6	i_7	$-i_4$	$-i_5$
i_3	i_2	$-i_1$	-1	i_7	$-i_6$	i_5	$-i_4$
i_4	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	i_1	i_2	i_3
i_5	i_4	$-i_7$	i_6	$-i_1$	-1	$-i_3$	i_2
i_6	i_7	i_4	$-i_5$	$-i_2$	i_3	-1	$-i_1$
i_7	$-i_6$	i_5	i_4	$-i_3$	$-i_2$	i_1	-1

განსაზღვრება: (2.121) სახის რიცხვებს, წარმოსახვითი ერთეულების გამრავლების ცხრილში მოყვანილი წესით, *ოქტავეები* ეწოდებათ.

ოქტავეების ნამრავლი, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური და ასოციაციური.

2.6. ზოგიერთი რიცხვითი სისტემის მატრიცული წარმოდგენა

ჰიპერკომპლექსური რიცხვების პრაქტიკული გამოყენებისას, ხშირად, მიზანშეწონილია მათი მატრიცული წარმოდგენა.

ა) *განვიხილოთ* $z = a + bi$ *კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე*. ჩავწეროთ ისინი $z = ai_0 + bi_1$ სახით, სადაც $i_0 = 1$ და $i_1 = i$. გავითვალისწინოთ ამ სიმბოლოების ალგებრული თვისებები:

$$i_0^2 = i_0, \quad i_0 i_1 = i_1 i_0, \quad i_1^2 = -i_0, \quad a i_0 = i_0 a, \quad a i_1 = i_1 a, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.122)$$

ამ, i_0 და i_1 ობიექტების ნაცვლად, განვიხილოთ შესაბამისი კვადრატული მატრიცები

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.123)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს მატრიცები აკმაყოფილებენ (2.122) პირობებს. მაგალითად,

$$i_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i_0. \quad (2.124)$$

(2.123) მატრიცული შესაბამისობებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ $z = ai_0 + bi_1$ კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება მატრიცა

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (2.125)$$

ამ შესაბამისობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კომპლექსურ რიცხვებსა და (2.125) ტიპის მატრიცებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც, კომპლექსური რიცხვების ჯამსა და ნამრავლს შეესაბამება (2.125) სახის შესაბამისი მატრიცების ჯამი და ნამრავლი. ასეთ შესაბამისობას ორ სიმრავლეს შორის, *იზომორფიზმი* ეწოდება.

ბ) $u = a + bi + cj + dk = ai_0 + bi_1 + ci_2 + di_3$

კვატერნიონებისათვის გვაქვს შესაბამისობა

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

სადაც $i \in \mathbb{C}$. ამ შესაბამისობის გათვალისწინებით, კვატერნიონების მატრიცულ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$u = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

ამრიგად, კვატერნიონებსა და (2.126) სახის კომპლექსურ რიცხვებს შორის არსებობს იზომორფიზმი.

გ) *პაულის რიცხვების მატრიცული წარმოდგენისათვის,*

i_0 ობიექტისა და მთავარი წარმოსახვითი ერთეულებისათვის იყენებენ წარმოდგენებს

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ხოლო სხვა წარმოსახვითი ერთეულების მატრიცული წარმოდგენებისათვის უნდა გამოვიყენოთ ფორმულები

$$i_{12} = i_1 i_2, \quad i_{13} = i_1 i_3, \quad i_{23} = i_2 i_3, \quad i_{123} = i_1 i_2 i_3.$$

დ) *კლიფორდის რიცხვების წარმოდგენა ხდება ოთხი მატრიცული კომპონენტით:*

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

აქ, ადგილი აქვს ნორმირების თანადობებს $\gamma_i^2 = +1$. კლიფორდის რიცხვების მეშვეობით იგება სპეციალური სპინორული ოპერატორები[17-18], რომელთაც ფართო გამოყენება აქვთ თეორიულ ფიზიკაში.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

- 1.რაში მდგომარეობს ევკლიდეს ალგორითმის არსი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში(რისი პოვნის საშუალებას იძლევა) ?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 120; 180?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 3x^2 + x \equiv 0 \pmod{2}$;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^5 = 1$;
- 6.სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე(რატომ)?

ვარიანტი 2

- 1.ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით იპოვეთ $d(150;100)$?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 12; 18?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 3x^2 + x \equiv 0 \pmod{5}$;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^5 = i$;
- 6.სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე(რატომ)?

ვარიანტი 3

- 1.რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 150; 18?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{2}$;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^6 = 64$;
- 6.როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

ვარიანტი 4

- 1.რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 125; 8?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^3 = 8$;
- 6.როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

ვარიანტი 5

- 1.ჩაწერეთ $z = 3 + 4i$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 56?
- 3.იპოვეთ $w = \frac{2+3i}{4i}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
- 4.ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^4 = -1$;
- 6.მოიყვანეთ სეპარაბელური სივრცის განსაზღვრება?

ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ $z = (3+4i)(2-3i)$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 250; 560?
3. იპოვეთ $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{3}$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^4 = -16$;
6. მოიყვანეთ კვატერნიონების განსაზღვრება?

ვარიანტი 7

1. ჩაწერეთ $z = (3+4i)^{107}$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 50; 60?
3. იპოვეთ $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{200}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:
 $5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{8}$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
 $x^4 = -16i$;
6. მოიყვანეთ კლიფორდის რიცხვების განსაზღვრება?

ვარიანტი 8

1. ჩაწერეთ $z = (1+i)(1-i)$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 60?
3. იპოვეთ $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:
 $x^3 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{2}$;

5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$$x^4 = -i;$$

6. მოიყვანეთ სრული მეტრიკული სივრცის განსაზღვრება?

ლიტერატურა

1. Дьюси С. Нумерология: числа и судьбы, пер. с англ., Москва, 1999
2. Ключников. Священная наука чисел, Москва, 2000
3. Лежен Дирихле П.Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., Санкт-Петербург, 1863
4. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел, пер. с англ., Москва, 1965
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел, Москва, 1972
6. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел, Москва, 1970
7. კოლნია ჰ. რიცხვთა თეორია, თბილისი, 1961
8. Rivest R.L. Kryptographi/Hndbook of Theoretical computer Science Vol. A. Algorithms and Cmplexity/J. van Leuwn, ed. Amsterdam: Elsevier, Cambridge, Mass.:The MIT Press., 1990
9. Успенский В.А. Как теория чисел помогает в шифровальном деле, соросовский образовательный журнал, №6, 1996
10. Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., Москва, 1983
11. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974
12. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971
13. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика, учеб. пос., Омск, 2002
14. Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques, Washington, USA, 2002
15. Muskhelishvili N. Praktische lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. – ZAMM, 13, 1933
16. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Москва, 1966
17. Маделунг Э. Математический аппарат физики, пер. с англ., Москва, 1961
18. Картан Э. Теория спиноров, пер. с франц., Москва, 1947
19. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций, М.: Наука, 1978
20. Кантор И.Л., Садовников А.С. Гиперкомплексные числа, М.: Наука, 1973
21. Понрягин Л.С. Обобщения чисел, М.: Наука, 1986
22. Райдер Л. Квантовая теория поля, М.: Мир, 1987
23. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. Clifford Analysis, Boston; Melbourne; Pitnam, 1982

თავი III. ფუნქციონალური სიმრავლებები

შესავალი

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ახასიათებთ გარკვეული ზოგადი თვისებები, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში - ფუნქციონალურ სიმრავლებებში [1-3]. ასევე, უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ჩვენ ვეძებთ დიფერენციალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა როგორც კლასიკურ, ასევე, განზოგადოებულ ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლებების) შესწავლა მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა.

3.1. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა L სიმრავლეს ეწოდება ლინეალი (წრფივიანი), თუ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ფუნქციებთან ერთად, ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ $a_1u_1(x) + a_2u_2(x)$ ფუნქციას).

მაგალითები :

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, L იქნება ლინეალი.
2. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 5$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ $u(x) = 3$ და $a = 2$, მივიღებთ $au(x) = 6 > 5$.

P.S. თუ L არის ლინეალი, მაშინ n ფუნქციებთან $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$ ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც $\sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$. სადაც $a_i \in R$

ნამდვილი რიცხვებია. თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავაგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.

განსაზღვრება: L ლინეალის ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(u; v)$ შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით:

$$(u; v) = \int_G u(x)v(x)dx . \quad (3.1)$$

ასე, რომ ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

მაგალითი : $u(x) = x$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u; v) = \int_G u(x)v(x)dx = \int_0^5 x \cdot 1 dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^5 = \frac{25}{2} .$$

(3.1) სკალარული ნამრავლის თვისებები გამომდინარეობენ, უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან:

$$(u; v) = (v; u); \quad (3.2)$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2; v) = a_1 (u_1; v) + a_2 (u_2; v); \quad (3.3)$$

$$(u; u) \geq 0; \quad (3.4)$$

$$(u; u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad \forall x \in G. \quad (3.5)$$

განსაზღვრება: L ლინეალის $u(x)$ ფუნქციის ნორმა $\|u(x)\|$ ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u; u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)dx} . \quad (3.6)$$

ეხლა შემოვიღოთ მანძილის ცნება ლინეალის ორ ფუნქციას შორის, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში მეტრიკას უწოდებენ:

განსაზღვრება: L ლინეალის ორ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს შორის მანძილი (ანუ მეტრიკა) ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u; v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v; u - v)} = \sqrt{\int_G (u - v)^2 dx} . \quad (3.7)$$

მაგალითი: $u(x) = x$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$, მაშინ

$$\|u(x)\| = \sqrt{\int_0^5 x^2 dx} = \sqrt{\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^5} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} .$$

$$\rho(u; v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v; u - v)} = \sqrt{\int_G (u - v)^2 dx} = \sqrt{\int_0^5 (x - 1)^2 dx} = \sqrt{\frac{64 + 1}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}} .$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძირითად თვისებებს, რომელსაც აკმაყოფილებს მეტრიკა(მანძილი):

$$\rho(u; v) \geq 0; \quad (3.8)$$

$$\rho(u; v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x); \quad (3.9)$$

$$\rho(u; v) = \rho(v; u); \quad (3.10)$$

$$\rho(u; z) \leq \rho(u; v) + \rho(v; z). \quad (3.11)$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მეტრიკას. გარდა (7) მეტრიკისა, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ განიხილავენ მეტრიკის სხვა სახეებსაც. მაგალითად, ჩებიშევის მეტრიკას

$$\rho_c(u; v) = \max_{x \in G} |u(x) - v(x)|. \quad (3.12)$$

P.S. მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (3.8)-(3.11) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (3.12) მეტრიკა უფრო ინტუიციურად ზუსტია (3.7) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციებისათვის, მას იშვიათად იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე წყვეტილ ფუნქციებთან, რომლებისთვისაც ჩებიშევის მეტრიკა არ გამოდგება. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის გამოვიყენებთ (3.7) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ, ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით $(u; v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$, სადაც $\overline{v(x)}$ არის $v(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.

3.2. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G არეზე განსაზღვრულ $u(x)$ ფუნქციას კვადრატით ინტეგრებადი ეწოდება, თუ ლებეგის ინტეგრალები

$$\int_G u(x)dx; \quad \int_G u^2(x)dx; \quad (3.13)$$

ერთდროულად არსებობენ(არიან კრებადი).

კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. თუ, $\int_G u^2(x)dx = 0$, მაშინ $u(x) = 0$ თითქმის ყველგან(გარდა ისეთი

წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს). ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ, ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება, არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის

წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები ემთხვევიან ერთმანეთს თითქმის ყველგან.

განსაზღვრება: L ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (3.6) ნორმით და (3.7) მეტრიკით, ჰილბერტისწინა(უნიტარული) S_2 სივრცე ეწოდება.

G არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი. ხოლო, თუ ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულებიც უწყვეტია, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს(სიმრავლეს) აღნიშნავენ $C^\infty(G)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება S_2 ფუნქციონალურ სივრცეში.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n; u) = 0. \quad (3.14)$$

ანუ, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} = 0. \quad (3.15)$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რაც ჩვენ გვქონდა რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

განსაზღვრება: $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა მიმდევრობას კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \rho(u_m; u_n) = 0$.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $u(x)$ წარმოადგენს S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილს, თუ $u(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება S_2 სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

თეორემა: $u(x)$ ფუნქცია არის S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების(ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$, რომელიც კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ.

P.S. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში, S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.

განსაზღვრება: S_2 უნიტარული(ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვართი წერტილების სიმრავლესთან, ამ სივრცის ჩაკეტვა ეწოდება.

ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2} = S_2 \cup \partial S_2. \quad (3.16)$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა(უნიტარული) სივრცის $\overline{S_2}$ ჩაკეტვას, ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე ეწოდება.

განსაზღვრება: წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია, ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ, ბანახის სივრცე ეწოდება.

P.S.

ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე სრულია, ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართ წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების(ფუნქციების) სიმრავლეც მკვრივია $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ, ჰილბერტის სივრცეც სეპარაბელურია, ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მიუახლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოებით ანალიზში. ჰილბერტის სივრცე ყოველთვის არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატითინტეგრებადი ფუნქციების(ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჰილბერტის სივრცე $L_2(G)$, ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე(რადგან ბანახის სივრცეში არაა საგაღდებულო რომ გვექონდეს სკალარული ნამრავლი).

განსაზღვრება: ფუნქციათა სისტემას $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ ამ სისტემის ერთი ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას უწოდებენ.

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin^2 xy; u_2 = \cos^2 xy; u_3 = 4$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $u_3 = 4u_1 + 4u_2$.

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი.

თეორემა: ფუნქციათა სისტემა $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ წრფივად დამოუკიდებელია ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ანუ

$$D(u_1; u_2; \dots; u_k) = \begin{vmatrix} (u_1; u_1) & (u_1; u_2) & \dots & (u_1; u_k) \\ (u_2; u_1) & (u_2; u_2) & \dots & (u_2; u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k; u_1) & (u_k; u_2) & \dots & (u_k; u_k) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.17)$$

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin x; u_2 = \cos x; u_3 = 1$ წრფივად დამოუკიდებელია $L_2[0; \pi]$ სივრცეში, რადგან

$$(u_1; u_1) = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}; \quad (u_1; u_2) = \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0; \quad (u_1; u_3) = 2; \quad (u_2; u_2) = \pi.$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \pi \end{vmatrix} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \neq 0.$$

განსაზღვრება: წრფივად დამოუკიდებელ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული $L_2(G)$ სივრცეში**, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$ წრფივი კომბინაციებით მიღებული $\psi(x)$ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $L_2(G)$ სივრცეში.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს **შაუდერის ბაზისს $L_2(G)$ სივრცეში**, თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$ სახით.

მაგალითი: $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეში, როცა $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ **შაუდერის მრავალწევრა ბაზისია:**

$$1; x; y; x^2; xy; y^2; \dots$$

ასევე, $L_2(0, 2\pi)$ სივრცეში, არსებობს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა **ბაზისი:** $1; \sin x \cdot \cos y; \sin 2x \cdot \cos y; \sin x \cdot \cos 2y; \sin 2x \cdot \cos 2y; \dots$

ცნობილია, რომ $L_2(R)$ სივრცეში შეიძლება აიგოს ვეივლეტ ფუნქციებისაგან შემდგარი ბაზისებიც.

P.S.

მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ-ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს.

3.3. ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ ანალოგიები n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

№	R^n ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია $\bar{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\bar{x}; \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x); g(x)) = \int_G f(x)g(x)dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $ \bar{x} = \sqrt{(\bar{x}; \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\ f(x)\ = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int_G f^2(x)dx}$
4.	მანძილი ორ წერტილს შორის $ \bar{x} - \bar{y} = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}; \bar{x} - \bar{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	მეტრიკა $\rho(f(x); g(x)) = \ f(x) - g(x)\ = \sqrt{(f(x) - g(x); f(x) - g(x))} = \sqrt{\int_G (f(x) - g(x))^2 dx}$
5.	თუ, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა R^n -ში, მაშინ ნებისმიერი \bar{x} ელემენტი(ვექტორი) ამ სივრციდან წარმოიდგინება სახით: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i$	თუ, $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ შაუდერის ბაზისია $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი(ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: $f(x) = \sum_{i=1}^\infty a_i u_i(x)$

3.4. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე. პრაქტიკული, ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u'v' dx ; \quad (3.18)$$

და გავიმეორებთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს $W_2^1(G)$. ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u'v' dx + \int_G u''v'' dx ; \quad (3.19)$$

მაშინ, მივიღებთ $W_2^2(G)$ სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს. ანალოგიურად აიგება სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე, შესაბამისი სკალარული ნამრავლის შემოღებით.

$$(u;v) = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)} v^{(i)} dx. \quad (3.20)$$

3.5. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ველაზე უფრო “კარგი” ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს $P_n(x)$, სადაც არგუმენტი საზოგადოდ m -განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი. $P_n(x)$ მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა $C(R^m)$ ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე (ნაწილი). უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის (ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცია ნაწილი. ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი თავის

მხრივ ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის $W_2^k(G)$ სივრცეში, თუ $k \geq 1$.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 8$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა უნიტარულ, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 2

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 9$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^2$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^2; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა სობოლევის, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 3

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 6$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^3$; $v(x) = 1$; $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^3; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 4

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 66$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^4$; $v(x) = 1$; $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^4; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 5

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას

$|u(x)| \leq 88$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^5$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^5; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 6

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 1$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^8$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^8; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 7

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 10$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^6$; $v(x) = 1$; $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^{16}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა განსხვავებაა ბანახისა და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 8

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \bar{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 11$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^{13}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4. გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^{13}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6. რა არის გრამის დეტერმინანტი და რა ინფორმაციას იძლევა მისი მნიშვნელობა?

ლიტერატურა

1. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике, пер. с англ., Мир, Москва, 1985
2. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974
3. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971
4. Шварц Л. Анализ, Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, Москва, 1972
5. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, Москва, 1971
6. Рудин У. Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, Москва, 1966

თავი IV. საინვესტიციო პროექტების შეფასების მეთოდები

თანამედროვე ეტაპზე საინვესტიციო პროექტების შეფასებისას, საბაზრო ეკონომიკის მქონე ქვეყნებში ფართოდ გამოიყენება დისკონტირების ტექნიკა, რომელიც ემყარება რთული პროცენტის ლოგიკას. ამ თავში განვიხილავთ ასეთი მეთოდების არსსა და უპირატესობებს.

4.1. პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის გამოთვლა

საინვესტიციო პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის ცნებების შესასწავლად განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

განსაზღვრება. მოსალოდნელი შემოსავლის მოცულობის ფარდობას საინვესტიციო კაპიტალის მოცულობასთან პროექტის რენტაბელურობის მაჩვენებელი ეწოდება.

მაგალითად, თუ ჩვენი პროექტის რეალიზაციისათვის საჭიროა \$20000 მოცულობის ინვესტიციები და მოსალოდნელი წლიური შემოსავალია \$30000, მაშინ რენტაბელურობის RX მაჩვენებელი იქნება:

$$RX = \frac{30000}{20000} = 1.5. \quad (4.1)$$

განსაზღვრება. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა ცხრილს შესაბამის ალბათობებთან ერთად.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

p_i არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობა იქნება x_i .

დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის შესაფასებლად შემოდის მათემატიკური ლოდინის (MX) ცნება.

განსაზღვრება. დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდის მათემატიკური ლოდინი (MX) ეწოდება X_i მნიშვნელობათა შესაბამის p_i ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს, ანუ

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i. \quad (4.2)$$

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია DX ახასიათებს შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობათა გაბნევას მისი საშუალო მნიშვნელობიდან - მათემატიკური ლოდინიდან.

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 \cdot p_i. \quad (4.3)$$

განსაზღვრება. კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება.

$$SX = \sqrt{DX}. \quad (4.4)$$

P.S. ფინანსურ ანალიზში საშუალო კვადრატულ გადახრას რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა ეწოდება.

განსაზღვრება. რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა ეწოდება რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობისა და მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალის სიდიდის ფარდობას, გამოხატულს პროცენტობით.

$$vX = \frac{SX}{MX} \cdot 100\%. \quad (4.5)$$

ლაბორატორიული სამუშაო 4.1

ამოცანა. მოცემული პროექტის \$20000 მოცულობითი ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგება შეადგენს 30%-ს. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა $p=0,05$. შეისწავლეთ რენტა-

ბელურობა და შეაფასეთ შემოთავაზებული პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები.

ამოხსნა. პროექტის \$20000 მოცულობითი ინვესტირებისას, წლის ბოლოს გვაქვს ორი შესაძლებლობა:

ა) წარმატება, მაშინ მივიღებთ: $20000 + 20000 \cdot 0.3 = 20000 \cdot 1.3$; ბ) ჩავარდნა, მაშინ ვღებულობთ 0–ს (ე.ი. ჩადებული ფული იკარგება). სამუშაოს შესასრულებლად საჭიროა ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ცნება, როგორცაა: **შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და ვარიაციის კოეფიციენტი.**

მოსალოდნელი წლიური შემოსავლის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

X	$20000 \cdot 1.3$	0
P	0.95	0.05

ამოვხსნათ მოცემული ამოცანა Mathcad–პროგრამული პაკეტის საშუალებით.

პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$X := \begin{pmatrix} 20000 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 - 0.95 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი

(მათემატიკური ლოდინი),

$$MX := \sum_{i=0}^1 X_i \cdot P_i$$

$$MX = 24700$$

რენტაბელურობის მაჩვენებელი

$$RX := MX/20000$$

$$RX = 1.235$$

დისპერსია,

$$DX := \sum_{i=0}^1 (X_i - MX)^2 \cdot P_i$$

$$DX = 32110000$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა (საშუალო კვადრატული გადახრა)

$$S := \sqrt{DX}$$

$$S = 5666.569$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა (ვარიაციის კოეფიციენტი)

$$v := \frac{S}{MX} \cdot 100$$

$$v = 22.942$$

სავარჯიშო

მოცემული პროექტის *I* მოცულობით ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგებაა *m*%. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა *p=PA*. შეისწავლეთ რენტაბელურობა და შეაფასეთ წარმოდგენილი პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები, თუ:

1. $I = \$30000$, $m = 25\%$, $PA = 0.01$

2. $I = \$50000$, $m = 20\%$, $PA = 0.02$

3. $I=\$60000$, $m=30\%$, $PA=0.03$

4. $I=\$70000$, $m=15\%$, $PA=0.011$

5. $I=\$80000$, $m=35\%$, $PA=0.1$

4.2. ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია

განსახილველი. ორი საინვესტიციო პროექტს ეწოდება **ალტერნატიული**, თუ ერთი მათგანის ინვესტირება გამორიცხავს მეორე პროექტის ინვესტირებას.

ორი პროექტის ალტერნატიულობის შემთხვევაში, გამოითვლიან ორივე პროექტისათვის რენტაბელობის მაჩვენებლებსა და რისკის კოეფიციენტებს.

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები:

ა) თუ ორივე პროექტს რენტაბელობის ერთი და იგივე მაჩვენებელი აქვს, მაშინ ირჩევენ იმ პროექტს, რომლის რისკის ფარდობითი მაჩვენებელიც ნაკლებია;

ბ) თუ ორივე პროექტის რისკის ფარდობითი კოეფიციენტის მაჩვენებელი ერთნაირია, ამოირჩევენ იმ პროექტს, რომელსაც რენტაბელობის მაღალი მაჩვენებელი აქვს;

გ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელობის მაჩვენებელი მეტია და რისკის კოეფიციენტი ნაკლები, ვიდრე მეორე პროექტისა, მაშინ უპირატესობა ენიჭება პირველ პროექტს;

დ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელობის მაჩვენებელიც და რისკის კოეფიციენტი მეტია მეორე პროექტისაზე, მაშინ არჩევენს აკეთებს მენეჯერი ინვესტორისათვის დამატებითი მონაცემებიდან, კერძოდ, რისკის დასაშვებ სიდიდეებსა და რენტაბელობის ფარდობითი კოეფიციენტის ღირებულებაზე დაყრდნობით.

რამდენადაც ეს ამოცანა ემყარება მეორე ლაბორატორიულ სამუშაოში მოცემულ ცნებებს, შეგვიძლია პირდაპირ გადავიდეთ კონკრეტულ ამოცანაზე.

ლაბორატორიული სამუშაო 4.2

ამოცანა. ინვესტორს წარმოუდგინეს ორი ალტერნატიული საინვესტიციო A და B პროექტი. A პროექტი მოითხოვს \$100 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 25%-იანი წლიური მოგებით და მისი ჩავარდნის ალბათობაა $PA=0,011$. B პროექტი მოითხოვს \$250 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 30%-იანი წლიური მოგებით, ჩავარდნის ალბათობაა $PB=0,012$.

გააკეთოთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის.

ამოხსნა. ორივე პროექტისათვის შევადგინოთ მოსალოდნელი შემოსავლებისა და შესაბამისი ალბათობების მატრიცები, ისევე როგორც 4.1 ლაბორატორიული სამუშაოს ამოცანის დროს.

შევადგინოთ განაწილების ფუნქციები:

A	$100 \cdot 1.25$	0
PA	0.989	0.011

B	$250 \cdot 1.3$	0
PB	0.988	0.012

თითოეული პროექტისათვის ვიანგარიშოთ რენტაბელურობის მაჩვენებლები და რისკის კოეფიციენტები, რაც შემდგომში მოგვცემს პროექტების შედარების საშუალებას. განაწილების ფუნქციიდან გამომდინარე, შევადგინოთ პროგრამები **Mathcad**-ზე.

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$A := \begin{pmatrix} 100 \cdot 1.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad PA := \begin{pmatrix} 0.989 \\ 1 - 0.989 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 250 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad PB := \begin{pmatrix} 0.988 \\ 1 - 0.988 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი თითოეული პროექტისათვის

$$MA := \sum_{i=0}^1 A_i \cdot PA_i \quad MB := \sum_{i=0}^1 B_i \cdot PB_i$$

$$MA = 123.625$$

$$MB = 321.1$$

რენტაბელურობა

$$RA := \frac{MA}{100} \quad RB := \frac{MB}{250}$$

დისპერსია

$$DA := \sum_{i=0}^1 (A_i - MA)^2 \cdot PA_i \quad DB := \sum_{i=0}^1 (B_i - MB)^2 \cdot PB_i$$

$$DA = 169.984$$

$$DB = 1252.29$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობები

$$SA := \sqrt{DA} \quad SB := \sqrt{DB}$$

$$SA = 13.038$$

$$SB = 35.388$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობები

$$v_A := \frac{S_A}{M_A} \cdot 100$$

$$v_B := \frac{S_B}{M_B} \cdot 100$$

$$v_A = 10.546$$

$$v_B = 11.021$$

$$R_A = 1.236$$

$$R_B = 1.284$$

ამ მაგალითში, რენტაბელურობის მაჩვენებლები და ფარდობითი რისკი ორივე პროექტისათვის თითქმის ერთნაირია, ამიტომ პროექტის ამორჩევა ხდება დამატებითი მოსაზრებებიდან ინვესტორისათვის ფულის ღირებულებისა და პროექტების მახასიათებლებს შორის განსხვავებათა შესაბამისი მნიშვნელობების მიხედვით.

სავარჯიშო

ინვესტორს წარუდგინეს *A* და *B* ალტერნატიული ორი პროექტი. *A* პროექტი მოითხოვს *IA* მოცულობის ინვესტიციებს *ma%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PA*; ხოლო *B* პროექტი მოითხოვს *IB* მოცულობის ინვესტიციებს *mb%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PB*. გააკეთეთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის, თუ:

$$1. IA = \$ 80\,000, \quad ma = 30\%, \quad PA = 0.02$$

$$IB = \$ 70\,000, \quad mb = 40\%, \quad PB = 0.04$$

$$2. IA = \$ 100\,000, \quad ma = 15\%, \quad PA = 0.011$$

$$IB = \$ 200\,000, \quad mb = 15\%, \quad PB = 0.02$$

$$3. IA = \$ 90\,000, \quad ma = 20\%, \quad PA = 0.05$$

$$IB = \$ 90\,000, \quad mb = 18\%, \quad PB = 0.02$$

$$4. IA = \$ 400\,000, \quad ma = 15\%, \quad PA = 0.02$$

$$IB = \$ 500\,000, \quad mb = 20\%, \quad PB = 0.05$$

5. $IA = \$ 1.5$ მლნ., $ma = 20\%$, $PA = 0.03$

$IB = \$ 2.1$ მლნ., $mb = 15\%$, $PB = 0.01$

4.3. საინვესტიციო პროექტის დღევანდელი სუფთა ფასეულობის (NPV) დადგენა

დისკონტი არის კრედიტის ან ფულის მომავალი ღირებულება, რაიმე პერიოდის გასვლის შემდეგ.

საპროცენტო განაკვეთი არის:

ა) დროის ფიქსირებულ ინტერვალში მიღებული შემოსავლის ფარდობითი სიდიდე

ბ) პროცენტული გადასახადების შედარებითი სიდიდე, რომელსაც *მსესხებელი* უხდის *კრედიტორს* დროის გარკვეულ პერიოდში (თვე, წელი). იგი შეიძლება გამოისახოს პროცენტის ან ათწილადი რიცხვის სახით.

განვიხილოთ აღნიშვნები:

PV — present value, დღევანდელი სიდიდე, საწყისი თანხა;

FV — future value, მომავალი სიდიდე, გაზრდილი თანხის სიდიდე;

I = (FV - PV) — interest money, შემოსავლის სიდიდე;

r = I/PV = (FV-PV)/PV — interest, საპროცენტო განაკვეთი;

d = I/FV = (FV-PV)/FV — discount rate, დისკონტირების განაკვეთი.

თუ, ვიცით დისკონტირების განაკვეთი და გაზრდილი თანხის სიდიდე, შეგვიძლია ამოვხსნათ დისკონტირების ამოცანა (ვპოულობთ საწყისი თანხის სიდიდეს):

$$PV = FV \cdot (1-d). \quad (4.6)$$

დისკონტირების განაკვეთი და საპროცენტო განაკვეთი ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი სახით:

$$r = d * (FV/PV); \quad d = r * (PV/FV). \quad (4.7)$$

პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა განისაზღვრება, როგორც დროის ერთსა და იმავე მომენტისათვის დისკონტირებული პროექტის შემოსავლებისა და ხარჯების სხვაობა:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_{INT} - CF_{OFT}}{(1 + d)^t}; \quad (4.8)$$

სადაც

CF_{INT} არის პროექტიდან t დროის განმავლობაში მიღებული ფულის ნაკადი;

CF_{OFT} - პროექტის დანახარჯები t დროის განმავლობაში;

d - დისკონტირების განაკვეთი ;

n - პროექტის სასიცოცხლო ციკლი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფულადი ინვესტიცია ხორციელდება ერთჯერადად, საწყის მომენტში *პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა* განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=1}^n \frac{CF_{INT}}{(1 + d)^t} \quad (4.9)$$

სადაც C_0 - საწყისი ინვესტიციაა დროის ნულოვან ეტაპზე.

ამ ფორმულით სარგებლობა საკმაოდ მარტივია. თუ $NPV > 0$, მაშინ ინვესტორი მიიღებს ამ სიდიდის შესაბამის შემოსავალს სასურველი თანხის ზემოთ. თუ $NPV < 0$, მაშინ ინვესტორი არა მარტო დაიბრუნებს ჩადებულ ინვესტიციას, არამედ მიიღებს გადიდებულ თანხას, დისკონტირების განაკვეთის შესაბამისად.

თუ $NPV < 0$, მაშინ ეს პროექტი უნდა უარყვით.

აღსანიშნავია, რომ NPV სიდიდე ადიტიურია დროში, ანუ რამდენიმე პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობები შეგვიძლია შევკრიბოთ, რაც მეტად მნიშვნელოვანია საინვესტიციო პორტფელის ოპტიმალურობის ამოცანის შესწავლისას.

4.4. ინვესტიციების რენტაბელურობის PI ინდექსის განსაზღვრა დისკონტირების გათვალისწინებით

ინვესტიციების რენტაბელურობის ინდექსი განისაზღვრება, როგორც დისკონტირებული მოგების ფარდობა შესაბამისი ინვესტიციების მოცულობასთან. ასე რომ, მაგალითად, ერთჯერადი საწყისი ინვესტირების შემთხვევაში, რენტაბელურობის ინდექსი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$PI = \frac{\sum_t^n \frac{CF_{INTt}}{(1+d)^t}}{C_0}. \quad (4.10)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $PI > 1$, პროექტი მომგებიანია; ხოლო, თუ, $PI < 1$, მაშინ პროექტზე უარი უნდა ვთქვათ. თუ, რენტაბელურობის ინდექსი ერთის ტოლია, მაშინ პროექტი არც მომგებიანია და არც წამგებიანი.

PI მაჩვენებლის უპირატესობა ისაა, რომ ის ფარდობითი მაჩვენებელია NPV სუფთა დღევანდელი ფასეულობისაგან განსხვავებით. ამიტომ, როცა რამდენიმე პროექტის შედარება გვიწევს ერთნაირი NPV მაჩვენებლით, უპირატესობა აქვს პროექტს მეტი რენტაბელურობის მაჩვენებლით. ასევე, როცა რამდენიმე პროექტის არჩევა უწევს ინვესტორს, ის რანჟირებას ახდენს რენტაბელურობის მაჩვენებლების მიხედვით და ირჩევს პროექტების იმ პორტფელს, სადაც რენტაბელურობა მეტია. რადგან ყველა პროექტის ერთდროული დაფინანსებისათვის შეიძლება არ ეყოს ფინანსური რესურსები.

4.5. ინვესტიციების რენტაბელობის IRR ნორმის განსაზღვრა

ინვესტიციების რენტაბელობის ნორმა (internal rate of return) არის დისკონტირების ის პროცენტული განაკვეთი IRR, რომლის დროსაც პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა ნულის ტოლია, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_{INTt} - CF_{OFTt}}{(1 + IRR)^t} = 0 \quad (4.11)$$

IRR კოეფიციენტის სიდიდე გვიჩვენებს პროექტის ხარჯების მაქსიმალურ დასაშვებ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ პროექტი მთლიანად ფინანსდება საბანკო კრედიტის მეშვეობით, მაშინ რენტაბელობის ნორმა გვიჩვენებს იმ მაქსიმალური საბანკო პროცენტის განაკვეთის სიდიდეს, რომლის ზემოთაც პროექტი წამგებიანი ხდება.

4.6. საინვესტიციო პროექტის დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრის მეთოდი

დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული ვადა არის ის მინიმალური დრო, რომლის განმავლობაშიც ინვესტორი მთლიანად იბრუნებს პროექტში ჩადებულ ინვესტიციებს, უზრუნველყოფს რა შემოსავლების საჭირო დონეს.

დანახარჯების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრა ხდება განტოლებიდან:

$$\sum_{t=1}^T \frac{CF_{INTt}}{(1 + d)^t} = PV; \quad (4.12)$$

სადაც T დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული დროის სიდიდეა;

PV – ინვესტიციების დღევანდელი ფასი.

ამ მეთოდს იყენებენ, როცა პროექტების რისკი დიდია; მაშინ ცდილობენ, რაც შეიძლება მალე ამოიღონ ჩადებული ინვესტიციები.

4.7. ფინანსური ინსტრუმენტები

ფინანსურ ინსტრუმენტებს მიეკუთვნება: *ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტები, ოპციონები, ვარიანტები, სვოპი, კომბინაციები, სპრედები* და ა.შ.

განვიხილოთ, თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე.

1. **ფორვარდული კონტრაქტი ანუ ფორვარდი**, ეს წინასწარი ყიდვა-გაყიდვის შეთანხმებაა გარკვეულ საქონელზე, გარკვეულ დროზე მომავალში ფიქსირებულ ფასზე.

მაგალითად, გლეხი, უკვე გაზაფხულზე აწარმოებს მოლაპარაკებას ბოსტნეულის საცავის მეპატრონესთან, რომ შემოდგომაზე ფიქსირებულ ფასად მიაწოდებს ბოსტნეულის განსაზღვრულ მოცულობას, თუმცა, ჯერ არც კი დაურგავს ჩითილები; ბოსტნეულის საცავის მეპატრონე მოლაპარაკებას აწარმოებს რეალიზაციის პუნქტების-მაღაზიების, რესტორნების . . . მეპატრონეებთან, რომ ბოსტნეულს მიაწოდებს წინასწარ შეთანხმებულ, ფიქსირებულ ფასად.

ასეთი შეთანხმებები მონაწილეებს იცავს კატასტროფებისა და ბანკროტობისაგან: გლეხს იცავენ რომ ბოსტნეული არ გაუფუჭდეს და დროზე გაყიდოს, ბოსტნეულის საცავის მეპატრონეს საშუალებას აძლევს, რომ არ მოცდეს მისი საცავები და დროზე გაუკეთოს პროდუქციას რეალიზაცია, ხოლო რესტორნებისა და მაღაზიების მეპატრონეებს საშუალებას აძლევს შეუფერხებლად იმუშაონ და მეტი მოგება მიიღონ.

წინასწარი შეთანხმებით მიღებული ფასები შეიძლება აღარ აწყობდეს ერთ-ერთ მონაწილეს, თუმცა, ყველა მონაწილე მზადაა მცირე წაგებისათვის, ოღონდაც თავი დაიცვას უფრო დიდი ზარალისაგან. ასე რომ, **ფორვარდული კონტრაქტი**, არის რისკების

შემცირების საშუალება ორივე მონაწილისათვის. ესაა, სწორედ ყველა სხვა წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების წარმოშობის მიზეზიც.

ფორვარდული შეთანხმება ხდება ორ მონაწილეს შორის მოწმის გარეშე, რის გამოც, დიდია ცდუნება რომელიმე მხარემ დაარღვიოს ხელშეკრულება, თუ ადრე შეთანხმებული ფასი, მისთვის უკვე წამგებიანია. სწორედ ასეთი შემთხვევებისათვის შეიქმნა **ფიუჩერსები**.

2. ფიუჩერსული კონტრაქტები ანუ ფიუჩერსები ისეთი შეთანხმებებია, რომლებიც ფორვარდის ანალოგიურია, მაგრამ დამატებული აქვს გადაანგარიშების მექანიზმები, რომლებიც წამგებიანს ხდის ნებისმიერი მონაწილისათვის ხელშეკრულების დარღვევას.

გადაანგარიშების მექანიზმი ბირჟაზე წარმოებს **კლირინგის პალატის** მეშვეობით, რომელიც შეთანხმების ორივე მონაწილისათვის ხსნის სპეციალურ ანგარიშს. ფიუჩერსული შეთანხმების მომენტისათვის ორივე მონაწილეს შეაქვს ამ ანგარიშებზე გარკვეული თანხა, როგორც წესი 2%-10% ხელშეკრულების მოცულობიდან, რომელსაც საწყის მარჯას უწოდებენ. საქონლის საბაზრო ფასის ცვლილებისას, კლირინგის პალატა თვითონ გადარიცხავს წაგებული მონაწილის ანგარიშზე შესაბამის თანხას, მოგებულის ანგარიშიდან, რათა მას აუნაზღაუროს მოსალოდნელი წაგება, თუ მოგებული მხარე მოინდომებს შეცვლილი საბაზრო ფასით სარგებლობას.

3. ოპციონი არის კონტრაქტი, რომელიც გამყიდველს ან მყიდველს აძლევს უფლებას გაყიდოს ფასეულობა წინასწარ გარკვეულ დროში, წინასწარ შეთანხმებული პირობებით. ეს პირობები, როგორც წესი, დაიყვანება ყიდვა-გაყიდვის ფასზე.

განასხვავებენ მყიდველის ოპციონს (ოპციონი-კოლი) და გამყიდველის ოპციონს (ოპციონი-პუტი). ოპციონ-კოლის პატრონს

უფლება აქვს იყიდოს, ხოლო ოპციონ-პუტის პატრონს აქვს უფლება გაყიდოს.

ოპციონები არსებობს **ევროპული** და **ამერიკული** ტიპის. ევროპული ტიპის ოპციონებში, ყიდვა-გაყიდვის თარიღი ფიქსირებულია მომავალ დროში; ხოლო ამერიკული ტიპის ოპციონებში ყიდვა-გაყიდვის მომენტს ირჩევს ოპციონის მფლობელი, თუმცა ფიქსირებულია დროის გარკვეული შუალედი, როცა შესაძლებელია ოპციონის შესრულება.

თავი 5. ცოცხალი, რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები

მათემატიკური მოდელების ასაგებად, ხშირად, იყენებენ უნივერსალურ ვარიაციულ პრინციპებს. რომლებიც ემყარება საუკუნოვან პრაქტიკულ გამოცდილებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. ცნობილია, რომ ბუნება ერთიანია, ანუ, მეცნიერების ერთ სფეროში მიმდინარე პროცესები, ანალოგიურია, მეორე სფეროში მიმდინარე პროცესებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ პროცესების მსგავსების კრიტერიუმები, რომ შეგვიძლია ფიზიკაში დამუშავებული მოდელები გამოვიყენოთ სხვადასვა ინტელექტუალურ სფეროებში.

5.1. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.

ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი.
თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის
აგება

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლისთვის მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატია $Q(t)$. შესაბამისად, \dot{Q} წარმოადგენს განმსაზღვრელი პარამეტრის ცვლილების სიჩქარეს. განვსაზღვროთ დინამიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც სხვაობა მის კინეტიკურ და პოტენციალურ ენერგიებს შორის

$$L(Q, \frac{dQ}{dt}) = E_k - E_p. \quad (5.1)$$

სადაც

E_k , და E_p - შესაბამისად, სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიებია.

განვიხილოთ, სიდიდე რომელსაც მოქმედებას უწოდებენ და აღწერენ ფორმულით

$$S(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (5.2)$$

ამ სიდიდეზეა დამოკიდებული სისტემის ენერჯია. ჰამილტონის უნივერსალური პრინციპი ამბობს, რომ თუ სისტემა რეალურია, მაშინ $Q(t)$ არის $S(Q)$ ფუნქციონალის სტაციონალური ფუნქცია, ანუ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(Q + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (5.3)$$

ჰამილტონის პრინციპში მოქმედი $\varphi(t)$ ფუნქცია, არის საცდელი ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს დროის t_1 და t_2 მომენტებში. $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ფუნქციას $Q(t)$ ფუნქციის ვარიაცია ეწოდება. ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა ავაგოთ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ სისტემის თავისუფალი რხევები, როცა მოცემული გვაქვს ზამბარა m მასის ტვირთით და ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი c . მაშინ, სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია იქნება

$$L = \frac{m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \cdot \frac{X^2}{2}. \quad (5.4)$$

ქმედებისათვის გვექნება გამოსახულება

$$S(X) = \int_{t_1}^{t_2} L(X, \frac{dX}{dt}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 - \frac{c}{2} X^2 \right] dt. \quad (5.5)$$

გამოვითვალოთ ქმედება $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ვარიაციის შემთხვევაში

$$S(X + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d(X + \varepsilon\varphi)}{dt} \right)^2 - \frac{c}{2} (X + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt. \quad (5.6)$$

გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია ε ცვლადის მიხედვით, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X^2 + 2\varepsilon X\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left\{ \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X\varphi + \varepsilon\varphi^2 \} \right] dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

თუ, დავუშვებთ რომ $\varepsilon = 0$, მივიღებთ რომ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - cX\varphi \right] dt = 0. \quad (5.8)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, მივიღებთ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX \right] dt = 0. \quad (5.9)$$

რადგან, $\varphi(t)$ ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX = 0. \quad (5.10)$$

ანუ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad (5.11)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის კლასიკურ მათემატიკურ მოდელს

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \quad (5.12)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ვარიაციულ მეთოდს მივყავართ იგივე მათემატიკურ მოდელამდე თავისუფალი რხევითი სისტემისათვის.

5.2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედებს მაიძულებელი ძალა F_0 , იცვლება მხოლოდ პოტენციალური ენერჯიის ფორმულა და იღებს სახეს

$$E_p = c \frac{X^2}{2} + \int_0^X F_0 dX = c \frac{X^2}{2} + F_0 X . \quad (5.13)$$

ხოლო, კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულება რჩება უცვლელი

$$E_k = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} . \quad (5.14)$$

შესაბამის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე

$$L = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \frac{X^2}{2} - F_0 X . \quad (5.15)$$

თუ, განვახორციელებთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ გარდაქმნებს, მაშინ მივიღებთ იძულებითი, არადემპფირებული, რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -cX + F_0 . \quad (5.16)$$

დავალება სტუდენტებს: ააგეთ იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ვარიაციული მეთოდით.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ჩამოაყალიბეთ ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.
2. ააგეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ბაზაზე.

3. ააგეთ იძულებითი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის პრინციპის ბაზაზე.
4. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის კავშირი.
5. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის ერთმანეთისაგან განსხვავება.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
3. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001
5. Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества, Москва, 2005

თავი 6. ცოცხალი, არაწრფივი სისტემების მოდელირება

6.1. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

არაწრფივი რხევითი სისტემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები აღიწერებიან არაწრფივი განტოლებებით. რეალური სისტემები არაწრფივია და მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით, შეიძლება შევცვალოთ წრფივი სისტემებით. წრფივი რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხები ჩვენ უკვე განვიხილეთ და ეხლა შევუდგებით არაწრფივი სისტემების შესწავლას.

განვიხილოთ, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი სისტემა. ამ შემთხვევაში, არაწრფივია აღმდგენელი ძალის დამოკიდებულება განმსაზღვრელ პარამეტრზე, ანუ, გვაქვს დამოკიდებულება $f(x)$. ასე, რომ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0. \quad (6.1)$$

ამ განტოლების ამოხსნა კვადრატურებში, საზოგადოდ, შეუძლებელია. თუმცა, შესაძლებელია ამ განტოლების ზოგადი თვისებების შესწავლა ენერგეტიკული მეთოდის მეშვეობით.

განტოლება (6.1) გავამრავლოთ \dot{x} სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \int f(x) \cdot \dot{x} dt = const = E_0. \quad (6.2)$$

ამასთან,

$$\int f(x) \cdot \dot{x} dt = \int f(x) dx = E_{pot}, \quad (6.3)$$

ასე, რომ (6.2) განტოლება წარმოადგენს ენერგიის შენახვის კანონს

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0. \quad (6.4)$$

ცხადია, რომ (6.2) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ თანადობა

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = E_0 - E_{pot}. \quad (6.5)$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ რხევის სიჩქარე

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}. \quad (6.6)$$

ფაზურ სიბრტყეზე, x_0 წერტილიდან x წერტილამდე გადაადგილების დრო გამოითვლება ფორმულით

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (6.7)$$

შესაბამისად რხევის პერიოდის გამოსათვლელად მივიღებთ ფორმულას

$$T = 2 \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (6.8)$$

ეს ფორმულა(6.8), რა თქმა უნდა, სამართლიანია, მხოლოდ შეკრული ფაზური ტრაექტორიებისათვის.

6.2. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

განვიხილოთ, რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით.

$$f(x) = h \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} h, & \text{if } x > 0 \\ -h, & \text{if } x < 0 \end{cases}. \quad (6.9)$$

ასეთი სიტუაცია გვაქვს რელეურ მართვის სისტემებში.

ამ შემთხვევაში, ამონხსნი უნდა ვეძებოთ ცალ-ცალკე იმ შემთხვევებისათვის, როცა $x > 0$ და როცა $x < 0$.

იმ შემთხვევაში, როცა $x > 0$, გვაქვს განტოლება

$$m \cdot \ddot{x} = -f(x) = -h, \quad (6.10)$$

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} \cdot t + v_0, \quad (6.11)$$

$$x = -\frac{h}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (6.12)$$

თუ, ჩავთვლით რომ, რხევითი სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება თავის ზღვრულ მდებარეობაში, მივიღებთ საწყის პირობებს ფორმით

$$x_0(0) = A, \quad (6.13)$$

$$v_0(0) = 0. \quad (6.14)$$

თუ, (6.11) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ t პარამეტრს და ჩავსვავთ (6.13) ტოლობაში, მივიღებთ ფაზური ტრაექტორიების $(x; \dot{x})$ განტოლებას.

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A-x)}. \quad (6.15)$$

6.3. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

დემპფირების შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხარჯავს ენერგიას წინააღმდეგობის ძალის დაძლევაზე. შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, წინააღმდეგობის ძალა, დამოკიდებულია განმსაზღვრელი პარამეტრის x წარმოებულზე.

ზოგად შემთხვევაში, დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$\ddot{x} + g(x) + f(x) = 0. \quad (6.16)$$

ზოგჯერ, დემპფირების ძალები და აღმდგენი ძალები ისე მჭიდროდ არიან დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მათი განცალკევება არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს განტოლება

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (6.17)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის შესაბამისი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $x = v$, მაშინ $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$. აქედან გამომდინარე, (6.17) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v}. \quad (6.18)$$

ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.

ეხლა განვიხილოთ ამ სისტემის შესაბამისი ენერგეტიკული განტოლება. ამ განტოლების მისაღებად, გავამრავლოთ (6.16) განტოლება \dot{x} სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ. მაშინ, მივიღებთ რომ

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^t g(x) \cdot x dt + \int_0^x f(x) dx = E_0. \quad (6.19)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას E_D - დემპფირების ძალების გადალახვაზე დახარჯული ენერგიისათვის, მივიღებთ ენერგიის განტოლებას

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - E_D. \quad (6.20)$$

ამ განტოლებიდან, ნათლად ჩანს, რომ დემპფირებულ თავისუფალ რხევით სისტემაში აღვილი აქვს ენერგიის დისიპაციას.

6.4. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით

მშრალ ხახუნს მყარ სხეულებს შორის, ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთმანეთს ეხება ორი სხეული რომლებიც გადაადგილდებიან ერთმანეთის მიმართ, ისე რომ, მათ შორის არ არის თხევადი მასა. ამ შემთხვევაში, ხახუნის ძალები თითქმის არ არიან დამოკიდებული გადაადგილების სიჩქარეზე და მიმართული არიან ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უმეტეს შემთხვევაში, მშრალი ხახუნის ძალა მიახლოებით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$K_r = \begin{cases} -r & \text{if } v > 0 \\ +r & \text{if } v < 0 \end{cases} . \quad (6.21)$$

ასე რომ,

$$K_r = -r \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} . \quad (6.22)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში, პროცესის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + f(x) = 0 . \quad (6.23)$$

ეს განტოლება, ცალ-ცალკე იხსნება იმ შემთხვევებისათვის როცა $v > 0$ და როცა $v < 0$.

თუ, $v > 0$ მაშინ (6.23) განტოლებიდა მივიღებთ რომ

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = -r . \quad (6.24)$$

მის შესაბამის ენერგეტიკულ განტოლებას აქვს სახე

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - r \cdot x = \overline{E_0} . \quad (6.25)$$

ამ რხევითი სისტემისათვის ფაზური ტრაექტორიების განტოლებას ექნება სახე

$$v = + \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - r \cdot x - E_{pot})} \text{ თუ, } v > 0. \quad (6.26)$$

$$v = - \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 + r \cdot x - E_{pot})} \text{ თუ, } v < 0. \quad (6.27)$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. გამოიყვანეთ არადემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერგეტიკული განტოლება.
2. გამოიყვანეთ თავისუფალი, რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება, ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალის შემთხვევაში.
3. შეადგინეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.
4. გამოიყვანეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ტრაექტორიების განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე მშრალი ხახუნის შემთხვევაში
5. გამოიყვანეთ არაწრფივი სისტემის ტრაექტორიების ზოგადი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007

- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 4.Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идей. Методы. Примеры. Москва, 2001
- 5.Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества, Москва, 2005
- 6.Магнус К. Колебания. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1982

თავი 7. ცოცხალი, ავტორხევითი სისტემები

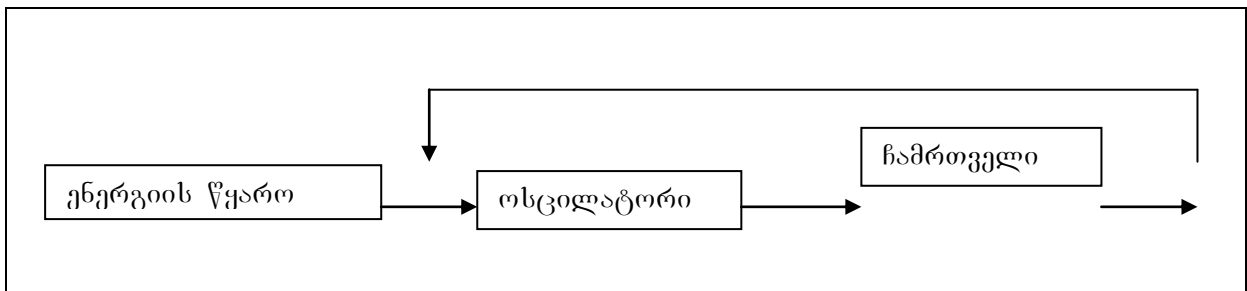
ავტორხევები - განსაკუთრებული ტიპის რხევებია. ამ ტიპის რხევების წარმოშობისათვის, დამახასიათებელია ენერგიის წყაროს არსებობა, რომელიც ავსებს სისტემის ენერგეტიკულ დანაკარგებს.

7.1. ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები

სტრუქტურისა და მოქმედების პრინციპის მიხედვით განასხვავებენ ავტორხევითი სისტემების ორ ტიპს:

1. ოსცილატორული სისტემა;
2. დაგროვებითი სისტემა.

ოსცილატორული ტიპის სისტემისათვის დამახასიათებელია სტრუქტურული სქემა ნახ. 7.1



ნახ.7.1 ოსცილატორული ტიპის ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

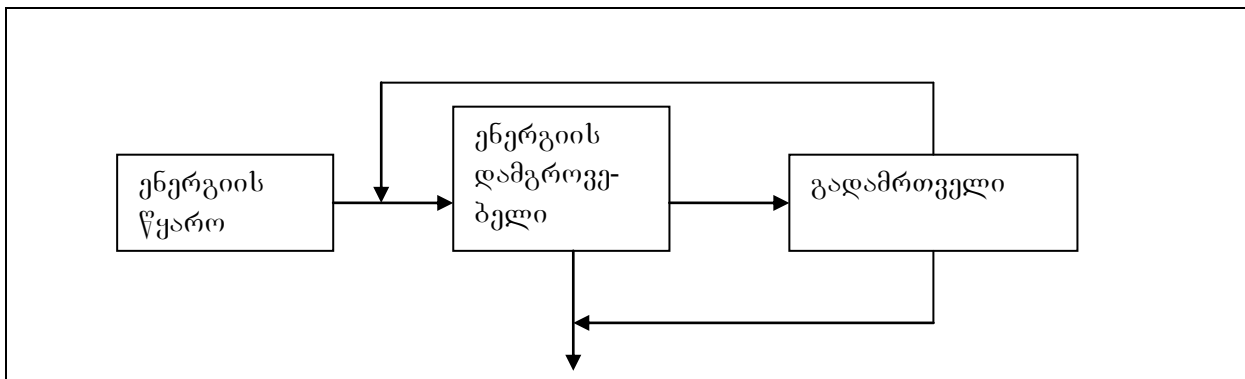
ოსცილატორული ტიპის სისტემებში, ჩამრთველი მოქმედებს, როგორც უკუკავშირი რხევით სისტემასა და ენერგიის წყაროს შორის, რომელიც ირთვება საჭირო მომენტში და სისტემას ამარაგებს საჭირო ენერგიით.

განვიხილოთ, შესაბამისი ტიპის პრაქტიკული მაგალითები, ცხრილი 7.1

ცხრილი 7.1.

№	ავტორხვეითი სისტემა	ენერჯის წყარო	ოსცილატორი	უკუკავშირის საშუალება
1	ზარი	ელექტრობატარეა	ჩაქუჩი	კონტაქტი
2	საათი	დეფორმირებული ზამბარა	ბალანსირი	ჩამომშვები რეგულატორი
3	ვიოლენხელის სიმი	მოდრაგი ხეში	სიმი	მშრალი ხახუნი ქრობადი მახასიათებლით
4	თვითმფრინავის მზიდი ფრთა	ჰაერის ნაკადი	დრეკადი ფრთა	ჰაერის ნაკადისა და ფრთის ურთიერთქმედების არასტაციონარული ძალები

დაგროვებითი, ავტორხვეითი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია ნახ.7.2.



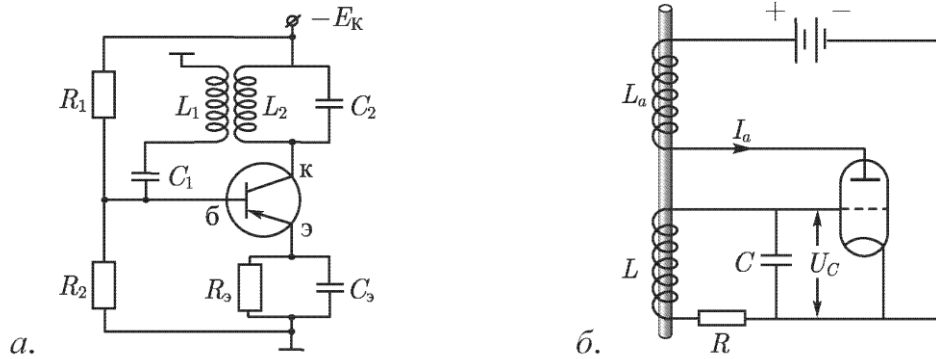
ნახ. 7.2. დაგროვებითი ავტორხვეითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

დაგროვებითი ავტორხვეითი სისტემა, ხშირად, ასრულებს წყვეტად(დისკრეტულ) რხევებს.

7.2. ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის სქემა

ნახ. 7.3.



ნახ.7.3. ვან-დერ-პოლის გენერატორის სქემა

a) ტრანზისტორზე; ბ) ელექტრონულ ლამფაზე

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (7.1)$$

მნიშვნელოვანია, რომ ელექტრონულ ლამფის ბადეზე U_a დაბვის გაზრდა, იწვევს ანოდური I_a დენის გაზრდას. იმისათვის, რომ მივიღოთ ანოდური დენის თვითაგზნება, უნდა ვიცოდეთ დამოკიდებულება $I_a = I_a(U_c)$. წარმოებულს

$$S(U_c) = \frac{dI_a}{dU_c}, \quad (7.2)$$

ბადური მახასიათებლის სიმრუდე ეწოდება. შესაბამისი გრაფიკები მოცემულია ნახ. 7.4.



ნახ.7.4. ა) ანოდური დენისა და ბ) ბადური სიმრუდის, ბადურ ძაბვაზე დამოკიდებულების გრაფიკები

მუშა მდგომარეობაში, აღვიღო აქვთ დამოკიდებულებებს:

$$S = S_0 - S_2 U_c^2, \quad (7.3)$$

$$I_a = I_{a0} + S_0 U_c - \frac{1}{3} S_2 U_c^3. \quad (7.4)$$

თუ, (7.3) და (7.4) ფორმულებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (7.1) გადაიწერება სახით

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} - \frac{M}{LC} \left[S_0 - S_2 U_c^2 - \frac{RC}{M} \right] \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0, \quad (7.5)$$

სადაც, გათვალისწინებულია რომ

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (7.6)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$x = U_c \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - RC}}, \quad 2\gamma = \frac{MS_0 - RC}{LC}, \quad (7.7)$$

მაშინ, მივიღებთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკურ მოდელს, რომელიც აღწერს ერთ-ერთი, ცნობილი ავტორხევითი სისტემის დინამიკას.

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x}(1 - x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (7.8)$$

7.3. ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები (ფლატერი და დივერგენცია)

ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები - წარმოადგენენ დრეკად კონსტრუქციებს, რომლებიც მოთავსებული არიან ჰაერის ან წყლის ნაკადებში და განიცდიან შესაბამის ურთიერთქმედებას.

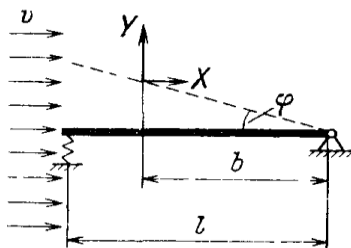
ჰიდროაეროდრეკადი სისტემების მაგალითს წარმოადგენენ სამშენებლო ნაგებობები, რომლებიც მოთავსებულნი არიან ქარის ზემოქმედების ქვეშ. ჰაერის ნაკადის მოქმედების შედეგად ნაგებობებში აღიძრება რხევები და თუ, ნაგებობას არ შეუძლია ქარის მიერ აღძრული რხევების ჩაქრობა, შესაძლოა ნაგებობის დანგრევაც, რაც არაერთხელ მომხდარა. ამიტომ, პროექტირების ეტაპზე, აუცილებელია ქარის დატვირთვების შესწავლა ნებისმიერი მაღლივი შენობა-ნაგებობის ან კიდული-ვანტური ხიდებისათვის.

დატვირთვების შესწავლა საშუალებას გვაძლევს ავიცილოთ **ფლატერი, ანუ, მავნე - გამანადგურებელი რხევები და სწორად დავაპროექტოთ ესა თუ ის ნაგებობა.**

ფლატერის შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს საფრენი აპარატების პროექტირების დროსაც.

ჰაერის ზემოქმედების შედეგად, თვითმფრინავის ფრთა განიცდის დეფორმაციას და ამ დეფორმაციის შედეგად იცვლება გარსდენის რეჟიმი, ამ მოვლენას **დივერგენციას უწოდებენ.** დივერგენციის შედეგად იცვლება ფრთის გეომეტრია, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ნაკადის პერიოდული მოწყვეტა და შესაბამისი სიხშირის რხევები. ასეთ შემთხვევაში, შესაძლოა **რეზონანსული რხევების** წარმოქმნა და ფრთის დამსხვრევა გარკვეული – **კრიტიკული სიჩქარით ფრენის** შემთხვევაში. ამიტომ, ფრთის პროექტირებისას, აუცილებელია **დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარის** დაანგარიშება, რათა თავიდან ავიცილოთ კონსტრუქციის არასაიმედობა მუშა სიჩქარეების დიაპაზონში. **ფლატერი** შეიძლება წარმოიქმნას კონსტრუქციის თავისებურებიდან გამომდინარე, გარე ზემოქმედების გარეშეც, **ფლატერის კრიტიკული სიჩქარის** გადამეტებისას ან **სიჩქარეთა გარკვეული დიაპაზონის** შემთხვევაშიც.

ა) დივერგენციის შესასწავლად, განვიხილოთ ფრთის სქემატური, გამარტივებული მოდელი ნახ. 7.5



ნახ.7.5. ფრთის დივერგენციის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ბრტყელი ფირფიტა, რომელიც მარცხენა მხარეს ღრეკადადაა ჩამაგრებული(ფრთის თავისუფალი მხარე), მარჯვენა მხარეს კი, აქვს სახსრული ჩამაგრება(ფრთის ჩამაგრება ფუზელაჟთან). ფირფიტა მოთავსებულია ჰაერის ნაკადში, რომლის სიჩქარეცაა v . ვიპოვოთ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე.

ფრთის გადახრისას φ კუთხით, წარმოიქმნება წნევის ძალები, რომლებიც შეიძლება დავშალოთ ორ მდგენელად (შუბლური წინაღობის ძალა და ამწევი ძალა).

$$X = C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi ; \quad Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi . \quad (7.9)$$

სადაც

C_x - შუბლური წინაღობის კოეფიციენტია ;

C_y - ამწევი ძალის კოეფიციენტია ;

ρ - ჰაერის სიმკვრივეა;

l - ფრთის ქორდაა;

b - მანძილია სახსრული შეერთებიდან აეროდინამიკური წნევების ტოლქმედის მოდების წერტილამდე.

ფირფიტაზე(ფრთაზე) მოდებული ძალების მომენტების ჯამი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ იქნება

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + X \cdot b \cdot \varphi + Y \cdot b, \quad (7.10)$$

სადაც, c_0 - დრეკადი ჩამაგრების ზამბარის სიხისტეა, აგრეთვე გათვალისწინებულია რომ φ მცირე კუთხეა და $\sin \varphi \approx \varphi$. ჩავსვათ (7.10) ფორმულაში (7.9), მაშინ მივიღებთ

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi^2 + C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.11)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: I - ფირფიტის ინერციის მომენტია სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ. თუ, გავითვალისწინებთ შესაბამის განტოლებას ფირფიტისათვის

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M. \quad (7.12)$$

მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$I \cdot \ddot{\varphi} + (c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b) \cdot l \cdot \varphi = 0, \quad (7.13)$$

წინაღობის ძალის მომენტის შესაბამისი წევრი გამოტოვილია, რადგან ის უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა.

ვინაიდან, φ უსასრულოდ მცირე შეშფოთებაა, სისტემის მდგრადობისათვის, ანუ, საწყისი შეშფოთების ჩაქრობისათვის გვაქვს პირობა

$$c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b > 0. \quad (7.14)$$

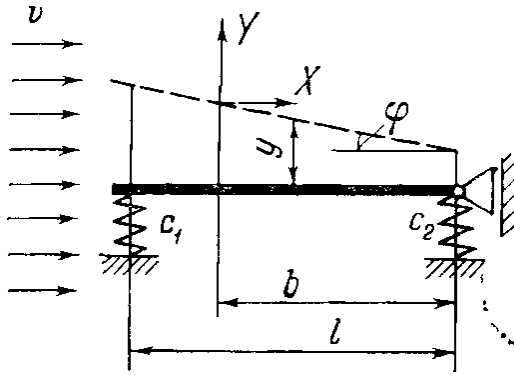
აქედან, ცხადია რომ, დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე იქნება

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_0 \cdot l}{C_y \cdot \rho \cdot b}}. \quad (7.15)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რაც უფრო მეტია ფრთის სიხისტე, მით უფრო მეტია

დივერგენციის კრიტიკული სიხარვეც. რაც მეტია დივერგენციის სიხარვე, მით უფრო უკეთესია თვითმფრინავის ფრთისათვის.

ბ) ეხლა განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერი. მის შესასწავლად განვიხილება გამარტივებული – სქემატური მოდელი ნახ. 7.6



ნახ. 7.6. თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის სქემატური მოდელი

ეხლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ფირფიტის ორივე მხარეს გვაქვს დრეკადი ჩამაგრება. ასეთ შემთხვევაში, მოსალოდნელია სხვა ტიპის არამდგრადობაც, რომელიც დაკავშირებულია ორგანზომილებიანი სისტემის არაკონსერვატულობასთან.

განვიხილოთ მცირე შეშფოთებები ამ სისტემაში;

$y(t)$ - ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის გადაადგილება;

$\varphi(t)$ - ფირფიტის მობრუნების კუთხე.

c_1 და c_2 დრეკადი სახრდენების სიხისტეებია ;

$\frac{m \cdot l^2}{12}$ - ფირფიტის ინერციის მომენტი, მისი სიბრტყის პერპენდიკულარულად სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ ;

l - ფირფიტის სიგრძეა ნაკადის მიმართ ;

b - მანძილია ამწევი ძალის მოდების წერტილიდან მის მარჯვენა ბოლომდე.

$$Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi. \quad (7.16)$$

დრეკად რეაქციის ძალებს აქვთ სახე

$$R_1 = c_1 \cdot \left(y + \frac{\varphi \cdot l}{2}\right); \quad R_2 = c_2 \cdot \left(y - \frac{\varphi \cdot l}{2}\right). \quad (7.17)$$

შეშვოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს აქვთ სახე

$$-R_1 - R_2 + Y = m \cdot \ddot{y}; \quad (7.18)$$

$$-R_1 \cdot \frac{l}{2} + R_2 \cdot \frac{l}{2} + Y \cdot \left(b - \frac{l}{2}\right) = \frac{m \cdot l^2}{12} \cdot \ddot{\varphi}. \quad (7.19)$$

თუ, ამ განტოლებებში შევიტანთ (7.16) და (7.17) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\ddot{y} + c_{11} \cdot y + c_{12} \cdot \varphi = 0; \quad (7.20)$$

$$\ddot{\varphi} + c_{21} \cdot y + c_{22} \cdot \varphi = 0. \quad (7.21)$$

სადაც

$$c_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2) \cdot l}{2 \cdot m} - \frac{C_y}{m} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l. \quad (7.22)$$

$$c_{21} = \frac{6 \cdot (c_1 - c_2)}{m \cdot l}; \quad c_{22} = \frac{3 \cdot (c_1 + c_2)}{m} + 6 \cdot \frac{C_y}{m \cdot l^2} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot (l - 2 \cdot b). \quad (7.23)$$

ამ სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (7.24)$$

ანუ,

$$\lambda^4 + \lambda^2 \cdot (c_{11} + c_{22}) + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0. \quad (7.25)$$

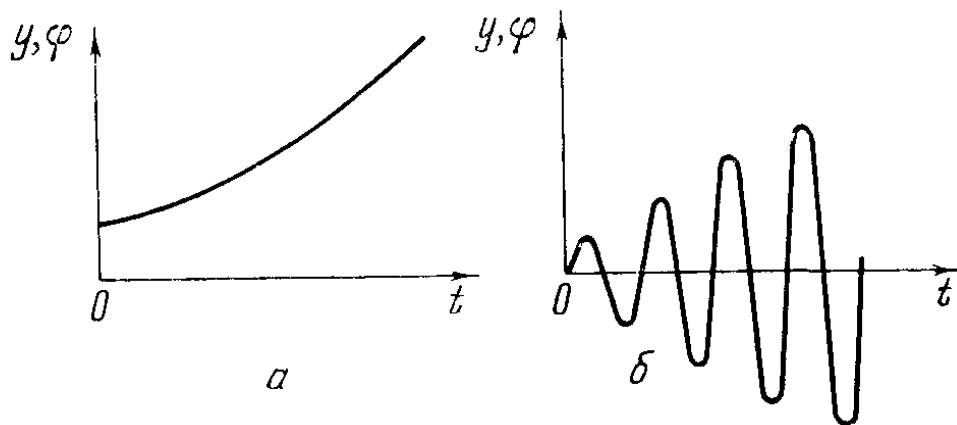
ასე, რომ მახასიათებელი განტოლების ფესვებს ექნებათ სახე

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21})}}. \quad (7.26)$$

ცხადია, რომ სისტემის მდგრადობის პირობებს აქვს სახე

$$0 < c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (7.27)$$

პირველი უტოლობის დარღვევისას ამ სისტემაში გვექნება დივერგენცია ნახ. 7.7 ა, ხოლო, მეორე უტოლობის დარღვევისას გვაქვს ფლატერი ნახ. 7.7 ბ.



ნახ.7.7. ფრთის მდგრადობის დაკარგვის გრაფიკები,

ა) დივერგენცია ; ბ) ფლატერი

მდგრადობის ზღვართი მნიშვნელობები (7.27) უტოლობებში, გვაძლევენ შესაბამისი კრიტიკული სიჩქარეების მნიშვნელობებს, თუ, გავითვალისწინებთ (7.22) და (7.23) თანადობებს, მივიღებთ რომ

დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარეა

$$v_{div} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot l}{\rho \cdot C_y [c_1 \cdot (b-l) + c_2 \cdot b]}}. \quad (7.28)$$

ფლატერის კრიტიკული სიჩქარეა

$$v_{flat} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3\rho \cdot C_y} \cdot \frac{c_1^2 - c_1 \cdot c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}}. \quad (7.29)$$

7.4. ქიმიური ავტორხევითი სისტემები

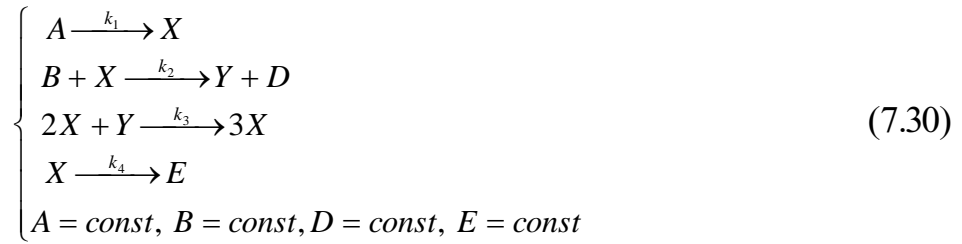
(პრიგოჟინ-ლუფვერის მოდელი)

ავტორხევითი სისტემები გვხვდება ზოგიერთი ქიმიური რეაქციის შესწავლისასაც. ცნობილია ბ. ბელოუსოვის მიერ 1950 წელს აღმოჩენილი და მოგვიანებით, ა.ჟაბოტინსკის მიერ შესწავლილი ქიმიური რეაქცია. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია წარმოადგენს მალონის მჟავის დაჟანგვის პროცესს, იონების კატალიზატორის არსებობისას. ამ რეაქციის მიმდინარეობისას, ხდება კონცენტრაციის რხევები, რის გამოც, ნარევის ფერი იცვლება: ცისფერი-წითელი-ცისფერი . . . გარდა პერიოდული რხევებისა, ქიმიური პროცესების დინამიკა უფრო რთულია და ბოლომდე არაა შესწავლილი. არსებობს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქციის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები, როგორცაა ფილდის, კერესის, ნოიესის და სხვა. მაგრამ არცერთი მათგანი ბოლომდე ვერ აღწერს ქიმიურ დინამიკას.

განვიხილოთ ჰიპოტეტური ქიმიური რეაქციის მოდელი, რომელსაც ბრიუსელიატორი ქვია და შემუშავებულია

ი. პრიგოჟინის სკოლის მიერ. პრიგოჟინ-ლუფვერის მოდელი არის, ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებული იქნა ქ. ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით, ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელიატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლუფვერის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემა ც ღიაა ე.ი. ემატება ან აკლდება A, B, D, E ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შეინარჩუნება ერთ დონეზე.

პრიგოჟინ-ლენვერის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (7.30) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = k_1 A + k_3 X^2 Y - (k_2 B + k_4) X \\ \frac{dY}{dt} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{array} \right. \quad (7.31)$$

ჩავწეროთ (7.31) განტოლებები უგანზომილებო სახით, ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადები ფორმულებით

$$\tau = k_4 \cdot t, \quad x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot Y, \quad (7.32)$$

მაშინ (7.31) გადაიწერება სახით

$$\dot{x} = a - (b+1) \cdot x + x^2 \cdot y, \quad (7.33)$$

$$\dot{y} = b \cdot x - x^2 \cdot y. \quad (7.34)$$

სადაც,

$$a = \sqrt{\frac{k_1^2 \cdot k_3}{k_4^3}} \cdot A, \quad b = \frac{k_2}{k_4} \cdot B. \quad (7.35)$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ მეორე რიგის დინამიკური სისტემა ორი a და b მართვის პარამეტრით.

წონასწორობის პირობებს აქვთ სახე

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}. \quad (7.36)$$

წონასწორობის წერტილში არ ხდება x და y კონცენტრაციების ცვლილება.

ვიპოვოთ წონასწორობის მდგომარეობის არამდგრადობის პირობები. ანუ, ის პირობები, როცა სისტემაში წარმოიქმნებიან ავტორხევები.

ამისათვის, წონასწორობის წერტილს მივცეთ მცირე შეშფოთებები და ვნახოთ როდის შორდება სისტემა წონასწორობის წერტილს. განვიხილოთ შეშფოთებული მდგომარეობა

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta. \quad (7.37)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (7.33),(7.34) განტოლებებში, მაშინ გვექნება

$$\dot{\xi} = a - (b+1)a - (b+1) \cdot \xi + (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right), \quad (7.38)$$

$$\dot{\eta} = b \cdot (a + \xi) - (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right). \quad (7.39)$$

ამ სისტემის ლინეარიზაცია გვაძლევს

$$\dot{\xi} = (b-1) \cdot \xi + a^2 \cdot \eta, \quad (7.40)$$

$$\dot{\eta} = -b \cdot \xi - a^2 \cdot \eta. \quad (7.41)$$

ამ სისტემის ყოფაქცევის გამოსაკვლევად შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება, რისთვისაც უნდა მოვახდინოთ ჩასმა

$$\xi \rightarrow e^{p \cdot \tau}, \quad \eta \rightarrow e^{p \cdot \tau}. \quad (7.42)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$(p-b+1) \cdot (p+a^2) = -a^2 \cdot b. \quad (7.43)$$

თუ, გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$p^2 + p \cdot (a^2 + 1 - b) + a^2 = 0. \quad (7.44)$$

მისი ფესვებია

$$p = -\frac{a^2 + 1 - b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 1 - b)^2}{4} - a^2}. \quad (7.45)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს რომ წერტილში

$$b_{kr} = a^2 + 1, \quad (7.46)$$

სისტემა კარგავს მდგრადობას და იწყება ავტორხევები პრიგოჟინ-ლეფვერის ჰიპოტეტიურ ქიმიურ სისტემაში.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორი ავტორხევითი სისტემებია თქვენთვის ცნობილი ? აღწერეთ მათი მუშაობის პრინციპები.
2. ვან-დერ-ვალის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი.
3. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
4. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის დივერგენციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
5. პრიგოჟინ-ლეფვერის მათემატიკური მოდელი და ავტორხევების წარმოქმნის პირობა

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006

- 2.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008

თავი 8. პარამეტრული რხევითი სისტემები

პარამეტრული რხევითი სისტემებისათვის დამახასიათებელია, რხევების აგზნება რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრის დროში ცვლილების გამო. ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება, ასეთი პარამეტრების პერიოდული ცვლილება. პარამეტრული რხევები სისტემაში არ აღიძრება, თუ სისტემა წონასწორობის მდგომარეობაშია. ეს განასხვავებს პარამეტრულ რხევებს იძულებითი რხევებისაგან.

8.1. ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას (მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ ფიზიკური ქანქარა (სხეული), რომელსაც შეუძლია ბრუნვა A ჰორიზონტალური ბრუნვის ღერძის მიმართ. მოძრაობა ხასიათდება ბრუნვის φ კუთხით ღერძის მიმართ. დავუშვათ, რომ ბრუნვის A ღერძი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში გარკვეული $a = a(t)$ კანონით. ქანქარას მოძრაობის განტოლების შედგენისას ღერძთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ, უნდა გავითვალისწინოთ, როგორც სიმძიმის ძალის მომენტის სიდიდე

$$M_s = -mgs \cdot \sin \varphi, \quad (8.1)$$

ასევე, ინერციის ძალის მომენტიც

$$M_b = -m \cdot \ddot{a} \cdot s \cdot \sin \varphi. \quad (8.2)$$

აქედან გამომდინარე, ფიზიკური ქანქარის მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M_s + M_b = -m \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi, \quad (8.3)$$

ან სხვანაირად

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0, \quad (8.4)$$

სადაც

$a(t)$ - დროის პერიოდული ფუნქციაა;

I - ფიზიკური ქანქარას ინერციის მომენტი;

s - მანძილია ქანქარას მოცემული წერტილიდან ბრუნვის

A - ღერძამდე.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას როცა $a = A \cdot \cos \Omega \cdot t$, მივიღებთ რომ

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + A \cdot \cos \Omega \cdot t) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0. \quad (8.5)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს $\omega^2 = \frac{mgs}{I}$ და $\varepsilon = \frac{mAs}{I}$, მაშინ (8.5) მოდელი გადადის მათივე მოდელში

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot \sin \varphi = 0. \quad (8.6)$$

ამრიგად, მივიღეთ პარამეტრული რხევითი სისტემა.

8.2. ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)

ელექტრული რხევითი სისტემისათვის, რომელიც შედგება

C - ტევადობის კონდენსატორისაგან და L - ინდუქციურობის მაგნიტური კოჭასაგან, გვაქვს თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0. \quad (8.5)$$

თუ, კონდენსატორის ტევადობა დროის პერიოდული ფუნქციაა $C = C(t)$, მაშინ გვაქვს პერიოდულკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც შესაძლოა პარამეტრული რხევების წარმოქმნა. ასეთი რხევები, როგორც წესი, მავნეა

რხევითი სისტემისათვის. ასეთ შემთხვევაში, ცდილობენ სისტემა ისე დააპროექტონ რომ აიცილონ პარამეტრული რხევები.

თუმცა, ზოგიერთი ჭირი მარგებელიაო და ლ. მანდელშტამმა და ნ. პაპალექსმა დააპროექტეს ცვლადი დენის გენერატორი, რომლის მუშაობის პრინციპიც დამყარებულია კონდენსატორის ტევადობის ცვლილებაზე. ტევადობის ცვლილება ხდება იმის ხარჯზე, რომ კონდენსატორის ფირფიტების ნაწილი შეადგენს მბრუნავ კბილანა ბორბალს.

$$\text{თუ, } \frac{1}{L \cdot C} = P_0 + \Delta P \cdot \text{sign} \cos \Omega \cdot t, \quad \tau = \Omega \cdot t, \quad \lambda = \frac{P_0}{\Omega^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2} \quad \text{მაშინ (8.5)}$$

გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\ddot{Q} + (\lambda + \gamma \cdot \text{sign}(\cos \tau)) \cdot Q = 0. \quad (8.6)$$

პარამეტრული რხევითი სისტემის მოდელი (8.6), მისნერის განტოლებას წარმოადგენს.

8.3. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში(მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვადგენთ წონასწორობის განტოლებას.

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (8.7)$$

სადაც, $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ – ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (8.8)$$

სადაც, $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტი. გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას,

ამასთან ის დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე, ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე:

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (8.9)$$

(8.8)-ის და (8.9)-ის (8.7)-ში შეტანით მივიღებთ

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (8.10)$$

(8.10) განტოლების ორივე მხარის t -თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \quad (8.11)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t)] = 0. \quad (8.12)$$

რადგან, $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (8.12) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[x(t)] = 0. \quad (8.13)$$

თუ (8.13)-ში შევარჩევთ $\beta(t)$ და $F[x(t)]$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= t \\ F[X(t)] &= t(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) \end{aligned} ; \quad (8.14)$$

მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) = 0. \quad (8.15)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატიეს განტოლება, რომლისთვისაც დამახასიათებელია პარამეტრული რხევების არსებობა.

ამოცანები და სავარჯიშოები

- 1.რით განსხვავდებიან პარამეტრული რხევები თავისუფალი რხევებისაგან ?
- 2.გამოიყვანეთ ფიზიკური საქანის პარამეტრული რხევების განტოლება.
- 3.გამოიყვანეთ მატეის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.
- 4.გამოიყვანეთ ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.
- 5.გამოიყვანეთ მესნერის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის

გამოყენებული ლიტერატურა

- 1.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 2.ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 4.Кузнецов А.П.,Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.Нелинейные колебания, Москва,2002
- 5.Магнус К. Колебания. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1982

თავი 9. ცოცხალი, არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ, რხევით პროცესებს განსაზღვრავენ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც იწვევს შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას.

წრფივი იძულებითი რხევითი სისტემებისაგან განსხვავებით, არაწრფივ, იძულებით რხევით სისტემებში ადგილი აქვს არაწრფივი რეზონანსის მოვლენას. ამ მოვლენის სახელწოდებით ერთიანდებიან ის მოვლენები, რომელთაც ადგილი აქვთ არაწრფივ სისტემებში, გარე პერიოდული ზემოქმედების დროს და რომლებიც მულაუნდება, რხევების თვისობრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლების ცვლილებით გარე ზემოქმედების ამპლიტუდისა და სიხშირის მიხედვით.

9.1. ამოცანის ზოგადი დასმა

ინერციის კოეფიციენტზე გაყოფის შემდეგ, არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ზოგად შემთხვევაში, ჩაიწერება ასეთი სახით

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) = \psi(t). \quad (9.1)$$

სადაც

$\psi(t)$ - გარე მაიძულებელი ძალაა;

$g(q)$ - აღმდგენი ძალაა;

$f(q, \dot{q})$ - დისიპაციისა და ამაჩქარებელი ძალების

კომბინაციაა; პირველი მათგანი მიმართულია q - სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო მეორე – სიჩქარის მიმართულებით.

ზოგად შემთხვევაში, (9.1) განტოლების ამოხსნა შეუძლებელია, თუმცა, კერძო შემთხვევებში ეს შესაძლებელია. ზოგად შემთხვევაში, განტოლება შეიძლება გამოკვლეულ იყოს კომპიუტერის დახმარებით.

9.2. ფრანგიშვილი-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა, ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა ტოლია მიწოდებისა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი $X(t)$, რამდენიც სჭირდება ბაზარს $Y(t)$.

$$X(t) = Y(t). \quad (9.2)$$

$X(t)$ არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა), $Y(t)$ - მოთხოვნა.

(9.2) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (9.3)$$

სადაც, $C(t)$ – მოთხოვნის ფუნქციაა, $I(t)$ – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ჰიკსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t), \quad (9.4)$$

სადაც β -აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთელ წინა ისტორიაზე გავლილ t დროში. სხვანაირად,

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau, \quad (9.5)$$

წონასწორობის (9.3) განტოლებაში (9.4) და (9.5) ჩასმით მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \ddot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt . \quad (9.6)$$

(9.6) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\ddot{X}(t) = \beta \cdot \dddot{X}(t) + F[X(t)] . \quad (9.7)$$

ანუ, მივიღებთ ფრანგიშვილი-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta} \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta} F[X(t)] = 0 . \quad (9.8)$$

ვთქვათ:

$$\beta = -\frac{1}{e}; \quad (9.9)$$

მაშინ მივიღებთ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0, \quad (9.10)$$

სადაც:

$e = const$, ხოლო $F_1[X(t)]$ მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t) . \quad (9.11)$$

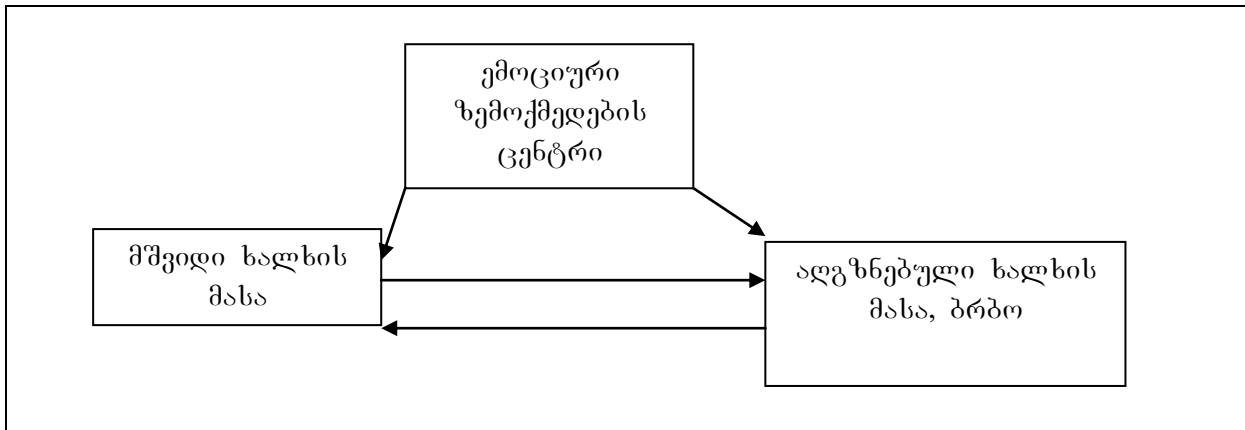
მაშინ (9.11)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A \cos(\omega \cdot t) . \quad (9.12)$$

რომელიც აღწერს არაწრფივ, იძულებით რხევებს, ფრანგიშვილი - ობგაძის ეკონომიკურ სისტემაში.

**9.3. ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის
მათემატიკური მოდელირება, პერიოდული გარე
PR – გამდიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში**

განვიხილოთ ხალხის მასის ემოციური ქმედების მათემატიკური მოდელი. ხალხის მასისათვის დამახასიათებელია გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, გარე ემოციური ზემოქმედების გავლენით, რომლის როლს შეიძლება ასრულებდეს საეკლესიო პირი, პოლიტიკოსი, ავანტურისტი ან ტელეჟურნალისტი. ამ ზემოქმედებათა ერთობლიობას PR – გამდი-ზიანებლის ზემოქმედებას უწოდებენ. განვიხილოთ ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი ნახ.9.1



ნახ.9.1 ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი

ხალხის მასის ემოციური დინამიკის მათემატიკური მოდელი დგება ნიუტონის მეორე კანონის ბაზაზე

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (9.13)$$

სადაც

n – ბრბოს შემადგენელი ხალხის რაოდენობაა

P_2 – იმის ალბათობაა, რომ ხალხის მასა აღზნებულ მდგომარეობაშია;

f – ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდეა;

ε - ხალხის ემოციური აგზნების სიდიდის მახასიათებელი პარამეტრია;

P_1 – იმის ალბათობაა, რომ ხალხის მასა მშვიდ მდგომარეობაშია..

ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდე, პირდაპირპროპორციულია მათი ორმაგი მოცულობისა და იმის ალბათობისა, რომ მასა მშვიდ მდგომარეობაში იმყოფება; ასევე, როცა იზრდება აგზნებადობის ალბათობა, ემოციური ზემოქმედების ძალა მცირდება. ასე, რომ გვექნება

$$f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot P_2, \text{ დაუშვათ, რომ } \gamma = 1. \quad (9.14)$$

(9.13) და (9.14) იძლევა მოდელს

$$\ddot{P}_2 = -2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2. \quad (9.15)$$

განვიხილოთ, შემთხვევა როცა სისტემაზე მოქმედებს პერიოდული PR – გამღიზიანებელი. მაშინ (9.13) და (9.14) თანადობების ნაცვლად გვექნება

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f + n \cdot A \cdot \sin \omega \cdot \varepsilon, \quad f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot P_2, \quad \gamma = 1, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (9.16)$$

მაშინ მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = -2n P_1 \dot{P}_2 + n \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon), \quad (9.17)$$

სადაც

$$P_1 = 1 - P_2. \quad (9.18)$$

ამიტომ, გვაქვს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{P}_2 + 2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon). \quad (9.19)$$

ამრიგად, მივიღეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი, პერიოდული გარე

PR – გამღიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში. რაც წარმოადგენს არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის აშკარა მაგალითს.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. არაწრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის ზოგადი სახე.

2. გამოიყვანეთ არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე (დიუფინგის განტოლება).

3. **Mathcad** – ის ბაზაზე ამოხსენით დიუფინგის განტოლება და შეისწავლეთ ამონახსნების ყოფაქცევა ფაზურ სიბრტყეზე.

4. გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ **Mathcad** – ის ბაზაზე.

5. გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი გარე, პერიოდული PR – გამღიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006

2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი **Mathcad** – ისა და **Matlab** – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007

- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
- 4.Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М.Теоретическая физика, т.1, Механика, Наука, Москва, 1972
5. Prangishvili A., Obgadze T.,Sakvarelidze N.,Iashvili L. MATHEMATICAL MODELLING OF EXCESSIVE DEMAND FOR ESSENTIAL COMMODITIES DYNAMICS AT PERIODIC, PANIC PR-EXCITER, Transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi , 2009
- 6.Obgadze T.,Sakvarelidze N.,Modebadze T. MATHEMATICAL MODELLING PEOPLE MASSES EMOTIONAL BEHAVIOUR DYNAMICS AT PERIODIC PR-EXCITER, Transactions automated control systems № 1(6), Tbilisi , 2009

თავი 10. ჩვეულებრივი სისტემების ანალიზური ამონახსნები და ელიფსური ფუნქციები

განვიხილოთ თავისუფალი არადემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (10.1)$$

ეს მოდელი, როგორც უკვე ვიცით, შეიძლება შეესაბამებოდეს მატერიალური ნაწილაკის მცირე რხევებს, რომლებიც გამოწვეულია წონასწორობის მდგომარეობისაკენ მიმართული ძალით. ასეთ შემთხვევაში $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, სადაც k - შეესაბამება ზამბარის სიხისტეს, ხოლო m ზამბარაზე გამობმული სხეულის მასაა. ასეთი მარტივი წრფივი სისტემისათვის, ადვილია ზუსტი ამონახსნის პოვნა $x(t) = e^{-at}$ ჩასმის საშუალებით:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (10.2)$$

ინტეგრების ორ ცვლადს - რხევის ამპლიტუდასა და ფაზის წანაცვლებას, განსაზღვრავენ $x(0)$ და $\dot{x}(0)$ საწყისი პირობებიდან გამომდინარე

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}^2(0) + \omega^2 x^2(0)}, \quad \delta = \arctg\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}\right). \quad (10.3)$$

10.1. წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელის ინტეგრება კვადრატურებში

ეხლა დავუბრუნდეთ (10.1) დიფერენციალურ განტოლებას და ამოვხსნათ სხვანაირად, ისე, რომ შემდეგ, ამ მეთოდის განზოგადებაც შეგვეძლოს უფრო რთული სისტემების ამოსახსნელად. ამისათვის გადავწეროთ განტოლება ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (10.4)$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \quad (10.5)$$

ასეთ წარმოდგენას, დიდი მნიშვნელობა აქვს ჰამილტონური(ინტეგრებადი) სისტემებისათვის, რომლებზედაც გვექნება საუბარი მოგვიანებით. თუ გავამრავლებთ (10.4) განტოლების ორივე მხარეს $\omega^2 x$, ხოლო (10.5) განტოლების ორივე მხარეს y სიდიდეებზე და შედეგებს შევკრიბავთ, მივიღებთ

$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = 0. \quad (10.6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (10.6) შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) = 0. \quad (10.7)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება მუდმივი სიდიდეა

$$\frac{1}{2} (y^2 + \omega^2 x^2) = I_1. \quad (10.8)$$

ინტეგრების I_1 ცვლადს მოძრაობის ინტეგრალს, ანუ პირველ ინტეგრალს უწოდებენ. თუ, გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\dot{x} = y$, ადვილი მისახვედრია რომ $I_1 = E$ სიდიდეს აქვს სისტემის მექანიკური ენერჯის შინაარსი. ამ ინტეგრალის გამოყენებით შეგვიძლია (10.4)-(10.5) სისტემის რიგი, დავწიოთ ერთი ერთეულით. ამისათვის, გამოვსახოთ (10.8) თანადობიდან y ,

$$y = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2} \omega^2 x^2)}, \quad (10.9)$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (10.4) განტოლებიდან. გვექნება უკვე პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}. \quad (10.10)$$

ამ განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები, მაშინ მივიღებთ

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}}, \quad (10.11)$$

თუ, ვაინტეგრებთ (10.11) განტოლებას, მივიღებთ ინტეგრირების კიდევ ერთ I_2 მუდმივას:

$$t + I_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2I_1}}\right). \quad (10.12)$$

თუ, გავამრავლებთ (10.12) ტოლობას ω ცვლადზე და ავიღებთ ორივე მხარიდან სინუსს, მივიღებთ ამონახსნს

$$x(t) = \frac{\sqrt{2I_1}}{\omega} \sin(\omega t + I_2 \omega), \quad (10.13)$$

ეს ამონახსნი, ცხადია რომ იდენტურია, ადრე სხვა გზით მიღებულ (10.2) ამონახსნისა. ინტეგრების მეორე მეთოდი უფრო რთული ჩანს, თუმცა, ამ მეთოდს ამონახსნამდე მივყავართ არაწრფივი განტოლებების ისეთ შემთხვევებშიც, როცა პირდაპირი მარტივი ინტეგრება(ჩასმის ხერხით) არ გამოდის.

ამრიგად, ამ პარაგრაფის მეთოდით, სისტემის ამონახსნის პოვნის ალგორითმს აქვს ოთხი ეტაპი:

1. პირველი ინტეგრალის იდენტიფიკაცია;
2. პირველი I_1 ინტეგრალის გამოყენება სისტემის ხარისხის ერთი ერთეულით დასაწევად;
3. ამოცანის ამოხსნა კვადრატურებში, ანუ ანალიზური ამონახსნის პოვნა;
4. შებრუნებული ფუნქციის პოვნა, რომელსაც მივყავართ ცალსახა ამონახსნამდე.

უნდა აღინიშნოს, რომ საზოგადოდ, არაწრფივი განტოლებების კვადრატურებში ამოხსნა არ ხერხდება, მითუმეტეს, თუ მათი რიგი ორზე მეტია.

წრფივი ოსცილატორის რხევის პერიოდს ადვილად ვპოულობთ (10.2) ამონახსნიდან

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.14)$$

თუმცა, რხევის პერიოდის პოვნა შესაძლებელია მეორე, გეომეტრიული (10.9),(10.11) მიდგომიდანაც. მართლაც, თუ გავიხსენებთ რომ $I_1 = E$ შეესაბამება სისტემის მექანიკურ ენერგიას, ადვილად ვიპოვით სისტემის ზღვრული წონასწორობის წერტილებს (10.9) ტოლობიდან $\dot{x} = 0 \stackrel{(10.9)}{\implies} x = \pm \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ სისტემის სრული რხევის პერიოდი (10.11) თანადობიდან გამომდინარე იქნება

$$T = 2 \int_{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right)}} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (10.15)$$

P.S. ცხადია, რომ რხევის პერიოდი წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევის შემთხვევაში არაა დამოკიდებული ენერგიაზე და მაშასადამე საწყის პირობებზე.

10.2. არაწრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელირება

განვიხილოთ, მარტივი არაწრფივი სისტემის თავისუფალი რხევების მოდელი წონასწორობისაკენ მიმართული არაწრფივი ძალით

$$\ddot{x} + \alpha x^3 = 0. \quad (10.16)$$

გადავწეროთ ეს სისტემა ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (10.17)$$

$$\dot{y} = -\beta x^3. \quad (10.18)$$

გავამრავლოთ (10.17) განტოლების ორივე მხარე βx^3 , ხოლო (10.18) განტოლების ორივე მხარე y სიდიდეებზე და შედეგები შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\dot{x}\beta x^3 + y\dot{y} = y\beta x^3 + (-y\beta x^3), \quad (10.19)$$

(10.19) ადვილად გარდაიქმნება მარტივ განტოლებად

$$y\dot{y} + \beta x^3 \dot{x} = 0, \quad (10.20)$$

რომელსაც გადავწერთ სახით

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} \beta x^4 \right) = 0. \quad (10.21)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრჩხილებსი მოთავსებული გამოსახულება მუდმივი სიდიდეა და მას ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი ქვია, ხოლო შინაარსით, ის არის ამ არაწრფივი სისტემის მექანიკური ენერგია

$$E = I_1 = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} \beta x^4. \quad (10.22)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (10.17) ტოლობას, (10.22) ტოლობიდან მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{4} \beta x^4)}. \quad (10.23)$$

ცვლადთა განცალკეება გვაძლევს განტოლებას

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{4} \beta x^4)}}, \quad (10.24)$$

საიდანაც, წინა მაგალითის ანალოგიურად ვპოულობთ რხევის პერიოდს

$$T = 2 \int_{-\left(\frac{4E}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}}^{\left(\frac{4E}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{4}\beta x^4\right)}}. \quad (10.25)$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება გამა-ფუნქციის მეშვეობით

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta^{\frac{1}{2}}}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) E^{-\frac{1}{4}}. \quad (10.26)$$

P.S. რხევის პერიოდი ეხლა უკვე დამოკიდებულია ენერგიაზე. რაც მეტია ნაწილაკის ენერგია, მით უფრო მცირეა მისი რხევის პერიოდი. ამ შემთხვევაში რხევის სიხშირეც ენერგიაზეა დამოკიდებული და მაშასადამე საწყის პირობებზეც. ესაა, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი განმასხვავებელი ნიშანი წრფივ და არაწრფივ სისტემებს შორის.

10.3. მეორე რიგის არაწრფივი სისტემები და ელიფსური ფუნქციები

პრაქტიკაში არსებული მოდელების უმრავლესობა, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება. დიფერენციალურ განტოლებათა საკმაოდ დიდ კლასს შეადგენენ ისეთი მოდელები, რომლებიც აღიწერიან

$$\ddot{x} = F(x), \quad (10.27)$$

ტიპის განტოლებებით. სადაც $F(x)$ - პოლინომი, რაციონალური ან ტრანსცენდენტული ფუნქციაა დამოკიდებული x ცვლადზე.

პოლინომის შემთხვევაში, მაგალითად

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (10.28)$$

ჩვენ შეგვიძლია, განტოლება (10.27) ვაინტეგროთ (10.28) ფუნქციის გათვალისწინებით, რისთვისაც გადავწერთ მათ ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (10.29)$$

$$\dot{y} = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (10.30)$$

გავამრავლოთ (10.29) განტოლების ორივე მხარე $-\sum_{i=0}^n a_i x^i$ გამოსახულებაზე, ხოლო (10.30) განტოლების ორივე მხარე y გამოსახულებაზე და შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$y\dot{y} - \dot{x} \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0. \quad (10.31)$$

რომელსაც ადვილად გადავწერთ ინტეგრებადი სახით

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} \right) = 0. \quad (10.32)$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ პირველ ინტეგრალს

$$I_1 = \frac{1}{2} y^2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}, \quad (10.33)$$

საიდანაც ამოვხსნით y ცვლადს

$$y = \sqrt{2 \left(a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1 \right)}, \quad (10.34)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (10.29) ტოლობას გვექნება

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2 \left(a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1 \right)}. \quad (10.35)$$

ცვლადთა განცალგებით მივიღებთ, რომ

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2 \left(a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1 \right)}}. \quad (10.36)$$

ეხლა უკვე ამოცანის ამოხსნა დავიდა მარჯვენა მხარის ინტეგრალის გამოთვლამდე. თუ, ფესვქვეშა მრავალწევრის ხარისხი არ

აღმატება სამს, მაშინ ინტეგრალი გამოისახება „ელიფსური“ ფუნქციებით.

ელიფსური ფუნქციები, ჩვეულებრივი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების($\sin x$, $\cos x$, . . .) განზოგადებაა. ხოლო, ელიფსური ინტეგრალები შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების($\arcsin x$, $\arccos x$. . .) განზოგადებაა. ელიფსური ფუნქციების თეორია განავითარეს აბელმა და იაკობმა. მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი მოდელების რაოდენობა არც ისე დიდია, რომლებსაც ვხსნით ელიფსური ფუნქციებით, მაინც ბევრი საინტერესო ამოცანა(ქანქარას რხევების ამოცანა . . .) ხვდება ელიფსური ფუნქციების მოქმედების არეშიც. თუ (10.28) ფუნქციის ხარისხი, არ აღმატება სამს, მაშინ მისი ამონახსნი მოიციმა იაკობის ელიფსური ფუნქციებით. ხოლო, თუ მისი ხარისხი არ აღმატება ორს, ამონახსნი მოიციმა ვაიერშტრასის ელიფსური ფუნქციებით.

10.4. იაკობის ელიფსური ფუნქციები

განვიხილოთ სისტემა

$$\ddot{x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3. \quad (10.37)$$

ამ სისტემის შესაბამისი (10.33) პირველი ინტეგრალი შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(Ax + \frac{1}{2} Bx^2 + \frac{1}{3} Cx^3 + \frac{1}{4} Dx^4 \right). \quad (10.38)$$

სიმარტივისათვის, გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგნაირად

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4. \quad (10.39)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი შეიძლება დაიშალოს მამრავლებად და შემდეგ გარდაიქმნას ლეჟანდრის კანონიკური სახემდე

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(1-kx^2). \quad (10.40)$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვამღევს გამოსახულებას

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}. \quad (10.41)$$

რომლის მარჯვენა ნაწილში მდგარ ინტეგრალს პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი ეწოდება და აღინიშნება

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}. \quad (10.42)$$

ცხადია, რომ როცა $k = 0$ ეს ფუნქცია ემთხვევა ჩვეულებრივ $\arcsin x$ ფუნქციას, რაც შეესაბამება ჩვენს მიერ ადრე ამოხსნილ ამოცანას (10.12).

P.S. იაკობის ელიფსური ფუნქციები, არიან ელიფსური ინტეგრალების შექცეული ფუნქციები.

(10.42) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა $x = \sin\theta$, მაშინ გვექნება პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}}. \quad (10.43)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}}, \quad (10.44)$$

მაშინ $sn(u, k)$ ელიფსური ფუნქცია იქნება

$$sn(u, k) = \sin\theta.$$

განიხილავენ სხვა ტიპის ელიფსურ ფუნქციებსაც

$$cn(u, k) = \cos\theta.$$

გვაქვს ანალოგია ჩვეულებრივ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან

$$u = \operatorname{arc} \operatorname{sn}(\sin\theta, k) = \operatorname{arc} \operatorname{cn}(\cos\theta, k).$$

ამოცანები და სავარჯიშოები:

1. იაკობისა და ვეიერშტრასის ელიფსური ფუნქციების ცნება;
2. დამოკიდებულია, თუ არა თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის რხევის პერიოდი სისტემის ენერგიაზე? პასუხი დაასაბუთეთ.
3. დამოკიდებულია, თუ არა არაწრფივი, კუბური რხევითი სისტემის რხევის პერიოდი სისტემის ენერგიაზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
3. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
- 6.თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
- 7.თ.ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
- 8.М.Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988

თავი 11. დინამიკური სისტემების გამოკვლევა ფაზურ სივრცეში

დინამიკური სისტემის ფაზურ სივრცეში გამოკვლევა, საშუალებას იძლევა, სისტემის ანალიზურად ამოუხსნელად იქნას შესწავლილი, ამ სისტემის ამონახსნების ძირითადი თვისებები: განსაკუთრებული წერტილები, ბიფურკაციები, ზღვართი ციკლები . . .

განსაკუთრებულად ხელსაყრელია ფაზური სივრცის ცნება იმ შემთხვევაში, როცა ცვლადების რიცხვია ორი და მაშასადამე, ფაზური სივრცე ფაზურ სიბრტყეს წარმოადგენს.

11.1. წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი

განვიხილოთ წრფივი დინამიკური სისტემა:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad (11.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (11.2)$$

1. ამ დინამიკური სისტემის შესასწავლად, უნდა ამოვიწეროთ სისტემის კოეფიციენტების მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (11.3)$$

ვიპოვოთ ამ მატრიცის კვალი და დეტერმინანტი:

$$\text{tr}A = a + d; \quad \det A = ad - bc; \quad (11.4)$$

2. ცხრილი 11.1 მიხედვით, დავადგინოთ განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ტიპი;

$\det A > 0$	$\operatorname{tr} A < 0$	$\det A < \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{2}$	მდგრადი კვანძი
$\det A > 0$	$\operatorname{tr} A < 0$	$\det A > \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{2}$	მდგრადი ფოკუსი
$\det A > 0$	$\operatorname{tr} A > 0$	$\det A < \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{2}$	არამდგრადი კვანძი
$\det A > 0$	$\operatorname{tr} A > 0$	$\det A > \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{2}$	არამდგრადი ფოკუსი
$\det A < 0$	ჰიპერბოლური-უნაგირა წერტილი		
$\det A > 0$	$\operatorname{tr} A = 0$	ცენტრი	

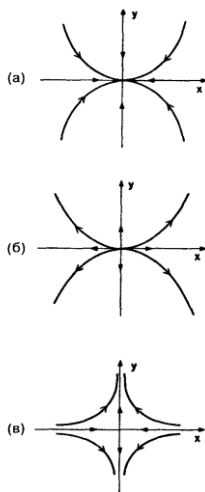
3. ვიპოვოთ განსაკუთრებული მიმართულებები:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0. \tag{11.5}$$

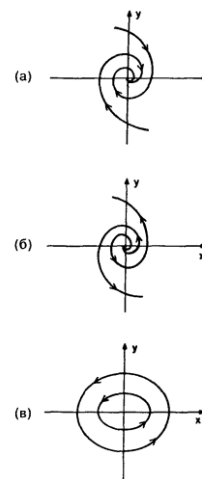
$$y = -\frac{a}{b}x; \quad y = -\frac{c}{d}x. \tag{11.6}$$

4. თუ, განსაკუთრებული წერტილი კვანძია ან უნაგირა წერტილი, მაშინ ვპოულობთ ასიმპტოტებს ჩასმით $y = kx$;
5. ვპოულობთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებს.

განსაკუთრებული წერტილების მახლობლობაში, ორი ცვლადის მქონე დინამიკური სისტემის ფაზურ ნაკადს, შეიძლება ქონდეს ერთ-ერთი სახე ნახ.11.1 და ნახ.11.2-დან:



ნახ.11.1. ლოკალური ფაზური ნაკადები
ნაკადები
a) მდგრადი კვანძი; ნ) არამდგრადი კვანძი;



ნახ.11.2. ლოკალური ფაზური
ნაკადები
a) მდგრადი ფოკუსი; ნ) არამდგრადი

კვლევის ეს სქემა ძალაშია, ზოგადად, ყველა წრფივი ავტონომიური სისტემისათვის

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i=\overline{1,n} \quad (11.7)$$

ამ შემთხვევაში,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad trA = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (11.8)$$

განვიხილოთ პრაქტიკული მაგალითი:

1. ვთქვათ, მოცემულია დინამიკური სისტემა

$$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}. \quad (11.9)$$

გადავწეროთ სისტემა ნორმალური სახით

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y; \quad (11.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y. \quad (11.11)$$

სისტემის კოეფიციენტების მატრიცას აქვს სახე:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.12)$$

$$\det A = -5; \quad trA = 4$$

2. რადგან (11.10)-(11.11) სისტემის დეტერმინანტი უარყოფითია, ცხრილი 11.1 გვაძლევს, რომ განსაკუთრებული (0;0) წერტილი ჰიპერბოლური- უნაგირის ტიპს მიეკუთვნება;

3. განსაკუთრებულ მიმართულებებს მივიღებთ (11.10) და (11.11) განტოლებების მარჯვენა მხარეების ნულთან გატოლებით და ამოხსნით y ცვლადის მიმართ:

$$y = -\frac{3}{4}x; \quad y = -2x. \quad (11.13)$$

პირველ წრფეს ფაზური ტრაექტორიები კვეთენ ვერტიკალური მიმართულებით, ხოლო მეორეს ჰორიზონტული მიმართულებით.

4. ვპოულობთ ასიმპტოტებს:

$$k = \frac{2x+kx}{3x+4kx} = \frac{2+k}{3+4k}; \quad (11.14)$$

ამ ტოლობიდან ვიღებთ კვადრატულ განტოლებას

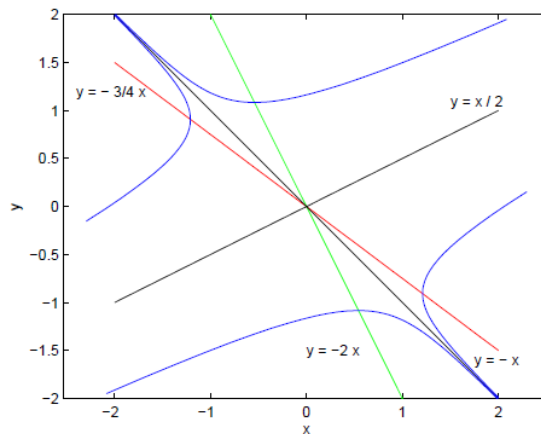
$$4k^2 + 2k - 2 = 0, \text{ ანუ, } 2k^2 + k - 1 = 0. \quad (11.15)$$

ამ განტოლების ფესვებია $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{1}{2}$. რაც იმას ნიშნავს რომ გვაქვს ასიმპტოტები: $y = -x$ და $y = \frac{1}{2}x$.

5. ეხლა განვსაზღვროთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებები (ნახ.11.3) ამისათვის ავიღოთ რაიმე წერტილი ასიმპტოტზე, მაგალითად $(1;-1)$ და გამოვითვალოთ y' ამ წერტილში (11.9) ფორმულიდან გამომდინარე

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)} = -1 < 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია y კლებადია x -ის ზრდისას და უახლოვდება განსაკუთრებულ $(0;0)$ წერტილს.



ნახ.11.3. უნაგირის ტიპის განსაკუთრებული წერტილის ფაზური ტრაექტორიები

11.2. ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური პორტრეტი

დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის შესახებ ყველაზე სრულ ინფორმაციას იძლევა მისი გამოკვლევა ფაზურ სიბრტყეზე. ორი x და y ცვლადი, საშუალებას გვაძლევს, შევისწავლოთ (11.1),(11.2) სისტემის ამონახსნის ყოფაქცევა - **ფაზურ სივრცეში** და რადგან ცვლადების რაოდენობა ორია, ფაზური სივრცე წარმოადგენს **ფაზურ სიბრტყეს**.

იმ შემთხვევაში, თუ, საქმე გვაქვს n პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემასთან (11.7), ან უფრო ზოგად, არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემასთან

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (11.16)$$

მაშინ თითოეული x_1, x_2, \dots, x_n ცვლადებიდან, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც n განზომილებიანი **ფაზური სივრცის** დამოუკიდებელი ცვლადი. **ფაზური სივრცის** ცნებას აზრი აქვს ნებისმიერი დიფერენციალური განტოლებებისათვის, თუმცა, როგორც დავინახავთ, მას განსაკუთრებულად მდიდარი გეომეტრიული სტრუქტურა აქვს **ჰამილტონური სისტემებისათვის**.

მოცემული მომენტისათვის, ფაზური x და y კოორდინატების ნებისმიერი მნიშვნელობა ფაზურ სიბრტყეზე, მთლიანად განსაზღვრავს (11.1),(11.2) სისტემის მდგომარეობას, დროის ამ მომენტისათვის. როგორც წესი, ამ სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს, ფაზურ სიბრტყეზე შეესაბამება გლუვი წირი, რომელსაც **ფაზურ ტრაექტორიას** (ან დონის წირს) უწოდებენ. ხოლო ამ ტრაექტორიის გასწვრივ მოძრაობას - **ფაზურ ნაკადს** ეძახიან. რადგან დიფერენციალური განტოლებების ფუნდამენტური თვისებაა, ამონახსნის ცალსახა ხასიათი, ნათელია, რომ სხვადასხვა ფაზური ტრაექტორიები არ იკვეთებიან.

თუ, ერთ ნახაზზე დავიტანთ, სხვადასხვა საწყისი პირობების შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული სისტემის ფაზური ტრაექტორიებისაგან შემდგარ რთულ სურათს, რომელსაც სისტემის ფაზურ პორტრეტს უწოდებენ. განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი რხევითი სისტემა-წრფივი ოსცილატორი (ამ სახით რხევითი სისტემის წარმოდგენა ხელსაყრელია ჰამილტონური სისტემებისათვის, რომლებსაც შემდგომში დაწვრილებით განვიხილავთ):

$$\dot{x} = y, \tag{11.17}$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \tag{11.18}$$

გავამრავლოთ (11.17) განტოლების ორივე მხარე $\omega^2 x$ გამოსახულებაზე, ხოლო (11.18) განტოლების ორივე მხარე y -ზე. მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

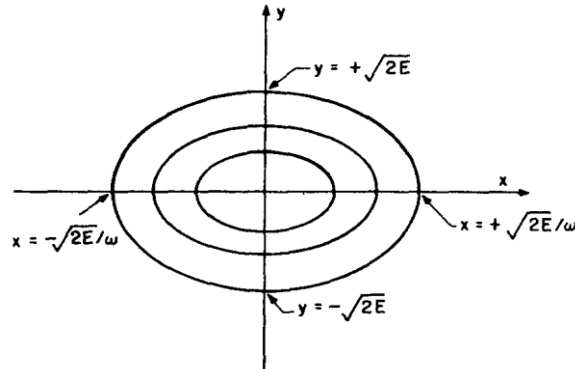
$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = 0. \tag{11.19}$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ფაზური ტრაექტორიებისა და ნაკადის სახე, განვიხილოთ, ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი. ჩვენი სისტემის შემთხვევაში, ის ადვილად მიიღება (11.19) განტოლების ინტეგრებით

$$E = \frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2). \tag{11.20}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ინტეგრალი სისტემის მექანიკურ ენერგიას წარმოადგენს. პირველი ინტეგრალი (11.20) საშუალებას გვაძლევს, ფაზური x და y კოორდინატების სიბრტყეში, წარმოვადგინოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი, რომლის თითოეული ფაზური ტრაექტორია ელიფსია და ნახევარღერძების სიდიდე, დამოკიდებულია საწყის პირობებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ

სისტემის ენერჯიის სიდიდეს. ხოლო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები კი, ადვილად განისაზღვრება (11.20) თანადობიდან ნახ.11.4.



11.4.თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი

თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ნაკადი, შემოსაზღვრულია ფაზურ სივრცეში, სისტემის საწყისი ენერჯიის შესაბამისი ელიფსური ფაზური ტრაექტორიით. ფაზური ნაკადი, წარმოადგენს კონცენტრული ელიფსების ერთობლიობას, რომლებიც ფაზურ სივრცეში განლაგებული არიან განსაკუთრებული წერტილის (0;0) გარშემო. განსაკუთრებული წერტილი ამ ელიფსების ცენტრს წარმოადგენს. ჩაკეტილი ფაზური ტრაექტორიები ფაზურ სივრცეში, შეესაბამება პერიოდულ რხევებს. ასეთი ტიპის განსაკუთრებულ წერტილს - ცენტრს უწოდებენ.

2. განვიხილოთ ეხლა დემპფირებული რხევითი სისტემა

$$\dot{x} = y, \tag{11.21}$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x - \lambda y. \tag{11.22}$$

რომელიც მიიღება დემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელიდან

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{11.23}$$

როგორც ვიცით, ამ განტოლების ამონახსნი, მოიცემა ფორმულით

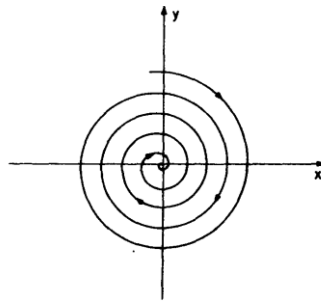
$$x(t) = ae^{-\lambda t/2} \sin(\nu t + \delta). \quad (11.24)$$

სადაც $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}$, თუ, ფესქვემა გამოსახულება მეტია ნულზე, ხოლო, δ განისაზღვრება ამოცანის საწყისი პირობებით.

ამ სისტემისათვის, მექანიკური ენერგია აღარაა მუდმივი და ის ექსპონენციალურად კლებულობს

$$E(t) = E(0)e^{-\lambda t}. \quad (11.25)$$

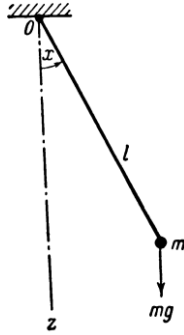
განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ირგვლივ, ამონახსნები ეხვევა სპირალურად ნახ.11.5.



ნახ.11.5.დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის
ფაზური ტრაექტორიები

ამ ტიპის განსაკუთრებულ წერტილებს - მდგრად ფოკუსს უწოდებენ.

3. მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის აგება



ნახ.11.6 მათემატიკური ქანქარას სქემა

მათემატიკური ქანქარას, რხევითი სისტემის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება, ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია იმ არაწრფივი განტოლებებიდან, რომლის ანალიზური ამოხსნაც შეუძლებელია აიგოს იაკობის ელიფსური ფუნქციების მეშვეობით. ნახ.11.6 გათვალისწინებით და ნიუტონის მეორე კანონზე დაყრდნობით, ადვილად ავაგებთ მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის დინამიკის, დიფერენციალურ განტოლებას

$$ml\ddot{x} + mgsinx = 0, \quad (11.26)$$

სადაც, m – დაკიდული ტვირთის მასაა; l –საკიდელის სიგრძეა; x –ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა.

თუ, (11.26) განტოლების ორივე მხარეს, შევკვეცავთ მასაზე და გავყოფთ საკიდელი სიგრძეზე, გვექნება

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}sinx=0. \quad (11.27)$$

თუ, განვიხილავთ მცირე გადახრების შემთხვევას $x \ll 1$, მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $sinx \approx x$. ასეთ შემთხვევაში, ქანქარის არაწრფივი განტოლება (11.27) გარდაიქმნება წრფივ განტოლებად და ის შეესაბამება, უკვე შესწავლილ თავისუფალ, არადემპფირებულ რხევით სისტემას

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x=0. \quad (11.28)$$

ამ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე იქნება

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (11.29)$$

საწყისი (11.27) არაწრფივი სისტემის პირველი ინტეგრალი, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სისტემის დაყვანილი მექანიკური ენერგია და ჩავწეროთ სახით

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 - \frac{g}{l} \cos x = E', \quad (11.30)$$

მართლაც, (11.30) პირველი ინტეგრალის წარმოებული გვაძლევს (11.27) განტოლებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ (11.27) განტოლების ინტეგრებით, შეიძლება მიღებულ იქნას (11.30) პირველი ინტეგრალი. (11.30) პირველი ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$t = \int \frac{dx'}{\sqrt{2(E' + (\frac{g}{l}) \cos x')}}. \quad (11.31)$$

გარდავქმნათ ეს ინტეგრალი პირველი გვარის ელიფსურ ინტეგრალად. ამისათვის, ჯერ შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\cos \omega = -E' \frac{l}{g}, \quad (11.32)$$

მაშინ (11.31) ინტეგრალი გადაიწერება სახით

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\cos x' - \cos \omega}}. \quad (11.33)$$

თუ, გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას $\cos x = 1 - 2k^2(\sin \varphi)^2$, სადაც $k = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$, მივიღებთ

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2(\sin \varphi')^2}}. \quad (11.34)$$

სადაც მოდულის ცხადი სახე იქნება $k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{E'l}{g}\right)} = \sin \frac{\omega}{2}$. იაკობის ელიფსური ფუნქციების გამოყენებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$sn\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, k\right) = \sin \varphi = \frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}$ და ჩვენ მივდივართ გადახრის კუთხის, ცხადად გამოსახვის ფორმულაზე დროის მიხედვით, რასაც ვეძებდით

$$x(t) = 2 \arcsin \left[k \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) \right]. \quad (11.35)$$

ეხლა ავაგოთ მათემატიკური ქანქარის (11.27) რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი. ამისათვის, გადავწეროთ ის ნორმალური ფორმით

$$\dot{x} = y, \quad (11.36)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x. \quad (11.37)$$

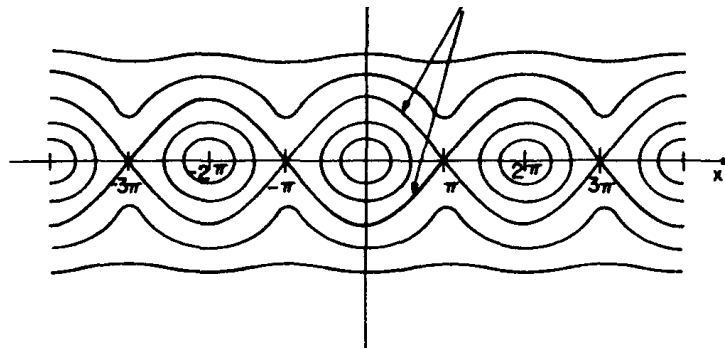
ამ განტოლებათა სისტემას შეესაბამება პირველი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2} y^2 - \frac{g}{l} \cos x = E'. \quad (11.38)$$

ცხადია, რომ ენერგიის მცირე სიდიდის მნიშვნელობებისათვის, $(0;0)$ წონასწორობის წერტილის მახლობლობაში, გვექნება წრფივი პერიოდული ხასიათის რხევები. გასაგებია, რომ ამ დროს ფაზური პორტრეტი წარმოადგენს კონცენტრულ წრეწირებს ცენტრით წონასწორობის წერტილში. ენერგიის სიდიდის ზრდის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდებიც გაიზრდება, ვიდრე არ მიაღწევს ისეთ ენერგიას როდესაც სურათი მკვეთრად იცვლება და ქანქარა აცდება ჩვეულებრივ რხევის რეჟიმს და ენერგიის შემდგომი ზრდისას, იწყებს ბრუნვით მოძრაობებს საკიდელი წერტილის მიმართ. ეს მოხდება, მაშინ როცა სხეული $x = 0$ წონასწორობის მდგომარეობიდან გადადის $x = \pm\pi$ კუთხის შესაბამის მდგომარეობაში და ეს მოხდება როცა ენერგია იქნება $E' = \frac{g}{l}$. წერტილი $x = \pm\pi$, როცა ქანქარა ყირამალა დგას და $y = 0$ ქანქარას არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა უკავია. შემდგომ, დამაბრუნებელი ძალის პერიოდულობის გამო, ფაზური პორტრეტი პერიოდულად უნდა გამეორდეს $(0;0)$ წერტილიდან მარჯვნივ და მარცხნივ 2π პერიოდით. ამგვარად, $x = \pm 2\pi n$ წერტილები მდგრადი წონასწორობის წერტილებია და $x = \pm(2n + 1)\pi$ არამდგრადი წონასწორობის წერტილებია. უნდა აღინიშნოს, რომ

არამდგრადი წონასწორობის წერტილებში ადგილი აქვს რხევითი მოძრაობის გადასვლას ბრუნვით მოძრაობაში. რაც გამოიხატება ფაზური ტრაექტორიების გაშლაში. მთლიანად, მათემატიკური ქანქარის ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ. 11.7

სეპარატრისები



ნახ.11.7.მათემატიკური ქანქარის ფაზური პორტრეტი

ფაზური ტრაექტორიების წყვილს, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფენ რხევითი და ბრუნვითი მოძრაობის შესაბამის ტრაექტორიებს და იკვეთებიან არამდგრადი წონასწორობის შესაბამის წერტილებში - სეპარატრისები ეწოდებათ. ფაზურ სიბრტყეზე, სეპარატრისის გასწვრივ მოძრაობას შეესაბამება მოძრაობა უსასრულო პერიოდით. სეპარატრისები გამოყოფენ, სისტემის მუშაობის თვისობრივად სხვადასხვა რეჟიმებს. ასე, რომ ისინი ბიფურკაციის მრუდებს წარმოადგენენ.

11.3. კონსერვატული სისტემების ფაზური პორტრეტი

წინა განხილულ მაგალითებში არსებობდა მუდმივი პირველი ინტეგრალი სისტემის მექანიკური ენერჯიის სახით, რაც გვიმარტივებდა სისტემისათვის გლობალური ფაზური პორტრეტის აგებას.

ისეთ სისტემებს, რომლებისთვისაც ენერგია წარმოადგენს პირველ ინტეგრალს - კონსერვატიული სისტემები ეწოდებათ.

იმ შემთხვევებში, როდესაც სისტემის მთლიანი ენერგია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (ტრადიციული ფორმით), როგორც კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი, ფაზური ტრაექტორიების სტრუქტურა (რომლებსაც ამ შემთხვევაში დონის წირებს უწოდებენ) განსაკუთრებულად მარტივდება. ასეთი სისტემებისათვის, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$E = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x), \quad (11.39)$$

სადაც, „პოტენციალური $V(x)$ ფუნქცია“, როგორც წესი x ცვლადის არაწრფივი ფუნქციაა. მაგალითად, მათემატიკური ქანქარისათვის $V(x) = -\frac{g}{l} \cos x$; ხოლო კუბური ოსცილატორისათვის $V(x) = ax^2 + bx^4$. თუ, გავითვალისწინებთ, რომ დინამიკის განტოლება ჩაწერილი სახით

$$\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0, \quad (11.40)$$

შეესაბამება ნაწილაკის მოძრაობას პოტენციალურ ორმოში $V(x)$, (სადაც, სრულებით არაა სავალდებულო, რომ ეს განტოლება მექანიკურ პროცესებს აღწერდეს), ფიზიკური ინტუიციით ადვილად ავაგებთ შესაბამის დონის წირებს.

მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემა (წრფივი ოსცილატორი).

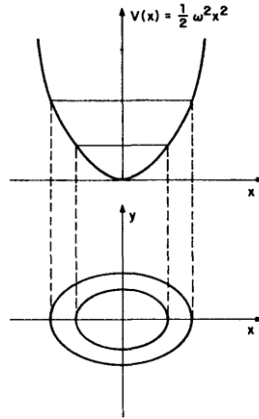
მოძრაობის განტოლება

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

გადავწეროთ (11.40) სახით

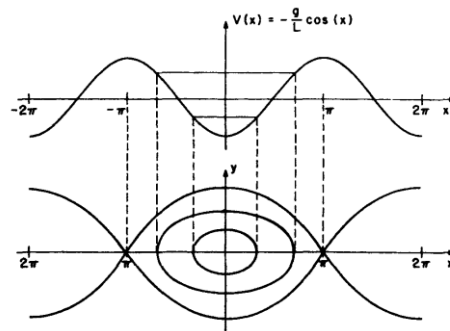
$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = 0.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში $V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2$. ავსოთ ამ კვადრატული ფუნქციის შესაბამისი დონის წირები და შესაბამისი ფაზური პორტრეტი ნახ.11.8.



ნახ.11.8 თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის (კონსერვატიული სისტემა) ფაზური პორტრეტის აგება

2. მათემატიკური ქანქარის შემთხვევაში, გვაქვს პერიოდული პოტენციალური ორმო $V(x) = -\frac{g}{l} \cos x$. შესაბამის ფაზურ პორტრეტსაც ადვილად ავაგებთ ანალოგიურად, ნახ.11.9.

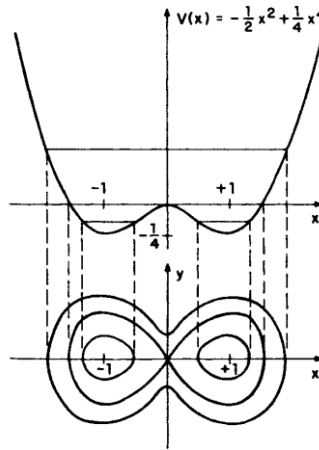


ნახ.11.9 მათემატიკური ქანქარას (კონსერვატიული სისტემის) ფაზური პორტრეტის აგება პოტენციალური ორმოს გრაფიკის საშუალებით

3. კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი განვიხილოთ კუბური ოსცილატორი რომლის დინამიკის განტოლებას აქვს სახე $\ddot{x} - x + x^3 = 0$,

მაშინ შესაბამის პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე:

$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$. პოტენციალური ფუნქციის გრაფიკის მეშვეობით ადვილად ავაგებთ სისტემის ფაზურ პორტრეტსაც ნახ.11.10

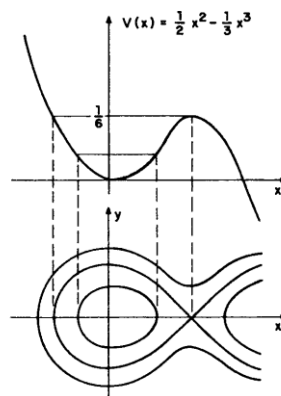


ნახ.11.10 კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

4. კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

განვიხილოთ სისტემა

$\ddot{x} + x - x^2 = 0$, ამ სისტემის პოტენციალურ ფუნქციას ექნება სახე: $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$. ამ პოტენციალური ფუნქციის დონის წირები საშუალებას გვაძლევენ ავაგოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი ნახ.11.11



ნახ.11.11 კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

11.4. სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი, განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა

გლობალური ფაზური პორტრეტის აგება, განსაკუთრებულად მარტივია ერთგანზომილებიანი კონსერვატიული სისტემებისათვის. მნიშვნელოვანი როლი უკავიათ განსაკუთრებულ (წონასწორობის) წერტილებს, რომლებიც ხასიათდებიან ცნობილი ლოკალური ყოფაქცევით: მდგრადი წონასწორობის წერტილების გარშემო წარმოიქმნიებიან ფაზური, შეკრული მრუდები; ხოლო, არამდგრადი წერტილების გარშემო წარმოიქმნიებიან ჰიპერბოლური ფაზური წირები. არაკონსერვატიული სისტემების შემთხვევაში, თუ, ზუსტი ამონახსნი არაა ცნობილი, ფაზური პორტრეტის შედგენა მეტად რთული პროცესია. თუმცა, ყოველთვის შესაძლებელია მიახლოებითი ლოკალური ფაზური პორტრეტის შედგენა, თუ, განვსაზღვრავთ წონასწორობის წერტილებს (რომლებსაც, შემდგომში უძრავ წერტილებს ვუწოდებთ) მათ გარშემო გამოვხაზავთ შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს. უძრავი წერტილები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფაზური ტრაექტორიების მაორგანიზებელი ფაქტორები. ასე, რომ თუ, ვიპოვით უძრავ წერტილებს და გამოვიკვლევთ მათი მდგრადობის საკითხს, მაშინ შესაძლებელი ხდება ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.

განვიხილოთ ზოგადი სახის, მეორე რიგის სისტემები:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (11.41)$$

$$\dot{y} = g(x, y), \quad (11.42)$$

სადაც f და g ნებისმიერი ორი ცვლადის, საზოგადოდ, არაწრფივი გლუვი ფუნქციებია.

უძრავი ეწოდებათ ისეთ (x_0, y_0) წერტილებს, რომელთათვისაც ფაზური ნაკადი სტაციონარულია (ანუ, $x = y = 0$):

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad (11.43)$$

$$g(x_0, y_0) = 0. \quad (11.44)$$

P.S. მაშასადამე, უძრავი წერტილების საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა (11.43),(11.44). ამ განტოლებათა სისტემას, საზოგადოდ, შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რაოდენობის ამონახსნი.

მას შემდეგ, რაც ვიპოვით ყველა უძრავ წერტილს, უნდა მოვახდინოთ თითოეული მათგანის გამოკვლევა მდგრადობაზე.

სისტემის უძრავი (x_0, y_0) წერტილის მდგრადობაზე გამოკვლევისათვის, უნდა შევისწავლოთ სისტემის ყოფაქცევა, ამ წერტილის მცირე მიდამოში $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$. ამისათვის f და g ფუნქციები გავშალოთ ამ ნაზრდების მიმართ ტეილორის მწკრივებად, უძრავი წერტილის მიდამოში

$$\delta \dot{x} = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (11.45)$$

$$\delta \dot{y} = g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (11.46)$$

თუ, შემოვიფარგლებით, მხოლოდ პირველი რიგის წევრებით, მაშინ არაწრფივი სისტემა (11.45),(11.46), შეგვიძლია გადავწეროთ წრფივი მიახლოების სახით (11.47)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (11.47)$$

სადაც 2×2 მატრიცას, რომელსაც ავღნიშნავთ A ასოთი, მდგრადობის მატრიცას უწოდებენ. უძრავი წერტილების მდგრადობის შესასწავლი, (11.47) პირველი რიგის, წრფივ, დიფერენციალურ განტოლებათა

სისტემა ადვილად ზოგადდება იმ შემთხვევისათვის, როცა ცვლადთა რაოდენობაა n და მოცემული გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (11.48)$$

უძრავი წერტილების მდგრადობის პირობების ჩამოყალიბება ადვილად ზოგადდება (11.47) სისტემიდან (11.48) სისტემისათვის, საკუთრივი რიცხვების ენაზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $\delta X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$; ხოლო ორი საკუთრივი ვექტორია D_1 და D_2 , რომლებიც შეესაბამებიან, შესაბამისად, ორ საკუთრივ λ_1 და λ_2 რიცხვს. მაშინ (11.47) სისტემის ზოგადი ამონახსნი, როგორც ვიცით, მოიცემა ფორმულით

$$\delta X = c_1 D_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 D_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (11.49)$$

სადაც c_1 და c_2 ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, ხოლო საკუთრივი რიცხვები წარმოადგენენ მდგრადობის მატრიცის მახასიათებელი (11.50) განტოლების ფესვებს

$$\det|A - \lambda I| = 0, \quad (11.50)$$

I - ერთეულოვანი მატრიცაა. ჩვენი წინა მსჯელობებიდან ცხადია, რომ თუ, λ_1 და λ_2 საკუთრივი რიცხვები წმინდა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მახლობელი წერტილებიდან დაწყებული ლოკალური ფაზური ტრაექტორიები, წარმოადგენენ ელიფსებს და შეესაბამებიან მდგრად უძრავ წერტილებს. ხოლო, თუ საკუთრივ რიცხვებს გააჩნიათ არანულოვანი ნამდვილი ნაწილი, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მდგრადობა-არამდგრადობის საკითხი დამოკიდებულია მის ნიშანზე. აქ ბევრი სხვადასხვა შემთხვევაა და ჩვენ მათ შევისწავლით, მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს D_1 და D_2 საკუთრივი ვექტორების წვლილიც.

მათი მიმართულებები მიუთითებენ, ლოკალური ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებზე.

11.4.1. უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია

1. თუ, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, მაშინ გვაქვს *მდგრადი კვანძი* ნახ.11.1a, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხრიდან ჩაქრობადია უძრავი წერტილისაკენ;

2. თუ, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, მაშინ - *არამდგრადი კვანძი* ნახ.11.1b, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხარეს ექსპონენციალურად იზრდება, უძრავი წერტილიდან გამოსვლისას;

3. თუ, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, მაშინ - *უნაგირა(ჰიპერბოლური) წერტილია*. ექსპონენციალური ზრდა გვაქვს ერთ მხარეს და ექსპონენციალური კლება მეორე მხარეს ნახ. 11.1.б. სწორედ ასეთ ტიპს მიეკუთვნებიან მათემატიკური ქანქარასა და ზოგიერთი სხვა, არაწრფივი ოსცილატორის განხილული, არამდგრადი უძრავი წერტილები. უძრავ წერტილში შემავალ და გამომავალ მიმართულებებს, ხშირად, მდგრად და შესაბამისად, არამდგრად მრავალსახეობებს (სეპარატრისები) უწოდებენ;

4. თუ, $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$), მაშინ - *მდგრადი ფოკუსია*. ნაკადი ეხვევა და შედის უძრავ წერტილში ნახ. 11.2.a;

5. თუ, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$), მაშინ - *არამდგრადი ფოკუსია*. ასეთ შემთხვევაში საკუთრივი რიცხვის ნამდვილი ნაწილი დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ სპირალი გამოდის უძრავი წერტილიდან და თანდათან იხსნება ნახ.11.2.б;

6. თუ, $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$, ($\alpha, \beta > 0$), მაშინ - მდგრადი ელიფსური (ცენტრი) წერტილი. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს ელიფსური ფაზური ტრაექტორიები უძრავი წერტილის გარშემო.

P.S. ზოგჯერ, მაგალითად 4,5,6 შემთხვევებში ისმის კითხვა, თუ საითაა მიმართული ფაზური ტრაექტორიები, საათის ისრის მიმართულებით, თუ მის საწინააღმდეგოდ. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მოცემული უძრავი წერტილისათვის, უნდა განვიხილოთ გაწრფივებული (11.47) განტოლება. დავუშვათ, რომ $\delta y = 0 \wedge \delta x > 0$. თუ, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ $\delta \dot{y} < 0$, მაშინ „გვაქვს დაღმასვლითი მოძრაობა“, ანუ ლოკალურად, ფაზური ტრაექტორიები მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო თუ, $\delta \dot{y} > 0$, მაშინ გვაქვს „აღმასვლითი მოძრაობა“ და მაშასადამე, საათის ისრის საწინააღმდეგოდ.

აქამდე განვიხილავდით არაგადაგვარებული λ_1 და λ_2 ფესვების შემთხვევებს.

თუ, ფესვები გადაგვარებულია, მაშინ (11.47) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით

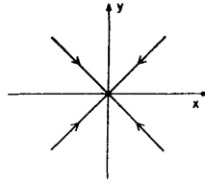
$$\delta X = (c_1 D_1 + c_2 (D_2 + D_1 t)) e^{\lambda t}. \quad (11.51)$$

ასეთ შემთხვევებში, უძრავი წერტილის ტიპი, ცხადია, რომ დამოკიდებულია D_1 და D_2 საკუთრივი ვექტორების ნიშანზე და ტიპზე.

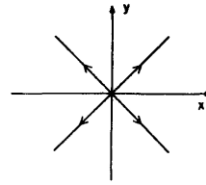
7. თუ, $D_2 = (0,0) \wedge (\forall D_1)$, მაშინ ნაკადის წირები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ ურთიერთმკვეთ წრფეებს, რომლებიც ქმნიან:

ა) მდგრად ვარსკვლავს, თუ $\lambda < 0$, ნახ.11.12ა;

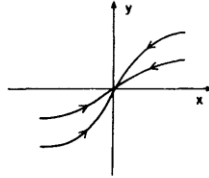
ბ) არამდგრად ვარსკვლავს, თუ $\lambda > 0$, ნახ.11.12ბ.



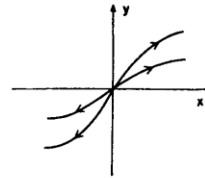
(a)



(b)



(c)



(d)

ნახ.11.12.ლოკალური ფაზური ნაკადები: a)მდგრადი ვარსკვლავი;
 b)არამდგრადი ვარსკვლავი; c)მდგრადი არასაკუთრივი კვანძი;
 d)არამდგრადი არასაკუთრივი კვანძი

8. თუ, საკუთრივი ვექტორი $D_2 \neq (0,0)$, მაშინ ფაზური ტრაექტორიები იქნებიან მრუდი წირები და წარმოქმნიან:

- a)მდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ $\lambda < 0$, ნახ.11.12.c;
- b)არამდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ $\lambda > 0$, ნახ.11.12.d

11.4.2. უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები

ეხლა განვიხილოთ ზემოთმოცემული მეთოდების გამოყენება ჩვენს ნაცნობ რხევით სისტემებზე.

a) დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა

ასეთ სისტემას, აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი $(x_0, y_0) = (0,0)$. სისტემის შესაბამისი მოდელი წრფივია და გაწრფივება აღარ ჭირდება

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (11.52)$$

მდგრადობის მატრიცაა $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix}$. მისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}$ და $\lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}$. იმის მიხედვით, თუ, როგორია ფესქვემა გამოსახულება, გვაქვს სხვადასხვა ვარიანტები:

- თუ, $\lambda^2 > 4\omega^2$, მაშინ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, შესაბამისად წერტილი $(0,0)$ მდგრადი კვანძია;
- თუ, $\lambda^2 < 4\omega^2$, მაშინ $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\frac{\lambda}{2} + i\frac{\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}}{2}$ და შესაბამისად გვაქვს მდგრადი სპირალი(ფოკუსი);თუ (11.52) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $\delta y = 0 \wedge \delta x > 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ $\delta \dot{y} < 0$, აქედან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობა წარმოებს საათის ისრის მიმართულებით ნახ.11.5;
- თუ, $\lambda^2 = 4\omega^2$, მაშინ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$, შესაბამისად, ამ შემთხვევაში, გვაქვს არასაკუთრივი მდგრადი კვანძი.

ბ) მეორე მაგალითია თავისუფალი მათემატიკური ქანქარა

ამ სისტემას აქვს უძრავი წერტილების უსასრულო რაოდენობა $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{N}$ და გაწრვივებულ მოდელს აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (11.53)$$

საკუთრივი რიცხვები იქნება $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l} \cos x_n}$. როცა $x_n = 2\pi n$, მაშინ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს მდგრადი, ელიფსური (ცენტრი) უძრავი წერტილები, ხოლო, როცა $x_n = (2n + 1)\pi$, მაშინ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$, რაც შეესაბამება ჰიპერბოლურ (უნაგირა) არამდგრად უძრავ წერტილებს.

ბ) ეხლა განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარის თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემა

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$\dot{x} = y, \quad (11.54)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x - \lambda y. \quad (11.55)$$

ამ სისტემას იგივე $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{N}$ უძრავ წერტილთა სისტემა აქვს, რაც თავისუფალ მათემატიკურ ქანქარას. მაგრამ შესაბამის გაწრფივებულ სისტემას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}. \quad (11.56)$$

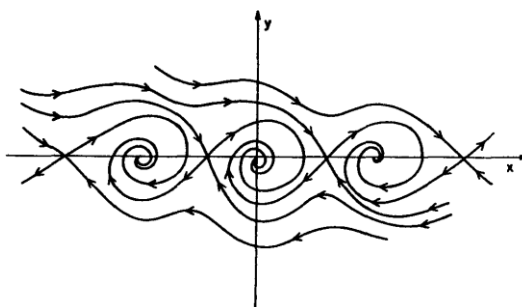
სისტემის მდგრადობის მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{l} \cos x_n}.$$

უძრავ წერტილებში $(x_n, y_n) = (\pm(2n+1)\pi, 0)$ კვლავ აქვს ადგილი უტოლობებს $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, რაც იმას ნიშნავს რომ ეს წერტილები, ჰიპერბოლური (უნაგირა) ტიპს განეკუთვნებიან. ხოლო წერტილებში $(x_n, y_n) = (\pm 2\pi n, 0)$ კი ადგილი აქვს რამოდენიმე შემთხვევას:

- $\lambda^2 < \frac{4g}{l}$, $\lambda_1 \wedge \lambda_2$ კომპლექსურად შეუღლებული ფესვებია უარყოფითი ნამდვილი ნაწილით, მაშინ გვაქვს მდგრადი ფოკუსი მბრუნავი საათის ისრის მიმართულებით ნახ.11.13;
- $\lambda^2 > \frac{4g}{l}$, რასაც მივყავართ უტოლობებამდე $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს მდგრადი კვანძი;
- $\lambda^2 = \frac{4g}{l}$, მაშინ ჩვენ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, როცა $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$, რაც შეესაბამება მდგრად არასაკუთრივ კვანძს.

რადგან ამ შემთხვევაში, ენერგია არაა მუდმივი, დონის წირებს ზუსტად ვერ დავხაზავთ, როცა არ ვიცით ზუსტი ამონახსნი, თუმცა, უძრავი წერტილების იდენტიფიკაცია და ფაზური ტრაექტორიების ლოკალური ანალიზი, საშუალებას გვაძლევს, მიახლოებით ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.



ნახ.11.13. ჩაქრობადი(დემპფირებული) მათემატიკური ქანქარას ფაზური პორტრეტი იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda^2 < \frac{4g}{l}$

რ) განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელი

ეს მოდელი პირველად ააგო ვოლტერამ პოპულაციური დინამიკის შესასწავლად. განვიხილოთ ერთ-ერთი, ამ ტიპის მოდელებიდან

$$\dot{x} = x - xy, \tag{11.57}$$

$$\dot{y} = -y + xy. \tag{11.58}$$

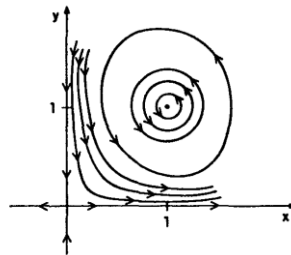
სადაც x შეიძლება აღნიშნავდეს, მაგალითად კურდღლების პოპულაციას (კურდღლების ზუსტ რაოდენობას პოპულაციაში), ხოლო y მელიების პოპულაციას. შესაძლოა ტრივიალური შემთხვევა, როცა $y = 0$, $x > 0$, მაშინ კურდღლების პოპულაცია უსასრულოდ იზრდება, რადგან მელიები არ არიან. შებრუნებულ შემთხვევაში, როცა $x = 0$, და $y > 0$, მელიები განწირული არიან შიმშილით სიკვდილისათვის, რადგან არ არიან მათი საკვები კურდღლები. ორივე პოპულაციის თანაცხოვრებისათვის, არსებობს ბალანსის შესაძლებლობა, რადგან მელიები ამცირებენ კურდღლების პოპულაციას და თუ ბევრს შეჭამენ თვითონ კი გამრავლდებიან, მაგრამ შემდგომში საჭმელი აღარ ეყოფათ

და მათი პოპულაციაც შემცირდება. (11.57),(11.58) განტოლებათა სისტემა უმარტივესია და მისი უფრო დაზუსტება მარტივია იმის გათვალისწინებით, რომ კურდღლების კვების არეალიც შეზღუდულია, არსებობს ავადმყოფობა, უჭკუო საქციელი, კურდღლების მიერ კურდღლების დახოცვა . . .

სისტემას აქვს ორი უძრავი წერტილი $(x_1, y_1) = (0,0)$ და $(x_2, y_2) = (1,1)$. გაწრფივებულ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y_i & -x_i \\ y_i & -1 + x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,2} \quad (11.59)$$

პირველი უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda = \pm 1$, რაც იმის მიმანიშნებელია რომ $(x_1, y_1) = (0,0)$ ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილია. ხოლო მეორე უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია $\lambda = \pm i$, რაც შეესაბამება ელიფსურ წერტილს. შესაბამის მიახლოებით ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ.11.14



ნახ.11.14.მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელის ფაზური პორტრეტი

P.S. უნდა აღინიშნოს, რომ გაწრფივებული მოდელით მდგრადობის შესწავლა, ყოველთვის არ იძლევა რეალურ შედეგს არაწრფივი სისტემებისათვის.

11.4.3. ზღვართი ციკლები

ზღვართი ციკლი, წარმოადგენს ფაზური ტრაექტორიების განსაკუთრებულ ტიპს, რომელსაც ჩვენ ვერ ავაგებთ გაწრფივებული ანალიზის მეშვეობით. ყველაზე უფრო პოპულარულია ზღვართი ციკლი, რომელიც აქვს ვან-დერ-პოლის ცნობილ რხევით სისტემას:

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (11.60)$$

გაწრფივებული, პირველი რიგის მიახლოების დონეზე ჩატარებული მდგრადობის ანალიზი ამ სისტემისათვის

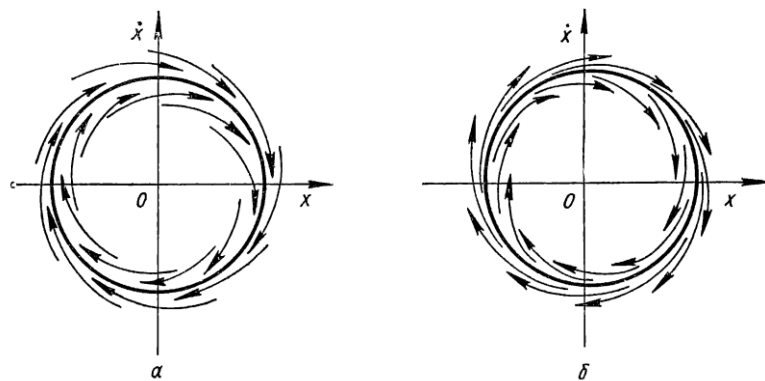
$$\dot{x} = y, \quad (11.61)$$

$$\dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - \omega^2 x, \quad (11.62)$$

გვიჩვენებს, რომ სისტემას აქვს უძრავი წერტილი $x = y = 0$, რომელიც წარმოადგენს არამდგრად კვანძს, თუ $\lambda^2 > 4\omega^2$ და წარმოადგენს არამდგრად ფოკუსს, თუ $\lambda^2 < 4\omega^2$. განვიხილოთ აქედან მეორე შემთხვევა. რადგან (11.62) განტოლების მარჯვენა ნაწილში, x და y ცვლადების ზრდისას, დომინირებს არაწრფივი წევრი ($\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} \dot{y} = -\lambda x^2 y$), შეგვიძლია დავუშვათ, რომ პირიქით, უძრავი წერტილისაკენ მიახლოებისას, ხდება არაწრფივი წევრის ჩაქრობა. ასე, რომ უძრავი წერტილიდან მოშორებით, ხდება ფაზური ტრაექტორიების მოძრაობა პერიფერიიდან ცენტრისაკენ. ამონახსნის უწყვეტობა ითხოვს, რომ არსებობდეს ამონახსნი მათ შორისაც. ეს ამონახსნი არის ზღვართი ციკლი, რომელიც წარმოადგენს უძრავი წერტილის მომცველ შეკრულ მრუდს. სისტემის სხვა ამონახსნები, რომლებიც გამოდიან ამ მრუდის გარედან, ასევე, შიგნიდან მიიზიდებიან ზღვართი ციკლის მიერ. მისკენ მიისწრაფიან, მაგრამ არასოდეს არ კვეთენ. ამ სისტემის ზუსტი ამონახსნი ცნობილი არ არის, თუმცა, უბრალო ფიზიკურ მსჯელობას მივყავართ ზღვართი ციკლამდე. მისი ზუსტი გეომეტრიული ფორმის

დადგენა შესაძლებელია მხოლოდ სისტემის მიახლოებითი ამოხსნით სხვადასხვა საწყისი პირობების შემთხვევაში.

საზოგადოდ, ზღვართი ციკლი შეიძლება იყოს მდგრადი (როდესაც შიგნითაც და გარეთაც დაწყებული ფაზური ტრაექტორიები ზღვართი ციკლისაკენ მიისწრაფიან) ნახ.11.15a, ან არამდგრადი, როცა ზღვართი ციკლის მახლობლობაში დაწყებული ტრაექტორიები თანდათან სცილდებიან მას, ნახ. 11.15b.



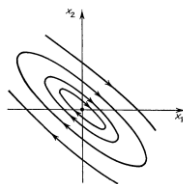
ნახ. 11.15 ზღვართი ციკლის სქემატური ნახაზები: a) მდგრადი ზღვართი ციკლი; b) არამდგრადი ზღვართი ციკლი

ამოცანები და სავარჯიშოები:

1. შეადგინეთ მოცემული სისტემების ფაზური პორტრეტები და პასუხი დაასაბუთეთ:

a)

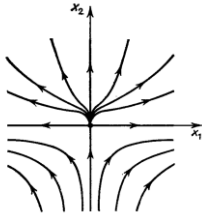
$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2.$$



პასუხი:

b)

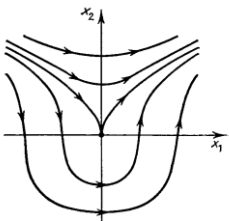
$$\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2^2.$$



პასუხი:

B)

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \dot{x}_2 = x_1.$$



პასუხი:

2. ჩამოაყალიბეთ უძრავი წერტილების მდგრადობის გამოკვლევის ალგორითმი და განიხილეთ უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია;
3. შეადგინეთ კონსერვატიული სისტემის მაგალითები, ააგეთ შესაბამისი პოტენციალური ორმო და ფაზური პორტრეტი.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი

- Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
 4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
 5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
 - 6.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
 - 7.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
 - 8.Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
 - 9.Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989
 - 10.Яковенко Г.Н.Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
 - 11.Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991

თავი 12. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები

სივრცეში, მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება \vec{r} რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს $\vec{r}(x, y, z)$. ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$ სიჩქარე და $\vec{W} = \dot{\vec{v}}(t)$ აჩქარება. თუ, მოცემული გვაქვს n -მატერი-ალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვჭირდება n - ცალი რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე, $3n$ -კოორდინატი.

განსაზღვრება: იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას - მისი თავისუფლების ხარისხი ეწოდება.

n - მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სამგანზომილებიან სივრცეში, სისტემის თავისუფლების ხარისხი $3n$ - ის ტოლია.

P.S. ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი, რომ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები იყვნენ.

განსაზღვრება: ნებისმიერ q_1, q_2, \dots, q_n პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას, n - თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებს უწოდებენ, ხოლო მათი, დროით წარმოებულების ერთობლიობას: \dot{q}_i , განზოგადებულ სიჩქარეებს.

12.1. ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი

სისტემის მხოლოდ კონფიგურაციის ცოდნა, არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება სისტემას დროის სხვა მომენტებში. როგორც ექსპერიმენტებით იქნა დადგენილი, მექანიკური

სისტემის მდგომარეობის საპოვნელად დროის ნებისმიერ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ სისტემის საწყისი კონფიგურაცია $q_i(0)$ და შემადგენელი მატერიალური წერტილების საწყისი $\dot{q}_i(0)$ სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი ფიზიკური პარამეტრის ცოდნა, კლასიკურ მექანიკაში, საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ \ddot{q}_i აჩქარებებიც დროის ნებისმიერ მომენტში.

თუ, სისტემა გადაადგილდება $q_i(t_1)$ მდგომარეობიდან $q_i(t_2)$ მდგომარეობაში, მაშინ ჭეშმარიტი მოძრაობის საპოვნელად, უნდა ვისარგებლოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპით.

ეს პრინციპი მოითხოვს რომ, თუ, სისტემა გადაადგილდება $q_i(t_1)$ მდგომარეობიდან, რომელიც დროის t_1 მომენტში ეკავა, ახალ, $q_i(t_2)$ მდგომარეობაში დროის t_2 მომენტისათვის, მაშინ ინტეგრალს ამ დროის მომენტებს შორის მოცემული $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ ფუნქციიდან, რომელსაც **ლაგრანჟიანს** უწოდებენ, იყოს ექსტრემალური, ანუ, ნულს უნდა უდრიდეს ქმედების W ინტეგრალის პირველი ვარიაცია $\delta W = 0$.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (12.1)$$

ეხლა, ჰამილტონის პრინციპზე დაყრდნობით, გამოვიყვანოთ მოძრაობის განტოლება.

სიმარტივისათვის, ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთის ტოლია. ასე, რომ საპოვნელია $q(t)$ ფუნქცია, რომელიც ექსტრემუმს მიაჩქებს W ქმედების ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან და სისტემას გადაიყვანს $q(t_1)$ მდგომარეობიდან, რომელიც დროის t_1 მომენტში ეკავა, ახალ, $q(t_2)$ მდგომარეობაში დროის t_2 მომენტისათვის .

ვთქვათ $q(t)$ ჩვენი საძებნი ფუნქციაა. მივცეთ მას მცირე $\delta q(t)$ ნაზრდი-ვარიაცია, მაშინ გვექნება ახალი $q(t) + \delta q(t)$ ფუნქცია. რადგან ამ ფუნქციამ უნდა გაიაროს $q(t_1)$ და $q(t_2)$ წერტილებში, ცხადია რომ

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (12.2)$$

შესანიშნავია ის ფაქტი, რომ ჩვენ ვეძებთ გადაადგილების ვარიაციას და თვითონ გადაადგილება ჯერ არ ვიცით. ქმედების ინტეგრალის ექსტრემუმის საპოვნელად, მისი პირველი ვარიაცია ნულს უნდა გავუტოლოთ

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (12.3)$$

თუ, პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გავშლით ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნებთ, მხოლოდ წრფივ წევრებს, გვექნება

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (12.4)$$

სადაც $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$, ამ ფაქტის გათვალისწინებით და (12.4) ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (12.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (12.2) სასაზღვრო პირობებს გადაადგილების პირველი ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ (12.5) ფორმულაში პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშინ ცხადია, რომ მეორე ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაც უნდა ნულის ტოლი იყოს. ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის განტოლება ლაგრანჟის ფორმით

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (12.6)$$

n თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში q_1, q_2, \dots, q_n ცვლადებისათვის, ცალ-ცალკე უნდა შევადგინოთ ვარიაციები $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$. მაშინ, ანალოგიურ პროცედურას, მივყავართ ლაგრანჟის ცნობილ განტოლებებამდე

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12.7)$$

თუ, მოცემული სისტემისათვის ცნობილია ლაგრანჟიანის სახე, მაშინ (12.7) განტოლებები წარმოადგენენ მოძრაობის განტოლებებს და ცნობილი საწყისი პირობების $q_i(0)$; $\dot{q}_i(0)$ შემთხვევაში ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის ევოლუციას.

ლ.ლანდაუსა და ე.ლიფშიცის წიგნში დასაბუთებულია, რომ თავისუფალი, არაურთიერთქმედი ნაწილაკებისათვის, ერთგვაროვან, იზოტროპულ სივრცეში, ლაგრანჟიანი პირდაპირპროპორციულია განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატისა და თუ, პროპორციულობის კოეფიციენტად მასის ნახევარს ავიღებთ, მივიღებთ რომ ლაგრანჟიანი სისტემის კინეტიკური ენერჯიის ტოლია

$$L = T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2}. \quad (12.8)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მატერიალური ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ გარკვეული კანონით, რომელიც მოიცემა პოტენციალური ენერჯიის $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ ფუნქციით, როგორც ექსპერიმენტებმა აჩვენეს, ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (12.9)$$

პოტენციალური ენერჯიის ფუნქცია ისეთია, რომ სისტემის თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (12.10)$$

როცა, პოტენციალური ენერჯია არაა დამოკიდებული სიჩქარეებზე, (12.7) განტოლებებიდან (12.9) და (12.10) ფორმულების გათვალისწინებით, მიიღება ნიუტონის დინამიკის ცნობილი განტოლებები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის

$$m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (12.11)$$

12.2. ლაგრანჟიანის თვისებები

განვიხილოთ, ურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემის ლაგრანჟიანი. მისი სრული წარმოებული იქნება

$$\frac{d}{dt}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12.12)$$

ასე, რომ

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12.13)$$

ა) ჩაკეტილი სისტემების შემთხვევაში, ანუ, როდესაც ნაწილაკები არ ურთიერთქმედებენ გარე ძალებთან, ლაგრანჟიანი, არაა დამოკიდებული დროზე ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$). ამიტომ, ასეთი სისტემის ენერგია მუდმივი სიდიდეა (სისტემა კონსერვატულია)

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const}. \quad (12.14)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (12.9) ტოლობას, მივიღებთ

$$E = T + V. \quad (12.15)$$

ბ) ანუ, ჩაკეტილი სისტემის მთლიანი მექანიკური ენერგია, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამის ტოლია.

თუ, გავითვალისწინებთ ლაგრანჟიანის განსაზღვრებას, შეგვიძლია განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები ფორმულით

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (12.16)$$

ასევე, განისაზღვრება განზოგადებული იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (12.17)$$

რომელთათვისაც ტოლობა $p_i = m_i \dot{q}_i$ სრულდება, მხოლოდ დეკარტულ კოორდინატებში. ამ ორი განსაზღვრების შემდეგ, ლაგრანჟის განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (12.18)$$

ცხადია, რომ თუ, რომელიმე განზოგადებული q_k კოორდინატა, არ შედის ლაგრანჟიანში, მაშინ მისი შესაბამისი განზოგადებული ძალაც არ შედის (12.18) განტოლებათა სისტემაში და მაშასადამე, შესაბამისი იმპულსი $p_k = const$.

განსაზღვრება: იმ კოორდინატებს, რომლებიც არ შედიან ლაგრანჟიანში, ციკლურ კოორდინატებს უწოდებენ.

ცხადია, რომ ციკლური კოორდინატების არსებობა, გვიმარტივებს დინამიკის განტოლებების ამოხსნას. ზემოთმოყვანილი, იმპულსის (12.17) განსაზღვრის გათვალისწინებით, მექანიკური სისტემის ენერჯის (12.14) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (12.19)$$

თუ, სისტემა ჩაკეტილია და სივრცე ერთგვაროვანია, მაშინ სისტემის შიგნით ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია $\sum_i F_i = 0$. ამ კანონს ჩვენ ვიცნობთ ორი ძალისათვის ნიუტონის მესამე კანონის სახელწოდებით. ამ შემთხვევაში, ჩვენ მივიღებთ (12.18) ტოლობის გათვალისწინებით, რომ

$$\sum_i p_i = 0. \quad (12.20)$$

განუ, ჩაკეტილი სისტემის იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

P.S. როგორც ვხედავთ, ჩაკეტილი სისტემისათვის, სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების თვისებიდან, გამომდინარეობს ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონები. ეს შედეგები არიან, უფრო ზოგადი, ნიოტერის თეორემის კერძო შემთხვევები. რომელიც ამბობს რომ ლაგრანჟიანის გარდაქმნის ყოველი ჯგუფისათვის, დამახასიათებელია ამ გარდაქმნასთან დაკავშირებული ინვარიანტები. სივრცის ტრანსლაციის ჯგუფები გვამღებენ ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონებს; ბრუნვითი მოძრაობის ინვარიანტები - იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს . . .

12.3. განზოგადებული იმპულსის თვისებები

განზოგადებული კოორდინატები და სიჩქარეები ლაგრანჟის ფორმალიზმში, განიხილებიან, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები. ამას გარდა, ჩვენ განვიხილეთ განზოგადებული იმპულსის ცნებაც. მისი ღრმა და არატრივიალური ხასიათი ნათლად ჩანს ჰამილტონური სისტემების ფაზური სივრცის გეომეტრიის განხილვისას.

იმპულსების კოვარიანტული ხასიათის ყველაზე უფრო ნათელი გამოვლინებაა, ის ფაქტი, რომ შესაძლებელია მათი წარმოდგენა, სკალარული ველის გრადიენტულ ველად. ამის დასამტკიცებლად, დავუბრუნდეთ ქმედების ინტეგრალს. მოცემული ექსტრემალური წირისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ლაგრანჟის განტოლებებს, განვიხილოთ ახალი ექსტრემალური ამოცანა. სხვადასხვა ექსტრემალეებისათვის, რომელთაც საერთო საწყისი წერტილი აქვთ. ბოლო წერტილს კი ვაძლევთ მცირე ვარიაციას და ვხსნით იგივე ვარიაციულ ამოცანას

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q_{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (12.21)$$

რადგან ვხსნით იგივე ამოცანას, ინტეგრალი ნულის ტოლია და (12.21) განტოლებაში გვრჩება მხოლოდ საზღვრის წერტილებში მნიშვნელობები. საწყისი წერტილი დაფიქსირებულია $\delta q(t_1) = 0$. აღვნიშნოთ $\delta q(t_2)$, როგორც δq და გავითვალისწინოთ, რომ $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. მაშინ (12.21) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $\delta W = p \delta q$, ან სხვანაირად, n თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის გვექნება

$$\delta W = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (12.22)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (12.23)$$

მაშასადამე, იმპულსები წარმოადგენენ ქმედების სკალარული ველის გრადიენტს, მოცემული ექსტრემალის გასწვრივ, დროის მოცემულ მომენტში.

რაც შეეხებათ, განზოგადებულ სიჩქარეებს მათი ველი, საზოგადოდ, არაა კოვარიანტული, ანუ, მათი წარმოდგენა გრადიენტულ ველად საზოგადოდ შეუძლებელია.

12.4. ჰამილტონის ფორმალიზმი

ჰამილტონის მექანიკაში, მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული q_i კოორდინატებისა და განზოგადებული p_i იმპულსების ცვლადებში. თუმცა, ფიზიკური შინაარსის მიხედვით, ჰამილტონური ფორმალიზმი, არ განსხვავდება ლაგრანჟის ფორმალიზმისაგან, მაგრამ უფრო ესადაგება კვანტური მექანიკის, სტატისტიკური მექანიკისა და შემფოთებათა თეორიის გადმოცემის სილამაზეს. კერძოდ, ჰამილტონური ფაზური სივრცის ცნება, გაცილებით ამარტივებს ჰამილტონური სისტემების ინტეგრებადობის საკითხის შესწავლასა და იმ ქაოსური რეჟიმების აღწერას, რომლებიც შეიძლება არსებობდეს არაინტეგრებად სისტემებში.

ლაგრანჟის $(q_i; \dot{q}_i)$ ცვლადებიდან, ჰამილტონის $(p_i; q_i)$ ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება ლეჟანდრის გარდაქმნით

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (12.24)$$

აქ, $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ არიან n განზომილებიანი ვექტორები, ხოლო $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ სიდიდეს ჰამილტონიანი ეწოდება. როგორც ვიცით,

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t), \quad (12.25)$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად, (12.25) ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს \dot{q}_i გამოვსახოთ p_i ცვლადის საშუალებით, თუ, $\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$.

განვიხილოთ მაგალითი, თუ როგორ უნდა გადავიდეთ ლაგრანჟის ფორმალიზმიდან, ჰამილტონის ფორმალიზმზე:

განვიხილოთ ლაგრანჟიანი

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (12.26)$$

ვიპოვოთ შესაბამისი იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i. \quad (12.27)$$

შებრუნებული გარდაქმნა გვაძლევს

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}. \quad (12.28)$$

მაშასადამე, შესაბამის ჰამილტონიანს ექნება სახე

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{p_i}{m_i} \right) - \left\{ \frac{1}{2} m_i \left(\frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(q_1, q_2, \dots, q_n) \right\}. \quad (12.29)$$

12.5. ჰამილტონის განტოლება

ლაგრანჟის განტოლებები, მიიღებოდა სისტემის ლაგრანჟიანზე ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებით. ეხლა ცხადია, რომ ჩვენ გვინდა მოძრაობის განტოლებები გამოვიყვანოთ ჰამილტონის ფორმალიზმის ფარგლებში. (12.24) ფორმულიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ ჰამილტონის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (12.30)$$

მარჯვენა მხარეში, პირველი და მესამე წევრი ერთმანეთს აბათილებენ, რადგან $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. ამას გარდა $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (12.30) მიიღებს სახეს

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (12.31)$$

მაგრამ, რადგან

$$dH(p, q, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (12.32)$$

ცხადია, რომ (12.31),(12.32) განტოლებებიდან, შეგვიძლია ჩავწეროთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (12.33)$$

ამას გარდა, თუ, სისტემის ლაგრანჟიანი და ჰამილტონიანი ცხადადაა დამოკიდებული დროზე, გვექნება დამატებით თანადობა

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (12.34)$$

P.S. ჰამილტონის კანონიკური (12.33) განტოლებათა სისტემა შედგება $2n$ პირველი რიგის განტოლებისაგან, მაშინ როცა შესაბამისი ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემა შედგებოდა n ცალი მეორე რიგის განტოლებისაგან.

ჰამილტონის (12.33) განტოლებებს, გააჩნიათ რიგი საინტერესო თვისებებისა. ჩვენ ჯერ-ჯერობით განვიხილავთ ისეთ ჰამილტონიანებს, რომლებიც დროზე არა არიან ცხადად დამოკიდებული. ამ სისტემის კანონიკური ცვლადები p_i და q_i , რომელთა სერთო რაოდენობაა $2n$, ქმნიან ფაზურ სივრცეს. დროის განმავლობაში $\mathbf{p}(t)$ და $\mathbf{q}(t)$ ცვლადები $2n$ განზომილებიან ფაზურ სივრცეში, შემოწერენ გარკვეულ არეს. ისმის კითხვა, თუ როგორია ეს არე და რა ზოგადი თვისებები შეიძლება ქონდეს მას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (12.33) განტოლებებიდან მიიღება ლიუვილის ცნობილი ფორმულა „უკუმშვადი სითხეებისათვის“, ამჯერად, სითხის როლს, თამაშობს ფაზური სივრცის ნაკადის „ნაწილაკი“

$$\sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0. \quad (12.35)$$

P.S. ასე, რომ ჰამილტონური სისტემის ფაზური ნაკადის ელემენტის მოცულობა არ იცვლება, თუმცა, დეფორმირდება გადაადგილებისას.

ჰამილტონის განტოლებები, იმდენად სიმეტრიულია $p(t)$ და $q(t)$ ცვლადების მიმართ, რომ ზოგჯერ მათ თვლიან თანაბარი უფლებებისმქონე დამოუკიდებელ ცვლადებად და განიხილავენ ახალ ცვლადს, $2n$ კომპონენტით $z = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$. ეს, საშუალებას იძლევა ახალი ჰამილტონიანისათვის $H(p, q) = H(z)$, ჰამილტონის განტოლება ჩაიწეროს მოკლედ

$$\dot{z} = J \cdot \nabla H(z), \quad (12.36)$$

სადაც J სიმპლექტიკური მატრიცაა ზომებით $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12.37)$$

1 - ერთეულოვანი მატრიცაა.

12.6. პუასონის ფრჩხილები

ჰამილტონის განტოლებების ინტეგრებადობის ამოცანა, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საკითხია. თუ, სისტემის თავისუფლების ხარისხია ერთი და მაშასადამე, აღიწერება ორი კანონიკური ცვლადით (p, q) , მაშინ ის ინტეგრებადია. ასეთი შემთხვევები, ჩვენ უკვე განვიხილეთ კურსის მეორე ნაწილში. თავისუფლების ხარისხის რიცხვის მიუხედავად, სისტემის ამოხსნისას, ყველაზე მნიშვნელოვანია ინტეგრალების პოვნის

პროცედურა. ჰამილტონის მიდგომას, მივყავართ, დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულების, მოხდენილად პოვნამდე.

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია $f = f(p, q, t)$, ვიპოვოთ მისი სრული წარმოებული დროით

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{dH}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dH}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (12.38)$$

სადაც $[H, f]$ - პუასონის ფრჩხილებია H და f ფუნქციებისათვის. მჭიდრო კავშირი არსებობს კლასიკური მექანიკის პუასონის ფრჩხილებსა და კვანტური მექანიკის კომუტატორის ცნებებს შორის. მართლაც, პუასონის ფრჩხილები შეგვიძლია ჩავწეროთ ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dg}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dg}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (12.39)$$

თუ, რომელიმე დინამიკური ცვლადი არაა დამოკიდებული დროზე, ანუ, $f = f(p, q)$ მაშინ მისი პუასონის ფრჩხილები ნულის ტოლია და მაშასადამე, ის მუდმივი სიდიდეა, რაც ნათლად ჩანს (12.38) ფორმულიდან. ცხადია, რომ დროზე დამოუკიდებელი სისტემებისათვის, სისტემის ენერგია $E = H$ მუდმივი სიდიდეა, რადგან ჰამილტონიანის თავის თავთან პუასონის ფრჩხილები, ნულის ტოლია.

პუასონის ფრჩხილების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი სამი ფუნქციისათვის, შეგვიძლია ჩამოვყავალიბოთ რიგი თვისებებისა

$$[f, g] = -[g, f]; \quad (12.40)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h]; \quad (12.41)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]; \quad (12.42)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (12.43)$$

პუასონის ფრჩხილების (12.43) თვისებას იაკობის იგივეობას უწოდებენ. ეს თვისებები, ნათელყოფს, რომ პუასონის ფრჩხილები შეესაბამება *ლის ალგებრის* ოპერაციის განმსაზღვრელ სტრუქტურას.

თუ, f, g მოძრაობის ინვარიანტული ფუნქციებია, მაშინ მათი პუასონის ფრჩხილებიც მუდმივი იქნება მოძრაობის მიმართ. მართლაც, თუ, განვიხილავთ პუასონის ფრჩხილების (12.43) თვისებას, მაშინ იქიდან რომ f, g ინვარიანტებია, გამოდის რომ $[g, H] = 0$, $[f, H] = 0$, მაგრამ მაშინ $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$ იაკობის იგივეობიდან მივიღებთ, რომ $[H, [f, g]] = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $[f, g]$ აგრეთვე ინვარიანტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორი ნაპოვნი ინტეგრალის პუასონის ფრჩხილები ისევ სისტემის ინტეგრალი იქნება. თუმცა, ინტეგრალების ასეთი მეთოდით ძებნა, არაა ეფექტური.

საზოგადოდ, n პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის ბოლომდე ანალიზურად ამოსახსნელად, საჭიროა $n - 1$ ინტეგრალის პოვნა. მაგრამ *ჰამილტონური სისტემების სიმპლექტიკური სტრუქტურის* გამო $2n$ პირველი რიგის ჰამილტონური სისტემებისათვის საკმარისია n ინტეგრალის პოვნა.

12.7. ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

ჰამილტონური სისტემების ამოსახსნელად ეძებენ *კანონიკურ გარდაქმნებს*, ანუ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც სისტემას ისე გაამარტივებს, რომ შევძლებთ მის ინტეგრებას. თუ, კანონიკური გარდაქმნა არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ძველი ჰამილტონიანიდან ახალზე გადასვლა, ხორციელდება უბრალოდ ცვლადთა გარდაქმნით

$$H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)). \quad (12.44)$$

თუ, გამოვიყენებთ გარდაქმნის ფორმულებს

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (12.45)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (12.46)$$

სადაც β_i არიან ახალი კოორდინატები, შეუღლებულები α_i ძველ იმპულსებთან. შესაბამისად, (12.44) განტოლებიდან მივიღებთ

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots, q_n\right) = H'(\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n). \quad (12.47)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილს, უნდა ვუყუროთ, როგორც მუდმივ სიდიდეს, ჰამილტონიანის მნიშვნელობას. ამ, პირველი რიგის კერძოწარ-მოებულის განტოლებაში, უცნობია W სიდიდე, ხოლო q_1, q_2, \dots, q_n დამოუკიდებელი ცვლადებია. ამ განტოლებას ეძახიან სტაციონარულ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას.

ასეთი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს n ნებისმიერ მუდმივს, რომელთა როლშიც შეგვიძლია განვიხილოთ α_i სიდიდეები. ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა, ექვივალენტურია შესაბამისი ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა. **სეპარაბელური სისტემების** გარდა, ასეთი განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუმცა, თუ, გავითვალისწინებთ (12.45) ფორმულებს, დაფიქსირებული α_i სიდიდეების შემთხვევაში, შეგვიძლია, საზოგადოდ შევხედოთ ამონახსნის სტრუქტურას. მართლაც

$$dW = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i dq_i, \quad (12.48)$$

ასე, რომ თუ, (12.48) ტოლობას ვაინტეგრებთ ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ, მივიღებთ წირით ინტეგრალს

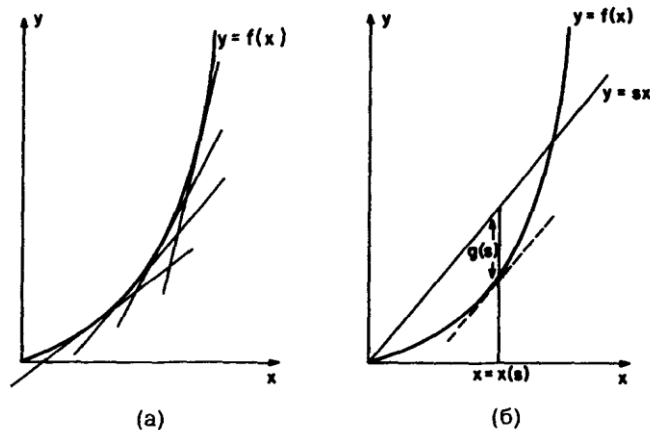
$$W = \int_{q_0}^q \sum_i p_i dq_i. \quad (12.49)$$

12.8. ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია

ლაგრანჟის $(q_i; \dot{q}_i)$ ცვლადებიდან, ჰამილტონის $(p_i; q_i)$ ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება ლეჟანდრის გარდაქმნით. ამიტომ, საინტერესოა თვით ამ გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი და სტრუქტურა.

მრუდი წირი შეიძლება აღვწეროთ, როგორც წერტილების ერთობლიობით, ასევე, მხები სიბრტყეების ერთობლიობითაც. ლეჟანდრის გარდაქმნა კი კავშირს ამყარებს ამ ორ წარმოდგენას შორის. ამ საკითხში, გავყვეთ ვარნოლდის გადმოცემის ფორმას, ვინაიდან ის საუკეთესოა მეთოდური თვალსაზრისით.

განვიხილოთ $y = f(x)$ ფუნქცია. დავუშვათ, რომ ის ამოზნექილია ან ჩაზნექილი. ამ ფუნქციის ლეჟანდრის გარდაქმნა, გვაძლევს სხვა $g(s)$ ფუნქციას ნახ.12.1



ნახ.12.1.a) $y = f(x)$ ფუნქცია და მასთან დაკავშირებული მხებები;
 ბ) ლეჟანდრის გარდაქმნის აგება $g(s)$

ჩვენ ვხედავთ, რომ $g(s)$ წარმოადგენს უდიდეს მანძილს ვერტიკალის გასწვრივ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკსა და $y = sx$ წრფეს შორის, ანუ,

$$g(s) = sx - f(x) = G(s, x(s)). \quad (12.50)$$

რადგან $x(s)$ წერტილი განისაზღვრება მაქსიმუმის პირობებიდან,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0. \quad (12.51)$$

ასე, რომ ახალი s ცვლადი წარმოადგენს, $f(x)$ ფუნქციის მხეზის დახრის კუთხეს $s = f'(x)$.

განვიხილოთ, მექანიკური ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, გვაქვს ჰამილტონიანი $y = H(p)$ ზემოთმოყვანილი ალგორითმით მივიღებთ, რომ ახალ $L(s)$ ფუნქციას აქვს სახე

$$L(s) = sp - H(p). \quad (12.52)$$

ამ შემთხვევაში, ახალი ცვლადი $s = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$, ასე, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნა ამ შემთხვევაში, შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით

$$L(\dot{q}) = \dot{q}p - H(p). \quad (12.53)$$

ეს მაგალითი არის, ჩვენს მიერ უკვე განხილული ფორმულების (12.24) ნათელი ილუსტრაცია

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t); \quad (12.54)$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (12.55)$$

12.9. კლასიკური მექანიკის გეომეტრია

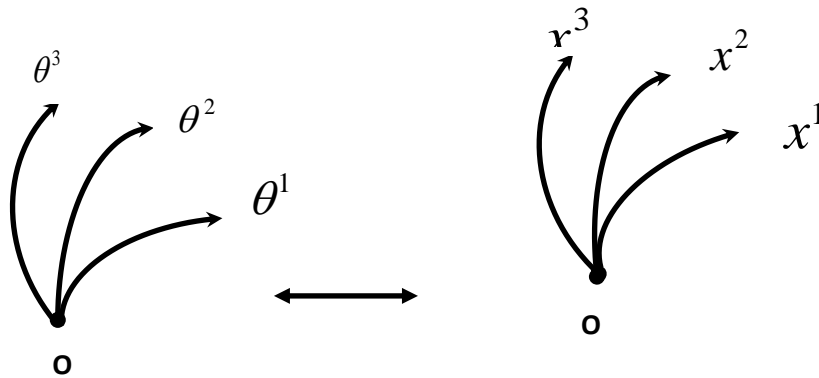
ტენზორულ ალგებრაში \vec{a} ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს

$$a_i \text{ და } a^i; \quad (12.56)$$

თუ, ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ a^i , მაშინ ის მიუთითებს კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე, ხოლო თუ, a_i - ქვემოთ, მაშინ კოვარიანტულ კომპონენტებზე.

ერთგანზომილებიან ტენზორს ვექტორს უწოდებენ. განვიხილოთ ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების ცნებები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ერთი θ^i მრუდწირულ კოორდინატა სისტემიდან, მეორე x^i კოორდინატა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები



ნახ. 12.2. θ^i და x^i მრუდწირულ კოორდინატა სისტემები

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\}. \quad (12.57)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (12.58)$$

ჩავთვალოთ, რომ (12.58) გარდაქმნები არიან ჰომეომორფული P წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (12.59)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (12.58) θ^i კოორდინატების მიმართ

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3). \quad (2.60)$$

დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები ლოკალურად. (12.58) ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (12.61)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით (12.61) გადაიწერება მოკლედ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (12.62)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ. ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება.

განსაზღვრება: იმ ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება **ყრუ ინდექსი** ეწოდება. იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში გვხვდება ერთხელ, თავისუფალი ინდექსი ეკვია.

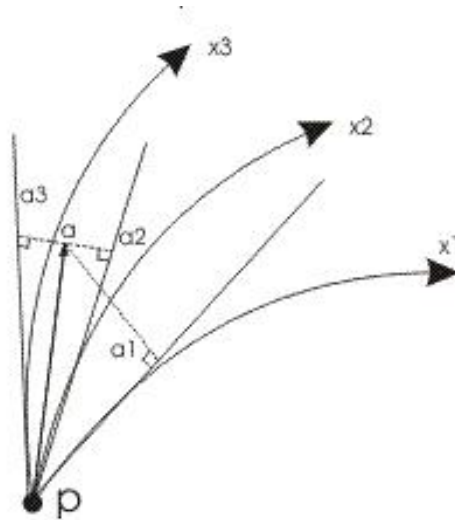
განსაზღვრება: ტენზორის თითოეულ წევრში, თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობას, ტენზორის რანგი ეწოდება.

მაგალითად, ვექტორი-პირველი რანგის ტენზორია; სკალარული ფუნქცია - ნულ რანგის ტენზორია . . .

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ a^i სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ, კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების დიფერენციალები (12.62). ანუ,

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (12.63)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული შინაარსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა P-წერტილში ნახ.12.3, სადაც მოდებულია ეს ვექტორი



ნახ.12.3. \vec{a} ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული x^i ღერძების მხებები P წერტილში. მაშინ \vec{a} ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ მის ორთოგონალურ პროექციებს შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხებების მიმართულეებზე, რომლებიც გავლებულია P წერტილში.

განვიხილოთ ოპერატორი

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (12.64)$$

ახალ y კოორდინატებზე გადასვლას მივყავართ ფორმულამდე

$$\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (12.65)$$

სადაც

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad (12.66)$$

როგორც ვხედავთ, ξ_i კომპონენტები გარდაიქმნიებიან როგორც კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

ეხლა განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება φ ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ მოცემული გვაქვს $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$. ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (12.67)$$

განსაზღვრება: P წერტილში განსაზღვრულ a_i სიდიდეებს ეწოდებათ **პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები**, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნიებიან, როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტის კომპონენტები

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j. \quad (12.68)$$

როგორც ვნახეთ, განზოგადებული იმპულსები ქმედების გრადიენტებს წარმოადგენენ, ამიტომ ცხადია, რომ განზოგადებული იმპულსები კოვარიანტულ ვექტორს წარმოადგენენ.

P.S. ოპერატორი (12.64) წარმოადგენს მხევი ვექტორის მაგალითს. მოცემულ $x = X$ წერტილში, რომელიმე სკალარულ $h = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციაზე ამ ოპერატორის მოქმედების შედეგია მოცემული ფუნქციის ზედაპირის მხევი მოცემულ წერტილში

$$\xi h = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial h}{\partial x_i} I_{x=X}. \quad (12.69)$$

განვიხილოთ ეხლა, რაიმე წირი $\varphi = \varphi(s)$, რომელიც პარამეტრიზებულია s ცვლადით, ისე, რომ გადის მოცემულ $x = X$ წერტილზე, როცა $s = 0$. თუ, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, ფუნქციის კოორდინატული წარმოდგენაა $\varphi_i(s) = x_i$, მაშინ ნებისმიერი სიდიდის წარმოებული $\varphi(s)$ -ის გასწვრივ, მოცემულ $x = X$ წერტილში განისაზღვრება მხები ვექტორით

$$\xi = \frac{d}{ds} I_{s=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} I_{x=X}, \quad (12.70)$$

სადაც

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} I_{s=0}. \quad (12.71)$$

ცხადია, რომ თუ $\varphi(s)$ მოცემული $q(t)$ სისტემის ტრაექტორიაა, სადაც s დროა, მაშინ ξ_i სხვა არაფერია, თუ არა $\dot{q}_i(t)$ სიჩქარის კომპონენტები. აქედან გამომდინარეობს სიჩქარის ვექტორის კონტრავარიანტულობა.

მოცემულ $x = X$ წერტილზე შეიძლება გაიაროს მრავალმა სხვადასხვა ტრაექტორიამ და ყოველივე მათგანს შეესაბამება თავისი მხები ვექტორი. ამ ვექტორების ერთობლიობა მოცემულ წერტილში ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც *მხები სივრცე* ეწოდება. ამ სივრცეს აღნიშნავენ სიმბოლურად TM_X , სადაც M *მრავალსახეობაა*, ანუ სისტემის მიერ დაკავებული n განზომილებიანი სივრცე. *მხები განფენის სივრცე აერთიანებს ყველა მხებ სივრცეს, მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის და მას აღნიშნავენ როგორც TM .*

P.S. 1. ლაგრანჟის ფორმალიზმში, სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება განზოგადებული q_i კოორდინატებითა და \dot{q}_i სიჩქარეებით. ამ დროს ნებისმიერ Q წერტილში, დროის ნებისმიერ მომენტში გვაქვს მხები ვექტორი

$$\xi = \sum_i \dot{q}_i(t) \frac{\partial}{\partial q_i} I_{q=q}. \quad (12.72)$$

ასე, რომ სისტემის მდგომარეობა შეიძლება დავახასიათოთ წერტილის მეშვეობით მხები განფენის სივრცეში. *ლაგრანჟიანი კი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მხები განფენის სივრცის გადასახვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ანუ, $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$.*

2. ჰამილტონურ ფორმალიზმში მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული q_i კოორდინატებითა და მათი შეუღლებული p_i იმპულსებით. *შესაბამისი ფაზური სივრცე წარმოადგენს სიმპლექტიკურ სივრცეს და ხასიათდება რიგი თვისებებით. ჰამილტონური სისტემების განსაკუთრებული თვისებაა, ფაზური მოცულობის შენარჩუნება ჰამილტონური ნაკადის ზემოქმედებისას.*

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ლაგრანჟის განტოლების გამოყვანა;
2. ჰამილტონის ფორმალიზმი და ჰამილტონის განტოლებების გამოყვანა;
3. პუასონის ფრჩხილების თვისებები;
4. ლაგრანჟიანისა და ჰამილტონიანის გეომეტრიული შინაარსი;
5. ლეჟანდრის გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т. I, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001

4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988
15. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001

თავი 13. შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები

ბოლომდე ინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემები, გამონაკლისს წარმოადგენს. მიუხედავად ამისა, ისინი დიდ როლს თამაშობენ, არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემების სტრუქტურული თავისებურებების შესწავლის საქმეში. ეს ხდება იმიტომ, რომ ზოგჯერ ხელსაყრელია არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემის წარმოდგენა, ინტეგრებადი H_0 და მცირე H_1 შეშფოთების ჯამის სახით,

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \quad (13.1)$$

სადაც $\varepsilon \ll 1$. ესაა შეშფოთებათა თეორიის იდეა და დიდი გამოყენება აქვს მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის დინამიკის შესწავლის საქმეში. თუ, შევისწავლით ორი სხეულის ამოცანას, მაგალითად, დედამიწის მოძრაობას მზის გარშემო, ეს ამოცანა იხსნება ბოლომდე და მივიღებთ, რომ დედამიწა მოძრაობს მზის გარშემო კეპლერის ელიფსურ ტრაექტორიებზე, მაგრამ მის მოძრაობაზე მცირე შეშფოთების სახით, გავლენას ახდენს იუპიტერი, რომლის ზემოქმედებაც მცირე შეშფოთების სახით ემატება ორი სხეულის პრობლემის ამონახსნს. ასეთი, თითქოს მარტივი ამოცანაც კი, არაა დღემდე ამოხსნილი ბოლომდე. რადგან აქ მიიღება სუსტად კრებადი მწკრივები და მათი კრებადობის დაცქარება დიდ სიძნელეებს აწყდება.

მიუხედავად ამისა, შეშფოთებათა თეორია საჭიროებს შესწავლას, თუნდაც იმიტომ რომ გავერკვეთ, სამი სხეულის პრობლემაში არსებულ სირთულეებში.

შეშფოთებათა თეორიის ძირითადი იდეაა, ამონახსნის წარმოდგენა სახით, სადაც $\varepsilon \ll 1$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (13.2)$$

$x_0(t)$ - ინტეგრებადი სისტემის ზუსტი ამონახსნია. ხოლო დანარჩენი x_i , $i = \overline{1, n}$ მიახლოებების პოვნა წარმოებს რეკურენტული ფორმულე-ებით. აქ არის იმის მოლოდინი, რომ როცა

$\varepsilon \rightarrow 0$ (13.2) ამონახსნი მიისწრაფის ზუსტი $x_0(t)$ ამონახსნისაკენ, თანაც დამატებითი წევრები დააზუსტებენ შემფოთებულ ამონახსნამდე. თუმცა, ამის იმედია ვერ გვექნება დროის დიდ შუალედების შემთხვევაში. ასე, რომ ნებისმიერი ამოცანის ამონახსნის (13.2) წარმოდგენისათვის, დგება მისი ფიზიკური კრებადობის საკითხი.

13.1. შემფოთებათა რეგულარული მწკრივები

განვიხილოთ უბრალო კვადრატული განტოლება

$$x^2 + x - 6\varepsilon = 0. \quad \varepsilon \ll 1 \quad (13.3)$$

ნულოვან მიახლოებაში, გვაქვს „ინტეგრებადი“ შემთხვევის ანალოგი განტოლება

$$x^2 + x = 0, \quad (13.4)$$

მისი ამონახსნებია $x = 0$ და $x = -1$. ეხლა შევეცადოთ შემფოთებული (13.3) ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენა მწკრივის სახით

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \quad (13.5)$$

სადაც a_0 „ინტეგრებადი“ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია.

თუ, ჩავსვამთ (13.5) წარმოდგენას (13.3) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს ε ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მაშინ მივიღებთ $O(\varepsilon^2)$ სიზუსტის ფარგლებში განტოლებებს, გაშლის კოეფიციენტებისათვის

$$O(\varepsilon^0): \quad a_0^2 + a_0 = 0; \quad (13.6)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad 2a_0a_1 + a_1 - 6 = 0; \quad (13.7)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad a_1^2 + 2a_0a_2 + a_2 = 0. \quad (13.8)$$

ამ განტოლებების მიმდევრობით ამოხსნა გვაძლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ (13.3) განტოლების ამონახსნები შესაბამისი (13.5) მწკრივებით

$$x_1 = 6\varepsilon - 36\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (13.9)$$

$$x_2 = -1 - 6\varepsilon + 36\varepsilon^2 - O(\varepsilon^3). \quad (13.10)$$

ეს არის შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივი. ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, (13.9),(13.10) მიახლოებები მიისწრაფიან შესაბამისი „ინტეგრებადი“ განტოლების ზუსტი ამონახსნებისაკენ.

13.2. შეშფოთებათა სინგულარული მწკრივები

ეხლა განვიხილოთ სინგულარული განტოლება

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (13.11)$$

ეს ამოცანა არაა რეგულარული, რადგან ზღვარში როცა $\varepsilon \rightarrow 0$ განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი, მაშინ როცა შეშფოთებულ (13.11) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი. ასეთ ამოცანებს, შეშფოთებათა თეორიის სინგულარული ამოცანები ეწოდებათ. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ყველა ამონახსნი შეიძლება ვერ წარმოდგეს ხარისხოვანი (13.5) მწკრივის სახით.

ამ განტოლების არაშეშფოთებული ნაწილის $x - 1 = 0$ ამონახსნია $x = 1$. ამ ამონახსნის პოვნა ადვილად შეგვიძლია (13.5) მწკრივის სახით, რადგან ეს რეგულარული ნაწილის ფესვია. მისი ჩასმა (13.11) განტოლებაში, საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ წარმოდგენა

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (13.12)$$

ამოცანის სინგულარული ნაწილი დაკავშირებულია მეორე ფესვთან, რომელიც უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_2 = O(\varepsilon^{-n})$. ეს იმაზე მიუთითებს, რომ

მიზანშეწონილია ცვლადთა გარდაქმნა ფორმულით $x = \frac{y}{\varepsilon^n}$, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ როცა $\varepsilon \rightarrow 0$, განტოლებაში (13.11) წევრებმა εx^2 და x ერთმანეთი უნდა დააბალანსონ უსასრულობისაკენ სწრაფვის სიჩქარის თვალსაზრისით, ანუ, $\varepsilon \frac{y^2}{\varepsilon^{2n}}$ და $\frac{y}{\varepsilon^n}$ ერთნაირი სისწრაფით უნდა მიისწრაფოდენ უსასრულობისაკენ, როცა $\varepsilon \rightarrow 0$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $2n - 1 = n \Leftrightarrow n = 1$, ანუ, ერთადერთი მისაღები ცვლადთა გარდაქმნაა $x = \frac{y}{\varepsilon^1}$. მაშინ (13.11) განტოლება გარდაიქმნება განტოლებად

$$y^2 + y - \varepsilon = 0. \quad x = \frac{y}{\varepsilon^1}. \quad (13.13)$$

ეხლა უკვე მივიღეთ რეგულარული ამოცანა და მისი წარმოდგენა შეგვიძლია სტანდარტული ხარისხოვანი მწკრივებით

$$y_1 = \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (13.14)$$

$$y_2 = -1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (13.15)$$

თუ, გამოვიყენებთ უკუ გარდაქმნას (13.13), მივიღებთ საწყისი სინგულარული ამოცანის ამონახსნების წარმოდგენებს

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (13.16)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (13.17)$$

13.3 რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები დიფერენციალური განტოლებებისათვის

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (13.18)$$

და საწყისი პირობები

$$x(0) = A. \quad (13.19)$$

თუ, გამოვიყენებთ ამონახსნის (13.5) წარმოდგენას, ჩავსვამთ (13.18) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს ε ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მივიღებთ სისტემას

$$O(\varepsilon^0): \quad \dot{x}_0 = x_0, \quad (13.20)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_0^2, \quad (13.21)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_1x_0. \quad (13.22)$$

ამოცანის ინტეგრებადი ნაწილი (13.20), ადვილად ინტეგრდება და მივიღებთ

$$x_0(t) = Ae^t, \quad (13.23)$$

ამ ამონახსნის ჩასმა (13.21) განტოლებაში გვაძლევს განტოლებას

$$\dot{x}_1 = x_1 + Ae^t, \quad (13.24)$$

განტოლებას, საწყისი პირობით

$$x_1(0) = 0. \quad (13.25)$$

ასეთ, ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ვსვამთ ყველა შემდგომი მიახლოებისათვის, რათა მთლიანმა შეშფოთებულმა წარმოდგენამ დააკმაყოფილოს (13.19) პირობა. (13.24),(13.25) ამოცანის ამოხსნაა

$$x_1(t) = A^2e^t(e^t - 1), \quad (13.26)$$

თავის მხრივ, თუ, ამ ამონახსნს ჩავსვამთ (13.22) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x_2(t) = A^3e^t(e^t - 1)^2. \quad (13.27)$$

ასე, რომ $O(\varepsilon^2)$ სიზუსტით (13.18),(13.19) ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე

$$x(t) = Ae^t[1 + \varepsilon A(e^t - 1) + \varepsilon^2 A^2(e^t - 1)^2] + O(\varepsilon^3). \quad (13.28)$$

P.S. აქ მოყვანილი განტოლებების ამოხსნიდან, შეიძლება შეიქმნას შთაბეჭდილება, რომ შემფოთებათა თეორია ყოველთვის წარმატებით ხსნის ამოცანებს, მაგრამ სამწუხაროდ ასე არაა. როგორც არაერთმა მცდელობებმა აჩვენა, მრავალგანზომილებიანი ჰამილტონური სისტემებისათვის, შემფოთებათა თეორიას შევყავართ პუანკარეს „მცირე მნიშვნელების“ ჩიხში და მხოლოდ კოლმოგოროვ-არნოლდ-მოზერის ეგრეთწოდებულმა KAM თეორიამ შეძლო ამ ჩიხიდან ნაწილობრივი გამოსვლა. თუმცა, ეს თეორია გვერდს უქცევს, ჰამილტონური სისტემების ამოცანის გლობალური ამოხსნის ამოცანას და კმაყოფილდება კერძო ამოცანებით ფაზური ტრაექტორიების ტორზე ყოფაქცევის შესახებ.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. შემფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$x^2 + \varepsilon x - 1 = 0;$$

2. შემფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\varepsilon^2 x^2 - 2x + 2 = 0;$$

3. შემფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\dot{x} = 5x - \varepsilon x^2;$$

4. შემფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x - 7\varepsilon = 0;$$

5. შემფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\varepsilon \dot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0.$$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, т.1, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988
15. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
19. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1984

თავი 14. ქაოსი ჰამილტონურ სისტემებში

როგორც ვხედავთ, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემები ინტეგრებადია. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ფაზური სივრცე, უკვე ოთხგანზომილებიანია. თუ, სისტემა ამავე დროს, კონსერვატიულია, მაშინ ენერგეტიკული ზედაპირი სამგანზომილებიანია. ასეთ შემთხვევაშიც კი, სისტემის ქალაქდზე დატანით გამოკვლევა რთულია. ამიტომ, მეოცე საუკუნის უდიდესი მათემატიკოსების, პუანკარესა და ბირგოფის შრომებში შემუშავებული იქნა *კვეთის ზედაპირების* მეთოდი. ის, განსაკუთრებით ეფექტურია, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე, კონსერვატიული სისტემებისათვის. თუმცა, მისი გამოყენება შეიძლება უფრო მაღალი განზომილების სისტემებისთვისაც. კვეთის ზედაპირების მეთოდი, პირველი რიცხვითი მეთოდი იყო, რომელიც შემუშავებული იქნა არაინტეგრებადი სისტემების გამოსაკვლევად.

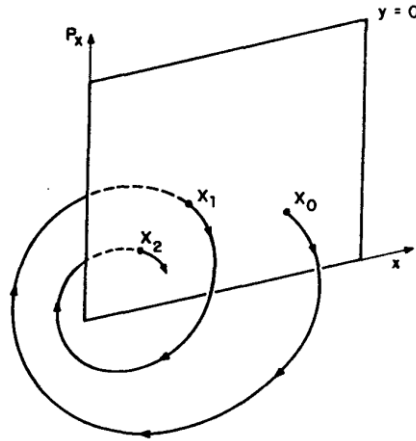
14.1. კვეთის ზედაპირების მეთოდი ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემებისათვის

განვიხილოთ, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე, კონსერვატიული სისტემის ჰამილტონიანი

$$E = H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y). \quad (14.1)$$

ამ სისტემის ტრაექტორიების შესწავლის ამოცანა, შეიძლება დავიყვა-ნოთ ორგანზომილებიან ამოცანად. მოცემულ ენერგეტიკულ დონეზე, ვიხილავთ რაიმე კვეთას, მაგალითად $y = 0$. ამის შემდეგ რიცხვითი ანალიზის მეშვეობით, მივყვებით რომელიმე ტრაექტორიას და ვპოულობთ შესაბამის მნიშვნელობებს p_x და x ცვლადებისათვის. თუ, $V(x, y)$ პოტენციალი შემოფარგლავს ტრაექტორიებს, მაშინ აღნიშნულ კვეთში გავლისას, ჩვენ კვლავ

მივიღებთ p_x და x ცვლადებისათვის ახალ მნიშვნელობებს და ა.შ. ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ გადასახვას, რომელიც შედგება (p_x, x) წერტილებისაგან (ნახ.14.1.) და წარმოადგენს კვეთის ზედაპირს.



ნახ.14.1. კვეთის ზედაპირი აგება

კვეთის ზედაპირზე მყოფი წერტილი, განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობა ნიშნის სიზუსტით, რაც გამომდინარეობს (14.1) ფორმულიდან, როცა $E = const$ და $y = 0$. მართლაც, მაშინ

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2m} p_x^2 - V(x, 0) \right)}. \quad (14.2)$$

კვეთის ზედაპირი, როგორც წესი იგება ისე, რომ p_y სიდიდეს ქონდეს განსაზღვრული ნიშანი, მაგალითად $p_y > 0$. თუ, მოცემული ტრაექტორიისათვის საწყის მონაცემებს $p_x; E; x; y = 0$; კვეთის ზედაპირზე აღვნიშნავთ X_0 ასოთი, მაშინ შემდგომი გადაკვეთის წერტილები $X_1; X_2; \dots; X_n$ ადგენენ გადასახვას ფაზურ სიბრტყეში. ამ წერტილებმა შეიძლება შეავსონ გლუვი წირი, ან მოგვცენ დისკრეტული წერტილების სიმრავლე. ცალკეულ შემთხვევებში კი (არაინტეგრებადი), შეიძლება მოხდეს ამ წერტილების ქაოსური განლაგება კვეთის ზედაპირზე. თუმცა, მარტო ვიზუალური შედეგით ვერ ვიტყვით, რომ საქმე გვაქვს ქაოსთან.

P.S. იმისათვის, რომ გამოვიკვლიოთ ქაოსურია, თუ, არა ტრაექტორია ფაზურ სივრცეში, საჭიროა, დამატებითი გამოკვლევები, ლიაპუნოვის მაჩვენებლები იქნება, თუ, ენერგეტიკული სპექტრი.

14.2. ჰენონ-ჰეილესის ჰამილტონიანი

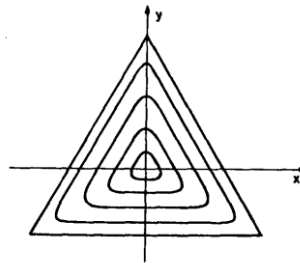
განვიხილოთ, ჰენონ-ჰეილესის ჰამილტონიანი

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (14.3)$$

ეს არის ვარსკვლავის მოძრაობის ჰამილტონიანი, ცილინდრული სიმეტრიის მქონე გრავიტაციულ ველში, გლუვი გალაქტიკური პოტენციალის პირობებში. პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე

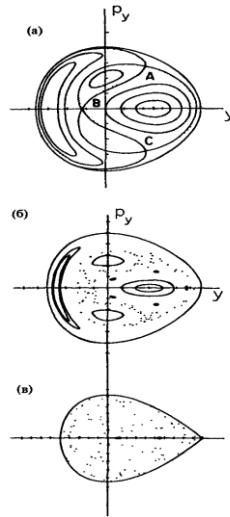
$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (14.4)$$

ეს პოტენციალი გამოსახულია ნახ.14.2. დონის წირები აგებულია ენერგიის $E = \frac{1}{12}$ მნიშვნელობიდან, $E = \frac{1}{6}$ მნიშვნელობამდე.



ნახ.14.2. პოტენციალური ენერგიის დონეები. გარე დონეს შეესაბამება $E = \frac{1}{6}$

შესაბამის კვეთის ზედაპირებზე, დონის წირების განლაგება, პოტენციალური ენერგიის დონეების მიხედვით, მოცემულია ნახ.14.3.



ნახ.14.3.ჰენონ-ჰეილესის სისტემის კვეთის ზედაპირები: ა) $E = \frac{1}{12}$, ბ) $E = \frac{1}{8}$, ბ) $E = \frac{1}{6}$

14.3 ბრტყელი გადასახვები, რომლებიც ინახავენ ფართს

განვიხილოთ ბრტყელი გადასახვები:

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i), \quad (14.5)$$

T :

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i). \quad (14.6)$$

ეს გადასახვა შეინარჩუნებს ფართს, თუ,

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = 1. \quad (14.7)$$

თუ, f და g პოლინომებია, მაშინ ამ გადასახვას **მთელი კრემონული გადასახვა** ეწოდება. ამ გადასახვის თვისებები, სწორედ ამ ფუნქციების სახეზეა დამოკიდებული. თუ, ისინი შეიძლება ჩავწეროთ წრფივი ფუნქციებით, მაგალითად ასე

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha, \quad (14.8)$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \quad (14.9)$$

მაშინ, გადასახვა წარმოადგენს ბრუნვას α კუთხით. მეორე მაგალითი, წრფივი გარდაქმნით

$$x_{i+1} = x_i + y_i, \quad (14.10)$$

$$y_{i+1} = y_i, \quad (14.11)$$

შეესაბამება პარალელურ გადატანას X ღერძის პარალელურად.

ჰენონმა მოიფიქრა შემფოთებული გარდაქმნა

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha, \quad (14.12)$$

T:

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha, \quad (14.13)$$

ჰენონის მთავარი შედეგი ის არის, რომ (14.12),(14.13) გარდაქმნა წარმოადგენს ორი გარდაქმნის კომპოზიციას. რომელთაგან ერთი არაწრფივი(დეფორმაციით) გადატანაა და მეორე - მობრუნება, ე.ი. შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$T = T_1 T_2. \quad (14.14)$$

სადაც

$$x_{i+1/2} = x_i, \quad (14.15)$$

T1:

$$y_{i+1/2} = (y_i - x_i^2), \quad (14.16)$$

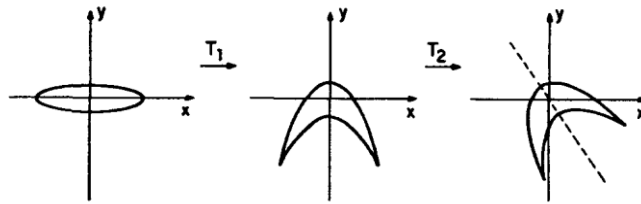
არაწრფივი დეფორმაცია-გადატანაა, ხოლო

$$x_{i+1} = x_{i+1/2} \cos \alpha - y_{i+1/2} \sin \alpha, \quad (14.17)$$

T2:

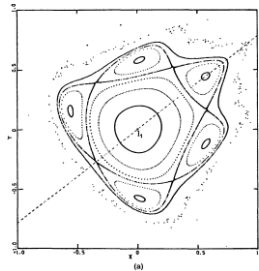
$$y_{i+1} = x_{i+1/2} \sin \alpha + y_{i+1/2} \cos \alpha, \quad (14.18)$$

შესაბამისი გარდაქმნების გეომეტრიული სურათები მოცემულია ნახ.14.4.

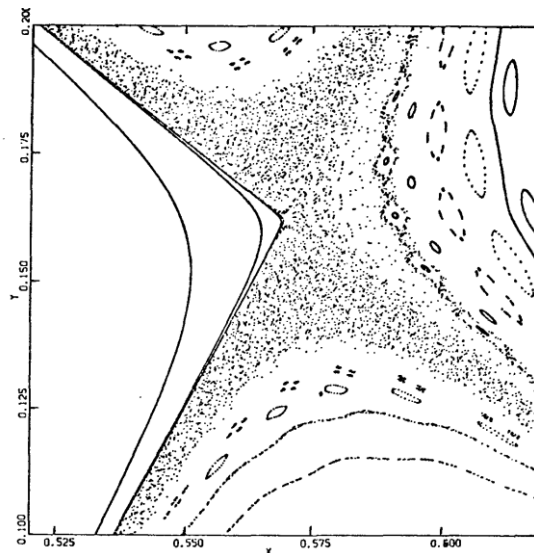


ნახ.14.4.ელიფსური დისკის გარდაქმნა ჰენონის გარდაქმნათა კომპოზიციით

შესაბამის ფაზურ სიბრტყეში სისტემა იძლევა სურათებს ნახ.14.5, ნახ.14.6



ნახ.14.5.ჰენონის გარდაქმნის ფაზური სიბრტყე, როცა $\alpha = 0.2114$



ნახ.14.6.არის დაშლა ჰიპერბოლურ წერტილთან

ამ შედეგების მიღება მარტივია კომპიუტერის გამოყენებით. როგორც ნახ 14.6 გვიჩვენებს სისტემაში, ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლობაში წარმოიქმნება ქაოსი, რომელიც თანდათან ვრცელდება მტელ არეში.

14.4. კავშირი ფართის შემნახველ ასახვებსა და ჰამილტონურ სისტემებს შორის

ჰენონის გადასახვას აქვს, არაინტეგრებადი ჰამილტონიანის ყველა თვისება, თუმცა, მისი მიღების წესი ამ ჰამილტონიანიდან არაა მარტივი.

ამიტომ, შევეცადოთ ვუპასუხოთ კითხვაზე: შეგვიძლია, თუ, არა ჰამილტონიანიდან მივიღოთ ფართის შემნახველი ასახვები?

განვიხილოთ, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მარტივი ჰამილტონიანი

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q), \quad (14.19)$$

რომლისთვისაც ჰამილტონური განტოლებები ჩაიწერება მარტივად

$$\dot{q} = p, \quad (14.20)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}. \quad (14.21)$$

ჰამილტონურ (14.20),(14.21) განტოლებებში დროით წარმოებულები, შევცვალოთ სასრული სხვაობებით, მაშინ მივიღებთ

$$q_{i+1} = q_i + p_i \Delta t, \quad (14.22)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_i}, \quad (14.23)$$

თუმცა, ეს გადასახვა არ ინახავს ფართობს, რადგან

$$\frac{\partial(q_{i+1}, p_{i+1})}{\partial(q_i, p_i)} \neq 1, \quad (14.24)$$

მაგრამ, თუ, ჩვენ (14.23) სხვაობიან სქემაში პოტენციალური ფუნქციის წარმოებულს გამოვითვლით წერტილში $q = q_{i+1}$, მაშინ მივიღებთ სქემას

$$q_{i+1} = q_i + p_i \Delta t, \quad (14.25)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_{i+1}}. \quad (14.26)$$

რომელიც, უკვე ინახავს ფართს.

ეხლა, ამოვწეროთ ჰამილტონიანი, რომელსაც შეესაბამება (14.25), (14.26) სასრულ-სხვაობიანი სქემა. ამისათვის, (14.19) ჰამილტონიანის მაგივრად განვიხილოთ ჰამილტონიანი

$$H(p, q, t) = \left\{ \frac{1}{2\gamma} p^2, \text{ if } 0 < t < \gamma T \text{ then } \frac{1}{1-\gamma} V(q) \right\}. \quad (14.27)$$

სადაც $0 < \gamma < 1$. ასეთი ტიპის ჰამილტონიანები გამოიყენება ტალღამტარებში გამავალი სიგნალების მოდელირებისათვის.

თუ, განვიხილავთ ჰამილტონიანს

$$H(p, q, t) = \left\{ \frac{1}{\gamma} V(q), \text{ if } 0 < t < \gamma T \text{ then } \frac{1}{2(1-\gamma)} p^2 \right\}, \quad (4.28)$$

მაშინ მივიღებთ დისკრეტულ ასახვას, რომელიც ასევე, ინარჩუნებს ფართს

$$q_{i+1} = q_i + T p_{i+1}, \quad (14.29)$$

$$p_{i+1} = p_i - T \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_i}. \quad (14.30)$$

14.5 ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა

ყველაზე უფრო მეტად პოპულარულია ასახვა, რომელიც მიიღება, თუ (14.30) ფორმულაში, პოტენციალური ენერჯიის ფუნქციას ჩავწერთ სახით

$$V(q) = -\frac{k}{(2\pi)^2} \cos(2\pi q). \quad (14.31)$$

მაშინ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებებს

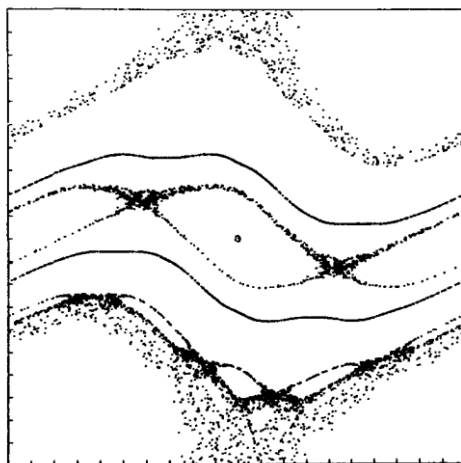
$$q_{i+1} = q_i + p_{i+1}, \quad (14.32)$$

$$p_{i+1} = p_i + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_i). \quad (14.33)$$

სადაც დავუშვით, რომ $T = 1$. ამასთან, ამ მოდელის განხილვისას, თვლიან, რომ ცვლადები იცვლებიან პერიოდით 1, ანუ,

$$\text{mod } q = 1; \quad \text{mod } p = 1. \quad (14.34)$$

ამ ასახვას ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტულ ასახვას უწოდებენ. მისი ტიპიური ფაზური სიბრტყე მოცემულია ნახ.14.7.



ნახ.14.7. ტეილორ-ჩირიკოვის ასახვის ფაზური პორტრეტი, როცა $k=0.97$

ამ ფაზური პორტრეტიდან, ნათლად ჩანს, თუ, როგორ ენაცვლებიან ერთმანეთს რეგულარული და ქაოსური ნაწილები. აქ

ვხედავთ კუნძულებსაც, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ ინვარიანტული წირები ტორები კი არ არიან აქ, არამედ კანტორები (დაკავშირებულია კანტორის სიმრავლესთან).

14.6.ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმი

(ლიაპუნოვის მაჩვენებლები)

ჰამილტონურ სისტემებში, ქაოსური მოძრაობის დამახასიათებელი თვისებაა, ძლიერი დამოკიდებულება საწყის პირობებზე. ქაოსურობის შემთხვევაში, საწყის პირობებში ახლოსმდგომი ინტეგრალური წირები, შემდგომში, ექსპონენციალური სისწრაფით შორდებიან. თუმცა, ფაზური სივრცის შემოფარგულობის გამო, ისინი უსასრულოდ ვერ დაშორდებიან. დაშორების სიჩქარის შესაფასებლად, იყენებენ ლიაპუნოვის მაჩვენებლებს.

მათი გამოყენების არეალი, სცილდება ჰამილტონურ სისტემებს და ისინი გამოიყენება საზოგადოდ, ყველა სახის დინამიკური სისტემებისათვის.

როგორც ვიცით, ატრაქტორები არსებობს სხვადასხვა სახის: მდგრადი ფოკუსი, ზღვართი ციკლი, ტორი და ბოლოს, უცნაური ატრაქტორი. ისმის კითხვა: როგორი იქნება კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვასხვავოთ ეს ატრაქტორები ერთმანეთისაგან? ასეთ კრიტერიუმს გვამღევს ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, რომლის შესწავლასაც ვაპირებთ ამ პარაგრაფში.

ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ავტონომიური დინამიკური სისტემა

$$\dot{q} = F(q). \tag{14.35}$$

ამ შემთხვევაში, ერთადერთი შესაძლო ატრაქტორი არის, მდგრადი უძრავი წერტილი(ერთგანზომილებიანი კვანძი). ხოლო, მისი ტრაექტორია, არის ერთი უძრავი წერტილი $q = q_0$. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ამ უძრავი წერტილის მდგრადობა, გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ უკვე შესწავლილი, გაწრფივებული სისტემის მდგრადობის ანალიზის მეთოდი. ამისათვის, განვიხილოთ უძრავი წერტილის მცირე შემფოთება

$$q(t) = q_0 + \delta q(t). \quad (14.36)$$

ჩავსვათ ეს ფუნქცია (14.35) განტოლებაში და მარჯვენა მხარე გავშალოთ მწკრივად უძრავი წერტილის მიდამოში. მიღებულ გაშლაში, შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები შემფოთების მიმართ. მაშინ გვექნება განტოლება

$$\frac{d}{dt} \delta q = L \delta q, \quad (14.37)$$

სადაც $L = \frac{\partial F}{\partial q_{q=q_0}}$ - მუდმივი სიდიდეა. ცხადია, რომ (14.37)

განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$\delta q(t) = \delta q(0)e^{Lt}. \quad (14.38)$$

თუ, $L < 0$ მაშინ უძრავი წერტილი მდგრადია. ამ მარტივ ამოცანაში L სიდიდის პოვნა, არ წარმოადგენს არავითარ სირთულეს, თუმცა სხვა შემთხვევაში, მის საპოვნელად კომპიუტერი დაგვჭირდებოდა. თუმცა, იმ რთული შემთხვევებისათვისაც კი შეგვიძლია ვიპოვოთ L სიდიდე, საკმაოდ მარტივი ფორმულით

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|. \quad (14.39)$$

ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, აზოგადებს (14.39) ფორმულას ორი მიმართულებით

- 1) ტრაექტორიები შეიძლება მოძრაობდნენ მრავალგანზომილებიან სივრცეში: $q(t)$ - რადიუს-ვექტორია, რომლის ბოლოც t დროის განმავლობაში, მოძრაობს ტრაექტორიის გასწვრივ;
- 2) სისტემის მდგომარეობის მდგრადობას ვსწავლობთ $q_0(t)$ ცნობილი ამონახსნის მახლობლობაში.

წინა მაგალითის (14.36) ანალოგიურად, განვიხილოთ შემფოთებული ამონახსნი, მხოლოდ, ეხლა უკვე *ვექტორული ტოლობა* გვექნება, რადგან მრავალგანზომილებიან ამოცანას ვიხილავთ

$$q(t) = q_0 + \delta q(t). \quad (14.40)$$

$\delta q(t)$ - შემფოთების დინამიკა გვიჩვენებს, თუ, როგორია q_0 ამონახსნის მეზობელი, $q(t)$ ტრაექტორიის დინამიკა. ის, დროთა განმავლობაში შორდება, თუ, უახლოვდება q_0 ტრაექტორიას. $\delta q(t)$ სიდიდის დინამიკის შესასწავლად, ჩავსვათ (14.40) ტოლობები ვექტორულ, არაწრფივ სისტემაში

$$\dot{q}(t) = F(q(t)), \quad (14.41)$$

სადაც q_0 ამ სისტემის ამონახსნია. მარჯვენა ნაწილი, გავშალოთ მწკრივად $\delta q(t)$ შემფოთების მიმართ და მოვახდინოთ მისი გაწრფივება. მაშინ მივიღებთ განტოლებათა წრფივ სისტემას

$$\frac{d}{dt} \delta q_i(t) = \sum_k \frac{\partial F_i(q(t))}{\partial q_k} \Big|_{q=q_0} \delta q_k(t). \quad (14.42)$$

თუ, განვაზოგადებთ (14.39) თანადობას, მივიღებთ *ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოსათვლელ ფორმულას*

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|. \quad (14.43)$$

ეხლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ კრიტერიუმი, სხვადასხვა ტიპის ატრაქტორების განსხვავებისათვის.

1. *ერთგანზომილებიან შემთხვევაში* არსებობენ მხოლოდ ისეთი მდგრადი, უძრავი წერტილები, რომელთათვისაც ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია (-);

2. *ორგანზომილებიან შემთხვევაში*, შესაძლებელია, მხოლოდ ორი ტიპის ატრაქტორები: *მდგრადი უძრავი წერტილები და ზღვარიტი ციკლები*.

თუ, ატრაქტორი მდგრადი, უძრავი წერტილია (ფოკუსი), მაშინ ლიაპუნოვის ორივე მაჩვენებელი უარყოფითია $(-, -)$.

თუ, ატრაქტორი ზღვართი ციკლია, მაშინ მისი ტრანსვერსალური შემფოთების შესაბამისი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია, ხოლო ტანგენციალურისა - ნულის ტოლი $(-, 0)$. თუმცა, ასეთივე მნიშვნელობები შეიძლება გვქონდეს „პათოლოგიურ“ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს წირი, რომელიც უძრავი წერტილებისაგან შედგება;

3.სამგანზომილებიან შემთხვევაში,

გვაქვს მდგრადი ფოკუსი, თუ, ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია $(-, -, -)$;

მდგრადი ზღვართი ციკლი, თუ, $(-, -, 0)$;

მდგრადი ტორი, თუ, $(-, 0, 0)$;

თუ, ლიაპუნოვის რომელიმე მაჩვენებელი დადებითია, შეიძლება გვქონდეს სისტემაში ქაოსი. თუ, გვაქვს $(+, 0, 0)$ მაშინ შეიძლება გვქონდეს არამდგრადი ტორი, რომელიც არაა ატრაქტორი.

თუ, სისტემის ატრაქტორის ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია $(+, 0, -)$, მაშინ ის ითვლება უცნაურ ატრაქტორად. უცნაური ატრაქტორის მეზობელი ტრაექტორიები სწრაფად შორდებიან მას.

14.7.ჰამილტონური ქაოსი ჰიდროდინამიკურ სისტემებში

ჰიდროდინამიკაში არსებობს ორგვარი მიდგომა. ესაა ეილერის მიდგომა და ლაგრანჟის მიდგომა. ეილერის მიდგომის დროს, სწავლობენ სითხის მოძრაობას მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში და სითხის მოძრაობას ახასიათებენ სიჩქარის კომპონენტებით

$$u = u(x, y, z, t), \quad (14.44)$$

$$v = v(x, y, z, t), \quad (14.45)$$

$$w = w(x, y, z, t). \quad (14.46)$$

ხოლო, ლაგრანჟის მიდგომის დროს მიყვებიან თითოეული ნაწილაკის ტრაექტორიას და სიჩქარეთა ველს წარმოადგენენ შემდეგნაირად

$$\dot{x} = u(x, y, z, t), \quad (14.47)$$

$$\dot{y} = v(x, y, z, t), \quad (14.48)$$

$$\dot{z} = w(x, y, z, t). \quad (14.49)$$

სადაც უნდა გვქონდეს საწყისი პირობებიც $(x(0), y(0), z(0))$. (14.50)

ორგანზომილებიანი უკუმში სითხისათვის, ადგილი აქვს უკუმშობის პირობას

$$u_x + v_y = 0. \quad (14.51)$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ უნდა არსებობდეს დენის ფუნქცია ψ , ისეთი, რომ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (14.52)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14.53)$$

ლაგრანჟის მიდგომის ფარგლებში, შეგვიძლია ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლებები ფორმით

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (14.54)$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14.55)$$

ამ განტოლებებს, როგორც ვხედავთ, აქვთ ჰამილტონის განტოლებების სტრუქტურა, სადაც $\psi \leftrightarrow H$, $x \leftrightarrow q$, $y \leftrightarrow p$. თუ, დენის ფუნქცია არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ (14.54),(14.55) სისტემა ავტონომიურია და ინტეგრებადი. ხოლო, თუ, გვაქვს დროზე დამოკიდებულება, მაშინ სისტემაში შეიძლება გვქონდეს ქაოსი. თუმცა, სამგანზომილებიან შემთხვევაში, ქაოსი შეიძლება წარმოიქმნას სტაციონარულ შემთხვევაშიც.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. კვეთის ზედაპირის არსი და გამოყენების არეალი;

2. ჰენონ-ჰეილესის ჰამილტონიანი;
3. ააგეთ ფართის შემნახავი ასახვა სიბრტყეზე და შეისწავლეთ მისი დინამიკა კომპიუტერზე;
4. კავშირი ფართის შემნახავ ასახვასა და ჰამილტონიანებს შორის;
5. ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოთვლა და ატრაქტორების განმასხვავებელი კრიტერიუმები.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, т.1, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელებების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988
15. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991

18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
19. Хакен Г. Синергетика Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, пер.с англ., Мир, Москва, 1985

შინაარსი

წინასიტყვაობა		ბმ.
		3
შესავალი		4
თავი I	ბულის ალგებრების კატეგორია	8
	1.1 გამონათქვამთა ბულის ალგებრა	8
	1.2 სიმრავლეთა ბულის ალგებრა	15
	1.2.1 ფრაქტალი, როგორც სიმრავლე	18
	1.3 რელაციური სისტემები	20
	1.4 თეორემათა ავტომატური დამტკიცების ელემენტები	23
	1.5 პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგაძის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდი	24
ამოცანები და საგარჯიშოები		27
ლიტერატურა		30
თავი II	რიცხვითი სიმრავლეები და ალგებრული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები	32
	2.1 ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი	35
	2.1.1 რიცხვთა თეორიის ელემენტები	39
	2.1.2 შედარებათა თეორიის ელემენტები	42
	2.2 რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიური აგება	44
	2.2.1 არაწრფივი განტოლების ამოხსნა ნიუტონის ალგორითმით	47
	2.2.2 არაწრფივი განტოლების ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით	50
	2.2.3 ორ და სამ ცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა მატრიცული ხერხით Mathcad – ის ბაზაზე	52
	2.2.4 მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით	53
	2.2.5 არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით	58
	2.2.6 არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიუტონის მეთოდით	59
	2.3 კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე	60
	2.3.1 კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი	61

		ჩაწერის ფორმები	
	2.3.2	ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში	63
	2.4	რიცხვითი სისტემების აგება გრასმან-კლიფორდის პროცედურით	64
	2.4.1	კვატერნიონები	66
	2.4.2	პაულის რიცხვები	67
	2.4.3	ჰიპერკომპლექსური რიცხვები	68
	2.5	კელი-დიქსონის პროცედურა	69
	2.5.1	ოქტავეები	69
	2.6	ზოგიერთი რიცხვითი სისტემის მატრიცული წარმოდგენა	70
ამოცანები და საგარჯიშოები			72
ლიტერატურა			75
თავი III	ფუნქციონალური სიმრავლეები		76
	3.1	წრფივი ფუნქციონალური სივრცე	76
	3.2	ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე	78
	3.3	ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	82
	3.4	სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე	83
	3.5	დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	83
ამოცანები და საგარჯიშოები			84
ლიტერატურა			87
თავი IV	საინვესტიციო პროექტების შეფასების მეთოდები		88
	4.1	პროექტის რენტაბელობისა და რისკის გამოთვლა	88
	4.2	ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია	92
	4.3	საინვესტიციო პროექტის დღევანდელი სუფთა ფასეულობის (NPV) დადგენა	96
	4.4	ინვესტიციების რენტაბელობის PI ინდექსის განსაზღვრა დისკონტირების გათვალისწინებით	98
	4.5	ინვესტიციების რენტაბელობის IRR ნორმის განსაზღვრა	99
	4.6	საინვესტიციო პროექტის დანახარჯების	99

		ანაზღაურების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრის მეთოდი	
	4.7	ფინანსური ინსტრუმენტები	100
თავი V		ცოცხალი, რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები	103
	5.1	ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი. ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი. თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება	103
	5.2	იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით	106
ამოცანები და საგარჯიშოები			106
ლიტერატურა			107
თავი VI		ცოცხალი, არაწრფივი სისტემების მოდელირება	108
	6.1	არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	108
	6.2	თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით	109
	6.3	დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	110
	6.4	დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით	112
ამოცანები და საგარჯიშოები			113
ლიტერატურა			113
თავი VII		ცოცხალი, ავტორხევითი სისტემები	115
	7.1	ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები	115
	7.2	ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი	117
	7.3	ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები (ფლატერი და დივერგენცია)	119
	7.4	ქიმიური ავტორხევითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლეფვერის მოდელი)	125
ამოცანები და საგარჯიშოები			128
ლიტერატურა			128
თავი VIII		პარამეტრული რხევითი სისტემები	130

	8.1	ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას(მატიეს განტოლება)	130
	8.2	ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)	131
	8.3	პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილიობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში(მატიეს განტოლება)	132
ამოცანები და სავარჯიშოები			134
ლიტერატურა			134
თავი IX	ცოცხალი, არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები		135
	9.1	ამოცანის ზოგადი დასმა	135
	9.2	ფრანგიშვილი-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)	136
	9.3	ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, პერიოდული გარე PR – გამლიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში	138
ამოცანები და სავარჯიშოები			140
ლიტერატურა			140
თავი X	ჩვეულებრივი სისტემების ანალიზური ამონახსნები და ელიფსური ფუნქციები		142
	10.1	წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელის ინტეგრება კვადრატურებში	142
	10.2	არაწრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელირება	145
	10.3	მეორე რიგის არაწრფივი სისტემები და ელიფსური ფუნქციები	147
	10.4	იაკობის ელიფსური ფუნქციები	149
ამოცანები და სავარჯიშოები			151
ლიტერატურა			151
თავი XI	დინამიკური სისტემების გამოკვლევა ფაზურ სივრცეში		153
	11.1	წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი	153
	11.2	ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური	157

		პორტრეტი	
	11.3	კონსერვატული სისტემების ფაზური პორტრეტი	164
	11.4	სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი, განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა	168
	11.4.1	უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია	171
	11.4.2	უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები	173
	11.4.3	ზღვარითი ციკლები	178
ამოცანები და სავარჯიშოები			179
ლიტერატურა			180
თავი XII	ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები		182
	12.1	ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი	182
	12.2	ლაგრანჟიანის თვისებები	186
	12.3	განზოგადებული იმპულსის თვისებები	188
	12.4	ჰამილტონის ფორმალიზმი	189
	12.5	ჰამილტონის განტოლება	190
	12.6	პუასონის ფრჩხილები	192
	12.7	ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები	194
	12.8	ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია	196
	12.9	კლასიკური მექანიკის გეომეტრია	197
ამოცანები და სავარჯიშოები			203
ლიტერატურა			203
თავი XIII	შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები		205
	13.1	შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივები	206
	13.2	შეშფოთებათა სინგულარული მწკრივები	207
	13.3	რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები დიფერენციალური განტოლებებისათვის	208
ამოცანები და სავარჯიშოები			210
ლიტერატურა			211
თავი XIV	ქაოსი ჰამილტონურ სისტემებში		212
	14.1	კვეთის ზედაპირების მეთოდი ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემებისათვის	212
	14.2	ჰენონ-ჰელიესის ჰამილტონიანი	214
	14.3	ბრტყელი გადასახვეები, რომლებიც	215

		ინახვენ ფართს	
	14.4	კავშირი ფართის შემნახველ ასახვებსა და ჰამილტონურ სისტემებს შორის	218
	14.5	ტელიორ-ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა	220
	14.6	ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმები (ლიაპუნოვის მაჩვენებლები)	221
	14.7	ჰამილტონური ქაოსი ჰიდროდინამიკურ სისტემებში	224
ამოცანები და სავარჯიშოები			225
ლიტერატურა			226