

**ИНЖЕНЕРНО-НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
„МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ“  
ФАКУЛЬТЕТА ИНФОРМАТИКИ И СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ ГРУЗИНСКОГО  
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Биченови Н.М., Обгадзе Т.А., Гоголадзе В.Р.**

**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЯ СТОИМОСТИ  
КОМПАНИИ**

**Монография**

**Тбилиси**

**2017**

В работе построена общая математическая модель динамики стоимости компании. Изучена адекватность построенной модели. Показано, что в частных случаях выбора определяющих параметров, получаются модель Матье и модель Дьюффинга. Для построения модели в частных случаях на основе регрессионного анализа, подбираются определяющие параметры модели, и проводится соответствующий динамический анализ. Предлагается методика построения математической модели стоимостной динамики компании. Проводится Фурье анализ и синтез временного ряда данных стоимости компании. Строится соответствующий спектр распределения частот. Проводится также, вейвлет-анализ и синтез. На основе R/S анализа анализируется персистентность временного ряда данных динамики стоимости компании. В случае, персистентности динамических данных, строятся Фурье и вейвлет-приближения для прогноза последующих изменений стоимости компании. Изучены числовые примеры.

Рецензенты: проф. В.Кекенадзе

проф. Г.Чикадзе

ISBN 978-9941-0-9605-1

© Все авторские права защищены. Использование любой части (текста, фото, иллюстрации и т.д.) в любой форме (в электронном или механическом) запрещается без письменного согласия авторов. Нарушение авторского права наказуемо по закону.

## Введение

**Актуальность** выбранной темы обусловлена тем, что по мере развития рыночных отношений потребность в оценке бизнеса постоянно возрастает. Оценка бизнеса помогает предпринимателям и физическим лицам правильно понять реальную стоимость предприятия (акций) прежде чем совершать сделки с ними. Оценка бизнеса также имеет значение в определении текущей стоимости бизнеса. Она необходима не только для проведения сделок купли-продажи или расчета его залоговой стоимости, но и для определения эффективности принятия управленческих решений, основным критерием выбора которых является увеличение стоимости компании.

Компания представляет собой динамическую модель, в которой поведенческие характеристики изменяются, взаимодействуют, влияют на ситуацию внешней среды. В каждый момент компания имеет соответствующие финансовые показатели[1].

На сегодняшний день теория и методология управления стоимостью компании не полностью отвечают требованиям нового времени и современной практической деятельности. В связи с этим формирование новой теории управления стоимостью компании представляют собой актуальную научную проблему[1].

Оценка стоимости предприятия, в том числе определение стоимости его ценных бумаг, долей в его капитале, необходима например, при выкупе акций, эмиссии ценных бумаг и т.д.

**Состояние изученности проблемы.** Теоретические аспекты оценки бизнеса предприятий рассмотрены в работах таких авторов, как Damodaran A., Fernandez P., Copel T. Румянцева Е.Е., Грязнова А.Г., Филлипов Л.А., Чиркова Е.В., Дранко О.И., Новиков Д.А., Романов В.С., Ивашковская И.В. и других авторов[1-50].

В публикациях ученых-экономистов отражаются различные методики по оценке отдельных объектов собственности и имущества предприятия. Из-за сложности проблемы, в настоящее время, отсутствуют общепринятые методы оценки и прогноза динамического изменения стоимости компаний. Многие важные вопросы исследуемой проблемы остаются недостаточно разработанными и дискуссионными.

**Цель и задачи исследования.** Проанализировать существующие подходы и методики оценки бизнеса компаний, изучить методы динамического анализа временных рядов в применении к рассматриваемой проблеме.

Изучить возможность прогнозирования стоимости компаний в малом временном масштабе на основе R/S анализа и в случае возможности прогноза, построить соответствующую функцию приближения, выявить наличие тренда.

**Научная новизна.** В работе построена общая математическая модель динамики стоимости компании. Изучена адекватность построенной модели. Показано, что в частных случаях выбора определяющих параметров, получаются модель Матье и модель Дьюффинга. Для построения модели в частных случаях на основе регрессионного анализа, подбираются определяющие параметры модели, и проводится соответствующий динамический анализ. Предлагается методика построения математической модели стоимостной динамики компании.

Проводится Фурье анализ и синтез временного ряда данных стоимости компании. Строится соответствующий спектр распределения частот. Проводится также, вейвлет-анализ и синтез. На основе R/S анализа анализируется персистентность временного ряда данных динамики стоимости компании. В случае, персистентности динамических данных, строятся Фурье и вейвлет-приближения для прогноза последующих изменений стоимости компании. Изучены числовые примеры.

**Первая глава** посвящена основам оценки бизнеса. Рассмотрены подходы и методы оценки бизнеса. Существуют три подхода для оценки компании, которые отражают какие-либо качества оцениваемой компании.

**Доходный подход** позволяет определить рыночную стоимость предприятия в зависимости от ожидаемых в будущем доходов.

Он предусматривает:

- а) составление прогноза будущих доходов;
- б) оценку риска, связанного с получением доходов;
- в) определение времени получения доходов.

Приведенная к текущей стоимости сумма будущих доходов, помогает ориентироваться в том, сколько готов заплатить потенциальный инвестор за оцениваемое предприятие.

Основным показателем в доходном подходе является чистый денежный поток.

Методы сравнительного подхода особенно эффективны при существовании активного рынка сопоставимых объектов. Если же рыночная информация бедная, сделки купли-продажи нерегулярные, а рынок монополизирован, то оценки этими методами становятся неточными, иногда и невозможными.

**Затратный подход** (The Cost Approach) (ЗП) является одним из трех основных подходов в оценке недвижимости.

В основу затратного подхода положен принцип замещения, согласно которому стоимость объекта недвижимости не должна превышать наименьшей цены, по которой может быть приобретен другой объект недвижимости эквивалентной полезности.

Не во всех случаях оправданно применение затратного метода (например, при оценке недвижимости, которая приносит доход).

В связи с этим наиболее распространенной областью применения затратного подхода является оценка объектов на "пассивных" или малоактивных секторах рынка недвижимости. Преимущество применения затратного подхода в данном случае связано с тем, что недостаточность и/или недостоверность информации о состоявшихся сделках по купле-продаже аналогичных объектов в ряде случаев ограничивает возможность использования других подходов к оценке.

Третьим подходом является **сравнительный подход**, главным плюсом, которого является то, что оценщики ориентируются на фактическую стоимость купли или продажи сходного предприятия.

**Вторая глава** посвящена построению математической модели динамики стоимости компании. Изучается адекватность построенной модели. Показывается, что в частных случаях выбора определяющих параметров модели, получаются известные динамические модели Матье и Дьюффинга.

На основе регрессионного анализа строятся конкретные функции для определяющих параметров модели, что позволяет проводить динамический прогноз изменения стоимости компании в последующие моменты времени.

**В третьей главе**, для оценки временных рядов рассматриваются различные методы динамического анализа временных рядов стоимости компании. Проводится Фурье-анализ и синтез данных, что позволяет построить соответствующее распределение спектра частот. Рассматриваются как трендовые, так и случайные

наборы данных. Проводиться вейвлет-анализ данных, что позволяет провести прогнозирование динамики данных.

Для изучения степени фрактальности временного ряда данных, применяется показатель Херста.

Херст свою методологию применил для решения случайных и неслучайных систем, продолжительности циклов, постоянства трендов. Этот метод называется методом нормированного размаха, или R/S-анализа.

В этой же главе рассчитан показатель Херста для различных временных рядов. Строятся Фурье и вейвлет-приближения данных, для прогноза значений стоимости компании в последующие годы. Рассмотрены результаты расчетов некоторых существующих компаний.

# ГЛАВА I. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

Развитие рыночных отношений привело к увеличению потребности в оценке бизнеса. С ее помощью можно определить или установить стоимость активов фирмы, приносящих или способных принести прибыль. Для этой цели необходимо провести оценочную экспертизу. В результате этого процесса можно выявить стоимость ценностей и имущества, находившегося в распоряжении данной компании: недвижимость, транспорт, различный инвентарь и инструменты, запасы на складе, нематериальные активы, инвестиции, интеллектуальная собственность, а также величина долговых обязательств.

**Оценка стоимости предприятия (бизнеса)** — это расчет стоимости предприятия на определенную дату.

## 1.1. Основные понятия в оценке стоимости бизнеса и виды стоимости

Бизнес - это коммерческая деятельность в частном секторе экономики.

Бизнес может быть корпоративным (закрытые корпорации, открытые компании, акции которых доступны и принадлежат публике) и некорпоративным (совместные предприятия, индивидуальные предприятия, полные и ограниченные партнерства) [2-3].

Наибольший интерес, при рассмотрении оценки бизнеса, представляют стандарты BSV Американского Общества Оценщиков ASA. Терминологию по оценке бизнеса определяет стандарт BSV-I принятый в 1988 году и дополнения к стандарту BSV-I принятые в 1991 году [4].

Вот основные определения:

**Оценка** (appraisal, valuation) — акт или процесс определения стоимости.

**Оценка бизнеса** (business valuation) — акт или процесс подготовки заключения или определения стоимости предприятия или доли акционеров в его капитале.

**Оценщик бизнеса** (business appraiser) — лицо, которое благодаря полученному образованию и специальной подготовке, а также накопленному опыту

квалифицирован как специалист, который правомочен, производить оценку предприятия и/или его нематериальных активов.

**Оцененная стоимость** (appraised value) — стоимость согласно мнению или определению оценщика.

**Стоимость действующего предприятия** (going concern value) — стоимость функционирующего предприятия или доли акционеров в его капитале.

**Балансовая стоимость** (book value) — разница между общей стоимостью активов (за вычетом износа, использованных ресурсов и амортизации) и общей суммой обязательств, в соответствии с данными баланса. Является синонимом чистой балансовой стоимости (net book value), чистой стоимости (net worth) и акционерного капитала (shareholder's equity).

**Обоснованная рыночная стоимость** (fair market value) — цена, по которой совершается акт купли-продажи, когда обе стороны заинтересованы в сделке, действуют не по принуждению и обладают достаточно полной информацией об условиях сделки и считают их справедливыми.

**Гудвилл**, «доброе имя» фирмы (goodwill) — нематериальные активы предприятия, которые складываются из престижа предприятия, его деловой репутации, взаимоотношения с клиентурой, местонахождения, номенклатуры производимой продукции и др. [5-6].

Бизнес может оцениваться по-разному. Это зависит от целей оценки и обстоятельств. Поэтому для проведения оценки требуется точное определение стоимости.

**Стоимость** – это денежный эквивалент, который покупатель готов обменять на какой-либо предмет или объект. Кроме понятия «стоимость», в теории и практике оценки используют понятия «цена» и «затраты» (себестоимость).

**Цена** – это показатель, обозначающий денежную сумму, за которые продавец согласен продать, а покупатель согласен купить единицу товара или услуги.

**Себестоимость** — это сумма затрат данного предприятия на производство и реализацию продукции.

При оценке деятельности используются различные виды стоимости объекта оценки:

**Стоимость объекта оценки с ограниченным рынком** - стоимость объекта оценки, продажа которого на открытом рынке невозможна или требует дополнительных затрат по сравнению с затратами, необходимыми для продажи свободно обращающихся на рынке товаров.

**Стоимость замещения объекта оценки** - это сумма затрат на создание объекта, аналогичного объекту оценки, в рыночных ценах, существующих на дату проведения оценки, с учетом износа объекта оценки.

**Стоимость воспроизводства объекта оценки** - это сумма затрат в рыночных ценах, существующих на дату проведения оценки, на создание объекта, идентичного объекту оценки, с применением идентичных материалов и технологий, с учетом износа объекта оценки.

**Стоимость объекта при существующем использовании** — стоимость объекта оценки, определяемая исходя из существующих условий и целей его использования. Оценка этого вида стоимости имеет смысл для такого оборудования, на стоимость которого сильно влияют место его расположения, наличие коммуникаций, фундамента и ограждений, приспособленность помещения, укомплектованность вспомогательными устройствами (например, оборудование энергосистем, котельные установки, средства связи и т.д.).

**Инвестиционная стоимость** — это стоимость объекта оценки, определяемая исходя из его доходности для конкретного лица при заданных инвестиционных целях. Инвестиционная стоимость определяется применительно к определенному инвестиционному проекту [7-8]. Один и тот же объект может иметь разную инвестиционную стоимость для разных проектов. Это будет зависеть от эффективности проектов, их степени риска и требуемой доходности со стороны инвестора.

**Стоимость для целей налогообложения** — стоимость объекта оценки, определяемая для исчисления налоговой базы и рассчитываемая в соответствии с положениями нормативных правовых актов (в том числе инвентаризационная стоимость). Наиболее характерным случаем является определение среднегодовой остаточной стоимости для исчисления налога на имущество.

**Ликвидационная стоимость** — это стоимость объекта оценки в случае, если объект оценки должен быть отчужден в срок меньше обычного срока экспозиции аналогичных объектов. Ликвидационная стоимость соответствует цене при вынужденной или срочной продаже. По ликвидационной стоимости оцениваются машины и оборудование при распродаже на открытом аукционе имущества обанкротившегося предприятия, при обращении права залогодержателя на имущество залогодателя, при аресте имущества в результате судебного исполнения, при аресте имущества на таможне и т.д.

Ликвидационную стоимость рассчитывают путем внесения в предварительно оцененную рыночную стоимость, так называемой **ликвидационной скидки**. Величина ликвидационной скидки зависит от ликвидности оцениваемого объекта и назначенного срока на реализацию. Чем ниже ликвидность и жестче сроки на реализацию, тем больше ликвидационная скидка.

**Утилизационная стоимость** — это стоимость объекта оценки, равная рыночной стоимости материалов, которые он в себя включает, с учетом затрат на утилизацию объекта оценки. Обычно утилизационную стоимость оценивают для сильно изношенных объектов, когда мала вероятность их продажи на вторичном рынке.

**Специальная стоимость** — это стоимость, для определения которой в договоре об оценке или нормативном правовом акте оговариваются условия, не включенные в понятия рыночной или иной стоимости, указанные в стандартах оценки. К специальному виду стоимости относится, например, таможенная стоимость.

**Рыночная стоимость** — это наиболее вероятная цена, по которой данный объект оценки может быть отчужден на открытом рынке в условиях конкуренции, когда стороны сделки действуют разумно, располагая всей необходимой информацией, а на величине цены сделки не отражаются какие-либо чрезвычайные обстоятельства [9-11].

**Рыночная цена** — это совершившийся факт, результат уже состоявшейся сделки. Она существует всегда в прошлом. Это денежное выражение результата договоренности между продавцом и покупателем. Цена продавца и цена покупателя — это денежное выражение стоимости. Она определяется самостоятельно каждым из участников сделки, но конечная величина, называемая рыночной ценой, появляется как результат согласования этих цен [12-16].

Рыночная стоимость определяется оценщиком, в частности, в следующих случаях:

- ✓ при изъятии имущества для государственных нужд;
- ✓ при определении стоимости размещенных акций общества, приобретаемых обществом по решению совета директоров (наблюдательного совета) общества;
- ✓ при определении стоимости объектов залога, в том числе ипотека;
- ✓ при определении стоимости не денежных вкладов в уставный капитал;
- ✓ при определении стоимости имущества должника в ходе процедуры банкротства;
- ✓ определении стоимости безвозмездно полученного имущества.

Цель оценки состоит в выявлении какого-либо вида оценочной стоимости, которая необходима клиенту для заключения сделки, для принятия инвестиционного решения, для внесения изменений в финансовую отчетность и т.п.

В проведении оценочных работ заинтересованы различные стороны, начиная от государственных структур и кончая частными лицами.

При оценке проводится ряд работ, которые включают в себя:

- ✓ выявление объекта оценки;
- ✓ формирование задач и подхода к оценке;
- ✓ нахождение вида оцениваемой стоимости;
- ✓ заключение договора об оценке с заказчиком;
- ✓ выявление количественных и качественных характеристик объекта оценки;
- ✓ анализ того рынка, к которому относится объект оценки;
- ✓ выбор метода оценки в рамках каждого из подходов к оценке и осуществление нужных расчетов;
- ✓ обобщение результатов, полученных в рамках каждого из подходов к оценке, определение итоговой величины стоимости объекта оценки;
- ✓ составление отчета об оценке и передача заказчику.

## **1.2. Анализ финансовой отчетности в оценке бизнеса**

Анализ финансового состояния объекта является предварительным этапом работ по оценке.

Финансовый анализ оцениваемого предприятия проводится на основе баланса предприятия, отчета о финансовых результатах, данных аналитических и синтетических счетов бухгалтерского учета и других финансовых документов.

Основная цель финансового анализа — определить реальное финансовое состояние предприятия на дату оценки и найти резервы его улучшения.

**Финансовое состояние** — это способность предприятия финансировать свою деятельность.

Финансовое состояние может быть устойчивым, неустойчивым и кризисным. Основная характеристика хорошего финансового состояния — способность предприятия своевременно производить платежи, финансировать свою деятельность на расширенной основе [17-18].

При оценке стоимости бизнеса, наряду с определением реального финансового состояния предприятия, цели финансового анализа можно дополнить следующими:

- определение реальной доходности оцениваемого предприятия для корректного прогнозирования денежных потоков;
- выявление степени соответствия финансовой отчетности оцениваемого предприятия общепринятым в отрасли принципам бухгалтерского учета;
- сравнение оцениваемого предприятия с его аналогами для оценки риска, присущего данному бизнесу, и параметров его стоимости;
- оценка экономических возможностей и перспектив бизнеса;
- корректировка финансовых отчетов для целей оценки.

В соответствии с целями оценки бизнеса степень детализации финансового анализа может быть различной:

- экспресс-анализ, при котором анализируются данные бухгалтерской отчетности,
- оценивается финансовая устойчивость и динамика развития, показатели оцениваемого предприятия сравниваются с абсолютными, отраслевыми или с показателями предприятий-аналогов;
- при детальном анализе финансовой устойчивости анализируются баланс, отчет о финансовых результатах, данные аналитического и производственного учета.

При любой степени детализации анализ проводится в два этапа:

1. анализ финансовых отчетов;
2. анализ финансовых показателей.

Анализу и корректировке в целях оценки бизнеса подвергаются баланс и отчет о финансовых результатах.

Баланс предприятия отражает финансово-имущественное состояние предприятия на конкретную дату.

Отчет о финансовых результатах отражает выручку, затраты и прибыль предприятия за определенный период (квартал, год). Скорректированный баланс и отчет о финансовых результатах используются в каждом из подходов к оценке.

При оценке стоимости предприятий (бизнеса) финансовый анализ проводится в два этапа:

1. анализ финансовых отчетов,
2. анализ финансовых коэффициентов (показателей).

В процессе функционирования предприятия величина активов, их структура претерпевают постоянные изменения. Для выявления динамики этих изменений проводят вертикальный и горизонтальный анализ отчетности.

**Вертикальный анализ** — анализ отдельных разделов и статей баланса, отчета о финансовых результатах показывает структуру средств предприятия и их источников. Расчеты обычно проводят в процентах от общей суммы средств предприятия для сопоставимости данных, что позволяет избежать инфляционной корректировки ретроспективной финансовой документации [19].

**Горизонтальный анализ** — анализ финансовой документации за ряд лет, данные которого представляются в виде индексов по отношению к базисному году или сопоставления процентных изменений по статьям за анализируемый период.

С помощью анализа финансовых коэффициентов финансовых отчетов можно выявить:

- сильные и слабые стороны бизнеса;
- диспропорции в структуре капитала;
- уровень риска при инвестировании средств в данный бизнес;
- базу для сравнения с компаниями-аналогами.

Для финансового анализа можно использовать большое количество коэффициентов, но оценщик выбирает наиболее важные с учетом целей оценки.

### **1.3. Подходы и методы оценки стоимости бизнеса**

Для определения рыночной или другого вида стоимости оценщики применяют специальные способы расчета, которые получили название подходов оценки. Каждый подход оценки предполагает соответствующий алгоритм расчета.

Все методы оценки позволяют определить стоимость бизнеса на конкретную дату и все методы являются рыночными, так как учитывают сложившуюся рыночную ситуацию, рыночные ожидания инвесторов, рыночные риски и предполагаемую «реакцию» рынка при сделках купли-продажи с оцениваемым объектом.

При оценке бизнеса используют следующие основные подходы:

- ✓ **доходный,**
- ✓ **затратный,**
- ✓ **сравнительный.**

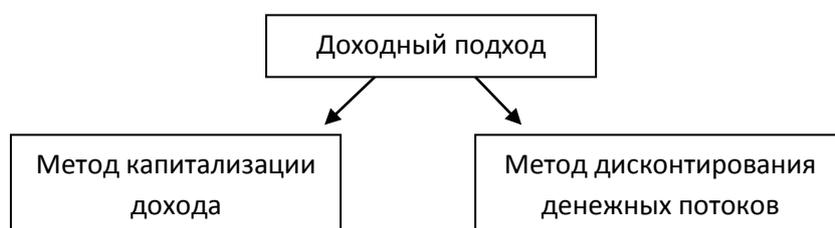
Все подходы к оценке бизнеса предполагают применение специфических методов и примеров, а также требует соблюдения своих условий, наличия достаточных факторов. Информация, используемая в том или ином подходе, отражает либо настоящее положение фирмы (сравнительный, рыночный подход), либо её прошлые достижения (затратный подход), либо её будущие результаты, т.е. ожидаемые в будущем доходы (доходный подход) [20].

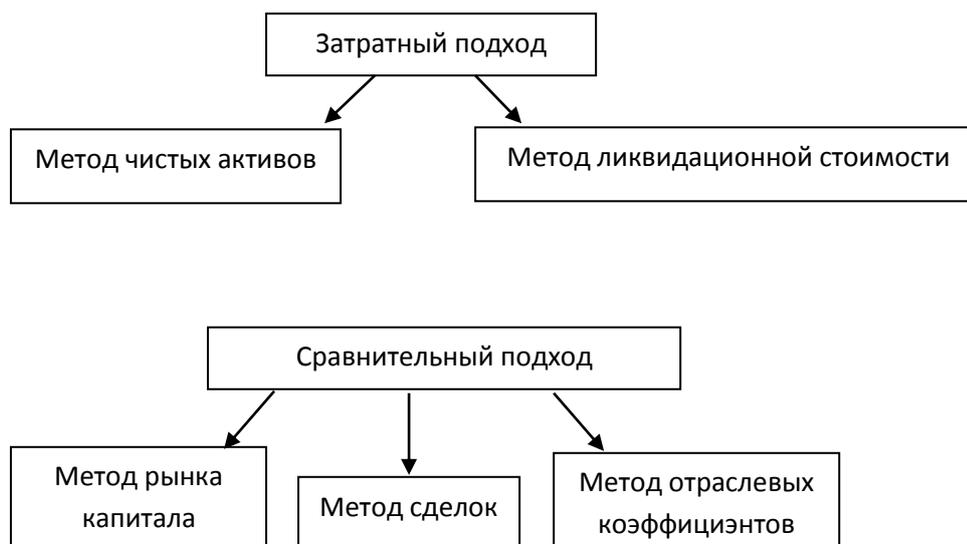
Доходные предприятия, как правило, оцениваются на основе их коммерческого потенциала (например, бензозаправочная станция, торговый центр или мотель). Объем продаж бензина, количество постояльцев в гостинице являются источниками дохода, который после сравнения со стоимостью операционных расходов позволяет определить доходность данного предприятия. Такой подход к оценке называется **доходным**.

**Затратный** подход наиболее применим для оценки нового строительства, для определения варианта наилучшего и наиболее эффективного использования земли, а также в целях страхования. Собираемая информация обычно включает данные о ценах на землю, строительные спецификации, данные об уровне зарплаты, стоимости материалов, расходах на оборудование и т.п.

**Сравнительный** подход особенно полезен тогда, когда существует активный рынок сопоставимых объектов собственности. Точность оценки зависит от качества собранных данных, так как, применяя данный подход, оценщик должен собрать достоверную информацию о недавних продажах сопоставимых объектов. Эти данные включают: физические характеристики, время продажи, местоположение, условия продажи и условия финансирования.

Каждый из трех рассмотренных подходов предопределяет использование при оценке внутренне присущих ему методов:





#### 1.4. Методы доходного подхода при оценке бизнеса

Мы уже отметили, что при доходном подходе используется метод капитализации дохода и метод дисконтирования денежных потоков [21-24].

Оценка стоимости бизнеса организации методом **дисконтированных денежных потоков** (ДДП, Discounted Cash Flow, DCF) наиболее широко применяется в рамках доходного подхода. Он основан на предположении о том, что потенциальный покупатель не заплатит за данную организацию сумму, большую, чем текущая стоимость будущих доходов от бизнеса этой организации, а собственник не продаст свой бизнес дешевле текущей стоимости прогнозируемых будущих доходов. В результате взаимодействия, стороны придут к соглашению о цене, равной текущей стоимости будущих доходов организации [25].

Оценка организации методом ДДП состоит из следующих этапов:

- ✓ выбор модели денежного потока;
- ✓ определение длительности прогнозного периода;
- ✓ ретроспективный анализ объема продаж и его прогноз;
- ✓ прогноз и анализ расходов;
- ✓ прогноз и анализ инвестиций;
- ✓ расчет денежного потока для каждого прогнозного года;
- ✓ определение ставки дисконта;
- ✓ расчет величины стоимости в постпрогнозный период;

- ✓ расчет текущих стоимостей будущих денежных потоков и их стоимости в постпрогнозный период;
- ✓ внесение итоговых поправок.

В рамках метода дисконтирования денежного потока, основным показателем является денежный поток, который рассчитывается как разница между притоком и оттоком денежных средств за определенный период.

Различают следующие основные виды денежного потока:

- ✓ номинальный или реальный;
- ✓ приносимый собственным капиталом, приносимый всем инвестированным капиталом.

С математической точки зрения ставка дисконта — это процентная ставка, используемая для пересчета будущих потоков доходов в единую величину текущей стоимости, являющуюся базой для определения рыночной стоимости компании.

В экономическом смысле ставка дисконта - это требуемая инвесторами ставка дохода на вложенный капитал в сопоставимые по уровню риска объекты инвестирования.

Вследствие риска, связанного с получением будущих доходов, ставка дисконта должна превышать безрисковую ставку и обеспечивать премии за все виды рисков, сопряженных с инвестированием в оцениваемую компанию.

Определение **ставки дисконта** (процентной ставки для пересчета будущих доходов в текущую стоимость) зависит от того, какой тип денежного потока используется в качестве базы. Для денежного потока от собственного капитала применяется ставка дисконта, определяемая собственником как ставка отдачи на собственный капитал. Для денежного потока от всего инвестированного капитала применяется ставка дисконта, равная сумме взвешенных ставок отдачи на собственный капитал и заемные средства, где в качестве весов выступают доли заемных и собственных средств в структуре капитала.

Для денежного потока от собственного капитала наиболее распространенными методами определения ставки дисконта являются метод кумулятивного построения и модель оценки капитальных активов. Для денежного потока для всего инвестированного капитала обычно используют модель средневзвешенной стоимости капитала.

При определении ставки дисконта кумулятивным методом за базу расчетов берется ставка дохода по безрисковым ценным бумагам, к которой прибавляется дополнительный доход, связанный с риском инвестирования в данный вид ценных бумаг. Затем вносятся поправки (в сторону увеличения или уменьшения) на действие количественных и качественных факторов риска, связанных со спецификой данной компании.

В соответствии с моделью оценки капитальных активов (CapitalAssetsPricingModel, CAPM) ставка дисконта определяется по формуле:

$$R = R_f + \beta(R_m - R_f) + S_1 + S_2 + C, \quad (1.1)$$

где

$R$  – требуемая инвестором ставка дохода на собственный капитал;

$R_f$  – безрисковая ставка дохода;

$R_m$  – общая доходность рынка в целом (среднерыночного портфеля ценных бумаг);

$\beta$  – коэффициент бета (мера систематического риска, связанного с макроэкономическими и политическими процессами, происходящими в стране);

$S_1$  – премия для малых организаций;

$S_2$  – премия за риск, характерный для отдельной компании;

$C$  – страновой риск.

Коэффициент  $\beta$  представляет собой меру систематического риска и рассчитывается методом ковариации и дисперсии, исходя из амплитуды колебания цен на акции оцениваемой компании или компаний аналогов по сравнению с изменениями на фондовом рынке в целом.

Расчетная формула имеет вид:

$$\beta = \frac{\sum(r_i - \bar{r}_i) * (rm_i - \overline{rm})}{\sum(rm_i - \overline{rm})^2} \quad (1.2)$$

где:

$r_i$  — доходность акции на  $i$ -й момент времени;

$\bar{r}_i$  — средняя доходность акции за рассматриваемый период;

$rm_i$  — доходность фондового рынка на  $i$ -й момент времени;

$\overline{rm}_i$  — средняя доходность фондового рынка за рассматриваемый период.

Согласно модели средневзвешенной стоимости капитала, ставка дисконта (WeightedAverageCostofCapital, WACC) определяется следующим образом:

$$WACC = k_d *(1-t_c*w_d + k_p *w_p + k_s *w_s , \quad (1.3)$$

где

$k_d$  – стоимость привлеченного заемного капитала;

$t_c$  – ставка налога на прибыль;

$w_d$  – доля заемного капитала в структуре капитала организации;

$k_p$  – стоимость привлечения акционерного капитала (привилегированные акции);

$w_p$  – доля привилегированных акций в структуре капитала организации;

$k_s$  - стоимость привлечения акционерного капитала (обыкновенные акции);

$w_s$  - доля обыкновенных акций в структуре капитала организации.

Кроме двух рассмотренных методов расчета ставки дисконтирования в современной оценочной практике используются и другие методы.

Например, **модель Дюпона** или метод среднеотраслевой рентабельности активов и капитала отражает среднюю доходность отрасли на активы или вложенный капитал.

Для оценки этим методом используют показатели ROA (Return of Equity) и ROE (Return of Assets), которые содержат в себе все риски, присущие отрасли оцениваемой компании. Поэтому главным условием применения модели Дюпона является достаточная информация о состоянии отрасли.

Модель Дюпона имеет следующий вид:

$$ROE = \frac{Profit}{Equity}, \quad (1.4)$$

$$ROA = \frac{Profit}{Assets}. \quad (1.5)$$

Метод среднеотраслевой рентабельности активов и капитала (ROA, ROE) выгодно применять, когда акции не котируются на бирже, т.е. являются наименее рыночными. Рассчитанные для конкретной компании показатели сравнивают со среднеотраслевыми показателями.

Применение метода дисконтированного денежного потока – сложный процесс, однако, во всем мире он признан как наиболее теоретически обоснованный. Этот метод применяется в 80 – 90% случаев при оценке крупных и средних организаций в странах, где хорошо развита рыночная экономика.

Согласно методу капитализации дохода рыночная стоимость бизнеса определяется по формуле:

$$V = \frac{D}{R}, \quad (1.6)$$

где:

D — чистый доход бизнеса за год;

R — коэффициент капитализации.

Капитализация — это превращение денежного потока в стоимость путем деления или умножения (чаще деления) рассчитанной величины потока дохода на коэффициент капитализации или мультипликатор.

**Ставка капитализации** (коэффициент капитализации) — показатель, который описывает отношение рыночной стоимости актива к чистому доходу за год. В оценке имущества этот показатель рассчитывается так: чистая прибыль в год стоимость недвижимости. Таким образом, ставка капитализации показывает инвестору процент дохода, который он получит, купив тот или иной актив. Снижение ставок капитализации может свидетельствовать о спаде на рынке [26-29].

Метод капитализации прибыли обычно используется, когда имеется достаточно данных для определения текущего денежного потока, а ожидаемые темпы роста умеренны или предсказуемы. Данный метод наиболее применим к организациям, приносящим стабильную прибыль, величина которой из года в год меняется незначительно или темпы ее роста постоянны.

Процесс оценки бизнеса методом капитализации прибыли включает следующие этапы:

- ✓ анализ финансовой отчетности организации;
- ✓ определение величины прибыли, которая будет капитализирована;
- ✓ расчет ставки капитализации;
- ✓ определение предварительной величины стоимости бизнеса организации;
- ✓ внесение итоговых поправок.

Преимуществом данного метода является простота расчетов, но метод не следует применять, когда:

- ✓ отсутствует информация о рыночных сделках или не проведен их экономический анализ;
- ✓ если бизнес находится в стадии становления;
- ✓ когда объект требует серьезной реструктуризации.

## 1.5. Методы затратного подхода при оценке бизнеса

Затратный подход основан на определении суммы затрат, необходимых для воспроизводства или замещения объекта оценки с учётом его физического и морального износа. При этом оценка предприятия проводится с точки зрения реализации накопленных им активов с учётом возмещения имеющейся задолженности кредиторам [30-34].

Балансовая стоимость активов и обязательств предприятия вследствие инфляции, изменений конъюнктуры рынка, используемых методов учёта, как правило, не соответствует рыночной стоимости. В результате перед оценщиком встает задача проведения корректировки баланса предприятия. Для осуществления этого предварительно проводится оценка обоснованной рыночной стоимости каждого актива в отдельности, затем определяется текущая стоимость обязательств и, наконец, из обоснованной рыночной стоимости суммы активов предприятия вычитается текущая стоимость всех его обязательств. Результат показывает оценочную стоимость собственного капитала предприятия. Данный метод позволяет оценить стоимость предприятия с позиции владельца, полностью контролирующего весь бизнес.

Затратный подход в процессе оценки стоимости компании представлен двумя методами: метод стоимости чистых активов и метод ликвидационной стоимости.

**Метод ликвидационной стоимости** при оценке бизнеса организации применяется, когда организация находится в ситуации банкротства или ликвидации, либо есть серьезные сомнения в способности организации оставаться действующей и продолжать свой бизнес.

Ликвидационная стоимость представляет собой чистую денежную сумму, которую собственник организации может получить при ликвидации организации и закрытии его бизнеса, отдельной распродаже активов и расчетов со всеми кредиторами [34-40].

Различают три вида ликвидационной стоимости:

1. упорядоченную, когда распродажа активов ликвидируемой организации осуществляется в течение разумного периода времени, с тем чтобы можно было получить максимально возможные цены продажи активов;
2. принудительную, когда активы организации распродаются настолько быстро, насколько это возможно, часто одновременно и на одном аукционе;
3. стоимость прекращения существования активов организации, когда активы организации не продаются, а списываются и уничтожаются, и стоимость

организации в этом случае представляет собой отрицательную величину, так как требуются определенные затраты на уничтожение материальных активов.

**Чистые активы** — это величина, определяемая путем вычитания из суммы активов акционерного общества, принимаемых к расчету, суммы его обязательств, принимаемых к расчету.

Проведение оценки с помощью метода чистых активов основывается на анализе финансовой отчетности.

В рамках метода **стоимости чистых активов**, используемого при оценке бизнеса компании в процессе реструктуризации, отдельные объекты (нематериальные активы, долгосрочные финансовые вложения, здания, машины, оборудование) могут оцениваться с использованием доходного и сравнительного подхода.

Расчёты по методу чистых активов при оценке действующего предприятия выполняются по обобщенной формуле

$$C_{п}=A_{р}-O_{т} \quad (1.7)$$

где  $C_{п}$  - стоимость предприятия (собственного капитала)

$A_{р}$  – рыночная стоимость активов;

$O_{т}$  – текущая стоимость долговых обязательств.

## 1.6. Методы сравнительного подхода при оценке бизнеса

Сравнительный подход предполагает, что ценность собственного капитала фирмы определяется той суммой, за которую она может быть продана при наличии достаточно сформированного рынка [34-40].

Другими словами, наиболее вероятной ценой стоимости оцениваемого бизнеса может быть реальная цена продажи сходной фирмы, зафиксированная рынком.

Сравнительный подход в зависимости от целей, объекта оценки и источников информации включает три метода:

- **метод отраслевых коэффициентов;**
- **метод компании аналога (метод рынка капитала);**
- **метод сделок;**

**Метод отраслевых коэффициентов**, или метод отраслевых соотношений, основан на использовании рекомендуемых соотношений между ценой бизнеса организации и определенными финансовыми параметрами.

Отраслевые коэффициенты рассчитываются на основе длительных статистических наблюдений специальными исследовательскими институтами за ценой продажи различных действующих организаций и их важнейшими производственно-финансовыми характеристиками. В результате многолетних обобщений, в странах с развитой рыночной экономикой разработаны достаточно простые формулы определения стоимости бизнеса организации. Например, цена бензозаправочной станции колеблется в диапазоне 1,2 – 2 месячной выручки, рекламные агентства продаются за 0,7 годовой выручки, бухгалтерские фирмы – за 0,5 годовой выручки, а цена организации розничной торговли может быть определена следующим образом: 0,75 – 1,5 величины чистого годового объема продаж увеличивается на стоимость оборудования и запасов, которыми располагает организация.

**Метод рынка капитала**, или метод компании-аналога, основан на использовании цен, сформированных открытым фондовым рынком. То есть, при оценке акций организации, базой для сравнения служит цена на единичную акцию компаний-аналогов, и в чистом виде данный метод используется для оценки миноритарного пакета акций [41-45].

Процесс оценки акций (бизнеса) организации с применением метода рынка капитала включает следующие основные этапы:

- ✓ сбор необходимой информации;
- ✓ выбор организаций-аналогов;
- ✓ финансовый анализ;
- ✓ расчет оценочных мультипликаторов;
- ✓ выбор величины мультипликатора;
- ✓ определение итоговой величины стоимости.

Сбор необходимой информации включает получение данных о фактических ценах купли-продажи акций, аналогичных с акциями оцениваемой организации, а также бухгалтерской и финансовой отчетности оцениваемой организации и организаций-аналогов.

Поиск и отбор сопоставимых организаций - ключевой момент при использовании данного подхода. Основная сложность состоит в том, что предполагается сопоставлять во многом несопоставимые объекты. Первичный отбор и сопоставление организаций-аналогов проводится по нескольким критериям: отраслевая принадлежность, производимая продукция, ассортимент, объем

производства. Затем первичный список сужается из-за отказа некоторых организаций предоставить необходимую информацию, а также из-за введения уточняющих критериев для сравнения.

Финансовый анализ является важнейшим приемом определения сопоставимости аналогичных организаций, поскольку с помощью финансового анализа можно определить рейтинг оцениваемой компании в списке аналогов. Финансовый анализ включает анализ коэффициентов заемных средств (структуры капитала), анализ коэффициентов собственных оборотных средств (ликвидность), сопоставление балансовых отчетов стандартного формата, отчетов о прибылях и убытках стандартного формата, анализ операционных коэффициентов (доход на активы, доход на собственный капитал и т.д.).

Следующий этап - определение, какой из оценочных мультипликаторов наиболее применим для оцениваемой организации.

**Мультипликатор** – это коэффициент, отражающий соотношение между ценой бизнеса и ее финансовыми показателями. На практике, при оценке акций (бизнеса) организации используются два типа мультипликаторов: интервальные и моментные (Таблица 1.1).

Таблица 1.1. Наиболее используемые оценочные мультипликаторы

Наиболее используемые оценочные мультипликаторы	
Мультипликаторы	Условие применения
<b>Интервальные</b>	
Цена / валовые доходы	Оцениваемая и сопоставимые организации имеют сходные операционные расходы (сфера услуг)
Цена / чистая прибыль	Прибыль относительно высока и отражает реальное экономическое состояние организации
Цена / прибыль до налогообложения	Сопоставляются организации, имеющие различные налоговые условия
Цена / денежный поток	Организация имеет относительно низкий доход, сравнимый с амортизацией
Цена / дивидендные выплаты	Дивиденды выплачиваются достаточно стабильно как в аналогах, так и в оцениваемой организации.
<b>Моментные</b>	
Цена / балансовая стоимость собственного капитала	Организация имеет на балансе значительные активы, а также имеется устойчивая связь между

	показателем балансовой стоимости и генерируемым доходом
Цена/ чистая стоимость активов	Организация имеет значительные вложения в собственность (недвижимость, ценные бумаги, оборудование) или основной бизнес являются хранение, покупка и продажа собственности, а управленческий и рабочий персонал добавляет к продукции незначительную стоимость

При расчете оценочных мультипликаторов определяется цена акции по всем организациям, выбранным в качестве аналогов - это даст значение числителя в формуле, а затем вычисляется финансовая база (прибыль, объем продаж, стоимость чистых активов и т.д.) либо за определенный период, либо по состоянию на дату оценки - это даст величину знаменателя.

Определение итоговой величины стоимости включает выбор величины мультипликатора, взвешивание промежуточных результатов и внесение итоговых корректировок.

**Метод сделок, или метод продаж**, ориентирован на цены приобретения предприятия в целом либо его контрольного пакета акций. Это определяет наиболее оптимальную сферу применения данного метода — оценка 100%-го капитала, либо контрольного пакета акций [45-50].

Сравнительный подход к оценке бизнеса во многом схож с методом капитализации доходов. В обоих случаях оценщик определяет стоимость компании, опираясь на величину дохода компании.

Несмотря, на многочисленные работы, для определения стоимости компании нет общего подхода, и в каждом практическом случае, для каждого момента времени, приходится пользоваться полуэмпирическими формулами и коэффициентами. Поэтому, нам представляется, что целесообразно использовать современные математические средства для определения динамики стоимости компании.

**Стоимость акционерного капитала** - это финансовый термин, который указывает на минимальный однолетний уровень доходности, который фирма должна обеспечить своим обычным акционерам за ожидание прибыли и риск.

Стоимость акционерного капитала, в настоящее время, высчитывают путем деления дивидендов на акцию в будущем году (Dividend per Share for Next Year), на текущую рыночную стоимость акции (Current Market Value of the Stock) и затем добавления темпов роста дивидендов (Growth Rate of the Dividends):

$$C_t = \frac{Div_1}{P_0} + g \quad (1.8)$$

Другим способом является расчет путем применения безрисковой доходности (Risk-free Return) (доходность на государственные облигации) плюс бета показателя компании (как правило, публикуется определенными инвестиционными компаниями), умножив на разницу между доходностью на среднюю ценную бумагу (например, средняя доходность на все акции, входящие в индекс Dow Jones) минус безрисковая доходность:  $K = K_{\text{бp}} + \beta * (K_{\text{cp}} - K_{\text{бp}})$ , где  $K$  - цена акционерного капитала, равная требуемой доходности акций компании,  $\beta$  - бета-коэффициент рассматриваемого акционерного капитала (рассматриваемых акций), который рассчитывается по следующей формуле:

$$\beta = \frac{cov(K, K_{cp})}{\sigma_{cp}^2}, \quad (1.9)$$

$\sigma_{cp}^2$  - дисперсия показателя доходности акций, для рассматриваемой группы компаний” [24 ], [39]

„Стоимость долга  $C_d$  (Cost of debt,) - это обычно доходность по облигациям компании; но если у компании нет облигаций, используют ставку по банковским кредитам компании; если нет информации ни по доходности, ни по ставкам, но известно, что у компании есть долг, используют доходность по облигациям похожих компаний (у них должны быть одинаковые масштабы, кредитные рейтинги, они должны быть из одного сектора экономики, то есть должны быть похожи по всем возможным показателям)“ [24 ], [39].

Сравнительный подход обладает рядом преимуществ и недостатков, которые должен учитывать профессиональный оценщик.

Среди преимуществ, следует выделить то, что оценщик ориентируется на фактические цены купли-продажи похожих предприятий. В данном случае цена определяется рынком, т.к. оценщик ограничивается только корректировками, обеспечивающими сопоставимость аналога с оцениваемым объектом, в то время как

при использовании других подходов оценщик определяет стоимость предприятия на основе произведенных расчетов.

Среди недостатков следует отметить то, что основой для расчета являются достигнутые в прошлом финансовые результаты.

Суть сравнительного подхода к определению стоимости компании заключается в следующем. Выбирается недавно проданное предприятие, которое аналогично оцениваемой фирме. Рассчитывается соотношение между рыночной ценой продажи предприятия аналога и каким-либо финансовым показателем.

Такое соотношение называется **ценовым мультипликатором**. Для получения рыночной стоимости собственного капитала необходимо умножить аналогичный финансовый показатель оцениваемой компании на расчетную величину ценового мультипликатора.

Например, необходимо оценить предприятие, получившее в последнем финансовом году чистую прибыль в размере 50 000 000\$.

Аналитик располагает достоверной информацией о том, что недавно была продана сходная компания за 1500 000 000\$, ее чистая прибыль за аналогичный период составила 150 000 000\$.

Рассчитаем по компании-аналогу соотношение рыночной цены и чистой прибыли

$$1500\ 000\ 000 / 150\ 000\ 000 = 10$$

Определим стоимость оцениваемой компании:

$$50\ 000\ 000 * 10 = 500\ 000\ 000\$$$

## ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СТОИМОСТИ КОМПАНИИ

В данной главе, для изучения динамики стоимости компании, строится математическая модель, и изучаются частные случаи построенной модели, которые показывают широту охвата процессов различной сложности. На основе регрессионного анализа, строятся функции для определяющих параметров модели, изучается динамика данного (гипотетического) временного ряда данных, изменения стоимости компании с течением времени.

### 2.1. Построение математической модели экономической динамики стоимости компании

Стоимость компании складывается из двух компонент: **текущая рыночная стоимость чистых активов и текущая стоимость долговых обязательств.**

**Мы будем считать стоимостью чистых активов: выручку минус расходы (в том числе, на покрытие налогов) за год вместе с фондом развития компании, оборотным капиталом и стоимостью средств производства.**

**Стоимость долга (дебет), это текущая сумма долговых обязательств по всем видам задолженности компании за данный отчётный промежуток времени.**

Представим стоимость компании в виде разности стоимости чистых активов и долга:

$$X(t) = A(t) - D(t), \quad (2.1)$$

где

$A(t)$  - стоимость чистых активов компании,

$D(t)$  - стоимость долга(дебет).

Стоимость чистых активов компании записываем в виде [51-61]

$$A(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (2.2)$$

где,  $\beta(t)$  - функция пропорциональности, определяемая на основе регрессионного анализа данных.

Стоимость долга представляем в виде[51-61]:

$$D(t) = \int_0^t e^{-\delta\tau} F[X(t-\tau)] d\tau, \quad (2.3)$$

где зависимость  $F[X(t-\tau)]$  определяется на основе регрессионного анализа данных. Подставляя соотношения (2.2) и (2.3) в уравнение (2.1), получаем интегро – дифференциальное уравнение экономической динамики стоимости компании(2.4):

$$\dot{X}(t) = \beta(t) \cdot X(t) - \int_0^t e^{-\delta\tau} F[X(t-\tau)] d\tau. \quad (2.4)$$

Чтобы упростить интеграл в правой части уравнения (2.4), производим замену переменных по формуле  $t - \tau = s$ , тогда

$$ds = -d\tau, \quad \int_0^t e^{-\delta\tau} F[X(t-\tau)] d\tau = e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta s} F[X(s)] ds.$$

Подставляя, полученное выражение интеграла в (2.4) получаем уравнение стоимостной динамики в виде:

$$\dot{X}(t) = \beta(t) \cdot X(t) - e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta s} F[X(s)] ds. \quad (2.5)$$

Умножаем уравнение (2.5) на  $e^{\delta t}$ , тогда имеем

$$X(t) \cdot e^{\delta t} = e^{\delta t} \cdot \beta(t) \cdot X(t) - \int_0^t e^{\delta s} F[X(s)] ds. \quad (2.6)$$

Чтобы избавиться от интеграла в правой части уравнения (2.6) дифференцируем ее по параметру времени -  $t$ , тогда получаем **математическую модель стоимостной динамики** в виде

$$e^{\delta t} \cdot \beta(t) \cdot \ddot{X} + e^{\delta t} \cdot (\dot{\beta} + \delta \cdot \beta - 1) - e^{\delta t} \cdot F[X(t)] - \delta \cdot e^{\delta t} \cdot X = 0. \quad (2.7)$$

Если  $\beta(t) = 0$ , тогда из (2.2) имеем  $A(t) = 0$ , т.е. нет чистого капитала, что из (2.1) дает  $\dot{X}(t) = -D(t)$ , иначе говоря, имеем только долг, но это исключается, поскольку, до этого, наступает уровень нежелательного банкротства.

Если же, нас интересует более весомый случай, то допускаем что  $\beta(t) \neq 0$  и из (2.7) получаем **математическую модель стоимостной динамики компании** в виде [51-55]:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) + \delta\beta - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) - \frac{F[X(t)] + \delta \cdot X}{\beta(t)} = 0$$

(2.8)

К уравнению (2.8) присоединяем начальные условия

$$X(0) = X_0, \dot{X}(0) = P_0, \tag{2.9}$$

и получаем задачу Коши для обобщенной обыкновенной математической модели стоимостной динамики (2.8).

Коэффициент  $\beta(t)$  и функция  $F[X(t)]$  являются параметрами управления. Целью управления является стабильное развитие с *максимизацией стоимости активов и минимизацией стоимости долга*, что отражается в законе изменения стоимости компании  $X(t)$ , без разрушающих систему резонансных колебаний.

## 2.2. Частные случаи математической модели экономической динамики стоимости компании

Рассмотрим некоторые ее частные случаи, при различных функциях стоимость активов компании и стоимости долга:

а) рассматриваем случай, когда

$$\beta(t) = \beta(0)e^{-\delta \cdot t} + \frac{1}{\delta}, \tag{2.10}$$

$$F[X(t)] = \left[ 0.9 \cdot \beta(0)e^{-\delta \cdot t} + \frac{0.9}{\delta} \right] - \left[ \beta(0)e^{-\delta \cdot t} (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) + \frac{\omega^2 + \varepsilon \cos 2t}{\delta} + \delta \right] \cdot X(t) \tag{2.11}$$

Тогда из уравнения (2.8) получается уравнение Матье

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot X(t) = 0.9, \tag{2.12}$$

Присоединяем начальные условия

$$X(0) = 1, \dot{X}(0) = 1. \tag{2.13}$$

При  $\omega = 0.5$  и  $\varepsilon = 0.2$ , на основе MATHCADProfessional получаем решение

$$S^{(0)} = t, S^{(1)} = X(t) \text{ и соответствующую картину на фазовой плоскости } \left( X(t), \dot{X}(t) \right)$$

, где  $S^{(2)} = \dot{X}(t)$ , (Рис.2.1), (Рис. 2.2);

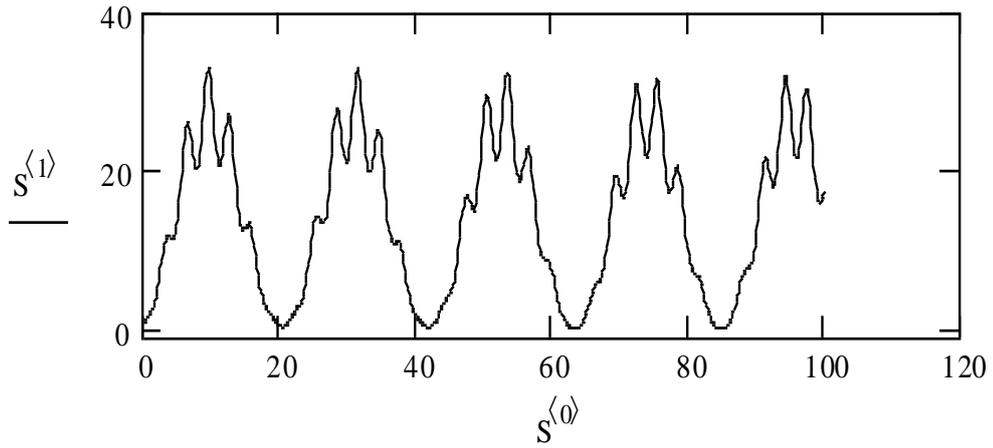


Рис.2.1. Динамика модели Матье

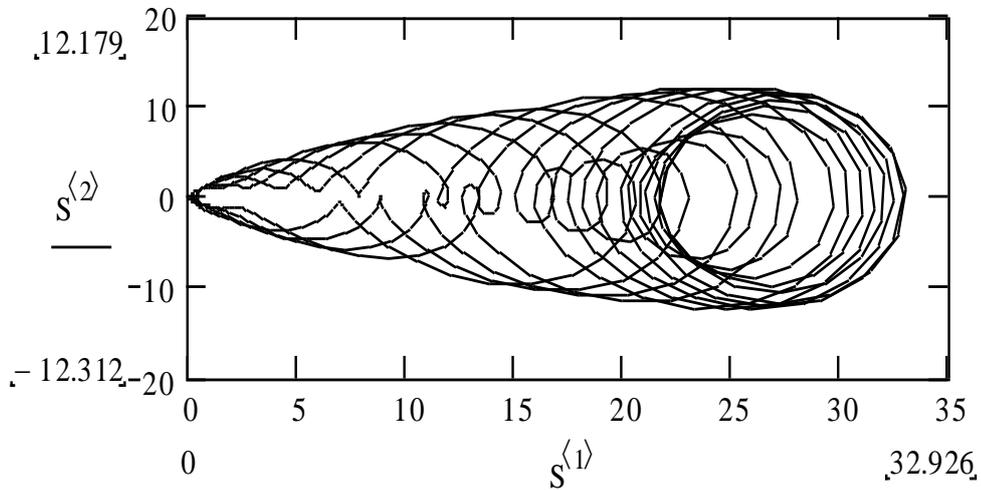


Рис.2.2. Картина динамики Матье на фазовой плоскости

б) рассматриваем случай, когда

$$\beta(t) = t,$$

(2.14)

$$F[X(t)] = -\beta(t) \cdot (X^3 + A \cos \omega t + 0.3) + (\beta - \delta) \cdot X, \quad (2.15)$$

где  $\omega = \text{const}$ ,  $A = \text{const}$ .

Тогда из уравнения (2.8) получаем уравнение Дюффинга

$$\ddot{X}(t) + \delta \cdot \dot{X}(t) + X(t)^3 - X(t) - A \cdot \cos \omega t - 0.3 = 0 \quad (2.16)$$

Присоединяем начальные условия

$$X(0) = 1, \dot{X}(0) = 1$$

При  $\delta = 0.2$ ,  $A = 0.25$  и  $\omega = 1$ , на основе MATHCAD 2001 professional, получаем решение для национального дохода  $S^{(0)} = t, S^{(1)} = X(t)$ , и соответствующую картину на фазовой плоскости  $(X(t), \dot{X}(t))$ , где  $S^{(2)} = \dot{X}(t)$  (Рис. 2.3), (Рис. 2. 4);

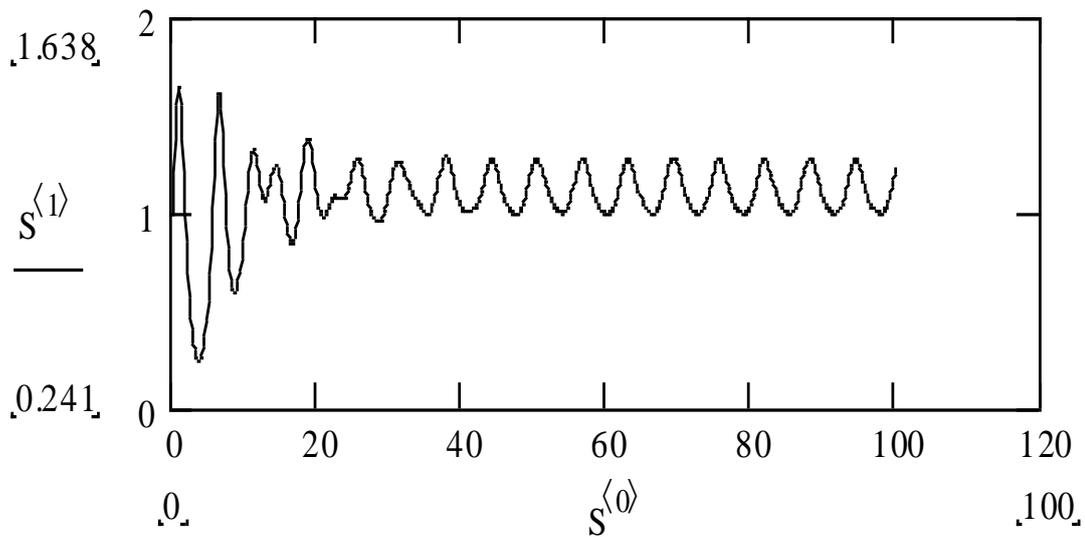


Рис.2.3. Динамика модели Дюффинга

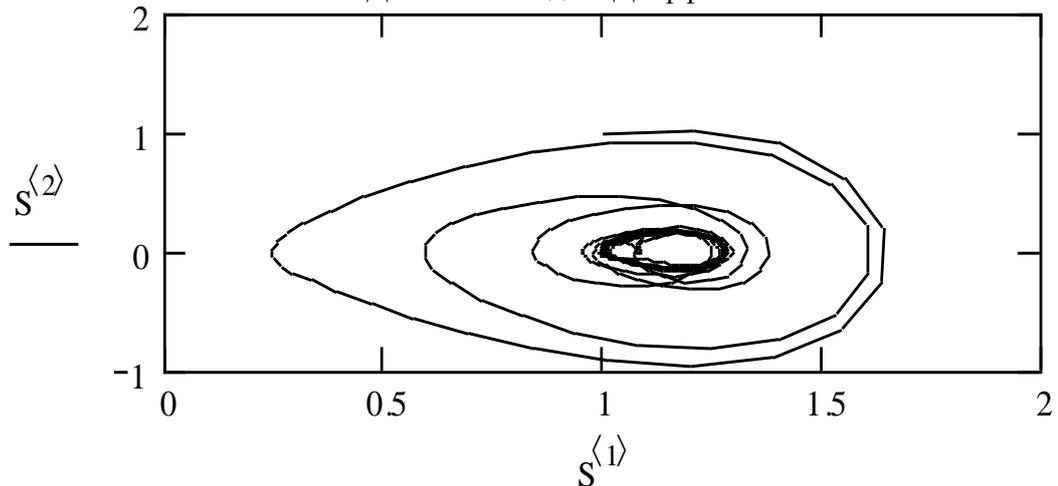


Рис.2.4. Картина динамики Дюффинга на фазовой плоскости

Таким образом, мы проверили, что построенная в работе математическая модель стоимостной динамики компании, в частных случаях, может превращаться в модель Матье, модель Дюффинга и т.д. Это означает, что предложенная

математическая модель имеет достаточно широкий спектр охвата различных режимов динамики.

Что самое главное, предложенная математическая модель дает возможность, в случае нахождения **соответствующей функции стоимости чистых активов и функции дебета**, изучить экономическую динамику стоимости компании.

### **2.3. Методика подбора функции стоимости чистых активов и функции дебета для математической модели стоимостной динамики**

Предложенная математическая модель стоимостной динамики компании можно применять на практике, лишь, если будут определены методы нахождения конкретного вида функции чистых активов и долга, для данного временного ряда данных. Поэтому, займемся решением этой задачи.

#### **2.3.1. Регрессионный анализ временных данных стоимостной динамики, для определения функциональной зависимости чистых активов от стоимости компании**

Для нахождения конкретного вида функциональной зависимости чистых активов  $A(t)$ , от стоимости компании  $X(t)$ , нужно использовать известные данные о распределении стоимостей данной компании за прошедшие моменты времени:

$$\{A(t_i)\}_{i=0}^n; \quad \{X_i\}_{i=0}^n; \quad (2.17)$$

и на основе регрессионного анализа данных, определить вид функции  $\beta(t)$  в зависимости (2.2).

Для решения этой задачи, зависимость (2.2) переписываем в виде:

$$A(t_i) = \beta(t_i) \cdot \frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{2 \cdot h}, \quad (2.18)$$

где  $h$ -шаг по времени, а  $X_{i+1} = X(t_{i+1})$  и  $\beta(t_i)$ -функция пропорциональности, которую нужно определить.

Пусть нам известны значения стоимостей компании и активов в определённые моменты времени:  $\{A(t_i)\}_{i=0}^n$  ;  $\{X_i\}_{i=0}^n$  , тогда очевидно, что можем найти соответствующие значения  $\beta(t_i)$ . Действительно,

$$\beta(t_i) = \frac{2 \cdot h \cdot A(t_i)}{X_{i+1} - X_{i-1}}, i = \overline{2, n-1}, \beta(t_1) = \beta(t_2), \beta(t_n) = \beta(t_{n-1}). (2.19)$$

В соотношении (2.19) предполагается, что  $X_{i+1} - X_{i-1} \neq 0, h=1$ . Иначе, мы будем пользоваться соотношением (2.18). В таком случае, получаем, что соответствующее значение  $A(t_i) = 0$ . В этом случае, значение  $\beta(t_i)$  может быть произвольным числом. Исходя из предполагаемой непрерывности этой функции, будем считать соответствующее значение  $\beta(t_i)$ , средним арифметическим соседних значений. Иначе говоря, в этих случаях  $\beta(t_i) = \frac{\beta_{i+1} + \beta_{i-1}}{2}$ . Таким образом, приходим к задаче регрессионного анализа: определить вид функции  $\beta(t)$  по заданным значениям  $\beta(t_i)$ .

Рассмотрим **числовой пример**: в качестве шага по времени выбираем

$h = 1$  месяц.

Таблица 1

$A(t_i)$	2000	2100	2500	2000	0	2200	2300	2500	2700	0	2000	1800
$X_i$	1500	1600	2000	1400	1200	1400	1700	1900	2000	2500	2000	1800
$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

На основе таб.1, можем по формуле (2.19) составить таб.2

Таблица 2.

$t_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\beta(t_i)$	8	8.4	-25	-5	1.9	8.8	9.2	16.67	9	1.6	-5.714	-5.14

Для решения задачи регрессии, воспользуемся таблицей 2. График функции  $y_i = \beta(t_i)$  имеет вид: 1.6

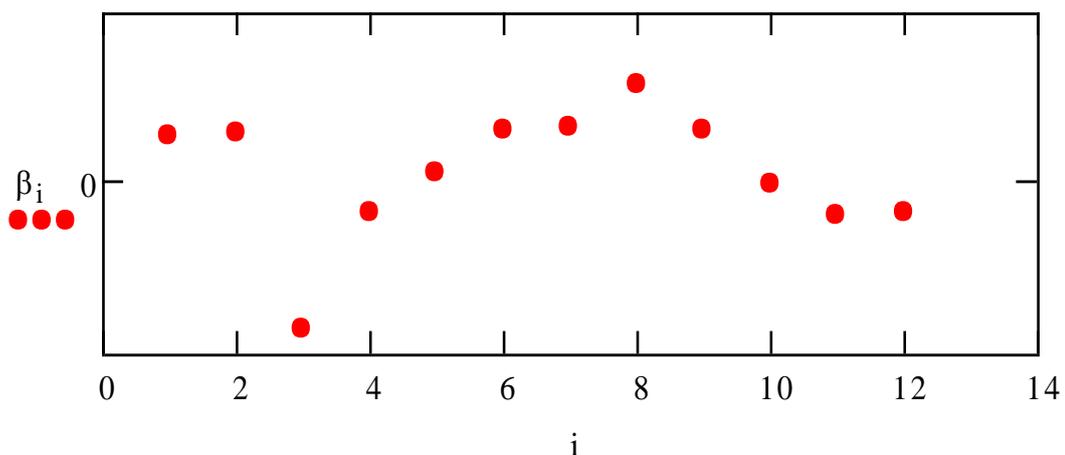


Рис.2.5. График функции  $y_i = \beta(t_i)$

### 2.3.2. Задача линейной регрессии

Для начала, будем искать линейное приближение для зависимости  $y_i = \beta(t_i)$ , т.е. будем искать такую линейную функцию  $y = \beta(t) = a \cdot t + b$ , которая является наилучшим в смысле Гаусса приближением, для функции  $y_i = \beta(t_i)$  заданной таблично таб.2. Иначе говоря, будем искать такие значения для  $a$  и  $b$ , для которых значение невязки Гаусса

$$G(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta(t_i))^2 \quad (2.20)$$

минимально.

Для нашего примера таб.2, имеем  $n = 12$ . Тогда, на основе программного пакета **Mathcad**, составляем программу:

$t_i := i$

$a := \text{slope}(t, \beta)$

$b := \text{intercept}(t, \beta)$

$a = 0.103$

$b = 1.223$

$f(z) := a \cdot z + b$

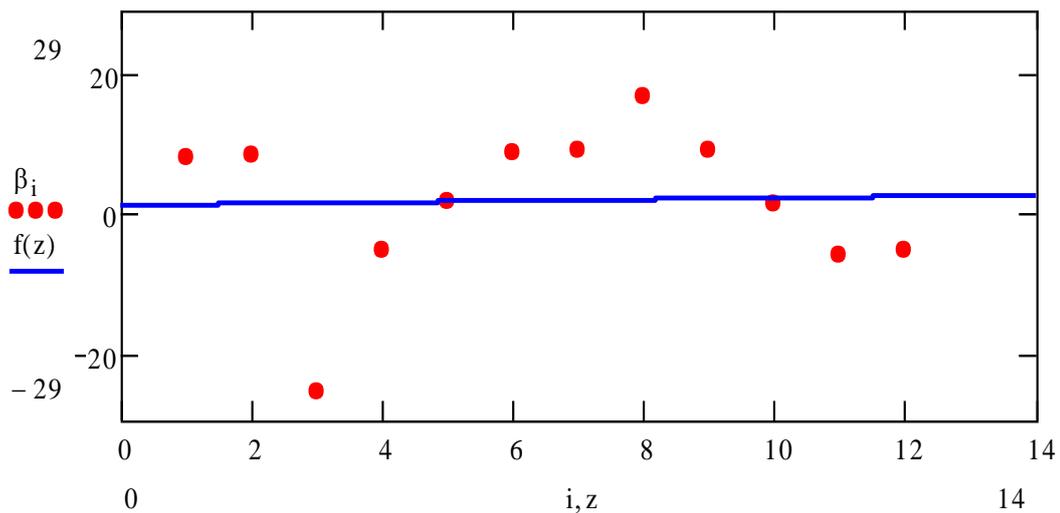


Рис.2.6. Решение задачи линейной регрессии.

Таким образом, получаем что, в случае, линейного приближения данных,

$$\beta(t) = 0.103 \cdot t + 1.223,$$

иначе говоря, для стоимости активов в линейном приближении имеем соотношение:

$$A(t) = (0.103t + 1.223) \cdot X(t).$$

Из рис.2.6 явствует что, линейная регрессия в данном случае неэффективна, действительно, коэффициент корреляции Пирсона для наших данных равен  $\text{corr}(t, \beta) = 0.034$ . Однако, получаемая функция имеет простейший вид и удобна для дальнейшего исследования.

### 2.3.3. Задача обобщённой линейной регрессии

В этом случае, данные приближаются в виде линейной комбинации некоторых выбранных базисных функций, т.е. приближение для зависимости  $y_i = \beta(t_i)$  будем искать в виде:  $y = \beta(t) = k_1 \cdot \frac{1}{t^2+1} + k_2 \cdot t^2 + k_3 \cdot e^t$ . Коэффициенты разложения  $k_i$  определяются, по-прежнему, из условия наилучшего приближения Гаусса (2.20). В этом случае на основе программного пакета **Mathcad**, составляем программу:

$$F(t) := \begin{bmatrix} t^2 \\ (-t)^3 \\ \frac{-t}{1+t} \end{bmatrix}$$

$$j := 1..12$$

$$K := \text{linfit}(t, \beta, F)$$

$$g(t) := F(t) \cdot K$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.835 \\ 0.068 \\ 11.018 \end{pmatrix}$$

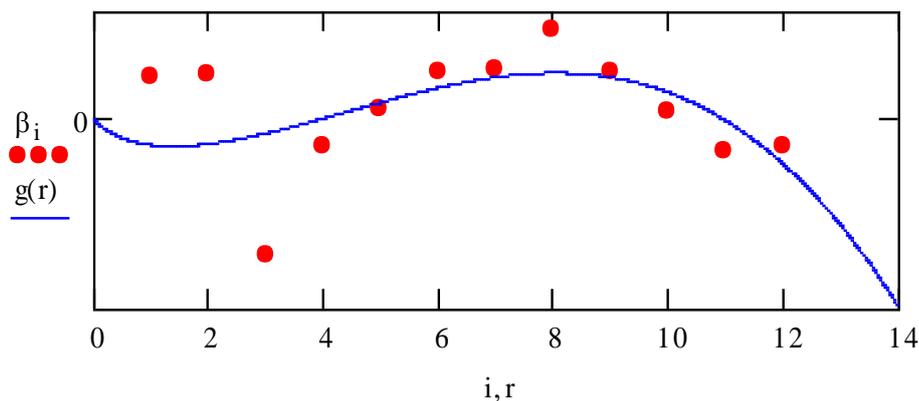


Рис.2.7. Обобщенная линейная регрессия

Таким образом, получаем что, в случае, обобщенной линейной регрессии данных, получаем приближение в виде:

$$\beta(t) = 0.835 \cdot t^2 - 0.068 \cdot t^3 - \frac{11.018 \cdot t}{1+t},$$

иначе говоря, для стоимости активов в обобщенном линейном приближении имеем соотношение:

$$A(t) = \left( 0.835 \cdot t^2 - 0.068 \cdot t^3 - \frac{11.018 \cdot t}{1+t} \right) \cdot \dot{X}(t).$$

Из рис.2.7 ясно, что обобщенная линейная регрессия дает более точное приближение, чем простая линейная регрессия. В этом методе еще есть запас увеличения точности путём подбора более подходящих базисных функций разложения, хотя, общего метода их подбора пока нет.

### 2.3.4. Полиномиальная регрессия

Рассмотрим задачу полиномиальной регрессии для наших данных, т.е. приближение для зависимости  $y_i = \beta(t_i)$  будем искать в виде:

$$y = \beta(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i.$$

Коэффициенты полинома будем определять из условия наилучшего приближения Гаусса (2.20). В этом случае на основе программного пакета **Mathcad**, составляем программу:

```

data :=
( 1  8
  2  8.4
  3 -25
  4  -5
  5  1.9
  6  8.8
  7  9.2
  8 16.67
  9   9
 10  1.6
 11 -5.714
 12 -5.14)
k := 3

```

```
VX := data<0> VY := data<1>
```

```
VS := regress(VX, VY, k)
```

```
f(x) := interp(VS, VX, VY, x)
```

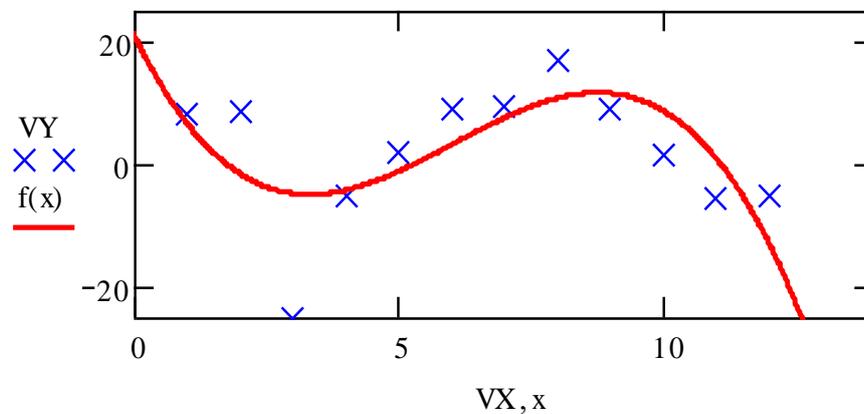


Рис.2.8. Полиномиальная регрессия

```
coeffs := submatrix(VS, k, length(VS) - 1, 0, 0)
```

```
coeffsT = (21.369 -18.167 3.74 -0.205)
```

```
a := coeffs
```

$$a = \begin{pmatrix} 21.369 \\ -18.167 \\ 3.74 \\ -0.205 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \text{Матрица коэффициентов полинома приближения.}$$

$$\beta(t) := \sum_{i=0}^k \left( a_{k-i} \cdot t^{k-i} \right)$$

Проверка приближения рис.2.8.

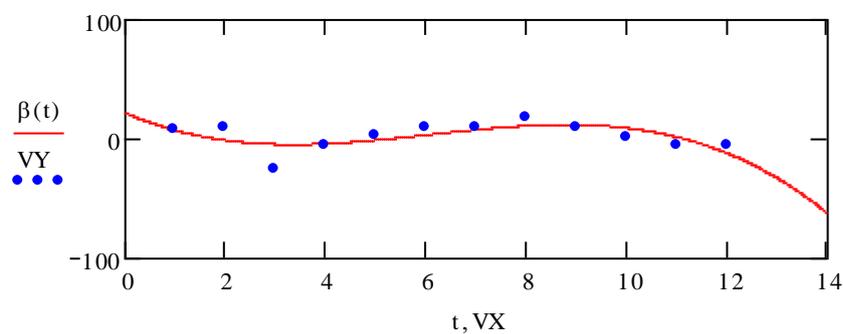


Рис.2.9. Характер приближения  $\beta(t)$  функции полиномами

Таким образом, получаем что, в случае, полиномиальной регрессии данных, получаем приближение в виде:

$$\beta(t) = 21.369 - 18.167 \cdot t^1 + 3.74 \cdot t^2 - 0.205 \cdot t^3,$$

иначе говоря, для стоимости активов в обобщенном линейном приближении, имеем соотношение:

$$A(t) = (21.369 - 18.167 \cdot t^1 + 3.74 \cdot t^2 - 0.205 \cdot t^3) \cdot \dot{X}(t).$$

Из рис. 2.9 явствует, что полиномиальная регрессия более точно приближает рассматриваемые в примере данные, чем предыдущие методы регрессии, однако, полученная функция имеет нули и дает сингулярность в общей модели, поэтому при динамическом анализе, более целесообразным представляется использовать функцию, полученную по линейной регрессии.

### 2.3.5. Методика подбора функции дебета для динамического анализа стоимости компании

Стоимость долга вычисляется по формуле (2.3)  $D(t) = \int_0^t e^{-\delta\tau} F[X(t-\tau)] d\tau$

.Произведем замену переменных  $t - \tau = s$ , в подынтегральной функции. Тогда получаем  $d\tau = -ds$ ,  $\tau = t - s$ :

$$D(t) = - \int_t^0 e^{-\delta(t-s)} F(s) ds = e^{-\delta \cdot t} \cdot \int_0^t e^{\delta \cdot s} F(s) ds. \quad (2.21)$$

Дифференцируя это соотношение, перепишем в виде:

$$\dot{D}(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot F[X(t)]. \quad (2.22)$$

Нашей целью является нахождение конкретной функциональной зависимости  $F[X(t)]$ . Из соотношения (2.22) имеем, что

$$F[X(t)] = e^{\delta \cdot t} \cdot \dot{D}(t). \quad (2.23)$$

Исходя из соотношения (2.1),  $X(t) = A(t) - D(t)$  и пользуясь таб.1, можно составить таблицу 3.

Таблица 3

$X(t_i)$	1500	1600	2000	1400	1200	1400	1700	1900	2000	2500	2000	1800
$A(t_i)$	2000	2100	2500	2000	0	2200	2300	2500	2700	0	2000	1800
$D(t_i)$	500	500	500	600	- 1200	800	600	600	700	-2500	0	0
$\dot{D}(t_i)$	0	0	50	-850	100	900	-100	50	-1550	-350	1250	1250
$F[X(t_i)]$	0	0	369	- 17073	5460	133572	- 40343	54832	- 4620485	- 2836079	27533082	7482677

Считая, что  $\delta = 1$  из формулы (2.23) можем заполнить и последнюю строку таблицы 3. Коэффициент корреляции Пирсона для исследуемых массивов  $X(t_i)$  и  $F[X(t_i)]$  равен  $\text{corr}(X,F) = 0.082$ , таким образом, линейная регрессия, в данном случае, не позволит получить соотношение требуемой точностью. Поэтому будем пользоваться полиномиальной регрессией.

Коэффициенты полинома будем определять из условия наилучшего приближения Гаусса (2.20). В этом случае на основе программного пакета **Mathcad**, составляем программу:

$$X := \begin{pmatrix} 1500 \\ 1600 \\ 2000 \\ 1400 \\ 1200 \\ 1400 \\ 1700 \\ 1900 \\ 2000 \\ 2500 \\ 2000 \\ 1800 \end{pmatrix} \quad Dd := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ -850 \\ 100 \\ 900 \\ -100 \\ 50 \\ -1550 \\ -350 \\ 1250 \\ 1250 \end{pmatrix} \quad \text{corr}(X, F) = 0.082$$

$$i := 0..11$$

$$F_i := Dd_i \cdot e^i$$

$$G(a) := \sum_{i=0}^{11} \left[ F_i - \left[ a_0 + a_1 \cdot X_i + a_2 \cdot (X_i)^2 + a_3 \cdot (X_i)^3 \right] \right]^2$$

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Given

$$S := \text{Minimize}(G, a)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.534 \\ 9.475 \\ -0.004 \end{pmatrix}$$

$$a_s := S$$

$$P(x) := a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

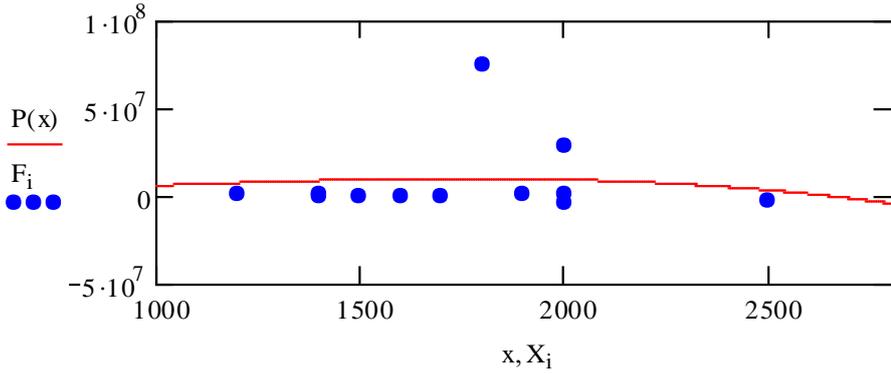


Рис.2.10. График функции дебета. Характер приближения данных полиномом.

Таким образом, для данного примера получаем зависимость дебета от стоимости компании в виде:

$$F[X(t)] = 0.25 + 0.534 \cdot X(t) + 9.475 \cdot (X(t))^2 - 0.004 \cdot (X(t))^3.$$

поэтому, уже возможно, на основе общей модели (2.8) стоимостной динамики, исследовать изучаемый процесс.

### 2.3.6. Определение функции дебета методом Паде-аппроксимации

Для определения функции дебета воспользуемся Паде аппроксимацией, т.е. функцию  $F[X(t)]$  будем приближать рациональной функцией:

$$P(t) := \frac{a_0 + a_1 \cdot t}{a_2 + a_3 \cdot t}. \quad (2.24)$$

Коэффициенты  $a_i, i = \overline{1, n}$  будем определять из условия наилучшего приближения Гаусса (2.20) (хотя, можно определять их и из формул Паде). В этом случае на основе программного пакета **Mathcad**, составляем программу:

$$X := \begin{pmatrix} 1500 \\ 1600 \\ 2000 \\ 1400 \\ 1200 \\ 1400 \\ 1700 \\ 1900 \\ 2000 \\ 2500 \\ 2000 \\ 1800 \end{pmatrix} \quad Dd := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ -850 \\ 100 \\ 900 \\ -100 \\ 50 \\ -1550 \\ -350 \\ 1250 \\ 1250 \end{pmatrix} \quad \text{corr}(X, F) = 0.082$$

$$i := 0..11$$

$$F_i := Dd_i \cdot e^i$$

$$G(a) := \sum_{i=0}^{11} \left[ F_i - \frac{a_0 + a_1 \cdot X_i}{a_2 + a_3 \cdot X_i} \right]^2$$

**Given**

$$S := \text{Minimize}(G, a)$$

$$a := S$$

$$a = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P(t) := \frac{a_0 + a_1 \cdot t}{a_2 + a_3 \cdot t}$$

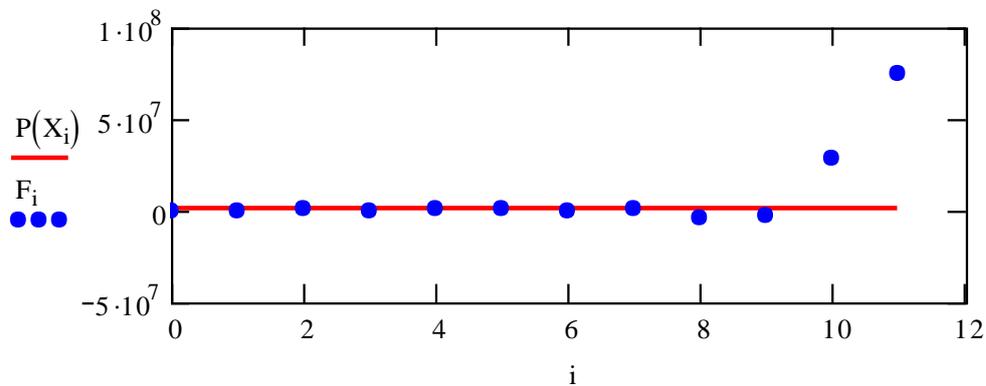


Рис.2.11. Сравнение графика Паде аппроксимации и динамических данных.

Как явствует из рис.2.11, Паде1/1 аппроксимация дает достоверные результаты для первых 10 значений гипотетических данных дебета, но значительно расходятся значения данных последних двух месяцев.

## 2.4. Анализ данных стоимостной динамики

Рассмотрим математическую модель стоимостной динамики компании (2.8) с учетом  $\delta = 1$  и полученных соотношений  $\beta(t)$ ,  $F[X(t)]$ :

$$\ddot{X}(t) + \frac{\beta(t) + \beta - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) - \frac{F[X(t)] + X}{\beta(t)} = 0, \quad (2.25)$$

$$F[X(t)] = 0.25 + 0.534 \cdot X(t) + 9.475 \cdot (X(t))^2 - 0.004 \cdot (X(t))^3, \quad (2.26)$$

$$\beta(t) = 0.103 \cdot t + 1.223, \quad (2.27)$$

получаем уже определенную динамическую систему, для временного ряда данных стоимостной динамики выбранной компании.

Вводя соответствующие обозначения, перепишем систему уравнений (2.25), в нормальном виде:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = X_1 \\ \dot{X}_1 = \frac{1 - \beta - \dot{\beta}}{\beta} \cdot X_1 + \frac{F[X_0] + X_0}{\beta} \end{cases} \quad (2.28)$$

к этим уравнениям надо присоединить соотношения (2.26), (2.27) и начальные условия (2.9).

В этом случае на основе программного пакета **Mathcad**, составляем программу для решения задачи (2.25),(2.26),(2.27),(2.9):

$$F(X) := 0.25 + 0.534X + 9.475(X)^2 - 0.004(X)^3$$

$$\beta(t) := 0.103t + 1.223 \quad ic := \begin{pmatrix} 2500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1 - \beta(t) - \frac{d}{dt}\beta(t)}{\beta(t)} \cdot X_1 + \frac{F(X_0) + X_0}{\beta(t)} \end{pmatrix}$$

$$S := \text{Rkadapt}(ic, 0, 100, 300, D)$$

$$i := 0..last(S^{(0)})$$

$$t := S^{(0)} \quad X(t) := S^{(1)}$$

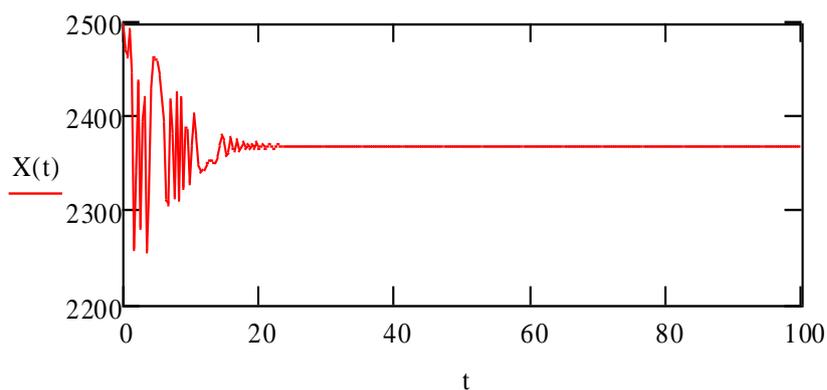


Рис.2.11. Стоимостная динамика

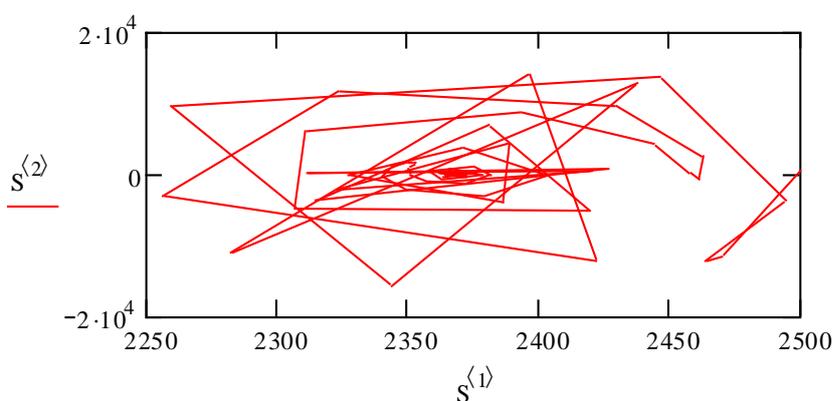


Рис.2.12. фазовый портрет системы

Как явствует из рис.2.11 и рис.2.12, мы имеем устойчивый динамический процесс. Стоимость данной компании, начиная с 2500 единиц, колеблется и устанавливается через 20 месяцев на уровне 2380 единиц.

**Таким образом, мы разработали аналитическую методику динамического анализа изменения стоимости компании, при наличии временного ряда данных чистых активов и долга, или стоимости компании и чистых активов за определенный временной промежуток.**

## ГЛАВА 3. ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА ДАННЫХ СТОИМОСТИ КОМПАНИИ

В данной главе на основе R/S-анализа, изучается персистентность временного ряда данных динамики стоимости компании. В случае персистентности динамических данных, проводится фильтрация данных, как методом дискретного Фурье преобразования, так и на основе вейвлет-фильтров. Строятся Фурье, Паде и вейвлет-приближения для прогноза (экстраполяции) последующих изменений стоимости компании.

### 3.1. R/S – Анализ дискретного временного ряда данных

Для изучения нелинейных динамических систем, к которым относится компания, необходима непараметрическая статистика, которая не делает предварительных предположений о форме изучаемых распределений вероятностей.

Такая непараметрическая методология была открыта Х.Е. Херстом. Он применил ее для решения случайных и неслучайных систем, постоянства трендов и продолжительности циклов, если они имеются. Этот метод называют методом нормированного размаха, или R/S-анализа.

Существует множество определений тренда, остановимся на одном из них:

**Тренд** – это последовательность более высоких максимумов и минимумов и последовательность более низких максимумов и минимумов для нисходящего тренда.

**Линия тренда** - это графическое представление тренда или направления изменения данных в ряде данных. Линии тренда используются при прогнозировании.

Важной характеристикой линии тренда является ее наклон. С помощью наклона определяется доминирующая сила на рынке.

Различают следующие их виды трендовых линий:

- ✓ *восходящая* — рынок растет;
- ✓ *нисходящая* — рынок падает;
- ✓ *флэт (горизонтальный, боковой)* — *тренд отсутствует* — движение наблюдается в горизонтальном диапазоне.

Если линия тренда направлена вверх, это говорит о том, что в этом случае разумно покупать и наоборот: если линия тренда направлена вниз, в этом случае лучше будет распродавать.



Построив линию тренда на основании двух пиков, получается пробная трендовая линия, истинность которой еще необходимо подтвердить. Для этого в случае восходящего тренда необходимо, чтобы цена в третий раз коснулась построенной прямой, оттолкнулась от нее и пошла снова вверх, а для нисходящего – направилась вниз. Только после этого построенную линию тренда можно считать истинной.

Существуют следующие типы трендов:

- ✓ **основной** (*первичный*) — длится 1-3 года.
- ✓ **вторичный** (*промежуточный, среднесрочный*) — от 3-х недель до 3-6 месяцев.
- ✓ **незначительный** (*краткосрочный*) — меньше трех недель.

Линии тренда классифицируются по степени важности при помощи четырех показателей:

**Временной масштаб.** Чем на более высоком временном масштабе строиться линия тренда, тем более важной она является. Например линия тренда построенная на месячном графике показывает более продолжительный и устойчивый тренд, чем линия тренда построенная на дневном графике.

**Длительность.** Чем длиннее трендовая линия, тем она более надежна.

**Число касаний.** Чем больше раз цена коснулась линии тренда, тем устойчивей считается этот тренд. Если цена отскочила три и более раз от трендовой линии, то такая трендовая линия считается более устойчивой к пробитию.

**Угол наклона.** Чем больше угол наклона между линией тренда и горизонталью от которой она строиться, тем сильнее тренд определяющийся этой линией. Если линия идет под большим углом — это говорит нам о сильном импульсном движении.

### 3.1.1. Показатель Херста

Для того, чтобы изучить прогнозируемость значений временного ряда данных пользуются понятием показателя Херста.

Существуют две основные цели анализа временных рядов:

определение природы ряда;

прогнозирование (предсказание будущих значений временного ряда по настоящим и прошлым значениям).

Обе эти цели требуют, чтобы модель ряда более или менее, была формально описана. Как только модель определена, вы можете с ее помощью интерпретировать рассматриваемые данные.

**Показатель Херста (H, Hurst coefficient<sup>1</sup>)** назван в честь британского гидролога Гарольда Херста (Harold Edwin Hurst)[62].

Хёрст был гидрологом, который начал работать над проектом нильской плотины в начале XX века и прожил в регионе Нила почти сорок лет. Он занимался проблемой

контроля за уровнем воды в резервуаре. Проблема заключалась в том, какой ежегодный сброс воды выбрать для того, чтобы резервуар никогда не переполнялся и не оставался пустым. При создании модели было выдвинуто общее предположение о том, что неуправляемая часть системы — в данном случае приток воды от дождей — следует случайным блужданиям. Можно было ожидать, что диапазон этих флуктуаций будет меняться в зависимости от величины временного промежутка измерений. Размах будет увеличиваться пропорционально корню квадратному из времени если ряд случайный.

Для калибровки этих временных измерений Хёрст ввел безразмерное отношение посредством деления размаха на стандартное отклонение наблюдений. Этот метод стал называться **методом нормированного размаха (R/S- анализ)**. Его задача состояла в том, чтобы придумать алгоритм спуска воды из резервуаров так, чтобы резервуары никогда не оставались пустыми и не переполнялись. Строя этот алгоритм, Херст выявил закономерность, по которой поднимался и опускался уровень воды в Ниле. Он показал, что многие естественные явления, включая речные стоки, температуру, осадки, солнечные пятна, следуют "смещенному случайному блужданию", то есть тренду с шумом. В дальнейшем выяснилось, что динамика показателей на рынках капитала столь же "естественное" явление и подчиняется этому общему закону Херста. Херст вывел уравнение для этих нелинейных процессов. Оно выглядит так:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \quad (3.1)$$

где  $C$  - мера корреляции, а  $H$  - показатель Херста.

С помощью этого показателя можно вычислить фрактальную размерность временного ряда.

Первым наиболее известным и авторитетным ученым, исследовавшим фракталы, был Бенуа Мандельброт. Он разработал фрактальную геометрию или, как он ее еще назвал – геометрию природы (в середине 60-х годов XX века). Мандельброт написал свой известный труд «Фрактальная геометрия природы» (The Fractal Geometry of Nature). Мандельброта многие называют отцом фракталов ведь он первым начал использовать их применительно к анализу нечетких, неправильных форм[63-64].

Мы обычно говорим об одномерном, двумерном, трехмерном и т.д. целочисленном мире. Но ведь существуют и нецелые измерения, например, 2.58, т.е

находящееся между двумерным и трехмерным измерениями. Такие измерения Мандельброт называет фрактальными (дробными).

Существует как минимум две вариации фрактальной размерности –  $D$  и  $A$ . Так, фрактальную размерность  $D$  (размерность временного следа – это оценка степени «изломанности» ряда) определяют по следующей формуле[62;65]:

$$D = 2 - H. \quad (3.2)$$

Бенуа Мандельброт (Benoît B. Mandelbrot) в своей работе показал, что фрактальная размерность является обратной величиной от  $H$ . Например, при  $H = 0.5$  фрактальная размерность равна 2 ( $1/0.5$ ), а при  $H = 0.8$  фрактальная размерность равна 1.25 ( $1/0.8$ ). Таким образом, фрактальную размерность по Мандельброту  $A$  (размерность пространства вероятностей – оценка толщины хвостов в функции плотности вероятности) рассчитывают по формуле[62;65]:

$$A = \frac{1}{H} \quad (3.3)$$

Показатель Херста $H$	$H \approx 0$	$H=0,5$	$H=1$
Фрактальная размерность $D$	$D \approx 2$	$D=1,5$	$D=1$
Фрактальная размерность $A$	$A \rightarrow \infty$	$A=2$	$A=1$
	Прямая линия	Случайный ряд	Бесконечный линейный тренд

В основу расчетов Херст положил формулу из работы Альберта Эйнштейна о броуновском движении частиц[62]:

$$R = \sqrt{T}. \quad (3.4)$$

где  $R$  – расстояние, пройденное броуновской частицей за время  $T$ ;

$T$  – показатель времени.

Согласно этой формуле броуновская частица перемещается на расстояние, равное квадратному корню времени, затраченному на это перемещение.

Расчет показателя Херста можно произвести по следующей формуле:

$$\frac{R}{S} = (a * N)^H, \quad (3.5)$$

откуда получаем, что

$$H = \frac{\log(\frac{R}{S})}{\log(aN)} \quad (3.6)$$

$H$  – показатель Херста;

$S$  – среднееквадратичное отклонение ряда наблюдений  $x$ ;

$R$  – размах накопленного отклонения  $Z_u$ ;

$N$  – число периодов наблюдений;

$a$  – заданная константа.

Херст эмпирически рассчитал эту константу для сравнительно краткосрочных временных рядов природных явлений как  $\frac{\pi}{2} \approx 0.5$ .

$$S = \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^N (x_t - X_{cp})^2}, \quad (3.7)$$

где  $X_{cp}$  – среднее арифметическое ряда наблюдений  $x$  за  $N$  периодов:

$$X_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t. \quad (3.8)$$

Размах накопленного отклонения является важным элементом формулы расчета показателя Херста. Его вычисляют следующим образом:

$$R = \max_{1 \leq u \leq N} (Z_u) - \min_{1 \leq u \leq N} (Z_u), \quad (3.9)$$

$Z_u$  – накопленное отклонение ряда  $X$  от среднего  $X_{cp}$

$$Z_u = x_i - X_{cp} \quad (3.10)$$

Из формулы расчета показателя Хэрста видно, что на его рост влияют:

- увеличение размаха колебаний  $R$ ;
- уменьшение среднееквадратичного отклонения  $S$ ;
- уменьшение количества наблюдений  $N$ .

Показатель Херста может ввести и в заблуждение при малых количествах наблюдений  $N$ , так как, в этом случае имеется склонность даже на случайных рядах оценивать их как персистентные (обладающие трендами), завышая  $H$ .

Имеются три различных случая оценки временного ряда данных в зависимости от значения соответствующего показателя Хэрста[66]:

- 1)  $0 < H < 0.5$  – антиперсистентный временной ряд, то есть ряд для которого более вероятно смена предыдущего направления. Антиперсистентный ряд так же называют «розовым шумом».
- 2)  $H = 0.5$  – временной ряд стохастичен. Такой процесс называют «белым шумом»;

3)  $0.5 < H < 1$  – персистентный временной ряд (эти процессы еще называют «черным шумом»), то есть ряд, которому присуща трендовость (направленность). Такие ряды, как раз, и наблюдаются на финансовых рынках и являются прогнозируемыми.

Проводя R/S-анализ, можно получить две полезные характеристики временного ряда: меру случайности динамического ряда и среднюю длину цикла.

Средняя длина цикла – это время, которое необходимо системе для того, чтобы избавиться от влияния начальных условий. Этот показатель позволяет оценить «инерцию движения» ряда.

С помощью алгоритма R/S анализа можно выявить следующие характеристики временного ряда:

1. Значение показателя Херста  $H$  и соответствующий цвет «шума» (меру смещения ряда) или размерность, которая позволяет определить меру заполненности пространства объектом;
2. Меру устойчивости временного ряда (выявить персистентность, то есть склонность ряда следовать трендам или антиперсистентность, то есть хаотичностью и реверсируемостью);
3. Наличие и оценка глубины долговременной памяти временного ряда;
4. Присутствие или отсутствие циклов.

Большой популярностью пользуются следующие виды шумов: белый, розовый, коричневый и черный. Вид шума зависит от того тренда, которому следует компания в данный момент. Эти шумы характеризуются спектральными функциями, описываемые простыми однородными степенными законами вида  $f^{-\beta}$  (квадраты амплитуд преобразования Фурье).

$\beta$  представляет собой коэффициент масштабирования. Он может изменяться в диапазоне от нуля до четырех.

Если  $\beta = 0$  это белый шум, спектр мощности которого не зависит от амплитуды, позволяет моделировать бесчисленное множество процессов в широком диапазоне (статистика нормального распределения).

При  $0 < \beta < 2$ , получаем розовый шум. Его еще называют процессом релаксации (форма динамического равновесия социально-экономической системы). Розовый шум характеризует антиперсистентный временной ряд. Если значения ряда возрастают в предыдущий момент, то наиболее вероятно, что в следующий момент они будут снижаться и наоборот.

Если  $\beta = 2$ , то это коричневый шум. Примером коричневого шума являются «ценовой шум» биржевых котировок. Он обладает спектром мощности, обратно пропорциональным квадрату частоты.

Если  $2 < \beta < 4$ , то это черный шум. Система является персистентной или трендоустойчивой. Если значения ряда возрастают в предыдущий момент, то вероятно, что они будут возрастать в следующий момент. Персистентный временной ряд имеет долговременную память, поэтому в нем наблюдаются долговременные корреляции между текущими и будущими событиями.

Между показателем Херста  $H$  и спектральной величиной  $\beta$  существует следующая взаимосвязь:

$$\beta = 2 \cdot H + 1.$$

Если  $\beta = 0$ , то  $H = -0,5$  – белый шум.

Если  $0 < \beta < 2$ , то  $-0,5 < H < 0,5$  – розовый шум.

Если  $\beta = 2$ , то  $H = 0,5$  – коричневый шум.

Если  $2 < \beta < 4$ , то  $0,5 < H < 1,5$  – черный шум

Если при генерировании финансовых временных рядов решено не учитывать влияние шума, то  $\varphi = 1$ . В случае учета шумовой компоненты фактор  $\varphi$  имеет следующий вид:

$$\varphi = 1 + H \cdot b,$$

где  $H$  – показатель Херста;

$b$  – случайная величина 0 или 1 (стохастический процесс, подчиненный закону устойчивого распределения).

### 3.1.2. Алгоритм RS-анализа

В статье Эрика Наймана «Расчет показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических показателей» приведен пример расчета показателя Херста. Опираясь на эту статью построим алгоритм нахождения показателя Херста.

Дан гипотетический ряд  $N$  из случайных чисел  $x_i$  (табл. 3.1). Требуется рассчитать показатель Херста.

табл. 3.1

$x_i$	1500	1600	2000	1400	1200	1400	1700	1900	2000	2500	2000	1800
-------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

**1 шаг.** Вычисляем среднее арифметическое  $\bar{X}$  случайных чисел  $x_i$

**2 шаг.**  $x_i - \bar{X}$

**3 шаг.**  $\sum(x_i - \bar{X})$

**4 шаг.**  $MAX(\sum(x_i - \bar{X}))$

**5 шаг.**  $MIN(\sum(x_i - \bar{X}))$

**6 шаг.** Находим стандартное отклонение:  $S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}$

**7 шаг.** Размах  $R = MAX(\sum(x_i - \bar{X})) - MIN(\sum(x_i - \bar{X}))$

**8 шаг.** Вычисляем нормированный размах:  $R/S$

**9 шаг.** Находим  $LOG(\frac{R}{S})$

**10 шаг.**  $LOG(N * \pi/2)$

**11 шаг.** Вычисляем показатель Херста:  $H = LOG(\frac{R}{S}) / LOG(N * \pi/2)$

**Пример.** Зная алгоритм, вычислим показатель Херста для гипотетический ряд (таб. 3.1).

табл.3.2

Ряд N	Случайные числа $x_i$	$x_i - X$	$\sum(x_i - X)$
1	1500	-250	-250
2	1600	-150	-400
3	2000	250	-150
4	1400	-350	-500
5	1200	-550	-1050
6	1400	-350	-1400
7	1700	-50	-1450
8	1900	150	-1300

9	2000	250	-1050
10	2500	750	-300
11	2000	250	-50
12	1800	50	0
<b>Среднее арифметическое <math>\bar{X}</math></b>	<b>1750</b>	<b>MAX</b>	<b>-50</b>
<b>Стандартное отклонение: <math>S</math></b>	<b>358,0249</b>	<b>MIN</b>	<b>-1450</b>
<b>Размах <math>R</math></b>	<b>1400</b>		
<b>Нормированный размах: <math>R/S</math></b>	<b>3.910343</b>		
<b><math>LOG(\frac{R}{S})</math></b>	<b>0.592215</b>		
<b><math>LOG(N * \pi/2)</math></b>	<b>1.275081</b>		
<b><math>H</math></b>	<b>0.464453</b>		

Показатель Херста  $H \approx 0,5$ , что говорит о том, что временной ряд стохастичен.

Проведем R/Санализ компании **Lukoil**.

«ЛУКОЙЛ» — одна из крупнейших в мире вертикально интегрированных нефтегазовых компаний, на долю которой приходится более 2% мировой добычи нефти и около 1% доказанных запасов углеводородов.

Обладая полным производственным циклом, компания полностью контролирует всю производственную цепочку – от добычи нефти и газа до сбыта нефтепродуктов.

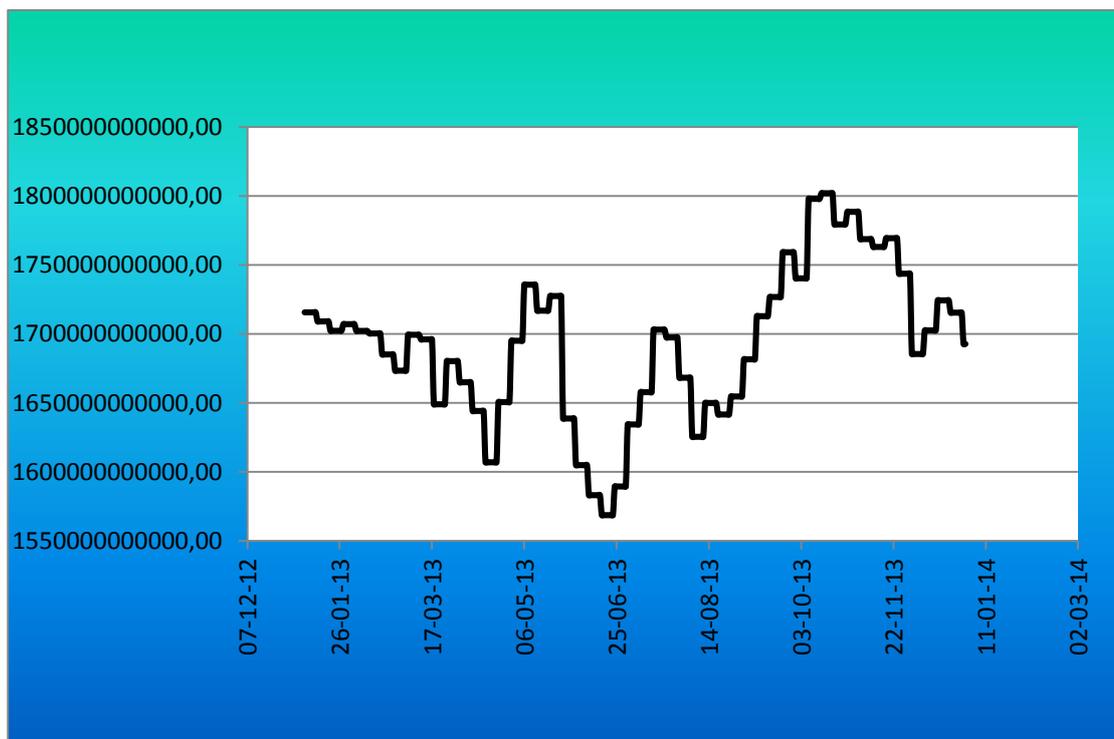
Основная часть деятельности Компании осуществляется на территории четырех федеральных округов Российской Федерации – Северо-Западного, Приволжского, Уральского и Южного. Западная Сибирь является основным регионом добычи нефти Компанией (48,2% от добычи нефти Группой «ЛУКОЙЛ»), а также ее основной ресурсной базой (53,7% от доказанных запасов нефти Группы «ЛУКОЙЛ»).

"Lukoil Georgia" является дочерней компанией LUKOIL.

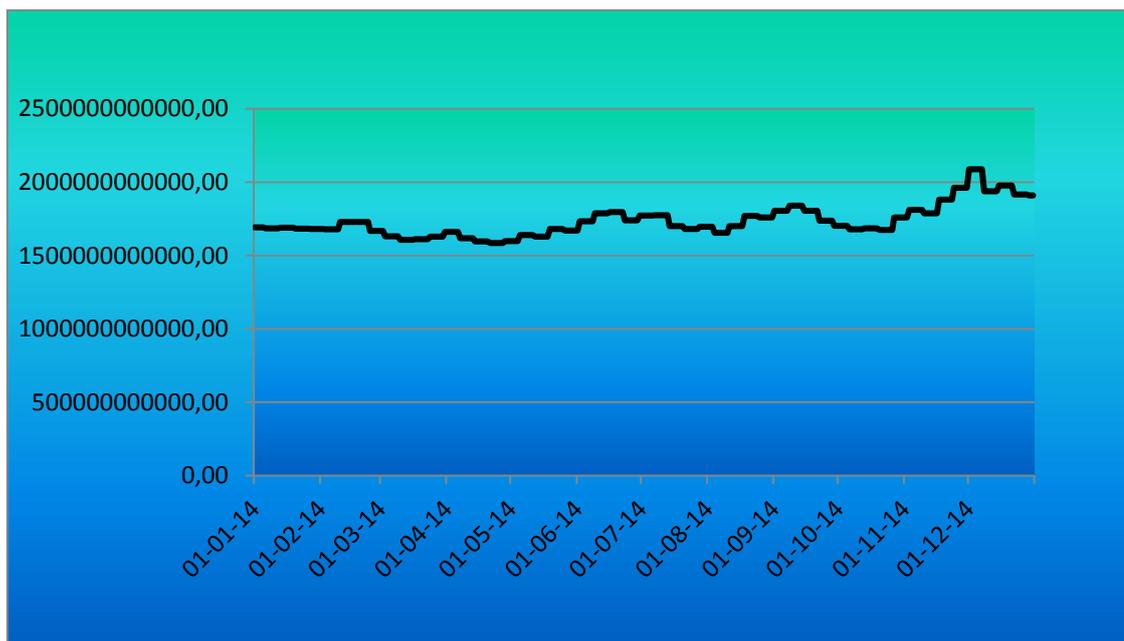
Динамика стоимости компании Lukoil за 2012 год.



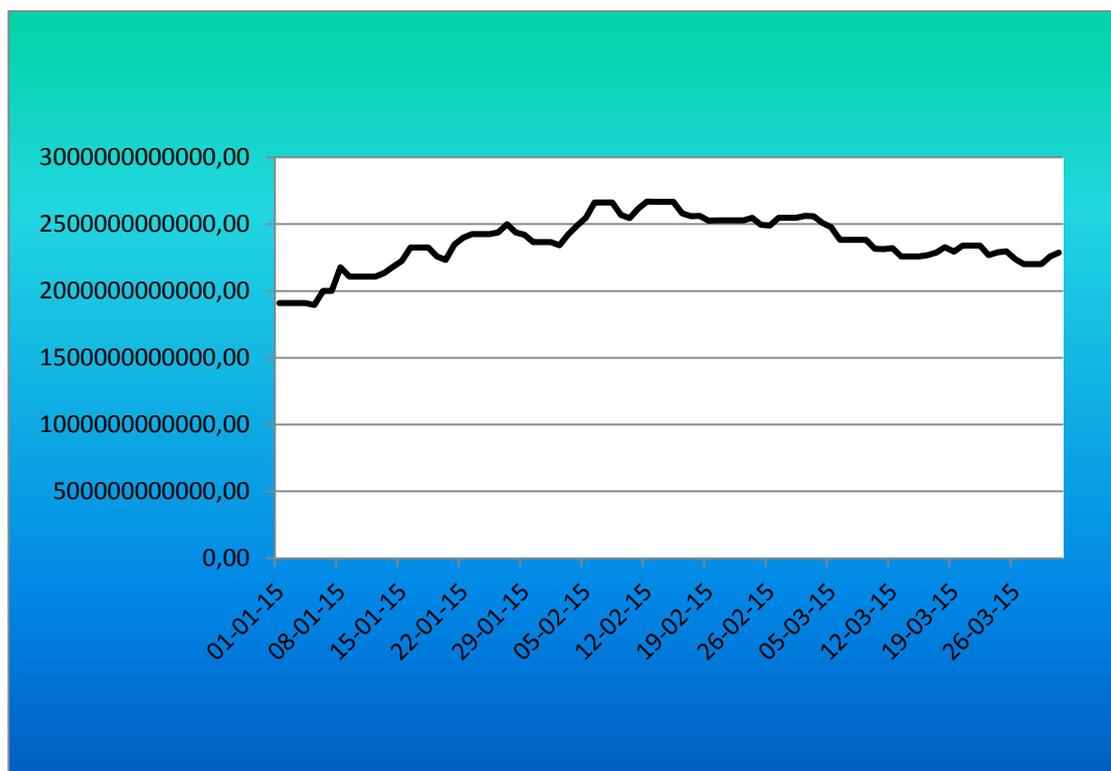
Динамика стоимости компании Lukoil за 2013 год.



**Динамика стоимости компании Lukoil за 2014 год.**



**Динамика стоимости компании Lukoil с 01 января до 31 марта 2015 года**



Общее количество акций Lukoil составляет 850563255.

1179 данных стоимости компании с 1 января 2013 года до 31 марта 2015 года я разбила на интервалы. Пока взяли 90 значений, затем 180, 270, 365, 455, 545, 635, 724, 814,904, 994,1089 и1179. Для этих значений посчитали нормированный размах R/S и показатель Херста.

В таблице 3.3рассчитан нормированный размах R/S и показатель Херста для 90 значений.

№	Дата	Курсакций	Стоимость компани <i>X<sub>i</sub></i>	( <i>x<sub>i</sub></i> - <i>X</i> )	$\sum(x_i - X)$
1	02-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-75690820752.71
2	03-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-151381641505.42
3	04-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-227072462258.13
4	05-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-302763283010.84
5	06-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-378454103763.55
6	07-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-454144924516.26
7	08-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-529835745268.97
8	09-01-12	1733.8	1474706571519.00	-75690820752.71	-605526566021.68
9	10-01-12	1769.24	1504850533276.20	-45546858995.51	-651073425017.19
10	11-01-12	1769.24	1504850533276.20	-45546858995.51	-696620284012.70
11	12-01-12	1769.24	1504850533276.20	-45546858995.51	-742167143008.21
12	13-01-12	1769.24	1504850533276.20	-45546858995.51	-787714002003.72
13	14-01-12	1769.24	1504850533276.20	-45546858995.51	-833260860999.23
14	15-01-12	1769.24	1504850533276.20	-45546858995.51	-878807719994.74
15	16-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-890638251562.05
16	17-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-902468783129.36
17	18-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-914299314696.67
18	19-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-926129846263.98
19	20-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-937960377831.29
20	21-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-949790909398.60
21	22-01-12	1808.88	1538566860704.40	-11830531567.31	-961621440965.91
22	23-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1003953170857.52
23	24-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1046284900749.13
24	25-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1088616630640.74
25	26-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1130948360532.35
26	27-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1173280090423.96
27	28-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1215611820315.57
28	29-01-12	1773.02	1508065662380.10	-42331729891.61	-1257943550207.18
29	30-01-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1281630933549.19
30	31-01-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1305318316891.20
31	01-02-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1329005700233.21

32	02-02-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1352693083575.22
33	03-02-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1376380466917.23
34	04-02-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1400067850259.24
35	05-02-12	1794.94	1526710008929.70	-23687383342.01	-1423755233601.25
36	06-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1431247892568.06
37	07-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1438740551534.87
38	08-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1446233210501.68
39	09-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1453725869468.49
40	10-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1461218528435.30
41	11-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1468711187402.11
42	12-02-12	1813.98	1542904733304.90	-7492658966.81	-1476203846368.92
43	13-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1431114684911.63
44	14-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1386025523454.34
45	15-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1340936361997.05
46	16-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1295847200539.76
47	17-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1250758039082.47
48	18-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1205668877625.18
49	19-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1160579716167.89
50	20-02-12	1875.8	1595486553729.00	45089161457.29	-1115490554710.60
51	21-02-12	1838.3	1563590431666.50	13193039394.79	-1102297515315.81
52	22-02-12	1838.3	1563590431666.50	13193039394.79	-1089104475921.02
53	23-02-12	1838.3	1563590431666.50	13193039394.79	-1075911436526.23
54	24-02-12	1838.3	1563590431666.50	13193039394.79	-1062718397131.44
55	25-02-12	1838.3	1563590431666.50	13193039394.79	-1049525357736.65
56	26-02-12	1838.3	1563590431666.50	13193039394.79	-1036332318341.86
57	27-02-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-991481314595.97
58	28-02-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-946630310850.08
59	29-02-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-901779307104.19
60	01-03-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-856928303358.30
61	02-03-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-812077299612.41
62	03-03-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-767226295866.52
63	04-03-12	1875.52	1595248396017.60	44851003745.89	-722375292120.63
64	05-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-683729147319.96
65	06-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-645083002519.30
66	07-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-606436857718.63
67	08-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-567790712917.97
68	09-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-529144568117.30
69	10-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-490498423316.64
70	11-03-12	1868.225	1589043537072.37	38646144800.67	-451852278515.97
71	12-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	-382368962905.28
72	13-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	-312885647294.59
73	14-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	-243402331683.90
74	15-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	-173919016073.21
75	16-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	-104435700462.52
76	17-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	-34952384851.83

77	18-03-12	1904.48	1619880707882.40	69483315610.69	34530930758.86
78	19-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	48472465818.05
79	20-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	62414000877.24
80	21-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	76355535936.43
81	22-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	90297070995.62
82	23-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	104238606054.81
83	24-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	118180141114.00
84	25-03-12	1839.18	1564338927330.90	13941535059.19	132121676173.19
85	26-03-12	1796.9	1528377112909.50	-22020279362.21	110101396810.98
86	27-03-12	1796.9	1528377112909.50	-22020279362.21	88081117448.77
87	28-03-12	1796.9	1528377112909.50	-22020279362.21	66060838086.56
88	29-03-12	1796.9	1528377112909.50	-22020279362.21	44040558724.35
89	30-03-12	1796.9	1528377112909.50	-22020279362.21	22020279362.14
90	31-03-12	1796.9	1528377112909.50	-22020279362.21	0
<b>Среднее арифметическое стоимости компании X</b>		<b>1550397392271.71</b>			
<b>Стандартное отклонение S</b>		<b>41871134463</b>			
<b>Max <math>\sum(x_i - X)</math></b>		<b>132121676173.11</b>			
<b>Min <math>\sum(x_i - X)</math></b>		<b>-1476203846368.92</b>			
<b>Размах R</b>		<b>108325522542.11</b>			
<b>Нормированный размах R/S</b>		<b>38.41131947</b>			
<b>Log(R/S)</b>		<b>1.584459226</b>			
<b>Log(N*<math>\pi</math>/2)</b>		<b>2.150363402</b>			
<b>H</b>		<b>0.736833237</b>			

В таблице 3.4 рассчитан нормированный размах R/S и показатель Херста для 180 значений.

№	Дата	Курсакий	Стоимость компании $X_i$	$(x_i - X)$	$\sum(x_i - X)$
1	02-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-37901547551.18
2	03-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-75803095102.36
3	04-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-113704642653.54
4	05-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-151606190204.72

5	06-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-189507737755.90
6	07-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-227409285307.08
7	08-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-265310832858.26
8	09-01-12	1733.8	1474706571519.00	-37901547551.18	-303212380409.44
9	10-01-12	1769.24	1504850533276.20	-7757585793.98	-310969966203.42
10	11-01-12	1769.24	1504850533276.20	-7757585793.98	-318727551997.40
11	12-01-12	1769.24	1504850533276.20	-7757585793.98	-326485137791.38
12	13-01-12	1769.24	1504850533276.20	-7757585793.98	-334242723585.36
13	14-01-12	1769.24	1504850533276.20	-7757585793.98	-342000309379.34
14	15-01-12	1769.24	1504850533276.20	-7757585793.98	-349757895173.32
15	16-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-323799153539.10
16	17-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-297840411904.88
17	18-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-271881670270.66
18	19-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-245922928636.44
19	20-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-219964187002.22
20	21-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-194005445368.00
21	22-01-12	1808.88	1538566860704.40	25958741634.22	-168046703733.78
22	23-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-172589160423.86
23	24-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-177131617113.94
24	25-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-181674073804.02
25	26-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-186216530494.10
26	27-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-190758987184.18
27	28-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-195301443874.26
28	29-01-12	1773.02	1508065662380.10	-4542456690.08	-199843900564.34
29	30-01-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-185742010704.82
30	31-01-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-171640120845.30
31	01-02-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-157538230985.78
32	02-02-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-143436341126.26
33	03-02-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-129334451266.74
34	04-02-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-115232561407.22
35	05-02-12	1794.94	1526710008929.70	14101889859.52	-101130671547.70
36	06-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	-70834057312.98
37	07-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	-40537443078.26
38	08-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	-10240828843.54
39	09-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	20055785391.18
40	10-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	50352399625.90
41	11-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	80649013860.62
42	12-02-12	1813.98	1542904733304.90	30296614234.72	110945628095.34
43	13-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	193824062754.16
44	14-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	276702497412.98
45	15-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	359580932071.80
46	16-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	442459366730.62
47	17-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	525337801389.44
48	18-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	608216236048.26
49	19-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	691094670707.08

50	20-02-12	1875.8	1595486553729.00	82878434658.82	773973105365.90
51	21-02-12	1838.3	1563590431666.50	50982312596.32	824955417962.22
52	22-02-12	1838.3	1563590431666.50	50982312596.32	875937730558.54
53	23-02-12	1838.3	1563590431666.50	50982312596.32	926920043154.86
54	24-02-12	1838.3	1563590431666.50	50982312596.32	977902355751.18
55	25-02-12	1838.3	1563590431666.50	50982312596.32	1028884668347.50
56	26-02-12	1838.3	1563590431666.50	50982312596.32	1079866980943.82
57	27-02-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1162507257891.24
58	28-02-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1245147534838.66
59	29-02-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1327787811786.08
60	01-03-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1410428088733.50
61	02-03-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1493068365680.93
62	03-03-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1575708642628.35
63	04-03-12	1875.52	1595248396017.60	82640276947.42	1658348919575.77
64	05-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	1734784337577.96
65	06-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	1811219755580.16
66	07-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	1887655173582.35
67	08-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	1964090591584.55
68	09-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	2040526009586.74
69	10-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	2116961427588.94
70	11-03-12	1868.225	1589043537072.37	76435418002.20	2193396845591.13
71	12-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2300669434403.35
72	13-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2407942023215.57
73	14-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2515214612027.79
74	15-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2622487200840.01
75	16-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2729759789652.23
76	17-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2837032378464.45
77	18-03-12	1904.48	1619880707882.40	107272588812.22	2944304967276.67
78	19-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	2996035775537.39
79	20-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	3047766583798.11
80	21-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	3099497392058.83
81	22-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	3151228200319.55
82	23-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	3202959008580.27
83	24-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	3254689816840.99
84	25-03-12	1839.18	1564338927330.90	51730808260.72	3306420625101.71
85	26-03-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3322189618941.03
86	27-03-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3337958612780.35
87	28-03-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3353727606619.67
88	29-03-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3369496600458.99
89	30-03-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3385265594298.31
90	31-03-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3401034588137.63
91	01-04-12	1796.9	1528377112909.50	15768993839.32	3416803581976.95
92	02-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3429425491772.77
93	03-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3442047401568.59
94	04-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3454669311364.41

95	05-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3467291221160.23
96	06-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3479913130956.05
97	07-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3492535040751.87
98	08-04-12	1793.2	1525230028866.00	12621909795.82	3505156950547.69
99	09-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3524787501564.71
100	10-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3544418052581.73
101	11-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3564048603598.75
102	12-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3583679154615.77
103	13-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3603309705632.79
104	14-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3622940256649.81
105	15-04-12	1801.44	1532238670087.20	19630551017.02	3642570807666.83
106	16-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3650973923717.85
107	17-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3659377039768.87
108	18-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3667780155819.89
109	19-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3676183271870.91
110	20-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3684586387921.93
111	21-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3692989503972.95
112	22-04-12	1788.24	1521011235121.20	8403116051.02	3701392620023.97
113	23-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3698789447555.29
114	24-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3696186275086.62
115	25-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3693583102617.94
116	26-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3690979930149.26
117	27-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3688376757680.58
118	28-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3685773585211.90
119	29-04-12	1775.3	1510004946601.50	-2603172468.68	3683170412743.22
120	30-04-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3649827884238.84
121	01-05-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3616485355734.46
122	02-05-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3583142827230.08
123	03-05-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3549800298725.70
124	04-05-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3516457770221.32
125	05-05-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3483115241716.94
126	06-05-12	1739.16	1479265590565.80	-33342528504.38	3449772713212.56
127	07-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3385673817407.38
128	08-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3321574921602.20
129	09-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3257476025797.02
130	10-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3193377129991.84
131	11-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3129278234186.66
132	12-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3065179338381.48
133	13-05-12	1703	1448509223265.00	-64098895805.18	3001080442576.30
134	14-05-12	1634.08	1389888403730.40	122719715339.78	2878360727236.52
135	15-05-12	1634.08	1389888403730.40	122719715339.78	2755641011896.74
136	16-05-12	1634.08	1389888403730.40	122719715339.78	2632921296556.96
137	17-05-12	1634.08	1389888403730.40	-	2510201581217.18

				122719715339.78	
138	18-05-12	1634.08	1389888403730.40	-	2387481865877.40
139	19-05-12	1634.08	1389888403730.40	-	2264762150537.62
140	20-05-12	1634.08	1389888403730.40	-	2142042435197.84
141	21-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	2021330049139.86
142	22-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	1900617663081.88
143	23-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	1779905277023.90
144	24-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	1659192890965.92
145	25-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	1538480504907.94
146	26-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	1417768118849.96
147	27-05-12	1636.44	1391895733012.20	-	1297055732791.98
148	28-05-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	1251226935704.20
149	29-05-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	1205398138616.42
150	30-05-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	1159569341528.64
151	31-05-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	1113740544440.86
152	01-06-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	1067911747353.08
153	02-06-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	1022082950265.30
154	03-06-12	1724.48	1466779321982.40	-45828797087.78	976254153177.52
155	04-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	922566151613.54
156	05-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	868878150049.56
157	06-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	815190148485.58
158	07-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	761502146921.60
159	08-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	707814145357.62
160	09-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	654126143793.64
161	10-06-12	1715.24	1458920117506.20	-53688001563.98	600438142229.66
162	11-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	556837820869.98
163	12-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	513237499510.30
164	13-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	469637178150.62
165	14-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	426036856790.94
166	15-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	382436535431.26
167	16-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	338836214071.58
168	17-06-12	1727.1	1469007797710.50	-43600321359.68	295235892711.90
169	18-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	254323351238.02
170	19-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	213410809764.14
171	20-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	172498268290.26
172	21-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	131585726816.38
173	22-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	90673185342.50
174	23-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	49760643868.62

175	24-06-12	1730.26	1471695577596.30	-40912541473.88	8848102394.74
176	25-06-12	1776.28	1510838498591.40	-1769620478.78	7078481915.96
177	26-06-12	1776.28	1510838498591.40	-1769620478.78	5308861437.18
178	27-06-12	1776.28	1510838498591.40	-1769620478.78	3539240958.40
179	28-06-12	1776.28	1510838498591.40	-1769620478.78	1769620479.62
180	29-06-12	1776.28	1510838498591.40	-1769620478.78	0
<b>Среднее арифметическое стоимости компании X</b>		<b>1512608119070.18</b>			
<b>Стандартное отклонение S</b>		<b>57559392806</b>			
<b>Max <math>\sum(x_i - X)</math></b>		<b>4.05115E+11</b>			
<b>Min <math>\sum(x_i - X)</math></b>		<b>70.38209261</b>			
<b>Размах R</b>		<b>1.847462175</b>			
<b>Нормированный размах R/S</b>		<b>2.451393398</b>			
<b>Log(R/S)</b>		<b>0.753637575</b>			
<b>Log(N*<math>\pi</math>/2)</b>		<b>2.451393398</b>			
<b>H</b>		<b>0.307432326</b>			

Втаблице 3.5рассчитаннормированныйразмах R/Sи показатель Херста для270значений.

№	Дата	Курсакий	СтоимостькомпанииX <sub>i</sub>	(x <sub>i</sub> - X)	$\sum(x_i - X)$
1	02-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-63651790929.73
2	03-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-127303581859.46
3	04-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-190955372789.19
4	05-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-254607163718.92
5	06-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-318258954648.65
6	07-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-381910745578.38
7	08-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-445562536508.11
8	09-01-12	1733.8	1474706571519.00	-63651790929.73	-509214327437.84
9	10-01-12	1769.24	1504850533276.20	-33507829172.53	-542722156610.37
10	11-01-12	1769.24	1504850533276.20	-33507829172.53	-576229985782.90
11	12-01-12	1769.24	1504850533276.20	-33507829172.53	-609737814955.43
12	13-01-12	1769.24	1504850533276.20	-33507829172.53	-643245644127.96
13	14-01-12	1769.24	1504850533276.20	-33507829172.53	-676753473300.49

14	15-01-12	1769.24	1504850533276.20	-33507829172.53	-710261302473.02
15	16-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-710052804217.35
16	17-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-709844305961.68
17	18-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-709635807706.01
18	19-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-709427309450.34
19	20-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-709218811194.67
20	21-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-709010312939.00
21	22-01-12	1808.88	1538566860704.40	208498255.67	-708801814683.33
22	23-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-739094514751.96
23	24-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-769387214820.59
24	25-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-799679914889.22
25	26-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-829972614957.85
26	27-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-860265315026.48
27	28-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-890558015095.11
28	29-01-12	1773.02	1508065662380.10	-30292700068.63	-920850715163.74
29	30-01-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-932499068682.77
30	31-01-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-944147422201.80
31	01-02-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-955795775720.83
32	02-02-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-967444129239.86
33	03-02-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-979092482758.89
34	04-02-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-990740836277.92
35	05-02-12	1794.94	1526710008929.70	-11648353519.03	-1002389189796.95
36	06-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-997842818940.78
37	07-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-993296448084.61
38	08-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-988750077228.44
39	09-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-984203706372.27
40	10-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-979657335516.10
41	11-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-975110964659.93
42	12-02-12	1813.98	1542904733304.90	4546370856.17	-970564593803.76
43	13-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-913436402523.49
44	14-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-856308211243.22
45	15-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-799180019962.95
46	16-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-742051828682.68
47	17-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-684923637402.41
48	18-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-627795446122.14
49	19-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-570667254841.87
50	20-02-12	1875.8	1595486553729.00	57128191280.27	-513539063561.60
51	21-02-12	1838.3	1563590431666.50	25232069217.77	-488306994343.83
52	22-02-12	1838.3	1563590431666.50	25232069217.77	-463074925126.06
53	23-02-12	1838.3	1563590431666.50	25232069217.77	-437842855908.29
54	24-02-12	1838.3	1563590431666.50	25232069217.77	-412610786690.52
55	25-02-12	1838.3	1563590431666.50	25232069217.77	-387378717472.75
56	26-02-12	1838.3	1563590431666.50	25232069217.77	-362146648254.98
57	27-02-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	-305256614686.11
58	28-02-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	-248366581117.24

59	29-02-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	-191476547548.37
60	01-03-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	-134586513979.50
61	02-03-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	-77696480410.63
62	03-03-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	-20806446841.76
63	04-03-12	1875.52	1595248396017.60	56890033568.87	36083586727.11
64	05-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	86768761350.76
65	06-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	137453935974.40
66	07-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	188139110598.05
67	08-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	238824285221.69
68	09-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	289509459845.34
69	10-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	340194634468.98
70	11-03-12	1868.225	1589043537072.37	50685174623.65	390879809092.63
71	12-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	472402154526.30
72	13-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	553924499959.97
73	14-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	635446845393.64
74	15-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	716969190827.31
75	16-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	798491536260.98
76	17-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	880013881694.65
77	18-03-12	1904.48	1619880707882.40	81522345433.67	961536227128.32
78	19-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	987516792010.49
79	20-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	1013497356892.66
80	21-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	1039477921774.83
81	22-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	1065458486657.00
82	23-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	1091439051539.17
83	24-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	1117419616421.34
84	25-03-12	1839.18	1564338927330.90	25980564882.17	1143400181303.51
85	26-03-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1133418931764.28
86	27-03-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1123437682225.05
87	28-03-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1113456432685.82
88	29-03-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1103475183146.59
89	30-03-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1093493933607.36
90	31-03-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1083512684068.13
91	01-04-12	1796.9	1528377112909.50	-9981249539.23	1073531434528.90
92	02-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	1060403100946.17
93	03-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	1047274767363.44
94	04-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	1034146433780.71
95	05-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	1021018100197.98
96	06-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	1007889766615.25
97	07-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	994761433032.52
98	08-04-12	1793.2	1525230028866.00	-13128333582.73	981633099449.79
99	09-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	975513407088.26
100	10-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	969393714726.73
101	11-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	963274022365.20
102	12-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	957154330003.67
103	13-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	951034637642.14

104	14-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	944914945280.61
105	15-04-12	1801.44	1532238670087.20	-6119692361.53	938795252919.08
106	16-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	921448125591.55
107	17-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	904100998264.02
108	18-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	886753870936.49
109	19-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	869406743608.96
110	20-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	852059616281.43
111	21-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	834712488953.90
112	22-04-12	1788.24	1521011235121.20	-17347127327.53	817365361626.37
113	23-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	789011945779.14
114	24-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	760658529931.91
115	25-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	732305114084.68
116	26-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	703951698237.45
117	27-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	675598282390.22
118	28-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	647244866542.99
119	29-04-12	1775.3	1510004946601.50	-28353415847.23	618891450695.76
120	30-04-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	559798678812.83
121	01-05-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	500705906929.90
122	02-05-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	441613135046.97
123	03-05-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	382520363164.04
124	04-05-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	323427591281.11
125	05-05-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	264334819398.18
126	06-05-12	1739.16	1479265590565.80	-59092771882.93	205242047515.25
127	07-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	115392908331.52
128	08-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	25543769147.79
129	09-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	-64305370035.94
130	10-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	-154154509219.67
131	11-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	-244003648403.40
132	12-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	-333852787587.13
133	13-05-12	1703	1448509223265.00	-89849139183.73	-423701926770.86
134	14-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-572171885489.19
135	15-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-720641844207.52
136	16-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-869111802925.85
137	17-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-1017581761644.18
138	18-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-1166051720362.51
139	19-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-1314521679080.84
140	20-05-12	1634.08	1389888403730.40	-148469958718.33	-1462991637799.17
141	21-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-1609454267235.70
142	22-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-1755916896672.23
143	23-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-1902379526108.76
144	24-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-2048842155545.29
145	25-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-2195304784981.82
146	26-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-2341767414418.35
147	27-05-12	1636.44	1391895733012.20	-146462629436.53	-2488230043854.88
148	28-05-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2559809084321.21

149	29-05-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2631388124787.54
150	30-05-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2702967165253.87
151	31-05-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2774546205720.20
152	01-06-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2846125246186.53
153	02-06-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2917704286652.86
154	03-06-12	1724.48	1466779321982.40	-71579040466.33	-2989283327119.19
155	04-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3068721572061.72
156	05-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3148159817004.25
157	06-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3227598061946.78
158	07-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3307036306889.31
159	08-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3386474551831.84
160	09-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3465912796774.37
161	10-06-12	1715.24	1458920117506.20	-79438244942.53	-3545351041716.90
162	11-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-3614701606455.13
163	12-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-3684052171193.36
164	13-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-3753402735931.59
165	14-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-3822753300669.82
166	15-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-3892103865408.05
167	16-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-3961454430146.28
168	17-06-12	1727.1	1469007797710.50	-69350564738.23	-4030804994884.51
169	18-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4097467779736.94
170	19-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4164130564589.37
171	20-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4230793349441.80
172	21-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4297456134294.23
173	22-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4364118919146.66
174	23-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4430781703999.09
175	24-06-12	1730.26	1471695577596.30	-66662784852.43	-4497444488851.52
176	25-06-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4524964352708.85
177	26-06-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4552484216566.18
178	27-06-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4580004080423.51
179	28-06-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4607523944280.84
180	29-06-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4635043808138.17
181	30-06-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4662563671995.50
182	01-07-12	1776.28	1510838498591.40	-27519863857.33	-4690083535852.83
183	02-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4669291406826.16
184	03-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4648499277799.49
185	04-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4627707148772.82
186	05-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4606915019746.15
187	06-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4586122890719.48
188	07-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4565330761692.81
189	08-07-12	1833.08	1559150491475.40	20792129026.67	-4544538632666.14
190	09-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4536760121440.97
191	10-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4528981610215.80
192	11-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4521203098990.63
193	12-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4513424587765.46

194	13-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4505646076540.29
195	14-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4497867565315.12
196	15-07-12	1817.78	1546136873673.90	7778511225.17	-4490089054089.95
197	16-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4477547388636.78
198	17-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4465005723183.61
199	18-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4452464057730.44
200	19-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4439922392277.27
201	20-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4427380726824.10
202	21-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4414839061370.93
203	22-07-12	1823.38	1550900027901.90	12541665453.17	-4402297395917.76
204	23-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4410135226054.39
205	24-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4417973056191.02
206	25-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4425810886327.65
207	26-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4433648716464.28
208	27-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4441486546600.91
209	28-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4449324376737.54
210	29-07-12	1799.42	1530520532312.10	-7837830136.63	-4457162206874.17
211	30-07-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4436727314414.60
212	31-07-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4416292421955.03
213	01-08-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4395857529495.46
214	02-08-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4375422637035.89
215	03-08-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4354987744576.32
216	04-08-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4334552852116.75
217	05-08-12	1832.66	1558793254908.30	20434892459.57	-4314117959657.18
218	06-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-4259082153984.21
219	07-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-4204046348311.24
220	08-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-4149010542638.27
221	09-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-4093974736965.30
222	10-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-4038938931292.33
223	11-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-3983903125619.36
224	12-08-12	1873.34	1593394168121.70	55035805672.97	-3928867319946.39
225	13-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3876808485665.92
226	14-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3824749651385.45
227	15-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3772690817104.98
228	16-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3720631982824.51
229	17-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3668573148544.04
230	18-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3616514314263.58
231	19-08-12	1869.84	1590417196729.20	52058834280.47	-3564455479983.11
232	20-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3504129170864.04
233	21-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3443802861744.96
234	22-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3383476552625.89
235	23-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3323150243506.82
236	24-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3262823934387.75
237	25-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3202497625268.68
238	26-08-12	1879.56	1598684671567.80	60326309119.07	-3142171316149.61

239	27-08-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-3094773568506.54
240	28-08-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-3047375820863.47
241	29-08-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-2999978073220.40
242	30-08-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-2952580325577.33
243	31-08-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-2905182577934.26
244	01-09-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-2857784830291.19
245	02-09-12	1864.36	1585756110091.80	47397747643.07	-2810387082648.12
246	03-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2734614544818.25
247	04-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2658842006988.38
248	05-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2583069469158.51
249	06-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2507296931328.64
250	07-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2431524393498.77
251	08-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2355751855668.90
252	09-09-12	1897.72	1614130900278.60	75772537829.87	-2279979317839.03
253	10-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-2141571301910.96
254	11-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-2003163285982.89
255	12-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-1864755270054.82
256	13-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-1726347254126.75
257	14-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-1587939238198.68
258	15-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-1449531222270.61
259	16-09-12	1971.36	1676766378376.80	138408015928.07	-1311123206342.54
260	17-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-1182156442544.97
261	18-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-1053189678747.40
262	19-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-924222914949.84
263	20-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-795256151152.27
264	21-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-666289387354.70
265	22-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-537322623557.13
266	23-09-12	1960.26	1667325126246.30	128966763797.57	-408355859759.55
267	24-09-12	1928.66	1640447327388.30	102088964939.57	-306266894819.98
268	25-09-12	1928.66	1640447327388.30	102088964939.57	-204177929880.41
269	26-09-12	1928.66	1640447327388.30	102088964939.57	-102088964940.84
270	27-09-12	1928.66	1640447327388.30	102088964939.57	0

<b>Среднее арифметическое стоимости компании X</b>	1538358362448.73
<b>Стандартное отклонение S</b>	64973302434
<b>Max <math>\sum(x_i - X)</math></b>	1.1434E+12
<b>Min <math>\sum(x_i - X)</math></b>	4.69008E+12
<b>Размах R</b>	5.83348E+12
<b>Нормированный размах R/S</b>	89.78277998
<b>Log(R/S)</b>	1.953193049
<b>Log(N*<math>\pi</math>/2)</b>	2.627484657

H	0.743369916
---	-------------

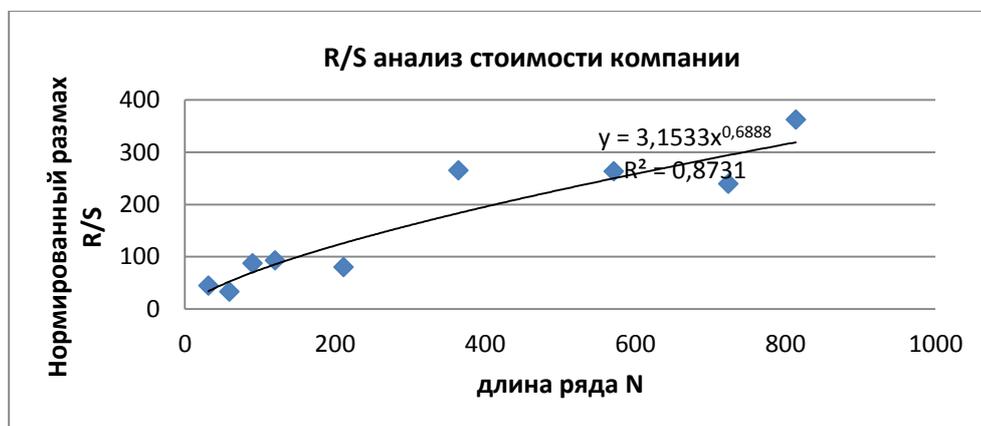
Тем же методом вычисляем нормированный размах для следующих периодов. Следовательно получаем следующую зависимость  $R/S$  от  $n$  (таблица 3.16):

(таблица 3.16) Нормированный размах для периодов.

Количество периодов $N$	$R/S$
90	38.41131947
180	2.451393398
270	89,78277998
365	140.452027
455	189.8298252
545	223.3355708
635	257.6635829
724	278.3325513
814	306.111642
904	315.6972103
994	337.1843742
1089	332.4512839
1179	333.6402424

Если функцию  $(R/S)_n = f(n)$  построить в логарифмических координатах по обеим осям (рис. 4), то решение уравнения (3.5) относительно  $c$  и  $H$  находится с помощью линейной аппроксимации (метода наименьших квадратов), так что  $c$  – расстояние, отсекаемое прямой на оси  $y$ , а  $H$  – угол наклона прямой к оси  $x$ .

R/S анализ стоимости компании



Величина достоверности аппроксимации. Показатель Херста  $H = 0,6$ , т.е мы получили персистентный временной ряд, то есть ряд, которому присуща трендовость (направленность).

Для определения точной ли является изображенная на графике линия тренда, необходимо обращать внимание на коэффициент аппроксимации  $R^2 = 0,8$ . Чем ближе этот коэффициент к единице, тем точнее линия тренда.

## 3.2. Обработка временных рядов данных

Часто значения временного ряда данных имеют случайные составляющие, поэтому возникает необходимость в сглаживании данных.

После сглаживания, можно рассмотреть задачу экстраполяции данных, иначе говоря, делать прогноз динамики временного ряда данных стоимостной динамики.

### 3.2.1. Задача сглаживания данных

Сглаживание всегда включает некоторый способ локального усреднения данных, при котором несистематические компоненты взаимно погашают друг друга. Самый общий метод сглаживания - *скользящее среднее*, в котором каждый член ряда заменяется простым или взвешенным средним  $n$  соседних членов, где  $n$  - ширина "окна" (см. Бокс и Дженкинс, 1976; Velleman and Hoaglin, 1981).

Вместо среднего можно использовать медиану значений, попавших в окно. Основное преимущество медианного сглаживания, в сравнении со сглаживанием скользящим средним, состоит в том, что результаты становятся более устойчивыми к выбросам (имеющимся внутри окна). Таким образом, если в данных имеются выбросы (связанные, например, с ошибками измерений), то сглаживание медианой обычно приводит к более гладким или, по крайней мере, более "надежным" кривым, по сравнению со скользящим средним с тем же самым окном. Основной недостаток медианного сглаживания в том, что при отсутствии явных выбросов, он приводит к более "зубчатым" кривым (чем сглаживание скользящим средним) и не позволяет использовать веса.

Сглаживание в среде **Mathcad** осуществляется оператором `smooth`(гладкий). Рассмотрим пример: сначала сформируем набор данных с случайной

$rnd(1) \in [0; 1]$  составляющей, а затем, с помощью оператора сглаживания  $supsmooth(X, Y)$  очистим данные.

Представляем соответствующую программу:

```
i := 1..500 Yi := rnd(1) - 0.5 + sin(0.05i) Xi := i
```

```
n := rows(Y) n = 501
```

```
sgl := supsmooth(X, Y)
```

```
i := 0..n - 1
```

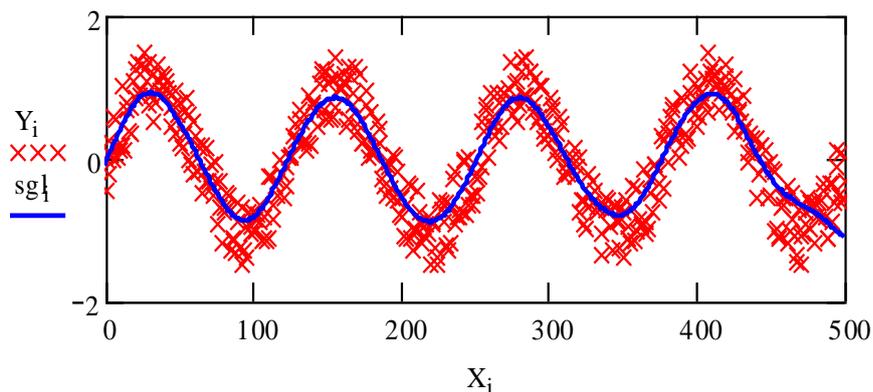


Рис.3.1. Сглаживание статистических данных.

Сглаживание можно и для временного ряда дискретных данных, на основе оператора  $medsmooth(VY, n)$ , который для  $m$  – мерного входящего вектора возвращает вектор сглаженных данных,  $n$  задает ширину окна сглаживания (нечётное число, которое меньше  $m$ ). Действительно, рассмотрим наш *гипотетический временный ряд*  $X_i$ , и постараемся провести сглаживание с шириной окна  $n = 11$ :

```
X := (1500
      1600
      2000
      1400
      1200
      1400
      1700
      1900
      2000
      2500
      2000
      1800)
```

```
Y := medsmooth(X, 11)
```

	0
0	1450
1	1500
2	1550
3	1600
4	1650
5	1700
6	1800
7	1850
8	1800
9	1850
10	1900
11	1950

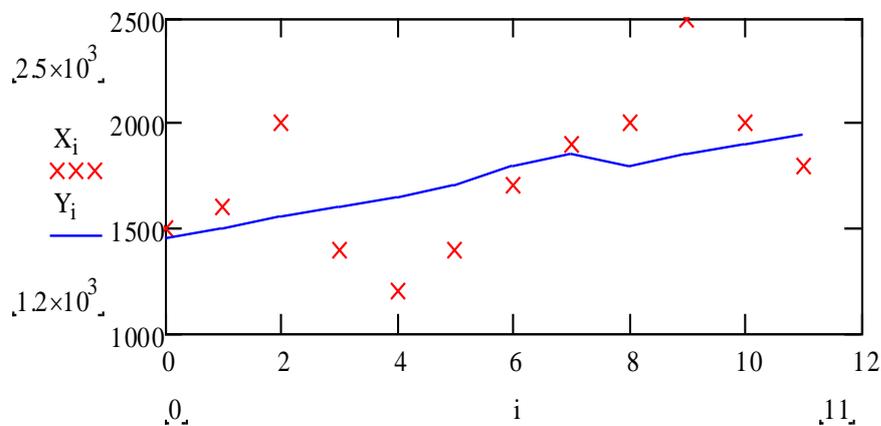


Рис.3.2. Сглаживание дискретного набора данных.

Как явствует из рис.3.2., сглаженные данные  $Y_i$  меняются более гладко, чем исходные  $X_i$  данные временного ряда.

### 3.2.2. Задача экстраполяции данных

Весьма заманчиво решать задачи прогноза, хотя, это задача настолько трудная и многофакторная, что порой непредсказуем результат, тем более, что если временной ряд данных имеет мультифрактальную структуру. Рассмотрим простейшую задачу экстраполяции: задаем 100 точек исходной зависимости заданной функции

$$f(x) = \sin \frac{x}{5} \cdot e^{\frac{x}{100}}$$

и с помощью оператора  $predict(\dots)$ , экстраполируем последующие 150 значений рис.3.3.

```
i := 0..100
```

```
ekstr := predict (Y, 20, 150)
```

$$Y_i := \sin\left(\frac{i}{5}\right) \cdot e^{\frac{i}{100}}$$

```
j := 0, 2..200
```

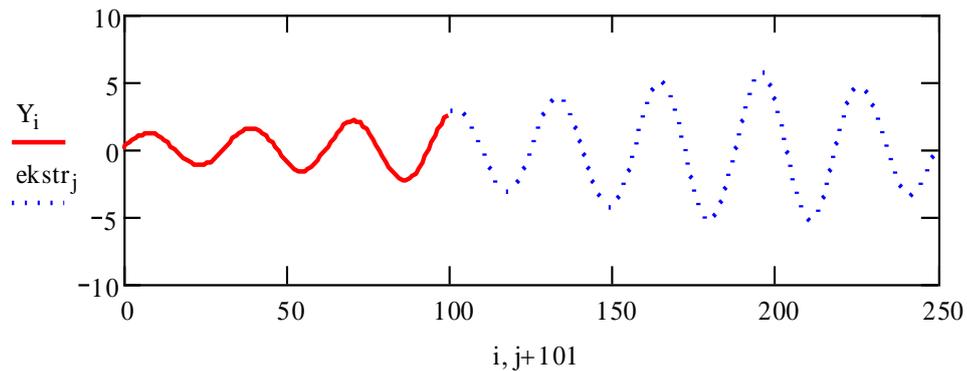


Рис.3.3. Экстраполяция данных (прерывистая линия).

Рассмотрим теперь, задачу экстраполяции для *гипотетического временного ряда*  $X_i$ . Для решения этой задачи составим программу:

```
X := (1500  
1600  
2000  
1400  
1200  
1400  
1700  
1900  
2000  
2500  
2000  
1800)
```

```
ekstr := predict (X, 5, 25)
```

```
j := 0..30
```

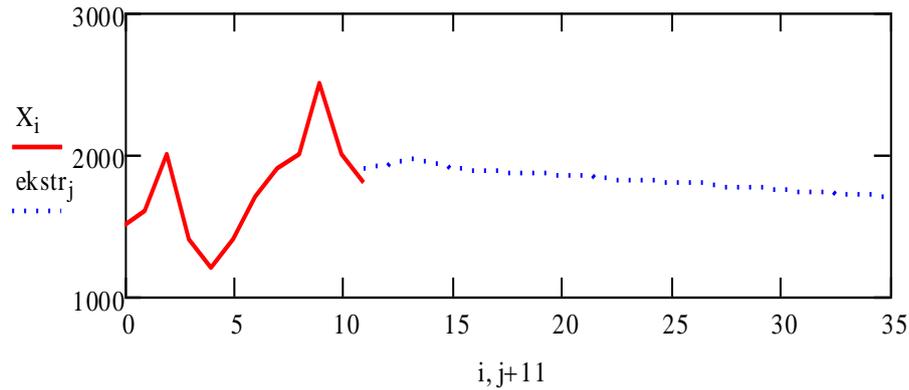


Рис.3.4. Экстраполяция гипотетического временного ряда данных

### 3.3. Фурье-анализ и синтез периодических временных данных

Теория о разложении функций в ряды Фурье называется гармоническим анализом. Как известно, коэффициенты Фурье функции  $f(t)$ , с периодом  $2\pi$  для разложения в промежутке  $(-\pi; \pi)$  определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad (3.11)$$

*а разложение в ряд Фурье* имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (3.12)$$

Легко преобразовать эти формулы для разложения функции в промежутке  $(-l; l)$ . Для этого нужно преобразование переменных  $t \rightarrow \xi$ , которое задаётся по формуле:

$$t = \frac{l\xi}{\pi} \Leftrightarrow \xi = \frac{\pi t}{l}. \quad (3.13)$$

Тогда разложение в ряд Фурье принимает вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi t}{l} \right), \quad (3.14)$$

а коэффициенты разложения вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt. \quad (3.15)$$

Если нам нужно экстраполировать периодическую функцию с периодом  $T = \frac{1}{f_1}$ , где  $f_1$  - частота первой гармоники периодически распределенного набора данных, тогда экстраполирующая функция в промежутке  $[0, T]$  записывается в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k f_1 t + b_k \sin 2\pi k f_1 t), \quad (3.16)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos 2\pi k f_1 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin 2\pi k f_1 t dt. \quad (3.17)$$

Часто ряд Фурье представляют в более удобном виде, для решения задачи синтеза:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (M_k \cos 2\pi k f_1 t + \varphi_k), \quad (3.18)$$

где амплитуды гармоник  $M_k$  и фазы  $\varphi_k$  вычисляются по формулам:

$$M_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}. \quad (3.19)$$

Определение амплитуды гармоник и фазы, или нахождение коэффициентов Фурье является задачей *спектрального анализа*. А обратная задача восстановления вида функции  $f(t)$  по конечным значениям данных, называется *задачей синтеза*. Гармонику с  $k = 1$  называют первой гармоникой, а её частоту  $f_1$  - главной частотой. Все другие частоты кратны основной частоте, т.е.  $f_k = k \cdot f_1$ ,  $k \in \{2; 3; 4; \dots\}$ .

В нашем случае, мы имеем функцию заданную дискретным набором значений временного ряда данных, стоимости компании в различные моменты времени:

### 3.3.1. Дискретный Фурье-анализ и спектр периодических функций

В нашем случае, мы имеем функцию заданную дискретным набором значений временного ряда данных, стоимости компании в различные моменты времени:  $X_i$ . Если считать что, между узлами значения функции постоянны, то интегралы при расчёте коэффициентов Фурье, можем вычислять методом прямоугольников, что и представляется формулами:

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N X_i \cdot \cos \frac{2\pi k i}{N}, \quad (3.20)$$

и

$$b_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i \cdot \sin \frac{2\pi k i}{N}. \quad (3.21)$$

При анализе дискретных данных, встает вопрос о числе отсчетов  $N$ . На этот вопрос отвечает теорема **Шеннона-Котельникова**, которая утверждает, что *число*

отсчётов (элементов данных) должна, по крайней мере, в два раза превышать число гармоник (членов Фурье-представления), т.е. ( $N \geq 2M$ ).

В программном пакете **Mathcad** имеется встроенная функция, позволяющая по дискретному ряду данных провести *дискретный спектральный анализ и синтез*.

*Дискретный спектральный анализ:*

$$X := \begin{pmatrix} 1500 \\ 1600 \\ 2000 \\ 1400 \\ 1200 \\ 1400 \\ 1700 \\ 1900 \\ 2000 \\ 2500 \\ 2000 \\ 1800 \end{pmatrix} \quad fl := 29000$$

$$M := \frac{N}{2} := \text{length}(X)$$

$$j := \sqrt{-1}$$

$$dt := \frac{1}{fl \cdot N}$$

$$p := 2 \cdot \pi \cdot fl \cdot dt \quad k := 0..M$$

$$i := 0..N - 1$$

$$a_k := \sum_i (X_i \cdot \cos(p \cdot k \cdot i))$$

$$b_k := \sum_i (X_i \cdot \sin(p \cdot k \cdot i))$$

$$M_k := |a_k + j \cdot b_k| \cdot \frac{2}{N} \quad \psi_k := -\arg(a_k + j \cdot b_k)$$

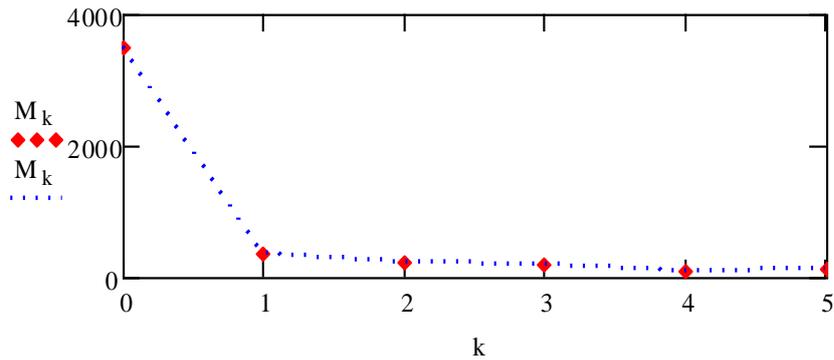


Рис.3.5. Дискретный спектр амплитуд

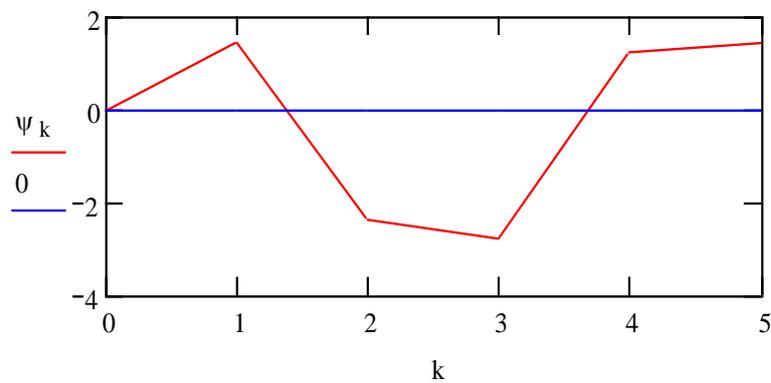


Рис.3.6. Дискретный спектр фаз.

### 3.3.2. Дискретный спектральный синтез

Рассмотрим дискретный спектральный Фурье-синтез дискретного временного ряда данных  $X_i$ . Задача восстановления вида функции  $f(t)$  по конечным значениям данных, называется *задачей синтеза*. В данном случае, мы строим функцию стоимости компании в виде ряда Фурье по вычисленным амплитудам и фазе:

$$f(t) := \frac{-a_0}{N} + \sum_k (M_k \cdot \cos(p1 \cdot k \cdot t + \psi_k))$$

действительно составляем программу, для спектрального синтеза функции стоимости:

**Дискретный спектральный синтез**

$$N = 12 \quad dt = 2.874 \times 10^{-7} \quad p1 := 2 \cdot \pi \cdot f1$$

$$a = \begin{pmatrix} 2.1 \times 10^4 \\ 286.603 \\ -950 \\ -1000 \\ 150 \\ 113.397 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.143 \times 10^3 \\ 952.628 \\ 400 \\ -433.013 \\ -757.18 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := \frac{-a_0}{N} + \sum_k (M_k \cdot \cos(p_1 \cdot k \cdot t + \psi_k))$$

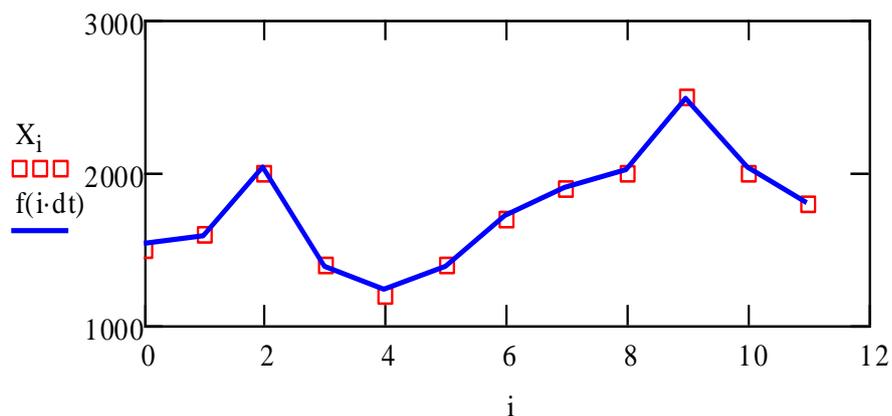


Рис.3.7. Дискретный спектральный синтез.

Из рис.3.7 явствует, что дискретный спектральный анализ дает достаточно хорошее приближение к нашим гипотетическим данным. Этот подход не всегда так успешен, так как он разработан для периодических функции, однако, можно конечную непериодическую функцию доопределить до периодической функции, но тогда о прогнозе последующих значений уже не может быть речи, поэтому мы рассмотрим и другие дискретные методы анализа и синтеза данных.

### 3.4. Вейвлет-анализ временного ряда данных

Для приближенного представления временного ряда данных часто используют вейвлет-преобразования. Вейвлет - преобразование дает возможность фильтровать данные. А далее, можно решать задачу прогнозирования, на основе приближения ряда данных вейвлет-представлением:

$$f(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{jk} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot t - k), \quad (3.22)$$

где  $\psi$ - материнский вейвлет.

Материнская вейвлет-функция должна удовлетворять следующим свойствам:

- 1. Локализация.** Значения материнской вейвлет-функции должны быть локализованы в ограниченном временном интервале;
- 2. Нулевое среднее значение.** Это означает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(t) dt = 0; \quad (3.23)$$

вейвлеты такого типа имеют порядок  $m$ .

- 3. Ограниченность.** Задают неравенством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty; \quad (3.24)$$

#### 3.4.1. Частные случаи вейвлет-функций

Рассмотрим частные случаи материнских вейвлет-функций, удовлетворяющих необходимым свойствам: локализации, нулевое среднее и ограниченность.

##### а) Мексиканская шапка (вейвлет Маара).

Так называют функцию, которая получается от функции Гаусса после дифференцирования два раза:

$$\psi(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (3.25)$$

Вейвлет Маара имеет вид рис. 3.1.

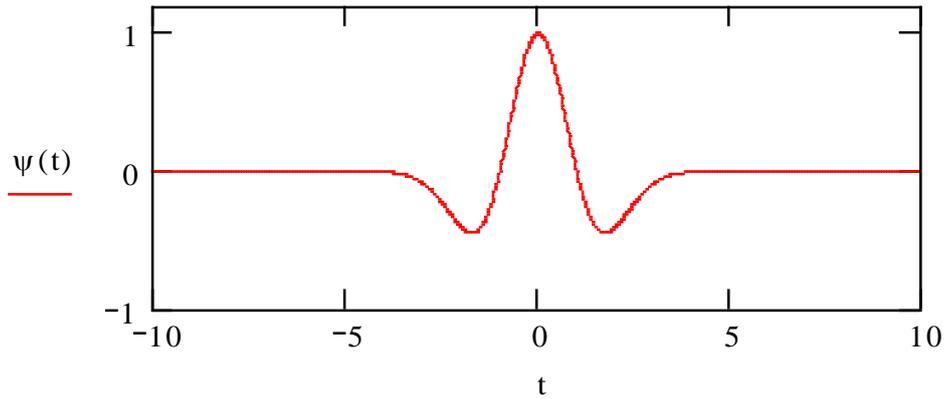


Рис.3.1. Мексиканская шапка

Соответствующий вейвлет-базис имеет вид

$$\psi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot t - k). \quad (3.26)$$

б) **Перевернутая мексиканская шапка.**

Задаётся в виде

$$\psi(t) = (1 + t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (3.27)$$

Соответствующий график имеет вид рис.3.2:

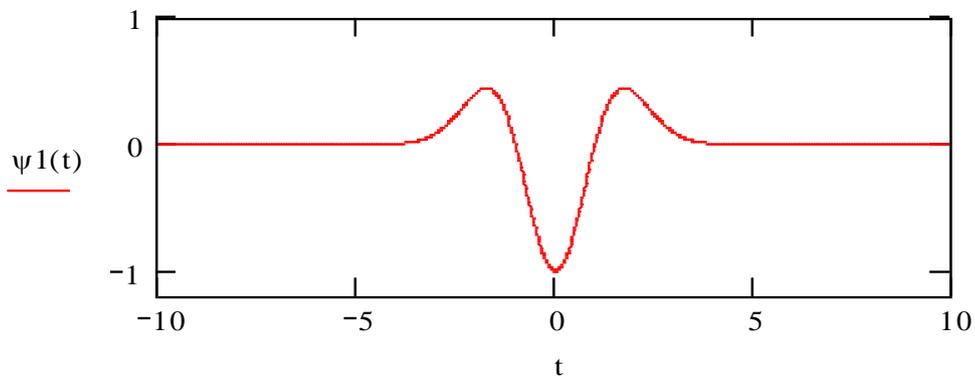


Рис.3.2. Перевернутая мексиканская шапка

в) **Вейвлет Хаара.** Соответствующий материнский вейвлет записывается в виде:

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{if } (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ 0 & \text{if } ((x < 0) \vee (x > 1)) \end{cases}. \quad (3.28)$$

Соответствующий график имеет вид:

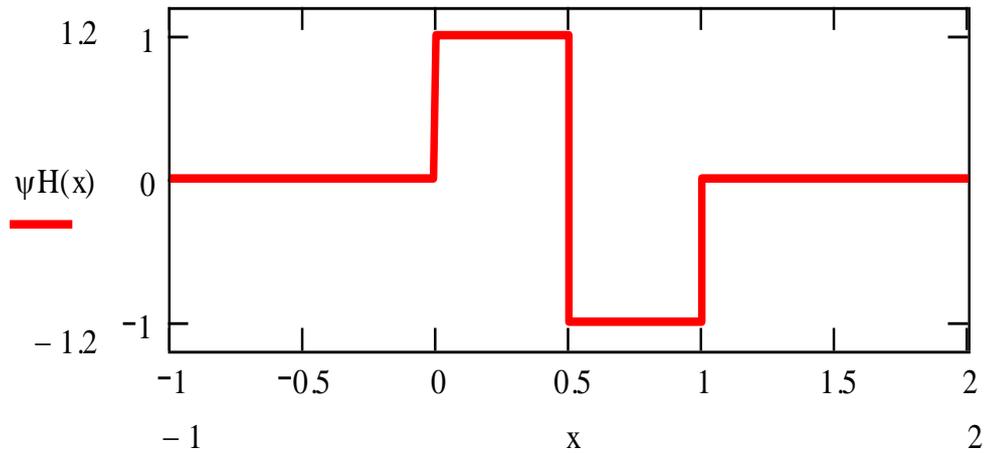


Рис.3.3. Вейвлет Хаара.

г) **Французская шапка.** Соответствующий вейвлет задается формулой:

$$\psi^F = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq \frac{1}{3} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{3} < |x| \leq 1; \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases} \quad (3.29)$$

а соответствующий график имеет вид:

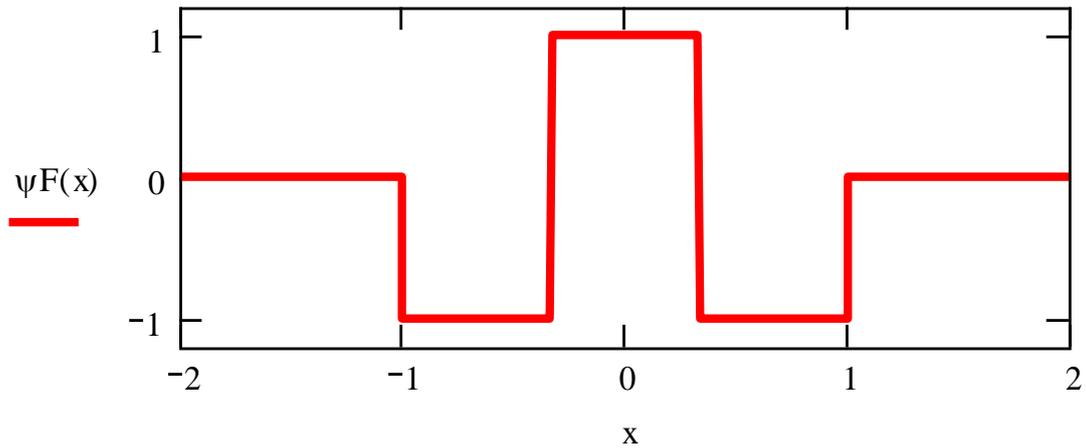


Рис.3.4. Французская шапка.

### 3.4.2. Вейвлет-преобразование

Как известно в  $L_2$  любую функцию  $f(t)$  можно представить в виде линейной комбинации базисных функций  $\{\psi_{kj}\}_{k,j=-\infty}^{\infty}$ :

$$f(t) = \sum_k \sum_j C_{kj} \cdot \psi_{kj}(t). \quad (3.30)$$

Базисные вейвлет-функции имеют конечный носитель и в общем случае, имеют вид:

$$\psi_{kj}(t) = a^{-\frac{j}{2}} \cdot \psi(a^{-j} \cdot t - k). \quad (3.31)$$

Если базисные функции разложения образуют ортонормированную систему, тогда любую функцию из  $L_2(\mathbb{R})$  можно представить в виде:

$$f(t) = \sum_k \sum_j \langle f(t), \psi_{kj}(t) \rangle \cdot \psi_{kj}(t). \quad (3.32)$$

Таким образом, функция представляется как наложение вейвлетов разных масштабов и локации.

Соответственно,  $\psi(t)$  функции называют материнскими вейвлетами, так как, они порождают множество вейвлетов. Параметры  $a, b$  - задают масштабирование и пространственный сдвиг вейвлетов.

Для вейвлетов коэффициенты разложения  $C_{kj}$  определяются по формулам *прямого дискретного вейвлет-преобразования*, аналогичных формулам для преобразования Фурье:

$$C_{kj} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot a^{-\frac{j}{2}} \cdot \psi(a^{-j} \cdot t - k) dt, \quad (3.33)$$

где  $a$  задает масштабирование, а  $k$  - пространственный сдвиг материнского вейвлета.

Обратное дискретное вейвлет-преобразование для непрерывных функции задается по формуле:

$$f(t) = \sum_k \sum_j C_{kj} \cdot \psi_{kj}. \quad (3.34)$$

Выбор материнских вейвлетов гораздо шире, чем при преобразованиях Фурье, где участвуют, лишь, тригонометрические периодические функции. Для проведения прямого вейвлет-преобразования в системе **Mathcad** имеется соответствующая процедура. Рассмотрим вейвлет-представление для симметрической прямоугольной функции – меандра, которая задается формулой:

$$f(t) = \text{sign}(\sin(0.04 \cdot t)). \quad (3.35)$$

В качестве материнского вейвлета используем функцию Маара. Составляем программу:

$$f(t) := \text{sign}(\sin(0.04t)) \quad \text{maar}(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \left( -e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} \right) + t^2 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2}$$

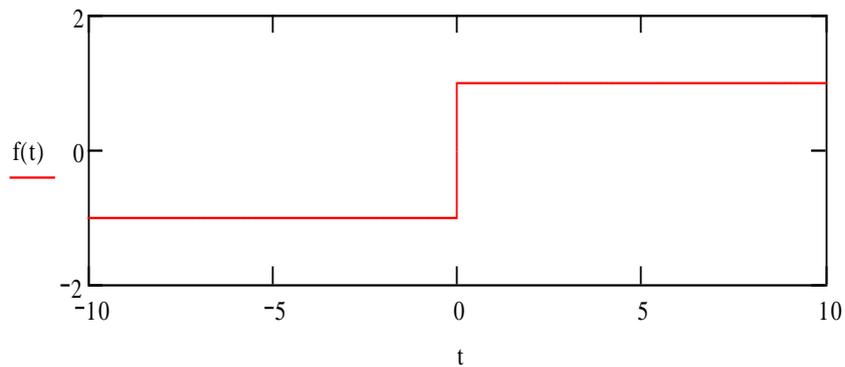


Рис.3.5. График функции Меандра

$$N := 256$$

$$\psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \text{maar}\left(\frac{t - b}{a}\right)$$

$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \psi(a, b, t) \cdot f(t) dt$$

$$b := 0, 1.. \frac{N}{10} \quad j := 0..32$$

$$a_j := \frac{(j + 12)^4}{30000}$$

$$N_j, b := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$$

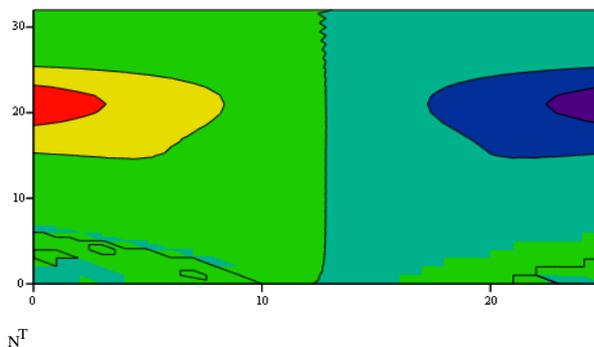


Рис.3.6. Вейвлет спектрограмма для функции Меандра

Часто бывает удобно, рассматривать *вейвлет-фреймы*, которые используют кратное двум масштабирование и непрерывные сдвиги т.е.  $a = 2^j \wedge b \in \mathbb{R}$ . Они занимают промежуточное место между непрерывными и *диадными вейвлетами*.

В диадных вейвлетах полагают, что  $a = 2^j \wedge b = 2^j \cdot k$ .

Мы рассматривали непрерывные функции и их дискретные вейвлет-преобразования, рассмотрим теперь поведение во времени временных данных стоимостной динамики  $X_i$ . Компоненты временного ряда часто представляют в виде:

$$X_i = \text{trend}_i + \text{sezon}_i + \text{sikl}_i, \quad (3.36)$$

где  $\text{trend}_i$  – тренд,  $\text{sezon}_i$  – сезонная составляющая,  $\text{sikl}_i$  – циклическая компонента. Много возможностей предоставляют дискретные и диадные вейвелеты для изучения временных рядов.

### 3.4.3. Кратномасштабный анализ

Как известно, функцию можно представить в виде суммы ее грубого приближения и детализирующей составляющей в разных местах локализации. Для реализации этой возможности используют ортогональные вейвелеты. С целью создания такой системы можно использовать систему вложенных под пространств функций  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$  различающихся, лишь масштабом. Для любой функции  $f(x) \in V_i$ , ее сжатая версия принадлежит пространству  $V_{i-1}$ . Существует такая функция  $\varphi(t)$  сдвиги которой образуют ортонормированный базис:

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \cdot \varphi(2^{-j} \cdot t - k). \quad (3.37)$$

Основанный на этом анализ называется *кратномасштабным анализом*. Этот вейвлет называется *отцовским вейвлетом*. Эти функции называются масштабирующими, так как они создают свои масштабированные версии в пространстве функций. При этом приближаемая функция  $f(x) \in V_i$  может быть представлен как предел последовательных  $f_m(t)$  приближений в субпространствах  $V_m$ . Переменная  $m$  называется масштабным коэффициентом. Так как, дерево декомпозиций функции при вейвлет-преобразованиях принято отсчитывать сверху вниз, нужно писать, что

$$f(t) = \lim_{m \rightarrow -\infty} f_m(t). \quad (3.38)$$

Соответственно, при больших  $m$  получаем грубое приближение, а при малых  $m$ , более точное приближение. Следовательно, аппроксимация функции происходит по итерационной формуле:

$$f_m(t) = \sum_k C(m, k) \cdot \varphi_{m,k}(t), \quad (3.39)$$

причем

$$\varphi_{0,0} = 2 \sum_k h_k \cdot \varphi(2t - k), \quad (3.40)$$

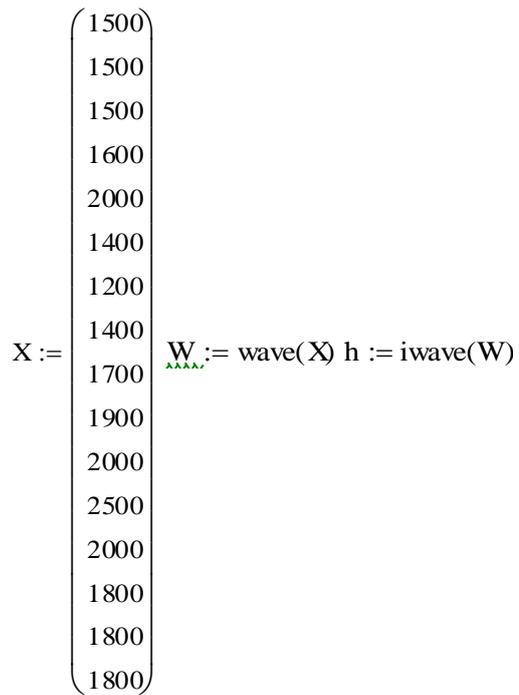
где  $h_k$  - некоторая последовательность, определяемая из свойств вейвлета. Таким образом, получаем представление функции в виде грубой и детализирующей составляющей:

$$f_m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{m,k} \cdot \varphi_{m,k}(t) + \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_k(t). \quad (3.41)$$

### 3.4.4. Вейвлет-анализ дискретных временных рядов

Вейвлет-анализ успешно применяется для временных рядов, с целью предсказаний цунами, землетрясений, обвалов, финансовых крахов, террористических актов и т.д. Нам предстоит применить вейвлет-анализ, для временных рядов стоимостной динамики компании.

В среде **Mathcad** есть вложенные процедуры, как прямого так и обратного дискретного вейвлет-преобразования. Рассмотрим наш гипотетический временной ряд  $X_i$  для стоимостной динамики и произведем вейвлет-анализ и синтез. Предварительно, доопределим наши данные граничными постоянными значениями таким образом, чтобы число элементов ряда составлял степень двойки. Тогда получаем:



$j := 0..15$

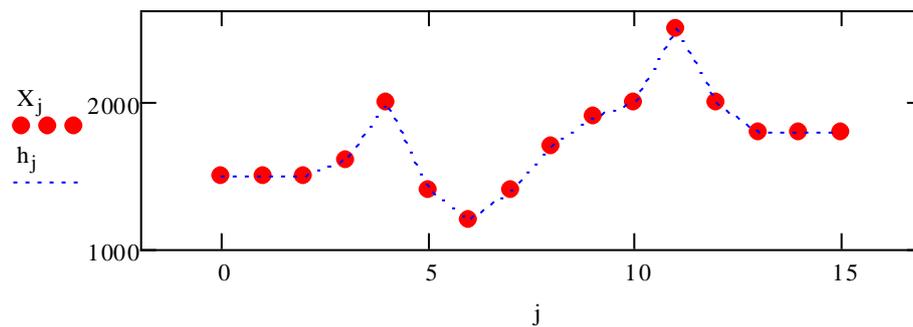


Рис. 3.7. Данные и синтезированные данные через вейвлет-преобразование.  
 Дискретный вейвлет- спектр гипотетических данных

	0
0	4383.683
1	5374.391
2	0.952
3	777.455
4	-267.732
5	155.232
6	-170.425
W = 7	-67.075
8	-106.066
9	-48.296
10	444.14
11	-244.949
12	35.355
13	-180.244
14	-15.479
15	-25.882

Как явствует из рис.3.7, обратное вейвлет-преобразование  $h_j$  имеет превосходное соответствие с гипотетическими  $X_j$  данными стоимостной динамики.

Это дает возможность, применения вейвлет-анализа и синтеза для обработки временных данных стоимостной динамики и прогнозирования дальнейших значений.

Рассмотрим соответствующую программу в среде **Mathcad** и результаты вейвлет-приближения:

$$\Psi(t) := (1 - t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \quad N := 10$$

$$m := 11$$

$$fl(\xi, \xi_1, t) := \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \left( \xi_{i,j} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \Psi\left(2^{\frac{j}{2}} \cdot t - i\right) \right) + \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \left( \xi_{1,i} \cdot 2^{-\frac{j}{2}} \cdot \Psi\left(2^{-\frac{j}{2}} \cdot t - i\right) \right)$$

$$X := \begin{pmatrix} 1500 \\ 1600 \\ 2000 \\ 1400 \\ 1200 \\ 1400 \\ 1700 \\ 1900 \\ 2000 \\ 2500 \\ 2000 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

$$f(\xi, \xi_1) := \sum_{k=0}^m (X_k - f_1(\xi, \xi_1, k))^2$$

$$i := 0..N \quad j := 0..N$$

$$\xi_{i,j} := 1 \quad \xi_{1,j} := 1$$

**Given**

$$\mathbf{R} := \text{Minimize}(f, \xi, \xi_1) *$$

$$R = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -58.629 & -22.166 & -10.093 & -1.892 & 4.147 & 5.868 & 7.885 & 10.736 & 14.769 & 20.473 & 28.538 \\ -137.172 & -55.699 & -14.742 & -17.393 & -4.221 & 0.967 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -211.344 & -85.289 & -44.509 & 5.4 & -24.247 & -2.259 & -1.795 & -2.953 & -4.59 & -6.906 & -10.181 \\ -173.335 & -119.705 & -42.78 & -3.876 & 0.663 & -14.191 & 0.378 & 0.135 & -0.224 & -0.73 & -1.448 \\ -2.838 & -142.408 & -38.746 & -117.862 & 57.946 & -35.769 & 0.374 & 0.951 & 0.931 & 0.902 & 0.861 \\ 99.235 & -34.453 & -100.573 & 83.08 & -30.397 & 39.065 & -9.442 & 0.999 & 0.999 & 0.998 & 0.997 \\ 228.98 & 50.915 & -40.404 & 42.867 & -166.282 & 70.091 & -46.699 & 0.997 & 1 & 1 & 1 \\ 92.437 & 25.873 & -153.61 & -360.364 & -4.308 & -26.903 & 1 & 0.733 & 1 & 1 & 1 \\ 142.89 & 67.953 & 269.235 & 334.891 & 349.051 & -43.538 & 118.483 & -5.843 & 1 & 1 & 1 \\ 203.445 & 208.455 & -223.248 & -33.589 & -86.061 & -151.786 & 1 & -48.758 & 1 & 1 & 1 \\ -185.205 & 158.931 & 271.55 & -772.344 & -540.141 & -152.123 & -46.699 & -49.882 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -58.629 & -145.462 & -309.079 & -502.771 & -582.318 & -345.968 & 60.379 & 313.249 & 370.46 & 327.669 & 257.786 \\ -137.172 & -300.6 & -435.14 & -335.96 & 262.187 & 967.654 & 992.199 & 661.106 & 366.714 & 188.52 & 94.298 \\ -211.344 & -270.73 & -56.205 & 566.625 & 1337.873 & 779.041 & 54.455 & -203.132 & -219.33 & -173.136 & -124.845 \\ -173.335 & 18.796 & 422.637 & 1195.638 & 357.11 & -484.468 & -426.501 & -243.821 & -130.866 & -72.185 & -41.688 \\ -2.838 & 268.266 & 669.516 & 470.831 & -661.292 & -349.694 & -114.936 & -37.939 & -13.971 & -5.658 & -2.349 \\ 99.235 & 281.907 & 900.158 & -679.055 & -307.754 & -49.927 & -7.414 & -0.791 & 0.492 & 0.816 & 0.919 \\ 228.98 & 277.484 & 17.711 & -434.567 & -35.331 & -1.283 & 0.802 & 0.973 & 0.994 & 0.998 & 1 \\ 92.437 & 597.407 & -775.745 & -63.674 & -0.359 & 0.966 & 0.998 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 142.89 & 705.156 & -297.027 & -1.952 & 0.983 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 203.445 & -715.61 & -28.269 & 0.955 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -185.205 & -575.199 & 0.108 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$g(t) := \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \left[ (R_0)_{i,j} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \Psi \left( 2^{\frac{j}{2}} \cdot t - i \right) \right] + \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \left[ (R_1)_{i,j} \cdot 2^{\frac{-j}{2}} \cdot \Psi \left( 2^{\frac{-j}{2}} \cdot t - i \right) \right]$$

$p := 0..11$

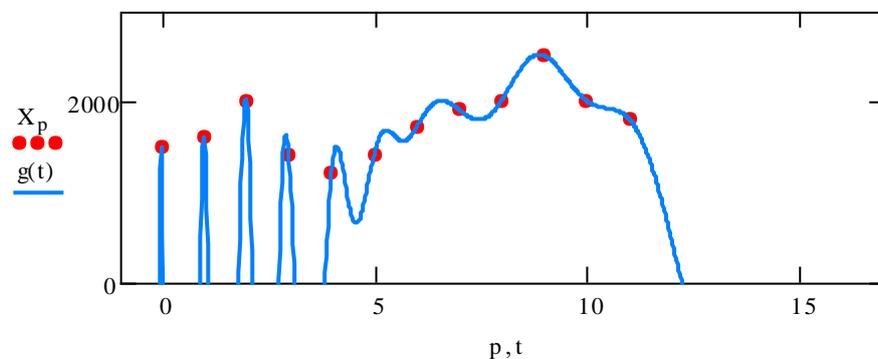


Рис. 3.8. Сравнение значений гипотетических данных и вейвлет-приближения

Как явствует из рис.3.8. вейвлет-приближение имеет эффект Гиббса в начальных точках, но, в дальнейших точках получаем хорошее приближение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Астраханцева И.А. Методология нелинейного динамического управления стоимостью компании. Иваново 2011
2. Круглова Н. Ю. Основы бизнеса. Учебник для вузов, 3-е издание, переработанное и дополненное. Москва, "Высшее образование", 2008
3. Базылев Н.И., Базылева М.Н. Основы бизнеса, Москва, 2003
4. <http://center-yf.ru/data/ip/Ocenka-stoimosti-biznesa.php>
5. Юркова Т.И., Юрков С.В. Экономика предприятия, Москва, 2006
6. Шарков Ф.И. Константы Гудвилла: стиль, паблисити, репутация, имидж и бренд фирмы. Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», Альтахсофт «Издательство Шаркова», Москва, 2010
7. Ковалев А.П., Кушель А.А., Хомяков В.С., Андрианов Ю.В., Лужанский Б.Е., Королев И.В., Чемерикин С.М. Оценка стоимости машин, оборудования и транспортных средств, Москва «Интерреклама», 2003
8. Дронов П.В. Методика оценки машин и оборудования, Москва 2005
9. Козырь Ю. В. Стоимость компании: оценка и управленческие решения. 2-е издание, переработанное и дополненное. Москва Альфа-Пресс, 2009
10. Ларченко А.П. "Оценка бизнеса. Подходы и методы" Санкт-Петербург 2008
11. Бусов В.И., Землянский О.А., Поляков А.П. Оценка стоимости предприятия, Москва, 2008
12. Бурлачков В.К. и др. Внешнеэкономическая деятельность в глобальной экономике, Изд. дом "АТИСО", 2009
13. Васюхин О.В.. Основы ценообразования, Учебное пособие, Санкт-Петербург 2010
14. Баздникин А.С. Цены и ценообразование: Учебное пособие, Юрайт-Издат, Москва, 2004
15. Салимжанов И.К. Ценообразование, Учебник /И.К. Салимжанов.- 2-е изд., стер. КНОРУС, Москва, 2008
16. Просветов Г. И. Цены и ценообразование: задачи и решения. Учебно-методическое пособие, Москва, Альфа-Пресс, 2007
17. Донцова Л.В. Анализ финансовой отчетности, 2004

18. Щербаков В.А., Щербакова Н.А. Оценка стоимости предприятия (бизнеса), Москва, 2006
19. Грязнова А.Г., Федотова М.А., Эскиндаров М.А., Тазикина Т.В., Иванова Е.Н., Щербакова О.Н. Оценка стоимости предприятия (Бизнеса), «Интерреклама», Москва, 2003
20. Джеймс Р. Хитчнер. Три подхода к оценке стоимости бизнеса, Издательство: «Маросейка», 2008
21. Под ред. Н.А. Абдуллаева, Н.А. Колайко. Оценка стоимости предприятия (бизнеса), учебное пособие, Экмос, Москва, 2000
22. Новикова И.Я. Оценка бизнеса, Новосибирск, 2008
23. Валдайцев С.В. Оценка бизнеса, 2008
24. Дамодаран А. Инвестиционная оценка. Инструменты и методы оценки любых активов, пер. с англ., Альпина Бизнес Букс, Москва, 2004
25. Сячева Г.И., Колбачев Е.Б., Сычев В.А. Оценка стоимости предприятия, Феникс, Ростов-на-Дону, 2003.
26. Таль Г. К. Антикризисное управление, Экономические основы, Москва, 2004
27. Фишмен Джей, Пратт Шэннон, Гриффит Клиффорд, Уилсон Кейт. Руководство по оценке стоимости бизнеса, пер. с англ. Л.И. Лопатникова, ЗАО «КВИНТО-КОНСАЛТИНГ», Москва, 2000
28. Паламарчук В.П. Оценка бизнеса, учебное пособие, Москва, 2004
29. Роберт Рейли, Роберт Швайс. Оценка нематериальных активов, 2005
30. Дворец Н.Н. Оценка стоимости предприятия, Москва, изд-во «МАРТИТ», 2008
31. Гриненко С.В. Экономика недвижимости, конспект лекций, изд-во «ТРТУ», Таганрог, 2004
32. Козырь Ю.В. Стоимость компании: оценка и управленческие решения, «Альфа-пресс», Москва, 2004
33. Есипов В.Е., Маховикова Г.А., Терехова В.В. Оценка бизнеса, «Питер», СПб.: 2001
34. Лимитовский, М.А. Оценка бизнеса, «Дело», Москва, 2000
35. Оценка стоимости предприятия (бизнеса): учеб. пособие / под ред. Н.А. Абдуллаева, Н.А. Колайко, «Экмос», Москва, 2000
36. Организация и методы оценки предприятия (бизнеса) : учебник / под ред. В.И. Кошкина, «Экмос», Москва, 2002
37. Гараников Л.Ф. Оценка стоимости предприятия, учебное пособие, ТГТУ, Тверь, 2007

38. Валдайцев С. В. Оценка бизнеса, учебник, 3-е издание, изд-во: «ТК Велби», «Проспект», 2008
39. Джеймс Р. Хитчнер. Три подхода к оценке стоимости бизнеса, пер. с англ., Мир, Москва, 2008
40. Васляев М.А. Оценка бизнеса и оценочная деятельность, конспект лекций, «Приориздат», Москва, 2008
41. Есипов В.Е., Махрвикова Г.А., Терехова В.В. Оценка бизнеса, Питер, СПб, 2008
42. Попков В.П., Евстафьева Е.В. Оценка бизнеса, схемы и таблицы: учебное пособие, «Питер», СПб., 2007
43. Харрисон Г. Оценка стоимости бизнеса, пер. с англ., «ЮНИТИ-ДАНА», Москва, 2004
44. Филиппов Л.А. Оценка бизнеса: учебное пособие, Москва, 2009
45. Рутгайзер В.М. Оценка стоимости бизнеса. - 2-е издание, изд-тво: «Маросейка», Москва, 2008
46. Антилл Н. Оценка компаний: анализ и прогнозирование с использованием отчетности по МСФО. Пер. с англ., Мир, Москва, 2007
47. Егерев, И.А. Стоимость бизнеса и искусство управления: учебное пособие / И.А. Егерев, « Дело», Москва, 2003
48. Сычева Г.И., Колбачев Е.Б., Сычев В.А. Оценка стоимости предприятия (бизнеса). Серия «Высшее образование», «Феникс», Ростов-на-Дону, 2004
49. Черняк В.З. Оценка бизнеса, «Финансы и статистика», Москва, 2004
50. Масленкова О.Ф. Оценка стоимости предприятия (бизнеса), изд-во «КноРус», Москва, 2011
51. Обгадзе Т.А., Тушишвили Н.З. Математическое моделирование экономических циклов, XIV международная конференция, тезисы докл., **Математика. Экономика. образование.** 29 мая - 5 июня, Новороссийск, 2006
52. Обгадзе Т.А., Цвераидзе З.Н. Лабораторные работы по курсу математическое моделирование в экономике, учебное пособие, Грузинский технический университет, Тбилиси, 2006
53. Обгадзе Т.А., Тордия Н.П. Обобщённая математическая модель экономической динамики, в рамках равновесной экономики Кейнса, материалы второй международной конференции **MMSED-2007**, Москва, 2007

54. Обгадзе Т.А., Обгадзе Л.Т., Тушишвили Н.З., Мchedlishvili Н., Давиташвили И. Курс математического моделирования (экономикс на основе Mathcad и Matlab), учебное пос., том 2, ГТУ, Тбилиси, 2007
55. Обгадзе Т.А. Курс математического моделирования (колебательные процессы), учебное пос., том 4, ГТУ, Тбилиси, 2010
56. Обгадзе Т.А., Тушишвили Н.З. Вейвлет-анализ макроэкономических показателей социально-экономической системы Грузии, Сборник научных трудов АН Грузии Института проблем управления им. А.И. Элиашвили, № 14, Тбилиси, 2010
57. Обгадзе Т.А., Тушишвили Н.З., Яшвили Л. Анализ макроэкономических показателей Грузии на основе математической модели Прангишвили-Обгадзе, сб. научн. трудов ГТУ, АСУ, №2(9), 2010
58. Обгадзе Т.А., Биченова Н.М. Обобщенная математическая модель экономической динамики, сб. научн. трудов ГТУ, АСУ, №2(11), 2011
59. Обгадзе Т.А., Биченова Н.М. Курс математического моделирования (социально-экономические процессы), учебное пос., том 5, ГТУ, Тбилиси, 2012
60. Обгадзе Т.А., Гоголадзе В.Р. Математическое моделирование экономической динамики стоимости строительной компании, сб. научн. трудов ГТУ, АСУ, № 2(15), ГТУ, Тбилиси, 2013
61. Обгадзе Т.А., Гоголадзе В.Р. Математическая модель экономической динамики стоимости строительной компании, материалы XXVIII международной заочной научно-практической конференции, 14 августа: «Экономика и современный менеджмент: теория и практика», Новосибирск, 2013
62. Нейман Ф.Э. Расчет показателя Херста в целях выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков. URL: <http://capital-times.com.ua>.
63. Бенуа Мандельброт. Фрактальная геометрия природы. Издательство: Мн.: Книжный Дом. Страниц: 656. 2001.
64. Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления. Улан-Удэ 2013.
65. Некрасова И.В. Кандидат экономических наук, доцент, Южный федеральный университет. Показатель Херста как мера фрактальной структуры и долгосрочной памяти финансовых рынков. Международный научно-исследовательский журнал. 2015

66. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000.
67. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
68. Стрыгин А.Ю. Анализ фрактальных свойств экономических процессов: Вып. квалиф. работа / Государственный университет Высшая Школа Экономики, Санкт-Петербургский филиал – Санкт-Петербург, 2004. – 109 с.
69. Мандельброт Б., Хадсон Р. (Не)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006.
70. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004
71. Астраханцева И.А., С.Е. Дубова. Стохастические финансовые временные ряды в управлении стоимостью компании. Ивановский государственный химико-технологический университет. «Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение» №4 (24) 2010.
72. Злотник А.А.. Эмпирическое исследование устойчивости поведения показателя Херста. 2007

## Содержание

Введение		3
ГЛАВА I. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА		7
1.1	Основные понятия в оценке стоимости бизнеса и виды стоимости	7
1.2	Анализ финансовой отчетности в оценке бизнеса	11
1.3	Подходы и методы оценки стоимости бизнеса	13
1.4	Методы доходного подхода при оценке бизнеса	15
1.5	Методы затратного подхода при оценке бизнеса	20
1.6	Методы сравнительного подхода при оценке бизнеса	21
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СТОИМОСТИ КОМПАНИИ		27
2.1	Построение математической модели экономической динамики стоимости компании	27
2.2	Частные случаи математической модели экономической динамики стоимости компании	29
2.3	Методика подбора функции стоимости чистых активов и функции дебета для математической модели стоимостной динамики	32
2.3.1	Регрессионный анализ временных данных стоимостной динамики, для определения функциональной зависимости чистых активов от стоимости компании	32
2.3.2	Задача линейной регрессии	34
2.3.3	Задача обобщённой линейной регрессии	35
2.3.4	Полиномиальная регрессия	36
2.3.5	Методика подбора функции дебета для динамического анализа стоимости компании	38
2.3.6	Определение функции дебета методом Паде-аппроксимации	40
2.4	Анализ данных стоимостной динамики	42
ГЛАВА 3. ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА ДАННЫХ СТОИМОСТИ КОМПАНИИ		44

3.1	R/S –Анализ дискретного временного ряда данных	44
3.1.1	Показатель Херста	46
3.1.2	Алгоритм RS-анализа	51
3.2	Обработка временных рядов данных	72
3.2.1	Задача сглаживания данных	72
3.2.2	Задача экстраполяции данных	74
3.3	Фурье-анализ и синтез периодических временных данных	76
3.3.1	Дискретный Фурье-анализ и спектр периодических функций	77
3.3.2	Дискретный спектральный синтез	78
3.4	Вейвлет-анализ временного ряда данных	81
3.4.1	Частные случаи вейвлет-функции	81
3.4.2	Вейвлет-преобразование	84
3.4.3	Кратномасштабный анализ	86
3.4.4	Вейвлет-анализ дискретных временных рядов	87
ЛИТЕРАТУРА		92