

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის  
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების  
ფაკულტეტის “მოდელირებისა და მართვის  
საინჟინრო-სამეცნიერო ცენტრი”

თამაზ ობგაძე

მათემატიკური მოდელირება  
მონოგრაფია

თბილისი

2016

მონოგრაფიას საფუძვლად დაედო ავტორის მიერ მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევის შედეგები. იგი საკვებით შეესაბამება დარგის თანამედროვე განვითარების დონეს. მოიცავს მათემატიკური მოდელირების ძირითად ხერხებსა და მეთოდებს. მონოგრაფიაში განხილულია როგორც ფიზიკური, ისე სოციალურ-ეკონომიკური, ფინანსური და პოლიტიკური სისტემები.

განხილულია მოდელირების ალგებრულ-გეომეტრიული მეთოდები, ლის ალგებრები, კარტანის დიფერენციალური ფორმები, ტოპოლოგიური ჯგუფები, ტენზორები, დიფერენცირებადი მრავალსახეობები, რიმანის გეომეტრია.

მონოგრაფიაში შესწავლილია გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების სტრუქტურა, მონაცემების კოდირებისა და დეკოდირების ფრაქტალურ-ვეივლეტური მეთოდები; ცოცხალი სისტემების მოდელირების მეთოდები.

ნაშრომი განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სტუდენტების, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის. წიგნი დახმარებას გაუწევს რთული, არაწრფივი პროცესების მათემატიკური მოდელირებით დაინტერესებულ მკითხველს.

რეცენზენტები: პროფ. ზურაბ გასიტაშვილი,

პროფ. ზურაბ წვერაიძე

ISBN 978-9941-0-8804-9

© ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.



**თამაზ კობახიე**

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის “მოდულირებისა და მართვის საინჟინრო-სამეცნიერო ცენტრის” ხელმძღვანელი,

საქართველოს საინჟინრო აკადემიის აკადემიკოსი,

საქართველოს ეროვნული აკადემიის აკადემიკოსი, პროფესორი, ტ.მ.დ.

ექვნიება ჩემი მშობლების

ნათელ ხსოვნას

### წინასიტყვაობა

მონოგრაფია **მათემატიკური მოდელირება**, ავტორის მეცნიერული კვლევების შედეგებზეა დამყარებული. ამ წიგნის სხვადასხვა ნაწილი შესრულდა მოსკოვის მ.ვ. ლომონოსოვის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტში(რუსეთი), ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის საბუნებისმეტყველების აკადემიის ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში, საქართველოს უნივერსიტეტში და საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში. მონოგრაფია დაწერილია სახელმძღვანელოს სტილში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდის მიხედვით, ნაშრომი წარმოადგენს ავტორის სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია განსხვავებული ვარიანტები ინდივიდუალური მუშაობისათვის. მკითხველმა უნდა შეასრულოს ამოცანები და სავარჯიშოები შესაბამისი განმარტებებით. მოყვანილია ასევე ლიტერატურის სია დამოუკიდებელი მუშაობისათვის, რათა წარმოდგენილი მასალა უფრო ღრმად იქნეს შესწავლილი.

ავტორი მადლობას უხდის მეცნიერ-ხელმძღვანელებს: პროფესორ თეიმურაზ გიორგის ძე ვოინიჩ-სიანოუენცკის და აკადემიკოს გიორგი ივანეს ძე პეტროვის, რომელთა შრომისმოყვარეობა, თავდადება და სამეცნიერო პატიოსნება, ჩემთვის ყოველთვის იყო სტიმულის მომცემი.



## შესავალი

ფიზიკური, სოციალურ-ეკონომიკური, ფსიქოლოგიური ან ეკოლოგიური პროცესების შესწავლისას ჩვენს წინაშე დგება ამოცანა: დიდი მოცულობის ინფორმაციის გადამუშავების შედეგად, მივიღოთ გარკვეული ოპტიმალური გადაწყვეტილება. ასეთ შემთხვევებში, განსაკუთრებულ როლს თამაშობს პროცესის მათემატიკური მოდელირება.

ჩვენს გარშემო არსებული რთული პროცესების შესასწავლად, ჩვენ ჯერ ვაგროვებთ ამ პროცესებთან დაკავშირებულ ყოველგვარ ინფორმაციას. ასე რომ, ამ ეტაპზე ჩვენ საქმე გვაქვს ცოდნის მოუწესრიგებელ მარაგთან.

შემდეგ, ხდება შეგროვილი ინფორმაციის სისტემატიზაცია და კლასიფიკაცია. ამ ეტაპზე დაგროვილი ცოდნა წარმოადგენს – მოძღვრებას, კარლ ლინეის ტიპთა შესახებ მოძღვრების ანალოგიურად.

ამის შემდეგ, შეისწავლება მოძღვრებაში განხილულ ობიექტთა განვითარებისა და ურთიერთქმედების ძირითადი კანონზომიერებები, რომლებიც ძირითადად დაკავშირებულია ცოდნის სხვა უფრო ღრმად შესწავლილ სფეროებთან, ანალოგიისა და ინტუიციის გზით, ამიტომ ხშირად ატარებენ სუბიექტურ-შემოქმედებით ხასიათს. ცოდნის განვითარების ამ ეტაპს – ხელოვნება ეწოდება.

შემდეგ ეტაპზე, ხდება ძირითად ცნებათა და კანონზომიერებათა მწყობრ აქსიომატურ სისტემად ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას გვაძლევს ცოდნის მოცემული სფეროს ფარგლებში ვაწარმოოთ შესაბამის მოვლენათა პროგნოზირება. ამ ეტაპზე, ჩვენი ცოდნათა მარაგი იძენს მეცნიერულ დონეს.

თანამედროვე მათემატიკის მიღწევებმა (ფრაქტალების თეორია) საშუალება მოგვცა გაგვეხსნა „მშვენიერების“ არსიც.

აღმოჩნდა, რომ ჩვენ მოგვწონს ხელოვნების ესა თუ ის ნიმუში, ფორმისა და შინაარსის ჰარმონიის შერწყმით „შემთხვევით-გამოუცნობთან“ (ოქროს კვეთის ფარგლებში), რაც დამალულია უცხო დამკვირვებლის თვალთაგან.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. ჩვენი განვითარებისა და ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენებიც (სამყაროს მოდელები) იცვლებიან.

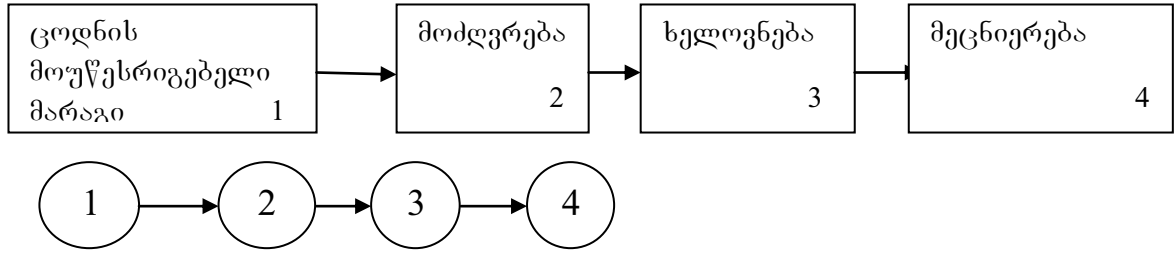
**განასხვავებენ მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას.**

- ა) ფიზიკური მოდელირება;
- ბ) იმიტაციური მოდელირება;
- გ) მათემატიკური მოდელირება.

**განსაზღვრება:** მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ ამ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები მოდელირება ეწოდება.

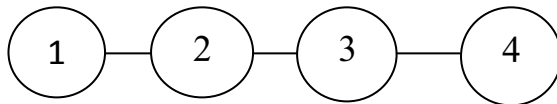
- ა) **ფიზიკური მოდელი** – არის ნატურალურ, ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტალურად;
- ბ) **იმიტაციური მოდელი** – არის კომპიუტერული მოდელი, რომელიც გაითამაშებს მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ რეალიზაციებს;
- გ) **მათემატიკური მოდელი** – არის მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ მოვლენის სურათი, განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის მოცემული სიზუსტით.

უმარტივესი მათემატიკური მოდელის მაგალითია პროცესის ბლოკ-სქემა. განვიხილოთ ცოდნის ევოლუციის მოდელი გრაფის მეშვეობით.



ცოდნის ევოლუციის ბლოკ-სქემა და გრაფი

ცხადია, რომ მოყვანილი გრაფი არის მეტად გამარტივებული, სქემატური, რადგან ყოველ ეტაპზე ხდება შებრუნებული პროცესიც ანუ ცოდნის მოუწესრიგებელი მარაგის მოძღვრებად გადაქცევის პარალელურად, ხდება ცოდნის მოცულობის გაფართოვებაც და ა.შ. ასე რომ ცოდნის ევოლუციის გრაფი არ უნდა იყოს ორიენტირებული.



ცოდნის ევოლუციის არაორიენტირებული გრაფი

მათემატიკური მოდელები მოდელირების მეთოდების მიხედვით იყოფიან ორ ძირითად ჯგუფად: ა) უწყვეტი მათემატიკური მოდელები და ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელები; თუმცა, არსებობენ გ) შერეული ტიპის, რთული სისტემების - სინთეზური მათემატიკური მოდელებიც.

მაგალითად, ცოდნის ევოლუციის გრაფი – დისკრეტული მათემატიკური მოდელია, ხოლო ჰარმონიული რხევების განტოლება შესაბამისი საწყისი პირობებით:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$$

წარმოადგენს უწყვეტი მათემატიკური მოდელის მაგალითს.

მათემატიკური მოდელირება წარმოადგენს ინფორმატიკის ერთ-ერთ ძირითად ნაწილს.

# I ნაწილი. ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები

## I თავი. რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება მოდელირებაში

### 1.1 ძირითადი ცნებები

**განსაზღვრება:** მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც აღიწერებიან ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით და შესაბამისი ალგებრული პირობებით – ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები ეწოდებათ.

ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით შევისწავლოთ რთული პროცესები: ქიმიაში, ბიოლოგიაში, ეკოლოგიაში, პოლიტიკაში, ფსიქოლოგიაში, ეკონომიკაში, ფიზიკაში და ა.შ.

იმისათვის, რომ შევადგინოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, საჭიროა, ჯერ შევადგინოთ კონცეპტუალური (აღწერითი) მოდელი ე.ი. გამოვყოთ

ძირითადი – განმსაზღვრელი პარამეტრები და შევადგინოთ მოვლენის რეაქტორული სქემა.

**განსაზღვრება:** იმ სქემას, რომელიც მოცემული მოვლენის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის ამყარებს ქიმიური რეაქციების მაგვარ კავშირებს, რეაქტორული სქემა ეწოდება.

ჩვენ განვიხილავთ რეაქტორული სქემების სხვადასხვა სახეებს.

**განსაზღვრება:** რეაქტორულ სქემას რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ წარმომქმნელ ელემენტს, მონომოლეკულური სქემა ეწოდება.

განასხვავებენ შექცევად და შეუქცევად სქემებს.

ა) განვიხილოთ შეუქცევადი მონომოლეკულური სქემა:

$$A \xrightarrow{k_1} B \tag{1.1}$$

$A$  - სქემის წარმომქმნელი ელემენტია;

$B$  - სქემის შედეგი;

$k_1$  -  $A$ -დან  $B$ -ს წარმოქმნის სიჩქარეა (რეაქციის სიჩქარე).

ამ რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$a$  - არის  $A$  წარმოქმნელი ელემენტის კონცენტრაცია,  $b$  - არის წარმოქმნილი  $B$  ელემენტის კონცენტრაცია.

რადგან (1.1) სქემიდან გამომდინარე,  $a$  - ელემენტის კონცენტრაცია მცირდება  $k_1$  სიჩქარით (ე.ი.  $\frac{da}{dt} < 0$ ), ხოლო  $b$  - ელემენტის კონცენტრაცია იზრდება იგივე სიჩქარით (ე.ი.  $\frac{db}{dt} > 0$ ) მივიღებთ ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -k_1 a \\ \frac{db}{dt} = k_1 a \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

სადაც  $a_0$  და  $b_0$  - შესაბამისი კონცენტრაციების საწყისი მნიშვნელობებია.

(1.2) - წარმოადგენს შეუქცევადი მონომოლეკულური სქემის შესაბამის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს.

ბ) ესლა განვიხილოთ **შექცევადი მონომოლეკულური რეაქტორული სქემა**:



სადაც  $k_{-1}$  - არის სქემის წარმოქმნელი ელემენტის აღდგენის სიჩქარე (უკუ რეაქციის სიჩქარე).

შექცევადი მონომოლეკულური რეაქტორული სქემის შესაბამის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = k_{-1}b - k_1a \\ \frac{db}{dt} = k_1a - k_{-1}b \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.2) – მოდელის შესაბამისი პროცესია – რადიოაქტიური დაშლის რეაქცია, ხოლო (1.4) – მოდელს შეესაბამება მაგალითად A სითხის აორთქლება, ერთდროულად ორთქლიდან კონდენსაციით B.

## 1.2 ბიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები

**განსაზღვრება:** რეაქტორულ სქემას ორი წარმომქმნელი ელემენტით, ბიმოლეკულური ეწოდება.

განასხვავებენ შეუქცევად და შექცევად ბიმოლეკულურ სქემებს:

ა) განვიხილოთ შეუქცევადი ბიმოლეკულური რეაქტორული სქემა:



ორი ელემენტიდან A და B წარმოიქმნება ერთი C ელემენტი,  $k_1$  სიჩქარით.

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -k_1ab \\ \frac{db}{dt} = -k_1ab \\ \frac{dc}{dt} = k_1ab \\ a(0) = a_0; b(0) = b_0; c(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

ბ) ესლა განვიხილოთ შექცევადი ბიმოლეკულური რეაქტორული სქემა:





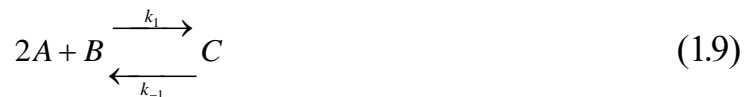
შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = k_{-1}c - k_1ab \\ \frac{db}{dt} = k_{-1}c - k_1ab \\ \frac{dc}{dt} = k_1ab - k_{-1}c \\ a(0) = a_0; b(0) = b_0; c(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.3 ტრიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები

**განსაზღვრება:** რეაქტორულ სქემას სამი წარმომქმნელი ელემენტით ტრიმოლეკულური ეწოდება.

განვიხილოთ შექცევადი ტრიმოლეკულური სქემა:



სადაც  $A$  ელემენტს აქვს სტეხეომეტრული კოეფიციენტი  $(2A = A + A)$

(1.9) სქემის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

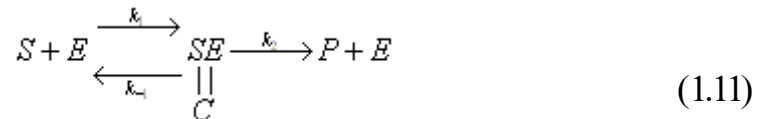
$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = 2k_{-1}c - k_1a^2b \\ \frac{db}{dt} = k_{-1}c - k_1a^2b \\ \frac{dc}{dt} = k_1a^2b - k_{-1}c \\ a(0) = a_0; b(0) = b_0; c(0) = c_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

პრაქტიკული ამოცანები, როგორც წესი, უფრო რთულია ვიდრე ზემოთ განხილული სქემები. განვიხილოთ ზოგიერთი არსებული ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, რომელებიც უკვე კლასიკას მიეკუთვნებიან.

## 1.4 მიხაელის-მენტენის მათემატიკური მოდელი

მიხაელის-მენტენის რეაქცია ერთ-ერთი ყველაზე მარტივი ფერმენტული რეაქციაა; სადაც  $S$  - სუბსტრატი შეუქცევადად გარდაიქმნება  $P$  - პროდუქტად ერთი  $E$  - ფერმენტის მეშვეობით და ქმნის შეუქცევად  $SE$  - ფერმენტ-სუბსტრატულ კომპლექსს.

მიხაელის-მენტენის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



თუ, გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ მეთოდს, (1.11) რეაქტორული სქემა შეიძლება მივიყვანოთ მათემატიკურ მოდელამდე:

$$\begin{cases}
 \frac{ds}{dt} = k_{-1}c - k_1se \\
 \frac{de}{dt} = -k_1se + (k_{-1} + k_2)c \\
 \frac{dc}{dt} = k_1se - (k_{-1} + k_2)c \\
 \frac{dp}{dt} = k_2c \\
 s(0) = s_0; e(0) = e_0; c(0) = p(0) = 0
 \end{cases} \quad (1.12)$$

(1.12) მათემატიკურ მოდელს მიხაელის-მენტენის მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ.

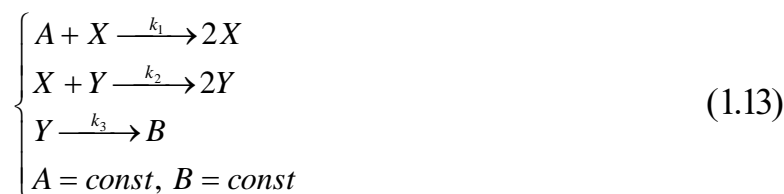
## 1.5 ლოტკა-ვოლტერას მათემატიკური მოდელი

სხვადასხვა პოპულაციათა ურთიერთქმედების შესწავლის შემდეგ, ვოლტერამ შეადგინა ეკოლოგიური პროცესების მათემატიკური მოდელი, რომელიც მათემატიკის თვალსაზრისით, დაემთხვა ლოტკას რეაქციის მათემატიკურ მოდელს.

ეს მოდელი აღწერს ორ  $X$  და  $Y$  სუბიექტს შორის ბრძოლისა და კონკურენციის პროცესს არსებობისათვის

ბრძოლაში. ცხადია, რომ ეს მოდელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ეკონომიკაშიც.

ლოტკა-ვოლტერას პროცესის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



სისტემა ღიაა ე.ი. ხდება ურთიერთქმედება გარემოსთან ( $A \wedge B$ ).

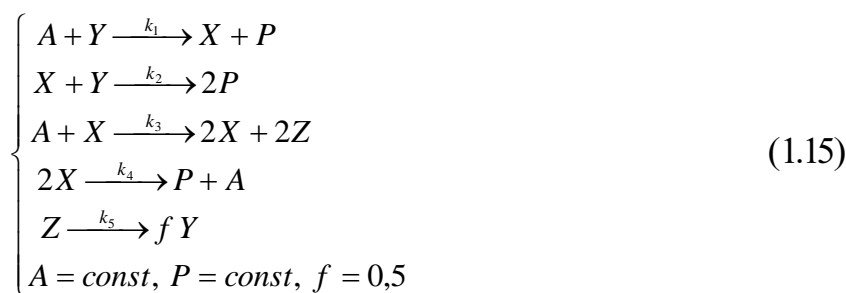
შესაბამის მათემატიკურ მოდელს შევადგენთ (1.13) სქემიდან გამომდინარე, ზემოთ შესწავლილი მეთოდით:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 ax - k_2 xy \\ \frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_3 y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

(1.14) მოდელს ლოტკა-ვოლტერას მოდელი ეწოდება.

## 1.6 ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკური მოდელი

ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია – არის რხევითი რეაქცია, რომელიც დეტალურად შეისწავლეს ფილდმა, კიორესმა და ნოიესმა. ჩვენ არ ჩაუღრმავდებით ამოცანის ქიმიურ არსს და პირდაპირ ჩავწერთ რეაქციის რეაქტორულ სქემას:



ეს სისტემა ღიაა რადგან  $A$ -ს უმატებენ იმდენს რამდენიც დააკლდება, რომ შეინარჩუნონ  $A = const$ ,  $f$ -სტეხეომეტრული კოეფიციენტია.

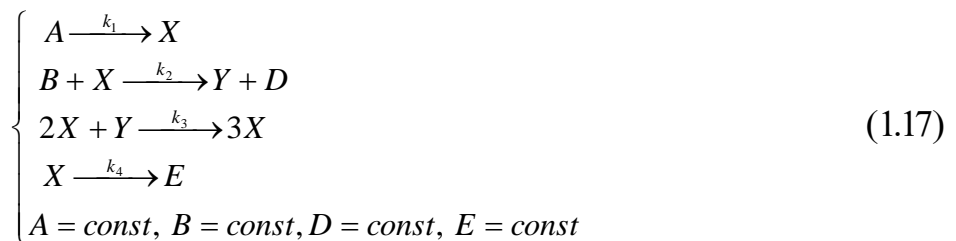
(1.15) რეაქტორული სქემის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 ay - k_2 xy + k_3 ax - k_4 x^2 \\ \frac{dy}{dt} = -k_1 ay - k_2 xy + k_5 fz \\ \frac{dz}{dt} = 2k_3 ax - k_5 z \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

## 1.7 პრიგოჟინ-ლევევერის მათემატიკური მოდელი

პრიგოჟინ-ლევევერის მოდელი არის, ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებული იქნა ქ. ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით, ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელი-ატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლევევერის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემა ღიაა ე.ი. ემატება ან აკლდება  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$  ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შეინარჩუნება ერთ დონეზე.

(1.17) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე აღვიღად ავაგებთ პრიგოჟინ-ლეფვერის მათემატიკურ მოდელს:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 a + k_3 x^2 y - (k_2 b + k_4) x \\ \frac{dy}{dt} = k_2 b x - k_3 x^2 y \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

### 1.8 რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება კოლმოგოროვის განტოლებების შესადგენად მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვებისათვის

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება სიტუაცია, როცა ერთი მდგომარეობიდან სისტემა შემთხვევით გადადის მეორე მდგომარეობაში. მაგალითად, აპარატურის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება გამოვიდეს წყობიდან დროის ნებისმიერ მომენტში, მისი შეკეთებაც შეიძლება მოხდეს დროის შემთხვევით მომენტში და ა.შ.

ასეთი პროცესების აღსაწერად გამოიყენებენ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის რეაქტორულ სქემას, დისკრეტული მდგომარეობათა სივრცით და უწყვეტი დროით.

ვთქვათ  $S_1, S_2, \dots, S_n$  - სისტემის მდგომარეობათა დისკრეტული მიმდევრობაა, ე.ი.  $\{S_k\}_{k=1}^n$  არის იმ მდგომარეობათა სიმრავლე რომელშიც შეიძლება იყოს ჩვენი სისტემა დროის სხვადასხვა მომენტში, სიტუაციის მიხედვით.

ამა თუ იმ  $S_i$ -მდგომარეობაში სისტემის ყოფნის ალბათობა აღვნიშნოთ  $p_i(t)$ -თი.  $p_{ij}(t)$ -არის სისტემის  $S_i$ -მდგომარეობიდან  $S_j$ -მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა.

**განსაზღვრება:** სისტემის  $S_i$ -მდგომარეობიდან  $S_j$ -მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობის სიმკვრივე  $\lambda_{ij}$ -ეწოდება, შესაბამისი გადასვლის ალბათობის ცვლილების სიჩქარეს, ე.ი.

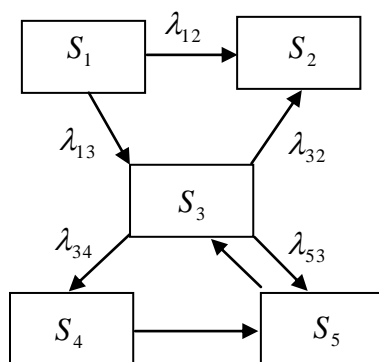
$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \quad (1.19)$$

ცხადია, რომ დროის მცირე  $\Delta t$  შუალედისათვის

$$p_{ij}(t) \approx \lambda_{ij} \Delta t \quad (1.20)$$

თუ  $\lambda_{ij}$ -გადასვლის ალბათობათა სიმკვრივეები არ არიან დამოკიდებული  $t$ -დროზე, მაშინ მარკოვის პროცესს ერთგვაროვანი ეწოდება; წინააღმდეგ შემთხვევაში - არაერთგვაროვანი.

განვიხილოთ მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფი, მაშინ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელების რეაქტორული სქემიდან აგების წესის გამოყენება, მოგვცემს კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემას მარკოვის პროცესისათვის, რომელიც შეესაბამება (ნახ. 1.1).



ნახ. 1.1. მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფი

ნახაზზე მოცემული გრაფის (ამჯერად ამ გრაფს ვუყურებთ როგორც რეაქტორულ სქემას), შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{53}p_5 - (\lambda_{32} + \lambda_{34} - \lambda_{35})p_3 \\ \frac{dp_4}{dt} = \lambda_{34}p_3 - \lambda_{45}p_4 \\ \frac{dp_5}{dt} = \lambda_{45}p_4 - \lambda_{53}p_5 + \lambda_{35}p_3 \end{array} \right. \quad (1.21)$$



თუ ვიცით, რომ საწყის  $t=0$  მომენტში სისტემა იმყოფებოდა  $S_1$ -მდგომარეობაში, მაშინ საწყის პირობებს ექნებათ სახე:

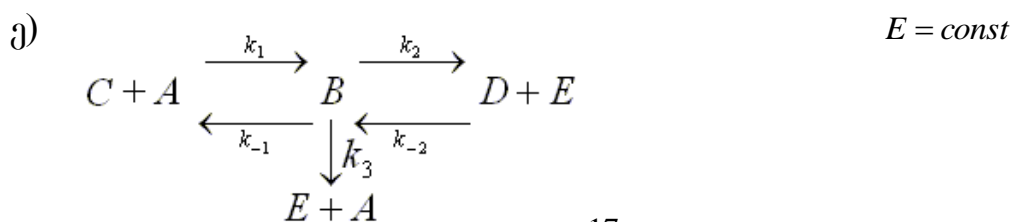
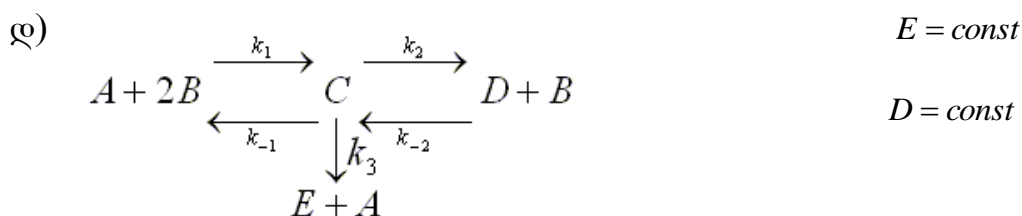
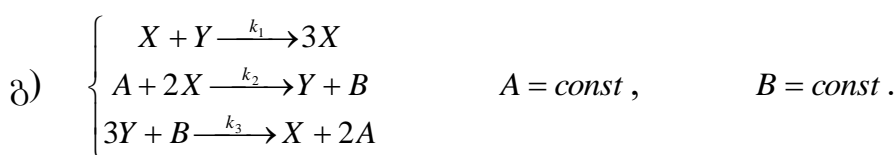
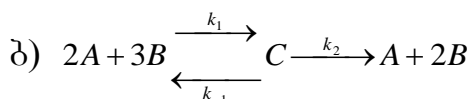
$$p_1(0)=1; \quad p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=p_5(0)=0 \quad (1.22)$$

(1.21), (1.22) – წარმოადგენს მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვის ნახ.1.1-ზე მოცემული მდგომარეობათა გრაფის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს.

ანალოგიურად, შეიძლება ავადოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი რთული პროცესებისათვის, რომლებისთვისაც წინასწარ აიგება შესაბამისი მდგომარეობათა მიმართული გრაფი.

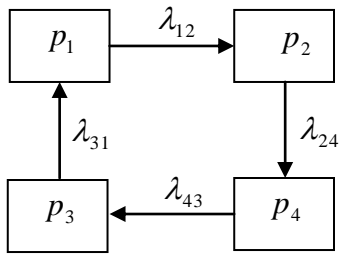
### ამოცენები და სავარჯიშოები

1. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები:

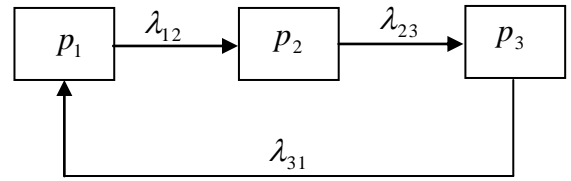


2. ახგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით.

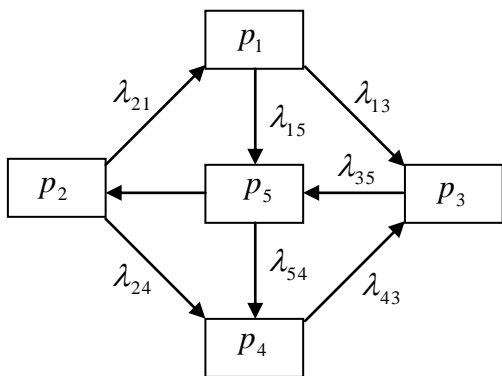
ა)



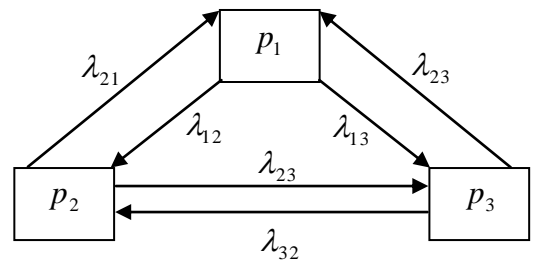
ბ)



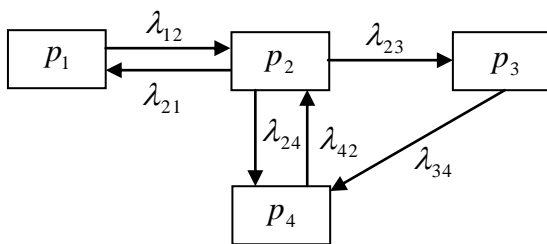
გ)



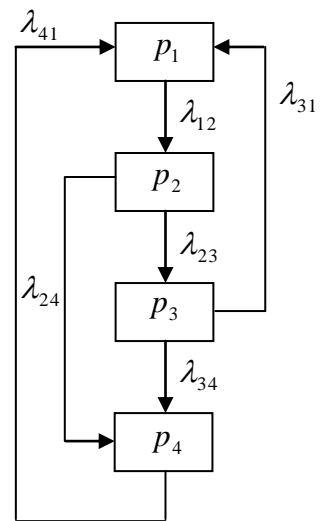
დ)



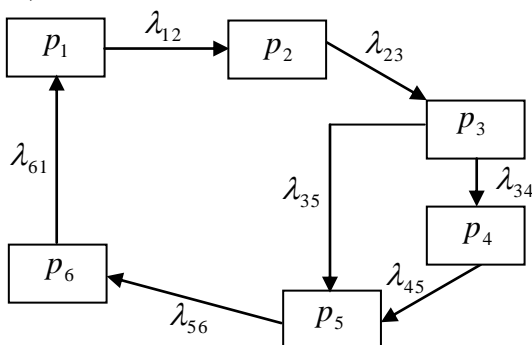
ე)



ვ)



ზ)



## ლიტერატურა

1. Холодник М., Клич А., Кубичек М., Марек М., Методы анализа нелинейных динамических моделей, М., Мир, 1991
2. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования, учеб. пос., ГПИ, Тбилиси, 1989
3. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, М., Мир, 1985
4. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. Иерархии неустойчивостей. –М., Мир, 1979
5. Паулинг Л. Природа химической связи. –М., -Л.: Госхимиздат, 1947
6. Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. Новосибирск, 1966
7. Пригожин И. Молекулярная теория растворов. –М.: Металлургия, 1990
8. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур, М., Мир, 2002
9. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии, М., 2002
10. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), ტ.1, სტუ, თბილისი, 2006

## II თავი. კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მოდელები

### 2.1. მატერიალური წერტილის ცნება და დინამიკის განტოლებები. n-სხეულის პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ლანჯევენის მათემატიკური მოდელი

**განსაზღვრება:** სხეულს, რომლის ზომებიც შეიძლება უგულებელვყოთ მოცემული ამოცანის პირობებში, მატერიალური წერტილი ეწოდება. მაგ: პლანეტების ურთიერთის მიმართ მოძრაობის შესასწავლად, ისინი შეიძლება ჩავთვალოთ მატერიალურ წერტილებად, რომელთაც გააჩნიათ შესაბამისი პლანეტის ტოლი მასები- $m_i$ , მაგრამ, თუ გვანტერესებს პლანეტის ბრუნვითი მოძრაობის მოდელირება საკუთარი ღერძის გარშემო, მას უკვე ვერ ჩავთვლით მატერიალურ წერტილად და იძულებული ვართ, სხვა გზები ვეძიოთ შესაბამისი პროცესების მათემატიკური მოდელების შესადგენად.

თანამედროვე ტექნიკის მიღწევები მთლიანად (თვითმფრინავები, რაკეტები, მანქანა-მექანიზმები, მშენებლობების პროექტირება და ა.შ.) ემყარება კლასიკურ-ნიუტონურ მექანიკას.

კლასიკური მექანიკის საფუძველს შეადგენენ ნიუტონის კანონები, რომლებიც ემყარებიან ექსპერიმენტებს და სად-მეტაფიზიკურ აზროვნებას.

განვიხილოთ ნიუტონის კანონები:

#### ა) ნიუტონის პირველი კანონი:

თუ სხეულზე არ მოქმედებენ სხვა სხეულები, ან მათი მოქმედება კომპენსირებულია, მაშინ სხეული ან უძრავია ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად;

ანუ თუ  $\vec{F}$  (ძალების ჯამი)=0, მაშინ  $\vec{a}$  (აჩქარება)=0.

**შენიშვნა:** ეს კანონი ძალაშია, მხოლოდ მაშინ როცა დაკვირვებას ვაწარმოებთ ისეთი ათვლის სისტემების მიმართ, რომლებიც მოძრაობენ აჩქარების გარეშე. ასეთ ათვლის სისტემებს ინერციულ ათვლის სისტემებს უწოდებენ.

ბ) ნიუტონის მეორე კანონი:

აჩქარება, რომლითაც მოძრაობს სხეული პირდაპირპროპორციულია მოძრაობის გამომწვევი ძალისა და უკუპროპორციულია სხეულის მასისა:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.1)$$

ამ კანონიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.2)$$

**შენიშვნა:** ნიუტონის მეორე კანონიც ძალაშია მხოლოდ ინერციული სისტემებისთვის.

გ) ნიუტონის მესამე კანონი:

ორი სხეულის ურთიერთქმედებისას,  $\vec{F}_{12}$ -ძალა რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს მეორეზე, სიდიდით ტოლია და მიმართულია  $\vec{F}_{21}$ -ძალის საპირისპიროდ, რომლითაც მეორე სხეული მოქმედებს პირველზე ანუ

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.3)$$

**შენიშვნა:** ეს კანონი ძალაშია, თუ ურთიერთქმედება ხორციელდება მყისიერად, მაგრამ რეალურად, სხეულთა შეჯახებისას დეფორმაცია გადაეცემა სასრული სიჩქარით.

კლასიკური მექანიკის ძირითადი კანონია ნიუტონის მეორე კანონი:

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{F} \quad (2.4)$$

სადაც  $\vec{P} = M \cdot \vec{v}$  -იმპულსია,  $\vec{F}$  -ძალა. ეს კანონი ძალაშია ინერციული სისტემებისათვის.

თუ სხეულის მასა  $M = \text{const}$  მუდმივია, მაშინ (3.4) მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (2.5)$$

დ) მსოფლიო მიზიდულობის კანონი:

პლანეტების ურთიერთქმედების შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს ამ კანონს, რომლის თანახმადაც: ბუნებაში ნებისმიერი  $M_1$ -მასის სხეული მიიზიდავს ნებისმიერ სხვა  $M_2$ -მასის სხეულს ძალით, რომელიც პირდაპირპროპორციულია ამ მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია ამ მასების ცენტრებს შორის მანძილის ( $r^2$ ) კვადრატისა:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\gamma \cdot M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r}_{12} = -\frac{\gamma \cdot M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \quad (2.6)$$

სადაც  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$  ნმ<sup>2</sup>/კმ<sup>2</sup>-უნივერსალური გრავიტაციული მუდმივაა,  $\vec{r}_{12}$ -ერთეული სიგრძის ვექტორია, რომელიც მიმართულია  $M_1$ -დან  $M_2$ -საკენ.  $\vec{r}_{12} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

მოცემული გამარტივებული მოდელების პირობებში განვიხილოთ, რიგი საინტერესო ფაქტებისა.

**ამოცანა 2.1.1. ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა დედამიწის გარშემო, წრიულ ორბიტაზე.**

ვთქვათ თანამგზავრის მოძრაობის მიმართულება ემთხვევა დედამიწის ბრუნვის მიმართულებას. თანამგზავრის ორბიტის  $r$ -რადიუსის რა მნიშვნელობისათვის მოეჩვენება დედამიწაზე მყოფ დამკვირვებელს თანამგზავრი უძრავად?

**ამოხსნა:** წრიული ორბიტისათვის მიზიდულობის ძალა უნდა უდრიდეს ცენტრისკენულ ძალას სიდიდით და მიმართულებით უნდა იყოს მისი საპირისპირო, ე.ი.

$$\frac{\gamma M_d M_t}{r^2} = M_t \omega_t^2 \cdot r, \quad (2.7)$$

სადაც  $M_d$ -დედამიწის მასაა,  $M_t$ -თანამგზავრის მასა,  $\omega_t$ -თანამგზავრის კუთხური სიჩქარე. ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r^3 = \frac{\gamma M_d}{\omega_t^2} = \frac{\gamma M_d \cdot T_t^2}{(2\pi)^2}, \quad (2.8)$$



სადაც  $T_i$ -თანამგზავრის ბრუნვის პერიოდია,  $M_d = 5,98 \cdot 10^{27}$  დნ

იმისათვის, რომ დედამიწაზე მყოფმა დამკვირვებელმა ვერ შენიშნოს თანამგზავრის ბრუნვა, საჭიროა რომ თანამგზავრის კუთხური სიხარე  $\omega_i$  იყოს ტოლი დედამიწის ბრუნვის  $\omega_d$ -კუთხური სიხარისა, ანუ

$$\omega_i = \omega_d. \quad (2.9)$$

მაგრამ

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{8,64 \cdot 10^4} \text{წმ}^{-1} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{წმ}^{-1}. \quad (2.10)$$

მაშინ

$$r^3 = \frac{(6,67 \cdot 10^{-8}) \cdot (5,98 \cdot 10^{27})}{(7,3 \cdot 10^{-5})^2} \text{სმ}^3 \approx 75 \cdot 10^{27} \text{სმ}^3 \quad (2.11)$$

ანუ

$$r \approx 4,2 \cdot 10^9 \text{სმ}^3. \quad (2.12)$$

რადგან დედამიწის რადიუსი  $R \approx 6,38 \cdot 10^8$  სმ. (2.12) მანძილი წარმოადგენს მთვარემდე მანძილის 1/10-ს.

ამოცანა 2.12. პლანეტების მოძრაობის ტრაექტორიის დადგენა. პლანეტები ურთიერთქმედებენ მსოფლიო მიზიდულობის კანონით (2.6). იპოვეთ  $n$ -პლანეტის მოძრაობის ტრაექტორიები, თუ მოცემულია მათი საწყისი განლაგებანი  $\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}$  და საწყისი სიხარეები  $\vec{r}'_i(0) = \vec{v}_{i0}$ .

**ამოხსნა:** შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შესადგენად ვისარგებ-ლოთ დინამიკის განტოლებებით, სადაც მოძრაობის გამომწვევი  $\vec{F}$ -ძალები წარმოადგენენ მსოფლიო მიზიდულობის (2.6) გრავიტაციულ ძალებს:

$$M_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma M_i \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (2.13)$$

სადაც შტრიხი ჯამის სიმბოლოში გამორიცხავს იმ შემთხვევას, როცა  $i=j$ ;  $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ , სადაც  $\vec{r}_{ij}$ -არის  $i$ -წერტილიდან  $j$ -საკენ მიმართული ვექტორი.

(2.13)-მოდელის გასამარტივებლად შტრიხიანი ჯამი გავყოთ ორ ნაწილად:

$$M_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma M_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_j}{|r_{ij}|^3} \vec{r}_{ij} - \gamma M_i \cdot \sum_{j=i+1}^n \frac{M_j}{|r_{ij}|^3} \vec{r}_{ij}. \quad (2.14)$$

საწყის პირობებს აქვთ სახე:

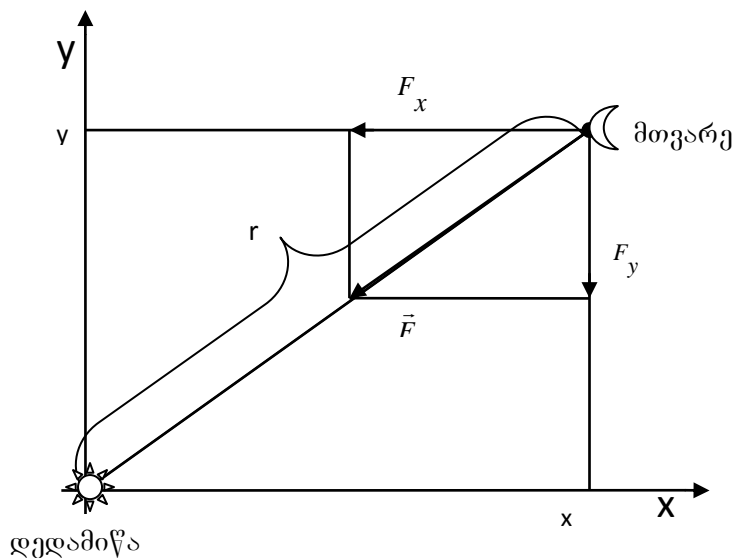
$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0}; \quad (2.15)$$

$$\vec{\dot{r}}_i(0) = \vec{v}_{i0}. \quad (2.16)$$

ამ მოდელის რეალიზაცია საჭიროა კომპიუტერზე.

ამოცანა 2.1.3. შეადგინეთ ორი სხეული პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ ერთი სხეულია დედამიწა მეორე სხეულია მთვარე. შეადგინეთ ამ პლანეტების მოძრაობის მათემატიკური მოდელი.

ამოხსნა:



ნახ. 2.1. დედამიწის მოქმედება მთვარეზე

განვიხილოთ მოძრაობა დედამიწის მიმართ ე.ი. ჩავთვალოთ, რომ დედამიწა უძრავია და მთვარე მოძრაობს დედამიწის მიზიდულობის ძალის გავლენით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{F}_x}{|\vec{F}|} = -\frac{x}{|\vec{r}|} \Rightarrow F_x = -|\vec{F}| \cdot \frac{x}{|\vec{r}|} \\ \frac{\vec{F}_y}{|\vec{F}|} = -\frac{y}{|\vec{r}|} \Rightarrow F_y = -|\vec{F}| \cdot \frac{y}{|\vec{r}|} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $|F| = \gamma \frac{M_d \cdot M_{mt}}{|\vec{r}|^2}$  მივიღებთ, რომ

$$\left\{ \begin{aligned} M_{mt} \cdot \frac{dv_x}{dt} &= -\gamma \frac{M_d \cdot M_{mt}}{|\vec{r}|^3} \cdot x & x(0) &= 0,5 \\ M_{mt} \cdot \frac{dv_y}{dt} &= -\gamma \frac{M_d \cdot M_{mt}}{|\vec{r}|^3} \cdot y & y(0) &= 0 \\ |\vec{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2} & v_x(0) &= 0 \\ & & v_y(0) &= 1,63 \end{aligned} \right. \quad \text{საწყისი პირობები} \quad (2.18)$$

**ამოცანა 2.14. შეადგინეთ n-სხეულის პრობლემის მათემატიკური მოდელი. მოახდინეთ გათვლები ჩვენი მზის სისტემის პლანეტებისათვის.**

**ამოხსნა:** წინა ამოცანიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ i-ური პლანეტის j-ურ პლანეტაზე მოქმედ ძალის x-მდგენელი იქნება:  $\frac{-\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (x_i - x_j)$ . თუ გავითვალისწინებთ ყველა სხვა პლანეტებთან ურთიერთქმედების ძალებს და შევკრიბავთ, მივიღებთ:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i \frac{dv_{ix}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[ -\frac{\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (x_i - x_j) \right]' \\ M_i \frac{dv_{iy}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[ -\frac{\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (y_i - y_j) \right]' \\ M_i \frac{dv_{iz}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[ -\frac{\gamma \cdot M_i \cdot M_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \cdot (z_i - z_j) \right]' \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$|\vec{r}_{ij}| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

**შტრიხი ჯამის** სიმბოლოვით ნიშნავს, რომ გამოირიცხება ის შემთხვევები, როცა  $i=j$  (პლანეტა თავის თავს არ იზიდავს). (3.19) მოდელს უნდა მივუერთოთ შესაბამისი საწყისი პირობები:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(0) = x_{i0}; y_i(0) = y_{i0}; z_i(0) = z_{i0} \\ v_{ix}(0) = v_{ix0}; v_{iy}(0) = v_{iy0}; v_{iz}(0) = v_{iz0} \end{array} \right.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები და ჩავწეროთ განტოლებათა სისტემა ნორმალური სახით:

$$i := 1 \dots 3; \quad j := 1 \dots 3 \quad r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}; \quad (2.20)$$

$$u_i = \frac{dx_i}{dt}; \quad (2.21)$$

$$m_i \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^3 \left[ -\gamma \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{r_{ij}^3} (x_i - x_j) \right]'; \quad (2.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = u_1; \frac{dy_1}{dt} = v_1; \frac{dz_1}{dt} = w_1; \\ \frac{dx_2}{dt} = u_2; \frac{dy_2}{dt} = v_2; \frac{dz_2}{dt} = w_2; \\ \frac{dx_3}{dt} = u_3; \frac{dy_3}{dt} = v_3; \frac{dz_3}{dt} = w_3; \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{du_1}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} (x_1 - x_2) - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,3}^3} (x_1 - x_3) \\ m_2 \frac{du_2}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r_{1,2}^3} (x_2 - x_1) - \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (x_2 - x_3) ; \\ m_3 \frac{du_3}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{1,3}^3} (x_3 - x_1) - \gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_2}{r_{1,3}^3} (x_3 - x_2) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{dv_1}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} (y_1 - y_2) - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (y_1 - y_3) \\ m_2 \frac{dv_2}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r_{1,2}^3} (y_2 - y_1) - \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{2,3}^3} (y_2 - y_3) \\ m_3 \frac{dv_3}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{1,3}^3} (y_3 - y_1) - \gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_2}{r_{2,3}^3} (y_3 - y_2) \\ m_1 \frac{dw_1}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1,2}^3} (z_1 - z_2) - \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{1,3}^3} (z_1 - z_3) \\ m_2 \frac{dw_2}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{r_{1,2}^3} (z_2 - z_1) - \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{2,3}^3} (z_2 - z_3) \\ m_3 \frac{dw_3}{dt} = -\gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_1}{r_{1,3}^3} (z_3 - z_1) - \gamma \cdot \frac{m_3 \cdot m_2}{r_{2,3}^3} (z_3 - z_2) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

**ამოცანა 2.1.5. ლანჯევენის მათემატიკური მოდელი.**

შეადგინეთ ნაწილაკის სითხეში მოძრაობის მათემატიკური მოდელი. სითხეში მოძრაობისას ნაწილაკზე მოქმედებს სიჩქარის პროპორციული ძალა. ამას გარდა ადგილი აქვს შემთხვევით სითბურ შემფოტებებს  $m \vec{X}(t)$ .

**ამოხსნა:** ლანჯევენის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{st} + \vec{F}_{fl} . \quad (2.26)$$

სადაც  $\vec{F}_{st}$ -სტოქსის წინააღმდეგობის ძალაა;

$\vec{F}_{fl}$ -შემთხვევითი ფლუქტუაციებისგან გამოწვეული ძალაა;

$$\vec{F}_{st} = -\gamma m \vec{v} \quad ; \quad \vec{F}_{fl} = m \cdot \vec{X}(t);$$

ასე, რომ ლანჯევენის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$m\dot{v} = -\gamma m v + mX(t) ;$$

თუ მოვახდენთ შეკვეცას, მივიღებთ:

$$\dot{v} = -\gamma \cdot v + X(t). \quad (2.27)$$

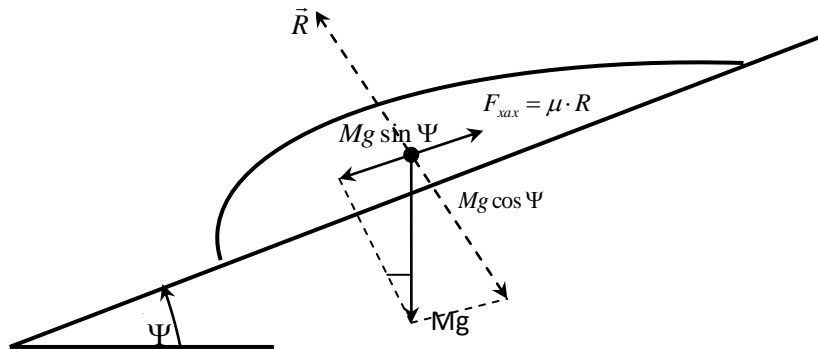
სადაც  $\gamma$ -ერთეული მასისათვის გადაანგარიშებული ხახუნის კოეფიციენტია,  $X(t)$ -ფლუქტუაციური ძალის მდგენელია და მაშასადამე, მისი საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლია  $\langle X(t) \rangle = 0$ .

ღანუგევის (2.27) განტოლების ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:

$$v(t) - v(0)e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t} \cdot \int_0^t e^{\gamma x} \cdot X(x) dx . \quad (2.28)$$

### ამოცანა 3.1.6. სელური ნაკადის დინამიკა

#### მოდელი №1



ნახ. 2.2. სელური ნაკადის დინამიკა

ნიუტონის მეორე კანონს სიმძიმის  $O$ -ცენტრისთვის აქვს სახე:

$$M \cdot W_0 = Mg \sin \Psi - \mu \cdot mg \cos \Psi, \quad (2.29)$$

მაშინ



$$W_0 = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi). \quad (2.30)$$

სადაც  $W_0$ -სეღური მასის  $O$ -სიმძიმის ცენტრის აჩქარებაა,  $g$ -თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა,  $\Psi$ -ფერდობის ჰორიზონტისადმი დახრის კუთხეა,  $\mu$ -ხახუნის კოეფიციენტია სეღურ მასასა და ფერდობის უძრავ ნაწილს შორის.

ფორმულა (2.30)-დან გამომდინარეობს, რომ:

ა) თუ  $\mu = tg\Psi$ , მაშინ  $W=0$  და მაშასადამე მოძრაობა ხდება მუდმივი სიჩქარით, რადგან  $W = \dot{v} = 0 \Rightarrow v = const = v_0$ , ამასთან მოძრაობა იქნება წრფის გასწვრივ, რადგანაც

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} = v_0; \quad (2.31)$$

აქედან

$$r = v_0 t + r_0. \quad (2.32)$$

ბ) თუ  $\mu \neq tg\Psi$ , მაშინ მოძრაობა არის თანაბრად აჩქარებული და  $W$ -აჩქარება გამოითვლება (2.30) ფორმულით, გამოვთვალოთ სიჩქარე  $v$ , ფორმულიდან

$$W = \dot{v} = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi). \quad (3.33)$$

ცხადია რომ

$$v(t) = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi) \cdot t + v_0. \quad (3.34)$$

სადაც  $v_0 = v(0)$  საწყისი სიჩქარეა.

რადგან  $v = \frac{dr}{dt}$ , ცხადია, რომ მოძრაობის კანონს ექნება სახე:

$$r(t) = \frac{gt^2}{2}(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi) + v_0 t + r_0. \quad (3.35)$$

სადაც  $v_0$ -სიმძიმის ცენტრის საწყისი მდებარეობაა.

## მოდელი №2

ახლა ვთქვათ, რომ სიჩქარე იმდენად დიდია რომ, გასათვალისწინებელია ჰაერის აეროდინამიკური წინააღმდეგობაც (ე.ი. დაეუშვათ  $v \geq 100$  კმ/სთ), მაშინ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა იქნება სიჩქარის კვადრატის პროპორციული და მიმართული იქნება მოძრაობის საწინააღმდეგოდ,

$$F_1 = kMg v^2, \quad k = \frac{1}{v_a^2}, \quad v_a \geq 100 \text{ კმ/სთ} .$$

(2.36)

ნიუტონის მეორე კანონს ექნება სახე:

$$M \cdot W = Mg \sin \Psi - \mu \cdot Mg \cos \Psi - kMg v^2 . \quad (2.37)$$

მაშინ სიჩქარისთვის გვაქვს განტოლება:

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi - k \cdot v^2); \quad (2.39)$$

$$v(0) = v_0 - \text{საწყისი პირობით.} \quad (2.40)$$

ამოვხსნათ (2.39)-(2.40) კოშის ამოცანა:

(დავალება სტუდენტებს):

ა) **Mathcad**-ის გამოყენებით,  $\mu$ -ხახუნის კოეფიციენტისა და  $k$ -პროპორციულობის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის,  $\mu \div 0,01 - 0,05$ ;  $k \div 0,01 - 0,9$

ბ) მოძრაობის კანონის დასადგენად გვაქვს კოშის ამოცანა:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = g(\sin \Psi - \mu \cdot \cos \Psi - k \cdot v^2); \quad (2.41)$$

$$v(0) = v_0; \quad (2.42)$$

$$r(0) = r_0 . \quad (2.43)$$

ჩაეწეროთ (2.41) ამოცანა ნორმალური სახით და (2.42)-(2.43) პირობებში და ამოვხსნათ კოშის ამოცანა **Mathcad**-ის ფარგლებში.

### მათემატიკური მოდელი №3

წინა მოდელები იყვნენ მეტისმეტად გამარტივებულები, ახლა თანდათანობით შევიტანოთ დაზუსტებები. ამ ეტაპზე, ჩავთვალოთ რომ  $\mu$ -ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ფერდობის  $r$ -კოორდინატზე სტოქასტიკურად,

$$\mu = \sin^2 f(r); \quad (2.44)$$

სადაც  $f(r)$ -ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა,  $r$ -ის მიხედვით,  $r \in [0;l)$ ,  $\mu \in [0;1]$ ,  $k = 10^{-4}$  კმ/სთ

მაშინ გვაქვს მოძრაობის განტოლება:

$$\ddot{r} = g(\sin \Psi - \sin^2 f(r) \cdot \cos \Psi - k \cdot \dot{r}^2); \quad (2.45)$$

$$\dot{r}(0) = 0; \quad (2.46)$$

$$r(0) = 0. \quad (2.47)$$

გადავწეროთ (3.45)-(3.47) კოშის ამოცანა ნორმალური ფორმით:

$$\dot{r} = v; \quad (2.48)$$

$$\dot{v} = g(\sin \Psi - \sin^2 f(r) - k \cdot v^2); \quad (3.49)$$

$$v(0) = 0; \quad (2.50)$$

$$r(0) = 0. \quad (2.51)$$

(დავალება სტუდენტებს):

(2.48); (2.51) ამოცანა ამოვხსნათ **Mathcad**-ის მეშვეობით, ავაგოთ  $r(t)$  და  $v(t)$  გრაფიკები, აგრეთვე  $v(r)$ -გრაფიკი, როცა  $r \in [0;l]$

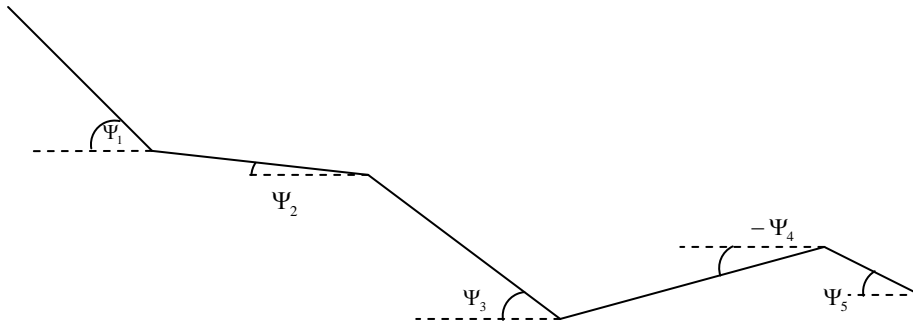
### მოდელი №4(დავალება სტუდენტებს)

ახლა, შევეცადოთ გავითვალისწინოთ მასის ცვლილებაც მოძრაობისას. სელური მასა წარიტაცებს გზაზე გრუნტს თუ მისი კინეტიკური ენერგია მეტია  $E_{0+}$ -კრიტიკულზე; ხოლო თუ კინეტიკური ენერგია ნაკლებია  $E_{0+}$ - კრიტიკულზე, მაშინ ხდება მასის დაღეჭვა ანუ მოძრავი მასის შემცირება.

## მოდელი №5(დავალება სტუდენტებს)

ახლა გავითვალისწინოთ ის ფაქტიც, რომ სელური ნაკადი მიედინება არა ერთიდაიგივე დახრილობის ფერდობზე, არამედ  $\Psi$ -დახრილობა იცვლება წერტილის  $r$ -კოორდინატის მიხედვით, ე.ი.  $\Psi = \Psi(r)$ . მოცემული  $\Psi(r)$ -ფუნქციის პირობებში ამოხსენით კოშის ამოცანა მოდელის ბაზაზე.

შესაძლებელია  $\Psi(r)$  დამოკიდებულება ვიპოვოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, განზოგადოებული წრფივი რეგრესიის პირობებში.



ნახ. 2.3. ცვლადი დახრილობის მთის ფერდობის სქემა

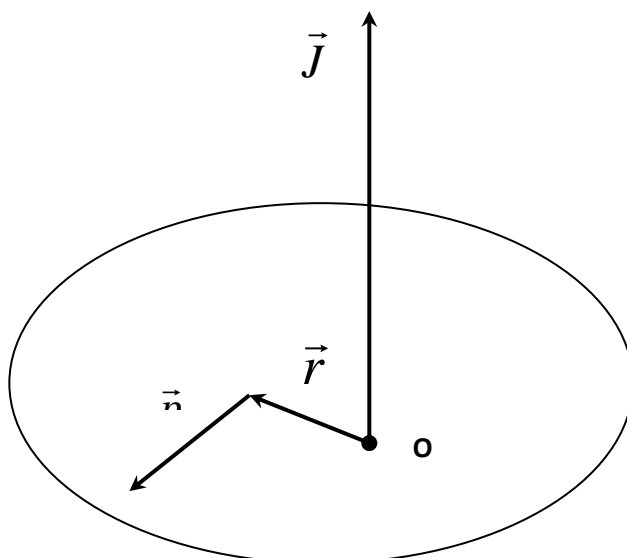
**Mathcad-ის ბაზაზე შეისწავლეთ ამოცანა ცვლადი დახრილობის  $\Psi(r)$ -ფუნქციით.**

## 2.2 მყარი სხეულის დინამიკის მათემატიკური მოდელი

განსაზღვრება: მატერიალური  $i$  - წერტილის იმპულსის მომენტი  $O$  წერტილის მიმართ, ეწოდება ვექტორულ ნამრავლს:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times M \cdot \vec{v} . \quad (2.52)$$

სადაც  $p$ -იმპულსია (ნახ.2.4.)



ნახ 2.4. მატერიალური  $i$  წერტილის  $\vec{J}$  მომენტი  $O$ -წერტილის მიმართ

**განსაზღვრება:** მატერიალურ  $i$  წერტილზე მოქმედი  $\vec{F}$  ძალის ბრუნვითი მომენტი ეწოდება ვექტორულ  $\vec{N}$  ნამრავლს:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.53)$$

სადაც  $\vec{F}$  -ძალაა.

(2.52)-ის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.54)$$

რადგან

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times M \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.55)$$

და ამასთან ერთად ადგილი აქვს ნიუტონის მეორე კანონს:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.56)$$

(2.54)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}. \quad (2.57)$$

ე.ი. იმპულსის  $\vec{J}$  მომენტის ცვლილების სიჩქარე ბრუნვის მომენტის ტოლია.

ახლა განვიხილოთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის მომენტის იმპულსის ცვლილების სიჩქარე.

მატერიალურ წერტილთა სისტემის იმპულსის ჯამური (ნაკრები) მომენტი  $\vec{J}$ -გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{J} = \sum_{n=1}^N M_n \cdot \vec{r}_n \times \vec{v}_n. \quad (2.58)$$

ცხადია, რომ  $\vec{J}$ -ს სიდიდე დამოკიდებულია ათვლის  $O$ -წერტილის არჩევაზე. თუ  $\vec{R}_{s.c}$ -ით ავლნიშნავთ მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის

რადიუს - ვექტორს, არჩეული ათვლის სისტემის მიმართ, მივიღებთ:

$$\vec{J} = \sum_{n=1}^N M_n (\vec{r}_n - \vec{R}_{s.c}) \times \vec{v}_n + \sum_{n=1}^N M_n \vec{R}_{s.c} \times \vec{v}_n = \vec{J}_{s.c} + \vec{R}_{s.c} \times \vec{P}; \quad (2.59)$$

სადაც  $\vec{J}_{s.c}$ -წერტილთა სისტემის იმპულსის ნაკრები მომენტია სიმძიმის ცენტრის მიმართ,  $\vec{P} = \sum_{n=1}^N M_n \vec{v}_n$ -სისტემის სრული იმპულსია.  $\vec{R}_{s.c} \times \vec{P}$ -სიმძიმის ცენტრის იმპულსის ნაკრები მომენტია ათვლის  $O$ -სისტემის მიმართ.

თუ, ათვლის სისტემად ავირჩევთ სიმძიმის ცენტრს, მაშინ

$$\frac{d\vec{J}_{s.c}}{dt} = \vec{N}_{gare}. \quad (2.60)$$

შიგა ძალების მომენტები ერთმანეთს აწონასწორებენ, ამიტომ (2.60)-ის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს გარე ძალების ბრუნვის მომენტების ჯამი (ნაკრები ბრუნვის მომენტი).

სიმძიმის ცენტრის საპოვნელად ვიყენებთ ფორმულას:

$$\vec{R}_{s.c} = \frac{\sum M_n \cdot \vec{r}_n}{\sum M_n}. \quad (2.61)$$

n-ური მატერიალური წერტილის წირითი სიჩქარე ათვლის O-წერტილის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{v}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}_n. \quad (2.62)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\vec{J} = \sum M_n \vec{r}_n \times \vec{v}_n = \sum M_n \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n). \quad (2.63)$$

როგორც ვიცით ვექტორული ანალიზიდან:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}); \quad (2.64)$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{r}_n \quad \vec{B} \rightarrow \vec{\omega} \quad \vec{C} \rightarrow \vec{r}_n;$$

მაშინ

$$\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = \vec{\omega} \cdot r_n^2 - \vec{r}_n \cdot (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}); \quad (2.65)$$

თუ შევიტანთ (2.65)-ს (2.63)-ში მივიღებთ:

$$\vec{J} = \sum M_n [\vec{\omega} \cdot r_n^2 - \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega})]. \quad (2.66)$$

განვიხილოთ, ამ ვექტორის კომპონენტი x-ღერძზე

$$J_x = \omega_x \sum M_n r_n^2 - \sum M_n x_n (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}) = \omega_x \sum M_n r_n^2 - \omega_x \sum M_n x_n^2 - \omega_y \cdot \sum M_n x_n y_n - \omega_z \sum M_n x_n z_n. \quad (2.67)$$

ასეთივე გამოსახულებები გვექნება  $J_y$  და  $J_z$ -თვისაც.

ჩვენ ვხედავთ, რომ (2.67) შეიცავს ინერციულ კოეფიციენტებს, რომლებიც დამოკიდებული არიან მასების განაწილებაზე კოორდინატთა ღერძის მიმართ:

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \sum M_n (r_n^2 - x_n^2) \\ I_{xy} &= -\sum M_n x_n y_n \\ I_{xz} &= -\sum M_n x_n z_n \end{aligned} \right\}. \quad (2.68)$$

ანალოგიურად, ჩაიწერება  $J_y$  და  $J_z$ -ის შესაბამისი კოეფიციენტები:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ J_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ J_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \right\}. \quad (2.69)$$

ანუ

$$J_i = \sum_{k=1}^3 I_{ik}\omega_k.$$

მყარი სხეული შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ერთმანეთის მიმართ უძრავ წერტილთა ერთობლიობა.

ინერციულ სისტემაში მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე (2.57) ანუ

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}. \quad (2.70)$$

ინერციული  $I_{ij}$ -კოეფიციენტები მარტივად გამოითვლებიან იმ კოორდინატთა სისტემაში, რომლებიც მოთავსებულია მბრუნავ სხეულში, რომელთანაც დაკავშირებულია არაინერციული სისტემა. როგორც ვიცით, ინერციული სისტემიდან მბრუნავ სისტემაში ვექტორის გადასაყვანად გამოიყენება ფორმულა:

$$\left( \frac{d\vec{J}}{dt} \right)_in = \frac{d\vec{J}}{dt} + \omega \times \vec{J}. \quad (2.71)$$

სადაც  $\omega$ -არის მბრუნავი კოორდინატთა სისტემის კუთხური სიჩქარე. მაშინ, მოძრაობის (2.70) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} + \omega \times \vec{J} = \vec{N}. \quad (2.72)$$

სადაც  $\vec{J}$ -არის გამოთვლილი მბრუნავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ვთქვათ, კოორდინატთა ღეძები მიმართულია მთავარი ღერძების მიმართ, მაშინ (2.69) თანადობები მიიღებენ მარტივ სახეს:

$$J_1 = I_{11}\omega_1; \quad J_2 = I_{22}\omega_2; \quad J_3 = I_{33}\omega_3; \quad (2.73)$$



და (2.72) გვაძლევს ეილერის დინამიკურ განტოლებებს მყარი სხეულისათვის.

$$\left. \begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_{33} - I_{22})\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_{11} - I_{33})\omega_1\omega_3 &= N_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_{22} - I_{11})\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned} \right\}. \quad (2.74)$$

ახლა, განვიხილოთ სხეულის(მატერიალური წერტილის) მოძრაობა არაინერციული სისტემების მიმართ.

ინერციულ სისტემაში ნიუტონის მეორე კანონი ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$m \frac{dv_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad (2.75)$$

სადაც  $U$ -მოქმედი გარე ძალების პოტენციალია,  $v_0$ -მატერიალური წერტილის სიჩქარეა აბსოლუტური (უძრავი) კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, გვაქვს  $k'$ -კოორდინატთა სისტემა, რომელიც  $k_0$ -ის მიმართ მოძრაობს  $\vec{v}(t)$ -სიჩქარით (გადატანითი მოძრაობა). სიჩქარეები  $\vec{v}_0$  და  $\vec{v}'$  ამ კოორდინატთა  $k_0$  და  $k'$  სისტემების მიმართ დაკავშირებულნი არიან ტოლობით:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{v}(t). \quad (2.76)$$

თუ, შევიტანთ სიჩქარის  $v_0$ -მნიშვნელობას (2.75)-ში, მივიღებთ:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W}(t). \quad (2.77)$$

სადაც  $\vec{W}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$ -არის  $k'$ -კოორდინატთა სისტემის გადატანითი მოძრაობის აჩქარება. შემოვიღოთ ახალი  $k$  კოორდინატთა სისტემა, რომლის სათავეც ემთხვევა  $k'$ -სისტემის სათავეს, მაგრამ  $k$ -სისტემა ბრუნავს  $k'$ -ს მიმართ  $\Omega(t)$ -კუთხური სიჩქარით, ხოლო  $k_0$ -ის მიმართ  $k$ -სისტემა ასრულებს როგორც გადატანით ასევე ბრუნვით მოძრაობასაც.

$k'$ -სისტემის მიმართ მოძრაობის სიჩქარე  $\vec{v}'$  შედგება,  $\vec{v}$ -სიჩქარისაგან  $k$ -ს მიმართ და  $[\vec{\Omega}, \vec{r}]$  ბრუნვის სიჩქარისაგან  $k$ -სისტემასთან ერთად:

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}]. \quad (2.78)$$

თუ შევიტანთ (2.78)-ს (2.77)-ში, მივიღებთ:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W}(t) - m \frac{d}{dt} [\vec{\Omega}, \vec{r}]. \quad (2.79)$$

მოვახდინოთ გამარტივება

$$\frac{d}{dt} [\vec{\Omega}, \vec{r}] = -[\dot{\vec{\Omega}}, \vec{r}] - [\vec{\Omega}, \dot{\vec{r}}] = [\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}] - [\vec{\Omega}, 2\vec{v} + [[\vec{\Omega}, \vec{r}]]] = [\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}] + 2[\vec{v}, \vec{\Omega}] + [\Omega[\vec{r}, \vec{\Omega}]]; \quad (2.80)$$

მაშინ (2.79) მიიღებს სახეს:

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W}(t) + m[\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}, \vec{\Omega}] + m[\Omega[\vec{r}, \vec{\Omega}]]. \quad (2.81)$$

$m[\vec{r}, \dot{\vec{\Omega}}]$ -არის ძალა, რომელიც დაკავშირებულია ბრუნვის არათანაბარ მოძრაობასთან,

$2m[\vec{v}, \vec{\Omega}]$ -კორიოლისის ძალაა,

$m[\Omega[\vec{r}, \vec{\Omega}]]$ - არის ცენტრისკენული ძალა.

### 2.3. საფრენი აპარატის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი

საფრენი აპარატები: რაკეტა, ფრთიანი რაკეტა, კოსმოსური ხომალდი, კოსმოსური თვითმფრინავი და ა.შ. დაკავშირებულნი არიან ერთმანეთთან მოძრაობის ერთნაირი კანონზომიერებით, რომელიც განისაზღვრება, წვევის ტრეკტორიისა და სიჩქარის ცვლილებით.

რადგან წვევის ძალა დამოკიდებულია საწვავის წვაზე, რაკეტის მასა იცვლება დროის მიხედვით. ატმოსფეროში მოძრავ საფრენ აპარატზე მოქმედი აეროდინამიკური დატვირთვები, დამოკიდებულია მოძრაობის სიჩქარესა და ატმოსფეროს

სიმკვრივეზე. საჭიროა, გათვალისწინებულ იქნას სიმკვრივის ცვლილება 0-დან 150კმ სიმაღლეზე, რათა გათვლილ იქნას აპარატზე ზღვრული დატვირთვების სიდიდეები. გამოვიყენოთ საფურენი აპარატის მოძრაობის განტოლებები. ჩავთვალოთ, რომ დროის  $t$  - მომენტში საფურენი აპარატი წარმოადგენს მყარ სხეულს, რომელზედაც მოქმედებენ:

ა) გარე ძალები  $\sum_i \vec{F}_i$ , ბ) ძრავის წევის  $\vec{P}$ -ძალა, გ) კორიოლისის ძალა  $\vec{F}_k$

რაკეტის სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე:

$$m\vec{W}_c = \sum_i \vec{F}_i + \vec{P} + \vec{F}_k + m\vec{W}_{cr} + 2m[\vec{\omega}, \vec{v}_{cr}]. \quad (2.82)$$

$\vec{W}_{cr}$ -არის სიმძიმის ცენტრის აჩქარება რაკეტის კორპუსის მიმართ,  $\vec{v}_{cr}$ -სიმძიმის ცენტრის სიჩქარეა რაკეტის კორპუსის მიმართ. სიმძიმის ცენტრის გადაადგილების სიჩქარე და აჩქარება კორპუსის მიმართ, მცირეა და ამიტომ ისინი შეიძლება უგულებელვყოთ, მაშინ მივიღებთ სიმძიმის ცენტრის მოძრაობის განტოლებას:

$$m\vec{W}_c = \sum_i \vec{F}_i + \vec{P} + \vec{F}_k. \quad (2.83)$$

ეხლა განვიხილოთ რაკეტის მოძრაობა სიმძიმის ცენტრის მიმართ

რაკეტის იმპულსის მომენტი (კინეტიკური მომენტი) სიმძიმის ცენტრის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{J}_c = I \cdot \vec{\omega}; \quad (2.84)$$

სადაც  $I$ -ინერციის ტენზორია (შეესაბამება მატრიცა  $I_{ij}$ ),  $\vec{\omega}$ -რაკეტის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა.

მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე (2.85):

$$\frac{d\vec{J}_c}{dt} + [\vec{\omega} \times \vec{J}_c] = \vec{N}_c, \quad (2.85)$$

სადაც  $\frac{d\vec{J}_c}{dt}$ -კინეტიკური მომენტის წარმოებულია მბრუნავ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც ბრუნავს რაკეტასთან ერთად,  $\vec{N}_c$ -ნაკრები მომენტია ყველა გარე ძალების, კორიოლისის ძალის და წვევის ძალისა.

$$\vec{N}_c = \sum_i \vec{N}_{ci} + \vec{N}_{cp} + \vec{N}_{ck}. \quad (2.86)$$

დროის მოცემულ მომენტში  $I = \text{const}$ , ამიტომ გვაქვს განტოლება:

$$\frac{d\vec{J}_c}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.87)$$

მაშინ, (2.85)-დან მივიღებთ, რომ

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + [\vec{\omega}, I\vec{\omega}] = \vec{N}_c. \quad (2.88)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\vec{N}_\Sigma = \vec{N}_c - [\vec{\omega}, I\vec{\omega}], \quad (2.89)$$

მაშინ, (2.88) გადაიწერება სახით:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I^{-1} \cdot \vec{N}_\Sigma. \quad (2.90)$$

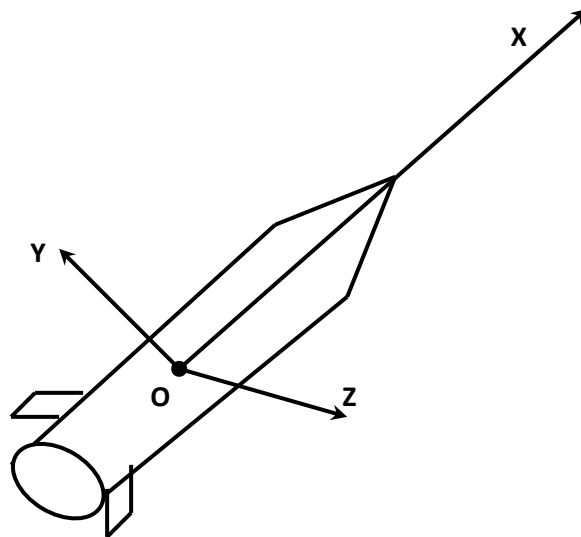
**ახლა განვიხილოთ ის ძალები და მომენტები, რომლებიც მოქმედებენ საფრენ აპარატზე ატმოსფეროში ფრენისას.**

ატმოსფეროში ფრენისას, საფრენ აპარატზე მოქმედებენ ძალები და მომენტები, რომლებიც გამოწვეულნი არიან ჰაერის გარსდენისაგან. წნევის ცენტრში მოქმედ  $\vec{F}_{sr} = \sum F_i$  ძალას, **სრულ აეროდინამიკურ ძალას** ეძახიან. რომელსაც, როგორც წესი გადაიტანენ ხოლმე სიმძიმის ცენტრში და უმატებენ შესაბამის მომენტს. ნაკრები მომენტს სიმძიმის ცენტრის მიმართ  $\vec{N}_{sr}$ -ს **სრულ აეროდინამიკურ მომენტს** უწოდებენ.

სრული აეროდინამიკური ძალის მდგენელების კოეფიციენტებს და სრული აეროდინამიკური მომენტის მდგენელების კოეფიციენტებს პოულობენ აეროდინამიკურ მილში შებერვის ექსპერიმენტებისა და რიცხვითი გათვლების მეშვეობით. ეს კოეფიციენტები შეიძლება დაზუსტდეს საფრენი გამოცდის მეშვეობითაც.

სრულ აეროდინამიკურ ძალას შლიან საფრენ აპარატთან თანმხვედრ კოორდინატა სისტემის მიმართ, ან სიჩქარის ღერძების მიმართ, ხოლო სრულ აეროდინამიკურ მომენტს – მხოლოდ თანმხვედრი კოორდინატა სისტემის მიმართ.

თანმხვედრი კოორდინატა სისტემის სათავე – მოთავსებულია სიმძიმის ცენტრში (კორპუსის),  $Ox$ -ღერძი მიმართულია საფრენი აპარატის ღერძის გასწვრივ მოძრაობის მიმართულებით (ნახ 2.5),  $Oy$ -ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზევით საფრენი აპარატის მიმართ, ხოლო  $Oz$ -ღერძი მიმართულია ფრენის მიმართულების განივად, ისე რომ  $Oxyz$ -სისტემა იყოს მარჯვენა სისტემა.



ნახ. 2.5. თანმხვედრი კოორდინატა სისტემა

სიჩქარითი სისტემის სათავე მოთავსებულია საფრენი აპარატის სიმძიმის ცენტრში,  $Ox$ -ღერძის მიმართულია ფრენის

სიჩქარის მიმართულებით, ამწვევი ძალის  $Oy$ -ღერძი მიმართულია აპარატის სიმეტრიის სიბრტყეში, ხოლო გვერდითი  $Oz$ -ღერძი მიმართულია ისე რომ  $Oxyz$ -იყოს მარჯვენა სისტემა.

$$\vec{F}_{sr} = (X_{S.t.sin.}, Y_{ams.dz.}, Z_{gv.dz.}); \quad (2.91)$$

$X_{S.t.sin.}$  -შუბლური წინააღმდეგობის ძალაა;

$Y_{ams.dz.}$  -ამწვევი ძალაა;

$Z_{gv.dz.}$  -გვერდითი ძალა.

$$X_{S.t.sin.} = C_x \cdot q \cdot S, \quad Y_{ams.dz.} = C_y \cdot q \cdot S, \quad Z_{gv.dz.} = C_z \cdot q \cdot S. \quad (2.92)$$

სადაც  $C_x, C_y, C_z$  -წინააღმდეგობის, ამწვევი ძალის და გვერდითი ძალის უგანზომილებო აეროდინამიკური კოეფიციენტებია;

$q = \frac{\rho v^2}{2}$  -სიჩქარის ნაკადია შემხვედრი ჰაერის ნაკადისთვის,  $\rho$  -ჰაერის სიმკვრივეა,  $v$ -გარსდენის სიჩქარეა,  $S$ -მახასიათებელი ფართობი (ფრთის ფართობია კოსმოსური თვითმფრინავისთვის ან მიდელია – რაკეტის ყველაზე დიდი კვეთის ფართობი).

აეროდინამიკური კოეფიციენტები დამოკიდებულნი არიან საფრენი აპარატის ფორმაზე, მის ორიენტაციაზე გარსდენის  $\vec{v}$ -სიჩქარის მიმართ, მახის  $M = \frac{v}{a}$  რიცხვზე და რეინოლდსის  $Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$  რიცხვზე.  $a$ -ბგერის სიჩქარეა,  $\nu$ -ჰაერის სიბლანტის კინემატიკური კოეფიციენტია,  $l$ -მახასიათებელი სიგრძე (თვითმფრინავისათვის – ფრთის საშუალო ქორდაა, რაკეტისათვის – მისი სიგრძეა).

ამწვევი ძალის აეროდინამიკური  $C_y$ -კოეფიციენტი თითქმის წრფივადაა დამოკიდებული იერიშის  $\alpha$ -კუთხეზე.

$$C_y = C_y^\alpha \cdot \alpha; \quad (2.93)$$

სადაც  $C_y^\alpha = \frac{\partial C_y}{\partial \alpha}$ .

ბგერამდელი ფრენის სიჩქარეებისათვის ( $M < 1$ ), აეროდინამიკური წარმოებული  $C_y^\alpha$ -როგორც წესი, უფრო მეტი სიდიდისაა ვიდრე ჰიპერბგერითი ( $M > 8$ ) სიჩქარეებისათვის. ფრენის სიმაღლე თითქმის არ მოქმედებს  $C_y^\alpha$ -ს სიდიდეზე.

აეროდინამიკური ხარისხის  $k = \frac{C_x}{C_x}$  სიდიდე დამოკიდებულია  $M$ -მახის რიცხვსა და იერიშის  $\alpha$ -კუთხის სიდიდეზე. მაგალითად, ჰიპერბგერითი აეროდინამიკური ხარისხი, თვითმფრინავის ტიპის საფრენი აპარატისათვის  $k \approx 1,9$ , ხოლო ბგერამდელი აეროდინამიკური ხარისხი ასეთი აპარატისათვის  $k \approx 4,5$ .

შუბლურ  $C_x$ -კოეფიციენტსა და  $C_y$ -ამწვევი ძალის კოეფიციენტს შორის დამოკიდებულება დაახლოებით პარაბოლურია:

$$C_x \approx C_{x0} + A_y \cdot C_y^2, \quad (2.94)$$

სადაც  $C_{x0}$ -შუბლური წინააღმდეგობის კოეფიციენტის ტოლია, როცა ამწვევი ძალის კოეფიციენტი  $C_y = 0$ ,  $A_y$ -რადაც კოეფიციენტია (ექსპერიმენტული). გვერდითი ძალის  $C_z$ -თითქმის წრფივად დამოკიდებული დაცურების  $\beta$ -კუთხეზე:

$$C_z = C_z^\beta \cdot \beta, \quad (2.95)$$

სადაც

$$C_z^\beta = \frac{\partial C_z}{\partial \beta}. \quad (2.96)$$

სრული აეროდინამიკური  $\vec{N}_{sr}$ -მომენტი, როგორც წესი, განიხილება თანმხვედრ კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

$$\vec{N}_{sr} = (N_x, N_y, N_z). \quad (2.97)$$

ამ მდგენელებს, შესაბამისად უწოდებენ კრენის  $N_x$ -მომენტს, რისკანის -  $N_y$  მომენტს და ტანგაჟის -  $N_z$  მომენტს. ისინი გამოითვლებიან ფორმულებით:

$$N_x = m_x \cdot q \cdot S \cdot l, \quad N_y = m_y \cdot q \cdot S \cdot l, \quad N_z = m_z \cdot q \cdot S \cdot l, \quad (2.98)$$

სადაც  $m_x, m_y, m_z$ -არიან სრული აეროდინამიკური მომენტის უგანზომილებო კოეფიციენტები.

**კრენისა და რისკანის მომენტის კოეფიციენტები** ძირითადად დამოკიდებული არიან დაცურების  $\beta$ -კუთხესა და მახის M-რიცხვზე, ამასთან

$$m_x = m_x^\beta \cdot \beta; \quad m_y = m_y^\beta \cdot \beta; \quad (2.99)$$

სადაც

$$m_x^\beta = \frac{\partial m_x}{\partial \beta}; \quad m_y^\beta = \frac{\partial m_y}{\partial \beta}. \quad (2.100)$$

ტანგაჟის მომენტის კოეფიციენტი დამოკიდებულია იერიშის  $\alpha$ -კუთხესა და მახის M-რიცხვზე.

---

#### 2.4. განზოგადოებული კოორდინატები და ლაგრანჟის მათემატიკური მოდელი მატერიალურ წერტილთა დინამიკის აღსაწერად. ჰამილტონის მოდელი. პუასონის ფრჩხილები

**ძირითადი ცნებები:** სივრცეში მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს  $\vec{r}(x, y, z)$ . ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$  სიჩქარე და  $\vec{W} = \dot{\vec{r}}(t)$  აჩქარება. თუ მოცემული გვაქვს n-მატერიალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვჭირდება n-რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე,  $3n$ -კოორდინატი.

**განსაზღვრება:** იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას – მისი თავისუფლების ხარისხის რიცხვი ეწოდება.

n-მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სისტემის თავისუფლების ხარისხი  $3n$ -ის ტოლია. ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი რომ იყვნენ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები.



**განსაზღვრება:** ნებისმიერ  $q_1, q_2, \dots, q_s$ -პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ-სისტემის განლაგებას,  $S$ -თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის განზოგადოებული კოორდინატები ეწოდებათ, ხოლო წარმოებულებს:  $\dot{q}_i$ -განზოგადოებული სიჩქარეები. სისტემის მექანიკური განლაგების ცოდნა არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება მას დროის სხვა მომენტში. ექსპერიმენტებით დადგინდა, რომ მექანიკური სისტემის მდგომარეობის საპოვნელად დროის მოცემულ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ საწყისი  $q_i(0)$ -განლაგება და საწყისი

$\dot{q}_i(0)$ -სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი პარამეტრის ცოდნა საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ  $\dot{q}_i$ -სიჩქარეებიც დროის ნებისმიერ მომენტში, რაც დგინდება მათემატიკური აპარატის მეშვეობით.

**განსაზღვრება:** განტოლებებს, რომლებიც აჩქარებას აკავშირებენ კოორდინატებთან და სიჩქარეებთან – მოძრაობის განტოლებები ეწოდებათ.

$q(t)$ -პარამეტრების მიმართ, მოძრაობის განტოლება – დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს.

**ჰამილტონის პრინციპი:** ნებისმიერი მექანიკური სისტემა ხასიათდება ფუნქციით  $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s)$ , ისე რომ, თუ დროის  $t_1$  და  $t_2$  მომენტებში სისტემა იმყოფებოდა შესაბამისად  $q^{(1)}$  და  $q^{(2)}$  მდგომარეობაში, მაშინ  $(t_1, t_2)$ -შუალედში სისტემა მოძრაობს ისე, რომ ინტეგრალი

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \text{ იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას.}$$

**L-ფუნქციას, ლაგრანჟის ფუნქციას უწოდებენ.**

ჰამილტონის პრინციპის მეშვეობით გამოვიყვანოთ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთი ტოლია, ასე რომ საპოვნია

მხოლოდ ერთი  $q(t)$  ფუნქცია, რომელიც ექსტრემალურ მნიშვნელობას ანიჭებს ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან.

ვთქვათ,  $q = q(t)$  ჩვენი საძებარი ფუნქციაა, მაშინ ნებისმიერი სხვა ფუნქცია, სადაც  $\sigma q(t)$ -მცირე ნაზრდია,

$$q(t) + \sigma q(t); \quad (2.101)$$

დაარღვევს ექსტრემუმის არსებობის პირობებს. რადგან  $t_1$  და  $t_2$  მომენტში ყველა განსახილველმა ფუნქციამ უნდა მიიღოს შესაბამისად  $q^{(1)}$  და  $q^{(2)}$  მნიშვნელობები, მივიღებთ რომ

$$\sigma q(t_1) = \sigma q(t_2) = 0. \quad (2.102)$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალის ცვლილება, როცა  $q(t)$  იცვლება  $q(t) + \sigma q(t)$ -ფუნქციით:

$$\sigma S = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \sigma q, \dot{q} + \sigma \dot{q}) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (2.103)$$

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა, რომ პირველი ვარიაცია იყოს ნულის ტოილ, ე.ი.

$$\sigma S = 0. \quad (2.104)$$

თუ (2.103) სხვაობაში მოვახდენთ ვარირებას, მივიღებთ:

$$\sigma S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \sigma q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \sigma \dot{q} \right) dt = 0. \quad (2.105)$$

აქ უგულვებელყოფილია უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები ანუ  $\sigma q^2; \sigma \dot{q}^2; \sigma q^3; \sigma \dot{q}^3; \dots$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\sigma \dot{q} = \frac{d}{dt} \sigma q. \quad (2.106)$$

მივიღებთ

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \sigma q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d}{dt} \sigma q \right) dt = 0. \quad (2.107)$$

მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\sigma S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \sigma q \int_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \sigma q dt = 0. \quad (2.108)$$

(2.102)-პირობის გამო პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. ინტეგრალი კი ნული უნდა იყოს  $\sigma q$ -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, ეს კი შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (2.109)$$

ამ განტოლებას წერენ სახით:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.110)$$

და უწოდებენ ლაგრანჟის განტოლებას.

**შენიშვნა:** ა) თუ გვაქვს  $S$ -თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა, მაშინ მიიღება ლაგრანჟის მოდელი ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad i = \overline{1, S}. \quad (2.111)$$

ბ) თუ ჩვენ გვაქვს  $S$ -წერტილთა სისტემა, მაშინ ლაგრანჟიანს აქვს სახე:

$$L = \sum_{i=1}^S \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_S). \quad (2.112)$$

სადაც  $U$ -არის სისტემის წერტილების ურთიერთქმედების პოტენციალური ენერგია.

თუ, გავითვალისწინებთ იმას, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში  $q_i = r_i$  და  $\dot{q}_i = \dot{r}_i = v_i$ , მაშინ (2.111) გადაიწერება ფორმით:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}. \quad (2.113)$$

ხოლო (2.112)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ ცნობილ ნიუტონის მეორე კანონს:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}. \quad (2.114)$$

სადაც  $-\frac{\partial U}{\partial r_i} = F_i$ -არის  $i$ -ურ წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი.

გ) თუ გავიხსენებთ ნიუტონის მეორე კანონს

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}. \quad (2.115)$$

მისი შედარება (2.111) ლაგრანჟის განტოლებასთან, გვაძლევს

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{და} \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

ანუ  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ -განზოგადოებული იმპულსებია, ხოლო  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ -განზოგადოებული ძალებია.

დ) ლაგრანჟის მათემატიკური მოდელი მატერიალურ წერტილთა სისტემას შეისწავლის განზოგადოებული კოორდინატებისა  $q_i$  და განზოგადოებული  $\dot{q}_i$ -სიჩქარეების მიხედვით.

**არსებობს სხვა მიდგომაც, როცა განტოლებები ჩაიწერება  $q_i$  განზოგადოებული კოორდინატებისა და  $P_i$ -იმპულსების მიხედვით. ამ მიდგომას გვაძლევს ჰამილტონის მათემატიკური მოდელი.**

ჰამილტონის ფუნქცია  $H(p,q)$ -წარმოადგენს მექანიკური სისტემის ენერგიას, რომელიც ჩაწერილია  $(p,q)$  ცვლადებში:

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L; \quad (2.116)$$

მართლაც

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (2.117)$$

ჰამილტონის განტოლების გამოსაყვანად, ვიპოვოთ ლაგრანჟიანის სრული დიფერენციალი:

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i. \quad (2.118)$$

$\sum_i \dot{p}_i dq_i$ -ნიუტონის მეორე კანონიდან,  $\sum_i p_i d\dot{q}_i$ -განზოგადოებული იმპულსებია.

გარდაეჭმნათ მეორე შესაკრები:

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i. \quad (2.119)$$

მაშინ (2.118-2.116)-დან მივიღებთ, რომ

$$dH = d(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i; \quad (2.120)$$

ანუ (2.116)-ის ძალით:

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i. \quad (2.121)$$

სრული დიფერენციალის განმარტების ძალით (2.121)-დან მივიღებთ ჰამილტონის განტოლებებს:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.122)$$

ე) პუასონის ფრჩხილები. ვთქვათ  $f(p, q, t)$ -რეალაც ფუნქციაა. შევადგინოთ მისი სრული წარმოებული:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right); \quad (2.123)$$

თუ  $\dot{q}_i$  და  $\dot{p}_i$  ცვლადებს შევცვლით ჰამილტონის (2.122) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H \cdot f\}; \quad (2.124)$$

სადაც

$$\{H \cdot f\} = \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \right); \quad (2.125)$$

(2.125)-გამოსახულებას პუასონის ფრჩხილებს უწოდებენ.

თუ,  $f$ -ფუნქცია არ არის ცხადად დამოკიდებული  $t$ -დროზე მაშინ

$$\{H \cdot f\} = 0. \quad (2.126)$$

ნებისმიერი ორი,  $f$  და  $g$  ფუნქციების პუასონის ფრჩხილები განიმარტება ანალოგიურად:

$$\{f \cdot g\} = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial P_i} \right). \quad (2.127)$$

პუასონის ფრჩხილებს აქვთ შემდეგი თვისებები(დავალება სტუდენტებს-დაამტკიცეთ):

$$1. \{f \cdot g\} = -\{g \cdot f\}; \quad (2.128)$$

$$2. \{f \cdot c\} = 0; \quad (2.129)$$

$$3. \{f_1 + f_2, g\} = \{f_1 \cdot g\} + \{f_2 \cdot g\}; \quad (2.130)$$

$$4. \{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2 \cdot g\} + f_2 \{f_1 \cdot g\}; \quad (2.131)$$

$$5. \frac{\partial}{\partial t} \{fg\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}; \quad (2.132)$$

$$6. \{f \cdot q_i\} = \frac{\partial f}{\partial P_i}; \quad (2.133)$$

$$7. \{f \cdot P_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q_i}; \quad (2.134)$$

$$8. \{q_i q_k\} = 0, \{P_i P_k\} = 0, \{P_i q_k\} = \sigma_{ik}; \quad (2.135)$$

9. იაკობის იგივეობა

$$\{f\{gh\}\} + \{g\{hf\}\} + \{h\{fg\}\} = 0. \quad (2.136)$$

**P.S.** პუასონის ფრჩხილების ცნება  $M$ -მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ წრფივ ვექტორულ ველს, აქცევს ლის ალგებრად.

**განსაზღვრება:** ლის ალგებრა ეწოდება წრფივ სივრცეს, მასზედ განსაზღვრული ორადწრფივი ირიბსიმეტრიული ოპერაციით  $L \times L \rightarrow L$ , რომელიც აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას.

**P.S.** ლის ალგებრის ცნება ფართოდ გამოიყენება დინამიკური სისტემების თეორიაში.

## 2.5. გიროსკოპული სისტემების მათემატიკური მოდელირება

**განსაზღვრება:** გიროსკოპი ეწოდება მყარ სხეულს, რომელიც იმყოფება ბრუნვით მოძრაობაში.

ეს იმას ნიშნავს, რომ რეალურად მბრუნავი სხულის დეფორმაციები იმდენად მცირეა, რომ ვერ ახდენს საგრძნობ გავლენას სხეულის ბრუნვით მოძრაობაზე.

რა თქმა უნდა, ეს დაშვება საშუალებას იძლევა, შევადგინოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი (ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით), მაშინ როცა დეფორმაციების გათვალისწინება მოგვცემდა განაწილებულპარამეტრებიან მათემატიკურ მოდელს (კერძო წარმოებულებიან განტოლებებს).

მყარი სხეულის ბრუნვითი მოძრაობის მათემატიკური მოდელი ჩვენ უკვე განვიხილეთ. ახლა, შემოგვყავს შესაბამისი ცნებები და უნდა აღვნიშნოთ მათი ფართო გამოყენებანი ნავიგაციაში: თვითმფრინავების, რაკეტებისა და საზღვაო ხომალდების სამართავად.

გიროსკოპის მაგალითს წარმოადგენს: ჩიკორი (ბზრიალა), ბადრო, მფრინავი ჭურვი, ბუმერანგი, ჰაერში მყოფი ფეხბურთის ბურთი და ა.შ. გიროსკოპების თეორია, კონსტრუირება და მათი დამზადების ტექნოლოგია მეტად მნიშვნელოვანი სამხედრო დარგებია და არსებობს ბევრი საინტერესო სახელმძღვანელო ამ მიმართულებით. თუმცა, ამ დარგში უფრო მეტად ჩაღრმავება არ შედის ჩვენი ინტერესების სფეროში.

## ამოცანები და სავარჯიშოები

1. როგორია დედამიწის ცენტრის მზის გარშემო ორბიტაზე მოძრაობის სიჩქარე? (ჩათვალიეთ, რომ ორბიტა წრიულია, ორბიტის რადიუსი  $r = 1,49 \cdot 10^{23}$  სმ, დედამიწის მასა  $M_d = 5,98 \cdot 10^{27}$  გ, მზის მასა  $M_m = 1,99 \cdot 10^{33}$  გ)

პასუხი:  $3,0 \cdot 10^6$  სმ/წმ

2. შეადგინეთ მთვარის დედამიწის გარშემო მოძრაობის მათემატიკური მოდელი და კომპიუტერი მეშვეობით შისწავლეთ მოძრაობის ტრაექტორია, თუ საწყის მომენტში დედამიწა იმყოფება კოორდინატთა სათავეში და წარმოადგენს ათვლის სისტემას, ხოლო მთვარე იმყოფება  $(x(0); y(0))$  წერტილში და მისი სიჩქარეა  $v_x(0), v_y(0)$ : (მთვარის მასა  $M_{mt} = 7,34 \cdot 10^{25}$  გ), (მზის მოქმედება უგულვებელყავით)

ა)  $x(0) = 0,5$       $y(0) = 0$

$v_x(0) = 0$       $v_y(0) = 1,63$

ბ)  $x(0) = 2,0$       $y(0) = 0$

$v_x(0) = 0$       $v_y(0) = 3,0$

გ)  $x(0) = 3,0$       $y(0) = 0$

$v_x(0) = 1$       $v_y(0) = 1$

3. შეადგინეთ მზის, მთვარისა და დედამიწის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი და კომპიუტერი მეშვეობით შეისწავლეთ მოძრაობის ტრაექტორიები მზესთან დაკავშირებულ ათვლის სისტემაში.

4. შეისწავლეთ ნეპტუნის, იუპიტერის, ურანის, ვენერას, მერკურის, მარსის, დედამიწის, სატურნის, პლუტონის მოძრაობა მზის გარშემო ცალ-ცალკე, ხოლო შემდეგ გაითვალისწინეთ მათი ურთიერთგავლენა და შეეცადეთ ააგოთ მზის სისტემის



პლანეტების მოძრაობის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ამ პლანეტების განლაგების შესახებ დროის საწყის მომენტში, ისარგებლეთ ტქენს მიერ ინტერნეტით მოპოვებული ინფორმაციით, ასევე მოიპოვეთ მათი საშუალო საწყისი სიჩქარეების შესახებ ინფორმაცია.

5. ა) იპოვეთ ბირთვის პრეცესია, თუ მასზედ არ მოქმედებენ მახრუნებელი  $\vec{N}$ -მომენტები.

ამოხსნა: რადგან ბირთვი ერთგვაროვანია  $I_1 = I_2 = I_3$ , ამიტომ თუ  $\vec{N} = 0$ , მაშინ ეილერის განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ  $\omega = const$  ე.ი. ან უძრავია ან ბრუნავს მუდმივი სიჩქარით.

ბ) იპოვეთ სიმეტრიული ბზრიალას მოძრაობის კანონი.

ამოხსნა: რადგან ბზრიალა (ჩიკორი) სიმეტრიულია  $I_1 = I_2 \neq I_3$ , თუ არ მოქმედებენ მახრუნებელი მომენტები  $\vec{N}$ , მაშინ ეილერის განტოლებებიდან მივიღებთ, რომ

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\}; \quad \text{სადაც} \quad \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \cdot \omega_3.$$

ამ სისტემის ამონახსნს აქვს სახე:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= A \cos \Omega t \\ \omega_2 &= A \sin \Omega t \\ \omega_3 &= const \end{aligned} \right. \quad (*)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ბზრიალა ბრუნავს ჩიკორის ღერძის გარშემო  $\omega_3$ -კუთხური სიჩქარით და  $\Omega$ -კუთხური სიჩქარით ბრუნავს თვით ღერძი A-რადიუსის წრეწირზე.

**P.S.** დედამიწისათვის  $I_1 \neq I_3$ , რადგან დედამიწა არ წარმოადგენს ზუსტ სფეროს. სიმეტრიული ბზრიალას (\*) ტიპის რხევები აღმოჩენილი იქნა დედამიწისათვის ექსპერიმენტულად, რასაც განედის ვარიაციას უწოდებენ.

6. იპოვეთ რაკეტის მოძრაობის კანონი (სიმძიმის ცენტრის მოძრაობა), თუ რაკეტა გაისროლეს ჰორიზონტისადმი  $\alpha$ -კუთხით მისი მასაა  $m_0$ , წვევის ძალაა  $P$ , წინააღმდეგობის ძალა (ჰაერის)

აჩის  $F_{t\sin} = kv^2$ , კორიოლისის ძალა უგულებელყავით. ( $\alpha = 90$ );  
 $(m_0 \frac{dv}{dt} = -mg + P - kv^2)$ -მოდელი.

ა)  $m_0 = 300$  კგ;  $g \approx 9,8$  მ/წმ<sup>2</sup>;  $k = 0,02$ ;  $v_0 = 340$  მ/წმ.

ბ)  $m_0 = 300$  კგ;  $g \approx 9,8$  მ/წმ<sup>2</sup>;  $k = 0,02$ ;  $v_0 = 400$  მ/წმ.

გ)  $m_0 = 300$  კგ;  $g \approx 9,8$  მ/წმ<sup>2</sup>;  $k = 0,02$ ;  $v_0 = 800$  მ/წმ.

7. შეადგინეთ მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, თუ რაკეტას ისვრიან  $\alpha \neq 90$  კუთხით. გამოთვალეთ ტრაექტორია, დაცემის დრო და ადგილი.

8. შეადგინეთ რაკეტის კორპუსის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი სიმძიმის ცენტრის მიმართ და გამოთვალეთ  $\omega$ -კუთხური სიჩქარე მოდელიდან გამომდინარე. მონაცემები აირჩიეთ თვითონ საღი აზრიდან გამომდინარე (დასაბუთებულად) და მოიძიეთ შესაბამისი ინფორმაცია ინტერნეტში.

### ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1, механика, Москва 1973
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т.1, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва 1974
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978

11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. пер. с нем. Москва, Мир,1974
14. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემა-ტიკური მოდელები), ტ.1, სტუ, თბილისი, 2006

### III თავი. რხევითი სისტემების მოდელირება

ჩვენ გარშემო არსებული მოვლენების უმრავლესობა ხასიათდება განმსაზღვრელი პარამეტრების რხევითი ცვალებადობით, რაიმე მონოტონურად ცვლადი პარამეტრის(დროის) მიმართ. ასეთ პროცესებს რხევითი პროცესები ეწოდება. რხევით სისტემებს, ზოგჯერ, ოსცილატორებს უწოდებენ.

ზოგად შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხასიათდება თავისუფლების ხარისხით ანუ სისტემის განმსაზღვრელი პარამეტრების აუცილებელი რაოდენობით. მაგალითად, თუ ვსწავლობთ მყარი სხეულის ბრუნვით რხევებს სიმეტრიის ღერძის გარშემო, მაშინ მოძრაობის აღსაწერად საკმარისია ერთი პარამეტრი - მობრუნების კუთხე. რაც ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. რხევითი სისტემების ძირითადი თავისებურებები ნათლად ჩანს ისეთი ოსცილატორების მაგალითზეც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. ამიტომ სიმარტივისათვის, განვიხილავთ რხევითი სისტემების ძირითად ცნებებს სწორედ ასეთი მარტივი ოსცილატორების მაგალითზე, თუმცა არსებობს ისეთი რხევითი სისტემებიც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთზე მეტია.

რხევითი სისტემების დახასიათება ხდება ასევე ორი ძირითადი მიმართულებით. ესენია: წრფივი და არაწრფივი რხევითი სისტემები, იმის მიხედვით, თუ როგორ ტიპს მიეკუთვნება ის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც აღწერენ შესაბამის მათემატიკურ მოდელებს. რეალური რხევითი სისტემები ყოველთვის არაწრფივია, თუმცა მიახლოებით, კვლევის გამარტივების მიზნით, ისინი შეიძლება შეიცვალოს შესაბამისი წრფივი სისტემებით.

ვთქვათ, განვიხილება რხევითი სისტემა ერთი განმსაზღვრელი  $x(t)$  პარამეტრით, რომელიც დამოკიდებულია მონოტონურად ცვლად  $t$  პარამეტრზე.

**განსაზღვრება.** ისეთ რხევით სისტემებს, რომელთათვისაც ადგილი აქვს  $x(t) = x(t+T)$  ტოლობას პერიოდული რხევითი სისტემა ეწოდება. ხოლო ისეთ  $T$  მინიმალურ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ამ ტოლობას აქვს ადგილი რხევის პერიოდი ეწოდება.

**განსაზღვრება.** რხევის პერიოდის  $f = \frac{1}{T}$  შებრუნებულ სიდიდეს რხევის სიხშირე ეწოდება. რხევის სიხშირე გვიჩვენებს სრულ რხევათა რაოდენობას მონოტონური პარამეტრის(დროის) ერთი ერთეულით ცვლილებისას. თუ რხევის პერიოდს, წამებში გავზომავთ, მაშინ რხევის სიხშირის ერთეული იქნება ჰერცი (რხევათა რიცხვი ერთ წამში).

რხევის სიხშირის დასახასიათებლად, ზოგჯერ, იყენებენ  $\omega$  კუთხურ სიხშირეს, რომელიც გამოხატავს რხევათა რაოდენობას  $2\pi$  წამის (მონოტონური პარამეტრის მნიშვნელობის) განმავლობაში,  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ .

ქვემოთ, მოცემულია იმ რხევითი პროცესების რხევის სიხშირის რიცხვითი მნიშვნელობები (გამოსახული  $\text{წმ}^{-1}$  ერთეულებში), რაც ბუნებაში გვხვდება:

- $10^{-10}$  – პლანეტების საუკუნებრივი შეშფოთებების სიხშირე;
- $10^{-8}$  – პლანეტების ბრუნვის სიხშირე;
- $10^{-5}$  – მოქცევა-უკუქცევის სიხშირე;
- $10^1$  – რხევის სიხშირე მანქანებში;
- $10^0$  – წამების ქანქარა;
- $10^4$  – აკუსტიკური რხევები;
- $10^5$  –  $10^8$  – ულტრაბერითი მექანიკური რხევები;
- 50 – ცვლადი დენი;
- $10^{12}$  – ინფრაწითელი გამოსხივება;

$10^{15}$  – ხილული ოპტიკური სპექტრი;

$10^{18}$  – რენტგენის სხივები;

$10^{20}$  -  $\gamma$  სხივები;

$10^{23}$  – კოსმოსური სხივები.

რხევითი პროცესები ასევე ხასიათდება  $A$  ამპლიტუდით.

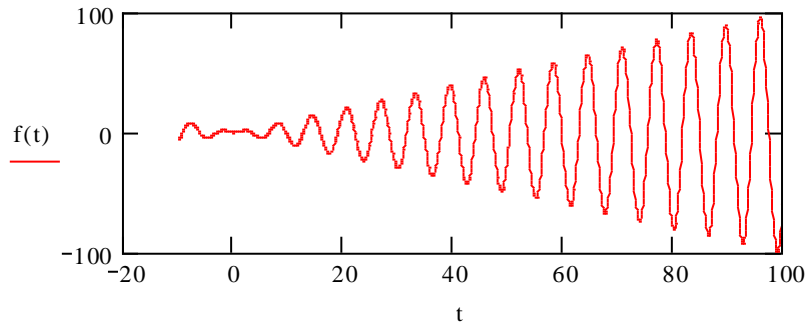
**განსაზღვრება.** ერთი სრული რხევის განმავლობაში გადახრის ნახევრის სიგრძეს **ამპლიტუდა** ეწოდება.

თუ  $x_{\max}$  უდიდესი და  $x_{\min}$  უმცირესი მნიშვნელობებია  $x(t)$  გადახრისას რხევის ერთი პერიოდში განმავლობაში, მაშინ **რხევის ამპლიტუდა**  $A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$ .

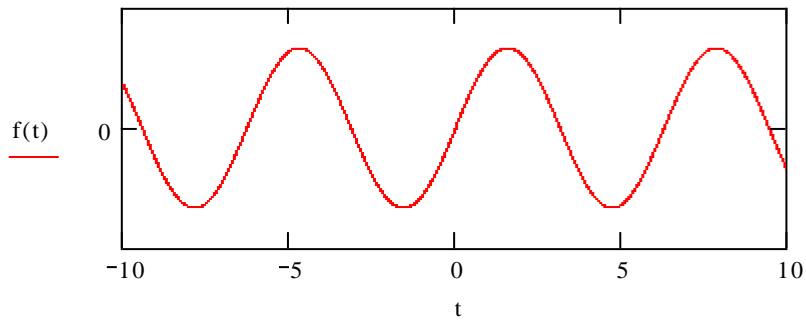
პერიოდული რხევისას გადახრის განზოგადებული კოორდინატი  $x(t)$  ასრულებს რხევებს  $x_0$  საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში  $x_0 = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min})$ . სიმეტრიული რხევების შემთხვევაში, ეს მნიშვნელობა შეესაბამება აგრეთვე წონასწორობის ან უძრაობის მდგომარეობას.

**განსაზღვრება.** თუ  $x(t)$  ფუნქცია მხოლოდ მიახლოებითაა პერიოდული ანუ  $|x(t) - x(t+T)| \leq \varepsilon$  წინასწარ არჩეული  $\varepsilon$  მცირე სიდიდისათვის, მაშინ  $x(t)$  ფუნქციას **თითქმის პერიოდული ფუნქცია** ეწოდება.

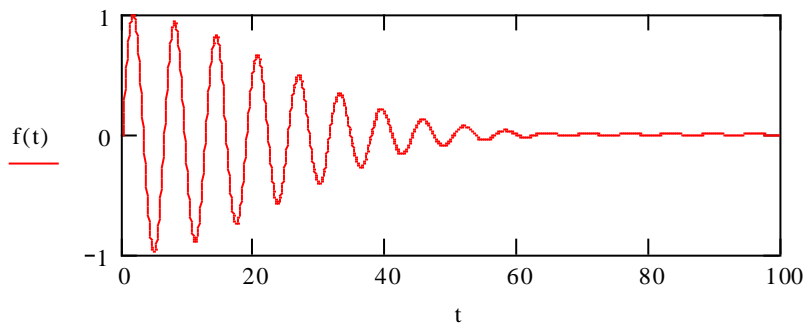
რხევითი სისტემები ხასიათდება რხევის ამპლიტუდის ცვლილებით რაიმე მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით. განასხვავენ: რხევებს ზრდადი ამპლიტუდით (ნგრევადი სისტემები), მუდმივი ამპლიტუდით(პერიოდული) და კლებადი ამპლიტუდით (მილევადი).



**რხევები ზრდადი ამპლიტუდით**



**რხევები მუდმივი ამპლიტუდით**



**რხევები მიღევადი ამპლიტუდით**

რხევითი სისტემები, წარმოქმნის მექანიზმიდან გამომდინარე, იყოფა შემდეგ ტიპებად:

1. საკუთრივი რხევითი სისტემები (თავისუფალი რხევები);
2. ავტორხევითი სისტემები (თვითაგზნებადი რხევები);
3. პარამეტრული რხევითი სისტემები (პარამეტრით აგზნებადი რხევები);

4. იძულებითი რხევითი სისტემები (მაიძულებელი ძალის გავლენით წარმოშობილი რხევები);

5. ბმული რხევითი სისტემები (ერთმანეთთან შეკავშირებული რამდენიმე რხევითი სისტემა).

განვიხილოთ რხევითი სისტემის თითოეული ტიპი.

**საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემების დინამიკა** მთლიანად ემყარება საწყის ბიძგს და შემდეგ აღარ იღებს გარე ზემოქმედებას. ე.ი. ენერჯის გაზრდა არ ხდება სისტემის გარედან. განვიხილება ორი ტიპის საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემები: არადემპფირებული და დემპფირებული. დემპფირებული რხევითი სისტემები იმით გამოირჩევა, რომ ადგილი აქვს ენერჯის დახარჯვას წინააღმდეგობის ძალების დაძლევაზე.

მაგალითად, გრავიტაციული ქანქარა საწყისი ბიძგის შემდეგ თავისუფალ რხევას იწყებს. თავისუფალი რხევითი სისტემების დინამიკა აღიწერება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისაგან განსხვავებით, ავტორხევით სისტემებში ადგილი აქვს ენერჯის გარედან შემოდინებას. ამასთან, ენერჯის წყარო არაა თვითონ რხევითი სისტემა. სისტემა გარედან იღებს ზუსტად იმდენ ენერჯიას, რამდენსაც ხარჯავს.

მაგალითი განვიხილოთ საათი, რომელშიც ენერჯის წყარო აწეული ტვირთი ან შეკუმშული ზამბარაა. ასეთი საათი ავტორხევით სისტემას წარმოადგენს. ავტორხევები აღიწერება არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით.

საკუთრივი რხევებისა და ავტორხევითი სისტემების შემთხვევაში რხევის სიხშირე განისაზღვრება თვით რხევითი სისტემის ხასიათიდან გამომდინარე, ამიტომ ასეთ სისტემებს ავტონომიურ სისტემებს უწოდებენ.



მათგან განსხვავებით, პარამეტრულ და იძულებით რხევით სისტემებს ჰეტერონომიულ სისტემებს უწოდებენ, რადგან ასეთ სისტემებში რხევის სიხშირე განისაზღვრება გარე ზემოქმედებიდან გამომდინარე. პარამეტრული აგზნებადობის სისტემებში, გარე ზემოქმედება იწვევს სისტემის შიდა პარამეტრების პერიოდულ ცვალებადობას. მაგალითად, მათემატიკური ქანქარა ძაფზე ჩამოკიდული ტვირთით, როცა ძაფის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. პარამეტრული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელები იმით გამოირჩევა, რომ შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების ზოგიერთი კოეფიციენტი არის მონოტონური პარამეტრის(დროის) პერიოდული ფუნქცია.

იძულებით რხევით სისტემებში, სისტემაზე ასევე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ რხევით პროცესებს კი განსაზღვრავს არა პერიოდული პარამეტრები, არამედ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ორ ან მეტ რხევით სისტემასთან, რომლებიც ახდენენ ერთმანეთზე გავლენას. თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

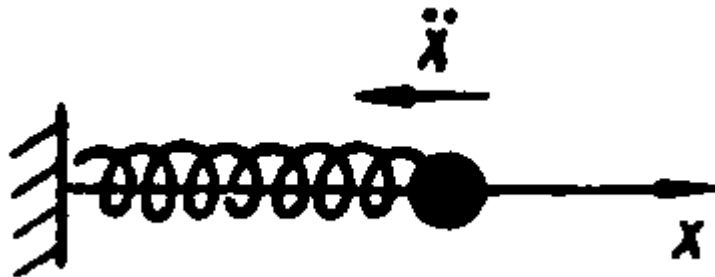
**P.S.** არსებობს შერეული ტიპის სისტემებიც, რომლებიც ერთდროულად იძულებითი და ავტორხევითი სისტემებია და ა.შ.

განვიხილოთ ჯერ წრფივი რხევითი პროცესები ანუ ისეთი რხევითი პროცესები, რომელთა შესაბამისი მათემატიკური მოდელები წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს შესაბამისი საწყისი პირობებით.

### 3.1. არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თავისუფალი რხევითი პროცესები წარმოიშობა, როცა სისტემაზე საწყის მომენტში მოქმედებს ამძრავი ძალები, რომლებიც შემდეგ ქრება და სისტემას საშუალებას აძლევს გამოაჩინოს თავისი შინაგანი ბუნება. თავისუფალი რხევითი პროცესების დროს, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები პერიოდულად ცვლიან ერთმანეთს. თუ სისტემის კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით არ იცვლება (მუდმივია), მაშინ ამ სისტემას კონსერვატიული ეწოდება. კონსერვატიულ სისტემებში გვაქვს არადემპფირებული (არამილევადი) რხევები.

#### 3.1.1. არადემპფირებული, თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება



ნახ. 3.1. წრფივი ოსცილატორის მექანიკური მაგალითი

განვიხილოთ წრფივი ოსცილატორის მექანიკური რხევები ნახ.3.1-ის მაგალითზე.  $m$  მასის სხეული  $c$  სიხისტის ზამბარით დაკავშირებულია კედელთან, სადაც ზამბარის მეორე მხარე მჭიდროდაა ჩამაგრებული. ასეთ შემთხვევაში, ნიუტონის მეორე კანონს ჩავწერთ  $m$  მასის სხეულისათვის

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx. \quad (3.1)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.2)$$

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad (3.3)$$

სადაც

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{რხევის კუთხური სიხშირეა.}$$

კოშის (3.2)-(3.3) ამოცანის ანალიზური ამონახსნი მოიცემა ფორმულით

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (3.4)$$

ან ფორმულით

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (3.5)$$

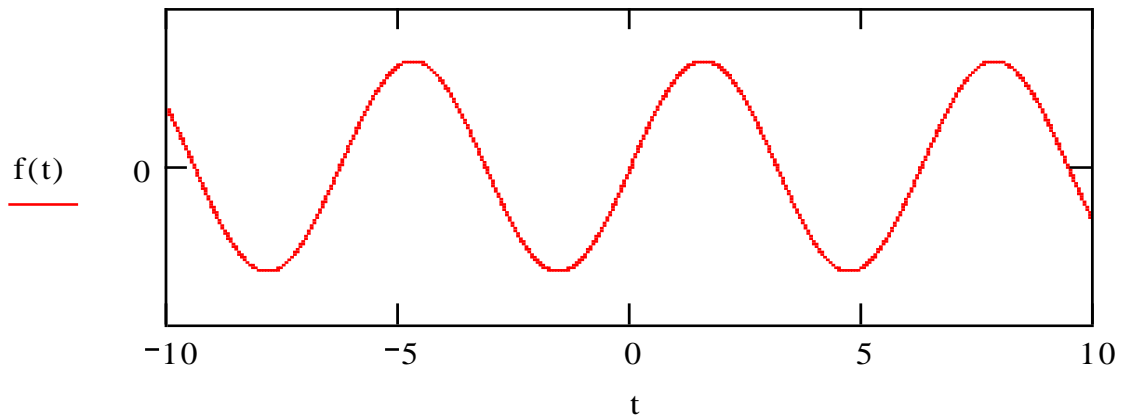
სადაც  $\varphi$  რხევის საწყისი ფაზაა და

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \quad (3.6)$$

რხევის პერიოდი და სიხშირე შესაბამისად იქნება:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad f = \frac{1}{T}. \quad (3.7)$$

ასეთ რხევებს შეესაბამება ნახ. 3.2.



ნახ. 3.2. თავისუფალი არადემპფირებული რხევითი სისტემის დინამიკა

როგორც ვხედავთ, გვაქვს პერიოდული რხევები მუდმივი  $a$  ამპლიტუდით, რომელიც დამოკიდებულია რხევითი სისტემის საწყის მდგომარეობაზე, ზამბარის სიხისტესა და მერხევი სხეულის  $m$  მასაზე.

**თეორემა.** თავისუფალი რხევითი სისტემის სრული მექანიკური ენერჯიის სიდიდე არ იცვლება დროის მიხედვით.

**დამტკიცება.** მართლაც, განვიხილოთ დინამიკის განტოლება, გავამრავლოთ ორივე ნაწილი  $x$  სიჩქარეზე და ვაინტეგრიროთ, მივიღებთ

$$m\ddot{x} + cx = 0 \Leftrightarrow m\dot{x}\ddot{x} + cx\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}x^2\right) = \frac{d}{dt}(E_{kin} + E_{pot}) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{kin} + E_{pot} = const$$

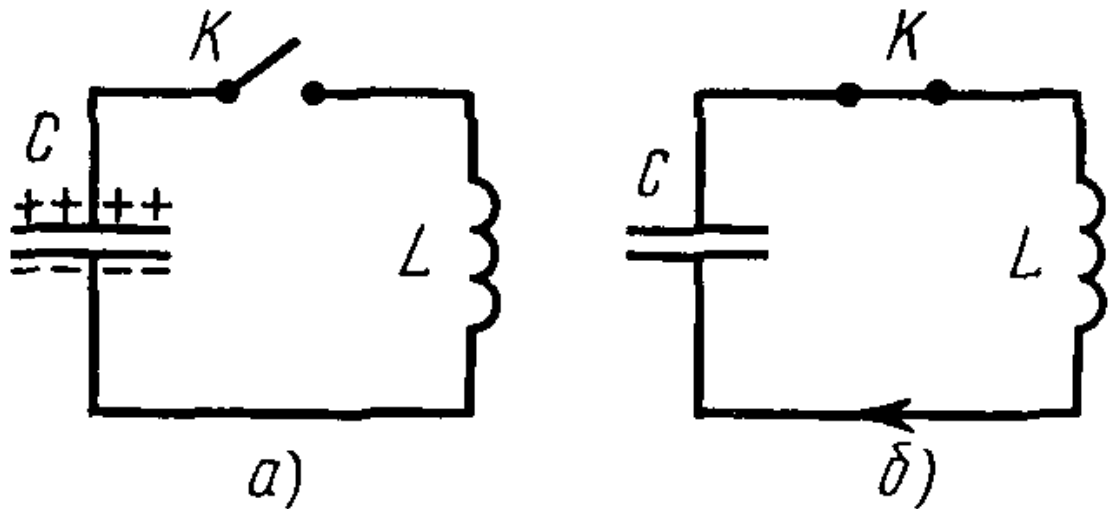
რ.დ.გ.

**თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერჯია**

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2,$$

ანუ სისტემის ენერჯია პირდაპირპროპორციულია რხევის ამპლიტუდის კვადრატისა.

3.1.2. არადემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება



ნახ. 3.3. რხევითი კონტური

თუ ელექტრული წრედი შეიცავს  $C$  ტევადობის კონდენსატორსა და  $L$  ინდუქციურობის მქონე კოჭას, მაშინ ამ წრედში შეიძლება აღიძვრას ელექტრული რხევები. ასეთ წრედს რხევით კონტურს უწოდებენ (ნახ. 3.3). ვთქვათ, კონდენსატორის ზედა ფირფიტა დამუხტულია დადებითად, ხოლო ქვედა – უარყოფითად (ნახ. 3.3.a). რხევითი კონტურის მთელი ენერგია თავმოყრილია კონდენსატორში. ჩაერთოთ  $K$  ჩამრთველი, მაშინ კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და  $L$  კოჭაში დენი გავა. კონდენსატორის ელექტრული ენერგია დაიწყებს კოჭას მაგნიტურ ენერგიად გარდაქმნას. ეს პროცესი დამთავრდება, როცა მოხდება კონდენსატორის მთლიანი განმუხტვა და წრედში გვექნება მაქსიმალური დენის ძალა (ნახ. 3.3.b). ამ მომენტიდან დენის ძალა დაიწყებს შემცირებას ისე, რომ არ შეიცვლის მიმართულებას. მაგრამ შემცირება თანდათან მოხდება, ვინაიდან მის შემცირებას ეწინააღმდეგება კოჭას თვითინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალა. დენის ხარჯზე დაიწყება კონდენსატორის დამუხტვა, წარმოიქმნება ელექტრული ველი, რომელიც შეამცირებს დენის ძალას. ბოლოს და ბოლოს კონდენსატორი მიიღებს მაქსიმალურ მუხტს, ხოლო დენი

გათავდება. ამის შემდეგ, კონდენსატორი დაიწყებს განმუხტვას და დენი დაიძვრება საპირისპირო მიმართულებით და ა. შ. კონტურში თუ წინააღობა არ იქნება, მაშინ მივიღებთ პერი-ოდულ რხევებს.

**შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.** ვთქვათ,  $Q$  არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე,  $U_c$  კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}. \quad (3.8)$$

ასევე, თუ  $I$  არის დენის ძალა და  $U_L$  კოჭაზე მოდებული ძაბვა

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (3.9)$$

კირხოფის კანონის თანახმად, გვექნება განტოლება:

$$U_L + U_c = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (3.10)$$

დენის ძალა არის მუხტის ცვლილების სიჩქარე ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.11)$$

(3.10),(3.11) ტოლობებიდან გვექნება:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (3.12)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (3.13)$$

მაშინ რხევითი კონტურის განტოლება (3.12) გადაიწერება თავისუფალი რხევების კანონიკური განტოლების სახით:

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \quad (3.14)$$

მიიღება  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  სისწორის ჰარმონიული ელექტრული რხევები, ხოლო რხევის პერიოდი იქნება:  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ . ამ ფორმულას ელექტროდინამიკაში ტომპსონის ფორმულას უწოდებენ.

რხევითი სისტემის დინამიკა ისეთივეა, როგორც 3.2 ნახაზზეა გამოსახული.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, მივიღეთ იგივე სახის მათემატიკური მოდელი, როგორც თავისუფალი მექანიკური რხევების დროს. რაც ნიშნავს, რომ ბუნება ერთიანია და თავისუფალი რხევითი სისტემები ელექტრული სისტემებისათვის ემორჩილება იგივე კანონზომიერებას, რასაც მექანიკური სისტემებისათვის.

### 3.1.3. არადემპფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, ორი სახეობის ცხოველია. აქედან, ერთი სახეობის ცხოველი იკვებება მეორე სახეობის ცხოველით. ხოლო მეორე სახეობის ცხოველი იკვებება ბალახით. ისმის კითხვა, მოსალოდნელია თუ არა, რომ პირველმა სახეობამ მთლიანად გაანადგუროს მეორე სახეობის ცხოველი ?

ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად ავაგოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $N_1(t)$  არის პირველი სახეობის (მტაცებლების) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო  $N_2(t)$  - მსხვერპლის შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება და

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2, \tag{3.15}$$

სადაც  $\varepsilon_2$  ზრდის სიჩქარის კოეფიციენტია.

ასევე, თუ მტაცებლები მარტო აღმოჩნდებიან, მაშინ მათი რაოდენობა შიმშილის გამო განადგურდება. შესაბამის კანონს აქვს სახე:

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1, \quad (3.16)$$

სადაც  $\varepsilon_1$  არის მტაცებლების სიკვდილიანობის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ეხლა განვიხილოთ, ამ ორი სახეობის ერთდროული თანაცხოვრება შესაბამის არეალზე. მაშინ მტაცებლების გამრავლების სისწრაფე დამოკიდებული იქნება მსხვერპლთან მათი შეხვედრების რაოდენობაზე, რომელიც  $N_1 \cdot N_2$  სიდიდის პროპორციულია. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ **ვოლტერას მოდელს**

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2, \quad (3.17)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2, \quad (3.18)$$

სადაც  $\gamma_1$  მსხვერპლის სიკვდილიანობის კოეფიციენტია მტაცებლებთან შეხვედრის გამო;  $\gamma_2$  - მტაცებლების გამრავლების კოეფიციენტი.

ეხლა, განვიხილოთ ამ მოდელის წონასწორობის წერტილები ანუ ის მნიშვნელობები, რომელთა დროსაც სისტემა სტაციონარულია

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2 = 0, \quad (3.19)$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2 = 0. \quad (3.20)$$

ამ სისტემის არატრივიალური ამონახსნია

$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}. \quad (3.21)$$

სახეობათა რაოდენობების წონასწორული მნიშვნელობების მცირე მიდამოში ანუ, როცა  $n_1(t)$  და  $n_2(t)$  მცირე სიდიდეებია, გვაქვს თანაფარდობები:



$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (3.22)$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ ვოლტერას (3.19),(3.20) მოდელში და მოვახდენთ მიღებული განტოლებების ლინეარიზაციას, მივიღებთ სისტემას:

$$\dot{n}_1 = \frac{\gamma_2 \varepsilon_2}{\gamma_1} n_2, \quad (3.23)$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\gamma_2} n_1. \quad (3.24)$$

თუ (3.23) განტოლებას დროით გავაწარმოებთ და გავითვალისწინებთ (3.24) განტოლებას, მივიღებთ:

$$\ddot{n}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 = 0. \quad (3.25)$$

სადაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad (3.26)$$

მივიღებთ თავისუფალი სისტემების რხევის კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (3.27)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, აქაც მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემების რხევის მათემატიკური მოდელი. ნათლად ჩანს, ორი სახეობის თანაცხოვრების შედეგი დამოკიდებულია მათი გამრავლებისა და სიკვდილიანობის სიჩქარეთა კოეფიციენტების მნიშვნელობებზე.

### 3.1.4. არადემპფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელი)

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.28)$$

სადაც  $C(t)$  მოხმარებაა,  $I(t)$  - ინვესტიციები,  $X(t)$  - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (3.29)$$

სადაც  $\beta(t)$  აქსელერაციის კოეფიციენტია.

$C(t)$  მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.30)$$

თუ (3.29) და (3.30) გამოსახულებებს შევიტანთ (3.28) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (3.31)$$

განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (1.32)$$

ანუ მივიღებთ დინამიკის ფრანგიშვილ-ობგაძის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (3.33)$$

რადგან  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (3.33) განტოლება გავეყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (3.34)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (3.34) განზოგადებულ განტოლებაში მოვახდენთ ჩასმას:

$$\beta(t) = t \quad \text{და} \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega^2 \cdot X(t), \quad (3.35)$$

მაშინ დინამიკის (3.34) განტოლებიდან მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემების კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = 0. \quad (3.36)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. შეადგინეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ მიღებული სისტემის რხევის პერიოდი, სიხშირე, ფაზა და ამპლიტუდა, სისტემის საწყისი მდგომარეობიდან გამომდინარე.
2. შეისწავლეთ ენერჯის შენახვის კანონი თავისუფალი რხევითი სისტემებისათვის.
3. გამოიკვლიეთ თავისუფალი რხევითი სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე. იპოვეთ ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეზე.
4. შეადგინეთ მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (ზამბარაზე გამობმული ტვირთი, ნახ.1.1) იმ შემთხვევაში, როცა  $m$  მასის ტვირთზე მოქმედებს ხახუნის ძალაც. იქნება თუ არა ასეთი სისტემა თავისუფალი? რხევები იქნება დემპფირებული, თუ არა?
5. ჩამოთვალეთ რხევითი სისტემების ტიპები.

### ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.

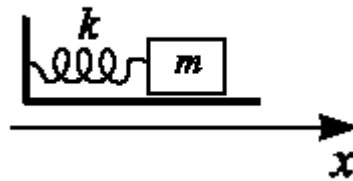
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М. Наука, 1972.
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. ოზგაძე თ., ოზგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2, თბილისი; სტუ, 2007.
12. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973
15. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი სისტემები), ტ.4, თბილისი, 2009

### 3.2. დემპფირებული, თავისუფალი (საკუთრივი) რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

თუ რხევითი სისტემის მთლიანი ენერგია მცირდება (წინააღმდეგობის ძალების გადალახვაზე შესრულებული მუშაობის გამო), მაშინ ასეთ სისტემას დემპფირებული სისტემა ეწოდება. დემპფირებულ თავისუფალ სისტემებში გვაქვს დემპფირებული (პერიოდულ-მილევადი ან არაპერიოდულ-მილევადი) რხევები.

#### 3.2.1. დემპფირებული, თავისუფალი (საკუთრივი) მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული საკუთრივი (თავისუფალი) მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი (ნახ. 3.4). როცა ზამბარის სიხისტეა  $c$ , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი  $k$ , მაშინ  $F_{xax} = -k \dot{x}$ .



ნახ. 3.4. დემპფირებული საკუთრივი რხევები  $m$  მასის ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის გათვალისწინებით

შევადგინოთ  $m$  მასის ტვირთის თავისუფალი რხევის მათემატიკური მოდელი ხახუნის ძალის გათვალისწინებით

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}. \quad (3.37)$$

თუ (3.37) განტოლების ორივე მხარეს გავყოფთ  $m$  მასის მნიშვნელობაზე და შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{k}{m} = 2\gamma, \quad (3.38)$$

მივიღებთ დემპფირებული თავისუფალი (საკუთარი) რხევითი სისტემის მოდელს:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.39)$$

სადაც  $\omega_0$  სისტემის თავისუფალი რხევების სიხშირეა,

$\gamma$  - მიღვევის კოეფიციენტი.

თუ (3.39) დიფერენციალურ განტოლებაში მოვახდენთ ვიღვერის ჩასმას  $x(t) = e^{rt}$ , მაშინ მივიღებთ შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (3.40)$$

რაც ნიშნავს, რომ (3.39) დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (3.41)$$

აქ უნდა განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

თუ  $\gamma < \omega_0$ , მაშინ (3.41) ტოლობიდან გამომდინარე, გვაქვს მახასიათებელი ალგებრული განტოლების ორი კომპლექსური ურთიერთშეუღლებული  $r$  ამონახსნი. ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი შემდეგია:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (3.42)$$

რხევის პერიოდი:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad \text{ხოლო } A_0 \text{ და } \varphi \text{ მუდმივი რიცხვები განისაზ-$$

ღვრება

$$x(0) = 0 \quad (3.43)$$

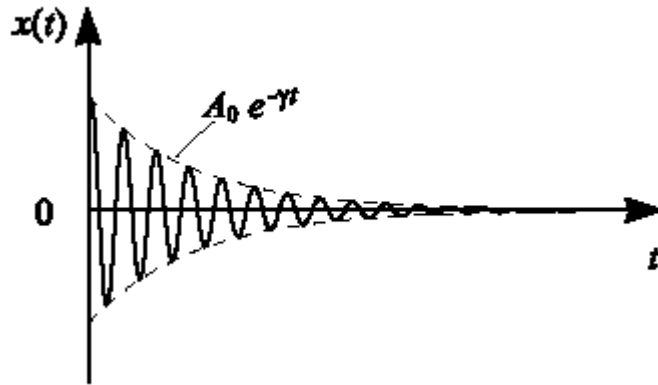
$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (3.44)$$

საწყისი პირობებიდან გამომდინარე.

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0 + \gamma x_0)^2 / \omega^2} \quad (3.45)$$

$$\cos \varphi_0 = x_0 / A_0, \quad \sin \varphi_0 = -(v_0 + \gamma x_0) / (\omega A_0) \quad (3.46)$$

ეს შემთხვევა შეესაბამება მიღვევად რხევით პროცესებს.



ნახ. 3.5. მიღვევადი რხევები

ამპლიტუდის მიღვევადობის სისწრაფე რეგულირდება  $\gamma$  პარამეტრით, ხოლო დემპფირებული სისტემის რხევის სიხშირე  $\omega < \omega_0$ . რაც ნიშნავს, რომ ხახუნის ძალა ამცირებს სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირეს ანუ დემპფირებული სისტემის საკუთარი რხევების სიხშირე ნაკლებია შესაბამისი არადემპფირებული სისტემის რხევების სიხშირეზე.

$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$  სიდიდეს მიღვევადი რხევების ამპლიტუდას უწოდებენ. როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, რხევის ამპლიტუდა, ასეთ შემთხვევაში, კლებულობს ექსპონენციალურად. შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $A_n$ -ით აღნიშნოთ წრფივი თავისუფალი დემპფირებული სისტემის, წონასწორობის მდგომარეობიდან დადებითი მიმართულებით მაქსიმალური მიმდევრობითი გადახრის სიდიდეები. ცხადია, რომ ეს სიდიდეები აკმაყოფილებს რეკურენტულ თანადობას

$$A_{n+1} = e^{-\gamma T} A_n. \quad (3.47)$$

გამოვთვალოთ რამდენჯერ შემცირდება რხევის ამპლიტუდა ერთი პერიოდის განმავლობაში, მივიღებთ:

$$(A_{t+T} = A_0 \cdot e^{-\gamma(t+T)}, \quad A_t = A_0 \cdot e^{-\gamma t}), \Rightarrow \frac{A_t}{A_{t+T}} = e^{\gamma T} \Rightarrow d = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} = \gamma \cdot T.$$

**განსაზღვრება.**  $d = \gamma T$  სიდიდეს ოსცილატორის მილეკადობის (ჩაქრობის) **ლოგარითმულ დეკრემენტს** უწოდებენ.

$d$ -ლოგარითმული დეკრემენტის  $N = \frac{1}{d}$  შებრუნებული სიდიდე გვიჩვენებს იმ რხევათა რიცხვს, რომლის შემდეგ ამპლიტუდა  $e$ -ჯერ კლებულობს.

$T$ - რხევის პერიოდის განმავლობაში ამპლიტუდა  $e^{-d}$ -ჯერ

მცირდება.

როგორც ვიცით, ენერგია რხევით სისტემაში რხევის ამპლიტუდის კვადრატის პროპორციულია, ამიტომ, ამ შემთხვევაში, მთლიანი მექანიკური ენერგია მცირდება (ხახუნის გამო სითბოში გარდაიქმნება)

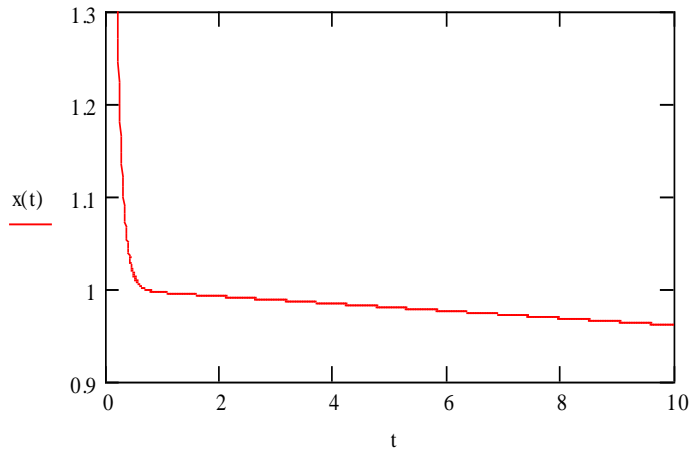
$$E = E_0 \cdot e^{-2\gamma t}.$$

თუ  $\gamma > \omega_0$ , მაშინ  $r$ -ის ორივე მნიშვნელობა ნამდვილ რიცხვს წარმოადგენს და ამავე დროს, ორივე მნიშვნელობა უარყოფითია. დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$x(t) = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (3.48)$$

ეს მოძრაობის აპერიოდული ჩაქრობაა რაც ნათლად ჩანს გრაფიკიდან ნახ. 3.6



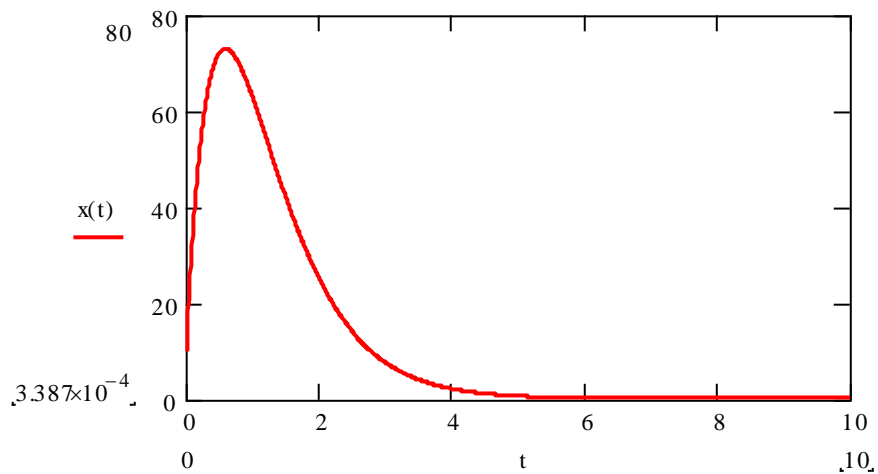


ნახ. 3.6. აპერიოდული მიღვეადი მოძრაობა

თუ  $\gamma = \omega_0$ , მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ორჯერადი ფესვი  $r = -\gamma$ . როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში, დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$x(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma t}. \quad (3.49)$$

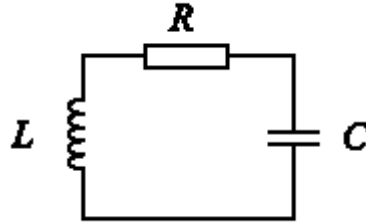
ესეც აპერიოდული მიღვეადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევაა (ნახ. 3.7).



ნახ. 3.7. აპერიოდული მიღვეადი მოძრაობის განსაკუთრებული შემთხვევა

### 3.2.2. დემპფირებული, საკუთრივი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ დემპფირებული ელექტრული რხევითი სისტემა.



ნახ. 3.8. დემპფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი სისტემა

ამ სისტემაში (ნახ. 3.8) არადემპფირებული რხევითი კონტურისაგან განსხვავებით, ჩართულია  $R$  წინაღობა, რაც იწვევს ენერჯიის დანაკარგებს და თავისუფალი სისტემა დემპფირებული ხდება.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $Q$  არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე,  $U_c$  - კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_c = \frac{Q}{C}, \quad (3.50)$$

ასევე, თუ  $I$  არის დენის ძალა და  $U_L$  - კოჭაზე მოდებული ძაბვა, მაშინ

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (3.51)$$

ძაბვის ვარდნა  $R$  წინააღობაზე

$$U_r = R \cdot I. \quad (3.52)$$

კირჰოფის კანონის თანახმად, გვექნება განტოლება:

$$U_L + U_r + U_c = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = 0. \quad (3.53)$$

დენის ძალა მუხტის ცვლილების სიჩქარეა ანუ

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.54)$$

(3.53)-(3.54) ტოლობებიდან

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (3.55)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad (3.56)$$

მაშინ განტოლება (3.55) მიიღებს სახეს:

$$\ddot{Q} + 2\gamma \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0, \quad (3.57)$$

სადაც  $\omega_0$  სისტემის საკუთარი (თავისუფალი) რხევების სიხშირეა, ხოლო  $\gamma$ -მიღების კოეფიციენტი.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის (3.57) განტოლება იდენტურია შესაბამისი დემპფირებული, თავისუფალი, მექანიკური სისტემის დინამიკის განტოლებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ერთნაირად ეხება როგორც მექანიკურ, ასევე, ელექტრულ რხევით სისტემებს.

### 3.2.3. დემპფირებული, საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი მტაცებელი-მსხვერპლი. ამ მოდელში, არის ორი სახის ცხოველი. აქედან, მეორე სახის ცხოველები იკვებებიან პირველი სახის ცხოველებით. ხოლო პირველი სახის ცხოველები იკვებებიან ბალახით. შევისწავლოთ ამ სისტემის შესაბამისი დინამიკა. ამისათვის აუცილებელია სისტემის მათემატიკური მოდელის შედგენა.

ავაგოთ, ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ,  $N_1(t)$  არის პირველი სახეობის (მსხვერპლის) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო  $N_2(t)$  - მტაცებლების შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება მუდმივი  $k_0$  სიჩქარით, მაგრამ მტაცებლებთან შეხვედრა იწვევს მათი ზრდის სიჩქარის შემცირებას  $k_2$  სიჩქარის კოეფიციენტით. მტაცებლებისა და მსხვერპლის შეხვედრის სიხშირე დამოკიდებულია მათი რაოდენობების ნამრავლზე და, მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება:

$$\dot{N}_1(t) = k_0 - k_1 N_1 N_2 . \quad (3.58)$$

ანალოგიურად, მტაცებლების რაოდენობის ზრდა დამოკიდებულია მსხვერპლთან შეხვედრების რაოდენობაზე, რაც პირდაპირპროპორციულია მათი რაოდენობების ნამრავლისა. მაგრამ, მტაცებლებიც იღუპებიან სიბერით, ავადმყოფობით ან უფრო ძლიერ მტაცებელთან ბრძოლაში. მათი სიკვდილიანობის კოეფიციენტია  $k_2$ . მაშინ შესაბამისი დინამიკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\dot{N}_2 = k_1 N_1 N_2 - k_2 N_2 . \quad (3.59)$$

სტაციონარული წერტილის გამოსათვლელად ნულს გავეტოლოთ (3.58),(3.59) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები. მიღებული სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$N_1^0 = \frac{k_2}{k_1}, \quad N_2^0 = \frac{k_0}{k_2} . \quad (3.60)$$

შევისწავლოთ (3.58),(3.59) სისტემა სტაციონარული (3.60) ამონახსნის მიდამოში. ამისათვის საძიებელ რაოდენობებს მივცეთ მცირე წანაზარდები  $n_1(t)$  და  $n_2(t)$  ანუ (3.58),(3.59) განტოლებებში შევიტანოთ ახალი სიდიდეები და უკუვაგდოთ კვადრატული წევრები მცირე წანაზარდების მიმართ

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t) , \quad (3.61)$$

$$N_2(t) = N_2^0 + n_2(t). \quad (3.62)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\dot{n}_1(t) = -k_2 n_2 - \frac{k_1 k_0}{k_2} n_1, \quad (3.63)$$

$$\dot{n}(t)_2 = \frac{k_0 k_1}{k_2} n_1. \quad (3.64)$$

თუ გავაწარმოებთ (3.63) განტოლებას და შევიტანთ  $\dot{n}_2(t)$ -ს მნიშვნელობას (3.64) განტოლებიდან, მაშინ

$$\ddot{n}_1 + \frac{k_1 k_0}{k_2} \dot{n}_1 + k_0 k_1 n_1 = 0. \quad (3.65)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k_1 k_0}{k_2} = 2 \cdot \gamma \quad \text{და} \quad k_0 k_1 = \omega_0^2,$$

მაშინ განტოლება (3.65) გადაიწერება დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკური სახით:

$$\ddot{n}_1 + 2\gamma \dot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0. \quad (3.66)$$

ეს სისტემა კი უკვე შესწავლილი გვაქვს.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა გვხვდება სოციალურ სისტემებშიც. რაც იძლევა იმის საფუძველს, რომ ჩავუღრმავდეთ სხვადასხვა პროცესის აღწერას და ნაკლებად დავიხარჯოთ მიღებული მოდელების აღმწერი განტოლებების გამოკვლევაზე.

### 3.2.4. დემპფირებული, საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.67)$$

სადაც  $C(t)$  მოხმარებაა,  $I(t)$ -ინვესტიციები,  $X(t)$ -ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება:

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (3.68)$$

სადაც  $\beta(t)$  აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა,

$C(t)$  მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.69)$$

თუ (3.68) და (3.69) განტოლებებს შევიტანთ (3.67) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt. \quad (3.70)$$

განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (3.71)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (3.72)$$

რადგან  $\beta(t) \neq 0$ , (3.72) განტოლება შეიძლება გავეყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ შემდეგი სახის დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (3.73)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (3.73) განზოგადებულ განტოლებაში მოვახდენთ ჩასმას

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left( \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot \omega_0^2 X(t) \quad (3.74)$$

მივიღებთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = 0, \quad (3.75)$$

რომელიც უკვე შევისწავლეთ სხვა შინაარსის პროცესებისათვის.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც მოწმობს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. როგორ სისტემებს უწოდებენ დემპფირებულს?
2. როგორ გამოითვლება დემპფირებული საკუთრივი რხევითი სისტემის მიღევადი რხევების პერიოდი, რა არის ლოგარითმული დეკრემენტი და რისთვისაა საჭირო?
3. რა შემთხვევაში გვაქვს თავისუფალ, დემპფირებულ სისტემაში არაპერიოდული მიღევადი რხევები?
4. შეადგინეთ ელექტრული, დემპფირებული რხევითი სისტემის სქემა და ააგეთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.
5. მოიყვანეთ სოციალური დემპფირებული სისტემის მაგალითი და აჩვენეთ კოეფიციენტების რა მნიშვნელობებისთვისაა მოსალოდნელი მიღევადი რხევითი პროცესები და რა შინაარსი შეესაბამება ამ შემთხვევას.

### ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М. Наука, 1972.
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. ოზაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. ოზაძე თ., ოზაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2, თბილისი; სტუ, 2007.
12. ოზაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973



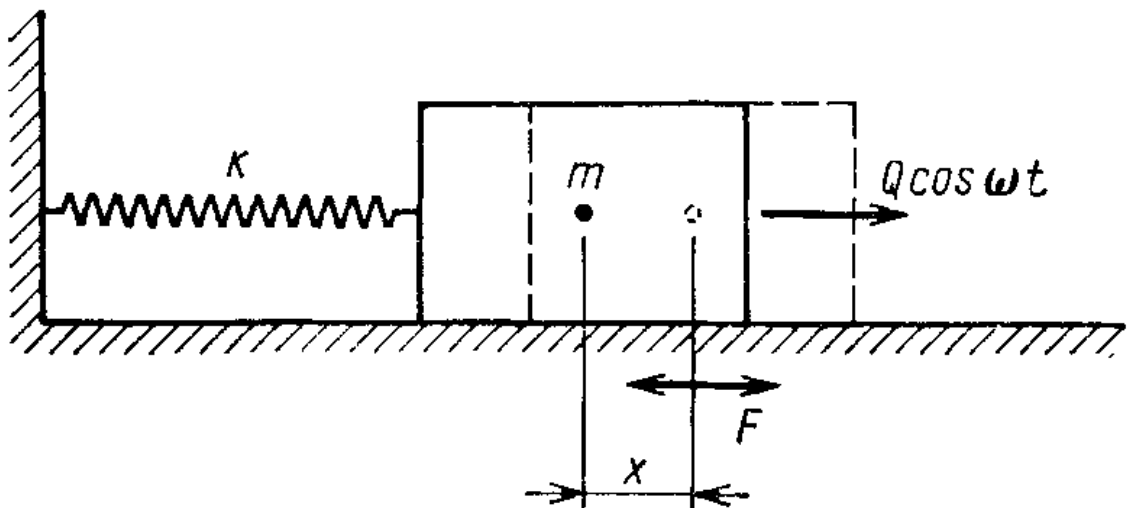
15. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევეითი სისტემები), ტ.4, თბილისი, 2009

### 3.3. იძულებითი რხევეითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

იძულებით რხევეით სისტემებში სისტემაზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ შესაბამის მათემატიკურ მოდელში რხევეით პროცესებს განსაზღვრავს დამატებითი წევრები, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

#### 3.3.1. იძულებითი მექანიკური რხევეითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ მექანიკური რხევეითი სისტემა იმ პირობებში, როცა გვაქვს მაიძულებელი ძალის მოქმედება.



ნახ. 3.9. იძულებითი მექანიკური რხევეითი სისტემა  $f = Q \cos \omega t$  მაიძულებელი პერიოდული ძალის მოქმედების პირობებში

გვაქვს რხევეითი სისტემა (ნახ.3.9), რომელიც შედგება  $m$  მასის სხეულისაგან, როცა ზამბარის სიხისტეა  $c$ , ხოლო ტვირთის ზედაპირთან ხახუნის კოეფიციენტი  $k$  ანუ  $F_{xax} = -kx$ . თუ

მოძრაობის გამომწვევი გარე პერიოდული ძალაა  $f = Q \cos \omega t$ , ადვილი მისახვედრია, რომ ნიუტონის დინამიკის კანონიდან გამომდინარე, შეგვიძლია შევადგინოთ განტოლება  $m$  მასის სხეულის  $x$  გადაადგილების შესასწავლად:

$$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x} + Q \cos(\omega \cdot t). \quad (3.76)$$

გავყოთ ამ განტოლების ორივე მხარე  $m$  მასის სიდიდეს და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{k}{m} = 2\gamma, \quad \frac{Q}{m} = H. \quad (3.77)$$

მაშინ განტოლება (3.76) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.78)$$

ამრიგად, მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

ახლა შევისწავლოთ ამ სისტემის თავისებურებები. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

- 1) იძულებითი რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული;
- 2) დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემა.

1) თუ რხევითი სისტემა არაა დემპფირებული, მაშინ  $\gamma = 0$  და დინამიკის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.79)$$

როგორც ცნობილია, წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნების ჯამისა

$$x = x_{\text{ertg var. zogadi}} + x_{\text{araertg. ker dzo}}. \quad (3.80)$$

(3.79) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ამონახსნისა

$$x_{ertg\ var.\ zogadi} = a \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (3.81)$$

სადაც  $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}.$

არაერთგვაროვანი (3.79) სისტემის კერძო ამონახსნი

$$x_{araertg.\ ker\ dzo} = h \cos(\omega \cdot t). \quad (3.82)$$

(3.82) გამოსახულება ჩავსვათ (3.79) განტოლებაში, მივიღებთ

$$-h\omega^2 \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 h \cos(\omega \cdot t) = H \cos(\omega \cdot t),$$

საიდანაც

$$h = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

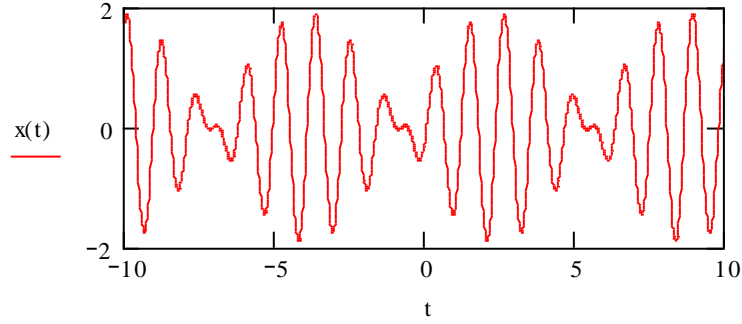
რაც ნიშნავს, რომ (3.79) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს აქვს სახე:

$$x_{araertg.\ ker\ dzo} = \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (3.83)$$

მივიღეთ არაერთგვაროვანი (3.79) განტოლების ზოგადი ამონახსნი (3.81), რომელიც გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad (3.84)$$

ფორმულა (3.84) ძალაშია, თუ  $\omega_0 \neq \omega$ . ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს ორი სხვადასხვა სიხშირის რხევათა ჯამი. სისტემის დინამიკა გამოსახულია ნახ. 3.10 - ზე.



ნახ. 3.10. ორი სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევის ჯამი

თუ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე  $\omega_0$  ემთხვევა, მაიძულებელი პერიოდული ძალის რხევის  $\omega$  სიხშირეს გვექნება რეზონანსი.

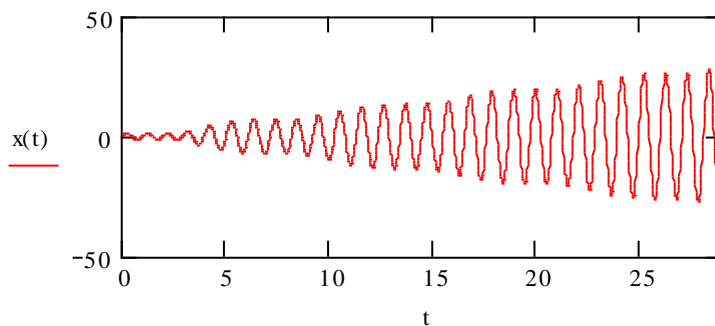
ასეთ შემთხვევაში (3.79) განტოლების ზოგადი ამონახსნის გამოსათვლელად (3.84) ამონახსნი გადაიწერება სახით:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot (\cos(\omega \cdot t) - \cos(\omega_0 \cdot t)). \quad (3.85)$$

თუ (3.85) ფორმულაში გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\omega \rightarrow \omega_0$ , ლობიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ ზოგად ამონახსნს:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \cdot t - \varphi) + \frac{H}{2\omega_0} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (3.86)$$

როგორც (3.86) ამონახსნიდან ჩანს, რეზონანსის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდა წრფივი კანონით იზრდება (ნახ. 3.11).



ნახ. 3.11. რეზონანსული რხევების დინამიკა

თუ მაიძულებელი ძალის რხევის სიხშირე ახლოსაა სისტემის საკუთრივი რხევების სიხშირესთან, ადგილი აქვს რხევების ცემას ორი მახლობელი სიხშირით.

2) ახლა განვიხილოთ წრფივი, დემპფირებული იძულებითი რხევითი სისტემის შემთხვევა. გვაქვს მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = H \cos(\omega \cdot t). \quad (3.87)$$

ვიპოვოთ ამ განტოლების კერძო ამონახსნი

$$x = \xi \cos(\omega \cdot t) + \eta \sin(\omega \cdot t). \quad (3.88)$$

(3.88) ფორმულა შევიტანოთ (3.87) განტოლებაში, მაშინ  $\xi$  და  $\eta$  კოეფიციენტების გამოსათვლელად მივიღებთ განტოლებას:

$$-\xi \cdot \omega^2 \cos(\omega \cdot t) - \eta \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \xi \cdot \cos(\omega \cdot t) + \omega_0^2 \cdot \eta \cdot \sin(\omega \cdot t) = H \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (3.89)$$

თუ (3.89) განტოლების, კოეფიციენტებს გავუტოლებთ შესაბამის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან, მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{aligned} -\xi \cdot \omega^2 + 2\gamma \cdot \eta \cdot \omega + \xi \cdot \omega_0^2 &= H, \\ -\eta \omega^2 - 2\gamma \cdot \xi \cdot \omega + \omega_0^2 \cdot \eta &= 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$$\xi = \frac{H \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2 \right]}, \quad (3.91)$$

$$\eta = \frac{2\gamma \cdot \omega \cdot H}{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2 \right]}. \quad (3.92)$$

გამოსახულებაში (3.88) შემოვიღოთ დამატებითი კუთხე, მაშინ (3.91)-(3.92) თანაფარდობების გათვალისწინებით, მივიღებთ (3.87) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს:

$$x_{\text{არაერთგვაროვანი}} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{H}{\sqrt{\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega^2 \right]}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi^*). \quad (3.93)$$

შევისწავლეთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემების შესწავლის დროს გვექონდა სამი შემთხვევა:

ა) თუ  $\gamma < \omega_0$ , მაშინ  $x_{ertg\ var} = A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  ;

ბ) თუ  $\gamma > \omega_0$ , მაშინ  $x_{ertg\ var} = C_1 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \cdot t} + C_2 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \cdot t}$  ;

გ) თუ  $\gamma = \omega_0$ , მაშინ  $x_{ertg\ var} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-\gamma \cdot t}$ .

მაშასადამე, არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:

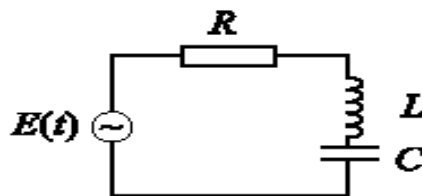
$$x(t) = x_{araertgv\ ker\ dzo} + x_{ertg\ var} \cdot \tag{3.94}$$

ცხადია, რომ აქაც გვექნება სამი სხვადასხვა შემთხვევა.

**P.S.** დავალება სტუდენტებს: **Mathcad** -ის ბაზაზე შეისწავლეთ ამ სამი შემთხვევის შესაბამისი რხევითი სისტემების დინამიკა.

### 3.3.2. იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესი რხევით კონტურში (ნახ. 3.12):



ნახ. 3.12. რხევითი კონტური ელექტრული დენის წყაროთი, რომლის ელექტრომამოძრავებელი ძალაა  $E(t)$

კირხოფის კანონი ამ წრედისათვის

$$U_L + U_r + U_c = L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t), \quad (3.95)$$

სადაც  $Q$  არის კონდენსატორის მუხტის სიდიდე,  $U_c$  – კონდენსატორზე მოდებული ძაბვა.  $U_c = \frac{Q}{C}$ .  $I$  – დენის ძალა,  $U_L$  – კოჭაზე მოდებული ძაბვა, ამასთან  $U_L = L \frac{dI}{dt}$ . ძაბვის ვარდნა  $R$  წინაღობაზე  $U_r = R \cdot I$ ;  $E(t)$  ელექტრული დენის მამოძრავებელი ძალაა. მაშასადამე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.96)$$

თუ (3.96) ფორმულაში გავითვალისწინებთ, რომ დენის ძალა მუხტების მოწესრიგებული ნაკადია ანუ

$$I = \dot{Q}, \quad (3.97)$$

მაშინ, მივიღებთ დენის წყაროს შემცველი ელექტრული რხევითი კონტურის დინამიკის განტოლებას

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.98)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2 \cdot \gamma = \frac{R}{L}, \quad F(t) = \frac{E(t)}{L}, \quad (3.99)$$

მაშინ (3.98) განტოლება მიიღებს იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის სახეს, რომელზეც უკვე ვისაუბრეთ:

$$\ddot{Q} + 2\gamma \cdot \dot{Q} + \omega_0^2 \cdot Q = F(t). \quad (3.100)$$

**P.C.** როგორც ვხედავთ, იძულებითი, დემპფირებული, წრფივი ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ემთხვევა შესაბამისი მექანიკური სისტემის მათემატიკურ მოდელს.

### 3.3.3. იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ სოციუმის დინამიკა დროში. ვთქვათ,  $N(t)$  არის სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონი დროში.  $m$  ამ სოციუმის საარსებო არეალია, ხოლო  $f_1(t)$  სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა. ამიტომ, სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონის საპოვნელად განვიხილოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება

$$m\ddot{N} = f_1(t). \quad (3.101)$$

ცხადია, რომ სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა სამი ნაწილისაგან შედგება: ა) დადებითი წევრი, რომელიც გამოწვეულია გარე მიგრაციით მოცემულ სოციუმში  $f(t)$ ;

ბ)  $-kN$  უარყოფითი წევრით, რაც შეესაბამება სოციუმის შემცირების გამომწვევ ძალას ბუნებრივი სიკვდილიანობის გამო.  $k$  შესაბამისი სიკვდილიანობის კოეფიციენტია; გ)  $-2\lambda\dot{N}$  ძალაა, რომელიც იწვევს სოციუმის შემცირებას სხვა სოციუმებთან ბრძოლაში მარცხის გამო. ეს ნიშნავს, რომ

$$f_1(t) = f_2(t) - 2\lambda\dot{N} - kN. \quad (3.102)$$

თუ (3.102) გამოსახულებას შევიტანთ (3.101)-ში, მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$m\ddot{N} + 2\lambda\dot{N} + kN = f_2(t). \quad (3.103)$$

ამ განტოლების  $m$  არეალის სიდიდეზე გაყოფით და შესაბამისი აღნიშვნებით მივიღებთ:

$$\frac{\lambda}{m} = \gamma, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{f_2(t)}{m} = f(t). \quad (3.104)$$

მაშინ განტოლება (3.103) გადაიწერება შემდეგი სახით:



$$\ddot{N} + 2\gamma \dot{N} + \omega_0^2 N = f(t). \quad (3.105)$$

ეს განტოლება ემთხვევა წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს. რაც იმას ნიშნავს, რომ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და აღწერს სრულიად სხვადასხვა შინაარსის პროცესებს.

### 3.3.4. იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.106)$$

სადაც  $C(t)$  მოხმარებაა,  $I(t)$  - ინვესტიციები,  $X(t)$  - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (3.107)$$

სადაც  $\beta(t)$  აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა,  $C(t)$  მოხმარება არის ეროვნული შემოსავლის ფუნქცია და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau. \quad (3.108)$$

თუ (3.107) და (3.108) თანაფარდობებს შევიტანთ (3.106) კეინსის წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau), \tau] dt \quad (3.109)$$

განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t), t] \quad (3.110)$$

ანუ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1)\dot{X}(t) + F[X(t), t] = 0. \quad (3.111)$$

რადგან  $\beta(t) \neq 0$ , (3.111) განტოლება შეიძლება გავეყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[X(t), t] = 0. \quad (3.112)$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის განზოგადებულ განტოლებაში (3.112) მოვახდენთ ჩასმას (3.113),

$$\beta(t) = e^{2\gamma t} \cdot \left( \frac{e^{-2\gamma t} - 1}{2\gamma} \right), \quad F[X(t), t] = \beta(t) \cdot [\omega_0^2 X(t) - f(t)]. \quad (3.113)$$

მივიღებთ:

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = f(t). \quad (3.114)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი, რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც იმას მოწმობს, რომ დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი პერიოდული, არა აუცილებლად ჰარმონიული ფუნქციაა.
2. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი, საზოგადოდ - არაპერიოდული ფუნქციაა.

3. შეადგინეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის გამოსაკვლევი პროგრამა Mathcad -ის ბაზაზე.
4. რა თავისებურებები ახასიათებს არადემპფირებულ, იძულებით რხევით სისტემებს?
5. რით განსხვავდება იძულებითი, წრფივი, რეზონანსული დემპფირებული და არადემპფირებული რხევითი სისტემები?

### ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М. Наука, 1972.
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი.,

თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2, თბილისი; სტუ, 2007.

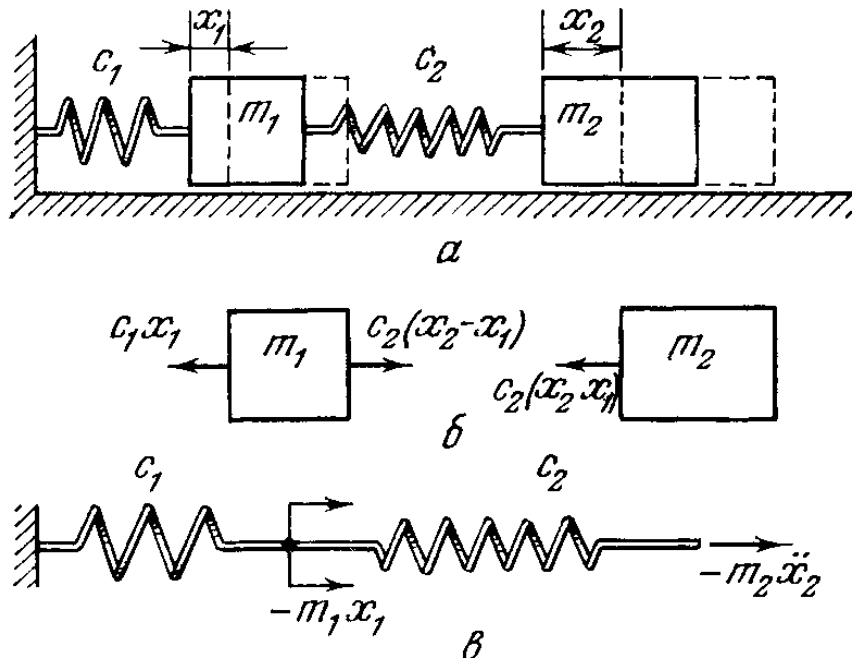
12. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика.Т.1. М.: Наука, 1973
14. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი სისტემები), ტ.4, თბილისი, 2009

### **3.4. ბმული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირება**

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში საქმე გვაქვს ორი ან მეტი რაოდენობის რხევით სისტემასთან, რომლებიც ერთმანეთზე ახდენენ გავლენას. თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა იქნება იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

#### **3.4.1. ბმული მექანიკური რხევითი პროცესების მატემატიკური მოდელირება**

განვიხილოთ წრფივი, ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითები (ნახ. 3.13, 3.14).



ნახ. 3.13. ბმული მექანიკური რხევითი სისტემის მაგალითი

ა) ეს სისტემა შედგება ორი  $m_1$  და  $m_2$  მასის სხეულებისაგან, რომლებიც კედელთან და ერთმანეთთან დაკავშირებულია, შესაბამისად,  $c_1$  და  $c_2$  სიხისტის მქონე ზამბარებით და ჰუკის კანონს ემორჩილება.

პირველი სხეულის საწყისი მდგომარეობიდან გადაადგილება აღვნიშნოთ  $x_1$ , ხოლო მეორე სხეულის გადაადგილება, შესაბამისად,  $x_2$ . მაშინ, ნიუტონის მეორე კანონიდან გამომდინარე, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot (x_2 - x_1), \quad (3.115)$$

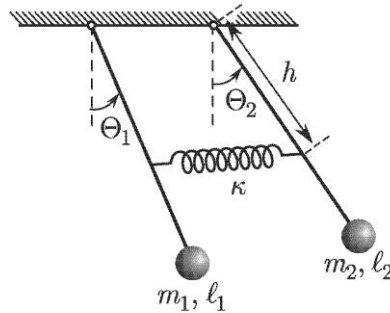
$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (x_2 - x_1). \quad (3.116)$$

$$x_1(0) = x_1^0; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_1^0, \quad (3.117)$$

$$x_2(0) = x_2^0; \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_2^0. \quad (3.118)$$

**დავალება სტუდენტებს:** Mathcad-ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა.

ბ) ახლა განვიხილოთ ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება ერთმანეთთან ორი ზამბარით დაკავშირებული მათემატიკური ქანქარისაგან (ნახ. 3.14). თუ დავწერთ ნიუტონის დინამიკურ განტოლებას თითოეული ქანქარისათვის, ზამბარიანი კავშირის გათვალისწინებით და მოვახდენთ სტანდარტულ გარდაქმნებს, მივიღებთ ბმული მექანიკური (ნახ. 3.14) რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს.



ნახ. 3.14. ბმული მექანიკური სისტემა ზამბარით დაკავშირებული ორი ქანქარით

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\ddot{\Theta}_1 + \omega_{01}^2 \cdot \Theta_1 = -\sigma_1^2 \cdot (\Theta_1 - \Theta_2), \quad (3.119)$$

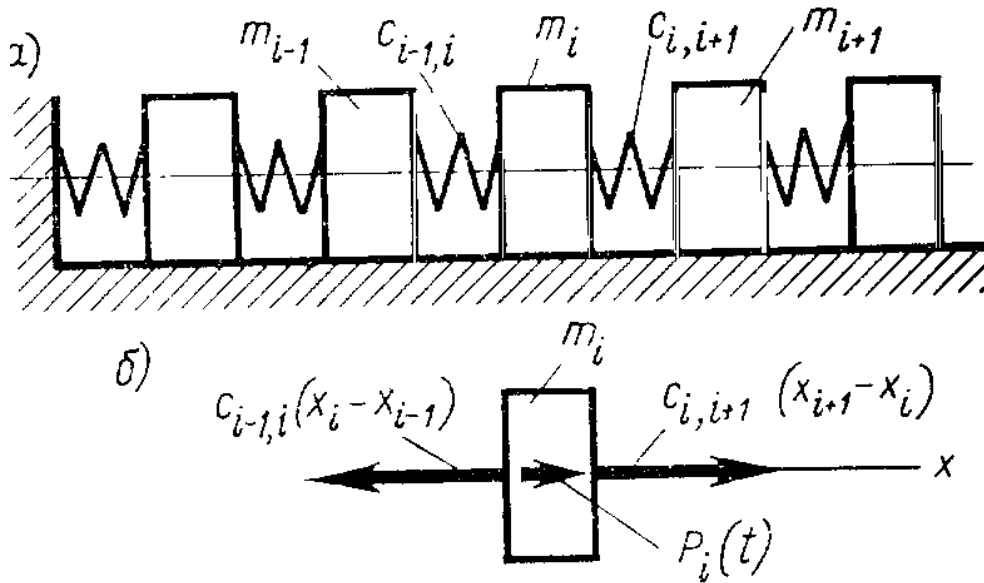
$$\ddot{\Theta}_2 + \omega_{02}^2 \cdot \Theta_2 = -\sigma_2^2 \cdot (\Theta_2 - \Theta_1), \quad (3.120)$$

სადაც  $\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}$  და  $\omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}$  ქანქარების საკუთარი რხევის სიხშირეებია, ხოლო  $\sigma_1$  და  $\sigma_2$  კოეფიციენტები ასახავს ქანქარების ურთიერთქმედებას, რომელიც განპირობებულია  $k$  სიხისტის მქონე ზამბარით

$$\sigma_1^2 = \frac{kh^2}{m_1 \cdot l_1}, \quad \sigma_2^2 = \frac{kh^2}{m_2 \cdot l_2}. \quad (3.121)$$

**დავალება სტუდენტებს:** Mathcad-ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა.

გ) განვიხილოთ ბმული მექანიკური სისტემა, შედგენილი  $N$  რხევითი სისტემისაგან (ნახ. 3.15).



ნახ. 3.15.  $N$  რხევითი სისტემისაგან შედგენილი ბმული მექანიკური რხევითი სისტემა

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ბმული, მექანიკური რხევითი სისტემა, რომელიც შედგება  $N$  რხევითი სისტემისაგან. თითოეული რხევითი სისტემა შედგება შესაბამისი  $m_i$  მასის სხეულისაგან და ეს სხეულები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ზამბარებით ისე, რომ  $m_i$  და  $m_{i+1}$  მასის სხეულები დაკავშირებულია სიხისტის მქონე  $c_{i,i+1}$  დრეკადი ზამბარით. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ჩავწერთ ნიუტონის დინამიკის განტოლებას  $m_i$  მასის სხეულისათვის ამ სისტემაში, მივიღებთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = -c_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) + c_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i) + F_i(t), \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.122)$$

სადაც  $F_i(t)$  არის  $i$ -ურ სხეულზე მოქმედი გარე ძალა.

**P.S.** როცა უნდათ შეისწავლონ დრეკადი მყარი სხეულის რხევები, მას განიხილავენ, როგორც  $N$  ერთნაირი მასის სხეულს, დაკავშირებულს ერთნაირი  $c$  სიხისტის ზამბარებით. მაშინ მყარი, დრეკადი სხეულის რხევები განიხილება, როგორც შესაბამისი

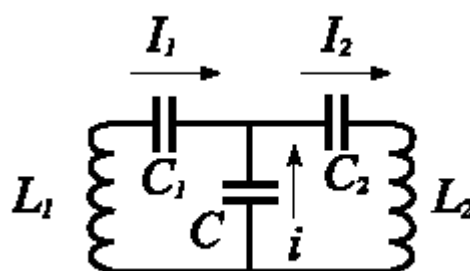
ბმული, წრფივი, დისკრეტული, მექანიკური რხევითი სისტემის რხევები და შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე:

$$m \cdot \ddot{x}_i = c \cdot (-2 \cdot x_i + x_{i-1} + x_{i+1}), \quad i = \overline{1, N} \quad (3.123)$$

**დავალება სტუდენტებს:** Mathcad-ის ბაზაზე, შეისწავლეთ ამ მათემატიკური მოდელის შესაბამისი ბმული რხევითი სისტემის დინამიკა, როცა  $N = 3$ .

### 3.4.2. ბმული ელექტრული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

განვიხილოთ, ბმული რხევითი ელექტრული სისტემა, რომლის შედგენილობაში კონდენსატორით ერთმანეთთან დაკავშირებული ორი რხევითი კონტურია.



ნახ. 3.16. ბმული ელექტრული რხევითი სისტემა

ჩავწეროთ კირჰოფის კანონები ნახ. 3.16-ზე გამოსახული რხევითი კონტურებისათვის

$$i = I_1 - I_2 \Rightarrow \dot{q} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 \Rightarrow q = q_1 - q_2. \quad (3.124)$$

$$L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot q_1 + \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (3.125)$$

$$L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \cdot q_2 - \frac{1}{C} \cdot q = 0, \quad (3.126)$$

სადაც  $I_1 = \dot{q}_1$  და  $I_2 = \dot{q}_2$ .



(3.125) და (3.126) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1 L_1} q_1 = \frac{1}{C L_1} (q_2 - q_1), \quad (3.127)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2 L_2} q_2 = -\frac{1}{C L_2} (q_2 - q_1). \quad (3.128)$$

**P.S.** ბმული რხევითი ელექტრული სისტემები გამოიყენება ელექტროტექნიკაში, სიგნალების გასაფილტრად.

### 3.4.3. ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ, ორი ურთიერთმოქმედი სოციალური ჯგუფი, რომელთა მოცულობებს აღვნიშნავთ, შესაბამისად,  $N_1$  და  $N_2$ . ამ ორი სოციუმის მოქმედების არეალები აღვნიშნოთ  $m_1$  და  $m_2$ . თუ გავითვალისწინებთ, რომ სოციალური ჯგუფები ურთიერთქმედებს ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალებით, რომლებიც პირდაპირპროპორციულია მათი მოცულობების სხვაობისა ანუ  $k_2 \cdot (N_2 - N_1)$ ; ამასთან, თუ ჩავთვლით, რომ ჯგუფების მოქმედების  $m_1$  და  $m_2$  არეალები შეზღუდულია და, მაშასადამე, რაც უფრო გაიზრდება სოციუმის  $N_1$  და  $N_2$  მოცულობები, მით უფრო ნაკლები იქნება ამ სოციუმის ზრდის სიჩქარე, მივიღებთ ბმული სოციალური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{N}_1 = -k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot (N_2 - N_1), \quad (3.129)$$

$$m_2 \cdot \ddot{N}_2 = -k_3 \cdot N_2 - k_2 \cdot (N_2 - N_1). \quad (3.130)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა.

### 3.4.4. ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ორი, ურთიერთკონკურენტუნარიანი პროდუქციის, ბაზარზე რეალიზებულ მოცულობათა  $X_1$  და  $X_2$  დინამიკა. ცხადია, რაც უფრო დიდია რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა, მით უფრო ნაკლებია რეალიზებული პროდუქციის ზრდის სიჩქარის ცვლილება, ბაზრის გაჯერების გამო. ასევე, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია მოცულობათა სხვაობისა. ამავე დროს, მოქმედი ძალები სიდიდით ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო. თუ  $m_1$  და  $m_2$  შესაბამისი პროდუქციის ფასებია, მივიღებთ ბმული ეკონომი-კური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{X}_1 = -k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot (X_2 - X_1), \quad (3.131)$$

$$m_2 \cdot \ddot{X}_2 = -k_3 \cdot X_2 - k_2 \cdot (X_2 - X_1). \quad (3.132)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა. ამ მოდელის აგება შესაძლებელია ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზეც.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. განსაზღვრეთ წრფივი, ბმული რხევითი სისტემა და ააგეთ შესაბამისი მექანიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.
2. გამოიკვლიეთ ბმული რხევითი სისტემა Mathcad პროგრამის საშუალებით.
3. ააგეთ ბმული რხევითი სოციალური სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
4. ააგეთ ბმული რხევითი ეკონომიკური სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.

5. ააგეთ ბმული რხევითი ფსიქოლოგიური სისტემის მათემატიკური მოდელი.

### ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М. Наука, 1972.
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2, თბილისი; სტუ, 2007.
12. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008

13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973
15. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელების კურსი (რხევითი სისტემები), ტ.4, თბილისი, 2009

### 3.5. რხევითი სისტემების მოდელების ვარიაციული მეთოდები

მათემატიკური მოდელების ასაგებად იყენებენ უნივერსალურ ვარიაციულ პრინციპებს, რომლებიც ემყარება საუკუნოვან პრაქტიკულ გამოცდილებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. ცნობილია, რომ ბუნება ერთიანია ანუ მეცნიერების ერთ სფეროში მიმდინარე პროცესები ანალოგიურია მეორე სფეროში მიმდინარე პროცესებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ პროცესების მსგავსების კრიტერიუმები, რომ შეგვიძლია ფიზიკაში დამუშავებული მოდელები გამოვიყენოთ სხვადასხვა ინტელექტუალურ სფეროში.

#### 3.5.1. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.

თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლისთვის  $Q(t)$  მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატია. შესაბამისად,  $Q$  წარმოადგენს განმსაზღვრელი პარამეტრის ცვლილების სიჩქარეს. განვსაზღვროთ დინამიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც სხვაობა მის კინეტიკურ და პოტენციურ ენერგიებს შორის

$$L(Q, \frac{dQ}{dt}) = E_k - E_p. \quad (3.133)$$

სადაც  $E_k$  და  $E_p$ , შესაბამისად, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიებია.

განვიხილოთ სიდიდე, რომელსაც მოქმედებას უწოდებენ და ჩაწერენ ფორმულით:

$$S(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (3.134)$$

ამ სიდიდეზეა დამოკიდებული სისტემის ყოფაქცევა. ჰამილტონის უნივერსალური პრინციპი ამბობს, თუ სისტემა რეალურია, მაშინ  $Q(t)$  არის  $S(Q)$  ფუნქციონალის სტაციონარული ფუნქცია ანუ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(Q + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.135)$$

ჰამილტონის პრინციპში მოქმედი  $\varphi(t)$  ფუნქცია საცდელი ფუნქციაა, რომელიც ნულის ტოლ ხდება დროის  $t_1$  და  $t_2$  მომენტებში.  $\varepsilon \cdot \varphi(t)$  ფუნქციას  $Q(t)$  ფუნქციის ვარიაცია ეწოდება. ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა ავაგოთ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ სისტემის თავისუფალი რხევები, როცა მოცემული გვაქვს ზამბარა  $m$  მასის ტვირთით. ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი  $c$ . მაშინ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \cdot \frac{X^2}{2}. \quad (3.136)$$

მოქმედებისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$S(X) = \int_{t_1}^{t_2} L(X, \frac{dX}{dt}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - \frac{c}{2} X^2 \right] dt. \quad (3.137)$$

გამოვითვალოთ მოქმედება  $\varepsilon \cdot \varphi(t)$  ვარიაციის შემთხვევაში

$$S(X + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m\left(\frac{d(X + \varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2}{2} - \frac{c}{2} (X + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt. \quad (3.138)$$

გავაწარმოთ ეს ფუნქცია  $\varepsilon$  ცვლადით, მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - c \{ X^2 + 2\varepsilon X\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left\{ \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - c \{ X\varphi + \varepsilon\varphi^2 \} \right] dt . \end{aligned} \quad (3.139)$$

თუ დავუშვებთ, რომ  $\varepsilon = 0$ , მაშინ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{dX}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - cX\varphi \right] dt = 0 . \quad (3.140)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით და იმის გათვალისწინებით, რომ  $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$ , მივიღებთ

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[ m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX \right] dt = 0 . \quad (3.141)$$

რადგან  $\varphi(t)$  ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + cX = 0 . \quad (3.142)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} , \quad (3.143)$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის კლასიკურ მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 . \quad (3.144)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ვარიაციულ მეთოდს თავისუფალი რხევითი სისტემისათვის მიყვავართ იგივე მათემატიკურ მოდელამდე.

### 3.5.2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედებს მაიძულებელი ძალა  $F_0$ , იცვლება პოტენციური ენერჯიის მხოლოდ ფორმულა

$$E_p = c \frac{X^2}{2} + \int_0^X F_0 dX = c \frac{X^2}{2} + F_0 X, \quad (3.145)$$

ხოლო კინეტიკური ენერჯიის გამოსახულება უცვლელი რჩება

$$E_k = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2}. \quad (3.146)$$

შესაბამის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:

$$L = m \frac{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \frac{X^2}{2} - F_0 X. \quad (3.147)$$

თუ განვახორციელებთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ გარდაქმნებს, მაშინ მივიღებთ იძულებითი, არადემპფირებული, რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -cX + F_0. \quad (3.148)$$

**დავალება სტუდენტებს:** ააგეთ იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ვარიაციული მეთოდით.

**ამოცანები და საგარჯიშოები**

1. ჩამოაყალიბეთ ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.
2. ააგეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ბაზაზე.
3. ააგეთ იძულებითი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის პრინციპის ბაზაზე.
4. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის კავშირი.

5. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის განმასხვავებელი თვისებები.

## ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М. Наука, 1972.
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. ოზაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. ოზაძე თ., ოზაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2, თბილისი; სტუ, 2007.
12. ოზაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008



13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика. Т.1. М.: Наука, 1973
15. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი სისტემები), ტ.4, თბილისი, 2009

### 3.6. არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

არაწრფივი რხევითი სისტემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები აღიწერება არაწრფივი განტოლებებით. რეალური სისტემები არაწრფივია და მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით შეიძლება შეიცვალოს წრფივი სისტემებით. წრფივი რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხები უკვე განვიხილეთ და ეხლა შევისწავლოთ არაწრფივი სისტემები.

#### 3.6.1. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

განვიხილოთ თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი სისტემა. ამ შემთხვევაში არაწრფივია აღმდგენელი ძალის დამოკიდებულება განმსაზღვრელ პარამეტრზე ანუ გვაქვს  $f(x)$  დამოკიდებულება. შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = 0. \quad (3.149)$$

ამ განტოლების ამოხსნა კვადრატურებში, საზოგადოდ, შეუძლებელია. შესაძლებელია ამ განტოლების ზოგადი თვისებების შესწავლა ენერგეტიკული მეთოდის მეშვეობით.

(3.149) განტოლება გავამრავლოთ  $\dot{x}$  სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ, მაშინ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \int f(x) \cdot \dot{x} dt = const = E_0. \quad (3.150)$$

ამასთან,

$$\int f(x) \cdot \dot{x} dt = \int f(x) dx = E_{pot}, \quad (3.151)$$

ე.ი. (3.150) განტოლება წარმოადგენს ენერჯიის შენახვის კანონს:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0. \quad (3.152)$$

ცხადია, (3.150) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = E_0 - E_{pot}. \quad (3.153)$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ რხევის სიჩქარე

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}. \quad (3.154)$$

ფაზურ სიბრტყეზე  $x_0$  ვერტილიდან  $x$  ვერტილამდე გადაადგილების დრო გამოითვლება ფორმულით:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (3.155)$$

შესაბამისად, რხევის პერიოდის გამოსათვლელად მიიღება ფორმულა:

$$T = 2 \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}. \quad (3.156)$$

ფორმულა (3.156) მართებულია მხოლოდ შეკრული ფაზური ტრაექტორიებისათვის.

### 3.6.2. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

განვიხილოთ რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

$$f(x) = h \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} h, & \text{if } x > 0 \\ -h, & \text{if } x < 0 \end{cases}. \quad (3.157)$$

ასეთი სიტუაციაა რელეურ მართვის სისტემებში.

ამ შემთხვევაში ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ცალ-ცალკე იმ შემთხვევებისათვის, როცა  $x > 0$  და როცა  $x < 0$ .

როცა  $x > 0$ , მაშინ

$$m \cdot \ddot{x} = -f(x) = -h, \quad (3.158)$$

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} \cdot t + v_0, \quad (3.159)$$

$$x = -\frac{h}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0. \quad (3.160)$$

თუ ჩავთვლით, რომ რხევითი სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება ზღვრულ მდებარეობაში, მივიღებთ საწყის პირობებს

$$x_0(0) = A, \quad (3.161)$$

$$v_0(0) = 0. \quad (3.162)$$

თუ (3.159) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ  $t$  პარამეტრს და ჩავსვამთ (3.161) ტოლობაში, მივიღებთ ფაზური ტრაექტორიების  $(x; \dot{x})$  განტოლებას

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A-x)}. \quad (3.163)$$

### 3.6.3. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

დემპფირებისას რხევითი სისტემა ხარჯავს ენერგიას წინაღობის ძალის დაძლევაზე. შესაბამის მათემატიკურ მოდელში წინაღობის ძალა დამოკიდებულია განმსაზღვრელი პარამეტრის  $x$  წარმოებულზე.

ზოგადად დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\ddot{x} + g(x) + f(x) = 0. \quad (3.164)$$

ზოგჯერ, დემპფირების და აღმდგენი ძალები ისე მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მათი განცალკევება არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (3.165)$$

შევადგინოთ ამ სისტემის შესაბამისი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა  $\dot{x} = v$ , მაშინ  $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$ . აქედან გამომდინარე, (3.165) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v}. \quad (3.166)$$

ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.

ახლა განვიხილოთ ამ სისტემის შესაბამისი ენერგეტიკული განტოლება. ამ განტოლების მისაღებად, გავამრავლოთ (3.164) განტოლება  $x$  სიდიდეზე და ვაინტეგრროთ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^t g(x) \cdot x dt + \int_0^x f(x)dx = E_0. \quad (3.167)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $E_D$  დემპფირების ძალების გადალახვაზე დახარჯული ენერჯისათვის, მივიღებთ ენერჯის განტოლებას

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - E_D. \quad (3.168)$$

ამ განტოლებიდან ნათლად ჩანს, რომ დემპფირებულ თავისუფალ რხევით სისტემაში ადგილი აქვს ენერჯის დისიპაციას.

### 3.6.4. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით

მყარ სხეულებს შორის მშრალ ხახუნს ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთმანეთს ეხება ორი სხეული, რომლებიც გადაადგილდება ერთმანეთის მიმართ ისე, რომ მათ შორის არ არის თხევადი მასა. ამ შემთხვევაში, ხახუნის ძალები თითქმის არ არის დამოკიდებული გადაადგილების სიჩქარეზე და მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

უმეტეს შემთხვევაში, მშრალი ხახუნის ძალა მიახლოებით შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$K_r = \begin{cases} -r & \text{if } v > 0, \\ +r & \text{if } v < 0. \end{cases} \quad (3.169)$$

ასე, რომ

$$K_r = -r \cdot \operatorname{sgn} \dot{x}. \quad (3.170)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ პროცესის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + f(x) = 0. \quad (3.171)$$

ეს განტოლება ცალ-ცალკე განიხილება იმ შემთხვევებისათვის, როცა  $v > 0$  და  $v < 0$ .

თუ  $v > 0$ , მაშინ (3.171) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$m \cdot \ddot{x} + f(x) = -r. \quad (3.172)$$

მისი შესაბამისი ენერგეტიკულ განტოლებას აქვს სახე:

$$E_{kin} + E_{pot} = E_0 - r \cdot x = \overline{E_0}. \quad (3.173)$$

ამ რხევითი სისტემისათვის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება შემდეგია:

$$v = + \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 - r \cdot x - E_{pot})}, \quad \text{თუ } v > 0, \quad (3.174)$$

$$v = - \sqrt{\frac{2}{m} \cdot (E_0 + r \cdot x - E_{pot})}, \quad \text{თუ } v < 0. \quad (3.175)$$

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. გამოიყვანეთ არადემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერგეტიკული განტოლება.
2. გამოიყვანეთ თავისუფალი, რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება, ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალის შემთხვევაში.
3. შეადგინეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.

4. გამოიყვანეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ტრაექტორიების განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე მშრალი ხახუნის შემთხვევაში.
5. გამოიყვანეთ არაწრფივი სისტემის ტრაექტორიების ზოგადი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე.

### ლიტერატურა

- 1.ობგაძე თ.მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები),ტ.1.თბილისი: სტუ, 2006
- 2.ობგაძე თ, ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი:სტუ, 2008
- 4.Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001
- 5.Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества. Москва, 2005
- 6.Магнус К. Колебания. Пер. с англ. Москва: Мир, 1982
- 7.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4. თბილისი:სტუ, 2010

### 3.7. ავტორხევითი სისტემები

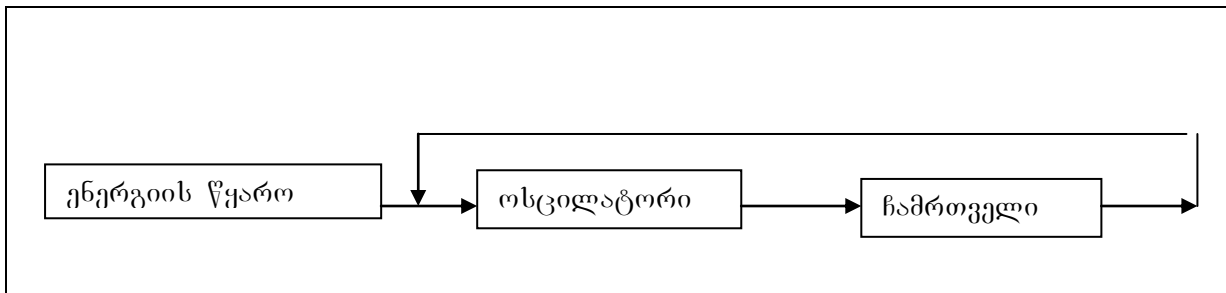
**ავტორხევები** - განსაკუთრებული ტიპის რხევებია. ამ ტიპის რხევებისთვის დამახასიათებელია ენერჯის წყაროს არსებობა, რომელიც ავსებს სისტემის ენერგეტიკულ დანაკარგებს.

### 3.7.1. ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები

სტრუქტურისა და მოქმედების პრინციპის მიხედვით განასხვავებენ ავტორხევითი სისტემების ორ ტიპს:

1. ოსცილატორული სისტემა;
2. დაგროვებითი სისტემა.

ოსცილატორული ტიპის სისტემისათვის დამახასიათებელია შემდეგი სტრუქტურული სქემა (ნახ. 3.17):



ნახ. 3.17. ოსცილატორული ტიპის ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

ოსცილატორული ტიპის სისტემებში ჩამრთველი მოქმედებს, როგორც უკუკავშირი რხევით სისტემასა და ენერგიის წყაროს შორის, რომელიც ჩაირთვება საჭირო მომენტში და სისტემას საჭირო ენერგიით ამარაგებს.

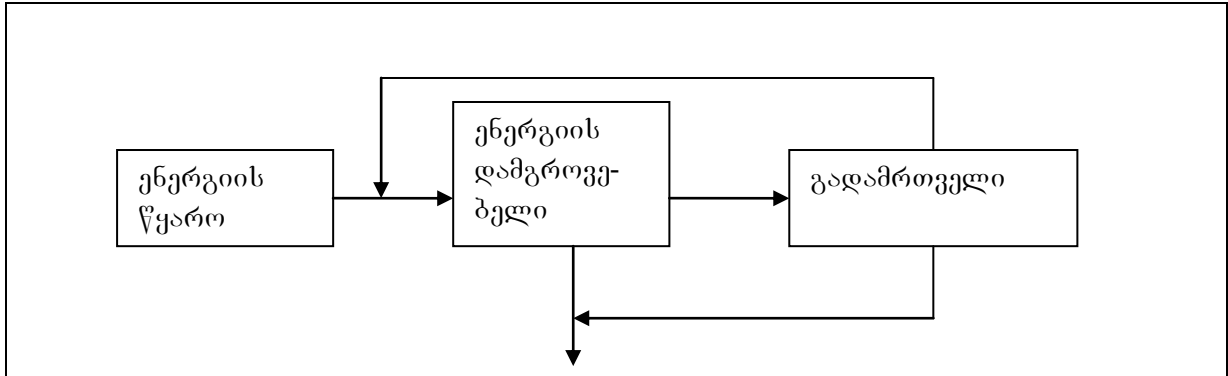
ცხრილში მოცემულია შესაბამისი ტიპის პრაქტიკული მაგალითები.

#### ცხრილი 3.1

№	ავტორხევითი სისტემა	ენერგიის წყარო	ოსცილატორი	უკუკავშირის საშუალება
1	ზარი	ელექტრობატარეა	ჩაქუჩი	კონტაქტი
2	საათი	დეფორმირებადი ზამბარა	ბალანსირი	ჩამომშვები რეგულატორი
3	ვილენჩელოს სიმი	მოდრავი ხეში	სიმი	მშრალი ხახუნი ქრობადი მახასიათებლით
4	თვითმფრინავის მზიდი ფრთა	ჰაერის ნაკადი	დრეკადი ფრთა	ჰაერის ნაკადისა და ფრთის ურთიერთქმედების არასტაციონარული ძალები



დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა მოცემულია ნახ. 3.18-ზე.

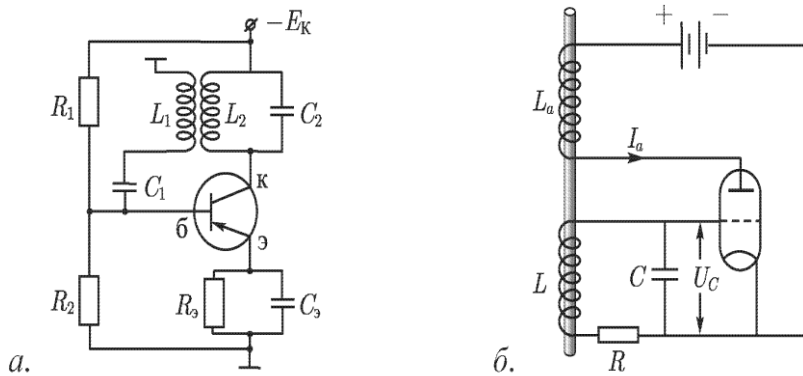


ნახ. 3.18. დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემის სტრუქტურული სქემა

დაგროვებითი ავტორხევითი სისტემა, ხშირად, ასრულებს წყვეტად(დისკრეტულ) რხევებს.

### 3.7.2. ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის სქემა.



ნახ. 3.19. ვან-დერ-პოლის გენერატორის სქემა

ა) ტრანზისტორზე; ბ) ელექტრონულ ლამფაზე

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$LC \frac{d^2 U_c}{dt^2} + RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = M \frac{dI_a}{dt}. \quad (3.176)$$

მნიშვნელოვანია, რომ ელექტრონულ ლამფის ბადეზე  $U_a$  ძაბვის გაზრდა იწვევს ანოდური  $I_a$  დენის მატებას. იმისათვის, რომ მივიღოთ ანოდური დენის თვითაგზნება, უნდა გამოვთვალოთ დამოკიდებულება  $I_a = I_a(U_c)$ .

$$S(U_c) = \frac{dI_a}{dU_c} \quad (3.177)$$

წარმოებულს ბადური მახასიათებლის სიმრუდე ეწოდება. შესაბამისი გრაფიკები მოცემულია ნახ. 3.20-ზე.



ნახ. 3.20. ა) ანოდური დენისა და ბ) ბადური სიმრუდის ბადურ ძაბვაზე დამოკიდებულების გრაფიკები

მუშა მდგომარეობაში აღვიღოთ აქვთ დამოკიდებულებებს:

$$S = S_0 - S_2 U_c^2, \quad (3.178)$$

$$I_a = I_{a0} + S_0 U_c - \frac{1}{3} S_2 U_c^3. \quad (3.179)$$

თუ (3.178) და (3.179) ფორმულებს გავითვალისწინებთ, მაშინ (3.176) გადაიწერება სახით:

$$\frac{d^2 U_c}{dt^2} - \frac{M}{LC} \left[ S_0 - S_2 U_c^2 - \frac{RC}{M} \right] \frac{dU_c}{dt} + \omega_0^2 U_c = 0, \quad (3.180)$$

$$\text{სადაც } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (3.181)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$x = U_c \sqrt{\frac{MS_2}{MS_0 - RC}}, \quad 2\gamma = \frac{MS_0 - RC}{LC}. \quad (3.182)$$

მივიღებთ ვან-დერ-პოლის ავტოგენერატორის მათემატიკურ

მოდელს, რომელიც აღწერს ცნობილი ავტორხვეითი სისტემის დინამიკას

$$\ddot{x} - 2\gamma \dot{x}(1-x^2) + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.183)$$

### 3.7.3. ავტორხვეითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები (ფლატერი და დივერგენცია)

ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები – დრეკადი კონსტრუქციებია, რომლებიც მოთავსებულია ჰაერის ან წყლის ნაკადში და შესაბამის ურთიერთქმედებას განიცდის.

ჰიდროაეროდრეკადი სისტემების მაგალითს წარმოადგენს სამშენებლო ნაგებობები, რომლებიც მოთავსებულია ქარის ზემოქმედების ქვეშ. ჰაერის ნაკადის მოქმედების შედეგად ნაგებობებში აღიძრება რხევები და თუ ნაგებობას არ შეუძლია ქარის მიერ აღძრული რხევების ჩაქრობა, შესაძლოა ნაგებობის დანგრევაც, რაც არაერთხელ მომხდარა. ამიტომ, დაპროექტების ეტაპზე აუცილებელია ქარის დატვირთვის შესწავლა ნებისმიერი მაღლივი შენობა-ნაგებობის ან კიდული-ვანტური ხიდებისათვის.

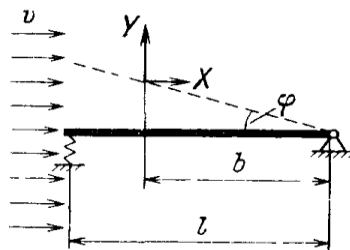
დატვირთვების სიდიდისა და მოქმედების სიხშირის შესწავლა საშუალებას გვაძლევს ავიცილოთ ფლატერი ანუ მავნე, გამანადგურებელი რხევები და სწორად დავაპროექტოთ ესა თუ ის ნაგებობა.

ფლატერის შესწავლას დიდი მნიშვნელობა აქვს საფრენი აპარატების დაპროექტების დროსაც.

ჰაერის ზემოქმედების შედეგად, თვითმფრინავის ფრთა დეფორმაციას განიცდის და შედეგად იცვლება გარსდენის რეჟიმი. ამ მოვლენას დივერგენციას უწოდებენ. დივერგენციის შედეგად იცვლება ფრთის გეომეტრია, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ნაკადის პერიოდული მოწყვეტა და შესაბამისი სიხშირის რხევები. ასეთ შემთხვევაში შესაძლოა რეზონანსული რხევების წარმოქმნა და ფრთის დამსხვრევა გარკვეული, კრიტიკული სიჩქარის ფრენის შემთხვევაში. ამიტომ, ფრთის

დაპროექტებისას აუცილებელია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარის დაანგარიშება, რათა თავიდან ავიცილოთ კონსტრუქციის არასაიმედობა მუშა სიჩქარეების დიაპაზონში. ფლატერი შეიძლება წარმოიქმნას კონსტრუქციის თავისებურებიდან გამომდინარე, გარე ზემოქმედების გარეშე, გარკვეული, ფლატერის კრიტიკული სიჩქარის გადამეტებისას ან სიჩქარეთა გარკვეული დიაპაზონის შემთხვევაშიც.

ა) დივერგენციის შესასწავლად, განვიხილოთ ფრთის სქემატური, გამარტივებული მოდელი (ნახ. 3.21)



ნახ. 3.21. ფრთის დივერგენციის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ბრტყელი ფირფიტა, რომელიც მარცხენა მხარეს ღრეკადადაა ჩამაგრებული (ფრთის თავისუფალი მხარე), მარჯვენა მხარეს კი აქვს სახსრული ჩამაგრება (ფრთის ჩამაგრება ფუზელაჟთან). ფირფიტა მოთავსებულია  $v$  სიჩქარის მქონე ჰაერის ნაკადში. ვიპოვოთ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე.

ფრთის  $\varphi$  კუთხით გადახრისას წარმოიქმნება წნევის ძალები, რომლებიც ორ მდგენელად შეიძლება დაგშალოთ (შუბლური წინაღობის და ამწევი ძალები).

$$X = C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi ; \quad Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi, \quad (3.184)$$

სადაც  $C_x$  შუბლური წინაღობის კოეფიციენტი;  $C_y$  -ამწევი ძალის კოეფიციენტი;  $\rho$  ჰაერის სიმკვრივე;  $l$  - ფრთის ქორდა;

$b$  - მანძილი სახსრული შეერთებიდან აეროდინამიკური წნევების ტოლქმედის მოდების წერტილამდე.

ფირფიტაზე (ფრთაზე) მოდებული ძალების მომენტების ჯამი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ არის:

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + X \cdot b \cdot \varphi + Y \cdot b, \quad (3.185)$$

სადაც  $c_0$  დრეკადი ჩამაგრების ზამბარის სიხისტეა. გათვალისწინებულია, რომ  $\varphi$  მცირე კუთხეა,  $\sin \varphi \approx \varphi$ . ჩავსვათ (3.185) ფორმულაში (3.184), მაშინ

$$M = -c_0 \cdot l^2 \cdot \varphi + C_x \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi^2 + C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b \cdot l \cdot \varphi. \quad (3.186)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $I$  - ფირფიტის ინერციის მომენტი სახსრული შეერთების ღერძის მიმართ. თუ გავითვალისწინებთ შესაბამის განტოლებას ფირფიტისათვის

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M, \quad (3.187)$$

მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს

$$I \cdot \ddot{\varphi} + (c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b) \cdot l \cdot \varphi = 0. \quad (3.188)$$

წინააღობის ძალის მომენტის შესაბამისი წევრი გამოტოვებულია, რადგან უსასრულოდ მცირეა.

ვინაიდან  $\varphi$  უსასრულოდ მცირე შეშფოთებაა, სისტემის მდგრადობისათვის ანუ საწყისი შეშფოთების ჩაქრობისათვის გვაქვს პირობა

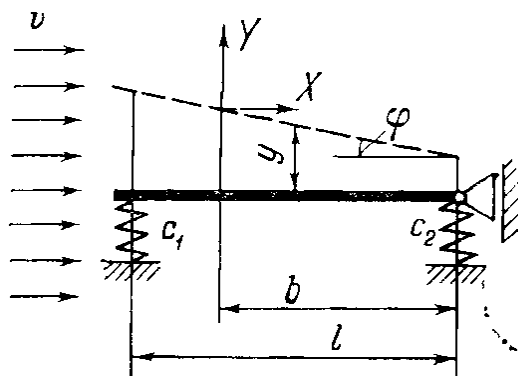
$$c_0 \cdot l - C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot b > 0. \quad (3.189)$$

აქედან, ცხადია, რომ დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარე

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_0 \cdot l}{C_y \cdot \rho \cdot b}}. \quad (3.190)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ რაც უფრო მეტია ფრთის სიხისტე, მით უფრო მეტია დივერგენციის კრიტიკული სიჩქარეც. რაც მეტია დივერგენციის სიჩქარე, მით უკეთესია თვითმფრინავის ფრთისათვის.

ბ)ახლა განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერი. განიხილება გამარტივებული, სქემატური მოდელი (ნახ. 3.22).



ნახ. 3.22. თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის სქემატური მოდელი

განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ფირფიტის ორივე მხარეს გვაქვს დრეკადი ჩამაგრება. მოსალოდნელია სხვა ტიპის არამდგრადობაც, რომელიც დაკავშირებულია ორგანზომილებიანი სისტემის არაკონსერვატიულობასთან.

განვიხილოთ მცირე შეშფოთებები ამ სისტემაში:

$y(t)$  - ფირფიტის სიმძიმის ცენტრის გადაადგილება;

$\varphi(t)$  - ფირფიტის მობრუნების კუთხე;

$c_1$  და  $c_2$  - დრეკადი საყრდენების სიხისტეებია;

$\frac{m \cdot l^2}{12}$  - ფირფიტის ინერციის მომენტი, სიბრტყის პერპენდიკულარულად სიმძიმის ცენტრზე გამავალი ღერძის მიმართ;

$l$  - ფირფიტის სიგრძე ნაკადის მიმართ;

$b$  - მანძილია ამწევი ძალის მოდების წერტილიდან მის მარჯვენა ბოლომდე.

$$Y = C_y \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l \cdot \varphi. \quad (3.191)$$

დრეკად რეაქციის ძალებს აქვს სახე:

$$R_1 = c_1 \cdot \left(y + \frac{\varphi \cdot l}{2}\right); \quad R_2 = c_2 \cdot \left(y - \frac{\varphi \cdot l}{2}\right). \quad (3.192)$$

შეშფოთებული მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებია:

$$-R_1 - R_2 + Y = m \cdot \ddot{y}; \quad (3.193)$$

$$-R_1 \cdot \frac{l}{2} + R_2 \cdot \frac{l}{2} + Y \cdot \left(b - \frac{l}{2}\right) = \frac{m \cdot l^2}{12} \cdot \ddot{\varphi}. \quad (3.194)$$

თუ ამ განტოლებებში შევიტანთ (3.191) და (3.192) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$\ddot{y} + c_{11} \cdot \dot{y} + c_{12} \cdot \dot{\varphi} = 0; \quad (3.195)$$

$$\ddot{\varphi} + c_{21} \cdot \dot{y} + c_{22} \cdot \dot{\varphi} = 0, \quad (3.196)$$

სადაც

$$c_{11} = \frac{c_1 + c_2}{m}; \quad c_{12} = \frac{(c_1 - c_2) \cdot l}{2 \cdot m} - \frac{C_y}{m} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot l. \quad (3.197)$$

$$c_{21} = \frac{6 \cdot (c_1 - c_2)}{m \cdot l}; \quad c_{22} = \frac{3 \cdot (c_1 + c_2)}{m} + 6 \cdot \frac{C_y}{m \cdot l^2} \cdot \frac{\rho \cdot v^2}{2} \cdot (l - 2 \cdot b). \quad (3.198)$$

ამ სისტემის მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.199)$$

ანუ

$$\lambda^4 + \lambda^2 \cdot (c_{11} + c_{22}) + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} = 0. \quad (3.200)$$

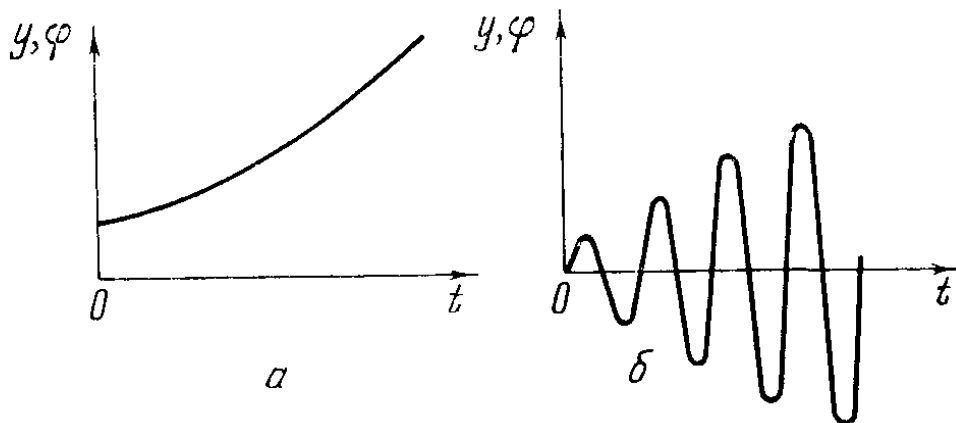
მახასიათებელი განტოლების ფესვებია

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21})}}. \quad (3.201)$$

სისტემის მდგრადობის პირობებია:

$$0 < c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21} < \left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2. \quad (3.202)$$

პირველი უტოლობის დარღვევისას ამ სისტემაში გვექნება დივერგენცია ნახ. 3.23a, მეორე უტოლობის დარღვევისას გვაქვს ფლატერი ნახ. 3.23b.



ნახ. 3.23. ფრთის მდგრადობის დაკარგვის გრაფიკები:

a) დივერგენცია; ბ) ფლატერი

მდგრადობის ზღვართი მნიშვნელობები (3.202) უტოლობებში გვაძლევს შესაბამისი კრიტიკული სიხქარების მნიშვნელობებს. თუ გავითვალისწინებთ (3.197) და (3.198) განტოლებებს მივიღებთ, რომ

**დივერგენციის კრიტიკული სიხქარა**

$$v_{div} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot l}{\rho \cdot C_y [c_1 \cdot (b-l) + c_2 \cdot b]}} \quad (3.203)$$

**ფლატერის კრიტიკული სიხქარა**

$$v_{flat} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3\rho \cdot C_y} \cdot \frac{c_1^2 - c_1 \cdot c_2 + c_2^2}{c_1 - c_2}} \quad (3.204)$$

### 3.7.4. ქიმიური ავტორხევითი სისტემები (პრიგოჟინ-ლენფერის მოდელი)

ავტორხევითი სისტემები გვხვდება ზოგიერთი ქიმიური რეაქციის შესწავლისას. ცნობილია, ბ. ბელოუსოვის მიერ 1950 წელს აღმოჩენილი, მოგვიანებით კი ა.ჟაბოტინსკის მიერ შესწავლილი ქიმიური რეაქცია. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია

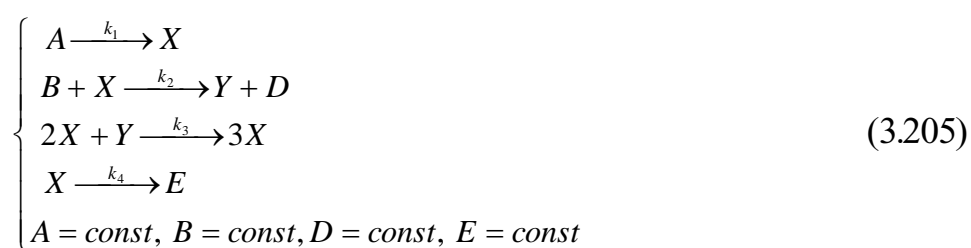


არის მალონის მუავას დაჟანგვის პროცესი, იონების კატალიზატორის არსებობისას. ამ რეაქციის მიმდინარეობისას, ხდება კონცენტრაციული რხევები, რის გამოც, ნარევის ფერი იცვლება: ცისფერი-წითელი-ცისფერი . . . გარდა პერიოდული რხევებისა, ქიმიური პროცესების დინამიკა უფრო რთულია და ბოლომდე არაა შესწავლილი. არსებობს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქციის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები, როგორცაა ფილდის, კერესის, ნოიესის და სხვა. მაგრამ ვერც ერთი ბოლომდე ვერ აღწერს ქიმიურ დინამიკას.

განვიხილოთ ჰიპოტეტური ქიმიური რეაქციის მოდელი, რომელსაც ბრიუსელატორი ჰქვია და შემუშავებულია

ი. პრიგოჟინის სკოლის მიერ. პრიგოჟინ-ლეფვერის მოდელი ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელია, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებულ იქნა ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით. ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელატორს“ უწოდებენ.

პრიგოჟინ-ლეფვერის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:



ეს სისტემა ც ღიაა, ე.ი. ემატება ან აკლდება  $A, B, D, E$  ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შენარჩუნდება ერთ დონეზე.

პრიგოჟინ-ლეფვერის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (3.205) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1 A + k_3 X^2 Y - (k_2 B + k_4) X \\ \frac{dY}{dt} = k_2 B X - k_3 X^2 Y \end{cases} \quad (3.206)$$

ჩავწეროთ (3.206) განტოლებები უგანზომილებო სახით. ამისათვის შემოვიღოთ ახალი ცვლადები ფორმულებით:

$$\tau = k_4 \cdot t, \quad x = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot X, \quad y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \cdot Y, \quad (3.207)$$

მაშინ (3.206) გადაიწერება სახით:

$$\dot{x} = a - (b+1) \cdot x + x^2 \cdot y, \quad (3.208)$$

$$\dot{y} = b \cdot x - x^2 \cdot y, \quad (3.209)$$

სადაც

$$a = \sqrt{\frac{k_1^2 \cdot k_3}{k_4^3}} \cdot A, \quad b = \frac{k_2}{k_4} \cdot B. \quad (3.210)$$

ამრიგად, მივიღეთ მეორე რიგის დინამიკური სისტემა ორი  $a$  და  $b$  მართვის პარამეტრებით.

წონასწორობის პირობებს აქვთ სახე:

$$x_0 = a, \quad y_0 = \frac{b}{a}. \quad (3.211)$$

წონასწორობის წერტილში არ ხდება  $x$  და  $y$  კონცენტრაციების ცვლილება.

ვიპოვოთ წონასწორობის მდგომარეობის არამდგრადობის პირობები ანუ პირობები, როცა სისტემაში ავტორხევები წარმოიქმნება.

ამისათვის, წონასწორობის წერტილს მივცეთ მცირე შეშფოთებები და ვნახოთ როდის შორდება სისტემა

წონასწორობის წერტილს. განვიხილოთ შეშფოთებული მდგომარეობა

$$x = a + \xi, \quad y = \frac{b}{a} + \eta. \quad (3.212)$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (3.208),(3.209) განტოლებებში

$$\xi = a - (b+1)a - (b+1) \cdot \xi + (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right), \quad (3.213)$$

$$\eta = b \cdot (a + \xi) - (a^2 + 2 \cdot a \cdot \xi + \xi^2) \cdot \left(\frac{b}{a} + \eta\right). \quad (3.214)$$

ამ სისტემის ლინეარიზაცია გვაძლევს

$$\xi = (b-1) \cdot \xi + a^2 \cdot \eta, \quad (3.215)$$

$$\eta = -b \cdot \xi - a^2 \cdot \eta. \quad (3.216)$$

ამ სისტემის ყოფაქცევის გამოსაკვლევად შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება, რისთვისაც უნდა მოვახდინოთ ჩასმა

$$\xi \rightarrow e^{p \cdot \tau}, \quad \eta \rightarrow e^{p \cdot \tau}. \quad (3.217)$$

მაშინ

$$(p-b+1) \cdot (p+a^2) = -a^2 \cdot b. \quad (3.218)$$

თუ გავხსნით ფრჩხილებს, მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას

$$p^2 + p \cdot (a^2 + 1 - b) + a^2 = 0. \quad (3.219)$$

მისი ფესვებია:

$$p = -\frac{a^2 + 1 - b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a^2 + 1 - b)^2}{4} - a^2}. \quad (3.220)$$

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ წერტილში

$$b_{kr} = a^2 + 1 \quad (3.221)$$

სისტემა კარგავს მდგრადობას და პრიგოჟინ-ლუფვერის ჰიპოტეტიურ ქიმიურ სისტემაში იწყება ავტორხევები.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. როგორი ავტორხევეითი სისტემებია თქვენთვის ცნობილი? აღწერეთ მათი მუშაობის პრინციპები.
2. ვან-დერ-ვალის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი.
3. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის ფლატერის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
4. შეადგინეთ თვითმფრინავის ფრთის დივერგენციის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი და იპოვეთ კრიტიკული სიჩქარე.
5. პრიგოჟინ-ლუფვერის მათემატიკური მოდელი და ავტორხევეების წარმოქმნის პირობა.

### ლიტერატურა

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
2. ობგაძე თ, ობგაძე ლ, მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
3. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
4. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხვეითი სისტემები), ტ.4. თბილისი: სტუ, 2010

### 3.8. პარამეტრული რხევითი სისტემები

პარამეტრული რხევითი სისტემებისათვის დამახასიათებელია რხევების აგზნება რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრის დროში ცვლილების გამო. ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება, ასეთი პარამეტრების პერიოდული ცვლილება. სისტემაში პარამეტრული რხევები არ აღიძვრება, თუ ის წონასწორობის მდგომარეობაშია. ეს განასხვავებს პარამეტრულ რხევებს იძულებითი რხევებისაგან.

#### 3.8.1. ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას (მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ ფიზიკური ქანქარა (სხეული), რომელსაც შეუძლია ბრუნვა  $A$  ჰორიზონტალური ბრუნვის ღერძის მიმართ. მოძრაობა ხასიათდება ბრუნვის  $\varphi$  კუთხით ღერძის მიმართ. დავეუშვათ, რომ ბრუნვის  $A$  ღერძი მოძრაობს ვერტიკალურ სიბრტყეში გარკვეული  $a = a(t)$  კანონით. ქანქარას მოძრაობის განტოლების შედგენისას ღერძთან დაკავშირებული ათვლის სისტემის მიმართ უნდა გავითვალისწინოთ როგორც სიმძიმის ძალის მომენტი

$$M_s = -mgs \cdot \sin \varphi, \quad (3.222)$$

ასევე ინერციის ძალის მომენტიც

$$M_b = -m \cdot \ddot{a} \cdot s \cdot \sin \varphi. \quad (3.223)$$

აქედან გამომდინარე, ფიზიკური ქანქარას მოძრაობის განტოლებას ექნება სახე:

$$I \cdot \ddot{\varphi} = M_s + M_b = -m \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi \quad (3.224)$$

ან სხვანაირად

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + \ddot{a}) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0, \quad (3.225)$$

სადაც  $a(t)$  დროის პერიოდული ფუნქციაა;  $I$ -ფიზიკური ქანქარას ინერციის მომენტი;  $s$ -მანძილი ქანქარას მოცემული წერტილიდან ბრუნვის  $A$  ღერძამდე.

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $a = A \cdot \cos \Omega \cdot t$ , მივიღებთ

$$\ddot{\varphi} + \frac{m}{I} \cdot (g + A \cdot \cos \Omega \cdot t) \cdot s \cdot \sin \varphi = 0. \quad (3.226)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:  $\omega^2 = \frac{mgs}{I}$  და  $\varepsilon = \frac{mAs}{I}$ , მაშინ (3.226) მოდელი გადადის მატის მოდელში

$$\ddot{\varphi} + (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos 2t) \cdot \sin \varphi = 0. \quad (3.227)$$

ამრიგად, მივიღეთ კლასიკური პარამეტრული რხევითი სისტემა.

### 3.8.2. ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)

ელექტრული რხევითი სისტემისათვის, რომელიც შედგება

$C$  ტევადობის კონდენსატორისა და  $L$  ინდუქციურობის მაგნიტური კოჭასაგან, გვაქვს თავისუფალი რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{Q} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot Q = 0. \quad (3.228)$$

თუ კონდენსატორის ტევადობა დროის პერიოდული ფუნქციაა  $C = C(t)$ , მაშინ მიიღება პერიოდულკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომლის დროსაც პარამეტრული რხევები წარმოიქმნება. ასეთი რხევები, როგორც წესი, მავნეა რხევითი სისტემისათვის და ცდილობენ სისტემა ისე დააპროექტონ, რომ აიცილონ პარამეტრული რხევები.

თუმცა, ზოგი ჭირი მარგებელიაო და ლ. მანდელშტამმა და ნ. პაპალეკსმა დააპროექტეს ცვლადი დენის გენერატორი, რომლის მუშაობის პრინციპი დამყარებულია კონდენსატორის ტევადობის

ცვლილებაზე. ტევადობის ცვლილება ხდება იმის ხარჯზე, რომ კონდენსატორის ფირფიტების ნაწილი შეადგენს მბრუნავ კბილანა ბორბალს.

თუ  $\frac{1}{L \cdot C} = P_0 + \Delta P \cdot \text{sign} \cos \Omega \cdot t$ ,  $\tau = \Omega \cdot t$ ,  $\lambda = \frac{P_0}{\Omega^2}$ ,  $\gamma = \frac{\Delta P}{\Omega^2}$ , მაშინ  
(3.228) გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{Q} + (\lambda + \gamma \cdot \text{sign}(\cos \tau)) \cdot Q = 0. \quad (3.229)$$

პარამეტრული რხევითი სისტემის მოდელი (3.229) მეისნერის განტოლებას წარმოადგენს.

### 3.8.3. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილ-ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში (მატიეს განტოლება)

განვიხილოთ კეინსის წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვაღგენთ წონასწორობის განტოლებას

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.230)$$

სადაც  $C(t)$  მოხმარებაა,  $I(t)$  – ინვესტიციები.

სამუეღსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (3.231)$$

სადაც  $\beta(t)$  აქსელერაციის კოეფიციენტია.  $C(t)$  მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (3.232)$$

(3.231)-ისა და (3.232)-ის (3.230)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (3.235)$$

(3.235) განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით გვექნება:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)] \quad (3.236)$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1)\dot{X}(t) + F[X(t)] = 0. \quad (3.237)$$

რადგან  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (3.237) განტოლება გავყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[x(t)] = 0. \quad (3.238)$$

თუ (3.238)-ში შევარჩევთ  $\beta(t)$  და  $F[x(t)]$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= t \\ F[X(t)] &= t(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) \end{aligned} \quad (3.239)$$

მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის მატეის განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X(t) = 0. \quad (3.240)$$

როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატეის განტოლება, რომლის-თვისაც დამახასიათებელია პარამეტრული რხევების არსებობა.

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. რით განსხვავდება პარამეტრული რხევები თავისუფალი რხევებისაგან?
2. გამოიყვანეთ ფიზიკური საქანის პარამეტრული რხევების განტოლება.
3. გამოიყვანეთ მატეის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.
4. გამოიყვანეთ ელექტრული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.



5. გამოიყვანეთ მესნერის მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.

### ლიტერატურა

1. ობგაძე თ.მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე), ტ.2.თბილისი: სტუ, 2007
3. ობგაძე თ.მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
4. Кузнецов А.П.,Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.Нелинейные колебания Москва,2002
5. Магнус К. Колебания. Пер. с англ. Москва: Мир, 1982
6. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი სისტემები), ტ.4., სტუ, თბილისი, 2010

### 3.9. არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები

იძულებით რხევით სისტემებზე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. აქ რხევით პროცესებს განსაზღვრავს შესაბამისი მათემატიკური მოდელის დამატებითი წევრები, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.

წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემებისგან განსხვავებით, არაწრფივ, იძულებით რხევით სისტემებში ადგილი აქვს არაწრფივი რეზონანსის მოვლენას. ამ მოვლენის სახელწოდებით ერთიანდება ის მოვლენები, რომელთაც ადგილი აქვს არაწრფივ სისტემებში, გარე პერიოდული ზემოქმედების დროს და

რომლებიც მქლავნდება რხევების თვისებრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლების ცვლილებით, გარე ზემოქმედების ამპლიტუდისა და სიხშირის მიხედვით.

### 3.9.1. ამოცანის ზოგადი დასმა

ინერციის კოეფიციენტზე გაყოფის შემდეგ არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, ზოგად შემთხვევაში, ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) = \psi(t). \quad (3.241)$$

შადაც  $\psi(t)$  გარე მაიძულებელი ძალაა;  $g(q)$ -აღმდგენი ძალა;  $f(q, \dot{q})$ -დისიპაციისა და ამჩქარებელი ძალების კომბინაცია; პირველი მიმართულია  $q$  სიჩქარის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მეორე – სიჩქარის მიმართულებით.

ზოგად შემთხვევაში, (3.241) განტოლების ამოხსნა შეუძლებელია, თუმცა, კერძო შემთხვევებში, ეს შესაძლებელია. ზოგად შემთხვევაში, განტოლება შეიძლება გამოკვლეული იქნეს კომპიუტერის დახმარებით.

### 3.9.2. ფრანგიშვილ-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა მიწოდების ტოლია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი  $X(t)$ , რამდენიც სჭირდება ბაზარს  $Y(t)$ .

$$X(t) = Y(t). \quad (3.242)$$

$X(t)$  არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა),  $Y(t)$  - მოთხოვნა.

კეინსის (3.242) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (3.243)$$

სადაც  $C(t)$  მოთხოვნის ფუნქციაა,  $I(t)$  – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ხიკის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t), \quad (3.244)$$

სადაც  $\beta$  აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება არის წარმოების მოცულობის ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთელ წინა ისტორიაზე გავლილ  $t$  დროში. სხვანაირად,

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau, \quad (3.245)$$

წონასწორობის (3.243) განტოლებაში (3.244) და (3.245) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (3.246)$$

(3.246) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \ddot{X}(t) + F[X(t)] \quad (3.247)$$

ანუ მივიღებთ ფრანგიშვილი-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta} \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta} F[X(t)] = 0. \quad (3.248)$$

ვთქვათ,

$$\beta = -\frac{1}{e}; \quad (3.249)$$

მაშინ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0, \quad (3.250)$$

სადაც:  $e = const$ , ხოლო  $F_1[X(t)]$  მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (3.251)$$

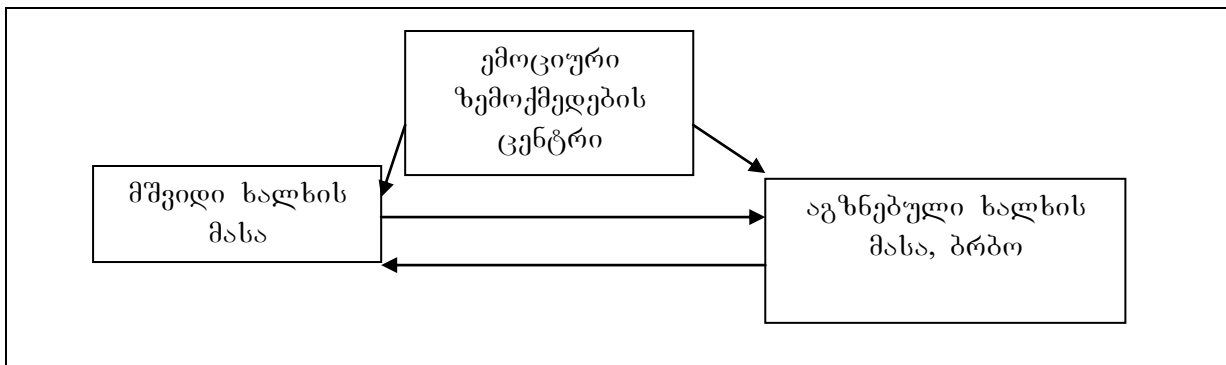
მაშინ (3.251)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A \cos(\omega \cdot t), \quad (3.252)$$

რომელიც აღწერს არაწრფივ, იძულებით რხევებს ფრანგიშვილ-ობგაძის ეკონომიკურ სისტემაში.

### 3.9.3. ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, სხვადასხვა სახის პერიოდული გარე PR - გამდიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში

განვიხილოთ ხალხის მასის ემოციური მოქმედების მათემატიკური მოდელი. ხალხის მასისათვის დამახასიათებელია გადასვლა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში, გარე ემოციური ზემოქმედების გავლენით, რომლის როლს შეიძლება ასრულებდეს საეკლესიო პირი, პოლიტიკოსი, ავანტიურისტი ან ტელეჟურნალისტი. ამ ზემოქმედებათა ერთობლიობას PR-გამდიზიანებლის ზემოქმედებას უწოდებენ. განვიხილოთ ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი (ნახ. 3.24):



ნახ. 3.24. ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების სქემატური მოდელი

ხალხის მასის ემოციური დინამიკის მათემატიკური მოდელი დგება ნიუტონის მეორე კანონის ბაზაზე

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (3.253)$$

სადაც  $n$  ბრბოს წარმომქმნელი ხალხის რაოდენობაა;

$P_2$  – იმის ალბათობა, რომ ხალხის მასა აღზნებულ მდგომარეობაშია;  $f$  – ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდეა;  $\varepsilon$  – ხალხის ემოციური აგზნების სიდიდის მახასიათებელი პარამეტრი;  $P_1$  – იმის ალბათობა, რომ ხალხის მასა მშვიდ მდგომარეობაშია.

ხალხის მასაზე ემოციური ზემოქმედების ძალის სიდიდე პირდაპირპროპორციულია მათი ორმაგი მოცულობისა და იმის ალბათობისა, რომ მასა მშვიდ მდგომარეობაშია. როცა აგზნებადობის ალბათობა იზრდება, ემოციური ზემოქმედების ძალა მცირდება. ასე, რომ

$$f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot \dot{P}_2. \quad (3.254)$$

დაეუშვათ, რომ  $\gamma = 1$ .

(3.253) და (3.254) იძლევა მოდელს:

$$\ddot{P}_2 = -2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2. \quad (3.255)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემაზე მოქმედებს პერიოდული PR-გამღიზიანებელი. მაშინ (3.253) და (3.254) გამოსახულების ნაცვლად გვექნება:

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = f + n \cdot A \cdot \sin \omega \cdot \varepsilon, \quad f = -2 \cdot n \cdot \gamma \cdot P_1 \cdot \dot{P}_2, \quad \gamma = 1, \quad P_1 + P_2 = 1. \quad (3.256)$$

მივიღებთ შესაბამის მათემატიკურ მოდელს

$$n \cdot \frac{d^2 P_2}{d\varepsilon^2} = -2n P_1 \dot{P}_2 + n \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon), \quad (3.257)$$

სადაც

$$P_1 = 1 - P_2 \quad (3.258)$$

ე.ი. გვაქვს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი

$$\ddot{P}_2 + 2 \cdot (1 - P_2) \cdot \dot{P}_2 = A \cdot \sin(\omega \cdot \varepsilon). \quad (3.259)$$

ამრიგად, მივიღეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი, პერიოდული გარე PR-გამდიზიანებლის მოქმედების შემთხვევაში. ეს კი არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემის აშკარა მაგალითია.

### 3.10. ჩვეულებრივი სისტემების ანალიზური ამონახსნები და ელიფსური ფუნქციები

განვიხილოთ თავისუფალი არადემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელი

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.260)$$

ეს მოდელი, როგორც უკვე ვიცით, შეიძლება შეესაბამებოდეს მატერიალური ნაწილაკის მცირე რხევებს, რომლებიც გამოწვეულია წონასწორობის მდგომარეობისაკენ მიმართული ძალით. ასეთ შემთხვევაში  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , სადაც  $k$ - შეესაბამება ზამზარის სიხისტეს, ხოლო  $m$  ზამზარაზე გამოზმული სხეულის მასაა. ასეთი მარტივი წრფივი სისტემისათვის, ადვილია ზუსტი ამონახსნის პოვნა  $x(t) = e^{-at}$  ჩასმის საშუალებით:

$$x(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (3.261)$$

ინტეგრების ორ ცვლადს - რხევის ამპლიტუდასა და ფაზის წანაცვლებას, განსაზღვრავენ  $x(0)$  და  $\dot{x}(0)$  საწყისი პირობებიდან გამომდინარე

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}^2(0) + \omega^2 x^2(0)}, \quad \delta = \arctg\left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)}\right). \quad (3.262)$$

### 3.10.1. წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელის ინტეგრება კვადრატურებში

ებლა დავუბრუნდეთ (3.260) დიფერენციალურ განტოლებას და ამოვხსნათ სხვანაირად, ისე, რომ შემდეგ, ამ მეთოდის განზოგადებაც შეგვეძლოს უფრო რთული სისტემების ამოსახსნელად. ამისათვის გადავწეროთ განტოლება ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (3.263)$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \quad (3.264)$$

ასეთ წარმოდგენას, დიდი მნიშვნელობა აქვს ჰამილტონური(ინტეგრებადი) სისტემებისათვის, რომელზედაც გვექნება საუბარი მოგვიანებით. თუ გავამრავლებთ (3.263) განტოლების ორივე მხარეს  $\omega^2 x$ , ხოლო (3.264) განტოლების ორივე მხარეს  $y$  სიდიდეებზე და შედეგებს შევკრიბავთ, მივიღებთ

$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = 0. \quad (3.265)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (3.265) შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) = 0. \quad (3.266)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება მუდმივი სიდიდეა

$$\frac{1}{2} (y^2 + \omega^2 x^2) = I_1. \quad (3.267)$$

ინტეგრების  $I_1$  ცვლადს მოძრაობის ინტეგრალს, ანუ პირველ ინტეგრალს უწოდებენ. თუ, გავითვალისწინებთ იმას, რომ  $\dot{x} = y$ , ადვილი მისახვედრია რომ  $I_1 = E$  სიდიდეს აქვს სისტემის მექანიკური ენერჯის შინაარსი. ამ ინტეგრალის გამოყენებით

შეგვიძლია (3.263)-(3.264) სისტემის რიგი, დავწიოთ ერთი ერთეულით. ამისათვის, გამოვსახოთ (3.267) თანადობიდან  $y$ ,

$$y = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}, \quad (3.268)$$

და ჩავსვათ მისი მნიშვნელობა (3.263) განტოლებიდან. გვექნება უკვე პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}. \quad (3.269)$$

ამ განტოლებაში განვაცალოთ ცვლადები, მაშინ მივიღებთ

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2)}}, \quad (3.270)$$

თუ, ვაინტეგრებთ (3.270) განტოლებას, მივიღებთ ინტეგრირების კიდევ ერთ  $I_2$  მუდმივას:

$$t + I_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2I_1}}\right). \quad (3.271)$$

თუ, გავამრავლებთ (3.271) ტოლობას  $\omega$  ცვლადზე და ავიღებთ ორივე მხარიდან სინუსს, მივიღებთ ამონახსნს

$$x(t) = \frac{\sqrt{2I_1}}{\omega} \sin(\omega t + I_2 \omega), \quad (3.272)$$

ეს ამონახსნი, ცხადია რომ იდენტურია, ადრე სხვა გზით მიღებული (3.261) ამონახსნისა. ინტეგრების მეორე მეთოდი უფრო რთული ჩანს, თუმცა, ამ მეთოდს ამონახსნამდე მივყავართ არაწრფივი განტოლებების ისეთ შემთხვევებშიც, როცა პირდაპირი მარტივი ინტეგრება(ჩასმის ხერხით) არ გამოდის.

ამრიგად, ამ პარაგრაფის მეთოდით, სისტემის ამონახსნის პოვნის ალგორითმს აქვს ოთხი ეტაპი:



1. პირველი ინტეგრალის იდენტიფიკაცია;
2. პირველი  $I_1$  ინტეგრალის გამოყენება სისტემის ხარისხის ერთი ერთეულით დასაწევად;
3. ამოცანის ამოხსნა კვადრატურებში, ანუ ანალიზური ამონახსნის პოვნა;
4. შებრუნებული ფუნქციის პოვნა, რომელსაც მივყავართ ცალსახა ამონახსნამდე.

უნდა აღინიშნოს, რომ საზოგადოდ, არაწრფივი განტოლებების კვადრატურებში ამოხსნა არ ხერხდება, მითუმეტეს, თუ მათი რიგი ორზე მეტია.

წრფივი ოსცილატორის რხევის პერიოდს ადვილად ვპოულობთ (3.261) ამონახსნიდან

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.273)$$

თუმცა, რხევის პერიოდის პოვნა შესაძლებელია მეორე, გეომეტრიული (3.268)-(3.271) მიდგომიდანაც. მართლაც, თუ გავიხსენებთ რომ  $I_1 = E$  შეესაბამება სისტემის მექანიკურ ენერგიას, ადვილად ვიპოვით სისტემის ზღვრული წონასწორობის წერტილებს (3.268) ტოლობიდან  $\dot{x} = 0 \xrightarrow{(3.268)} x = \pm \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ სისტემის სრული რხევის პერიოდი (3.271) თანადობიდან გამომდინარე იქნება

$$T = 2 \int_{-\frac{\sqrt{2E}}{\omega}}^{\frac{\sqrt{2E}}{\omega}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right)}} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (3.274)$$

**P.S.** ცხადია, რომ რხევის პერიოდი წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევის შემთხვევაში არაა დამოკიდებული ენერგიაზე და მაშასადამე საწყის პირობებზე.

### 3.10.2. არაწრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელირება

განვიხილოთ, მარტივი არაწრფივი სისტემის თავისუფალი რხევების მოდელი წონასწორობისაკენ მიმართული არაწრფივი ძალით

$$\ddot{x} + \alpha x^3 = 0. \quad (3.275)$$

გადავწეროთ ეს სისტემა ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (3.276)$$

$$\dot{y} = -\beta x^3. \quad (3.277)$$

გავამრავლოთ (3.276) განტოლების ორივე მხარე  $\beta x^3$ , ხოლო (3.277) განტოლების ორივე მხარე  $y$  სიდიდეებზე და შედეგები შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\dot{x}\beta x^3 + y\dot{y} = y\beta x^3 + (-y\beta x^3), \quad (3.278)$$

(3.278) ადვილად გარდაიქმნება მარტივ განტოლებად

$$y\dot{y} + \beta x^3\dot{x} = 0, \quad (3.279)$$

რომელსაც გადავწერთ სახით

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}\beta x^4 \right) = 0. \quad (3.280)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრჩხილებსი მოთავსებული გამოსახულება მუდმივი სიდიდეა და მას ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი ქვია, ხოლო შინაარსით, ის არის ამ არაწრფივი სისტემის მექანიკური ენერჯია

$$E = I_1 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}\beta x^4. \quad (3.281)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.276) ტოლობას, (3.281) ტოლობიდან მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(I_1 - \frac{1}{4}\beta x^4)}. \quad (3.282)$$

ცვლადთა განცალება გვამღვეს განტოლებას

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(I_1 - \frac{1}{4}\beta x^4)}}, \quad (3.283)$$

საიდანაც, წინა მაგალითის ანალოგიურად ვპოულობთ რხევის პერიოდს

$$T = 2 \int_{-\left(\frac{4E}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}}^{\left(\frac{4E}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}} \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{4}\beta x^4\right)}}. \quad (3.284)$$

ეს ინტეგრალი გამოითვლება გამა-ფუნქციის მეშვეობით

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi\beta^{\frac{1}{2}}}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) E^{-\frac{1}{4}}. \quad (3.285)$$

**P.S.** რხევის პერიოდი ეხლა უკვე დამოკიდებულია ენერგიაზე. რაც მეტია ნაწილაკის ენერგია, მით უფრო მცირეა მისი რხევის პერიოდი. ამ შემთხვევაში რხევის სიხშირეც ენერგიაზეა დამოკიდებული და მაშასადამე საწყის პირობებზეც. ესაა, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი განმასხვავებელი ნიშანი წრფივ და არაწრფივ სისტემებს შორის.

### 3.10.3. მეორე რიგის არაწრფივი სისტემები და ელიფსური ფუნქციები

პრაქტიკაში არსებული მოდელების უმრავლესობა, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით აღიწერება. დიფერენციალურ განტოლებათა საკმაოდ დიდ კლასს შეადგენენ ისეთი მოდელები, რომლებიც აღიწერებიან

$$\ddot{x} = F(x), \quad (3.286)$$

ტიპის განტოლებებით. სადაც  $F(x)$  - პოლინომი, რაციონალური ან ტრანსცენდენტული ფუნქციაა დამოკიდებული  $x$  ცვლადზე.

პოლინომის შემთხვევაში, მაგალითად

$$F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (3.287)$$

ჩვენ შეგვიძლია, განტოლება (3.286) ვაინტეგროთ (3.287) ფუნქციის გათვალისწინებით, რისთვისაც გადავწერთ მათ ნორმალური სახით

$$\dot{x} = y, \quad (3.288)$$

$$\dot{y} = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (3.289)$$

გავამრავლოთ (3.288) განტოლების ორივე მხარე  $-\sum_{i=0}^n a_i x^i$  გამოსახულებაზე, ხოლო (3.289) განტოლების ორივე მხარე  $y$  გამოსახულებაზე და შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$y\dot{y} - \dot{x} \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0. \quad (3.290)$$

რომელსაც ადვილად გადავწერთ ინტეგრებადი სახით

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} y^2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1} \right) = 0. \quad (3.291)$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ პირველ ინტეგრალს

$$I_1 = \frac{1}{2} y^2 - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}, \quad (3.292)$$

საიდანაც ამოვხსნით  $y$  ცვლადს

$$y = \sqrt{2 \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1 \right)}, \quad (3.293)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.288) ტოლობას გვექნება

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2 \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1 \right)}. \quad (3.294)$$

ცვლადთა განცალკევებით მივიღებთ, რომ

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2 \left( a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \dots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + I_1 \right)}}. \quad (3.295)$$

ეხლა უკვე ამოცანის ამოხსნა დავიდა მარჯვენა მხარის ინტეგრალის გამოთვლამდე. თუ, ფესვქვეშა მრავალწევრის ხარისხი არ აღემატება სამს, მაშინ ინტეგრალი გამოისახება „ელიფსური“ ფუნქციებით.

ელიფსური ფუნქციები, ჩვეულებრივი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ( $\sin x$ ,  $\cos x$ , . . .) განზოგადებაა. ხოლო, ელიფსური ინტეგრალები შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ( $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  . . .) განზოგადებაა. ელიფსური ფუნქციების თეორია განავითარეს აბელმა და იაკობმა. მიუხედავად იმისა, რომ ასეთი მოდელების რაოდენობა არც ისე დიდია, რომლებსაც ვხსნით ელიფსური ფუნქციებით, მაინც ბევრი საინტერესო ამოცანა (ქანქარას რხევების ამოცანა . . .) ხვდება ელიფსური ფუნქციების მოქმედების არეშიც. თუ (3.287) ფუნქციის ხარისხი, არ აღემატება სამს, მაშინ მისი ამონახსნი მოიცემა იაკობის ელიფსური ფუნქციებით. ხოლო, თუ მისი ხარისხი არ აღემატება ორს, ამონახსნი მოიცემა ვაიერშტრასის ელიფსური ფუნქციებით.

### 3.10.4. იაკობის ელიფსური ფუნქციები

განვიხილოთ სისტემა

$$\ddot{x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3. \quad (3.296)$$

ამ სისტემის შესაბამისი (3.292) პირველი ინტეგრალი შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \left( Ax + \frac{1}{2} Bx^2 + \frac{1}{3} Cx^3 + \frac{1}{4} Dx^4 \right). \quad (3.297)$$

სიმარტივისათვის, გადავწეროთ ეს სისტემა შემდეგნაირად

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4. \quad (3.298)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილი შეიძლება დაიშალოს მამრავლებად და შემდეგ გარდაიქმნას ლეჟანდრის კანონიკური სახემდე

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(1-kx^2). \quad (3.299)$$

ამ განტოლების ინტეგრება გვამღვეს გამოსახულებას

$$\int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-kx^2)}}. \quad (3.300)$$

რომლის მარჯვენა ნაწილში მდგარ ინტეგრალს პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი ეწოდება და აღნიშნება

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-kz^2)}}. \quad (3.301)$$

ცხადია, რომ როცა  $k = 0$  ეს ფუნქცია ემთხვევა ჩვეულებრივ  $\arcsin x$  ფუნქციას, რაც შეესაბამება ჩვენს მიერ ადრე ამოხსნილ ამოცანას (3.271).

**P.S.** იაკობის ელიფსური ფუნქციები, არიან ელიფსური ინტეგრალების შექცეული ფუნქციები.

(3.301) ფორმულაში მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა  $x = \sin\theta$ , მაშინ გვექნება პირველი გვარის ელიფსური ინტეგრალი

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2\theta)}}. \quad (3.302)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$u = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2\theta)}}, \quad (3.303)$$

მაშინ  $sn(u, k)$  ელიფსური ფუნქცია იქნება

$$sn(u, k) = \sin\theta.$$

განიხილავენ სხვა ტიპის ელიფსურ ფუნქციებსაც

$$cn(u, k) = \cos\theta.$$

გვაქვს ანალოგია ჩვეულებრივ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან

$$u = \operatorname{arc} \operatorname{sn}(\sin\theta, k) = \operatorname{arc} \operatorname{cn}(\cos\theta, k).$$

**ამოცანები და სავარჯიშოები:**

1. იაკობისა და ვეიერშტრასის ელიფსური ფუნქციების ცნება;
2. დამოკიდებულია, თუ არა თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის რხევის პერიოდი სისტემის ენერგიაზე? პასუხი დაასაბუთეთ.
3. დამოკიდებულია, თუ არა არაწრფივი, კუბური რხევითი სისტემის რხევის პერიოდი სისტემის ენერგიაზე? პასუხი დაასაბუთეთ.

**ლიტერატურა.**

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
3. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001

5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
6. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
7. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
8. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
9. ოზგაძე თ. ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები, ტ.1, სტუ, თბილისი, 2014

### 3.11. წრფივი სისტემების გამოკვლევა ფაზურ სივრცეში

დინამიკური სისტემის ფაზურ სივრცეში გამოკვლევა, საშუალებას იძლევა, სისტემის ანალიზურად ამოუხსნელად იქნას შესწავლილი, ამ სისტემის ამონახსნების ძირითადი თვისებები: განსაკუთრებული წერტილები, ბიფურკაციები, ზღვართი ციკლები და ა.შ.

განსაკუთრებულად ხელსაყრელია ფაზური სივრცის ცნება იმ შემთხვევაში, როცა ცვლადების რიცხვია ორი და მაშასადამე, ფაზური სივრცე ფაზურ სიბრტყეს წარმოადგენს.



### 3.11.1. წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი

განვიხილოთ წრფივი დინამიკური სისტემა:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad (3.304)$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (3.305)$$

1. ამ დინამიკური სისტემის შესასწავლად, უნდა ამოვიწეროთ სისტემის კოეფიციენტების მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (3.306)$$

ვიპოვოთ ამ მატრიცის კვალი და დეტერმინანტი:

$$trA = a + d; \quad detA = ad - bc; \quad (3.307)$$

2. ცხრილი 11.1 მიხედვით, დავადგინოთ განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ტიპი;

ცხრილი 11.1

$detA > 0$	$trA < 0$	$detA < \frac{(trA)^2}{2}$	მდგრადი კვანძი
$detA > 0$	$trA < 0$	$detA > \frac{(trA)^2}{2}$	მდგრადი ფოკუსი
$detA > 0$	$trA > 0$	$detA < \frac{(trA)^2}{2}$	არამდგრადი კვანძი
$detA > 0$	$trA > 0$	$detA > \frac{(trA)^2}{2}$	არამდგრადი ფოკუსი
$detA < 0$	ჰიპერბოლური-უნაგირა წერტილი		
$detA > 0$	$trA = 0$	ცენტრი	

3. ვიპოვოთ განსაკუთრებული მიმართულებები:

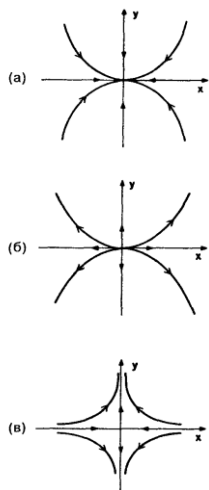
$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0. \quad (3.308)$$

$$y = -\frac{a}{b}x; \quad y = -\frac{c}{d}x. \quad (3.309)$$

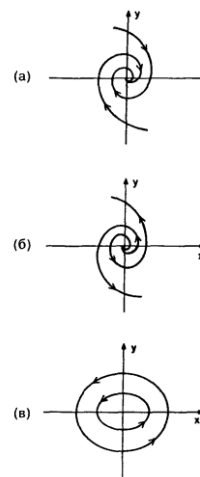
4. თუ, განსაკუთრებული წერტილი კვანძია ან უნაგირა წერტილი, მაშინ ვპოულობთ ასიმპტოტებს ჩასმით  $y = kx$ ;

5. ვპოულობთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებს.

განსაკუთრებული წერტილების მახლობლობაში, ორი ცვლადის მქონე დინამიკური სისტემის ფაზურ ნაკადს, შეიძლება ქონდეს ერთ-ერთი სახე ნახ. 3.25 და ნახ. 3.26-დან:



ნახ. 3.25. ლოკალური ფაზური ნაკადები  
ნაკადები  
ა) მდგრადი კვანძი; ნ) არამდგრადი კვანძი;  
არამდგრადი  
ვ) ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილი.



ნახ. 3.26. ლოკალური ფაზური  
ნაკადები  
ა) მდგრადი ფოკუსი; ნ)  
არამდგრადი  
ვ) ცენტრი.

კვლევის ეს სქემა ძალაშია, ზოგადად, ყველა წრფივი ვტონომიური სისტემისათვის

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i=\overline{1,n} \quad (3.310)$$

ამ შემთხვევაში,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad tr A = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (3.311)$$

განვიხილოთ პრაქტიკული მაგალითი:

1. ვთქვათ, მოცემულია დინამიკური სისტემა

$$y' = \frac{2x+y}{3x+4y}. \quad (3.312)$$

გადავწეროთ სისტემა ნორმალური სახით

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y; \quad (3.313)$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y. \quad (3.314)$$

სისტემის კოეფიციენტების მატრიცას აქვს სახე:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.315)$$

$$\det A = -5; \quad \text{tr} A = 4$$

2. რადგან (3.313)-(3.314) სისტემის დეტერმინანტი უარყოფითია, ნახ. 3.25 გვაძლევს, რომ განსაკუთრებული (0;0) წერტილი **ჰიპერბოლური- უნაგირის ტიპს** მიეკუთვნება;
3. განსაკუთრებულ მიმართულებებს მივიღებთ (3.313) და (3.314) განტოლებების მარჯვენა მხარეების ნულთან გატოლებით და ამოხსნით  $y$  ცვლადის მიმართ:

$$y = -\frac{3}{4}x; \quad y = -2x. \quad (3.316)$$

პირველ წრფეს ფაზური ტრაექტორიები კვეთენ ვერტიკალური მიმართულებით, ხოლო მეორეს ჰორიზონტული მიმართულებით.

4. ვპოულობთ ასიმპტოტებს:

$$k = \frac{2x+kx}{3x+4kx} = \frac{2+k}{3+4k}; \quad (3.317)$$

ამ ტოლობიდან ვიღებთ კვადრატულ განტოლებას

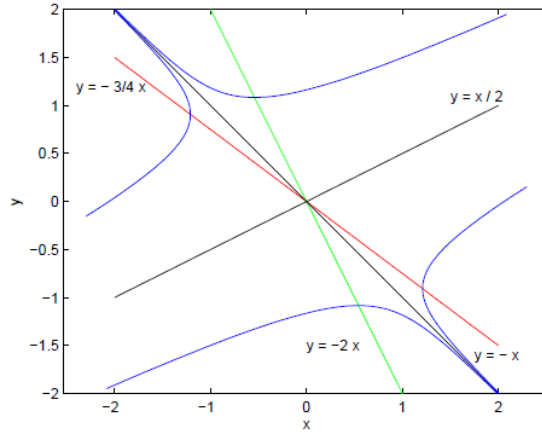
$$4k^2 + 2k - 2 = 0, \quad \text{ანუ, } 2k^2 + k - 1 = 0. \quad (3.318)$$

ამ განტოლების ფესვებია  $k_1 = -1$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ . რაც იმას ნიშნავს რომ გვაქვს ასიმპტოტები:  $y = -x$  და  $y = \frac{1}{2}x$ .

ეხლა განვსაზღვროთ ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებები (ნახ. 3.27) ამისათვის ავიღოთ რაიმე წერტილი ასიმპტოტზე, მაგალითად (1;-1) და გამოვითვალოთ  $y'$  ამ წერტილში (3.317) ფორმულიდან გამომდინარე

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)} = -1 < 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია  $y$  კლებადია  $x$ -ის ზრდისას და უახლოვდება განსაკუთრებულ (0;0) წერტილს.



ნახ. 3.27. უნაგირის ტიპის განსაკუთრებული წერტილის ფაზური ტრაექტორიები

### 3.11.2. ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური პორტრეტი

დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნის შესახებ ყველაზე სრულ ინფორმაციას იძლევა მისი გამოკვლევა ფაზურ სიბრტყეზე. ორი  $x$  და  $y$  ცვლადი, საშუალებას გვაძლევს, შევისწავლოთ (3.304),(3.305) სისტემის ამონახსნის ყოფაქცევა - ფაზურ სივრცეში და რადგან ცვლადების რაოდენობა ორია, ფაზური სივრცე წარმოადგენს ფაზურ სიბრტყეს.

იმ შემთხვევაში, თუ, საქმე გვაქვს  $n$  პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებების სისტემასთან (3.310), ან უფრო ზოგად, არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემასთან

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n} \quad (3.319)$$

მაშინ თითოეული  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ცვლადებიდან, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც  $n$  განზომილებიანი ფაზური სივრცის დამოუკიდებელი ცვლადი. ფაზური სივრცის ცნებას აზრი აქვს ნებისმიერი დიფერენციალური განტოლებებისათვის, თუმცა, როგორც

დავინახავთ, მას განსაკუთრებულად მდიდარი გეომეტრიული სტრუქტურა აქვს **ჰამილტონური სისტემებისათვის**.

მოცემული მომენტისათვის, ფაზური  $x$  და  $y$  კოორდინატების ნებისმიერი მნიშვნელობა ფაზურ სიბრტყეზე, მთლიანად განსაზღვრავს (3.304),(3.305) სისტემის მდგომარეობას, დროის ამ მომენტისათვის. როგორც წესი, ამ სისტემის ნებისმიერ ამონახსნს, ფაზურ სიბრტყეზე შეესაბამება გლუვი წირი, რომელსაც **ფაზურ ტრაექტორიას** (ან დონის წირს) უწოდებენ. ხოლო ამ ტრაექტორიის გასწვრივ მოძრაობას - **ფაზურ ნაკადს** ეძახიან. რადგან დიფერენციალური განტოლებების ფუნდამენტური თვისებაა, ამონახსნის ცალსახა ხასიათი, ნათელია, რომ სხვადასხვა ფაზური ტრაექტორიები არ იკვეთებიან.

თუ, ერთ ნახაზზე დავიტანთ, სხვადასხვა საწყისი პირობების შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული სისტემის ფაზური ტრაექტორიებისაგან შემდგარ რთულ სურათს, რომელსაც სისტემის **ფაზურ პორტრეტს** უწოდებენ. განვიხილოთ მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი რხევითი სისტემა-წრფივი ოსცილატორი (ამ სახით რხევითი სისტემის წარმოდგენა ხელსაყრელია **ჰამილტონური სისტემებისათვის**, რომლებსაც შემდგომში დაწვრილებით განვიხილავთ):

$$\dot{x} = y, \tag{3.320}$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x. \tag{3.321}$$

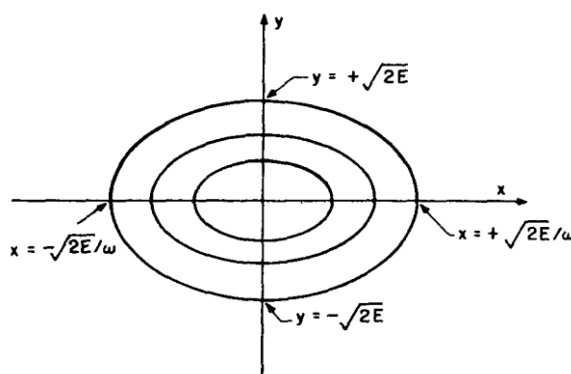
გავამრავლოთ (3.320) განტოლების ორივე მხარე  $\omega^2 x$  გამოსახულებაზე, ხოლო (3.321) განტოლების ორივე მხარე  $y$ -ზე. მიღებული შედეგები შევკრიბოთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$y\dot{y} + \omega^2 x\dot{x} = 0. \tag{3.322}$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ფაზური ტრაექტორიებისა და ნაკადის სახე, განვიხილოთ, ამ სისტემის პირველი ინტეგრალი. ჩვენი სისტემის შემთხვევაში, ის ადვილად მიიღება (3.322) განტოლების ინტეგრებით

$$E = \frac{1}{2}(y^2 + \omega^2 x^2). \quad (3.323)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ინტეგრალი სისტემის მექანიკურ ენერგიას წარმოადგენს. პირველი ინტეგრალი (3.323) საშუალებას გვაძლევს, ფაზური  $x$  და  $y$  კოორდინატების სიბრტყეში, წარმოვადგინოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი, რომლის თითოეული ფაზური ტრაექტორია ელიფსია და ნახევარღერძების სიდიდე, დამოკიდებულია საწყის პირობებზე, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემის ენერგიის სიდიდეს. ხოლო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები კი, განისაზღვრება (3.323) თანადობიდან ნახ. 3.28.



### 3.28. თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი

თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ნაკადი, შემოსაზღვრულია ფაზურ სივრცეში, სისტემის საწყისი ენერგიის შესაბამისი ელიფსური ფაზური ტრაექტორიით. ფაზური ნაკადი, წარმოადგენს კონცენტრული ელიფსების ერთობლიობას, რომლებიც ფაზურ სივრცეში განლაგებული არიან განსაკუთრებული წერტილის  $(0;0)$  გარშემო. განსაკუთრებული წერტილი ამ ელიფსების ცენტრს წარმოადგენს. ჩაკეტილი ფაზური ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეში,

შეესაბამება პერიოდულ რხევებს. ასეთი ტიპის განსაკუთრებულ წერტილს - ცენტრს უწოდებენ.

## 2. განვიხილოთ ეხლა დემპფირებული რხევითი სისტემა

$$\dot{x} = y, \tag{3.324}$$

$$\dot{y} = -\omega^2 x - \lambda y. \tag{3.325}$$

რომელიც მიიღება დემპფირებული რხევითი სისტემის მოდელიდან

$$\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{3.326}$$

როგორც ვიცით, ამ განტოლების ამონახსნი, მოიცემა ფორმულით

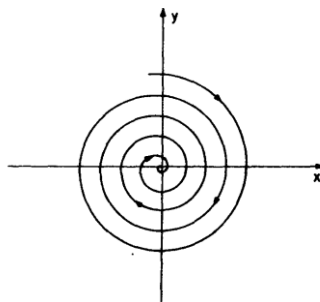
$$x(t) = ae^{-\lambda t/2} \sin(\nu t + \delta). \tag{3.327}$$

სადაც  $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}$ , თუ, ფესქვემა გამოსახულება მეტია ნულზე, ხოლო,  $\delta$  განისაზღვრება ამოცანის საწყისი პირობებით.

ამ სისტემისათვის, მექანიკური ენერგია აღარაა მუდმივი და ის ექსპონენციალურად კლებულობს

$$E(t) = E(0)e^{-\lambda t}. \tag{3.328}$$

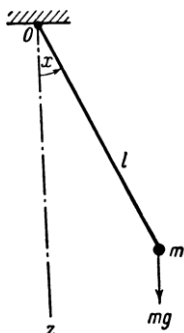
განსაკუთრებული წერტილის (0;0) ირგვლივ, ამონახსნები ეხვევა სპირალურად ნახ. 3.29.



ნახ. 3.29. დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიები

ამ ტიპის განსაკუთრებულ წერტილებს - მდგრად ფოკუსს უწოდებენ.

3. მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის აგება



ნახ. 3.30. მათემატიკური ქანქარას სქემა

მათემატიკური ქანქარას, რხევითი სისტემის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება, ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანია იმ არაწრფივი განტოლებებიდან, რომლის ანალიზური ამოხსნაც შეიძლება აიგოს იაკობის ელიფსური ფუნქციების მეშვეობით. ნახ. 3.30 გათვალისწინებით და ნიუტონის მეორე კანონზე დაყრდნობით, ადვილად ავაგებთ მათემატიკური ქანქარის რხევითი სისტემის დინამიკის, დიფერენციალურ განტოლებას

$$ml\ddot{x} + mg\sin x = 0, \tag{3.329}$$

სადაც,  $m$  – დაკიდული ტვირთის მასაა;  $l$  –საკიდელის სიგრძეა;  $x$  –ქანქარას ვერტიკალიდან გადახრის კუთხეა.

თუ, (3.329) განტოლების ორივე მხარეს, შევკვეცავთ მასაზე და გავყოფთ საკიდელი სიგრძეზე, გვექნება

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}\sin x = 0. \tag{3.330}$$

თუ, განვიხილავთ მცირე გადახრების შემთხვევას  $x \ll 1$ , მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ  $\sin x \approx x$ . ასეთ შემთხვევაში, ქანქარის არაწრფივი განტოლება (3.330) გარდაიქმნება წრფივ განტოლებად და



ის შეესაბამება, უკვე შესწავლილ თავისუფალ, არადემპფირებულ რხევით სისტემას

$$\ddot{x} + \frac{g}{l} x = 0. \quad (3.331)$$

ამ სისტემის საკუთრივი რხევის სიხშირე იქნება

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.332)$$

საწყისი (3.330) არაწრფივი სისტემის პირველი ინტეგრალი, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც სისტემის დაყვანილი მექანიკური ენერგია და ჩავწეროთ სახით

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 - \frac{g}{l} \cos x = E', \quad (3.333)$$

მართლაც, (3.333) პირველი ინტეგრალის წარმოებული გვაძლევს (3.330) განტოლებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ (3.330) განტოლების ინტეგრებით, შეიძლება მიღებულ იქნას (3.333) პირველი ინტეგრალი. (3.333) პირველი ინტეგრალის ამოხსნით მივიღებთ

$$t = \int \frac{dx'}{\sqrt{2(E' + \frac{g}{l} \cos x')}}. \quad (3.334)$$

გარდაქმნათ ეს ინტეგრალი პირველი გვარის ელიფსურ ინტეგრალად. ამისათვის, ჯერ შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\cos \omega = -E' \frac{l}{g}, \quad (3.335)$$

მაშინ (3.334) ინტეგრალი გადაიწერება სახით

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{\cos x' - \cos \omega}}. \quad (3.336)$$

თუ, გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას  $\cos x = 1 - 2k^2(\sin \varphi)^2$ , სადაც  $k = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$ , მივიღებთ

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - k^2(\sin \varphi')^2}}. \quad (3.337)$$

სადაც მოდულის ცხადი სახე იქნება  $k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{E'l}{g}\right)} = \sin \frac{\omega}{2}$ . იაკობის ელიფსური ფუნქციების გამოყენებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$sn\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, k\right) = \sin \varphi = \frac{1}{k} \sin \frac{x}{2}$  და ჩვენ მივდივართ გადახრის კუთხის, ცხადად გამოსახვის ფორმულაზე დროის მიხედვით, რასაც ვეძებდით

$$x(t) = 2 \arcsin \left[ k \operatorname{sn} \left( t \sqrt{\frac{g}{l}}, k \right) \right]. \quad (3.338)$$

ეხლა ავაგოთ მათემატიკური ქანქარის (3.330) რხევითი სისტემის ფაზური პორტრეტი. ამისათვის, გადავწეროთ ის ნორმალური ფორმით

$$\dot{x} = y, \quad (3.339)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x. \quad (3.340)$$

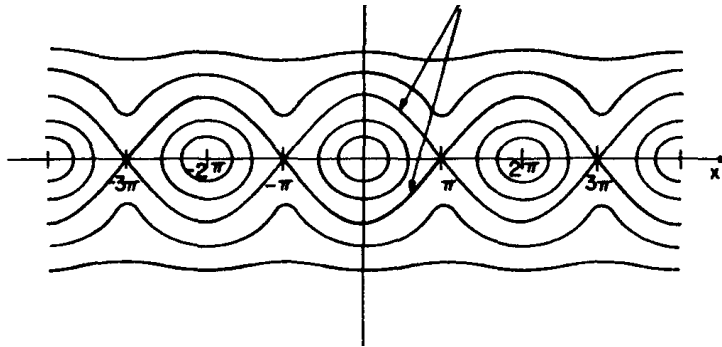
ამ განტოლებათა სისტემას შეესაბამება პირველი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2} y^2 - \frac{g}{l} \cos x = E'. \quad (3.341)$$

ცხადია, რომ ენერგიის მცირე სიდიდის მნიშვნელობებისათვის, (0;0) წონასწორობის წერტილის მახლობლობაში, გვექნება წრფივი პერიოდული ხასიათის რხევები. გასაგებია, რომ ამ დროს ფაზური პორტრეტი წარმოადგენს კონცენტრულ წრეწირებს ცენტრით წონასწორობის წერტილში. ენერგიის სიდიდის ზრდის შემთხვევაში, რხევის ამპლიტუდებიც გაიზრდება, ვიდრე არ მიაღწევს ისეთ ენერგიას როდესაც სურათი მკვეთრად იცვლება და ქანქარა აცდება ჩვეულებრივ რხევის რეჟიმს და ენერგიის შემდგომი ზრდისას, იწყებს ბრუნვით მოძრაობებს საკიდელი წერტილის მიმართ. ეს მოხდება, მაშინ როცა სხეული  $x = 0$  წონასწორობის მდგომარეობიდან გადადის  $x = \pm\pi$  კუთხის შესაბამის მდგომარეობაში და ეს მოხდება როცა ენერგია იქნება  $E' = \frac{g}{l}$ . წერტილი  $x = \pm\pi$ , როცა ქანქარა ყირამალა დგას და  $y = 0$  ქანქარას არამდგრადი წონასწორობის მდგომარეობა უკავია. შემდგომ, დამაბრუნებელი ძალის პერიოდულობის გამო, ფაზური პორტრეტი პერიოდულად უნდა გამეორდეს (0;0) წერტილიდან მარჯვნივ და მარცხნივ  $2\pi$  პერიოდით. ამგვარად,  $x = \pm 2\pi n$  წერტილები მდგრადი წონასწორობის წერტილებია და  $x = \pm(2n + 1)\pi$  არამდგრადი წონასწორობის წერტილებია. უნდა აღინიშნოს, რომ არამდგრადი წონასწორობის წერტილებში ადგილი

აქვს რხევითი მოძრაობის გადასვლას ბრუნვით მოძრაობაში. რაც გამოიხატება ფაზური ტრაექტორიების გაშლაში. მთლიანად, მათემატიკური ქანქარის ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ. 3.31

სეპარატრისები



ნახ. 3.31.მათემატიკური ქანქარის ფაზური პორტრეტი

ფაზური ტრაექტორიების წყვილს, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფენ რხევითი და ბრუნვითი მოძრაობის შესაბამის ტრაექტორიებს და იკვეთებიან არამდგრადი წონასწორობის შესაბამის წერტილებში - სეპარატრისები ეწოდებათ. ფაზურ სიბრტყეზე, სეპარატრისის გასწვრივ მოძრაობას შეესაბამება მოძრაობა უსასრულო პერიოდით. სეპარატრისები გამოყოფენ, სისტემის მუშაობის თვისობრივად სხვადასხვა რეჟიმებს. ასე, რომ ისინი ბიფურკაციის მრუდებს წარმოადგენენ.

### 3.11.3. კონსერვატიული სისტემების ფაზური პორტრეტი

წინა განხილულ მაგალითებში არსებობდა მუდმივი პირველი ინტეგრალი სისტემის მექანიკური ენერჯიის სახით, რაც გვიმარტივებდა სისტემისათვის გლობალური ფაზური პორტრეტის აგებას.

ისეთ სისტემებს, რომლებისთვისაც ენერჯია წარმოადგენს პირველ ინტეგრალს - კონსერვატიული სისტემები ეწოდებათ.

იმ შემთხვევებში, როდესაც სისტემის მთლიანი ენერგია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ (ტრადიციული ფორმით), როგორც კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამი, ფაზური ტრაექტორიების სტრუქტურა (რომლებსაც ამ შემთხვევაში დონის წირებს უწოდებენ) განსაკუთრებულად მარტივდება. ასეთი სისტემებისათვის, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$E = E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x), \quad (3.342)$$

სადაც, „პოტენციალური  $V(x)$  ფუნქცია“, როგორც წესი  $x$  ცვლადის არაწრფივი ფუნქციაა. მაგალითად, მათემატიკური ქანქარისათვის  $V(x) = -\frac{g}{l} \cos x$ ; ხოლო კუბური ოსცილატორისათვის  $V(x) = ax^2 + bx^4$ . თუ, გავითვალისწინებთ, რომ დინამიკის განტოლება ჩაწერილი სახით

$$\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}(x) = 0, \quad (3.343)$$

შესაბამება ნაწილაკის მოძრაობას პოტენციალურ ორმოში  $V(x)$ , (სადაც, სრულებით არაა სავალდებულო, რომ ეს განტოლება მექანიკურ პროცესებს აღწერდეს), ფიზიკური ინტუიციით ადვილად ავაგებთ შესაბამის დონის წირებს.

მაგალითები:

1. განვიხილოთ თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემა (წრფივი ოსცილატორი).

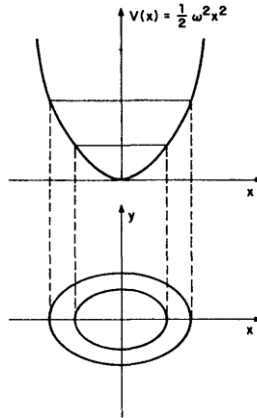
მოძრაობის განტოლება

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

გადავწეროთ (3.343) სახით

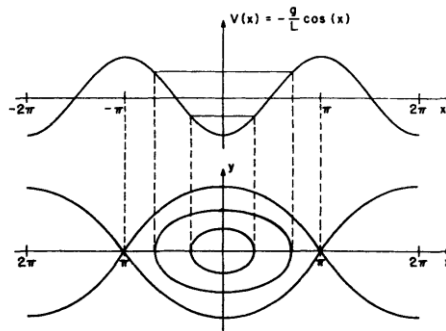
$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = 0.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში  $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ . ავაგოთ ამ კვადრატული ფუნქციის შესაბამისი დონის წირები და შესაბამისი ფაზური პორტრეტი ნახ. 3.32



ნახ. 3.32. თავისუფალი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის (კონსერვატიული სისტემა) ფაზური პორტრეტის აგება

2. მათემატიკური ქანქარის შემთხვევაში, გვაქვს პერიოდული პოტენციალური ორმო  $V(x) = -\frac{g}{l} \cos x$ . შესაბამის ფაზურ პორტრეტსაც ადვილად ავაგებთ ანალოგიურად, ნახ. 3.33.



ნახ. 3.33. მათემატიკური ქანქარას (კონსერვატიული სისტემის) ფაზური პორტრეტის აგება პოტენციალური ორმოს გრაფიკის საშუალებით

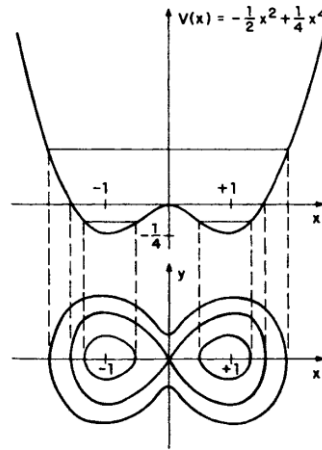
3. კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

განვიხილოთ კუბური ოსცილატორი რომლის დინამიკის განტოლებას აქვს სახე

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0,$$

მაშინ შესაბამის პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე:

$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ . პოტენციალური ფუნქციის გრაფიკის მეშვეობით ადვილად ავაგებთ სისტემის ფაზურ პორტრეტსაც ნახ. 3.34

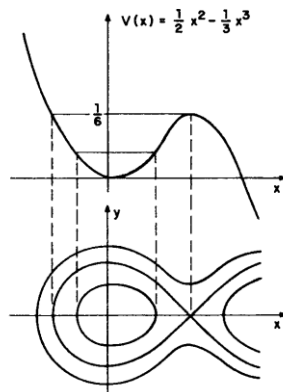


ნახ. 3.34. კუბური ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

#### 4. კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

განვიხილოთ სისტემა

$\ddot{x} + x - x^2 = 0$ , ამ სისტემის პოტენციალურ ფუნქციას ექნება სახე:  $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ . ამ პოტენციალური ფუნქციის დონის წირები საშუალებას გვაძლევენ ავაგოთ სისტემის ფაზური პორტრეტი ნახ. 3.35



ნახ. 3.35. კვადრატული ოსცილატორის ფაზური პორტრეტი

#### 3.11.4. არაწრფივი სისტემის მდგომარეობის განმსაზღვრელი, განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა

გლობალური ფაზური პორტრეტის აგება, განსაკუთრებულად მარტივია ერთგანზომილებიანი კონსერვატიული სისტემებისათვის. მნიშვნელოვანი როლი უკავიათ განსაკუთრებულ (წონასწორობის)

წერტილებს, რომლებიც ხასიათდებიან ცნობილი ლოკალური ყოფაქცევით: მდგრადი წონასწორობის წერტილების გარშემო წარმოიქმნებიან ფაზური, შეკრული მრუდები; ხოლო, არამდგრადი წერტილების გარშემო წარმოიქმნებიან ჰიპერბოლური ფაზური წირები. არაკონსერვატიული სისტემების შემთხვევაში, თუ, ზუსტი ამონახსნი არაა ცნობილი, ფაზური პორტრეტის შედგენა მეტად რთული პროცესია. თუმცა, ყოველთვის შესაძლებელია მიახლოებითი ლოკალური ფაზური პორტრეტის შედგენა, თუ, განვსაზღვრავთ წონასწორობის წერტილებს (რომლებსაც, შემდგომში უძრავ წერტილებს ვუწოდებთ) მათ გარშემო გამოვხაზავთ შესაბამის ფაზურ ტრაექტორიებს. უძრავი წერტილები შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ფაზური ტრაექტორიების მაორგანიზებელი ფაქტორები. ასე, რომ თუ, ვიპოვით უძრავ წერტილებს და გამოვიკვლევთ მათი მდგრადობის საკითხს, მაშინ შესაძლებელი ხდება ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.

განვიხილოთ ზოგადი სახის, მეორე რიგის სისტემები:

$$\dot{x} = f(x, y), \tag{3.344}$$

$$\dot{y} = g(x, y), \tag{3.345}$$

სადაც  $f$  და  $g$  ნებისმიერი ორი ცვლადის, საზოგადოდ, არაწრფივი გლუვი ფუნქციებია.

უძრავი ეწოდებათ ისეთ  $(x_0, y_0)$  წერტილებს, რომელთათვისაც ფაზური ნაკადი სტაციონარულია (ანუ,  $x = y = 0$ ):

$$f(x_0, y_0) = 0, \tag{3.346}$$

$$g(x_0, y_0) = 0. \tag{3.347}$$

**P.S.** მაშასადამე, უძრავი წერტილების საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა (3.346),(3.347). ამ განტოლებათა

სისტემას, საზოგადოდ, შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რაოდენობის ამონახსნი.

მას შემდეგ, რაც ვიპოვით ყველა უძრავ წერტილს, უნდა მოვახდინოთ თითოეული მათგანის გამოკვლევა მდგრადობაზე.

სისტემის უძრავი  $(x_0, y_0)$  წერტილის მდგრადობაზე გამოკვლევისათვის, უნდა შევისწავლოთ სისტემის ყოფაქცევა, ამ წერტილის მცირე მიდამოში  $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y)$ . ამისათვის  $f$  და  $g$  ფუნქციები გავშალოთ ამ ნაზრდების მიმართ ტეილორის მწკრივებად, უძრავი წერტილის მიდამოში

$$\delta \dot{x} = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\delta x + f_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (3.348)$$

$$\delta \dot{y} = g(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y) - g(x_0, y_0) = g_x(x_0, y_0)\delta x + g_y(x_0, y_0)\delta y + \dots \quad (3.349)$$

თუ, შემოვიფარგლებით, მხოლოდ პირველი რიგის წევრებით, მაშინ არაწრფივი სისტემა (3.348),(3.349), შეგვიძლია გადავწეროთ წრფივი მიახლოების სახით (3.350)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (3.350)$$

სადაც  $2 \times 2$  მატრიცას, რომელსაც ავლნიშნავთ  $A$  ასოთი, მდგრადობის მატრიცას უწოდებენ. უძრავი წერტილების მდგრადობის შესასწავლი, (3.350) პირველი რიგის, წრფივ, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა ადვილად ზოგადდება იმ შემთხვევისათვის, როცა ცვლადთა რაოდენობაა  $n$  და მოცემული გვაქვს განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.351)$$

უძრავი წერტილების მდგრადობის პირობების ჩამოყალიბება ადვილად ზოგადდება (3.350) სისტემიდან (3.351) სისტემისათვის, საკუთრივი რიცხვების ენაზე.



შემოვიღოთ აღნიშვნები  $\delta X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$ ; ხოლო ორი საკუთრივი ვექტორია  $D_1$  და  $D_2$ , რომლებიც შეესაბამებიან, შესაბამისად, ორ საკუთრივ  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  რიცხვს. მაშინ (3.350) სისტემის ზოგადი ამონახსნი, როგორც ვიცით, მოიცემა ფორმულით

$$\delta X = c_1 D_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 D_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (3.352)$$

სადაც  $c_1$  და  $c_2$  ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, ხოლო საკუთრივი რიცხვები წარმოადგენენ მდგრადობის მატრიცის მახასიათებელი (3.353) განტოლების ფესვებს

$$\det|A - \lambda I| = 0, \quad (3.353)$$

$I$  - ერთეულოვანი მატრიცაა. ჩვენი წინა მსჯელობებიდან ცხადია, რომ თუ,  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  საკუთრივი რიცხვები წმინდა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვებია, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მახლობელი წერტილებიდან დაწყებული ლოკალური ფაზური ტრაექტორიები, წარმოადგენენ ელიფსებს და შეესაბამებიან მდგრად უძრავ წერტილებს. ხოლო, თუ საკუთრივი რიცხვებს გააჩნიათ არანულოვანი ნამდვილი ნაწილი, მაშინ შესაბამისი უძრავი წერტილის მდგრადობა-არამდგრადობის საკითხი დამოკიდებულია მის ნიშანზე. აქ ბევრი სხვადასხვა შემთხვევაა და ჩვენ მათ შვეისწავლით, მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს  $D_1$  და  $D_2$  საკუთრივი ვექტორების წვლილიც. მათი მიმართულებები მიუთითებენ, ლოკალური ფაზური ტრაექტორიების მიმართულებებზე.

### 3.11.4.1. უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია

1. თუ,  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , მაშინ გვაქვს *მდგრადი კვანძი* ნახ. 3.25a, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხრიდან ჩაქრობადია უძრავი წერტილისაკენ;

2. თუ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , მაშინ - *არამდგრადი კვანძი* ნახ. 3.25ნ, ლოკალური ფაზური ნაკადი ორივე მხარეს ექსპონენციალურად იზრდება, უძრავი წერტილიდან გამოსვლისას;

3. თუ,  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , მაშინ - *უნაგირა(ჰიპერბოლური) წერტილია*. ექსპონენციალური ზრდა გვაქვს ერთ მხარეს და ექსპონენციალური კლება მეორე მხარეს ნახ. 3.25ბ. სწორედ ასეთ ტიპს მიეკუთვნებიან მათემატიკური ქანქარასა და ზოგიერთი სხვა, არაწრფივი ოსცილატორის განხილული, არამდგრადი უძრავი წერტილები. უძრავ წერტილში შემავალ და გამომავალ მიმართულებებს, ხშირად, მდგრად და შესაბამისად, არამდგრად მრავალსახეობებს (სეპარატორისები) უწოდებენ;

4. თუ,  $\lambda_1 = -\alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = -\alpha - i\beta$ , ( $\alpha, \beta > 0$ ), მაშინ - *მდგრადი ფოკუსია*. ნაკადი ეხვევა და შედის უძრავ წერტილში ნახ. 3.26ა;

5. თუ,  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , ( $\alpha, \beta > 0$ ), მაშინ - *არამდგრადი ფოკუსი*. ასეთ შემთხვევაში საკუთრივი რიცხვის ნამდვილი ნაწილი დადებითია, რაც იმას ნიშნავს, რომ სპირალი გამოდის უძრავი წერტილიდან და თანდათან იხსნება ნახ.3.26ბ;

6. თუ,  $\lambda_1 = i\beta$ ,  $\lambda_2 = -i\beta$ , ( $\alpha, \beta > 0$ ), მაშინ - *მდგრადი ელიფსური (ცენტრი) წერტილი*. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს ელიფსური ფაზური ტრაექტორიები უძრავი წერტილის გარშემო.

**P.S.** ზოგჯერ, მაგალითად 4,5,6 შემთხვევებში ისმის კითხვა, თუ საითაა მიმართული ფაზური ტრაექტორიები, საათის ისრის მიმართულებით, თუ მის საწინააღმდეგოდ. ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მოცემული უძრავი წერტილისათვის, უნდა განვიხილოთ გაწრფივებული (3.350) განტოლება. დავუშვათ, რომ  $\delta y = 0 \wedge \delta x > 0$ . თუ, აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ  $\delta y < 0$ , მაშინ „გვაქვს დაღმასვლითი მოძრაობა“, ანუ ლოკალურად, ფაზური ტრაექტორიები მოძრაობენ საათის ისრის მიმართულებით, ხოლო

თუ,  $\delta y > 0$ , მაშინ გვაქვს „აღმასვლითი მოძრაობა“ და მაშასადამე, საათის ისრის საწინააღმდეგოდ.

აქამდე განვიხილავდით არაგადაგვარებული  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  ფესვების შემთხვევებს.

თუ, ფესვები გადაგვარებულია, მაშინ (3.350) განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით

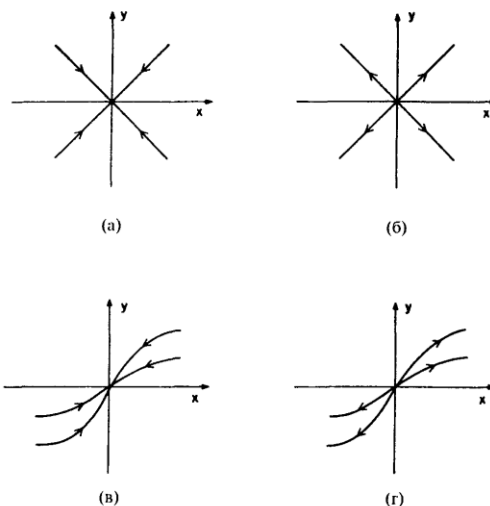
$$\delta X = (c_1 D_1 + c_2 (D_2 + D_1 t)) e^{\lambda t}. \quad (3.354)$$

ასეთ შემთხვევებში, უძრავი წერტილის ტიპი, ცხადია, რომ დამოკიდებულია  $D_1$  და  $D_2$  საკუთრივი ვექტორების ნიშანზე და ტიპზე.

7. თუ,  $D_2 = (0,0) \wedge (\nabla D_1)$ , მაშინ ნაკადის წირები წარმოადგენენ დამოუკიდებელ ურთიერთმკვეთ წრფეებს, რომლებიც ქმნიან:

a) მდგრად ვარსკვლავს, თუ  $\lambda < 0$ , ნახ. 3.36a;

ბ) არამდგრად ვარსკვლავს, თუ  $\lambda > 0$ , ნახ. 3.36b.



ნახ. 3.36. ლოკალური ფაზური ნაკადები: a) მდგრადი ვარსკვლავი; ბ) არამდგრადი ვარსკვლავი; B) მდგრადი არასაკუთრივი კვანძი; r) არამდგრადი არასაკუთრივი კვანძი

8. თუ, საკუთრივი ვექტორი  $D_2 \neq (0,0)$ , მაშინ ფაზური ტრაექტორიები იქნებიან მრუდი წირები და წარმოქმნიან:

a) მდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ  $\lambda < 0$ , ნახ. 3.36B;

ბ) არამდგრად არასაკუთრივ კვანძს, თუ  $\lambda > 0$ , ნახ. 3.36Г

### 3.11.4.2. უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები

ეხლა განვიხილოთ ზემოთმოცემული მეთოდების გამოყენება ჩვენს ნაცნობ რხევით სისტემებზე.

#### a) დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა

ასეთ სისტემას, აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი  $(x_0, y_0) = (0,0)$ . სისტემის შესაბამისი მოდელი წრფივია და გაწრფივება აღარ ჭირდება

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.355)$$

მდგრადობის მატრიცაა  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{bmatrix}$ . მისი საკუთრივი რიცხვებია  $\lambda_1 = -\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}$  და  $\lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}$ . იმის მიხედვით, თუ, როგორია ფესქვემა გამოსახულება, გვაქვს სხვადასხვა ვარიანტები:

- თუ,  $\lambda^2 > 4\omega^2$ , მაშინ  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , შესაბამისად წერტილი  $(0,0)$  მდგრადი კვანძია;
- თუ,  $\lambda^2 < 4\omega^2$ , მაშინ  $\lambda_1 = \lambda_2^* = -\frac{\lambda}{2} + i\frac{\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}}{2}$  და შესაბამისად გვაქვს მდგრადი სპირალი(ფოკუსი); თუ (3.355) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ  $\delta y = 0 \wedge \delta x > 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$\delta\dot{y} < 0$ , აქედან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობა წარმოებს საათის ისრის მიმართულებით ნახ. 3.29;

- თუ,  $\lambda^2 = 4\omega^2$ , მაშინ  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$ , შესაბამისად, ამ შემთხვევაში, გვაქვს არასაკუთრივი მდგრადი კვანძი.

### 6) მეორე მაგალითია თავისუფალი მათემატიკური ქანქარა

ამ სისტემას აქვს უძრავი წერტილების უსასრულო რაოდენობა  $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{N}$  და გაწრფივებულ მოდელს აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad (3.356)$$

საკუთრივი რიცხვები იქნება  $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l} \cos x_n}$ . როცა  $x_n = 2\pi n$ , მაშინ  $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს მდგრადი, ელიფსური (ცენტრი) უძრავი წერტილები, ხოლო, როცა  $x_n = (2n + 1)\pi$ , მაშინ  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$ , რაც შეესაბამება ჰიპერბოლურ (უნაგირა) არამდგრად უძრავ წერტილებს.

### ბ) ეხლა განვიხილოთ მათემატიკური ქანქარის თავისუფალი, დემპფირებული რხევითი სისტემა

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე

$$\dot{x} = y, \quad (3.357)$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin x - \lambda y. \quad (3.358)$$

ამ სისტემას იგივე  $(x_n, y_n) = (\pm\pi n, 0), n \in \mathbb{N}$  უძრავ წერტილთა სისტემა აქვს, რაც თავისუფალ მათემატიკურ ქანქარას. მაგრამ შესაბამის გაწრფივებულ სისტემას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_n & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}. \quad (3.359)$$

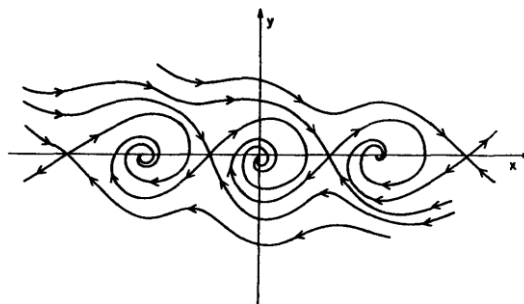
სისტემის მდგრადობის მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 - \frac{4g}{l} \cos x_n} .$$

უძრავ წერტილებში  $(x_n, y_n) = (\pm(2n + 1)\pi, 0)$  კვლავ აქვს ადგილი უტოლობებს  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , რაც იმას ნიშნავს რომ ეს წერტილები, ჰიპერბოლური (უნაგირა) ტიპს განეკუთვნებიან. ხოლო წერტილებში  $(x_n, y_n) = (\pm 2\pi n, 0)$  კი ადგილი აქვს რამოდენიმე შემთხვევას:

- $\lambda^2 < \frac{4g}{l}$ ,  $\lambda_1 \wedge \lambda_2$  კომპლექსურად შეუღლებული ფესვებია უარყოფითი ნამდვილი ნაწილით, მაშინ გვაქვს მდგრადი ფოკუსი მბრუნავი საათის ისრის მიმართულებით ნახ. 3.37;
- $\lambda^2 > \frac{4g}{l}$ , რასაც მივყავართ უტოლობებამდე  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს მდგრადი კვანძი;
- $\lambda^2 = \frac{4g}{l}$ , მაშინ ჩვენ გვაქვს გადაგვარებული შემთხვევა, როცა  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2}$ , რაც შეესაბამება მდგრად არასაკუთრივ კვანძს.

რადგან ამ შემთხვევაში, ენერგია არაა მუდმივი, დონის წირებს ზუსტად ვერ დავხაზავთ, როცა არ ვიცით ზუსტი ამონახსნი, თუმცა, უძრავი წერტილების იდენტიფიკაცია და ფაზური ტრაექტორიების ლოკალური ანალიზი, საშუალებას გვაძლევს, მიახლოებით ავაგოთ სისტემის გლობალური ფაზური პორტრეტი.



ნახ. 3.37. ჩაქრობადი(დემპფირებული) მათემატიკური ქანქარას ფაზური პორტრეტი იმ შემთხვევაში, როცა  $\lambda^2 < \frac{4g}{l}$

რ) განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელი

ეს მოდელი პირველად ააგო ვოლტერამ პოპულაციური დინამიკის შესასწავლად. განვიხილოთ ერთ-ერთი, ამ ტიპის მოდელებიდან

$$\dot{x} = x - xy, \tag{3.360}$$

$$\dot{y} = -y + xy. \tag{3.361}$$

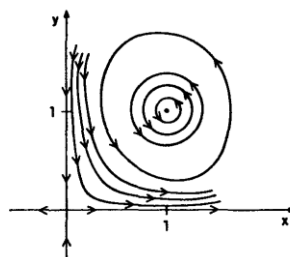
სადაც  $x$  შეიძლება აღნიშნავდეს, მაგალითად კურდღლების პოპულაციას (კურდღლების ზუსტ რაოდენობას პოპულაციაში), ხოლო  $y$  მელიების პოპულაციას. შესაძლოა ტრივიალური შემთხვევა, როცა  $y = 0$ ,  $x > 0$ , მაშინ კურდღლების პოპულაცია უსასრულოდ იზრდება, რადგან მელიები არ არიან. შებრუნებულ შემთხვევაში, როცა  $x = 0$ , და  $y > 0$ , მელიები განწირული არიან შიმშილით სიკვდილისათვის, რადგან არ არიან მათი საკვები კურდღლები. ორივე პოპულაციის თანაცხოვრებისათვის, არსებობს ბალანსის შესაძლებლობა, რადგან მელიები ამცირებენ კურდღლების პოპულაციას და თუ ბევრს შეჭამენ თვითონ კი გამრავლდებიან, მაგრამ შემდგომში საჭმელი აღარ ეყოფათ და მათი პოპულაციაც შემცირდება. (3.360),(3.361) განტოლებათა სისტემა უმარტივესია და მისი უფრო დაზუსტება მარტივია იმის გათვალისწინებით, რომ კურდღლების კვების არეალიც შეზღუდულია, არსებობს ავადმყოფობა, უჭკუო საქციელი, კურდღლების მიერ კურდღლების დახოცვა . . .

სისტემას აქვს ორი უძრავი წერტილი  $(x_1, y_1) = (0,0)$  და

$(x_2, y_2) = (1,1)$ . გაწრფივებულ განტოლებას აქვს სახე

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y_i & -x_i \\ y_i & -1 + x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,2} \tag{3.362}$$

პირველი უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია  $\lambda = \pm 1$ , რაც იმის მიმანიშნებელია რომ  $(x_1, y_1) = (0,0)$  ჰიპერბოლური (უნაგირა) წერტილია. ხოლო მეორე უძრავი წერტილის შესაბამისი საკუთრივი რიცხვებია  $\lambda = \pm i$ , რაც შეესაბამება ელიფსურ წერტილს. შესაბამის მიახლოებით ფაზურ პორტრეტს აქვს სახე ნახ. 3.38.



ნახ. 3.38. მტაცებელი-მსხვერპლის მოდელის ფაზური პორტრეტი

**P.S.** უნდა აღინიშნოს, რომ გაწრფივებული მოდელით მდგრადობის შესწავლა, ყოველთვის არ იძლევა რეალურ შედეგს არაწრფივი სისტემებისათვის.

### 3.11.4.3. ზღვართი ციკლები

ზღვართი ციკლი, წარმოადგენს ფაზური ტრაექტორიების განსაკუთრებულ ტიპს, რომელსაც ჩვენ ვერ ავაგებთ გაწრფივებული ანალიზის მეშვეობით. ყველაზე უფრო პოპულარულია ზღვართი ციკლი, რომელიც აქვს ვან-დერ-პოლის ცნობილ რხევით სისტემას:

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.363)$$

გაწრფივებული, პირველი რიგის მიახლოების დონეზე ჩატარებული მდგრადობის ანალიზი ამ სისტემისათვის

$$\dot{x} = y, \quad (3.364)$$

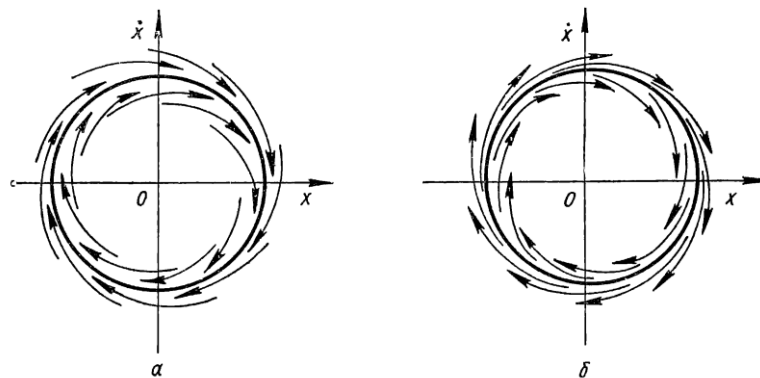
$$\dot{y} = \lambda(1 - x^2)y - \omega^2 x, \quad (3.365)$$

გვიჩვენებს, რომ სისტემას აქვს უძრავი წერტილი  $x = y = 0$ , რომელიც წარმოადგენს არამდგრად კვანძს, თუ  $\lambda^2 > 4\omega^2$  და წარმოადგენს არამდგრად ფოკუსს, თუ  $\lambda^2 < 4\omega^2$ . განვიხილოთ აქედან მეორე შემთხვევა. რადგან (3.365) განტოლების მარჯვენა ნაწილში,  $x$  და  $y$  ცვლადების ზრდისას, დომინირებს არაწრფივი წევრი ( $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} \dot{y} = -\lambda x^2 y$ ), შეგვიძლია დავუშვათ, რომ პირიქით, უძრავი წერტილისაკენ მიახლოებისას, ხდება არაწრფივი წევრის ჩაქრობა. ასე, რომ უძრავი წერტილიდან მოშორებით, ხდება ფაზური ტრაექტორიების მოძრაობა პერიფერიიდან ცენტრისაკენ. ამონახსნის უწყვეტობა ითხოვს, რომ არსებობდეს ამონახსნი მათ შორისაც. ეს ამონახსნი არის ზღვართი ციკლი, რომელიც წარმოადგენს უძრავი



წერტილის მომცველ შეკრულ მრუდს. სისტემის სხვა ამონახსნები, რომლებიც გამოდიან ამ მრუდის გარედან, ასევე, შიგნიდან მიიზიდებიან ზღვართი ციკლის მიერ. მისკენ მიისწრაფიან, მაგრამ არასოდეს არ კვეთენ. ამ სისტემის ზუსტი ამონახსნი ცნობილი არ არის, თუმცა, უბრალო ფიზიკურ მსჯელობას მივყავართ ზღვართი ციკლამდე. მისი ზუსტი გეომეტრიული ფორმის დადგენა შესაძლებელია მხოლოდ სისტემის მიახლოებითი ამოხსნით სხვადასხვა საწყისი პირობების შემთხვევაში.

საზოგადოდ, ზღვართი ციკლი შეიძლება იყოს მდგრადი (როდესაც შიგნითაც და გარეთაც დაწყებული ფაზური ტრაექტორიები ზღვართი ციკლისაკენ მიისწრაფიან) ნახ. 3.39a, ან არამდგრადი, როცა ზღვართი ციკლის მახლობლობაში დაწყებული ტრაექტორიები თანდათან სცილდებიან მას ნახ. 3.39b.



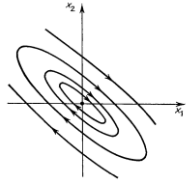
ნახ. 3.39. ზღვართი ციკლის სქემატური ნახაზები: a) მდგრადი ზღვართი ციკლი; b) არამდგრადი ზღვართი ციკლი

ამოცანები და სავარჯიშოები:

1. შეადგინეთ მოცემული სისტემების ფაზური პორტრეტები და პასუხი დაასაბუთეთ:

a)

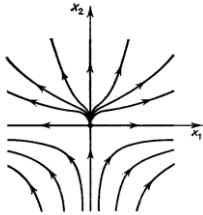
$$\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2.$$



პასუხი:

ბ)

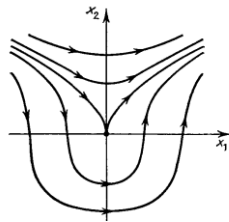
$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2^2.$$



პასუხი:

ბ)

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_1.$$



პასუხი:

2. ჩამოაყალიბეთ უძრავი წერტილების მდგრადობის გამოკვლევის ალგორითმი და განიხილეთ უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია;
3. შეადგინეთ კონსერვატიული სისტემის მაგალითები, ააგეთ შესაბამისი პოტენციალური ორმო და ფაზური პორტრეტი.

### ლიტერატურა:

1. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
2. ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი

- (ეკონომიქსი Mathcad – ისა და Matlab – ის ბაზაზე), ტ.2., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2007
- 3.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(მაგისტრანტებისათვის), ტ.3., საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008
  4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
  5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика, т.1, Наука, Москва, 1973
  - 6.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (რხევითი პროცესები), ტ.4, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010
  - 7.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტ.5, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2012
  - 8.Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
  - 9.Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989
  - 10.Яковенко Г.Н.Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 ([www.study.com.ru](http://www.study.com.ru))
  - 11.Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991
  - 12.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი(დინამიკური სისტემები და ქაოსი), ტ.6, სტუ, თბილისი, 2013

### 3.12. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები

სივრცეში, მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს  $\vec{r}(x, y, z)$ . ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$  სიჩქარე და  $\vec{W} = \ddot{\vec{r}}(t)$  აჩქარება. თუ, მოცემული გვაქვს  $n$ -მატერი-ალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვჭირდება  $n$  - ცალი რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე,  $3n$ -კოორდინატი.

**განსაზღვრება:** იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას - მისი თავისუფლების ხარისხი ეწოდება.

$n$  - მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სამგანზომილებიან სივრცეში სისტემის თავისუფლების ხარისხი  $3n$  - ის ტოლია.

**P.S.** ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი, რომ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები იყვნენ.

**განსაზღვრება:** ნებისმიერ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას,  $n$ - თავისუფ-ლების ხარისხის მქონე სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებს უწოდებენ, ხოლო მათი, დროით წარმოებულების ერთობლიობას:  $\dot{q}_i$ , განზოგადებულ სიჩქარეებს.

#### 3.12.1. ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი

სისტემის მხოლოდ კონფიგურაციის ცოდნა, არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება სისტემას დროის სხვა მომენტებში. როგორც ექსპერიმენტებით იქნა დადგენილი, მექანიკური სისტემის მდგომარეობის საპოვნელად დროის ნებისმიერ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ სისტემის საწყისი კონფიგურაცია  $q_i(0)$  და შემადგენელი მატერიალური წერტილების საწყისი  $\dot{q}_i(0)$  სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი ფიზიკური პარამეტრის ცოდნა, კლასიკურ

მექანიკაში, საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ  $\ddot{q}_i$  აჩქარებებიც დროის ნებისმიერ მომენტში.

თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i(t_1)$  მდგომარეობიდან  $q_i(t_2)$  მდგომარეობაში, მაშინ ჭეშმარიტი მოძრაობის საპოვნელად, უნდა ვისარგებლოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპით.

ეს პრინციპი მოითხოვს რომ, თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i(t_1)$  მდგომარეობიდან, რომელიც დროის  $t_1$  მომენტში ეკავა, ახალ,  $q_i(t_2)$  მდგომარეობაში დროის  $t_2$  მომენტისათვის, მაშინ ინტეგრალს ამ დროის მომენტებს შორის მოცემული  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  ფუნქციიდან, რომელსაც ლაგრანჟიანს უწოდებენ, იყოს ექსტრემალური, ანუ, ნულს უნდა უდრიდეს ქმედების  $W$  ინტეგრალის პირველი ვარიაცია  $\delta W = 0$ .

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (3.366)$$

ეხლა, ჰამილტონის პრინციპზე დაყრდნობით, გამოვიყვანოთ მოძრაობის განტოლება.

სიმარტივისათვის, ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთის ტოლია. ასე, რომ საპოვნელია  $q(t)$  ფუნქცია, რომელიც ექსტრემუმს მიაწიჭებს  $W$  ქმედების ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან და სისტემას გადაიყვანს  $q(t_1)$  მდგომარეობიდან, რომელიც დროის  $t_1$  მომენტში ეკავა, ახალ,  $q(t_2)$  მდგომარეობაში დროის  $t_2$  მომენტისათვის.

ვთქვათ  $q(t)$  ჩვენი საძებნი ფუნქციაა. მივცეთ მას მცირე  $\delta q(t)$  ნაზრდი-ვარიაცია, მაშინ გვექნება ახალი  $q(t) + \delta q(t)$  ფუნქცია. რადგან ამ ფუნქციამ უნდა გაიაროს  $q(t_1)$  და  $q(t_2)$  წერტილებში, ცხადია რომ

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (3.367)$$

შესანიშნავია ის ფაქტი, რომ ჩვენ ვეძებთ გადაადგილების ვარიაციას და თვითონ გადაადგილება ჯერ არ ვიცით. ქმედების ინტეგრალის ექსტრემუმის საპოვნელად, მისი პირველი ვარიაცია ნულს უნდა გავუტოლოთ

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (3.368)$$

თუ, პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გავშლით ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნებთ, მხოლოდ წრფივ წევრებს, გვექნება

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (3.369)$$

სადაც  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$ , ამ ფაქტის გათვალისწინებით და (3.369) ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (3.370)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.367) სასაზღვრო პირობებს გადაადგილების პირველი ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ (3.370) ფორმულაში პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშინ ცხადია, რომ მეორე ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაც უნდა ნულის ტოლი იყოს. ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის განტოლება ლაგრანჟის ფორმით

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.371)$$

$n$  თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ცვლადებისათვის, ცალ-ცალკე უნდა შევადგინოთ ვარიაციები  $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$ . მაშინ, ანალოგიურ პროცედურას, მივყავართ ლაგრანჟის ცნობილ განტოლებებამდე

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.372)$$

თუ, მოცემული სისტემისათვის ცნობილია ლაგრანჟიანის სახე, მაშინ (3.372) განტოლებები წარმოადგენენ მოძრაობის განტოლებებს და ცნობილი საწყისი პირობების  $q_i(0); \dot{q}_i(0)$  შემთხვევაში ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის ევოლუციას.

ლ.ლანდაუსა და ე.ლიფშიცის წიგნში დასაბუთებულია, რომ თავისუფალი, არაურთიერთქმედი ნაწილაკებისათვის, ერთგვაროვან, იზოტროპულ სივრცეში, ლაგრანჟიანი პირდაპირპროპორციულია განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატისა და თუ, პროპორციულობის კოეფიციენტად მასის ნახევარს ავიღებთ, მივიღებთ რომ ლაგრანჟიანი სისტემის კინეტიკური ენერჯის ტოლია

$$L = T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2}. \quad (3.373)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მატერიალური ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ გარკვეული კანონით, რომელიც მოიცემა პოტენციალური ენერჯის  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$  ფუნქციით, როგორც ექსპერიმენტებმა აჩვენეს, ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.374)$$

პოტენციალური ენერჯის ფუნქცია ისეთია, რომ სისტემის თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (3.375)$$

როცა, პოტენციალური ენერჯია არაა დამოკიდებული სიჩქარეებზე, (3.372) განტოლებებიდან (3.374) და (3.375) ფორმულების გათვალისწინებით, მიიღება ნიუტონის დინამიკის ცნობილი განტოლებები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (3.376)$$

### 3.12.2. ლაგრანჟიანის თვისებები

განვიხილოთ, ურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემის ლაგრანჟიანი. მისი სრული წარმოებული იქნება

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.377)$$

ასე, რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.378)$$

ა) ჩაკეტილი სისტემების შემთხვევაში, ანუ, როდესაც ნაწილაკები არ ურთიერთქმედებენ გარე ძალებთან, ლაგრანჟიანი, არაა დამოკიდებული დროზე ( $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ). ამიტომ, ასეთი სისტემის ენერგია მუდმივი სიდიდეა (სისტემა კონსერვატულია)

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const}. \quad (3.379)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.374) ტოლობას, მივიღებთ

$$E = T + V. \quad (3.380)$$

ბ) ანუ, ჩაკეტილი სისტემის მთლიანი მექანიკური ენერგია, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიების ჯამის ტოლია.

თუ, გავითვალისწინებთ ლაგრანჟიანის განსაზღვრებას, შეგვიძლია განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები ფორმულით

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (3.381)$$

ასევე, განისაზღვრება განზოგადებული იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.382)$$

რომელთათვისაც ტოლობა  $p_i = m_i \dot{q}_i$  სრულდება, მხოლოდ დეკარტულ კოორდინატებში. ამ ორი განსაზღვრების შემდეგ, ლაგრანჟის განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (3.383)$$

ცხადია, რომ თუ, რომელიმე განზოგადებული  $q_k$  კოორდინატა, არ შედის ლაგრანჟიანში, მაშინ მისი შესაბამისი განზოგადებული ძალაც არ შედის (3.383) განტოლებათა სისტემაში და მაშასადამე, შესაბამისი იმპულსი  $p_k = \text{const}$ .



**განსაზღვრება:** იმ კოორდინატებს, რომლებიც არ შედიან ლაგრანჟიანში, ციკლურ კოორდინატებს უწოდებენ.

ცხადია, რომ ციკლური კოორდინატების არსებობა, გვიმარტივებს დინამიკის განტოლებების ამოხსნას. ზემოთმოყვანილი, იმპულსის (3.382) განსაზღვრის გათვალისწინებით, მექანიკური სისტემის ენერჯის (3.379) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (3.384)$$

თუ, სისტემა ჩაკეტილია და სივრცე ერთგვაროვანია, მაშინ სისტემის შიგნით ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია  $\sum_i F_i = 0$ . ამ კანონს ჩვენ ვიცნობთ ორი ძალისათვის ნიუტონის მესამე კანონის სახელწოდებით. ამ შემთხვევაში, ჩვენ მივიღებთ (3.383) ტოლობის გათვალისწინებით, რომ

$$\sum_i \dot{p}_i = 0. \quad (3.385)$$

განუ, ჩაკეტილი სისტემის იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ჩაკეტილი სისტემისათვის, სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების თვისებიდან, გამომდინარეობს ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონები. ეს შედეგები არიან, უფრო ზოგადი, ნიოტერის თეორემის კერძო შემთხვევები. რომელიც ამბობს რომ ლაგრანჟიანის გარდაქმნის ყოველი ჯგუფისათვის, დამახასიათებელია ამ გარდაქმნასთან დაკავშირებული ინვარიანტები. სივრცის ტრანსლაციის ჯგუფები გვამღებენ ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონებს; ბრუნვითი მოძრაობის ინვარიანტები - იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს . . .

### 3.12.3. განზოგადებული იმპულსის თვისებები

განზოგადებული კოორდინატები და სიჩქარეები ლაგრანჟის ფორმალიზმში, განიხილებიან, როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები. ამას გარდა, ჩვენ განვიხილეთ განზოგადებული იმპულსის ცნებაც. მისი ღრმა და არატრივიალური ხასიათი ნათლად ჩანს ჰამილტონური სისტემების ფაზური სივრცის გეომეტრიის განხილვისას.

იმპულსების კოვარიანტული ხასიათის ყველაზე უფრო ნათელი გამოვლინებაა, ის ფაქტი, რომ შესაძლებელია მათი წარმოდგენა, სკალარული ველის გრადიენტულ ველად. ამის დასამტკიცებლად, დავუბრუნდეთ ქმედების ინტეგრალს. მოცემული ექსტრემალური წირისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ლაგრანჟის განტოლებებს, განვიხილოთ ახალი ექსტრემალური ამოცანა. სხვადასხვა ექსტრემალებისათვის, რომელთაც საერთო საწყისი წერტილი აქვთ. ბოლო წერტილს კი ვაძლევთ მცირე ვარიაციას და ვხსნით იგივე ვარიაციულ ამოცანას

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q_{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (3.386)$$

რადგან ვხსნით იგივე ამოცანას, ინტეგრალი ნულის ტოლია და (3.386) განტოლებაში გვრჩება მხოლოდ საზღვრის წერტილებში მნიშვნელობები. საწყისი წერტილი დაფიქსირებულია  $\delta q(t_1) = 0$ . აღვნიშნოთ  $\delta q(t_2)$ , როგორც  $\delta q$  და გავითვალისწინოთ, რომ  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . მაშინ (3.386) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ  $\delta W = p \delta q$ , ან სხვანაირად,  $n$  თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის გვექნება

$$\delta W = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (3.387)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (3.388)$$

მაშასადამე, იმპულსები წარმოადგენენ ქმედების სკალარული ველის გრადიენტს, მოცემული ექსტრემალის გასწვრივ, დროის მოცემულ მომენტში.

რაც შეეხებათ, განზოგადებულ სიჩქარეებს მათი ველი, საზოგადოდ, არაა კოვარიანტული, ანუ, მათი წარმოდგენა გრადიენტულ ველად საზოგადოდ შეუძლებელია.

### 3.12.4. ჰამილტონის ფორმალიზმი

ჰამილტონის მექანიკაში, მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებისა და განზოგადებული  $p_i$  იმპულსების ცვლადებში. თუმცა, ფიზიკური შინაარსის მიხედვით, ჰამილტონური ფორმალიზმი, არ განსხვავდება ლაგრანჟის ფორმალიზმისაგან, მაგრამ უფრო ესადაგება კვანტური მექანიკის, სტატისტიკური მექანიკისა და შეშფოთებათა თეორიის გადმოცემის სილამაზეს. კერძოდ, ჰამილტონური ფაზური სივრცის ცნება, გაცილებით ამარტივებს ჰამილტონური სისტემების ინტეგრებადობის საკითხის შესწავლასა და იმ ქაოსური რეჟიმების აღწერას, რომლებიც შეიძლება არსებობდეს არაინტეგრებად სისტემებში.

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება **ლეჟანდრის გარდაქმნით**

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3.389)$$

აქ,  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  არიან  $n$  განზომილებიანი ვექტორები, ხოლო  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  სიდიდეს ჰამილტონიანი ეწოდება. როგორც ვიცით,

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t), \quad (3.390)$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად, (3.390) ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს  $\dot{q}_i$  გამოვსახოთ  $p_i$  ცვლადის საშუალებით, თუ,  $\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$ .

განვიხილოთ მაგალითი, თუ როგორ უნდა გადავიდეთ ლაგრანჟის ფორმალიზმიდან, ჰამილტონის ფორმალიზმზე:

განვიხილოთ ლაგრანჟიანი

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.391)$$

ვიპოვოთ შესაბამისი იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i. \quad (3.392)$$

შებრუნებული გარდაქმნა გვაძლევს

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}. \quad (3.393)$$

მაშასადამე, შესაბამის ჰამილტონიანს ექნება სახე

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right) - \left\{ \frac{1}{2} m_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \right. \quad (3.394)$$

### 3.12.5. ჰამილტონის განტოლებები

ლაგრანჟის განტოლებები, მიიღებოდა სისტემის ლაგრანჟიანზე ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებით. ეხლა ცხადია, რომ ჩვენ გვინდა მოძრაობის განტოლებები გამოვიყვანოთ ჰამილტონის ფორმალიზმის ფარგლებში. (3.389) ფორმულიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ ჰამილტონის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.395)$$

მარჯვენა მხარეში, პირველი და მესამე წევრი ერთმანეთს აბათილებენ, რადგან  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . ამას გარდა  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ (3.395) მიიღებს სახეს

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.396)$$

მაგრამ, რადგან

$$dH(p, q, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (3.397)$$

ცხადია, რომ (3.396),(3.397) განტოლებებიდან, შეგვიძლია ჩავწეროთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.398)$$

ამას გარდა, თუ, სისტემის ლაგრანჟიანი და ჰამილტონიანი ცხადადაა დამოკიდებული დროზე, გვექნება დამატებით თანადობა

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.399)$$

**P.S.** ჰამილტონის კანონიკური (3.398) განტოლებათა სისტემა შედგება  $2n$  პირველი რიგის განტოლებისაგან, მაშინ როცა შესაბამისი ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემა შედგებოდა  $n$  ცალი მეორე რიგის განტოლებისაგან.

ჰამილტონის (3.398) განტოლებებს, გააჩნიათ რიგი საინტერესო თვისებებისა. ჩვენ ჯერ-ჯერობით განვიხილავთ ისეთ ჰამილტონიანებს, რომლებიც დროზე არა არიან ცხადად დამოკიდებული. ამ სისტემის კანონიკური ცვლადები  $p_i$  და  $q_i$ , რომელთა სერთო რაოდენობაა  $2n$ , ქმნიან ფაზურ სივრცეს. დროის განმავლობაში  $\mathbf{p}(t)$  და  $\mathbf{q}(t)$  ცვლადები  $2n$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში, შემოწერენ გარკვეულ არეს. ისმის კითხვა, თუ როგორია ეს არე და რა ზოგადი თვისებები შეიძლება ქონდეს მას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (3.398) განტოლებებიდან მიიღება ლიუვილის ცნობილი ფორმულა „უკუმშვადი სითხეებისათვის“, ამჯერად, სითხის როლს, თამაშობს ფაზური სივრცის ნაკადის „ნაწილაკი“

$$\sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0. \quad (3.400)$$

**P.S.** ასე, რომ ჰამილტონური სისტემის ფაზური ნაკადის ელემენტის მოცულობა არ იცვლება, თუმცა, დეფორმირდება გადაადგილებისას.

ჰამილტონის განტოლებები, იმდენად სიმეტრიულია  $p(t)$  და  $q(t)$  ცვლადების მიმართ, რომ ზოგჯერ მათ თვლიან თანაბარი უფლებისძიონე დამოუკიდებელ ცვლადებად და განიხილავენ ახალ ცვლადს,  $2n$  კომპონენტით  $z = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ . ეს, საშუალებას იძლევა ახალი ჰამილტონიანისათვის  $H(p, q) = H(z)$ , ჰამილტონის განტოლება ჩაიწეროს მოკლედ

$$\dot{z} = J \cdot \nabla H(z), \tag{3.401}$$

სადაც  $J$  სიმპლექტური მატრიცაა ზომებით  $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.402}$$

1 - ერთეულოვანი მატრიცაა.

### 3.12.6. პუასონის ფრჩხილები

ჰამილტონის განტოლებების ინტეგრებადობის ამოცანა, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საკითხია. თუ, სისტემის თავისუფლების ხარისხია ერთი და მაშასადამე, აღიწერება ორი კანონიკური ცვლადით  $(p, q)$ , მაშინ ის ინტეგრებადია. ასეთი შემთხვევები, ჩვენ უკვე განვიხილეთ კურსის მეორე ნაწილში. თავისუფლების ხარისხის რიცხვის მიუხედავად, სისტემის ამოხსნისას, ყველაზე მნიშვნელოვანია ინტეგრალების პოვნის პროცედურა. ჰამილტონის მიდგომას, მივყავართ, დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულების, მოხდენილად პოვნამდე.

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია  $f = f(p, q, t)$ , ვიპოვოთ მისი სრული წარმოებული დროით

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dH}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dH}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3.403)$$

სადაც  $[H, f]$  - პუასონის ფრჩხილებია  $H$  და  $f$  ფუნქციებისათვის. მჭიდრო კავშირი არსებობს კლასიკური მექანიკის პუასონის ფრჩხილებსა და კვანტური მექანიკის კომუტატორის ცნებებს შორის. მართლაც, პუასონის ფრჩხილები შეგვიძლია ჩავწეროთ ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dg}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dg}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (3.404)$$

თუ, რომელიმე დინამიკური ცვლადი არაა დამოკიდებული დროზე, ანუ,  $f = f(p, q)$  მაშინ მისი პუასონის ფრჩხილები ნულის ტოლია და მაშასადამე, ის მუდმივი სიდიდეა, რაც ნათლად ჩანს (3.403) ფორმულიდან. ცხადია, რომ დროზე დამოუკიდებელი სისტემებისათვის, სისტემის ენერგია  $E = H$  მუდმივი სიდიდეა, რადგან ჰამილტონიანის თავის თავთან პუასონის ფრჩხილები, ნულის ტოლია.

პუასონის ფრჩხილების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი სამი ფუნქციისათვის, შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ რიგი თვისებებისა

$$[f, g] = -[g, f]; \quad (3.405)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h]; \quad (3.406)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]; \quad (3.407)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (3.408)$$

პუასონის ფრჩხილების (3.408) თვისებას იაკობის იგივეობას უწოდებენ. ეს თვისებები, ნათელყოფს, რომ პუასონის ფრჩხილები შეესაბამება ლის ალგებრის ოპერაციის განმსაზღვრელ სტრუქტურას.

თუ,  $f, g$  მოძრაობის ინვარიანტული ფუნქციებია, მაშინ მათი პუასონის ფრჩხილებიც მუდმივი იქნება მოძრაობის მიმართ. მართლაც, თუ, განვიხილავთ პუასონის ფრჩხილების (3.408)

თვისებას, მაშინ იქიდან რომ  $f, g$  ინვარიანტებია, გამოდის რომ  $[g, H] = 0$ ,  $[f, H] = 0$ , მაგრამ მაშინ  $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$  იაკობის იგივეობიდან მივიღებთ, რომ  $[H, [f, g]] = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $[f, g]$  აგრეთვე ინვარიანტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორი ნაპოვნი ინტეგრალის პუასონის ფრჩხილები ისევ სისტემის ინტეგრალი იქნება. თუმცა, ინტეგრალების ასეთი მეთოდით ძებნა, არაა ეფექტური.

საზოგადოდ,  $n$  პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის ბოლომდე ანალიზურად ამოსახსნელად, საჭიროა  $n - 1$  ინტეგრალის პოვნა. მაგრამ ჰამილტონური სისტემების სიმპლექტიკური სტრუქტურის გამო  $2n$  პირველი რიგის ჰამილტონური სისტემებისათვის საკმარისია  $n$  ინტეგრალის პოვნა.

### 3.12.7. ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

ჰამილტონური სისტემების ამოსახსნელად ეძებენ კანონიკურ გარდაქმნებს, ანუ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც სისტემას ისე გაამარტივებს, რომ შევძლებთ მის ინტეგრებას. თუ, კანონიკური გარდაქმნა არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ძველი ჰამილტონიანიდან ახალზე გადასვლა, ხორციელდება უბრალოდ ცვლადთა გარდაქმნით

$$H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)). \quad (3.409)$$

თუ, გამოვიყენებთ გარდაქმნის ფორმულებს

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (3.410)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (3.411)$$

სადაც  $\beta_i$  არიან ახალი კოორდინატები, შეუღლებულები  $\alpha_i$  ძველ იმპულსებთან. შესაბამისად, (3.409) განტოლებიდან მივიღებთ

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots, q_n\right) = H'(\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n). \quad (3.412)$$



ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილს, უნდა ვუყუროთ, როგორც მუდმივ სიდიდეს, ჰამილტონიანის მნიშვნელობას. ამ, პირველი რიგის კერძოწარ-მოებულის განტოლებაში, უცნობია  $W$  სიდიდე, ხოლო  $q_1, q_2, \dots, q_n$  დამოუკიდებელი ცვლადებია. ამ განტოლებას ეძახიან სტაციონარულ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას.

ასეთი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს  $n$  ნებისმიერ მუდმივს, რომელთა როლშიც შეგვიძლია განვიხილოთ  $\alpha_i$  სიდიდეები. ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა, ექვივალენტურია შესაბამისი ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა. **სეპარაბელური სისტემების** გარდა, ასეთი განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუმცა, თუ, გავითვალისწინებთ (3.410) ფორმულებს, დაფიქსირებული  $\alpha_i$  სიდიდეების შემთხვევაში, შეგვიძლია, საზოგადოდ შევხედოთ ამონახსნის სტრუქტურას. მართლაც

$$dW = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i dq_i, \quad (3.413)$$

ასე, რომ თუ, (3.413) ტოლობას ვაინტეგრებთ ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ, მივიღებთ წირით ინტეგრალს

$$W = \int_{q_0}^q \sum_i p_i dq_i. \quad (3.414)$$

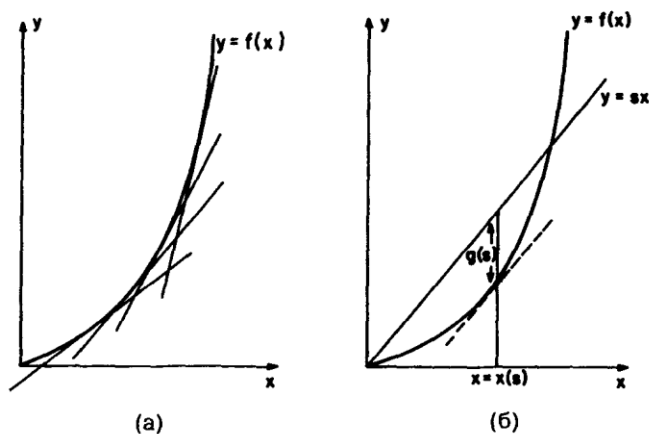
### 3.12.8. ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება **ლეჟანდრის გარდაქმნით**. ამიტომ, საინტერესოა თვით ამ გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი და სტრუქტურა.

მრუდი წირი შეიძლება აღვწეროთ, როგორც წერტილების ერთობლიობით, ასევე, მხები სიბრტყეების ერთობლიობითაც. ლეჟანდრის გარდაქმნა კი კავშირს ამყარებს ამ ორ წარმოდგენას

შორის. ამ საკითხში, გავყვეთ ვ.არნოლდის გადმოცემის ფორმას, ვინაიდან ის საუკეთესოა მეთოდური თვალსაზრისით.

განვიხილოთ  $y = f(x)$  ფუნქცია. დავუშვათ, რომ ის ამოზნექილია ან ჩაზნექილი. ამ ფუნქციის ლეჟანდრის გარდაქმნა, გვაძლევს სხვა  $g(s)$  ფუნქციას ნახ. 3.40



ნახ. 3.40. ა)  $y = f(x)$  ფუნქცია და მასთან დაკავშირებული მხებები; ბ) ლეჟანდრის გარდაქმნის აგება  $g(s)$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $g(s)$  წარმოადგენს უდიდეს მანძილს ვერტიკალის გასწვრივ  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკსა და  $y = sx$  წრფეს შორის, ანუ,

$$g(s) = sx - f(x) = G(s, x(s)). \quad (3.415)$$

რადგან  $x(s)$  წერტილი განისაზღვრება მაქსიმუმის პირობებიდან,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0. \quad (3.416)$$

ასე, რომ ახალი  $s$  ცვლადი წარმოადგენს,  $f(x)$  ფუნქციის მხების დახრის კუთხეს  $s = f'(x)$ .

განვიხილოთ, მექანიკური ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, გვაქვს ჰამილტონიანი  $y = H(p)$  ზემოთმოყვანილი ალგორითმით მივიღებთ, რომ ახალ  $L(s)$  ფუნქციას აქვს სახე

$$L(s) = sp - H(p). \quad (3.417)$$

ამ შემთხვევაში, ახალი ცვლადი  $s = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ , ასე, რომ ლეჟანდრის გარდაქმნა ამ შემთხვევაში, შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით

$$L(\dot{q}) = \dot{q}p - H(p). \quad (3.418)$$

ეს მაგალითი არის, ჩვენს მიერ უკვე განხილული ფორმულების (3.389) ნათელი ილუსტრაცია

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t); \quad (3.419)$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (3.420)$$

### 3.12.9. კლასიკური მექანიკის გეომეტრია

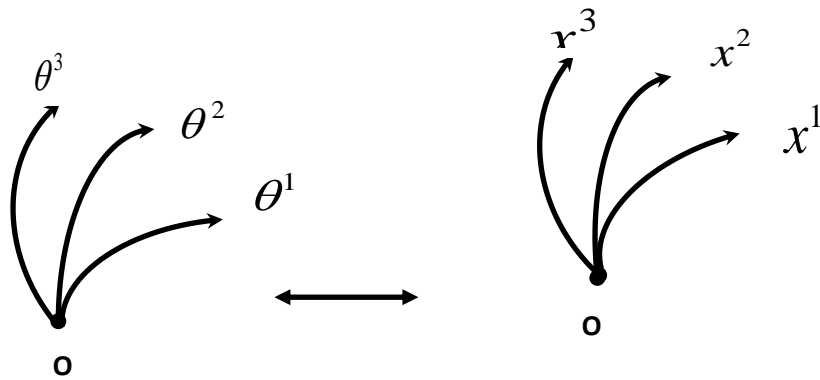
ტენზორულ ალგებრაში  $\vec{a}$  ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს

$$a_i \text{ და } a^i; \quad (3.421)$$

თუ, ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ  $a^i$ , მაშინ ის მიუთითებს კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე, ხოლო თუ,  $a_i$ - ქვემოთ, მაშინ კოვარიანტულ კომპონენტებზე.

ერთგანზომილებიან ტენზორს ვექტორს უწოდებენ. განვიხილოთ ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების ცნებები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ერთი  $\theta^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემიდან, მეორე  $x^i$  კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები



ნახ. 3.41.  $\theta^i$  და  $x^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\}. \quad (3.422)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (3.423)$$

ჩავთვალოთ, რომ (3.423) გარდაქმნები არიან ჰომეომორფული P წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (3.424)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (3.423)  $\theta^i$  კოორდინატების მიმართ

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3). \quad (3.425)$$

დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები ლოკალურად. (3.423) ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^{21}} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (3.426)$$

სიმბოლოური აღნიშვნებით (3.426) გადაიწერება მოკლედ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (3.427)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ. ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება.

**განსაზღვრება:** იმ ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება **ყრუ ინდექსი** ეწოდება. იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში გვხვდება ერთხელ, თავისუფალი ინდექსი ქვია.

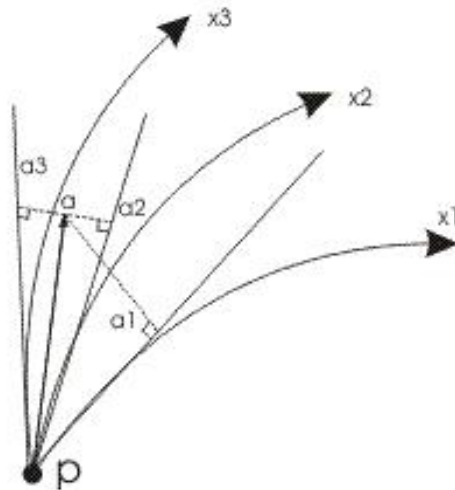
**განსაზღვრება:** ტენზორის თითოეულ წევრში, თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობას, ტენზორის რანგი ეწოდება.

მაგალითად, ვექტორი-პირველი რანგის ტენზორია; სკალარული ფუნქცია - ნულ რანგის ტენზორია . . .

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრულ  $a^i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ, კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნიებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების დიფერენციალები (3.427). ანუ,

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (3.428)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული შინაარსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა P-წერტილში ნახ.3.42, სადაც მოდებულია ეს ვექტორი



ნახ. 3.42.  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული  $x^i$  ღერძების მხებები P წერტილში. მაშინ  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ მის ორთოგონალურ პროექციებს შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხებების მიმართულეებზე, რომლებიც გავლებულია P წერტილში.

განვიხილოთ ოპერატორი

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (3.429)$$

ახალ  $y$  კოორდინატებზე გადასვლას მივყავართ ფორმულამდე

$$\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (3.430)$$

სადაც

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad (3.431)$$

როგორც ვხედავთ,  $\xi_i$  კომპონენტები გარდაიქმნებიან როგორც კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

ეხლა განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება  $\varphi$  ფუნქციის გრადიენტის

გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ მოცემული გვაქვს  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ . ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (3.432)$$

**განსაზღვრება:** P წერტილში განსაზღვრულ  $a_i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან, როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტის კომპონენტები

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j. \quad (3.433)$$

როგორც ვნახეთ, განზოგადებული იმპულსები ქმედების გრადიენტებს წარმოადგენენ, ამიტომ ცხადია, რომ განზოგადებული იმპულსები კოვარიანტულ ვექტორს წარმოადგენენ.

**P.S.** ოპერატორი (3.429) წარმოადგენს მხევი ვექტორის მაგალითს. მოცემულ  $x = X$  წერტილში, რომელიმე სკალარულ  $h = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციაზე ამ ოპერატორის მოქმედების შედეგია მოცემული ფუნქციის ზედაპირის მხევი მოცემულ წერტილში

$$\xi h = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial h}{\partial x_i} I_{x=X}. \quad (3.434)$$

განვიხილოთ ეხლა, რაიმე წირი  $\varphi = \varphi(s)$ , რომელიც პარამეტრიზებულია  $s$  ცვლადით, ისე, რომ გადის მოცემულ  $x = X$  წერტილზე, როცა  $s = 0$ . თუ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ , ფუნქციის კოორდინატული წარმოდგენაა  $\varphi_i(s) = x_i$ , მაშინ ნებისმიერი სიდიდის წარმოებული  $\varphi(s)$  -ის გასწვრივ, მოცემულ  $x = X$  წერტილში განისაზღვრება მხევი ვექტორით

$$\xi = \frac{d}{ds} I_{s=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} I_{x=X}, \quad (3.435)$$

სადაც

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} I_{s=0}. \quad (3.436)$$

ცხადია, რომ თუ  $\varphi(s)$  მოცემული  $q(t)$  სისტემის ტრაექტორიაა, სადაც  $s$  დროა, მაშინ  $\xi_i$  სხვა არაფერია, თუ არა  $\dot{q}_i(t)$  სიჩქარის კომპონენტები. აქედან გამომდინარეობს სიჩქარის ვექტორის კონტრავარიანტულობა.

მოცემულ  $x = X$  წერტილზე შეიძლება გაიაროს მრავალმა სხვადასხვა ტრაექტორიამ და ყოველივე მათგანს შეესაბამება თავისი მხები ვექტორი. ამ ვექტორების ერთობლიობა მოცემულ წერტილში ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც მხები სივრცე ეწოდება. ამ სივრცეს აღნიშნავენ სიმბოლოურად  $TM_x$ , სადაც  $M$  მრავალსახეობაა, ანუ სისტემის მიერ დაკავებული  $n$  განზომილებიანი სივრცე. მხები განფენის სივრცე აერთიანებს ყველა მხებ სივრცეს, მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის და მას აღნიშნავენ როგორც  $TM$ .

**P.S. 1. ლაგრანჟის ფორმალიზმში**, სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებითა და  $\dot{q}_i$  სიჩქარეებით. ამ დროს ნებისმიერ  $Q$  წერტილში, დროის ნებისმიერ მომენტში გვაქვს მხები ვექტორი

$$\xi = \sum_i \dot{q}_i(t) \frac{\partial}{\partial q_i} I_{q=Q}. \quad (3.437)$$

ასე, რომ სისტემის მდგომარეობა შეიძლება დავახასიათოთ წერტილის მეშვეობით მხები განფენის სივრცეში. ლაგრანჟიანი კი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მხები განფენის სივრცის გადასახვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, ანუ,  $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ .

**2. ჰამილტონურ ფორმალიზმში** მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებითა და მათი შეუღლებული  $p_i$  იმპულსებით. შესაბამისი ფაზური სივრცე წარმოადგენს სიმპლექტიკურ სივრცეს და ხასიათდება რიგი თვისებებით.



ჰამილტონური სისტემების განსაკუთრებული თვისებაა, ფაზური მოცულობის შენარჩუნება ჰამილტონური ნაკადის ზემოქმედებისას.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ლაგრანჟის განტოლების გამოყვანა;
2. ჰამილტონის ფორმალიზმი და ჰამილტონის განტოლებების გამოყვანა;
3. კუასონის ფრჩხილების თვისებები;
4. ლაგრანჟიანისა და ჰამილტონიანის გეომეტრიული შინაარსი;
5. ლეჟანდრის გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი.

## ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, т. I, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж. л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю. Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В. И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, т. 1, т. 2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И. И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И. И. Павленко Ю. Г., Кузменков Л. С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С. М., Рашба Э. И. Славатинский С. А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г. Л. Сербо В. Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
12. Кронин Г. Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975

13. ოზაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва, 1988
15. Косевич А.М., Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику, Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н. Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А., Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001

### 3.13. შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები

ბოლომდე ინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემები, გამონაკლისს წარმოადგენს. მიუხედავად ამისა, ისინი დიდ როლს თამაშობენ, არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემების სტრუქტურული თავისებურებების შესწავლის საქმეში. ეს ხდება იმიტომ, რომ ზოგჯერ ხელსაყრელია არაინტეგრებადი ჰამილტონური სისტემის წარმოდგენა, ინტეგრებადი  $H_0$  და მცირე  $H_1$  შეშფოთების ჯამის სახით,

$$H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon H_1(p, q), \quad (3.438)$$

სადაც  $\varepsilon \ll 1$ . ესაა შეშფოთებათა თეორიის იდეა და დიდი გამოყენება აქვს მზის სისტემის პლანეტების მოძრაობის დინამიკის შესწავლის საქმეში. თუ, შევისწავლით ორი სხეულის ამოცანას, მაგალითად, დედამიწის მოძრაობას მზის გარშემო, ეს ამოცანა იხსნება ბოლომდე და მივიღებთ, რომ დედამიწა მოძრაობს მზის გარშემო კეპლერის ელიფსურ ტრაექტორიებზე, მაგრამ მის მოძრაობაზე მცირე

შეშფოთების სახით, გავლენას ახდენს იუპიტერი, რომლის ზემოქმედებაც მცირე შეშფოთების სახით ემატება ორი სხეულის პრობლემის ამონახსნს. ასეთი, თითქოს მარტივი ამოცანაც კი, არაა დღემდე ამოხსნილი ბოლომდე. რადგან აქ მიიღება სუსტად კრებადი მწკრივები და მათი კრებადობის დაცქარება დიდ სიძნელებებს აწყდება.

მიუხედავად ამისა, შეშფოთებათა თეორია საჭიროებს შესწავლას, თუნდაც იმიტომ რომ გავერკვეთ, სამი სხეულის პრობლემაში არსებულ სირთულეებში.

შეშფოთებათა თეორიის ძირითადი იდეაა, ამონახსნის წარმოდგენა სახით, სადაც  $\varepsilon \ll 1$

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t) + \dots \quad (3.439)$$

$x_0(t)$  - ინტეგრებადი სისტემის ზუსტი ამონახსნია. ხოლო დანარჩენი  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  მიახლოებების პოვნა წარმოებს რეკურენტული ფორმულე-ბით. აქ არის იმის მოლოდინი, რომ როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$  (3.439) ამონახსნი მიისწრაფის ზუსტი  $x_0(t)$  ამონახსნისაკენ, თანაც დამატებითი წევრები დააზუსტებენ შეშფოთებულ ამონახსნამდე. თუმცა, ამის იმედია ვერ გვექნება დროის დიდ შუალედების შემთხვევაში. ასე, რომ ნებისმიერი ამოცანის ამონახსნის (3.439) წარმოდგენისათვის, დგება მისი ფიზიკური კრებადობის საკითხი.

### 3.13.1. შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივები

განვიხილოთ უბრალო კვადრატული განტოლება

$$x^2 + x - 6\varepsilon = 0. \quad \varepsilon \ll 1 \quad (3.440)$$

ნულოვან მიახლოებაში, გვაქვს „ინტეგრებადი“ შემთხვევის ანალოგი განტოლება

$$x^2 + x = 0, \quad (3.441)$$

მისი ამონახსნებია  $x = 0$  და  $x = -1$ . ეხლა შევეცადოთ შეშფოთებული (3.440) ამოცანის ამონახსნის წარმოდგენა მწკრივის სახით

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \quad (3.442)$$

სადაც  $a_0$  „ინტეგრებადი“ განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნია.

თუ, ჩავსვამთ (3.442) წარმოდგენას (3.440) განტოლებაში და გავუტოლებთ კოეფიციენტებს  $\varepsilon$  ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მაშინ მივიღებთ  $O(\varepsilon^2)$  სიზუსტის ფარგლებში განტოლებებს, გაშლის კოეფიციენტებისათვის

$$O(\varepsilon^0): \quad a_0^2 + a_0 = 0; \quad (3.443)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad 2a_0 a_1 + a_1 - 6 = 0; \quad (3.444)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad a_1^2 + 2a_0 a_2 + a_2 = 0. \quad (3.445)$$

ამ განტოლებების მიმდევრობით ამოხსნა გვაძლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ (3.440) განტოლების ამონახსნები შესაბამისი (3.442) მწკრივებით

$$x_1 = 6\varepsilon - 36\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (3.446)$$

$$x_2 = -1 - 6\varepsilon + 36\varepsilon^2 - O(\varepsilon^3). \quad (3.447)$$

ეს არის შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივი. ადვილი შესამჩნევია, რომ როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ , (3.446),(3.447) მიახლოებები მიისწრაფიან შესაბამისი „ინტეგრებადი“ განტოლების ზუსტი ამონახსნებისაკენ.

### 3.13.2. შეშფოთებათა სინგულარული მწკრივები

ეხლა განვიხილოთ სინგულარული განტოლება

$$\varepsilon x^2 + x - 1 = 0. \quad (3.448)$$

ეს ამოცანა არაა რეგულარული, რადგან ზღვარში როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$  განტოლებას აქვს ერთი ამონახსნი, მაშინ როცა შეშფოთებულ (3.448) ამოცანას აქვს ორი ამონახსნი. ასეთ ამოცანებს, შეშფოთებათა თეორიის სინგულარული ამოცანები ეწოდებათ. ასეთ შემთხვევაში ამოცანის ყველა ამონახსნი შეიძლება ვერ წარმოდგეს ხარისხოვანი (3.442) მწკრივის სახით.

ამ განტოლების არაშეშფოთებული ნაწილის  $x - 1 = 0$  ამონახსნია  $x = 1$ . ამ ამონახსნის პოვნა ადვილად შეგვიძლია (3.442) მწკრივის სახით, რადგან ეს რეგულარული ნაწილის ფესვია. მისი ჩასმა (3.448) განტოლებაში, საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ წარმოდგენა

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.449)$$

ამოცანის სინგულარული ნაწილი დაკავშირებულია მეორე ფესვთან, რომელიც უსასრულობისაკენ მიისწრაფის, როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x_2 = O(\varepsilon^{-n})$ . ეს იმაზე მიუთითებს, რომ მიზანშეწონილია ცვლადთა გარდაქმნა ფორმულით  $x = \frac{y}{\varepsilon^n}$ , თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ , განტოლებაში (3.448) წევრებმა  $\varepsilon x^2$  და  $x$  ერთმანეთი უნდა დააბალანსონ უსასრულობისაკენ სწრაფვის სიჩქარის თვალსაზრისით, ანუ,  $\varepsilon \frac{y^2}{\varepsilon^{2n}}$  და  $\frac{y}{\varepsilon^n}$  ერთნაირი სისწრაფით უნდა მიისწრაფოდენ უსასრულობისაკენ, როცა  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $2n - 1 = n \Leftrightarrow n = 1$ , ანუ, ერთადერთი მისაღები ცვლადთა გარდაქმნაა  $x = \frac{y}{\varepsilon^1}$ . მაშინ (3.448) განტოლება გარდაიქმნება განტოლებად

$$y^2 + y - \varepsilon = 0. \quad x = \frac{y}{\varepsilon^1}. \quad (3.450)$$

ეხლა უკვე მივიღეთ რეგულარული ამოცანა და მისი წარმოდგენა შეგვიძლია სტანდარტული ხარისხოვანი მწკრივებით

$$y_1 = \varepsilon - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (3.451)$$

$$y_2 = -1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (3.452)$$

თუ, გამოვიყენებთ უკუ გარდაქმნას (3.450), მივიღებთ საწყისი სინგულარული ამოცანის ამონახსნების წარმოდგენებს

$$x_1 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \quad (3.453)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (3.454)$$

### 3.13.3 დიფერენციალური განტოლებების რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები

განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.455)$$

და საწყისი პირობები:

$$x(0) = A. \quad (3.456)$$

თუ, გამოვიყენებთ ამონახსნის (3.442) წარმოდგენას, ჩავსვამთ (3.455) განტოლებაში და გაუტოლებთ კოეფიციენტებს  $\varepsilon$  ცვლადის ერთნაირ ხარისხებთან, მივიღებთ სისტემას

$$O(\varepsilon^0): \quad \dot{x}_0 = x_0, \quad (3.457)$$

$$O(\varepsilon^1): \quad \dot{x}_1 = x_1 + x_0^2, \quad (3.458)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \dot{x}_2 = x_2 + 2x_1x_0. \quad (3.459)$$

ამოცანის ინტეგრებადი ნაწილი (3.457), ადვილად ინტეგრდება და მივიღებთ

$$x_0(t) = Ae^t, \quad (3.460)$$

ამ ამონახსნის ჩასმა (3.458) განტოლებაში გვამღევს განტოლებას

$$\dot{x}_1 = x_1 + A^2e^{2t}, \quad (3.461)$$

საწყისი პირობით:

$$x_1(0) = 0. \quad (3.462)$$

ასეთ, ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს ვსვამთ ყველა შემდგომი მიახლოებისათვის, რათა მთლიანმა შემოფოთებულმა წარმოდგენამ დააკმაყოფილოს (3.456) პირობა. (3.461),(3.462) ამოცანის ამოხსნაა

$$x_1(t) = A^2 e^t (e^t - 1). \quad (3.463)$$

თავის მხრივ, თუ, ამ ამონახსნს ჩავსვამთ (3.459) განტოლებაში, მივიღებთ

$$x_2(t) = -A^3 e^t (e^t - 1)^2. \quad (3.464)$$

ასე, რომ  $O(\varepsilon^2)$  სიზუსტით (3.455),(3.456) ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე

$$x(t) = A e^t [1 + \varepsilon A (e^t - 1) - \varepsilon^2 A^2 (e^t - 1)^2] + O(\varepsilon^3). \quad (3.465)$$

**P.S.** აქ მოყვანილი განტოლებების ამოხსნიდან, შეიძლება შეიქმნას შთაბეჭდილება, რომ შემოფოთებათა თეორია ყოველთვის წარმატებით ხსნის ამოცანებს, მაგრამ სამწუხაროდ ასე არაა. როგორც არაერთმა მცდელობებმა აჩვენა, მრავალგანზომილებიანი ჰამილტონური სისტემებისათვის, შემოფოთებათა თეორიას შევყავართ პუანკარეს „მცირე მნიშვნელების“ ჩიხში და მხოლოდ კოლმოგოროვ-არნოლდ-მოზერის ეგრეთწოდებულმა KAM თეორიამ შეძლო ამ ჩიხიდან ნაწილობრივი გამოსვლა. თუმცა, ეს თეორია გვერდს უქცევს, ჰამილტონური სისტემების ამოცანის გლობალური ამოხსნის ამოცანას და კმაყოფილდება კერძო ამოცანებით ფაზური ტრაექტორიების ტორზე ყოფაქცევის შესახებ.

## ამოცანები და სავარჯიშოები

1. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$x^2 + \varepsilon x - 1 = 0;$$

2. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\varepsilon^2 x^2 - 2x + 2 = 0;$$

3. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\dot{x} = 5x - \varepsilon x^2;$$

4. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x - 7\varepsilon = 0;$$

5. შეშფოთებათა თეორიის მეშვეობით ამოხსენით განტოლება:

$$\varepsilon \ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0.$$

## ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, т. I, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т. 1, т. 2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977



12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
15. Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н.Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001
19. Лихтенберг А.,Либерман М.Регулярная и стохастическая динамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1984

### 3.14. ქაოსი ჰამილტონურ სისტემებში

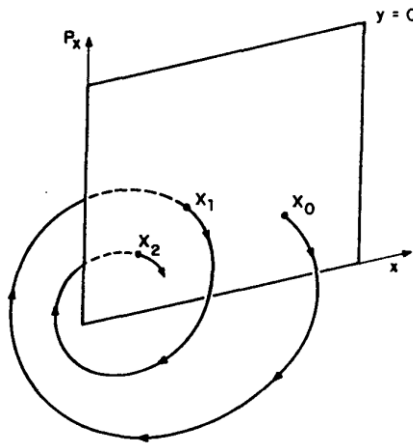
როგორც ვხედავთ, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემები ინტეგრებადია. ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის ფაზური სივრცე, უკვე ოთხგანზომილებიანია. თუ, სისტემა ამავე დროს, კონსერვატიულია, მაშინ ენერგეტიკული ზედაპირი სამგანზომილებიანია. ასეთ შემთხვევაშიც კი, სისტემის ქალაქდზე დატანით გამოკვლევა რთულია. ამიტომ, მეოცე საუკუნის უდიდესი მათემატიკოსების, პუანკარესა და ბირგოფის შრომებში შემუშავებული იქნა კვეთის ზედაპირების მეთოდი. ის, განსაკუთრებით ეფექტურია, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე, კონსერვატიული სისტემებისათვის. თუმცა, მისი გამოყენება შეიძლება უფრო მაღალი განზომილების სისტემებისთვისაც. კვეთის ზედაპირების მეთოდი, პირველი რიცხვითი მეთოდი იყო, რომელიც შემუშავებული იქნა არაინტეგრებადი სისტემების გამოსაკვლევად.

### 3.14.1. კვეთის ზედაპირების მეთოდი ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემებისათვის

განვიხილოთ, ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე, კონსერვატიული სისტემის ჰამილტონიანი

$$E = H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y). \quad (3.466)$$

ამ სისტემის ტრაექტორიების შესწავლის ამოცანა, შეიძლება დავიყვა-ნოთ ორგანზომილებიან ამოცანამდე. მოცემულ ენერგეტიკულ დონეზე, ვიხილავთ რაიმე კვეთას, მაგალითად  $y = 0$ . ამის შემდეგ რიცხვითი ანალიზის მეშვეობით, მივყვებით რომელიმე ტრაექტორიას და ვპოულობთ შესაბამის მნიშვნელობებს  $p_x$  და  $x$  ცვლადებისათვის. თუ,  $V(x, y)$  პოტენციალი შემოფარგლავს ტრაექტორიებს, მაშინ აღნიშნულ კვეთში გავლისას, ჩვენ კვლავ მივიღებთ  $p_x$  და  $x$  ცვლადებისათვის ახალ მნიშვნელობებს და ა.შ. ამრიგად, ჩვენ მივიღებთ გადასახვას, რომელიც შედგება  $(p_x, x)$  წერტილებისაგან (ნახ. 3.43) და წარმოადგენს კვეთის ზედაპირს.



ნახ. 3.43. კვეთის ზედაპირი აგება

კვეთის ზედაპირზე მყოფი წერტილი, განსაზღვრავს სისტემის მდგომარეობა ნიშნის სიზუსტით, რაც გამომდინარეობს (3.466) ფორმულიდან, როცა  $E = const$  და  $y = 0$ . მართლაც, მაშინ

$$p_y = \pm \sqrt{2m \left( E - \frac{1}{2m} p_x^2 - V(x, 0) \right)}. \quad (3.467)$$

კვეთის ზედაპირი, როგორც წესი იგება ისე, რომ  $p_y$  სიდიდეს ქონდეს განსაზღვრული ნიშანი, მაგალითად  $p_y > 0$ . თუ, მოცემული ტრაექტორიისათვის საწყის მონაცემებს  $p_x; E; x; y = 0$ ; კვეთის ზედაპირზე აღვნიშნავთ  $X_0$  ასოთი, მაშინ შემდგომი გადაკვეთის წერტილები  $X_1; X_2; \dots; X_n$  ადგენენ გადასახვას ფაზურ სიბრტყეში. ამ წერტილებმა შეიძლება შეავსონ გლუვი წირი, ან მოგვცენ დისკრეტული წერტილების სიმრავლე. ცალკეულ შემთხვევებში კი (არაინტეგრებადი), შეიძლება მოხდეს ამ წერტილების ქაოსური განლაგება კვეთის ზედაპირზე. თუმცა, მართო ვიზუალური შედეგით ვერ ვიტყვით, რომ საქმე გვაქვს ქაოსთან.

**P.S.** იმისათვის, რომ გამოვიკვლიოთ ქაოსურია, თუ, არა ტრაექტორია ფაზურ სივრცეში, საჭიროა, დამატებითი გამოკვლევები, ლიაპუნოვის მაჩვენებლები იქნება, თუ, ენერგეტიკული სპექტრი.

### 3.14.2. ჰენონ-ჰელიესის ჰამილტონიანი

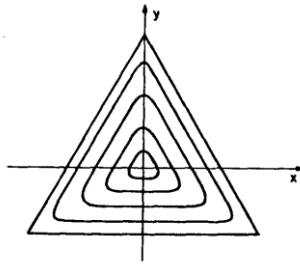
განვიხილოთ, ჰენონ-ჰელიესის ჰამილტონიანი

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (3.468)$$

ეს არის ვარსკვლავის მოძრაობის ჰამილტონიანი, ცილინდრული სიმეტრიის მქონე გრავიტაციულ ველში, გლუვი გალაქტიკური პოტენციალის პირობებში. პოტენციალურ ფუნქციას აქვს სახე

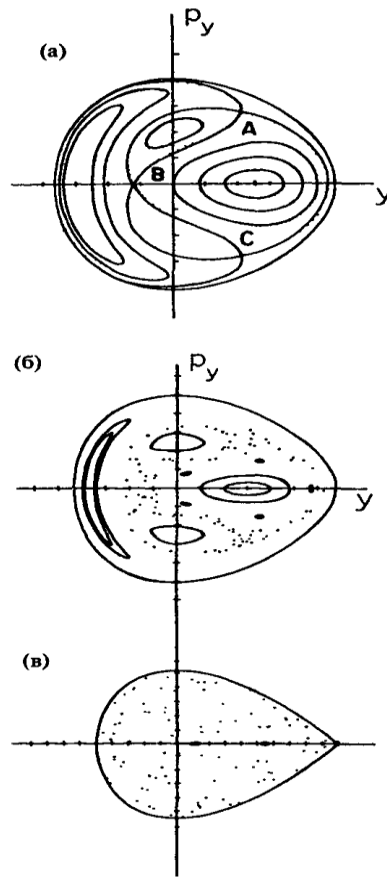
$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (3.469)$$

ეს პოტენციალი გამოსახულია ნახ. 3.44. დონის წირები აგებულია ენერგიის  $E = \frac{1}{12}$  მნიშვნელობიდან,  $E = \frac{1}{6}$  მნიშვნელობამდე.



ნახ. 3.44. პოტენციალური ენერჯის დონეები. გარე დონეს  
შეესაბამება  $E = \frac{1}{6}$

შესაბამის კვეთის ზედაპირებზე, დონის წირების განლაგება, პოტენციალური ენერჯის დონეების მიხედვით, მოცემულია ნახ.3.45.



ნახ. 3.45. ჰენონ-ჰეილესის სისტემის კვეთის ზედაპირები: ა)  $E = \frac{1}{12}$ , ბ)  $E = \frac{1}{8}$ , B)  $E = \frac{1}{6}$

### 3.14.3 ბრტყელი ასახვები, რომლებიც ინახავენ ფართს

განვიხილოთ ბრტყელი გადასახვები:

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i), \quad (3.470)$$

*T*:

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i). \quad (3.471)$$

ეს გადასახვა შეინარჩუნებს ფართს, თუ

$$\frac{\partial(x_{i+1}, y_{i+1})}{\partial(x_i, y_i)} = 1. \quad (3.472)$$

თუ,  $f$  და  $g$  პოლინომებია, მაშინ ამ გადასახვას მთელი კრემონული გადასახვა ეწოდება. ამ გადასახვის თვისებები, სწორედ ამ ფუნქციების სახეზეა დამოკიდებული. თუ, ისინი შეიძლება ჩავწეროთ წრფივი ფუნქციებით, მაგალითად ასე

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha, \quad (3.473)$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha, \quad (3.474)$$

მაშინ, გადასახვა წარმოადგენს ბრუნვას  $\alpha$  კუთხით. მეორე მაგალითი, წრფივი გარდაქმნით

$$x_{i+1} = x_i + y_i, \quad (3.475)$$

$$y_{i+1} = y_i, \quad (3.476)$$

შეესაბამება პარალელურ გადატანას  $X$  ღერძის პარალელურად.

**ჰენონმა მოიფიქრა შემფოთებული გარდაქმნა**

$$x_{i+1} = x_i \cos \alpha - (y_i - x_i^2) \sin \alpha, \quad (3.477)$$

*T*:

$$y_{i+1} = x_i \sin \alpha + (y_i - x_i^2) \cos \alpha, \quad (3.478)$$

ჰენონის მთავარი შედეგი ის არის, რომ (3.477),(3.478) გარდაქმნა წარმოადგენს ორი გარდაქმნის კომპოზიციას. რომელთაგან ერთი არაწრფივი(დეფორმაციით) გადატანაა და მეორე - მობრუნება, ე.ი. შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$T = T_1 T_2. \quad (3.479)$$

სადაც

$$x_{i+1/2} = x_i, \quad (3.480)$$

$T_1$ :

$$y_{i+1/2} = (y_i - x_i^2), \quad (3.481)$$

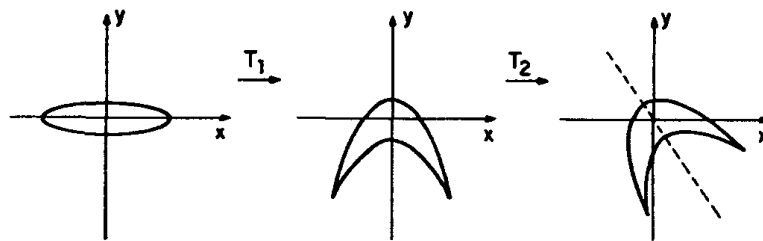
არაწრფივი დეფორმაცია-გადატანაა, ხოლო

$$x_{i+1} = x_{i+1/2} \cos \alpha - y_{i+1/2} \sin \alpha, \quad (3.482)$$

$T_2$ :

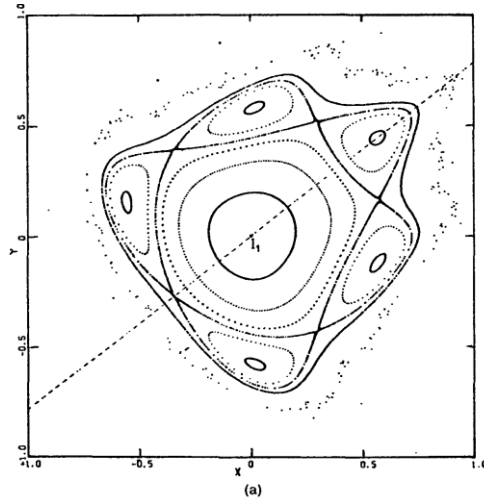
$$y_{i+1} = x_{i+1/2} \sin \alpha + y_{i+1/2} \cos \alpha, \quad (3.483)$$

შესაბამისი გარდაქმნების გეომეტრიული სურათები მოცემულია ნახ. 3.46.

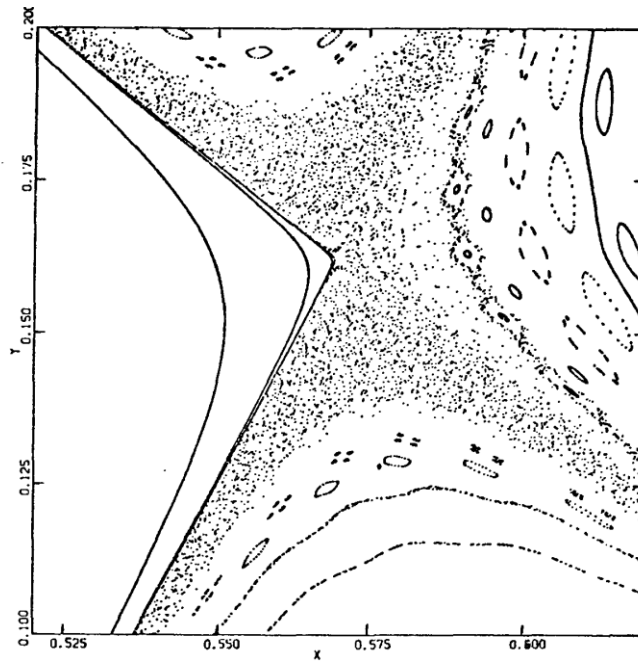


ნახ. 3.46. ელიფსური დისკის გარდაქმნა ჰენონის გარდაქმნათა კომპოზიციით

შესაბამის ფაზურ სიბრტყეში სისტემა იძლევა სურათებს ნახ. 3.47, ნახ. 3.48.



ნახ. 3.47. ჰენონის გარდაქმნის ფაზური სიბრტყე, როცა  $\alpha = 0.2114$



ნახ. 3.48. არის დაშლა ჰიპერბოლურ წერტილთან

ამ შედეგების მიღება მარტივია კომპიუტერის გამოყენებით. როგორც ნახ. 3.48 გვიჩვენებს, სისტემაში ჰიპერბოლური წერტილის მახლობლობაში წარმოიქმნება ქაოსი, რომელიც თანდათან ვრცელდება მთელ არეში.

### 3.14.4. კავშირი ფართის შემნახველ ასახვებსა და ჰამილტონურ სისტემებს შორის

ჰენონის გადასახვას აქვს, არაინტეგრებადი ჰამილტონიანის ყველა თვისება, თუმცა, მისი მიღების წესი ამ ჰამილტონიანიდან არაა მარტივი.

ამიტომ, შევეცადოთ ვუპასუხოთ კითხვაზე: შეგვიძლია, თუ, არა ჰამილტონიანიდან მივიღოთ ფართის შემნახველი ასახვები?

განვიხილოთ, ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე მარტივი ჰამილტონიანი

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q), \quad (3.484)$$

რომლისთვისაც ჰამილტონური განტოლებები ჩაიწერება მარტივად

$$\dot{q} = p, \quad (3.485)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}. \quad (3.486)$$

ჰამილტონურ (3.485),(3.486) განტოლებებში დროით წარმოებულები, შევცვალოთ სასრული სხვაობებით, მაშინ მივიღებთ

$$q_{i+1} = q_i + p_i \Delta t, \quad (3.487)$$

$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_i}, \quad (3.488)$$

თუმცა, ეს გადასახვა არ ინახავს ფართობს, რადგან

$$\frac{\partial(q_{i+1}, p_{i+1})}{\partial(q_i, p_i)} \neq 1, \quad (3.489)$$

მაგრამ, თუ, ჩვენ (3.488) სხვაობიან სქემაში პოტენციალური ფუნქციის წარმოებულს გამოვითვლით წერტილში  $q = q_{i+1}$ , მაშინ მივიღებთ სქემას

$$q_{i+1} = q_i + p_i \Delta t, \quad (3.490)$$



$$p_{i+1} = p_i - \Delta t \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_{i+1}}. \quad (3.491)$$

რომელიც, უკვე ინახავს ფართს.

ახლა, ამოვწეროთ ჰამილტონიანი, რომელსაც შეესაბამება (3.490),(3.491) სასრულ-სხვაობიანი სქემა. ამისათვის, (3.484) ჰამილტონიანის მაგივრად განვიხილოთ ჰამილტონიანი

$$H(p, q, t) = \left\{ \frac{1}{2\gamma} p^2, \text{ if } 0 < t < \gamma T \text{ then } \frac{1}{1-\gamma} V(q) \right\}. \quad (3.492)$$

სადაც  $0 < \gamma < 1$ . ასეთი ტიპის ჰამილტონიანები გამოიყენება ტალღამტარებში გამავალი სიგნალების მოდელირებისათვის.

თუ, განვიხილავთ ჰამილტონიანს

$$H(p, q, t) = \left\{ \frac{1}{\gamma} V(q), \text{ if } 0 < t < \gamma T \text{ then } \frac{1}{2(1-\gamma)} p^2 \right\}, \quad (3.493)$$

მაშინ მივიღებთ დისკრეტულ ასახვას, რომელიც ასევე, ინარჩუნებს ფართს

$$q_{i+1} = q_i + T p_{i+1}, \quad (3.494)$$

$$p_{i+1} = p_i - T \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right)_{q=q_i}. \quad (3.495)$$

### 3.14.5 ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა

ყველაზე უფრო მეტად პოპულარულია ასახვა, რომელიც მიიღება, თუ (3.495) ფორმულაში, პოტენციალური ენერჯიის ფუნქციას ჩავწერთ სახით

$$V(q) = -\frac{k}{(2\pi)^2} \cos(2\pi q). \quad (3.496)$$

მაშინ მივიღებთ მოძრაობის განტოლებებს

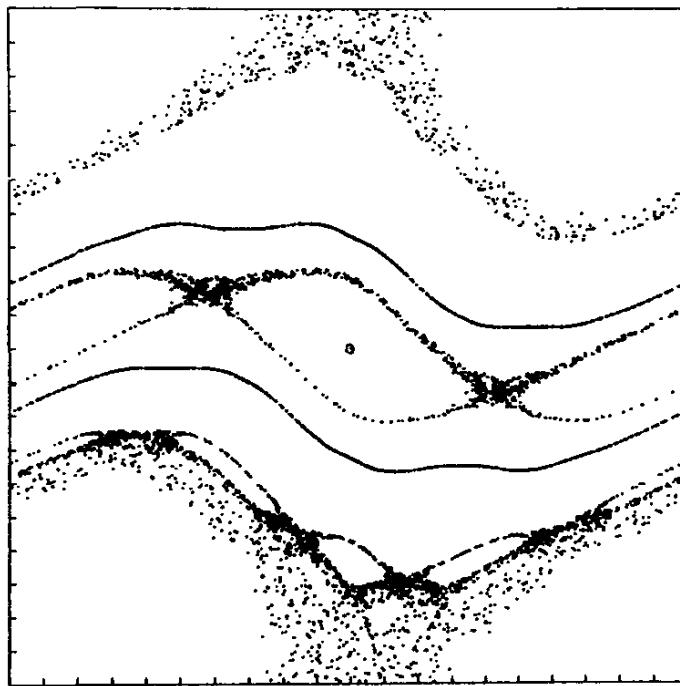
$$q_{i+1} = q_i + p_{i+1}, \quad (3.497)$$

$$p_{i+1} = p_i + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi q_i). \quad (3.498)$$

სადაც დავუშვით, რომ  $T = 1$ . ამასთან, ამ მოდელის განხილვისას, თვლიან, რომ ცვლადები იცვლებიან პერიოდით 1, ანუ,

$$\text{mod} q = 1; \quad \text{mod} p = 1. \quad (3.499)$$

ამ ასახვას ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტულ ასახვას უწოდებენ. მისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე მოცემულია ნახ. 3.49-ზე.



ნახ. 3.49. ტეილორ-ჩირიკოვის ასახვის ფაზური პორტრეტი, როცა  $k=0.97$

ამ ფაზური პორტრეტიდან, ნათლად ჩანს, თუ, როგორ ენაცვლებიან ერთმანეთს რეგულარული და ქაოსური ნაწილები. აქ ვხედავთ კუნძულებსაც, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ ინვარიანტული წირები აქ ტორები კი არ არიან, არამედ კანტორები (დაკავშირებულია კანტორის სიმრავლესთან).

### 3.14.6. ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმი (ლიაპუნოვის მაჩვენებლები)

ჰამილტონურ სისტემებში, ქაოსური მოძრაობის დამახასიათებელი თვისებაა, ძლიერი დამოკიდებულება საწყის პირობებზე. ქაოსურობის შემთხვევაში, საწყის პირობებში ახლოსმდგომი ინტეგრალური წირები, შემდგომში, ექსპონენციალური სისწრაფით შორდებიან. თუმცა, ფაზური სივრცის შემოფარგულობის გამო, ისინი უსასრულოდ ვერ დაშორდებიან. დაშორების სიჩქარის შესაფასებლად, იყენებენ ლიაპუნოვის მაჩვენებლებს.

მათი გამოყენების არეალი, სცილდება ჰამილტონურ სისტემებს და ისინი გამოიყენება საზოგადოდ, ყველა სახის დინამიკური სისტემებისათვის.

როგორც ვიცით, ატრაქტორები არსებობს სხვადასხვა სახის: მდგრადი ფოკუსი, ზღვართი ციკლი, ტორი და ბოლოს, უცნაური ატრაქტორი. ისმის კითხვა: როგორი იქნება კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვასხვავოთ ეს ატრაქტორები ერთმანეთისაგან? ასეთ კრიტერიუმს გვამღევს ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, რომლის შესწავლასაც ვაპირებთ ამ პარაგრაფში.

ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ავტონომიური დინამიკური სისტემა

$$\dot{q} = F(q). \tag{3.500}$$

ამ შემთხვევაში, ერთადერთი შესაძლო ატრაქტორი არის, მდგრადი უძრავი წერტილი (ერთგანზომილებიანი კვანძი). ხოლო, მისი ტრაექტორია, არის ერთი უძრავი წერტილი  $q = q_0$ . იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ამ უძრავი წერტილის მდგრადობა, გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ უკვე შესწავლილი, გაწრფივებული სისტემის მდგრადობის ანალიზის მეთოდი. ამისათვის, განვიხილოთ უძრავი წერტილის მცირე შემფოთება

$$q(t) = q_0 + \delta q(t). \tag{3.501}$$

ჩავსვათ ეს ფუნქცია (3.500) განტოლებაში და მარჯვენა მხარე გავშალოთ მწკრივად უძრავი წერტილის მიდამოში. მიღებულ

გაშლაში, შევინარჩუნოთ მხოლოდ წრფივი წევრები შემფოთების მიმართ. მაშინ გვექნება განტოლება

$$\frac{d}{dt} \delta q = L \delta q, \quad (3.502)$$

სადაც  $L = \frac{\partial F}{\partial q_{q=q_0}}$  - მუდმივი სიდიდეა. ცხადია, რომ (3.502) განტოლების ამონახსნს აქვს სახე

$$\delta q(t) = \delta q(0) e^{Lt}. \quad (3.503)$$

თუ,  $L < 0$  მაშინ უძრავი წერტილი მდგრადია. ამ მარტივ ამოცანაში  $L$  სიდიდის პოვნა, არ წარმოადგენს არავითარ სირთულეს, თუმცა სხვა შემთხვევაში, მის საპოვნელად კომპიუტერი დაგვჭირდებოდა. თუმცა, იმ რთული შემთხვევებისათვისაც კი შეგვიძლია ვიპოვოთ  $L$  სიდიდე, საკმაოდ მარტივი ფორმულით

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |\delta q(t)|. \quad (3.504)$$

ლიაპუნოვის მაჩვენებლის ცნება, აზოგადებს (3.504) ფორმულას ორი მიმართულებით

- 1) ტრაექტორიები შეიძლება მოძრაობდნენ მრავალგანზომილებიან სივრცეში:  $\mathbf{q}(t)$  - რადიუს-ვექტორია, რომლის ბოლოც  $t$  დროის განმავლობაში, მოძრაობს ტრაექტორიის გასწვრივ;
- 2) სისტემის მდგომარეობის მდგრადობას ვსწავლობთ  $\mathbf{q}_0(t)$  ცნობილი ამონახსნის მახლობლობაში.

წინა მაგალითის (3.501) ანალოგიურად, განვიხილოთ შემფოთებული ამონახსნი, მხოლოდ, ახლა უკვე ვექტორული ტოლობა გვექნება, რადგან მრავალგანზომილებიან ამოცანას ვიხილავთ

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \delta \mathbf{q}(t). \quad (3.505)$$

$\delta \mathbf{q}(t)$  - შემფოთების დინამიკა გვიჩვენებს, თუ, როგორია  $\mathbf{q}_0$  ამონახსნის მეზობელი,  $\mathbf{q}(t)$  ტრაექტორიის დინამიკა. ის, დროთა განმავლობაში შორდება, თუ, უახლოვდება  $\mathbf{q}_0$  ტრაექტორიას.  $\delta \mathbf{q}(t)$

სიდიდის დინამიკის შესასწავლად, ჩავსვათ (3.505) ტოლობები ვექტორულ, არაწრფივ სისტემაში

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q}(t)), \quad (3.506)$$

სადაც  $\mathbf{q}_0$  ამ სისტემის ამონახსნია. მარჯვენა ნაწილი, გავშალოთ მწკრივად  $\delta \mathbf{q}(t)$  შეშფოთების მიმართ და მოვახდინოთ მისი გაწრფივება. მაშინ მივიღებთ განტოლებათა წრფივ სისტემას

$$\frac{d}{dt} \delta q_i(t) = \sum_k \frac{\partial F_i(\mathbf{q}(t))}{\partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \delta q_k(t). \quad (3.507)$$

თუ, განვაზოგადებთ (3.504) თანადობას, მივიღებთ ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოსათვლელ ფორმულას

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\delta \mathbf{q}(t)|. \quad (3.508)$$

ახლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ კრიტერიუმი, სხვადასხვა ტიპის ატრაქტორების განსხვავებისათვის.

1. **ერთგანზომილებიან შემთხვევაში** არსებობენ მხოლოდ ისეთი მდგრადი, უძრავი წერტილები, რომელთათვისაც ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია (-);

2. **ორგანზომილებიან შემთხვევაში**, შესაძლებელია, მხოლოდ ორი ტიპის ატრაქტორები: მდგრადი უძრავი წერტილები და ზღვართი ციკლები.

თუ, ატრაქტორი მდგრადი, უძრავი წერტილია (ფოკუსი), მაშინ ლიაპუნოვის ორივე მაჩვენებელი უარყოფითია (-, -).

თუ, ატრაქტორი ზღვართი ციკლია, მაშინ მისი ტრანსვერსალური შეშფოთების შესაბამისი ლიაპუნოვის მაჩვენებელი უარყოფითია, ხოლო ტანგენციალურისა - ნულის ტოლი (-, 0). თუმცა, ასეთივე მნიშვნელობები შეიძლება გვქონდეს „პათოლოგიურ“ შემთხვევაშიც, როცა გვაქვს წირი, რომელიც უძრავი წერტილებისაგან შედგება;

3. **სამგანზომილებიან შემთხვევაში**,

გვაქვს მდგრადი ფოკუსი, თუ, ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია (-, -, -);

მდგრადი ზღვართი ციკლი, თუ, (-, -, 0);

მდგრადი ტორი, თუ, (-, 0, 0);

თუ, ლიაპუნოვის რომელიმე მაჩვენებელი დადებითია, შეიძლება გვქონდეს სისტემაში ქაოსი. თუ, გვაქვს (+, 0, 0) მაშინ შეიძლება გვქონდეს არამდგრადი ტორი, რომელიც არაა ატრაქტორი.

თუ, სისტემის ატრაქტორის ლიაპუნოვის მაჩვენებლებია  $(+, 0, -)$ , მაშინ ის ითვლება უცნაურ ატრაქტორად. უცნაური ატრაქტორის მეზობელი ტრაექტორიები სწრაფად შორდებიან მას.

### 3.14.7.ჰამილტონური ქაოსი ჰიდროდინამიკურ სისტემებში

ჰიდროდინამიკაში არსებობს ორგვარი მიდგომა. ესაა ეილერის მიდგომა და ლაგრანჟის მიდგომა. ეილერის მიდგომის დროს, სწავლობენ სითხის მოძრაობას მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში და სითხის მოძრაობას ახასიათებენ სიჩქარის კომპონენტებით

$$u = u(x, y, z, t), \quad (3.509)$$

$$v = v(x, y, z, t), \quad (3.510)$$

$$w = w(x, y, z, t). \quad (3.511)$$

ხოლო, ლაგრანჟის მიდგომის დროს მიყვებიან თითოეული ნაწილაკის ტრაექტორიას და სიჩქარეთა ველს წარმოადგენენ შემდეგნაირად

$$\dot{x} = u(x, y, z, t), \quad (3.512)$$

$$\dot{y} = v(x, y, z, t), \quad (3.513)$$

$$\dot{z} = w(x, y, z, t). \quad (3.514)$$

სადაც უნდა გვექონდეს საწყისი პირობებიც

$$(x(0), y(0), z(0)). \quad (3.515)$$

ორგანზომილებიანი უკუმში სითხისათვის, ადგილი აქვს უკუმშობის პირობას

$$u_x + v_y = 0. \quad (3.516)$$

აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ უნდა არსებობდეს დენის ფუნქცია  $\psi$ , ისეთი, რომ

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3.517)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.518)$$

ლაგრანჟის მიდგომის ფარგლებში, შეგვიძლია ჩავწეროთ მოძრაობის განტოლებები ფორმით

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (3.519)$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.520)$$

ამ განტოლებებს, როგორც ვხედავთ, აქვთ ჰამილტონის განტოლებების სტრუქტურა, სადაც  $\psi \leftrightarrow H$ ,  $x \leftrightarrow q$ ,  $y \leftrightarrow p$ . თუ, დენის ფუნქცია არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ (3.519),(3.520) სისტემა ავტონომიურია და ინტეგრებადი. ხოლო, თუ, გვაქვს დროზე

დამოკიდებულება, მაშინ სისტემაში შეიძლება გვექონდეს ქაოსი. თუმცა, სამგანზომილებიან შემთხვევაში, ქაოსი შეიძლება წარმოიქმნას სტაციონარულ შემთხვევაშიც.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. კვეთის ზედაპირის არსი და გამოყენების არეალი;
2. ჰენონ-ჰელიესის ჰამილტონიანი;
3. ააგეთ ფართის შემნახავი ასახვა სიბრტყეზე და შეისწავლეთ მისი დინამიკა კომპიუტერზე;
4. კავშირი ფართის შემნახავ ასახვასა და ჰამილტონიანებს შორის;
5. ლიაპუნოვის მაჩვენებლების გამოთვლა და ატრაქტორების განმასხვავებელი კრიტერიუმები.

### ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.1, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т.1, механика, пер. с англ. Москва 1975
3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1, т.2, уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
10. Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
11. Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977

12. Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
14. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
15. Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989
16. Яковенко Г.Н.Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 (www.study.com.ru)
17. Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991
18. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001



#### IV თავი. ეკონომიკის მათემატიკური მოდელები

სოციალურ-ეკონომიკური სისტემები მიეკუთვნება რთული, აქტიური სისტემების რიგს. მათთვის დამახასიათებელია გარემო პირობების მუდმივი ცვალებადობა, რაც იწვევს თვით ამ სისტემების განმსაზღვრელი პარამეტრების დინამიკური სურათის ცვლილებას.

აქტიურ სისტემებში ხშირად ისე იცვლება გარემო პირობები, რომ სისტემის მუშაობის მექანიზმი თვისებრივად განიცდის ცვლილებას. სისტემა იმდენად რთულია, რომ მისი დინამიკის თვისებრივი ცვლილება, იწვევს გარემო პირობების შეცვლას. ასე რომ, სოციალურ-ეკონომიკური სისტემა, უმეტესწილად არის ღია სისტემა, რის გამოც მუდმივად მიმდინარეობს “ენერჯის” გაცვლა “გარე სამყაროსთან”(გარემო პირობებთან), რაც, თავის მხრივ, იწვევს სისტემის თვითორგანიზებას. ყოველივე ეს განაპირობებს სინერგეტიკის მეთოდების პოპულარობას აქტიური სისტემების შესწავლის პროცესში. მაგალითად, როცა ბაზარზე გვაქვს “დიდი რაოდენობის”(კრიტიკული მასის) ერთი სახეობის პროდუქტი, ის მოქმედებს მოთხოვნაზე (მოთხოვნა კლებულობს) და მისი გასაყიდი ფასი ეცემა (ვინაიდან, იმ შემთხვევაში, თუ შევინახეთ ჭარბი პროდუქტი, დაგვჭირდება დამატებითი ხარჯების გაწევა საწყობისათვის ან ტრანსპორტირებისათვის, თუ წავიღებთ საკუთარ საწყობში). აქედან გამომდინარე, საქონლის რეალიზაციის მოცულობის გაზრდის მიზნით, ხშირად უმჯობესია მისი ფასის შემცირება გარკვეულ საზღვრამდე. ცხადია, ფასს იმაზე მეტად ვერ შევამცირებთ, ვიდრე მისი სარეალიზაციო პროდუქტად გადაქცევა დაგვიჯდა. უფრო მეტიც, გვინდა, რომ რეალიზაციის ფასმა ხარჯებიც დაფაროს და მოგებაც მოგვცეს.

**P.S.** თუმცა, არსებობს სიტუაციები(ეკონომიკური ომი), როდესაც საჭიროა სუსტი კონკურენტების მოცილება და სპეციალურად საქონლის დემპინგურ (თვითღირებულებაზე

ნაკლებ) ფასებში გაყიდვა, რათა დავიპყროთ ბაზარი, ხოლო შემდეგ გავადიდოთ ფასები და მივიღოთ მეტი მოგება.

ასეთ შემთხვევაში, ჩვენი ფირმა(ქვეყანა), რომელიც საქონელს აქცევს სარეალიზაციო პროდუქტად, სოციალ-ეკონომიკურ სისტემას წარმოადგენს, ხოლო ბაზარი მყიდველებსა და გამყიდველებთან ერთად არის გარემო, რომელშიც მუშაობა უხდება სისტემას. აქ ნათლად ჩანს ის ურთიერთქმედება სისტემასა და მის გარემოს შორის, რაზეც ადრე იყო საუბარი.

ამ მაგალითის განზოგადება ადვილია როგორც დიდი კომპანიისათვის, ისე სახელმწიფო მასშტაბით.

**სახელმწიფო ყოველთვის დაინტერესებულია იმით, რომ ექსპორტი სჭარბობდეს იმპორტს და, მაშასადამე, სალდო იყოს დადებითი.** თუ სალდო უარყოფითი იქნება, მაშინ სახელმწიფო იძულებულია დახარჯოს საერთაშორისო სავალუტო რეზერვები, რაც განაპირობებს ბალანსის დარღვევას ადგილობრივსა და უცხოურ ვალუტას შორის. ეს კი იწვევს ადგილობრივი ვალუტის გაუფასურებას (შესაბამისი ინფლაციით).

იმისათვის, რომ სახელმწიფომ საკუთარი ქვეყნის მეწარმეები დაიცვას უცხო ქვეყნის უფრო იაფი საქონლის შემოდინებისაგან, რაც საბოლოოდ იწვევს ეროვნული საწარმოების გაკოტრებას და უმუშევრობის ზრდას, ხდება გარკვეული ქვეყნისათვის სტრატეგიული მნიშვნელობის პროდუქციის შემოტანაზე აქციზის (დამატებითი გადასახადის) დაწესება. აქციზის სიდიდე ისეთი უნდა იყოს, რომ უცხო ქვეყნის საწარმომ ვეღარ შეძლოს ეროვნული საწარმოების გაკოტრება (შემოტანილი საქონლის თვითღირებულება უფრო მეტი უნდა იყოს, ვიდრე ეროვნული პროდუქტისა); ასევე, იკრძალება საქონლის დემპინგურ ფასებში გაყიდვა.

ზოგჯერ, კორუმპირებული სახელმწიფო მოხელეები “წილში უჯდებიან” უცხო ქვეყნის მეწარმეებს, აქციზის გარეშე

შემოატანინებენ საქონელს და აკოტრებენ ეროვნულ საწარმოებსა და ფერმერებს საკუთარი “ჯიბის გასქელების” ხარჯზე. ასე ხდებოდა კარგა ხანს საქართველოშიც, როცა თურქეთიდან შემოჰქონდათ ნიტრატებით გაჟღენთილი მავნე, მაგრამ იაფი კვების პროდუქტები, რითაც წამლავდნენ და აავადებდნენ საკუთარ მოსახლეობას, საკუთარი გამდიდრების მიზნით აკოტრებდნენ ფერმერებსა და სოფლის მთელ მოსახლეობას. იქამდეც კი მივიდნენ, რომ გააუქმეს სანიტარიული სამსახური, რომელსაც ევალებოდა სარეალიზაციო პროდუქციის ხარისხის შემოწმება (კორუფციის მოსპობის საბაბით). მოსახლეობის ცხოვრების დონის მკვეთრი ვარდნა კი იწვევს სოციალურ დაძაბულობას და რევოლუციურ სიტუაციას ქმნის.

კორუფცია დემოკრატიის თანმდევი სენია, რადგან ის თავისუფლებას აძლევს ადამიანის ხარბსა და გაუმადლარ ბუნებას. კორუფციის მთლიანი მოსპობა შეუძლებელია, თუმცა დასაშვებ საზღვრებში (5%-10%) მოქცევა მხოლოდ სტალინის ტიპის დიქტატორსა და კონსტიტუციურ მონარქს შეუძლია, ვინაიდან დიქტატურა ფიზიკური განადგურების შიშზეა დამყარებული, ხოლო კონსტიტუციური მონარქის ძალაუფლებას შეუძლია ყოველთვის შეცვალოს კორუმპირებული მთავრობა.

რაც შეეხება მრავალპარტიულ სისტემას მეფის გარეშე, ის ყოველთვის კორუფციის ბუდე იქნება და როგორც კი დაირღვევა ბალანსი საკანონმდებლო და აღმასრულებელ ხელისუფლებას შორის, კორუფციაც გალალდება. თუ, კორუფციამ ქვეყანაში მიაღწია 29%, მაშინ სახელმწიფოებრიობა იწყებს მკვეთრ ნგრევას რევოლუციური გზით(ივერის ეფექტი). თუ ერთმა პარტიამ მოიპოვა კონსტიტუციური უმრავლესობა პარლამენტში, მაშინ დიდია დიქტატურისა და კორუფციული მთავრობის ჩამოყალიბების ალბათობა.

#### 4.1. მიკროეკონომიკის ძირითადი ცნებები. განურჩევლობის მრუდები. მოხმარებისა და მოთხოვნის თეორია

პირადი მოთხოვნილებების დასაკმაყოფილებლად ინდივიდები სხვადასხვა დოვლათს მოიხმარენ.

პირადი მოხმარების მოდელირებისათვის იყენებენ განურჩევლობის მრუდის ცნებას.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, საოჯახო მეურნეობა მოიხმარს ორი სახის დოვლათს (დოვლათი 1 და დოვლათი 2). დაეუშვათ დროის რაღაც პერიოდში პირველი დოვლათი მოიხმარეს  $Y_1$ , ხოლო მეორე დოვლათი –  $Y_2$  რაოდენობით. ორგანზომილებიან  $(Y_1, Y_2)$  ვექტორს უწოდებენ მოხმარების გეგმას. საოჯახო მეურნეობა მოხმარების  $A=(Y_1^A, Y_2^A)$  ვექტორს ადარებს, მოხმარების სხვა  $B=(Y_1^B, Y_2^B)$  ვექტორს და აკეთებს ქვემოთ ჩამოთვლილიდან ერთ-ერთ დასკვნას:

- ა)  $A$  ვექტორს უპირატესობა აქვს  $B$  ვექტორთან შედარებით;
- ბ)  $B$  ვექტორს უპირატესობა აქვს  $A$  ვექტორთან შედარებით;
- გ)  $A$  და  $B$  ვექტორებს თანაბარი უპირატესობა აქვს (მომხმარებლისთვის სულერთია რომელს აირჩევს,  $A$  თუ  $B$  ვექტორს).

**განსაზღვრება.** მოხმარების გეგმათა სიმრავლე, რომელიც განურჩევლობის მდგომარეობაშია განსახილველ გეგმასთან, სიბრტყეზე შეადგენს წერტილთა სიმრავლეს, და მას განურჩევლობის მრუდი ეწოდება.

თუ  $U=U(Y_1, Y_2)$ -ით აღვნიშნავთ ფუნქციას ან სხვანაირად, სარგებლიანობის ინდექსს, რომელიც შეიძლება მივიღოთ  $(Y_1, Y_2)$  ვექტორით მოცემული დოვლათის მოხმარებით, მაშინ განურჩევლობის მრუდი იქნება  $(Y_1, Y_2)$  მნიშვნელობათა ერთობლიობა, რომელთაც მიყვავართ სარგებლიანობის  $U$  ინდექსის ერთსა და იმავე მნიშვნელობამდე (ე.ი. განურჩევლობის მრუდები სარგებლიანობის ფუნქციის დონის წირებია).

განურჩევლობის მრუდები განისაზღვრება სარგებლიანობის ფუნქციის მიხედვით.

განვიხილოთ სარგებლიანობის ფუნქციის რამდენიმე ტიპი, რომლებიც ეკონომიკაში ხშირად გამოიყენება:

1. ფუნქცია დოვლათთა სრული ურთიერთჩანაცვლებით (მაგ., ფხვნილი შაქრი და ნატეხი შაქარი)

$$U = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2. \quad (4.1)$$

2. სარგებლიანობის ნეოკლასიკური (კობ-დუგლასის) ფუნქცია:

$$U = \alpha_0 Y_1^{\alpha_1} \times Y_2^{\alpha_2}, \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1. \quad (4.2)$$

3. სარგებლიანობის ფუნქცია სრულად ურთიერთშემცვლელი დოვლათებისათვის (მაგ., კარაქი და პური, სოსისი და მდოგვი)

$$U = \min\left(\frac{Y_1}{\alpha_1}, \frac{Y_2}{\alpha_2}\right) \Leftrightarrow U = u, \text{ სადაც } \begin{cases} Y_1 \geq \alpha_1 u \\ Y_2 \geq \alpha_2 u \end{cases}; \quad (4.3)$$

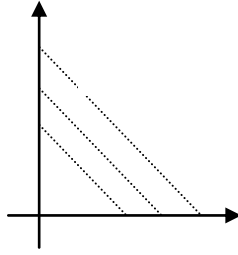
4. შერეული, შემცვლელ-ჩანაცვლებელი ტიპის ფუნქცია (მაგ., ჩაი და რძე):

$$U = u_1 + u_2, \text{ სადაც } \begin{cases} Y_1 \geq \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 \\ Y_2 \geq \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

განურჩევლობის მრუდის ასაგებად სარგებლიანობის ფუნქციის ერთ-ერთი არგუმენტი უნდა გამოვსახოთ სხვა არგუმენტითა და სარგებლიანობის ფუნქციის  $U$  მნიშვნელობით. მაგალითად, (4.1) ფუნქციისათვის გვექნება

$$Y_2 = \frac{U - \alpha_1 Y_1}{\alpha_2}. \quad (4.5)$$

$\alpha_1$  და  $\alpha_2$  კოეფიციენტებს მივანიჭოთ მუდმივი მნიშვნელობები და შევარჩიოთ სარგებლიანობის ფუნქციის  $U_0$  მნიშვნელობა, შემდგომ  $Y_1$ -სთვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მინიჭებისას, (4.5)-დან მივიღებთ  $Y_2$ -ის შესაბამის მნიშვნელობებს. მიღებული  $(Y_1, Y_2)$  წერტილების სიბრტყეზე ასახვით კი მივიღებთ განურჩევლობის მრუდს (ნახ. 4.1).



ნახ. 4.1.

მიიღება წრფეები და ამავედროულად, რაც მეტია  $U_0$  შესაბამისი განურჩევლობის მრუდი მით უფრო შორს განთავსდება კო-ორდინატთა სათავიდან.

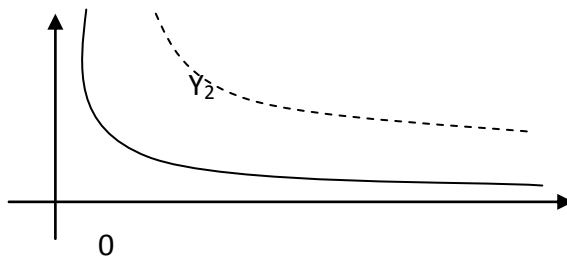
ფუნქციები სრული ურთიერთჩანაცვლებით თავს იჩენს მაშინ, როდესაც  $Y_1$  და  $Y_2$  ურთიერთშემცვლელეებია; მაგალითად, თუ  $Y_1$  არის ჩაი და  $Y_2$  - ყავა.

სარგებლიანობის (4.2) ფუნქციისათვის განურჩევლობის მრუდის ასაგებად ვპოულობთ  $Y_2$ -ს:

$$Y_2 = \left( \frac{U}{\alpha_0 Y_1^{\alpha_1}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}}. \quad (4.6)$$

$(Y_1, Y_2)$  სიბრტყეზე  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  და  $U_0$ -ის დაფიქსირებით, მივიღებთ განურჩევლობის მრუდს (ნახ. 4.2).

რაც უფრო მეტია  $U_0$ -ის მნიშვნელობა, განურჩევლობის მრუდი მით მეტად არის დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან.

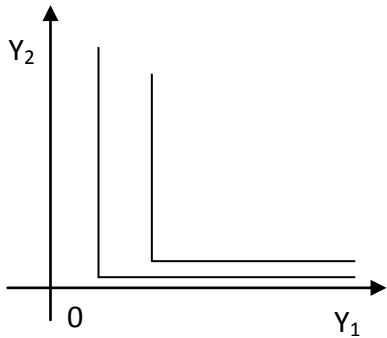


ნახ. 4.2.

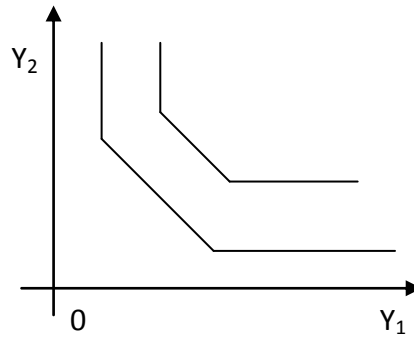
სარგებლიანობის (4.6) ფუნქციისათვის განურჩევლობის მრუდს აქვს 4.2 ნახ-ზე მოცემული სახე.

ფუნქციები სრული ურთიერთშემცვლებით თავს იჩენს მაშინ, როცა  $Y_1$  და  $Y_2$  ერთად გამოიყენება. მაგალითად, თუ  $Y_1$  ჩაია და  $Y_2$  შაქარი (ნახ. 4.3).

შერეული ტიპის ფუნქციისათვის გვაქვს 4.4 ნახ-ზე მოცემული განურჩევლობის მრუდები.



ნახ. 4.3



ნახ. 4.4

**ზღვრული სარგებლიანობა და ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა**

მოხმარების თეორიის ძირითადი ცნებებია **ზღვრული სარგებლიანობა და ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა**. ვთქვათ,  $U=U(Y_1, Y_2)$  - სარგებლიანობის ფუნქციაა.

**განსაზღვრება.** სარგებლიანობის ფუნქციის  $i$ -ური ცვლადის მიხედვით ცვლილების  $\frac{\partial U}{\partial Y_i}$  სიჩქარეს,  $i$ -ური დოვლათის **ზღვრული სარგებლიანობა** ეწოდება.

მაგალითად, სარგებლიანობის  $U=\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$  ფუნქციისათვის  $Y_1$  დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობაა  $\frac{\partial U}{\partial Y_1} = \alpha_1$ ; ხოლო  $Y_2$

დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობა იქნება  $\frac{\partial U}{\partial Y_2} = \alpha_2$  (**ზღვრული**

**სარგებლიანობა - marginal utility**).

**კობ-დუგლასის ნეოკლასიკური ტიპის** სარგებლიანობის ფუნქციისათვის  $U = \alpha_0 Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2}$ , სადაც  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ , მივიღებთ, რომ დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობა იქნება:

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} = \alpha_0 Y_2^{\alpha_2} \alpha_1 Y_1^{\alpha_1-1} = \frac{\alpha_1 U}{Y_1}.$$


---

$Y_1$  დოვლათის  $dY_1$  სიდიდით შემცირებისას სარგებლიანობის წინანდელი  $U$  დონის შესანარჩუნებლად საჭიროა, მეორე დოვლათის მოხმარება გაეზარდოს  $dY_2$  სიდიდით.

ამ ცვლილების ამსახველ ფარდობას უწოდებენ ჩანაცვლების ზღვრულ ნორმას (**marginal rate of substitution**).

**განსაზღვრება:** სამომხმარებლო დოვლათის ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა (**MRS**) ეწოდება შემდეგი გამოსახულებით მოცემულ ფარდობას:

$$MRS = - \left. \frac{dY_2}{dY_1} \right|_{U=const} . \quad (4.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $A=(Y_1, Y_2)$  და  $B(Y_1+dY_1, Y_2+dY_2)$  წერტილები განურჩევლობის ერთსა და იმავე მრუდზე ძევს (ე.ი. შეესაბამება სარგებლიანობის ფუნქციის ერთსა და იმავე დონეს), გვექნება:

$$U(Y_1, Y_2) = U(Y_1+dY_1, Y_2+dY_2). \quad (4.8)$$

ამრიგად,  $dU=0$ , რაც ნიშნავს,

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial U}{\partial Y_2} dY_2 = 0 . \quad (4.9)$$

აქედან გამომდინარე

$$MRS = - \left. \frac{dY_2}{dY_1} \right|_{U=const} = \left. \frac{\frac{\partial U}{\partial Y_1}}{\frac{\partial U}{\partial Y_2}} \right|_{U=const} . \quad (4.10)$$

**P.S.** მაშასადამე, ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა გამოისახება დოვლათთა ზღვრული სარგებლიანობათა ფარდობით.

---



## მოთხოვნის ფუნქცია

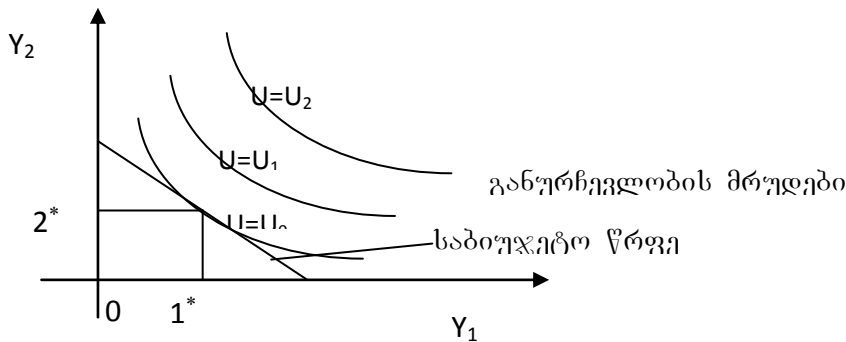
თითოეული პიროვნებისათვის დამახასიათებელი მოთხოვნილება, სხვადასხვა სახის დოვლათზე აისახება განურჩევლობის მრუდის მეშვეობით, ხოლო მომხმარებლის მოთხოვნის შეზღუდვა მოიცემა საბიუჯეტო შეზღუდვების პირობებით.

თუ პირველი და მეორე დოვლათის საბაზრო ფასებს აღვნიშნავთ  $P_1$  და  $P_2$ -ით, ხოლო მომხმარებლის შემოსავალს (ბიუჯეტს) კი  $B$ -თი, მაშინ დოვლათის მოხმარების  $(Y_1, Y_2)$  გეგმისათვის საბიუჯეტო შეზღუდვის უტოლობასა და ბიუჯეტის წრფის განტოლებას მოცემული პიროვნებისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 \leq B. \quad (4.11)$$

გამოსახულება (4.11) იძლევა საბიუჯეტო შეზღუდვის განტოლებას.

განვიხილოთ განურჩევლობის მრუდები და ბიუჯეტის წრფე (ნახ. 4.5).



ნახ. 4.5

ჩავთვალოთ, რომ თითოეული პიროვნება ბიუჯეტის შეზღუდვის ფარგლებში ცდილობს თავისი შემოსავალი ისე გადაანაწილოს სხვადასხვა სამომხმარებლო დოვლათს შორის, რომ მიაღწიოს სარგებლის მაქსიმიზაციას:

$$U \rightarrow \max, \quad (4.12)$$

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 \leq B.$$

დოვლათის შესაბამისი მნიშვნელობების  $(Y_1^*, Y_2^*)$  ერთობლიობას მოხმარების ოპტიმალური გეგმა ეწოდება. ის აღნიშნავს ბიუჯეტის წრფისა და განურჩევლობის მრუდის შეხების წერტილს.

მაშასადამე, როდესაც საბაზრო ფასები და პიროვნების შემოსავალი მოცემულია, პიროვნების მოხმარების ოპტიმალური გეგმა ბიუჯეტში არსებული შეზღუდვებისას განისაზღვრება სარგებლის მაქსიმიზაციის პრინციპით. მოხმარების ოპტიმალური გეგმა იცვლება ფასისა და შემოსავლის (პიროვნების ბიუჯეტის) მიხედვით.

$$\begin{cases} Y_1^* = \varphi_1(P_1, P_2, B) \\ Y_2^* = \varphi_2(P_1, P_2, B). \end{cases} \quad (4.13)$$

ამ გამოსახულებას უწოდებენ საოჯახო მეურნეობის მოთხოვნის ფუნქციებს.

### სარგებლიანობის ფუნქციის თვისებები

სარგებლიანობის  $U=U(Y_1, Y_2)$  ფუნქციის არსიდან გამომდინარე მას აქვს შემდეგი ზოგადი (ე.ი. ფუნქციის ტიპისგან დამოუკიდებელი) თვისებები:

1) თუ  $Y_2 = \text{const}$ , მაშინ  $Y_1$ -ის ზრდასთან ერთად, სარგებლიანობის ფუნქციაც იზრდება; ასევე, თუ  $Y_1 = \text{const}$  და  $Y_2$  იზრდება, მაშინ სარგებლიანობის ფუნქციაც იზრდება, სხვაგვარად გვექნება:

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} > 0 \wedge \frac{\partial U}{\partial Y_2} > 0. \quad (4.14)$$

ამრიგად პროდუქტების ზღვრული სარგებლიანობა დადებითია;

2) თითოეული პროდუქტის ზღვრული სარგებლიანობა კლებულობს, თუ მისი მოხმარების მოცულობა იზრდება

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} < 0 \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial Y_2^2} < 0. \quad (4.15)$$

ამ თვისებას უწოდებენ ზღვრული სარგებლიანობის კლების კანონს. ეს თვისება იმას ნიშნავს, რომ საქონლის თითოეულ სახეობაზე მოხმარება შეზღუდულია მოთხოვნით;

3) დოვლათის თითოეული სახეობის ზღვრული სარგებლიანობა იზრდება, თუ იზრდება დოვლათის სხვა სახეობის რაოდენობა. ამ შემთხვევაში საქონელი, რომლის რაოდენობა ფიქსირებულია, შედარებით დეფიციტურია. ამიტომ, მისი ყოველი დამატებითი ერთეული იძენს მეტ ღირებულებას და შეიძლება უფრო ეფექტურად იქნეს გამოყენებული. თვისება მართებულია დოვლათის მხოლოდ იმ  $Y_1$  და  $Y_2$  სახეობებისათვის, რომლებიც ერთმანეთს სრულად ვერ ჩაანაცვლებენ. იგი ანალიზურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1 \partial Y_2} > 0. \quad (4.16)$$

ზემოთ მოყვანილი თვისებები გვიჩვენებს, რომ (4.10)-ის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{dY_2}{dY_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial Y_1}}{\frac{\partial U}{\partial Y_2}} < 0. \quad (4.17)$$

ეს ნიშნავს, რომ  $Y_1$ -ის ზრდასთან ერთად,  $Y_2$  მცირდება.

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული

$$\frac{d^2 Y_2}{dY_1^2} = \frac{d}{dY_1} \left( \frac{dY_2}{dY_1} \right) = -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y_1 \partial Y_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y_1}}{\left( \frac{\partial U}{\partial Y_2} \right)^2}. \quad (4.18)$$

სამივე თვისებიდან გამომდინარე ვღებულობთ, რომ

$$\frac{d^2 Y_2}{dY_1^2} > 0. \quad (4.19)$$

ამრიგად  $Y_2=f(Y_1)$  ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია ანუ აქვს განურჩევლობის მრუდის გრაფიკზე (ნახ. 4.5), გამოსახული ფორმა.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა მომხმარებლის არჩევანზე.

**ამოცანა.** ვთქვათ გვაქვს შემდეგი სახის სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U = Y_1 \cdot Y_2, \quad (4.20)$$

სადაც ცნობილია  $Y_1$  და  $Y_2$  პროდუქტების შესაბამისი  $P_1$  და  $P_2$  ფასები. გვაქვს საბიუჯეტო შეზღუდვა

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 Y_2 \leq B. \quad (4.21)$$

ამ პირობებში იპოვეთ ოპტიმალური გეგმა, ე.ი.  $Y_1$  და  $Y_2$  პროდუქტების ის რაოდენობა, რომლის დროსაც სარგებლიანობის  $U$  ფუნქცია მაქსიმალურია.

**ამოხსნა.** ცხადია, (4.21) პირობა ოპტიმალურ წერტილში იქნის ტოლობის ნიშნის, ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{cases} U = Y_1 \cdot Y_2 \rightarrow \max \\ P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 = B \end{cases} \quad (4.22)$$

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = Y_1 \cdot Y_2 + \lambda(P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 - B). \quad (4.23)$$

ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial Y_1} = Y_2 + \lambda P_1 &= 0 & Y_2 &= -\lambda P_1, \\ \frac{\partial L}{\partial Y_2} = Y_1 + \lambda P_2 &= 0 & \text{ე. ი.} & Y_1 = -\lambda P_2, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 - B &= 0 & & P_1 Y_1 + P_2 Y_2 = B, \end{aligned} \quad (4.24)$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\begin{cases} Y_2 = \frac{P_1}{P_2} Y_1 \\ P_1 \cdot Y_1 + P_2 Y_2 = B \end{cases} \quad (4.25)$$

პირველი პირობა ნიშნავს, რომ ორივე პროდუქტზე დახარჯული ფულის რაოდენობა უნდა იყოს ერთნაირი

$(P_1 \cdot Y_1 = P_2 \cdot Y_2)$ , მაშინ (4.25)-ის მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ მოთხოვნის ფუნქციებს:

$$Y_1 = \frac{B}{2P_1}; \quad (4.26)$$

$$Y_2 = \frac{B}{2P_2}. \quad (1.27)$$

ამრიგად, თითოეულ პროდუქტზე გაწეული ხარჯი შეადგენს მომხმარებლის საერთო შემოსავლის ნახევარს (ეს დაკავშირებულია სარგებლიანობის ფუნქციის  $Y_1$  და  $Y_2$ -ის მიმართ სიმეტრიულობასთან).

### მომხმარებლის არჩევანის ზოგადი მოდელი

ვთქვათ, გვაქვს სარგებლიანობის ფუნქცია  $U=U(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ , სადაც  $Y_i$  არის  $i$ -ური დოვლათის რაოდენობა,  $P=(P_1, P_2, \dots, P_n)$  - ფასების ვექტორი და  $B$  - მომხმარებლის ბიუჯეტი.

მაშინ, მივიღებთ მომხმარებლის არჩევანის ზოგად ამოცანას:

$$U(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \rightarrow \max, \quad (4.28)$$

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + \dots + P_n Y_n \leq B, \quad (4.29)$$

$$Y_i > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.30)$$

ლაგრანჟის ფუნქცია (4.28)-(4.30) ჩავწეროთ ამოცანისათვის:

$$L = U(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) + \lambda(P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \dots + P_n \cdot Y_n - B). \quad (4.31)$$

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს აქვს შემდეგი სახე:

$$L_{,i} = U_{,i} + \lambda P_i = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (4.32)$$

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \dots + P_n \cdot Y_n = B, \quad (4.33)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{U_{.i}}{U_{.j}} = \frac{P_i}{P_j}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.34)$$

ასე რომ, ოპტიუმის წერტილში ნებისმიერი ორი დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობის ფარდობა უდრის მათი საბაზრო ფასების ფარდობას.

**P.S.** ცხადია, რომ ზოგადად მოთხოვნის ფუნქციის ანალიზური სახით წარმოდგენა შეუძლებელია, თუ არ შემოვიფარგლებით გარკვეული სახის სარგებლიანობის ფუნქციებით. სარგებლიანობის ფუნქციის ასაგებად გამოიყენება რეგრესიული ანალიზის მეთოდები, შესაბამისი თვისებების გათვალისწინებით.

**ამოცანა.** ამოხსენით მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა და იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, როცა დოვლათზე ფასებია:  $P_1=10$ ;  $P_2=2$ , ბიუჯეტი  $B=60$ , ხოლო სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

ა)  $U = Y_1 \cdot Y_2 \rightarrow \max$ ;

ბ)  $U = Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{2/3} \rightarrow \max$ ;

გ)  $U = (Y_1 - 1)^{1/4} \cdot (Y_2 - 3)^{3/4} \rightarrow \max$ ;

დ)  $U = 3(5 - Y_1)^2 + (7 - Y_2)^2 \rightarrow \min$ .

გამოსახეთ განურჩევლობის მრუდები და ბიუჯეტის წრფე.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.1

**ამოცანა.** მოცემულია სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U = 12Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2}$$

საქონლის ფასებია:  $P_1 = 0.75$ ,  $P_2 = 0.5$  და ბიუჯეტი  $B = 25$ .

ამ პირობებში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური გეგმა, ანუ  $Y_1$ -ისა და  $Y_2$ -ის ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც სარგებლიანობის ფუნქცია მაქსიმალურია. (ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით, შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. ააგეთ ამოცანის გრაფიკული ინტერპრეტაცია).

ამოხსნა:

შევაღებინოთ საბიუჯეტო შეზღუდვა:

$$P_1Y_1 + P_2Y_2 = B,$$

$$0.75Y_1 + 0.5Y_2 = 25.$$

შევაღებინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(Y_1, Y_2, \lambda) = 12Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2} + \lambda(25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2)$$

და შესაბამისი შეზღუდვები:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = 6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2} - 0.75\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = 12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2}Y_2^{-1/2} - 0.5\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0$$

მივცეთ სისტემის სახე:

$$\begin{cases} 6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2} - 0.75\lambda = 0 \\ 12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2}Y_2^{-1/2} - 0.5\lambda = 0; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2}}{0.75} = \frac{12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2}Y_2^{-1/2}}{0.5}; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2}\right) \cdot 0.5 = \left(12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2}Y_2^{-1/2}\right) \cdot 0.75; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6Y_2^{1/2}Y_2^{1/2} \cdot 0.5 = 6Y_1^{1/2}Y_1^{1/2} \cdot 0.75; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3Y_2 = 4.5Y_1 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1.5Y_1 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$25 - 0.75Y_1 - 0.5 \cdot 1.5Y_1 = 0$$

$$25 - 1.5Y_1 = 0$$

$$Y_1 = 16.67$$

$$Y_2 = 25$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

მიზნის ფუნქციის შეტანა:

$$U(Y_1, Y_2) := 12Y_1^{\frac{1}{2}} \cdot Y_2^{\frac{1}{2}};$$

საწეისი მონაცემების განსაზღვრა:

$$Y_1 := 1$$

$$Y_2 := 1$$

შეზღუდვათა სისტემა:

**Given**

$$Y_1 \geq 0$$

$$Y_2 \geq 0$$

$$0.75 Y_1 + 0.5 Y_2 = 25$$

სარგებლიანობის  
მნიშვნელობები:

ფუნქციის

მაქსიმუმის

შესაბამისი

$$R := \text{Maximize}(U, Y_1, Y_2)$$

$$R = \begin{pmatrix} 16.667 \\ 25 \end{pmatrix}$$



$$U(R_0, R_1) = 244.949$$

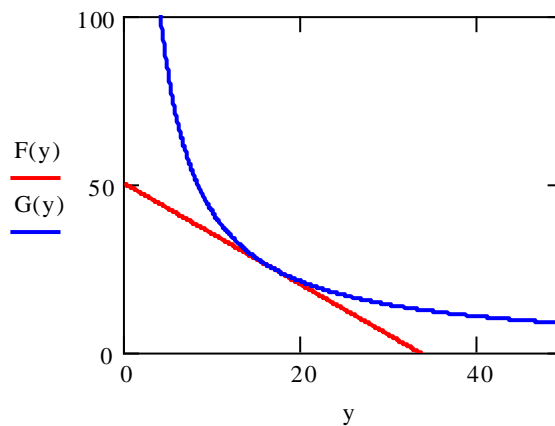
ავაგოთ საბიუჯეტო შეზღუდვის გრაფიკი და განურჩევლობის მრუდი ერთ კოორდინატა სიბრტყეზე. ამისათვის,  $Y_2$  გამოვსახოთ  $Y_1$ -ის საშუალებით, მივიღებთ ფუნქციას:

$$F(y) := \frac{25 - 0.75y}{0.5}$$

განურჩევლობის მრუდის ასაგებად, ჩავატაროთ ასეთივე გამოსახვა და მასში შევიტანოთ ჩვენ მიერ გამოთვლილი სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$G(y) := \left( \frac{244.949}{12y^2} \right)^2$$

ავაგოთ გრაფიკი.



მიღებული შესების წერტილი წარმოადგენს მომხმარებლის არჩევანის შესაბამის წერტილს.

**სავარჯიშო.**

მოცემულია სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U = Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2}.$$

საქონლის ფასებია:  $P_1 = 0.75$ ,  $P_2 = 0.5$  და ბიუჯეტი  $B = 29$ .

ამ პირობებში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური გეგმა, ანუ  $Y_1$ -ისა და  $Y_2$ -ის ის მნიშვნელობები, როდესაც სარგებლიანობის ფუნქცია მაქსიმალურია (ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით, შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. ააგეთ ამოცანის გრაფიკული ინტერპრეტაცია).

#### 4.2. რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქცია და მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა

სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$U(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (Y_1 - a_1)^{\alpha_1} : (Y_2 - a_2)^{\alpha_2} : \dots : (Y_n - a_n)^{\alpha_n} \rightarrow \max \quad (4.35)$$

სადაც  $a_i$  არის  $i$ -ური დოვლათის აუცილებელი მინიმალური რაოდენობა, რომელიც შეისყიდება ნებისმიერ შემთხვევაში და არ წარმოადგენს არჩევანის საგანს. იმისათვის, რომ  $a_i, i = \overline{1, n}$  დოვლათთა ერთობლიობა სრულად იქნეს შეძენილი აუცილებელია,  $B$  ბიუჯეტი იყოს ამ დოვლათთა ერთობლიობის შესაძენად საჭირო ფულის რაოდენობაზე მეტი.  $\alpha_i > 0$  ხარისხის მაჩვენებლები ახასიათებს, მომხმარებლისათვის დოვლათთა ფარდობით ღირებულებას, ანუ ახასიათებს იმას, თუ მომხმარებლისათვის რამდენად მეტად სასურველია ესა, თუ ის სახის დოვლათი.

(1.35) მიზნის ფუნქციაზე საბიუჯეტო შეზღუდვების დამატებით

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \dots + P_n \cdot Y_n \leq B$$

$$Y_i \geq a_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.36)$$

მივიღებთ რ. სტოუნის მოდელს.

რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციისათვის მომხმარებლის არჩევანის ამოცანის ამოსახსნელად, შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = \prod_{i=1}^n (Y_i - a_i)^{\alpha_i} + \lambda(P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \dots + P_n \cdot Y_n - B) \quad (4.37)$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობებით მიიღება:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_i} = \frac{\alpha_i \cdot U(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)}{Y_i - a_i} + \lambda P_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.38)$$

$$\text{ე.ი.} \quad Y_i = a_i - \frac{\alpha_i \cdot U}{\lambda P_i}. \quad (4.39)$$

ასევე, გვაქვს პირობა:

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \dots + P_n \cdot Y_n = B. \quad (4.40)$$

გავამრავლოთ (4.39)-ში ყოველი  $i$ -ური განტოლება  $\lambda P_i$ -ზე და შევაჯამოთ  $i$ -ს მიმართ, მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^n Y_i \cdot \lambda P_i = \sum_{i=1}^n \lambda a_i P_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i U. \quad (4.41)$$

(4.40)-ის გამოყენებით, (4.41)-დან ვღებულობთ:

$$\lambda \cdot B - \lambda \sum_{i=1}^n a_i \cdot P_i = -U \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad (4.42)$$

სხვაგვარად,

$$-\frac{U}{\lambda} = \frac{B - \sum_{i=1}^n a_i P_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad (4.43)$$

(4.39)-ში ჩავსვით (4.43), მივიღებთ მოთხოვნის ფუნქციას:

$$Y_i = a_i + \frac{\alpha_i \left( B - \sum_{i=1}^n P_i a_i \right)}{P_i \sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.44)$$

ამ ფუნქციის ინტერპრეტირება იოლია. თავდაპირველად გამოიყენება ყოველი  $a_i$  დოვლათის მინიმალურად აუცილებელი რაოდენობა, შემდეგ გამოითვლება ფულის დარჩენილი

რაოდენობა, რომელიც პროპორციულად გადანაწილდება მოცემული სახის დოვლათის სასურველობის  $\alpha_i$  მნიშვნელობის (წონადობის) მიხედვით. ფულის რაოდენობის  $P_i$  ფასზე გაყოფით მინიმუმის გარდა მივიღებთ დამატებით შესაძენ  $i$ -ური დოვლათის რაოდენობას და მას დავუმატებთ  $a_i$ -ს.

## ლაბორატორიული სამუშაო 4.2

**ამოცანა.** სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს რ. სტოუნის სახე. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი აუცილებლად მოიხმარს თვეში  $a_1=18$  ცალ პურს  $P_1=0.5$  ლარის ღირებულებით,  $a_2=4$  კგ კარტოფილს -  $P_2=1.20$  ლარის ღირებულებით,  $a_3=3$  კგ ხორცს -  $P_3=8$  ლარის ღირებულებით,  $a_4=2$  კგ თევზს  $P_4=10$  ლარის ღირებულებით და  $a_5=10$  ცალ კვერცხს -  $P_5=0.25$  ლარის ღირებულებით, თუ  $\alpha_1=5$ ;  $\alpha_2=4$ ;  $\alpha_3=2$ ;  $\alpha_4=3$  და  $\alpha_5=1$ . მომხმარებლის ბიუჯეტი თვეში 500 ლარია. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით. მიღებული შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

**ამოხსნა:** სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

$$U(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5) = (Y_1 - a_1)^{\alpha_1} (Y_2 - a_2)^{\alpha_2} (Y_3 - a_3)^{\alpha_3} (Y_4 - a_4)^{\alpha_4} (Y_5 - a_5)^{\alpha_5}; \text{ ხოლო}$$

საბიუჯეტო შეზღუდვებს აქვთ სახე:

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + P_3 Y_3 + P_4 Y_4 + P_5 Y_5 \leq B;$$

$$Y_1 \geq a_1 \quad Y_2 \geq a_2 \quad Y_3 \geq a_3 \quad Y_4 \geq a_4 \quad Y_5 \geq a_5.$$

ამოცანის ანალიზური ამოხსნის შედეგად მივიღეთ, რომ მოთხოვნის ფუნქციას აქვს სახე (1.10):

$$Y_i = a_i + \frac{\alpha_i \left( B - \sum_{i=1}^5 P_i a_i \right)}{P_i \sum_{i=1}^5 \alpha_i}, \quad i = \overline{1, 5}.$$

მთხოვნის ფუნქციის მნიშვნელობები გამოვთვალოთ ორნაირად: მომხმარებლის არჩევანის ამოცანის ამონახსნიდან და ანალიზური ამონახსნიდან.

### პროგრამა Mathcad-ზე

#### მონაცემების შეყვანა და ამოცანის ორნაირი ამონახსნი

ამოცანის ამოხსნა ანალიზური ამონახსნის ბაზაზე

$$\text{ORIGIN}:=1$$

$$B:=500$$

$$a := \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \alpha := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.2 \\ 8 \\ 10 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad i:=1..5 \quad Y1_i := a_i + \alpha_i \cdot \frac{\left( B - \sum_{i=1}^5 P_i \cdot a_i \right)}{P_i \cdot \sum_{i=1}^5 \alpha_i}$$

$$Y1 = \begin{pmatrix} 311.133 \\ 101.711 \\ 10.328 \\ 10.794 \\ 127.253 \end{pmatrix}$$

$$U(Y1) = 8.449 \times 10^{26}$$

ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ბაზაზე

$$U(Y) := \prod_{i=1}^5 (Y_i - a_i)^{\alpha_i}$$

$$Y := a$$

Given

$$Y \geq a$$

$$\sum_{i=1}^5 P_i \cdot Y_i \leq B$$

$$R := \text{Maximize}(U, Y)$$

**შედეგები:**

$$R = \begin{pmatrix} 311.56 \\ 101.589 \\ 10.327 \\ 10.792 \\ 127.099 \end{pmatrix}$$

$$U(R) = 8.449 \times 10^{26}$$

### სავარჯიშო.

სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს რ. სტოუნის სახე. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი აუცილებლად მოიხმარს თვეში  $a_1=15$  ცალ პურს  $P_1=0.5$  ლარის ღირებულებით,  $a_2=5$  კგ კარტოფილს -  $P_2=1.20$  ლარის ღირებულებით,  $a_3=3$  კგ ხორცს -  $P_3=10$  ლარის ღირებულებით,  $a_4=2$  კგ თევზს -  $P_4=10$  ლარის ღირებულებით და  $a_5=10$  ცალ კვერცხს -  $P_5=0.25$  ლარის ღირებულებით, თუ  $\alpha_1=5$ ;  $\alpha_2=3$ ;  $\alpha_3=2$ ;  $\alpha_4=4$  და  $\alpha_5=1$ . მომხმარებლის ბიუჯეტი თვეში 400 ლარია. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით. მიღებული შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

### 4.3. ფუნქციის ელასტიურობა

განვიხილოთ  $y=f(x)$  ფუნქციონალური დამოკიდებულება. დამოუკიდებელი  $x$  ცვლადის ცვლილება იწვევს  $y$  ფუნქციის მნიშვნელობის ცვლილებას. ისმის კითხვა: როგორ გავზომოთ დამოკიდებული  $y$  ცვლადის მგრძობიარობა  $x$ -ის ცვლილების მიმართ?! ამ ცვლილების ერთ-ერთი მაჩვენებელია ფუნქციის

წარმოებულის ცნება  $y'$ , რაც ახასიათებს  $y$ -ის ცვლილების სისწრაფეს  $x$ -ის ცვლილებისას.

თუმცა, ეკონომიკაში წარმოებულის ცნების გამოყენება ხშირად მოუხერხებელია, ვინაიდან დამოკიდებულია საზომი ერთეულის არჩევაზე. მაგალითად, თუ განვიხილავთ შაქარზე მოთხოვნის  $y$  ფუნქციას  $x=p$  ფასზე დამოკიდებულებით, ვნახავთ, რომ  $p$  ფასის თითოეული შემთხვევაში, წარმოებულის რიცხვითი მნიშვნელობა  $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$  დამოკიდებულია იმაზე, რომ შაქარზე მოთხოვნა იზომება კილოგრამობით თუ ცენტნერობით. პირველ შემთხვევაში, წარმოებულის იზომება კგ/ლარით, შესაბამისად, მისი მნიშვნელობა ფასის ერთსა და იმავე მნიშვნელობისას, მოთხოვნის სიდიდის ერთეულიდან გამომდინარე, სხვადასხვა იქნება. ამიტომ, ეკონომიკაში ფუნქციის ცვლილების მგრძობიარობის გასაზომად შეისწავლიან  $x$ -ისა და  $y$ -ის არა აბსოლუტური, არამედ მათი ფარდობითი ან პროცენტული ცვლილებების კავშირს (მაშინ, როცა ფიზიკაში ამ სირთულეს თავს არიდებენ ერთეულთა საერთაშორისო SI სისტემის შემოტანით).

**განსაზღვრება.**  $y=f(x)$  ფუნქციის ელასტიურობა ეწოდება  $x$  და  $y$  ცვლადების ფარდობითი ცვლილებების შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი  $\Delta x \rightarrow 0$ .

სხვაგვარად, თუ  $y=f(x)$  ფუნქციის ელასტიურობას აღვნიშნავთ  $E_x(y)$ -ით, მაშინ

$$E_x(y) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \quad (4.45)$$

**განსაზღვრება.**  $f(x)$  ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა  $x$  წერტილში, ეწოდება  $f(x)/x$  ფარდობას.

თუ,  $f(x)$  ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ  $Af(x)$ -ით, გვექნება

$$Af \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{x}. \quad (4.46)$$

განსაზღვრება. ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობა ეწოდება ფუნქციის  $f'(x)$  წარმოებულს (აღნიშვნა  $Mf$ ).

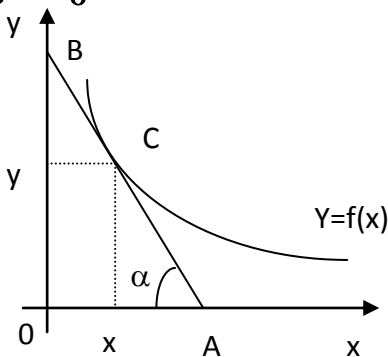
ამრიგად, ამ ორი განსაზღვრებით შესაძლებელია განვმარტოთ  $f(x)$  ფუნქციის ელასტიურობა, როგორც ზღვრული მნიშვნელობის შეფარდება საშუალო მნიშვნელობასთან, ანუ

$$E_x f = \frac{Mf}{Af} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}. \quad (4.47)$$

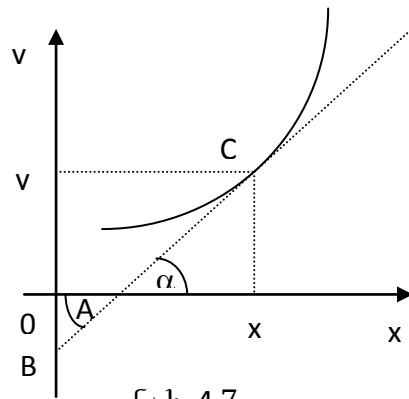
ზოგჯერ მოსახერხებელია ელასტიურობის წარმოდგენა ლოგარითმული წარმოებულის სახით.

$$Ef = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \quad (4.48)$$

გადავიდეთ ელასტიურობის ცნების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე.



ნახ. 4.6



ნახ. 4.7

განვიხილავთ ორ შემთხვევას: 4.6 ნახ-ზე  $f(x)$  ფუნქცია კლებულობს, ხოლო 4.7 ნახ-ზე – იზრდება.

განსაზღვრების თანახმად,  $y=f(x)$  ფუნქციის ელასტიურობა  $C(x,y)$  წერტილში გამოიხსება შემდეგი ფორმულით:  $E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$ ,

$\frac{dy}{dx} = -\text{tg } \alpha$  (ნახ. 4.6-ის შემთხვევაში) და  $\frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha$  (ნახ. 4.7-ის



შემთხვევაში) წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის მიხედვით: ამრიგად, ერთმანეთის პარალელურად განვიხილავთ შემდეგ ორ შემთხვევას:

ა). ნახ. 4.6 და ბ) ნახ. 4.7

ცხადია,

$$ა) E_x(y) = -tg\alpha \cdot \frac{x}{y};$$

$$ბ) E_x(y) = tg\alpha \cdot \frac{x}{y}.$$

ასევე ცხადია, თუ:

$$ა) x = |Ox|;$$

$$y = |Oy|.$$

$$ბ) x = |Ax| + |OA|;$$

$$y = |Oy|$$

მაშინ მივიღებთ:

$$ა) E_x(y) = -tg\alpha \frac{|Ox|}{|Oy|}; \quad |Ox| = |yC| = |BC| \cos \alpha;$$

$$|Oy| = |xC| = |AC| \sin \alpha;$$

$$ბ) E_x(y) = tg\alpha \frac{|Ax| + |OA|}{|Oy|};$$

$$|Ax| = |AC| \cos \alpha; \quad |OA| = |AB| \cos \alpha; \quad |Oy| = |AC| \sin \alpha.$$

რაც საშუალებას იძლევა  $y = f(x)$  ფუნქციის ელასტიურობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$ა) E_x(y) = -tg\alpha \cdot \frac{|BC| \cos \alpha}{|AC| \sin \alpha} = -\frac{|BC|}{|AC|};$$

$$ბ) E_x(y) = tg\alpha \cdot \frac{|AC| \cos \alpha + |AB| \cos \alpha}{|AC| \sin \alpha} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

ამგვარად,  $y = f(x)$  ფუნქციის ელასტიურობა ტოლია:

$$E_x(y) = -\frac{|BC|}{|AC|}.$$

როცა  $C$  წერტილში გამავალი  $AB$  მხების კოორდინატა ღერძებთან გადაკვეთის  $A$  და  $B$  წერტილები განლაგებულია  $C$  წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს (ნახ. 1.6-ის შემთხვევაში); ხოლო, თუ გადაკვეთის  $A$  და  $B$  წერტილები განლაგებულია  $C$  წერტილის ერთ მხარეს (ნახ. 4.7-ის შემთხვევაში), მაშინ

$$E_x(y) = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

**განვიხილოთ ფუნქციის ელასტიურობის ოპერატორის შემდეგი თვისებები:**

1) ელასტიურობა წარმოადგენს სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ერთეულებით იზომება  $x$  და  $y$  სიდიდეები, ე.ი.

$$E_{dx}(by) = E_x(y). \quad (4.49)$$

**დამტკიცება.**

$$E_{bx}(b \cdot y) = \frac{d(by)}{d(ax)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{b}{a} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{ax}{by} = E_x(y). \text{ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა;}$$

2) ურთიერთშებრუნებული ფუნქციების ელასტიურობები, ასევე ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \quad (4.50)$$

**დამტკიცება.**

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)};$$

3) ერთსა და იმავე  $x$  არგუმენტზე დამოკიდებული ორი  $U(x)$  და  $V(x)$  ფუნქციის ნამრავლის ელასტიურობა ტოლია ელასტიურობათა ჯამის:

$$E_x(U \cdot V) = E_x(U) + E_x(V). \quad (4.51)$$

დამტკიცება.

$$E_x(U \cdot V) = \frac{d(U \cdot V)}{dx} \cdot \frac{x}{U \cdot V} = \frac{U' \cdot V + V' \cdot U}{U \cdot V} \cdot x = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} = E_x(U) + E_x(V).$$

4) ერთსა და იმავე  $x$  არგუმენტზე დამოკიდებული ორი  $U(x)$  და  $V(x)$  ფუნქციის შეფარდების ელასტიურობა ტოლია ელასტიურობათა სხვაობისა:

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right) = E_x(U) - E_x(V). \quad (4.52)$$

დამტკიცება.

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{d\left(\frac{U}{V}\right)}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{U}{V}} = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2} \cdot \frac{xV}{U} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} - \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} = E_x(U) - E_x(V);$$

5) ერთსა და იმავე  $x$  არგუმენტზე დამოკიდებული ორი  $U(x)$  და  $V(x)$  ფუნქციის ჯამის ელასტიურობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$E_x(U + V) = \frac{UE_x(U) + VE_x(V)}{U + V}. \quad (4.53)$$

დამტკიცება.

$$\begin{aligned} E_x(U + V) &= \frac{\partial(U + V)}{\partial x} \cdot \frac{x}{U + V} = (U' + V') \cdot \frac{x}{U + V} = \frac{U \cdot \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + V \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V}}{U + V} = \\ &= \frac{U \cdot E_x(U) + V \cdot E_x(V)}{U + V}. \end{aligned}$$

6)  $E_x(x) = 1.$

დამტკიცება:

$$E_x(x) = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{x}{x} = 1.$$

**შედეგები.**

ა)  $E_x(U^n(x)) = nE_x(U);$

ბ) ხარისხოვანი  $y = x^n$  ფუნქციის ელასტიურობა

$$E_x(x^n) = nE_x(x) = n;$$

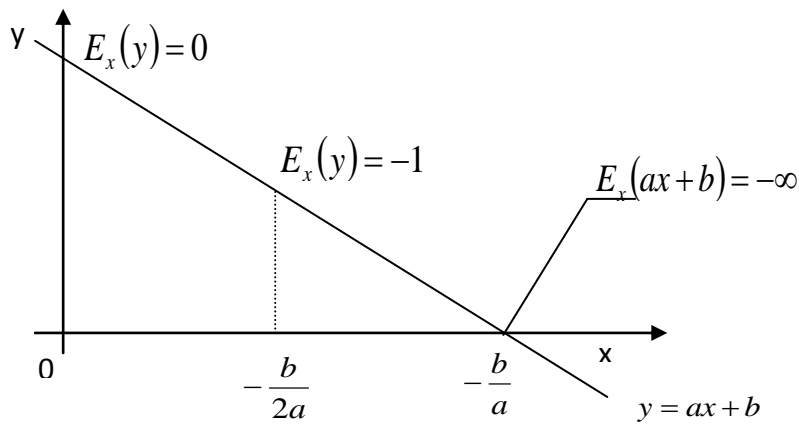
გ) მაჩვენებლიანი  $y = a^x$  ფუნქციის ელასტიურობა

$$E_x(a^x) = \frac{da^x}{dx} \cdot \frac{x}{a^x} = a^x \ln a \cdot \frac{x}{a^x} = x \ln a;$$

დ) წრფივი  $y = ax + b$  ფუნქციის ელასტიურობა

$$E_x(ax + b) = \frac{d(ax + b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax + b} = \frac{ax}{ax + b}.$$

გრაფიკულად განვიხილოთ ელასტიურობის სიდიდის ცვლილება წრფივი  $Y = ax + b$  ფუნქციისათვის (ნახ. 4.8).



როგორც ვხედავთ, წრფივი ფუნქციის ელასტიურობა დამოკიდებულია წერტილზე, რომელშიც მას განვიხილავთ, და მისი სიდიდე იცვლება  $-\infty$ -დან (აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში) ნულოვან მნიშვნელობამდე (ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში).

### 4.3.1. ელასტიურობის ცნების გამოყენება ეკონომიკაში

ვთქვათ, გვაქვს  $Y$  დოვლათზე მოთხოვნის ფუნქცია  $Y = f(p, B)$ , სადაც  $p$  ქონების ფასია, ხოლო  $B$  – მომხმარებლის ბიუჯეტი.

მაშინ, მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით

$$E_p(Y) = \frac{\partial Y}{\partial P} \cdot \frac{P}{Y} \quad (4.54)$$

გვიჩვენებს  $Y$  დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის პროცენტულ ცვლილებას, როცა ამ ქონების ფასი 1%-ით იცვლება.

$E_p(Y)$  ახასიათებს მომხმარებლის მგრძობიარობას პროდუქციაზე ფასის ცვლილების მიმართ. თუ მოთხოვნის ფასობრივი ელასტიურობა აბსოლუტური სიდიდით მეტია 1-ზე, მაშინ მოთხოვნას ეწოდება ელასტიური, თუ ნაკლებია 1-ზე, მაშინ - არაელასტიური. ხოლო, თუ  $|E_p(Y)| = 1$ , მაშინ ამბობენ, რომ მოთხოვნას აქვს ერთეულოვანი ელასტიურობა.

$$E_B(Y) = \frac{\partial Y}{\partial B} \cdot \frac{B}{Y} \quad (4.55)$$

სიდიდეს ეწოდება მოთხოვნის ელასტიურობა შემოსავლების მიხედვით. ეს სიდიდე ახასიათებს  $Y$  დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის პროცენტულ ცვლილებას მომხმარებლის  $B$  შემოსავლის ერთი პროცენტით შეცვლისას.

მოთხოვნის დადებითი ელასტიურობა შემოსავლის მიხედვით ახასიათებს დოვლათის ხარისხიან საქონელს, ხოლო უარყოფითი ელასტიურობა – უხარისხო საქონელს (რომელსაც ყიდულობენ მხოლოდ დაბალი ფასისა და მომხმარებლის მცირე  $B$  შემოსავლის გამო).

ასე რომ, მეურნეობის დარგში შემოსავლის მიხედვით, მოთხოვნის მაღალი დადებითი ელასტიურობის კოეფიციენტი  $E_B(Y)$  მიუთითებს იმაზე, რომ მისი წილი ეკონომიკურ ზრდაში მეტია, ვიდრე წილი ეკონომიკის სტრუქტურაში. ამიტომ, მას აქვს შანსი სამომავლო ზრდისა და განვითარებისათვის. პირიქით, თუ

$E_B(Y) < 1$ , მაშინ  $Y$  საქონელს მოელის ჩაწოლა და წარმოების შემცირების პერსპექტივა.

$Y_i$  დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის შესწავლისას, როცა სხვა  $Y_j$  - დოვლათზე (მოხმარებაში მისი შემცველი ან შემავესებელი)  $P_j$  ფასი იცვლება ერთი პროცენტით, შემოდის ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობის ცნება.

$$E_{pj}(Y_i) = \frac{\frac{dY_i}{Y_i}}{\frac{dP_j}{P_j}} = \frac{dY_i}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Y_i} \quad (4.56)$$

თუ  $E_{pj}(Y_i) > 0 \Rightarrow$ ,  $i$  და  $j$  დოვლათი ურთიერთჩამნაცვლებელია, ხოლო თუ  $E_{pj} < 0 \Rightarrow$ , დოვლათები ურთიერთშემავესებელია.

**დასკვნა:**

- 1) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მაღალია დოვლათის ჩანაცვლებისუნარიანობა;
- 2) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მაღალია მოცემულ დოვლათზე ხარჯების ხვედრითი წონა მომხმარებლის შემოსავალში;
- 3) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო დაბალია მოცემულ დოვლათზე მოთხოვნის სუბიექტური აუცილებლობა;
- 4) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიურობა იზრდება რელაქსაციის დროის შუალედის ზრდასთან ერთად.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.3

ამოცანა. ორი პროდუქტისათვის, რომელთა ფასებია შესაბამისად  $P_1$  და  $P_2$ , მოთხოვნა წარმოდგენილია სტოუნის ფუნქციით. უნდა ვიპოვოთ თითოეულ პროდუქტზე მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით.

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა.

#### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა:

$$B := 120$$

$$a_1 := 2$$

$$a_2 := 3$$

$$\alpha_1 := 0.4$$

$$\alpha_2 := 0.6$$

ფასის მიხედვით მოთხოვნის სტოუნის ფუნქცია მოცემული ორი პროდუქტისათვის:

$$Y_1(P_1, P_2) := a_1 + \frac{\alpha_1(B - P_1 a_1 - P_2 a_2)}{P_1(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$Y_2(P_1, P_2) := a_2 + \frac{\alpha_2(B - P_1 a_1 - P_2 a_2)}{P_2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

მათი ელასტიურობის გამოთვლა:

$$E_1(P_1, P_2) := \left( \frac{d}{dP_1} Y_1(P_1, P_2) \right) \cdot \frac{P_1}{Y_1(P_1, P_2)}$$

$$E_2(P_1, P_2) := \left( \frac{d}{dP_2} Y_2(P_1, P_2) \right) \cdot \frac{P_2}{Y_2(P_1, P_2)}$$

ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ელასტიურობის გამოთვლა:

$$P1:= 15$$

$$P2:= 12$$

$$E1(P1,P2):=-0.651$$

$$E2(P1,P2):=-0.789$$

**სავარჯიშო.**

მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია:

$$Y:=1000-8\cdot B\cdot P$$

იპოვეთ მოთხოვნის ელასტიურობა ფასისა და ბიუჯეტის მიხედვით, ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები; იპოვეთ, ელასტიურობის მნიშვნელობები ფასისა და ბიუჯეტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

#### **4.4. მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობა ფასის მიხედვით**

$Y_i$  დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის ცვლილების შესასწავლად, როცა სხვა  $Y_j$  დოვლათზე (მოხმარებაში მისი შემცვლელი ან შემავსებელი)  $P_j$  ფასი ერთი პროცენტით იცვლება, შემოდის ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობის ცნება.



$$E_{p_j}(Y_i) = \frac{\frac{dY_i}{Y_i}}{\frac{dP_j}{P_j}} = \frac{dY_i}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Y_i}. \quad (4.57)$$

თუ  $E_{p_j}(Y_i) > 0 \Rightarrow$ ,  $i$  და  $j$  დოვლათი ურთიერთჩამნაცვლებლებია (ყავა და ჩაი). თუ  $E_{p_j} < 0 \Rightarrow$ , დოვლათი ურთიერთშემავსებელია (შაქარი და ჩაი).

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.4

**ამოცანა:** მოცემულია ორი პროდუქტი, შესაბამისი ფასებით და მომხმარებლის ბიუჯეტით. მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფუნქციის მეშვეობით. გამოვთვალოთ ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობა.

**ამოხსნა.** შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა.

#### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა:

```
n := 2
a1 := 2
a2 := 3
α1 := 0.4
α2 := 0.6
B := 120
```

მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფორმულებით:

$$Y_1(P_1, P_2) := a_1 + \frac{\alpha_1 \cdot (B - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2)}{P_1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$Y_2(P_1, P_2) := a_2 + \frac{\alpha_2 \cdot (B - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2)}{P_2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობის გამოთვლა ფასის მიხედვით:

$$EY_1(P_1, P_2) := \left( \frac{d}{dP_2} Y_1(P_1, P_2) \right) \cdot \frac{P_2}{Y_1(P_1, P_2)}$$

$$EY_2(P_1, P_2) := \left( \frac{d}{dP_1} Y_2(P_1, P_2) \right) \cdot \frac{P_1}{Y_2(P_1, P_2)}$$

ფასის მნიშვნელობების შეტანა:

$$P_1 := 15 \quad P_2 := 12$$

ელასტიურობის გამოთვლა:

$$EY_1(P_1, P_2) := -0.279$$

$$EY_2(P_1, P_2) := -0.263$$

ამრიგად, დოვლათები ურთიერთშემავსებელია.

**სავარჯიშო.**

**ამოცანა.** მოცემულია სამი პროდუქტი. შესაბამისი ფასები და მომხმარებლის ბიუჯეტი აირჩიეთ დამოუკიდებლად. მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფუნქციის მეშვეობით. გამოვთვალოთ ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობა. ავსსნათ მიღებული შედეგების ეკონომიკური არსი.

#### 4.5. ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით

Y დოვლათის გაყიდვიდან ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით ტოლია:

$$E_p(pY) = E_p(p) + E_p(Y) = 1 + E_p(Y).$$

ვინაიდან მოთხოვნის ფასის მიხედვით ელასტიურობა მუდამ უარყოფითია, ამ ფორმულიდან გამოდის, რომ ელასტიური მოთხოვნის დროს ამონაგები იზრდება Y-ის რაოდენობის ზრდასთან, ან ფასის შემცირებასთან ერთად, ხოლო არაელასტიურის დროს – კლებულობს.

მაგალითად, კარგი მოსავლის დროს ფერმერების შემოსავალი შემცირდება, რადგან სოფლის მეურნეობის პროდუქტებზე მოთხოვნის ელასტიურობა საკმაოდ დაბალია. ანალოგიურად, თუ გავზრდით აქციზებს არყის წარმოებაზე, ბიუჯეტში შემოსავლებმა შეიძლება იკლოს, ვინაიდან სხვა ქვეყნებიდან იმპორტირებული იქნება იაფი არაყი. რასაც ადგილი ჰქონდა 1993 წელს სსრკ-ში (გორბაჩოვის კამპანია). ანალოგიური შეცდომები უფრო ადრე დაშვებული იყო ვაშინგტონში 80-იან წლებში, როცა 6%-ით გაზარდეს გადასახადი ბენზინზე, რაზეც მოთხოვნის ელასტიურობა ამერიკელი ეკონომისტების შეფასებით შეადგენდა 0.2-ს, თუმცა, ამან გამოიწვია მოთხოვნის 33%-ით დაცემა, რაც შეესაბამება ელასტიურობის 5.5-ის ტოლ მნიშვნელობას. ასე რომ, დიდი მნიშვნელობა აქვს მოთხოვნის ფუნქციის ანალიზური სახის სწორ დადგენას, რაც ჩვენს მიერ ხორციელდება უკვე განხილული მრავლობითი რეგრესიული ანალიზის მეშვეობით.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.5

*ამოცანა.* მოცემულია საქონლის მოთხოვნის ფუნქცია

$Y(P) = 28 - 0.25 \cdot P$ . ვიპოვოთ გაყიდვებიდან ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით  $E_{PY}(P)$  კონკრეტული მნიშვნელობისათვის  $P = 12$ .

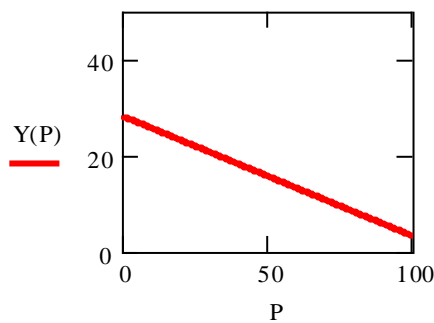
ამოხსნა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

საქონლის მოთხოვნის ფუნქციის ფასზე დამოკიდებულების მიხედვით,

$$Y(P) := 28 - \frac{1}{4} \cdot P$$

აუგოთ მოთხოვნის ფასზე დამოკიდებულების გრაფიკი:



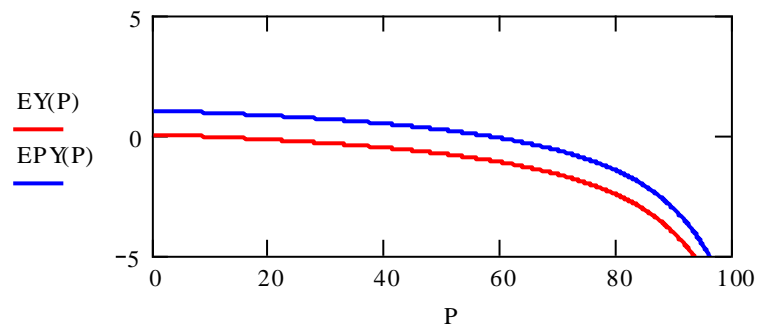
გამოვთვალოთ საქონლის მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით:

$$EY(P) := \left( \frac{d}{dP} Y(P) \right) \cdot \frac{P}{Y(P)}$$

და საქონლის გაყიდვიდან ამონაგების ელასტიურობა მისი ფასის მიხედვით:

$$EPY(P) := 1 - |EY(P)|$$

ორივეს გრაფიკი აუგოთ ერთ სიბრტყეზე:



ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ ამონაგების ელასტიურობა:

$$P := 12$$

$$EPY(P) := 0.88$$

მივიღეთ, რომ  $Y$ -ის რაოდენობის ზრდასთან ან ფასის შემცირებასთან ერთად, ამონაგები მცირდება.

**სავარჯიშო.**

**ამოცანა.** მოცემულია საქონლის მოთხოვნის ფუნქცია

$$Y(P) := 29 - 0.2 \cdot P.$$

ვიპოვოთ გაყიდვებიდან ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით  $EPY(P)$  კონკრეტული მნიშვნელობისათვის  $P := 12$ .

#### 4.6. წარმოების თეორია. საწარმოო ფუნქცია

უნდა აღინიშნოს, რომ წარმოების თეორიაში ყველაზე ძირითადია საწარმოო საქმიანობის საკითხები. მაგრამ ჩვენ თავიდანვე შემოვიტანოთ, ადრე, მოხმარების თეორიაში შემოტანილის ანალოგიურ ცნებები; რათა ადვილი იყოს ეკონომიქსის პრობლემატიკასთან დაკავშირებული საკითხების ჩამოყალიბება.

**სარგებლიანობის ფუნქციის** დონის წირებს წარმოადგენს **განურჩევლობის მრუდები**. წარმოების თეორიაში სარგებლიანობის ფუნქციას შეესაბამება **საწარმოო ფუნქციის ცნება**, ხოლო, საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს **იზოკვანტა** ეწოდება. მაშასადამე, იზოკვანტას ცნება წარმოების თეორიაში, ისეთივე როლს ასრულებს, როგორც განურჩევლობის მრუდის ცნება მოხმარების თეორიაში. აქ, არა მარტო ანალოგიასთან გვაქვს საქმე, არამედ ფუნქციის სახეებიც თანხვედნილია.

**განსაზღვრება.**  $Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  სახის ფუნქციას, სადაც  $x_1, x_2, \dots, x_n$  გამოყენებული რესურსების მოცულობებია, ხოლო  $Y$  გამოშვებული პროდუქციის მოცულობაა და მას **საწარმოო ფუნქცია** ეწოდება.

მოცემული პროდუქტის გამომშვები ცალკეული საწარმოსათვის (ფირმისათვის) საწარმოო ფუნქცია  $Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას აკავშირებს (ნატურალურ ან ღირებულებით გამოსახულებაში) სხვადასხვა სახის შრომით დანახარჯებთან და აგრეთვე დროის, ნედლეულის სხვადასხვა სახეობის, მაკომპლექტებელი ნაწილების, ენერჯის, ძირითადი კაპიტალის დანახარჯებთან. ასეთი ტიპის საწარმოო ფუნქცია კარგად ახასიათებს წარმოების მოქმედ ტექნოლოგიას.

საწარმოო ფუნქციის აგებისას, ცალკეული რეგიონის ან მთლიანად ქვეყნისათვის, პროდუქტის წლიური გამომშვების  $Y$  მაჩვენებლად უფრო ხშირად იღებენ რეგიონის ან შესაბამისად ქვეყნის ერთობლივ პროდუქტს (შემოსავალს), აღრიცხულს უცვლელ ფასებში, რესურსებად განიხილავენ ძირითად კაპიტალს ( $x_1=K$  – წლის განმავლობაში გამოყენებული მოცულობა) და ცოცხალ შრომას ( $x_2=L$  – ერთი წლის განმავლობაში ცოცხალი მუშახელის ერთეულთა რაოდენობა). ამრიგად, **მაკროეკონომიკაში განიხილავენ ორფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას**

$$Y = f(K, L). \tag{4.58}$$

**P.S.** ზოგჯერ, გამოყენებული ბუნებრივი რესურსების მოცულობის დამატებით გათვალისწინების ხარჯზე, განიხილავენ მაკროეკონომიკის სამფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას. რაც მეტია ფაქტორთა რიცხვი, მით უფრო ზუსტია მოდელი, მაგრამ უფრო რთულიც.

#### 4.6.1. საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები

ა) წარმოებაში გამოყენებული რესურსების ხარჯის გაზრდით პროდუქციის გამომშვება ვერ შემცირდება, ე.ი.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.59}$$

**განსაზღვრება.**  $G$  სიმრავლეს ეწოდება  $Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის ეკონომიკური არეალი, თუ  $\forall(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  წერტილისათვის  $G$  სიმრავლიდან ადგილი აქვს (4.59) თანადობას.

**მაგალითი.** თუ რესურსად განიხილება მიწა, მაშინ სამუშაო ძალის უცვლელობისას, იჯარით აღებული მიწის ფართობის გაზრდამ შეიძლება კი არ გაზარდოს შემოსავალი, პირიქით, შეამციროს კიდევ. ის მაქსიმალური ფართობი, რომელამდეც დაქირავებული მიწის ფართობის გაზრდა მომგებიანია, წარმოადგენს მოცემულ მაგალითში რესურსის ეკონომიკური არეალის ზღვარს. ეკონომიკური არეალის გარეთ, რესურსის ეფექტურობა იწყებს დაცემას;

ბ) **განსაზღვრება:**  $Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის ცვლილების სისწრაფეს,  $x_i$  რესურსის ცვლილების მიხედვით,  $i$ -ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა ეწოდება. ცხადია,  $i$ -ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა წარმოადგენს  $i$ -ური ცვლადის შემცველი საწარმოო ფუნქციის კერძო წარმოებულს  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

სხვა რესურსების რაოდენობის მუდმივობის პირობებში, ერთი რომელიმე რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის გამოყენების ეფექტურობა მცირდება. საწარმოო ფუნქციის ამ მეორე თვისებას ეწოდება **კლებადი ზღვრული ეფექტურობა**. ეს პირობა მოცემულია შემდეგი უტოლობით:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.60)$$

გ) ერთი  $i$ -ური რესურსის გაზრდით სხვა  $j$ -ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა იზრდება, ე.ი.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \quad i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, n} \quad i \neq j. \quad (4.61)$$

დ) საწარმოო ფუნქცია წარმოადგენს  $k > 0$  ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას. როცა  $k > 1$ , წარმოების მასშტაბის  $t$ -ჯერ გაზრდით ( $t > 1$ ) წარმოების მოცულობა  $t^k$ -ჯერ იზრდება, ე.ი. ადგილი აქვს წარმოების მასშტაბის ზრდით გამოწვეულ წარმოე-

ბის ეფექტურობის ზრდას. როცა  $k=1$ , გვაქვს წარმოების მუდმივი ეფექტურობა წარმოების მზარდი მასშტაბების პირობებში (ან გვაქვს კუთრი გამოშვების დამოუკიდებლობა წარმოების მასშტაბისაგან - constant returns to scale).

ეს პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.62)$$

#### 4.6.2. რამდენიმე რესურსის საწარმოო ფუნქციების სახეები

ა) როგორც მიკრო, ასევე მაკროეკონომიკურ დონეზე საწარმოო საქმიანობის მოდელირებისათვის ხშირად გამოიყენება კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია:

$$Y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1}. \quad (4.63)$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ მულტიპლიკაციურ(ნამრავლის ფორმის გამო) საწარმოო ფუნქციას.

განიხილავენ შემთხვევას, როცა  $x_1 = K$  გამოყენებული ძირითადი კაპიტალის მოცულობაა (ძირითადი ფონდები), ხოლო  $x_2 = L$  ცოცხალ სამუშაო ძალაზე დანახარჯები, ე.ი.

$$Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1}. \quad (4.64)$$

ბ) წრფივ საწარმოო ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n. \quad (4.65)$$

იგი ე.წ. ადიტიური(ჯამის ფორმის გამო) საწარმოო ფუნქციას წარმოადგენს. მულტიპლიკაციურიდან ადიტიურ საწარმოო ფუნქციასზე გადასვლა ხდება გალოგარითმებით.

მართლაც, (4.63)-დან გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\ln Y = \ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln x_1 + (1 - \alpha_1) \ln x_2. \quad (4.66)$$



ამრიგად გადავდივართ ადიტიურ ფორმაზე.

უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ კობ-დუგლასის (4.64) ფუნქცია. ის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left( \frac{K}{L} \right)^{\alpha_1}. \quad (4.67)$$

**განსაზღვრება.**  $\frac{Y}{L}$  და  $\frac{K}{L}$  წილადებს შესაბამისად ეწოდება შრომის მწარმოებლობა და შრომის კაპიტალაღჭურვილობა.

**განსაზღვრება.**  $\frac{Y}{K}$  წილადს კაპიტალის მწარმოებლურობა ან კაპიტალუკუება ეწოდება.

**განსაზღვრება.**  $\frac{K}{Y}$  წილადს ეწოდება პროდუქციის გამოშვების კაპიტალტევადობა, ხოლო  $\frac{L}{Y}$ -ს – პროდუქციის გამოშვების შრომატევადობა.

საწარმოო ფუნქციისათვის  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  პარამეტრებს პოულობენ გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, იყენებენ რესურსებისა და გამოშვებების მოცულობათა დროით მწკრივებს.

**P.S.** უნდა გავითვალისწინოთ, რომ საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები  $T_0$  დროის პერიოდში მოცემულია დროითი მწკრივების საფუძველზე. მიღებულმა საწარმოო ფუნქციამ შეიძლება სარწმუნო შედეგები მოგვცეს მომავლი დროის შუალედისათვის, რომელიც ხანგრძლივობით არ აღემატება

$\frac{1}{3}T_0$ -ს.

**განსაზღვრება.** წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს (ჰიპერზედაპირს), იზოკვანტა ეწოდება.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, იზოკვანტის ცნება საწარმოო ფუნქციისათვის, განურჩევლობის მრუდის ცნების ანალოგიურია სარგებლიანობის ფუნქციისათვის.

**განსაზღვრება.**  $Y = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$  საწარმოო ფუნქციის  $E_{x_i}(Y)$  ელასტიკურობას  $i$ -ური რესურსის მიხედვით ეწოდება  $i$ -ური რესურსის  $M_i$  ზღვრული მწარმოებლობის შეფარდება მის  $A_i$  საშუალო მწარმოებლობასთან  $i$ -ური რესურსის მიხედვით.

$$E_{x_i}(Y) = \frac{M_i Y}{A_i Y} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x_1, x_1, \dots, x_n)}. \quad (4.68)$$

**განსაზღვრება.** ყველა რესურსის მიხედვით ელასტიკურობათა ჯამს, ეწოდება წარმოების ელასტიკურობა:

$$E_x(Y) = \sum_{i=1}^n E_{x_i}(Y). \quad (4.69)$$

**ამოცანა.** შეამოწმეთ, სრულდება თუ არა საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები, მულტიპლიკაციური და ადიტიური საწარმოო ფუნქციისათვის.

**განსაზღვრება.**  $i$ -ური რესურსის  $j$ -ურით ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (4.70)$$

გამოშვების  $Y$  მოცულობის მუდმივობის პირობებში.

**ამოცანა.** ორფაქტორიანი საწარმოო  $Y = f(x_1, x_1)$  ფუნქციისათვის ჩამოაყალიბეთ თეორია ანალოგიური იმ თეორიისა, რომელიც ჩამოვაყალიბეთ ორდოვლათიანი სარგებლიანობის ფუნქციისათვის. ამ შემთხვევაში შეისწავლეთ იზოკვანტების სახე. დაამტკიცეთ, რომ ამ დროს ჩანაცვლების ზღვრული ნორმაა:

$$R_{12} = \frac{Ex_1 Y}{Ex_2 Y} \cdot \frac{x_2}{x_1}. \quad (4.71)$$

#### 4.7. ბაზრის მუშაობის თბობას ქსელისებრი მოდელი

ჩვენ ძირითადად განვიხილეთ სტატიკური ეკონომიკის ამოცანები. ახლა შევისწავლოთ დინამიკური ამოცანები, ანუ ამოცანები, სადაც ეკონომიკის განმსაზღვრელი პარამეტრები – ფასები, მოთხოვნა, მიწოდება და ა.შ. იცვლება დროის მიხედვით და ურთიერთქმედებს ერთმანეთთან.

პირველ რიგში შევისწავლოთ ბაზრის უმარტივესი მოდელი, რომელსაც უწოდებენ ობობას ქსელისებრს (cobweb model).

ჩავთვალოთ, რომ ერთი საქონლის ბაზარზე  $D(t)$  მოთხოვნის ფუნქცია და  $Y(t)$  მიწოდების ფუნქცია,  $P(t)$  ფასის წრფივი ფუნქციაა ან  $P(t-1)$  ფასისა, დროის წინა მომენტისათვის.

მოთხოვნის ფუნქცია:

$$D(t) = A_2 + A_1 \cdot P(t), \quad (4.72)$$

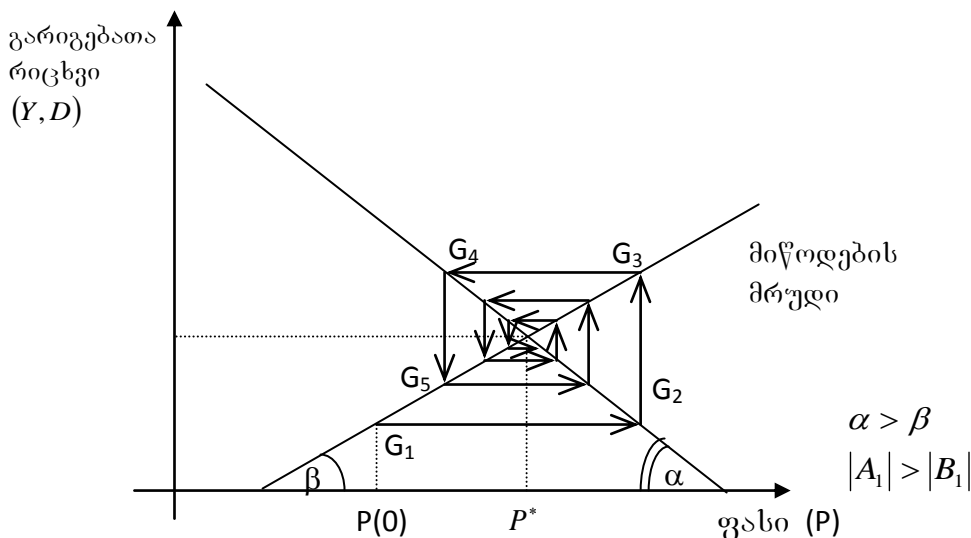
სადაც  $A_1$  და  $A_2$  მუდმივი პარამეტრებია;

მიწოდების ფუნქცია:

$$Y(t) = B_2 + B_1 \cdot P(t-1), \quad (4.73)$$

სადაც  $B_1$  და  $B_2$  მუდმივი პარამეტრებია.

მოთხოვნისა და მიწოდების მრუდები გამოვსახოთ სიბრტყეზე, რომლის აბსცისათა ღერძზე განთავსებულია ფასები, ხოლო ორდინატთა ღერძზე - გარიგებათა რიცხვი.



ნახ. 1.9

ობობას ქსელისებრი მოდელის არსი შემდეგია:

ა) მიწოდება რეაგირებს ფასის ცვლილებაზე გარკვეული ლაგით (დაგვიანებით); სხვა სიტყვებით, დღევანდელი  $Y(t)$  მიწოდება განისაზღვრება გუშინდელი  $P(t-1)$  ფასით, ხოლო დღევანდელი  $D(t)$  მოთხოვნა განისაზღვრება დღევანდელი ფასით.

ბ) ყოველი პერიოდის  $P(t)$  ფასი დგინდება იმ დონეზე, რომ გათანაბრდეს მოთხოვნა და მიწოდება, ე.ი. იმ დონეზე, რომლის დროსაც  $D(t)=Y(t)$ .

ეს პროცესი თანდათან უახლოვდება წონასწორულ  $P^*$  ფასს, თუ  $\left| \frac{B_1}{A_1} \right| < 1$ . სხვაგვარად, პროცესი განშლადია.

განვიხილოთ ნახ 4.9. პროცესი იწყება  $G_1$  წერტილიდან, როდესაც პროდუქტის ფასი ტოლია  $P(0)$ . ვინაიდან  $G_1$  წერტილი მდებარეობს მოთხოვნის მრუდის ქვემოთ, ფასი გაიზრდება  $G_2$  წერტილამდე, შემდეგ ფასი გაიყინება და პროდუქტის მოწოდების მოცულობა  $G_3$  წერტილამდე იზრდება. რადგან  $G_3$  წერტილი მდებარეობს მოთხოვნის მრუდის ზემოთ, ჩვენ გვაქვს იმაზე მეტი საჭონელი, ვიდრე მოთხოვნაა მასზე; ამიტომ  $G_3$  წერტილიდან  $G_4$  წერტილამდე ფასები დაეცემა.  $G_4$  წერტილში ფასი იყინება და ბაზარზე მოწოდებული საჭონლის მოცულობა  $G_5$  წერტილამდე მცირდება. ამის შემდეგ, მოთხოვნა კვლავ აღემატება მიწოდებას, ფასები იზრდება და ა.შ.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.7

ამოცანა. საწარმოო ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$Y = f(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

ორფაქტორული საწარმოო ფუნქციის შემთხვევაში,

$$Y = f(y_1, y_2).$$

დავამტკიცოთ, რომ ამ დროს:

$$R_{1,2} = \frac{E_{y_1}(f)}{E_{y_2}(f)} \cdot \frac{y_2}{y_1}.$$

დამტკიცება. განვსაზღვროთ ელასტიკურობა  $y_1, y_2$ -სთვის:

$$E_{y_1}(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{y_1}{f}; \quad E_{y_2}(f) = \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{y_2}{f};$$

$$R_{1,2} = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1}}{\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2}} = -\frac{E_{y_1}(f(y_1, y_2)) \cdot \frac{f(y_1, y_2)}{y_1}}{E_{y_2}(f(y_1, y_2)) \cdot \frac{f(y_1, y_2)}{y_2}} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{f}{y_1} \cdot \frac{y_2}{f} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{y_2}{y_1}.$$

შევამოწმოთ მულტიპლიკაციური საწარმოო ფუნქციისათვის სრულდება თუ არა საწარმოო ფუნქციის ძირითადი თვისებები.

1. მოცემული პროდუქტის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ეფექტურობა იზრდება, ე.ი.

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} > 0.$$

ეს დავამტკიცოთ მულტიპლიკაციური საწარმოო ფუნქციისათვის

$$f = \alpha_0 \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2}; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \quad \alpha_i \geq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot y_1^{\alpha_1-1} \cdot y_2^{\alpha_2} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1-1};$$

$$\alpha_0, \alpha_1 > 0$$

$$y_1, y_2 > 0$$

ანუ:

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1-1} > 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

2. მოცემული რესურსის მოხმარების ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის ეფექტურობა მცირდება:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} < 0.$$

ეს თვისება ვაჩვენოთ კობ-დუგლასის ფუნქციისათვის:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 2} \cdot \left(\frac{1}{y_2}\right) < 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

3. რომელიმე რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, სხვა რესურსის ეფექტურობა იზრდება.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 2} \cdot \left(-\frac{y_1}{y_2^2}\right) \geq 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

ვაჩვენოთ, რომ საწარმოო ფუნქცია ერთგვაროვანია

$$f(Ky_1, Ky_2) = \alpha_0 \cdot (Ky_1)^{\alpha_1} \cdot (Ky_2)^{1-\alpha_1} = \alpha_0 K^{\alpha_1} K^{1-\alpha_1} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{1-\alpha_1} = Kf(y_1, y_2)$$

რ.დ.გ.

### სავარჯიშო.

მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის მეთოდის გამოყენებით და რომელიმე წარმოების მონაცემთა ბაზის მიხედვით, ააგეთ ამ წარმოების საწარმოო კობ-დუგლასის ფუნქცია და შეისწავლეთ საწარმოო ფუნქციის ელასტიკურობა კაპიტალდაბანდებათა მიმართ.

### 4.8. ვალრასის თანამიმდევრული მიახლოების პროცესი ეროუ-გურვიცის მოდელში

მაკროეკონომიკური ანალიზის ერთ-ერთმა ფუძემდებელმა ლ. ვალრასმა შეიმუშავა ბაზრის ზოგადი ეკონომიკური წონასწორობის თეორია. ამ თეორიის დემონსტრირებისათვის ეროუ-გურვიცის მათემატიკური მოდელი განვიხილოთ საფონდო ბირჟების ან კვების პროდუქტების ბაზრის ფუნქციონირების აღწერისათვის,

სადაც „სამართლიანი“ აუქციონისტი ადარებს ბაზრის მონაწილეთა მოთხოვნასა და მიწოდებას, და ფასების აწევით ან დაწევით ყიდვა-გაყიდვას არეგულირებს, ობობას ქსელისებრი მოდელის ანალოგიურად.

ბაზრის ფუნქციონირების პროცესში მონაწილე სამეურნეო სუბიექტებად ავირჩიოთ ორი საწარმო, რომელთაგან თითოეული ფლობს ორივესთვის ხელმისაწვდომ ერთადერთ რესურსს (მაგ., ცოცხალ შრომას), აწარმოებს საბოლოო მოთხოვნისა და ერთი მოხმარების თითო სახეობის პროდუქციას, რომელიც ამ მოთხოვნის საგანს წარმოადგენს. შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ გაცვლა ხორციელდება ერთადერთი შუამავლის – აუქციონისტის მეშვეობით. ამ შემთხვევაში ეკონომიკური ციკლი ასე გამოიყურება:



ნახ. 4.13

ასეთი ეკონომიკისათვის რესურსების ოპტიმალური განაწილების პრობლემა ჩამოყალიბდება შემდეგი სახით:

ა) პროდუქციის მოთხოვნისა და მიწოდების პირობები:

$$Y_i^s = F_i(L_i^d) \geq Y_i^d, \quad (4.74)$$

სადაც  $Y_i^s$  არის  $i$ -ური საწარმოს მიერ პროდუქტის მიწოდების მოცულობა,  $Y_i^d$  –  $i$ -ურ პროდუქტზე მომხმარებლის მოთხოვნის მოცულობა,  $L_i^d$  - რესურსზე  $i$ -ური საწარმოს მოთხოვნის მოცულობა,  $F_i$  –  $i$ -ური საწარმოს საწარმოო ფუნქცია;

ბ) რესურსის მიწოდებისა და მოთხოვნის პირობები:

$$\sum_{i=1}^2 L_i^d \leq L^s; \quad (4.75)$$

გ) მომხმარებლის მიერ მაქსიმიზებული სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U(Y_1^d, Y_1^d) \rightarrow \max ; \quad (4.76)$$

სადაც  $U$  მომხმარებლის სარგებლიანობის ფუნქციაა.

**შენიშვნა.** მათემატიკურ ეკონომიკაში მოთხოვნის ცვლადები აღინიშნებიან  $d$  ასოთი (ინგლ. Demand –მოთხოვნა), ხოლო მიწოდების ცვლადები -  $s$  ასოთი (ინგლ. Supply –მიწოდება).

ცხადია, ეროუ-გურვიცის ეს ამოცანა, როდესაც მოცემულია  $F_i$  საწარმოო ფუნქცია და სარგებლიანობის ფუნქცია სტაციონარული ეკონომიკის პირობებში, შეიძლება ამოიხსნას მონტე-კარლოს მეთოდით. მართლაც, ეროუ-გურვიცის სტაციონარული მოდელისათვის სპეციალურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$I^* = U(Y_1^d, Y_2^d) - \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^2 L_i^d - L^s + \tau_1^2 \right)^2 - \lambda_2 (Y_1^d - F_1(L_1^d) + \tau_2^2)^2 - \lambda_3 (Y_2^d - F_2(L_2^d) + \tau_3^2)^2. \quad (4.77)$$

ჩვენს შემთხვევაში,  $\lambda_i \equiv \varepsilon^{-1}$  ( $\varepsilon$  – შეზღუდვათა დაკმაყოფილების სიზუსტე); თუმცა, უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი პირობაც:

დ)  $i$ -ური საწარმოს მოგების მაქსიმიზაცია:

$$\pi_i = P_i \cdot F_i(L_i^d) - W \cdot L_i^d \quad ; \quad (4.78)$$

სადაც  $P_i$  არის  $i$ -ური საწარმოს პროდუქციის ფასი,

$W$  – ლრესურსის ფასი.

მაშინ, სტაციონარული ეკონომიკისათვის სპეციალური ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I = I^* + \sum_{i=1}^2 \pi_i. \quad (4.79)$$

თუმცა, ვალრასის საბაზრო პროცესი დინამიკურ პროცესს აღწერს, ანუ მოგება და ფასები დროის ფუნქციებია, ისევე როგორც მოთხოვნა და მიწოდება; მოგების გამოსახულებას შემდეგი სახე აქვს:



$$\pi_i(t) = P_i(t) \cdot F_i(L_i^d(t)) - W(t) \cdot L_i^d(t). \quad (4.80)$$

ამ ამოცანის მონტე-კარლოს მეთოდით ამოსახსნელად დროის ყოველ მომენტში გვექნებოდა სხვადასხვა (4.79) ფუნქციები და მთელი დინამიკის განსაზღვრისათვის მოგვიწევდა მრავალცვლადიანი ფუნქციის მინიმიზება, ამასთან დროის საკმაოდ გრძელ მონაკვეთში შესწავლისას, ცვლადების რიცხვი ისე სწრაფად იცვლება, რომ ამოხსნა მოითხოვს სამანქანო დროის რამდენიმე საათს.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება ვალრასის მიმდევრობითი მიახლოების შემდეგი მეთოდები:

ა) აუქციონისტი  $i$ -ურ საწარმოსთვის აწესებს მისი პროდუქციის  $P_i(t)$  ფასსა და მისი რესურსის  $w(t)$  ფასს, აგრეთვე მომხმარებელს აცნობებს  $P_i(t)$  ფასსა და მოთხოვნის ფასს, რომელიც ზღვრული სარგებლიანობის ტოლია;

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i^d}(t-1); \quad (4.81)$$

ბ)  $i$ -ური საწარმო, მისთვის მიცემული ფასებიდან გამომდინარე, ირჩევს წარმოების ხარჯებისა და შედეგების ისეთ თანწყობას, რომელიც მისი  $\pi_i(t)$  მოგების მაქსიმიზებას ახდენს და ამ თანწყობას განსახილველად წარუდგენს აუქციონერებს;

გ) მომხმარებელი  $i$ -ურ პროდუქტზე მოთხოვნას შემდგენაირად აცხადებს: თუ  $i$ -ურ პროდუქტზე მოთხოვნა არ არის ან მოხმარების ზღვრული სარგებლიანობა ზღვრულ ხარჯებზე ნაკლებია, მაშინ მომხმარებელი მოთხოვნის სიდიდეს უცვლელად ტოვებს; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ის მოთხოვნას კორექტირებას უკეთებს ზღვრული სარგებლიანობისა და ზღვრული ხარჯების სხვაობის პროპორციულად და შედეგად აწესებს  $Y_i^d(t)$ -ის შესაბამის სიდიდეს;

დ) აუქციონისტი ხელმძღვანელობს მოთხოვნისა და მიწოდების კანონით და ცვლის ფასებს (თანამიმდევრული მოსინჯვის პროცესი). თუ პროდუქტზე მოთხოვნა აღემატება მიწოდებას, ის

ასწევს ფასს და პირიქით. თუმცა იმ შემთხვევაში, როცა ჭარბი მოთხოვნა უარყოფითია და მისი შესაბამისი ფასები ნულის ტოლია, ფასების არსებულ დონეზე ქვემოთ დაწვეა შეუძლებელია.

ეკონომიკური ზრდის თეორიაში, საგარეო ვაჭრობისა და ფინანსების ანალიზისას ხშირად გამოიყენება ზოგადი წონასწორობის მოდელის ერთ-ერთი ნაირსახეობა – ორსექტორიანი მოდელი. იგი წინა მოდელისაგან იმით განსხვავდება, რომ:

ა) მასში შეყვანილია წარმოების ფაქტორების ორი სახე (კაპიტალი და შრომა);

ბ) ყოველი საწარმო განიხილება, როგორც ცალკეული დარგი;

გ) მათი საწარმოო ფუნქციები აკმაყოფილებს წარმოების მასშტაბის ერთეულზე მუდმივ უკუგების დროს მიწოდებას (წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციები).

#### 4.9. წონასწორული ეკონომიკის მაკროეკონომიკური ანალიზი

“დიდი დეპრესიის” დასაწყისია მოვლენა, რომელსაც შემდგომში “შავი ორშაბათი” უწოდეს - როცა ერთი დღის განმავლობაში ამერიკაში მოხდა ფასიანი ქაღალდების კურსის კატასტროფული ვარდნა. ამ მომენტიდან, ეკონომიკური აზროვნების ავანსცენაზე ნეოკლასიკური თეორიის ნაცვლად გამოვიდა კეინსის მაკროეკონომიკური კონცეფცია, რომლის მიხედვით – ეროვნულ მეურნეობაში წარმოება, განაწილება და ხარჯები განისაზღვრება ერთი აგრეგირებული ფაქტორით – ეროვნული შემოსავლით. თავის მხრივ ეროვნული შემოსავალი განისაზღვრება ეფექტური მოთხოვნით. მაკროეკონომიკურ თეორიას, ხშირად შემოსავლების თეორიას უწოდებენ.

აღსანიშნავია, რომ „დიდი დეპრესია“ აღინიშნებოდა „კეინსიანელობის“ ჩასახვით მაკროეკონომიკურ თეორიაში, ხოლო

ეკონომიკის ანალიზის დარგში მან დასაწყისი დაუდო მათემატიკური მაკროეკონომიკის დაბადებას.

განვიხილოთ ეროვნული შემოსავლის განსაზღვრის მექანიზმი ეფექტური მოთხოვნის პრინციპის საფუძველზე.

ეფექტური მოთხოვნის პრინციპის მიხედვით, დროის საკმაოდ მოკლე შუალედებისათვის, რომელზეც საწარმოო შესაძლებლობათა დონე მოცემულად ითვლება, ეროვნული შემოსავალი (გამოშვების დონე) განისაზღვრება მოთხოვნის მიერ მართვადი ფაქტორებით.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ერთობლივი ეფექტური მოთხოვნა  $D$  განისაზღვრება, როგორც  $C$  მოხმარებისა და  $I$  ინვესტიციის ჯამი:

$$D = C + I. \quad (4.82)$$

სამომხმარებლო მოთხოვნა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$C = \alpha Y + A \quad (0 < \alpha < 1) \quad (4.83)$$

სადაც  $C$  მოთხოვნაა;  $Y$  – ეროვნული შემოსავლის წრფივი ფუნქცია,  $\alpha$  და  $A$  - კონსტანტები,

$A = (\text{საარსებო მინიმუმი}) \times (\text{მცხოვრებთა რიცხვი})$ .

**P.S.**  $C = \text{Consumption}$  (მოხმარება),  $I = \text{Investment}$  (კაპიტალდაბანდება),  $D = \text{demand}$  (მოთხოვნა).

$\alpha$ -კოეფიციენტს ეწოდება მოხმარებისადმი მიდრეკილება,

ხოლო  $A$ -ს – საბაზო მოხმარება.

ინვესტიციების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ინვესტიციის დამოუკიდებელი ხასიათის ჰიპოთეზით, რომლის თანახმად ინვესტიციის დონე საწარმოს შემოსავლების დონის მიხედვით განისაზღვრება გარკვეულწილად დამოუკიდებელი გრძელვადიანი მოლოდინით.

წონასწორული  $Y^*$  ეროვნული შემოსავალი, რომელიც პასუხობს მოთხოვნისა და მიწოდების ტოლობის პირობას,

$$D=Y^* \quad (4.84)$$

განისაზღვრება, როგორც შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$C+I=Y, \quad (4.85)$$

რომელიც მიიღება (4.82) და (4.84)-დან. შემდეგ, (4.83)-ის და (4.85)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\alpha Y^* + A + I = Y^*. \quad (4.86)$$

ხოლო (4.86)-დან ადვილად მივიღებთ

$$A+I=(1-\alpha)Y^*. \quad (4.87)$$

რაც, თავის მხრივ, შესაძლებელს ხდის  $Y^*$  წონასწორული ეროვნული შემოსავლის პოვნას

$$Y^*=(1-\alpha)^{-1}(A+I). \quad (4.88)$$

**განსაზღვრება.** გამოსახულებას  $(1-\alpha)^{-1}$ , რომელიც გვიჩვენებს ინვესტიციების მოცემული ზრდის პირობებში რამდენად იზრდება ეროვნული შემოსავალი, ინვესტიციის მულტიპლიკატორი ეწოდება.

წონასწორობის წერტილი  $Y^*$  ასახავს მიმდინარე სამეურნეო აქტიურობის ისეთ დონეს, რომელიც გარკვეულწილად აკმაყოფილებს საოჯახო მეურნეობებისა და საწარმოების მოთხოვნილებებს, მაგრამ არ ემთხვევა სასურველ დონეს, რომლის დროსაც მიიღწევა სრული დასაქმება. ამიტომ, სახელმწიფო პოლიტიკის მიზანია ინვესტიციების მოზიდვით მიაღწიოს ეროვნული შემოსავლის ისეთ  $Y_f > Y^*$  დონეს, რომლის დროსაც უზრუნველყოფილია სრული დასაქმება.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.9

**ამოცანა.** ინვესტიციების მულტიპლიკატორის, ინვესტიციების სიდიდისა და საბაზო მოხმარების კონკრეტული

მნიშვნელობებისათვის ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი.

მოხმარებისადმი მიდრეკილება

$$\alpha = 0.35;$$

საბაზო მოხმარება

$$A = 1.2 \cdot 10^8;$$

ინვესტიცია

$$I = 50000.$$

**ამოხსნა.** ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$Y(I) = (1 - \alpha)^{-1} \cdot (A + I).$$

მასში კონკრეტული მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:

$$Y(I) := 1.847 \times 10^8.$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა:

მოხმარებისადმი მიდრეკილება

$$\alpha := 0.35$$

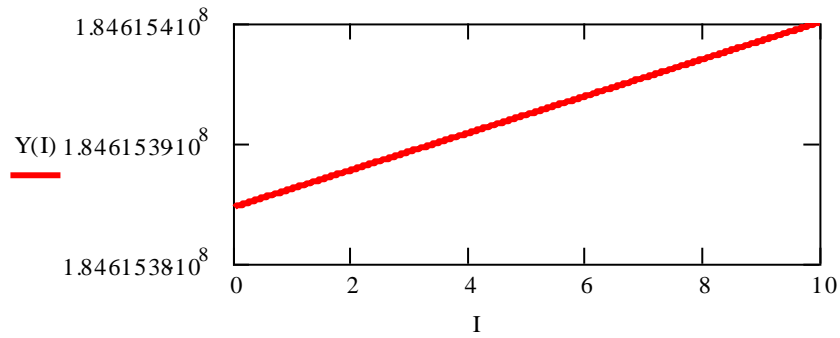
საბაზო მოხმარება

$$A := 1.2 \cdot 10^8$$

ეროვნული შემოსავალი:

$$Y(I) := (1 - \alpha)^{-1} \cdot (A + I)$$

გრაფიკზე ვხედავთ, თუ როგორ იცვლება ეროვნული შემოსავალი ინვესტიციების სიდიდის ცვლილებისას:



გამოვთვალოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი ინვესტიციის კონკრეტული მნიშვნელობის დროს:

$$I := 50000$$

$$Y(I) := 1.847 \times 10^8$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ ინვესტიციების სიდიდის ზრდა იწვევს ეროვნული შემოსავლის ზრდას, ანუ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი იზრდება ინვესტიციების მოზიდვის შედეგად.

### სავარჯიშო.

**ამოცანა.** ინვესტიციების მულტიპლიკატორის, ინვესტიციების სიდიდისა და საბაზო მოხმარების კონკრეტული მნიშვნელობებისა–თვის ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი. საჭირო მონაცემები მოიძიეთ პრაქტიკიდან გამომდინარე.

### 4.10. ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი

წინა წონასწორულ მაკროეკონომიკურ მოდელში იგულისხმებოდა, რომ საწარმოო სიმძლავრეების მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. ეს დაშვება რეალურთან ახლოა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ ნაციონალური მეურნეობის ეკონომიკური საქმიანობის დროის მოკლე შუალედებს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საწარმოო სიმძლავრეები ინვესტიციების წყალობით იზრდება. გავითვალისწინოთ აგრეთვე კაპიტალის დაგროვების შესაძლებლობები, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია ავაგოთ ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი.

განვიხილოთ წრფივი, ერთგვაროვანი საწარმოო ფუნქცია უცვლელი მასშტაბით

$$Y = F(K, L), \quad (4.89)$$

სადაც  $K$  კაპიტალია;  $L$  – ცოცხალი შრომა,  $Y$  – ეროვნული შემოსავალი. ცვლადად შეგვიძლია ჩავთვალოთ კაპიტალაღჭურვილობა (ფონდაღჭურვილობა):

$$x = \frac{K}{L}. \quad (4.90)$$

თუ, გავალოგარიტმებთ (4.90)-ს, მივიღებთ:

$$\ln x = \ln K - \ln L. \quad (4.91)$$

ვიპოვოთ (4.91) განტოლების ორივე ნაწილის წარმოებულები დროით:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}; \quad (4.92)$$

$$y = \frac{Y}{L} \text{-ით აღვნიშნოთ შრომის მწარმოებლობა.} \quad (4.89)$$

საწარმოო ფუნქციის წრფივი ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right). \quad (4.93)$$

სხვანაირად,

$$y = F(x, 1). \quad (4.94)$$

(4.90)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$y = f(x). \quad (4.95)$$

ახლა გავაკეთოთ შემდეგი დაშვებები:

ა) დროის თითოეული მონაკვეთისათვის ეროვნული შემოსავლის გამოუყენებელი ნაწილის წილი, ანუ დაგროვების ნორმა

$$s = \frac{Y - C}{Y} = \text{const}, \quad (4.96)$$

ხოლო, დროის ყოველი მონაკვეთისათვის დაგროვებული კაპიტალის ზრდა, დროის მოცემულ მონაკვეთში გამოცხადებული ახალი საინვესტიციო მოთხოვნის ტოლია, ე.ი.  $I = \dot{K}$ ;

ბ) შრომის მიწოდების ზრდა  $n$ -ის ტოლი მუდმივი სიდიდეა, რაც ფორმულის სახით ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \quad (4.97)$$

ამრიგად,  $n$  ცოცხალი შრომის ზრდის ტემპია.

მიღებული დაშვებებიდან გამომდინარე, გამოვიყვანოთ ზრდის მაკროეკონომიკის ძირითად განტოლებას. (4.97)-ის გათვალისწინებით (4.92)-დან მივიღებთ:

$$\dot{x} = x \frac{\dot{K}}{K} - nx. \quad (4.98)$$

თუ გაითვალისწინებთ (4.90)-ს და მხედველობაში მივიღებთ  $I = \dot{K}$  დაშვებას, გვექნება:

$$x \frac{\dot{K}}{K} = x \frac{I}{K} = \frac{K}{L} \cdot \frac{I}{K} = \frac{1}{L} \cdot \frac{I}{1} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{I}{Y} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{Y - C}{Y} = y \cdot s = s \cdot f(x), \quad (4.99)$$

საიდანაც (4.98)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\dot{x} = s \cdot f(x) - nx. \quad (4.100)$$

(4.100) წარმოადგენს ეკონომიკური ზრდის დინამიკურ განტოლებას.

(4.100) განტოლების წონასწორობის  $x^*$  წერტილი გვაძლევს შრომის წონასწორულ კაპიტალაღჭურვილობას:

$$s \cdot f(x^*) = n \cdot x^*. \quad (4.101)$$

ამრიგად, (4.101) განტოლებიდან ვღებულობთ დასაქმების ზრდის ტემპის მნიშვნელობას:



$$n = \frac{s \cdot f(x^*)}{x^*}, \quad (4.102)$$

რომლის დროსაც მიიღწევა ეკონომიკური წონასწორობა.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.10

**ამოცანა.** მოცემულია საწარმოო ფუნქცია

$$f(X) := \frac{1}{3} \cdot X + 2$$

ამოხსენით შესაბამისი ეკონომიკური ზრდის დინამიკური განტოლება და იპოვეთ: კაპიტალაღჭურვილობის წონასწორული მნიშვნელობა თუ, დაგროვების ნორმა  $s=0.4$  და დასაქმების ზრდის ტემპი  $n=0.3$ .

**ამოხსნა.** განვიხილოთ, ფუნქციის მნიშვნელობა და საწყისი მონაცემები

$$f(X) := \frac{1}{3} \cdot X + 2$$

$$s := 0.4$$

$$n := 0.3$$

ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$s \cdot f(X) = n \cdot X$$

$$\frac{1}{3} \cdot X + 2 = \frac{n \cdot X}{s}$$

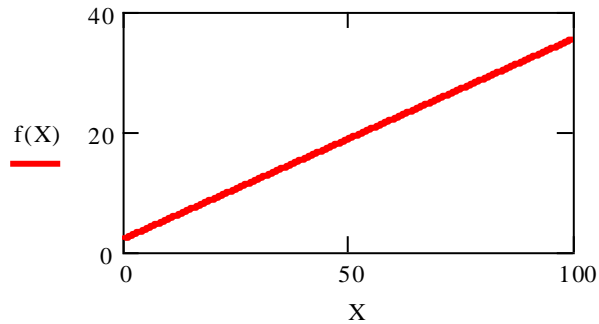
$$X := \frac{2}{\frac{n}{s} - \frac{1}{3}}$$

მივიღებთ შედეგს

$$X = 4.8$$

## პროგრამა Mathcad-ზე

$$f(X) := \frac{1}{3} \cdot X + 2$$



$$n := 0.3$$

$$s := 0.4$$

$$X := 1$$

Given

$$s \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot X + 2 \right) = n \cdot X$$

$$\text{Find}(X) = 4.8$$

მივიღეთ, რომ წონასწორული კაპიტალაღჭურვილობაა 4.8.

### სავარჯიშო.

მოცემულია საწარმოო ფუნქცია

$$f(X) := 8 \cdot X + 29.$$

ამოხსენით შესაბამისი ეკონომიკური ზრდის დინამიკური განტოლება და იპოვეთ: კაპიტალაღჭურვილობის წონასწორული მნიშვნელობა თუ, დაგროვების ნორმა  $s=0.2$  და დასაქმების ზრდის ტემპი  $n=0.5$ .

#### 4.11. ფონ ნეიმანის წონასწორული ეკონომიკური ზრდის დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელი

ჩვენ შევისწავლეთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის სტაციონარული მოდელი. ახლა განვიხილოთ დინამიკური მოდელი:

$$X(t) = AX(t) + Y(t), \quad (4.103)$$

სადაც,  $Y(t)$  საბოლოო მოთხოვნის (არაწარმოებითი დანიშნულების) ვექტორია,  $X(t)$  - ეკონომიკის სექტორების გამოშვების ვექტორი, ხოლო  $A$  - ტექნოლოგიური მატრიცა.

საბოლოო მოთხოვნის ვექტორი შედგება ორი კომპონენტისაგან:  $C(t)$  მოხმარების ვექტორისა და  $I(t)$  ინვესტიციის ვექტორისაგან, ე.ი.

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (4.104)$$

თუ დროის  $t$  მომენტში შემოსავალს აღვნიშნავთ  $F(t)$ -თი, მაშინ დოვლათის (ეკონომიკის სექტორების) ცალკეულ სახეობათა მოხმარების ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$C_i(t) = h_i \cdot F(t). \quad (4.105)$$

$F(t)$  შემოსავალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ფუნქციის სახით

$$F(t) = P_1 X_1(t) + P_2 X_2(t) + \dots + P_n X_n(t), \quad (4.106)$$

სადაც  $P_i$  არის  $i$ -ური დოვლათისათვის დამატებული ღირებულების წილი.

შესაბამისი ვექტორების შემოტანით, მივიღებთ:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix};$$

(1.105) და (1.106)-დან ვღებულობთ:

$$C(t) = h \cdot pX(t). \quad (4.107)$$

თუ  $i$ -ური დარგიდან მიღებული  $i$ -ური სახის კაპიტალის სიდიდეს, რომელიც აუცილებელია  $j$  დოვლათის წარმოებისათვის, აღვნიშნავთ  $b_{ij}$ -ით, მაშინ კაპიტალის კოეფიციენტების  $B$  მატრიცა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

შემდეგ გამოვიყენოთ სამუელსონ-ჰიკსის კონცეფცია. თუ დავუშვებთ, რომ პროდუქციის გამოშვებასა და ამისთვის აუცილებელ კაპიტალს შორის არსებობს პროპორციული დამოკიდებულება, მაშინ მივიღებთ, რომ  $t$  დროის მანძილზე  $i$ -ურ დოვლათზე ( $i$ -ური დარგის საქონელი) საინვესტიციო მოთხოვნაა

$$I_i(t) = \sum_{j=1}^n b_{ij} \Delta X_j(t), \text{ სადაც } \Delta X_j(t) = X_j(t+1) - X_j(t). \quad (4.108)$$

(4.108) გამოსახულება შეიძლება გადაიწეროს მატრიცული სახით:

$$I(t) = B(X(t+1) - X(t)). \quad (4.109)$$

(4.103) და (4.104) განტოლებებიდან გვექნება:

$$X(t) = AX(t) + C(t) + I(t). \quad (4.110)$$

შემდეგ (4.105), (4.107) და (4.110)-დან მივიღებთ:

$$X(t) = A \cdot X(t) + h \cdot pX(t) + B \cdot (X(t+1) - X(t)) \quad (4.111)$$

ანუ

$$X(t) = (A + h \cdot P)X(t) + B \cdot (X(t+1) - X(t)). \quad (4.112)$$

სწორედ ეს არის დინამიკური დარგთაშორისი მოდელის ძირითადი განტოლება. ამ მატრიცული განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ

$$X(t+1) := B^{-1} \cdot [X(t) - A \cdot X(t) - h \cdot (P \cdot X(t)) + B \cdot X(t)], \quad (4.113)$$

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.11

**ამოცანა.** ვიპოვოთ მთლიანი გამოშვების ახალი გეგმა დინამიკური დარგთაშორისი მოდელისათვის თუ, მოცემულია მატრიცები დროის წინა საანგარიშო პერიოდისათვის:

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 20 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix},$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.13 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

სადაც  $P_i$  დამატებული ღირებულების წილია  $i$ -ური დოვლათისთვის,  $X(t)$  – ეკონომიკის სექტორის გამოშვებული დოვლათის ვექტორი, წინა საანგარიშო პერიოდისათვის.

ჩვენი მნიშვნელობების ჩასმით, დინამიკურ დარგთაშორის მოდელში მივიღებთ:

$$X1 := B^{-1} \cdot [X - A \cdot X - h \cdot (P \cdot X) + B \cdot X]$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 51.345 \\ 78.562 \\ 60.14 \end{pmatrix}$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემები

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 20 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.13 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

საერთო გამოშვების ახალი გეგმის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$X1 := B^{-1} \cdot [X - A \cdot X - h \cdot (P \cdot X) + B \cdot X]$$

შედეგები.

$$X1 = \begin{pmatrix} 51.345 \\ 78.562 \\ 60.14 \end{pmatrix} \blacksquare$$

**სავარჯიშო.**

ვიპოვოთ მთლიანი გამოშვების ახალი გეგმა დინამიკური დარგთაშორისი მოდელისათვის, თუ მოცემულია მატრიცები დროის წინა საანგარიშო პერიოდისათვის:

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.14 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad X := \begin{pmatrix} 80 \\ 83 \\ 65 \end{pmatrix}$$

სადაც  $P_i$  დამატებული ღირებულების წილია  $i$ -ური დოვლათისთვის,

$x(t)$  – ეკონომიკის სექტორის გამოშვებული დოვლათის ვექტორი, წინა საანგარიშო პერიოდისათვის.

#### 4.12. ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში

წარმოების მოცულობის ცვლილების სინქარე ტოლია პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$x$  – წარმოების მოცულობა;

$y$  – რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა;

$\alpha$  – რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასი;

$\beta$  – წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულება;

მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x. \quad (4.114)$$

რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სინქარე ტოლია წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცულობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობათა სხვაობის.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$r$  - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების  $x$  მოცულობაზე;

$\gamma$  - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი;

$\delta$  - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

$z$  - წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა,

მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z. \quad (4.115)$$

წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტო-ლია, რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობასა და დახარჯული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$b$  – რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტი;

$l$  – წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{z} = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y. \quad (4.116)$$

ამრიგად, მივიღეთ საწარმოს ფუნქციონირების მათემატიკური მოდელი:

$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x;$$

$$\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z; \quad (4.117)$$

$$\dot{z} = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y.$$

აღვილად შევნიშნავთ, რომ (4.117) განტოლებები ემთხვევა ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, როცა

$$\alpha = \beta = 10; r = 28; \gamma = \delta = l = 1; b = \frac{8}{3}.$$

ამ შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ატრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. ლორენცის ატრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისაკენ. ამიტომ ცდილობენ, სისტემის ქაოსური მუშაობის



რეჟიმებს თავი აარიდონ, პარამეტრების შესაბამისად შერჩევის საშუალებით.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.12

**ამოცანა.** ამოხსენით ლორენცის განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 10 \cdot y(t) - 10 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t) \cdot z(t) + 28 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) \cdot y(t) - \frac{8}{3} \cdot z(t)$$

ერთეულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში და გამოიკვლიეთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორი ფაზურ სიბრტყეზე.

**ამოხსნა.** ლორენცის განტოლებათა სისტემას ადვილად ამოვხსნით Mathcad-ის მეშვეობით.

#### პროგრამა Mathcad-ზე

ლორენცის განტოლებათა სისტემას Mathcad-ზე შეესაბამება მატრიცული ოპერატორი:

$$D(t, Q) := \begin{pmatrix} 10 \cdot Q_1 - 10 \cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0 \cdot Q_2 + 28 \cdot Q_0 \\ Q_0 \cdot Q_1 - \frac{8}{3} \cdot Q_2 \end{pmatrix}$$

$$Npts := 3000$$

$$L := \text{Rkadapt} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D \right]$$

$$t := L \langle 0 \rangle$$

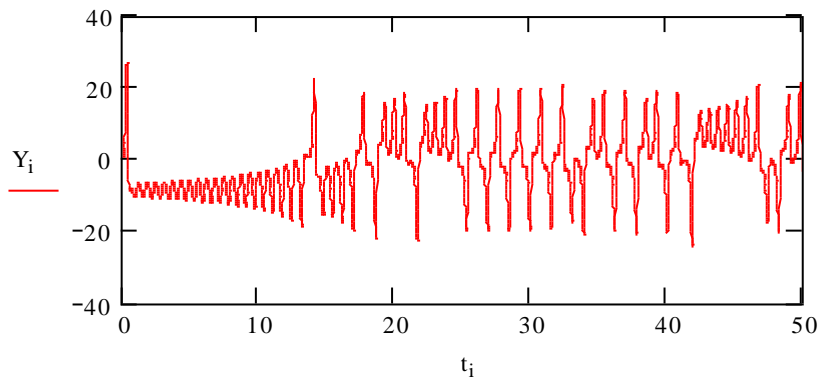
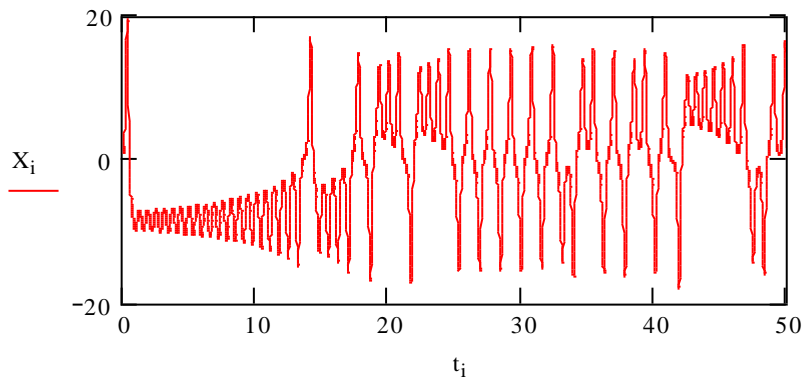
$$X := L^{(1)}$$

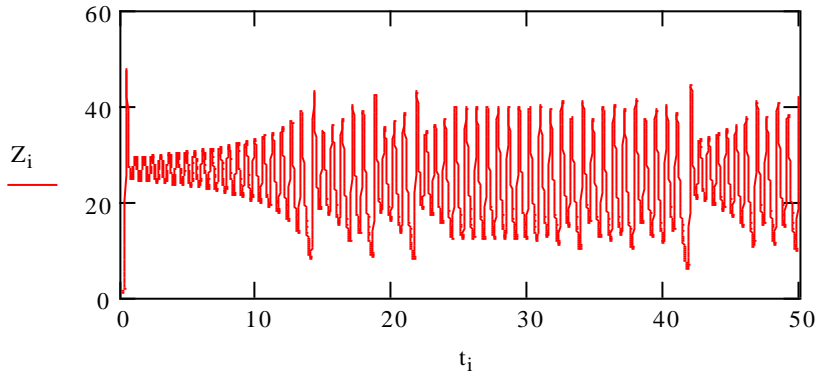
$$Y := L^{(2)}$$

$$Z := L^{(3)}$$

ამონახსნები მოიცემა გრაფიკების მეშვეობით:

$$i := 0..Npts$$





აგაგოთ დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე:

$$\varepsilon := 0.001$$

$$R^{(0)} := X$$

$$R^{(1)} := X + \varepsilon$$

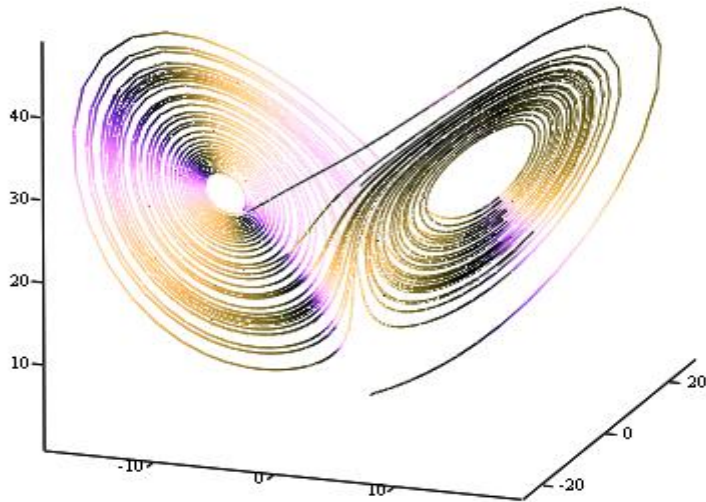
$$S^{(0)} := Y$$

$$S^{(1)} := Y + \varepsilon$$

$$T^{(0)} := Z$$

$$T^{(1)} := Z + \varepsilon$$

მივიღებთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორის სურათს, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის “პეპელას ფრთების” მოხაზულობას  $r$ -პარამეტრის ცვლილებისას, რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.



#### 4.13. მონაცემთა კორელაციური ანალიზი. ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების კორელაცია. რეგრესიული ანალიზი

სოციალურ-ეკონომიკური პროცესების შესწავლისას, ხშირად გვაქვს ამოცანა: გავარკვიოთ სხვადასხვა განმსაზღვრელ მახასიათებელ სიდიდეებს შორის როგორი ანალიზური კავშირია. ამ ამოცანის ამოსახსნელად ატარებენ მონაცემების კორელაციურ ანალიზს.

განვიხილოთ სიტუაცია, როცა ექსპერიმენტის შედეგად გვაქვს ორი განმსაზღვრელი პარამეტრის  $x$  და  $y$  მნიშვნელობათა მონაცემები. მაგალითად, უმუშევრობა და ინფლაციის ხარისხი; მოთხოვნა და მიწოდება; ფასი და მოთხოვნა.

ასე რომ, მონაცემები წარმოადგენს  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  წყვილების სიმრავლეს, სადაც  $n$  ექსპერიმენტულ მონაცემთა რაოდენობაა.  $x$  და  $y$  სიდიდეთა მონაცემების სტატისტიკური დამუშავების გარდა, ისმის კითხვა: დამოუკიდებელია ეს სიდიდეები თუ არა? თუ არ

არის დამოუკიდებელი, მაშინ როგორია მათ შორის კავშირი (წრფივი თუ არაწრფივი) ?

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად აგებენ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის შესაძლო დამოკიდებულების გრაფიკულ სურათს, საიდანაც ვიზუალურად ჩანს - მათ შორის არის თუ არა ფუნქციონალური დამოკიდებულება. თუ მონაცემების შესაბამისი წერტილები ჯგუფდებიან რომელიმე წრფის მახლობლობაში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს სიდიდეები კორელირებენ და მათ შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. თუ რამდენადაა ეს მონაცემები ერთმანეთთან დაკავშირებული, მოიცემა კორელაციის  $K_{xy}$  კოეფიციენტის სიდიდის მიხედვით. კორელაციის კოეფიციენტი ყოველთვის აკმაყოფილებს ორმაგ უტოლობას:

$$-1 \leq K_{xy} \leq 1 . \quad (4.118)$$

თუ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის წრფივი დამოკიდებულებაა, მაშინ კორელაციის კოეფიციენტი უნდა იღებდეს 1 ან -1 მნიშვნელობას. რაც უფრო ახლოა ამ მნიშვნელობებთან კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, მათ შორის დამოკიდებულება მით უფრო ახლოა წრფივთან. თუ, კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ახლოსაა ნულთან, მაშინ მათ შორის არაა წრფივი დამოკიდებულება, ანუ, დამოკიდებულება ან არაწრფივია, ან საერთოდ არ კორელირებენ ეს სიდიდეები.

კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელად გამოიყენება შემდეგი ფორმულები:

$$x_{სა.} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} ; \quad (4.119)$$

$$y_{სა.} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} ; \quad (4.120)$$

$$s_x^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - x_{სა.}^2 ; \quad (4.121)$$

$$s_y^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - y_{სა.}^2 ; \quad (4.122)$$

$$s_{xy} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - x_{\text{სა}} \cdot y_{\text{სა}} ; \quad (4.123)$$

$$K_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} . \quad (4.124)$$

კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატს, დეტერმინაციის კოეფიციენტი ეწოდება.

$$D_{xy} = K_{xy}^2 . \quad (4.125)$$

თუ დეტერმინაციის კოეფიციენტი მეტია 0.5-ზე, მაშინ ამბობენ, რომ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის არის დადებითი დამოკიდებულება; ხოლო, თუ ნაკლებია 0.5-ზე, მაშინ მათ შორის სუსტი კავშირია. ეს კი შეესაბამება იმას, რომ, თუ კორელაციის კოეფიციენტი მეტია 0.71-ზე მაშინ გვაქვს დადებითი კავშირი; ხოლო, თუ კორელაციის კოეფიციენტი ნაკლებია 0.71-ზე, მაშინ - სუსტი კავშირი.

განვიხილოთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების დინამიკა წლების მიხედვით (ცხრილი 4.1) და შევისწავლოთ ამ მონაცემების კორელაცია.

ცხრილი 4.1. ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების დინამიკა 2003-2009წ.

მლნ.ლარი	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
t	0	1	2	3	4	5	6
ეროვნული შემოსავალი x	8631,3	10004,9	11791,7	14102,5	17060,5	18818,0	17682,8
მოხმარება y	5442,1	6044,1	7159,0	8478,9	10625,8	11796,9	10752,7

გამოვიყენოთ (4.119)-(4.125) ფორმულები, მივიღებთ რომ კორელაციის კოეფიციენტი  $K_{xy} = 0.998$ , დეტერმინაციის კოეფიციენტი  $D_{xy} = 0.996$  რაც იმას ნიშნავს, რომ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის არის დადებითი დამოკიდებულება 99.6%, ეს

იძლევა შესაბამისი რეგრესიული ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას.

ვთქვათ, დამოკიდებულება  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის არის წრფივი, ანუ, აქვს სახე:

$$y=ax+b, \quad (4.126)$$

სადაც უცნობი  $a$  და  $b$  კოეფიციენტების საპოვნელად იყენებენ გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდს. ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება მონაცემთა წყვილები: სადაც  $i = \overline{1, n}$ . გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი მოითხოვს, რომ ექსპერიმენტული  $(x_i, y_i)$  წერტილების (4.126) წრფიდან გადახრის კვადრატების ჯამი უნდა იყოს მინიმალური. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$I(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2; \quad (4.127)$$

ფუნქციამ უნდა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა.  $I(a, b)$  არის ორი ცვლადის ფუნქცია, რომლის მინიმუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს (ფერმას თეორემა) აქვთ სახე:

$$\frac{\partial I(a, b)}{\partial a} = 0; \quad (4.128)$$

$$\frac{\partial I(a, b)}{\partial b} = 0. \quad (4.129)$$

(4.127) ფუნქციის ჩასმით (4.128) და (4.129) განტოლებებში, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad (4.130)$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.131)$$

(4.130) და (4.131) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}; \quad b = y_{\text{საშ.}} - ax_{\text{საშ.}}. \quad (4.132)$$

ამ კოეფიციენტების ჩასმა (4.126) ფორმულაში გვაძლევს წრფივი

რეგრესიის ფორმულას, რომლის მეშვეობით ვიპოვით ყოველი  $x$ -ის შესაბამის  $y$ -ს. ასე რომ, უმცირეს კვადრატთა მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ პრობლემის ამოცანებიც.

თუ რეგრესიის წრფე ნაპოვნია, შეგვიძლია შევაფასოთ იგი რამდენად კარგ მიახლოებას გვაძლევს ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარებით. ამისათვის, გამოითვლიან შესაბამის საშუალო კვადრატულ ცდომილებას:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2}. \quad (4.133)$$

ცხადია, რაც უფრო მცირეა  $\delta$  ცდომილება, მით უფრო კარგია მიახლოება.

განვიხილოთ, შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 4.13 მოხმარების ეროვნული შემოსავლის მიხედვით კორელაციისა და წრფივი რეგრესიის ამოცანის გადასაწყვეტად **Mathcad**-ის ბაზაზე.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.13

$$X := \begin{pmatrix} 8631.3 \\ 10004.9 \\ 11791.7 \\ 14102.5 \\ 17060.5 \\ 18818.0 \\ 17682.8 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 5442.1 \\ 6044.1 \\ 7159.0 \\ 8478.9 \\ 10625.8 \\ 11796.9 \\ 10752.7 \end{pmatrix}$$

$$X_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^6 X_i}{7} \quad Y_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^6 Y_i}{7}$$

$$sx2 := \left[ \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=0}^6 (X_i)^2 \right] - X_{sr}^2 \quad sx2 = 13687493.951$$



$$s_{y^2} := \left[ \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=0}^6 (Y_i)^2 \right] - Y_{sr}^2 \quad s_{y^2} = 5364691.664$$

$$S_{xy} := \left[ \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=0}^6 (X_i \cdot Y_i) \right] - X_{sr} \cdot Y_{sr}$$

$$K_{xy} := \frac{S_{xy}}{\sqrt{s_{x^2}} \cdot \sqrt{s_{y^2}}}$$

$K_{xy} = 0.998$  კორელაციის კოეფიციენტი,

$$D_{xy} := K_{xy}^2$$

$D_{xy} = 0.996$  დეტერმინაციის კოეფიციენტი,

### წრფივი რეგრესია

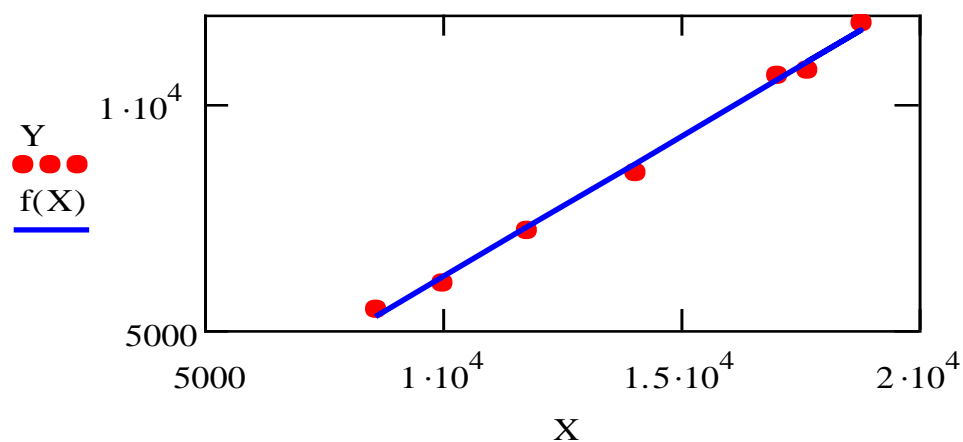
$$a := \frac{S_{xy}}{s_{x^2}} \quad b := Y_{sr} - a \cdot X_{sr} \quad a = 0.625 \quad b = -141.215$$

$$f(x) := a \cdot x + b$$

$$\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^6 (Y_i - a \cdot X_i - b)^2}{7}}$$

საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$\delta = 146.224$$



როგორც ვხედავთ, წრფივი რეგრესია საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა მოხმარებისა და ეროვნული შემოსავლის ურთიერთდამოკიდებულების შესასწავლად.

### **სავარჯიშო.**

გამოიკვლიეთ მოხმარების საშუალო მოცულობის ცვლილება, თუ ეროვნული შემოსავლის საშუალო მნიშვნელობა 1.2-ჯერ იზრდება.

#### **4.14 ექსპორტ-იმპორტის ცნება. ექსპორტ - იმპორტს შორის არსებული უარყოფით სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის არსებული კორელაცია, დეტერმინაციის კოეფიციენტი**

**ექსპორტი** არის ქვეყანაში წარმოებული პროდუქციის რეალიზაცია მის საზღვრებს გარეთ. ცხადია, ექსპორტი საშუალებას იძლევა ქვეყანაში შემოვიდეს კონვერტირებადი ვალუტა, დასაქმდეს საკუთარი მუშა ხელი, დამატებითი სტიმული მიეცეს წარმოების სიმძლავრეების გადიდებას და ა.შ.

**იმპორტი** არის საზღვარგარეთ წარმოებული პროდუქციის შემოტანა შიდა ბაზარზე რეალიზაციისათვის. იგი დადებით როლს ასრულებს, თუ ხელს უწყობს ქვეყნის შიგნით არსებული დეფიციტის შევსებას. მაგრამ ადგილი აქვს უარყოფით მოვლენას, თუ ხელს უშლის შიდა წარმოებითი სიმძლავრეების გაზრდას და ხალხის დასაქმებას. განსაკუთრებით მაგნეა საქართველოსთვის იაფი-უხარისხო კვების პროდუქტების შემოტანა, რადგან საქართველო აგრარული ქვეყანაა, მით უმეტეს, თუ ისინი გენური ინჟინერიითაა მოყვანილი და ბოლომდე არაა გამოკვლეული მათი მოქმედება ადამიანის ჯანმრთელობაზე.

სხვაობას ექსპორტისა და იმპორტის მოცულობებს შორის სალდო ეწოდება.

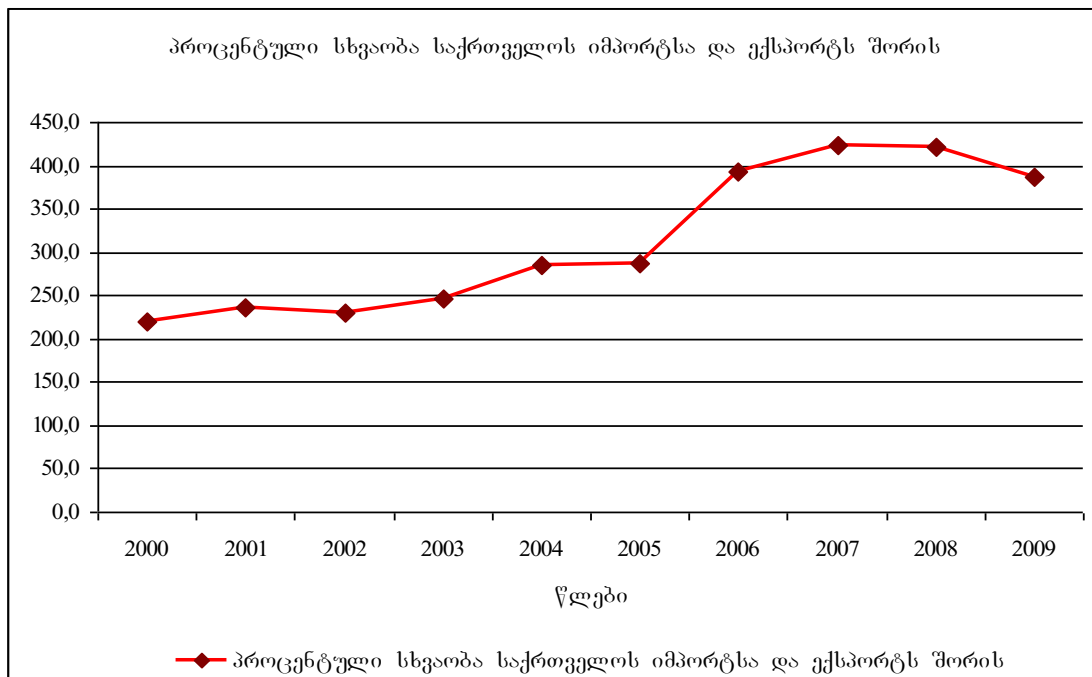
თუ სალდო უარყოფითია რაც ნიშნავს, რომ უფრო მეტი პროდუქცია შემოგვაქვს, ვიდრე გაგვაქვს, მაშინ ქვეყნის სავალუტო რეზერვები მცირდება და ქვეყანა ფინანსურად სუსტდება. ხოლო თუ, სალდო დადებითია, მაშინ ჩვენი ქვეყანა ადგას განვითარების გზას და თანდათან ძლიერდება ფინანსურად.

განვიხილოთ საქართველოს ექსპორტ-იმპორტის მოცულობათა დინამიკა (ცხრილი 4.2.)

ცხრილი 4.2. საქართველოს ექსპორტ-იმპორტისა და მათ შორის პროცენტული სხვაობის მნიშვნელობები

წლები	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
საქართველოს ექსპორტი ათასი აშშ დოლარი	322 748,7	317 636,1	345 933,5	461 405,6	646 903,0	865 454,2	935 992,1	1 232 371,0	1 495 456,6	1 130 555,4
საქართველოს იმპორტი ათასი აშშ დოლარი	709 376,2	753 227,8	795 539,1	1 141 164,7	1 845 544,9	2 489 935,4	3 676 968,9	5 214 883,4	6 304 557,3	4 369 496,5
პროცენტული სხვაობა საქართველოს იმპორტსა და ექსპორტს შორის	-219,8	-237,1	-230,0	-247,3	-285,3	-287,7	-392,8	-423,2	-421,6	-386,5

როგორც ცხრილიდან ჩანს, ექსპორტ-იმპორტის უარყოფითი სალდო აშკარად იზრდება 2007 წლამდე; ეს ნიშნავს, რომ საქართველოს ეკონომიკა სულს დაფავს. არ ვითარდება წარმოებითი სიმძლავრეები, ვერ მოვიპოვეთ ბაზარი საქონლის რეალიზაციისათვის და საქართველო იქცა იაფი - დაბალი ხარისხის უცხოური პროდუქციის ბაზრად.



ნახ. 4.14. პროცენტული სხვაობა საქართველოს ექსპორტსა და იმპორტს შორის

ყოველივე ამის შედეგი, იწვევს უმუშევრობის ზრდასა და მოსახლეობის გაღატაკებას. რაც საბოლოოდ იწვევს სოციალური დაძაბულობის ზრდას და ხელისუფლების რეიტინგის დაცემას.

**უმუშევრობა** - ეკონომიკურად აქტიური მოსახლეობის დროებით დაუსაქმებლობა. შრომის საერთაშორისო ორგანიზაციის განმარტებით, უმუშევრად ითვლება ადამიანი, რომელსაც შეუძლია მუშაობა, მაგრამ სამუშაოს არქონის გამო, აქტიურად ეძებს მას.

საქართველოში გვაქვს ციკლური უმუშევრობა, რომელიც დაკავშირებულია საქონელსა და მომსახურებაზე არასაკმარისი ერთობლივი მოთხოვნით.

**გ.ოუკენის კანონის მიხედვით**, უმუშევრობის ნაზრდის ყოველი ერთი პროცენტი მისი ბუნებრივი დონის ზემოთ, იწვევს მშპ-ს მოცულობის 2.5 პროცენტით ჩამორჩენას.

4.3. ცხრილში მოცემულია დასაქმებულთა და უმუშევართა რაოდენობის დინამიკა წლების მიხედვით.

ცხრილი 4.3. დასაქმებისა და უმუშევრობის დინამიკა საქართველოში

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
დასაქმებული	1728,5	1694,4	1111	1877,7	1839,2	1814,9	1783,3	1744,6	1747,3	1704,3	1601,9	1656,1
უმუშევარი	244,2	244,9	212	235,6	265	235,9	257,6	279,3	274,5	261	315,8	335,6

4.2 და 4.3 ცხრილები საშუალებას იძლევა გამოვიკვლიოთ კორელაცია ექსპორტ-იმპორტის უარყოფით პროცენტულ სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის.

უმუშევრობის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$R = \frac{r_{\text{უმუშ.}}}{r_{\text{უმუშ.}} + r_{\text{დასაქ.}}}, \quad (4.134)$$

სადაც  $r_{\text{უმუშ.}}$  უმუშევართა რაოდენობაა;

$r_{\text{დასაქ.}}$  - დასაქმებულთა რაოდენობა.

მაშინ მივიღებთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი  $K_{xy} = 0.782$  და დეტერმინაციის კოეფიციენტი  $D_{xy} = 0.612$ .

ეს ნიშნავს, რომ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის არის წრფივი დამოკიდებულება 61.2%-ის სიზუსტით. თუმცა, ეს დამოკიდებულება საკმაოდ მცირეა.

ეს იძლევა შესაბამისი რეგრესიული ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას. განვიხილოთ, შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 4.14. ექსპორტ-იმპორტს შორის არსებული უარყოფით სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის არსებული კორელაციისა და წრფივი რეგრესიის ამოცანის გადასაწყვეტად Mathcad - ის ბაზაზე.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.14

$X :=$	$Y :=$	$n := 10$	$Y =$																				
$\begin{pmatrix} 219.8 \\ 237.1 \\ 230.0 \\ 247.3 \\ 285.3 \\ 287.7 \\ 392.8 \\ 423.2 \\ 421.6 \\ 386.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{212}{212 + 1837.7} \\ 235.6 \\ \frac{235.6 + 1877.7}{265} \\ 265 + 1839.2 \\ \frac{235.9}{235.9 + 1814.9} \\ 257.6 \\ \frac{257.6 + 1783.3}{279.3} \\ 279.3 + 1744.6 \\ \frac{274.5}{274.5 + 1747.3} \\ 261 \\ 261 + 1704.3 \\ 315.8 \\ \frac{315.8 + 1601.9}{335.6} \\ 335.6 + 1656. \end{pmatrix}$		<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px;">0</td><td style="width: 100px;">0.10342977</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.11148441</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.12593860</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.11502828</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.12621883</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.13800089</td></tr> <tr><td>6</td><td>0.13577011</td></tr> <tr><td>7</td><td>0.13280415</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.16467644</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.16850773</td></tr> </table>	0	0.10342977	1	0.11148441	2	0.12593860	3	0.11502828	4	0.12621883	5	0.13800089	6	0.13577011	7	0.13280415	8	0.16467644	9	0.16850773
0	0.10342977																						
1	0.11148441																						
2	0.12593860																						
3	0.11502828																						
4	0.12621883																						
5	0.13800089																						
6	0.13577011																						
7	0.13280415																						
8	0.16467644																						
9	0.16850773																						

$$X_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n}$$

$$Y_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{n}$$

$$s_{x2} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i)^2 \right] - X_{sr}^2$$

$$s_{y2} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i)^2 \right] - Y_{sr}^2$$

$$S_{xy} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i \cdot Y_i) \right] - X_{sr} \cdot Y_{sr}$$

$$K_{xy} := \frac{S_{xy}}{\sqrt{s_{x2}} \cdot \sqrt{s_{y2}}}$$

$$D_{xy} := K_{xy}^2$$

$$K_{xy} = 0.78230317$$

$$D_{xy} = 0.61199826$$

## წრფივი რეგრესია

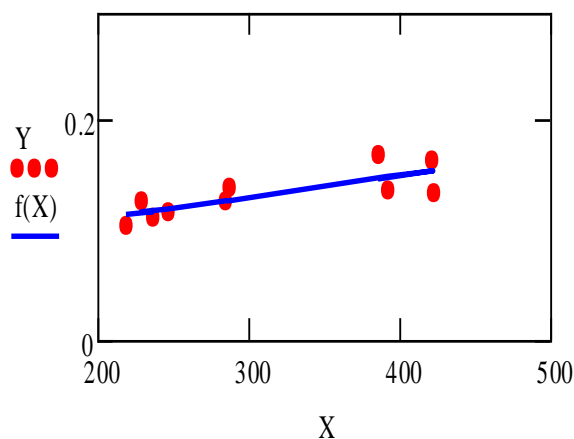
$$a := \frac{S_{xy}}{s_x^2}$$

$$b := Y_{sr} - a \cdot X_{sr}$$

$$a = 0.00019863$$

$$b = 0.06998927$$

$$f(x) := a \cdot x + b$$



$$\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - a \cdot X_i - b)^2}{n}}$$

ცდომილება

$$\delta = 0.01253006$$

როგორც ვხედავთ, წრფივი რეგრესია საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა ექსპორტ-იმპორტს შორის არსებულ უარყოფით საღლოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის ურთიერთდამოკიდებულების შესასწავლად.

**სავარჯიშო.**

გამოიკვლიეთ უმუშევრობის კოეფიციენტის საშუალო სიდიდის ცვლილება, თუ ექსპორტ-იმპორტის უარყოფითი საღლოს საშუალო მნიშვნელობა 1.2 ჯერ იზრდება.

#### 4.15. კორელაცია საგარეო ვალების მოცულობასა და საქართველოს ბიუჯეტს შორის

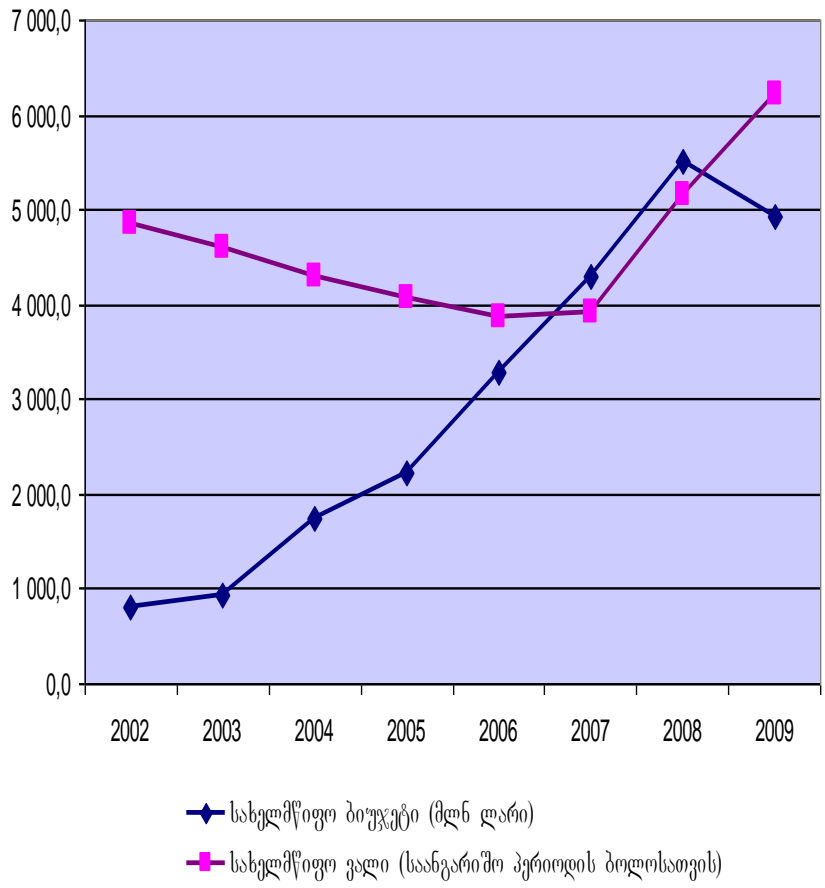
ცხოვრების დონისა და საზოგადოების განვითარების ტემპების დასახასიათებლად, განვიხილოთ სახელმწიფო ვალისა და სახელმწიფო ბიუჯეტის დამოკიდებულება.

ცხრილი 4.4. სახელმწიფო ბიუჯეტის სტრუქტურა

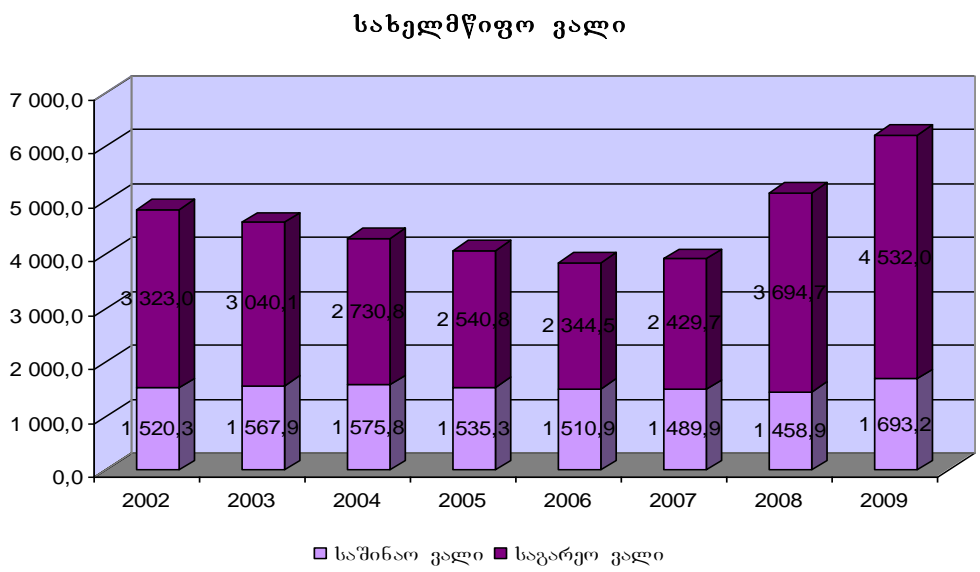
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
სახელმწიფო ბიუჯეტი(მლნ ლარი)	802,7	933,3	1 732,9	2 213,0	3 293,3	4 293,6	5 517,7	4 917,0
სახელმწიფო ვალი	4 843,3	4 608,0	4 306,6	4 076,1	3 855,4	3 919,6	5 153,6	6 225,2
საშინაო ვალი	1 520,3	1 567,9	1 575,8	1 535,3	1 510,9	1 489,9	1 458,9	1 693,2
საგარეო ვალი	3 323,0	3 040,1	2 730,8	2 540,8	2 344,5	2 429,7	3 694,7	4 532,0

აეგოთ შესაბამისი ნახ. 4.15, რომელზეც შეიმჩნევა შუალედები, როცა სახელმწიფო ვალი აჭარბებდა ბიუჯეტს და ბიუჯეტის შევსება ხდებოდა ვალების ხარჯზე. შემდგომ შეინიშნება დადებითი ტენდენცია, როცა ბიუჯეტი იზრდებოდა ვალებზე უფრო სწრაფად და 2006 წლიდან 2008 წლამდე გადააჭარბა კიდევ ვალებს. თუმცა, აგვისტოს ომმა ეს წარმატება წაშალა და 2009 წელს ვალმა კვლავ გადააჭარბა ბიუჯეტის შემოსავლებს.





ნახ. 4.15. სახელმწიფო ბიუჯეტისა და ვალების დინამიკა



ნახ. 4.16. საშინაო და საგარეო ვალების დინამიკა საქართველოში  
2002-2009წწ.

ზემოთ მოყვანილი მონაცემები საშუალებას იძლევა ჩავატაროთ ბიუჯეტისა და ვალების კორელაციური ანალიზი, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია გადავიდეთ შესაბამის რეგრესიულ ანალიზზე, გამოვიკვლიოთ ბიუჯეტისა და ვალების დინამიკის შემდგომი მომავალი.

მაშინ მივიღებთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი  $K_{xy}=0.36$ , დეტერმინაციის კოეფიციენტი  $D_{xy}=0.132$ ; ეს კი ნიშნავს, რომ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის არ არის წრფივი დამოკიდებულება. ამიტომ, ან გვაქვს არაწრფივი დამოკიდებულება, ან საერთოდ არაა კორელაცია ამ სიდიდეებს შორის.

განვიხილოთ შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 4.15, საგარეო ვალების მოცულობასა და საქართველოს ბიუჯეტს შორის არსებული კორელაციის დასადგენად Mathcad - ის ბაზაზე.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.15

$$X := \begin{pmatrix} 4843.3 \\ 4608.0 \\ 4306.6 \\ 4076.1 \\ 3855.4 \\ 3919.6 \\ 5153.6 \\ 6225.2 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 802.7 \\ 933.3 \\ 1732.9 \\ 2213.0 \\ 3293.3 \\ 4293.6 \\ 5517.7 \\ 4917.0 \end{pmatrix} \quad n := 8$$

$$X_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \quad Y_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{n}$$

$$sx2 := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i)^2 \right] - X_{sr}^2 \quad sy2 := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i)^2 \right] - Y_{sr}^2$$

$$S_{xy} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i \cdot Y_i) \right] - X_{sr} \cdot Y_{sr}$$

$$K_{xy} := \frac{S_{xy}}{\sqrt{s_{x^2} \cdot \sqrt{s_{y^2}}}}$$

$$K_{xy} = 0.36301850$$

$$D_{xy} := K_{xy}^2$$

$$D_{xy} = 0.13178243$$

როგორც ვხედავთ, კორელაციის კოეფიციენტი 0.36, ხოლო დეტერმინაციის კოეფიციენტი 0.132, ეს ნიშნავს, რომ საქართველოს ბიუჯეტსა და გარე ვალებს შორის არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მაშასადამე, კავშირი ან არაწრფივია, ან საერთოდ არ კორელირებენ ეს ცვლადები ერთმანეთთან.

#### 4.16. კორელაცია სამომხმარებლო კალათის მოცულობასა და ინფლაციის მაჩვენებელს შორის

სამომხმარებლო კალათის გაანგარიშების წესს განვიხილავთ მესამე თავში. ახლა კი მოვიყვანთ მონაცემებს საქართველოსათვის, საარსებო მინიმუმის დინამიკას წლების მიხედვით

ცხრილი 4.5. საშუალო მომხმარებლის საარსებო მინიმუმის დინამიკა (ლარი თვეში)

წლები	საშუალო მომხმარებლის საარსებო მინიმუმი (ლარი თვეში)
2004	85.2
2005	87.1
2006	106.5
2007	102.7
2008	115.8
2009	111.7

თუ განვიხილავთ ინფლაციის კოეფიციენტის დინამიკის შესაბამის ცხრილს 4.6, მაშინ, ადვილად შეიძლება ჩავატაროთ შესაბამისი კორელაციური ანალიზი.

ცხრილი 4.6. ინფლაციის კოეფიციენტის დინამიკა წლების მიხედვით

	2005	2006	2007	2008	2009	2010
საშუალო წლიური წინა წლის საშუალო წლიურთან	108.2	109.2	109.2	110.0	101.7	107.1
დეკემბერი წინა წლის დეკემბერთან	106.2	108.8	111.0	105.5	103.0	111.2
წლიური ინფლაციის დონე	6.2	8.8	11.0	5.5	3.0	11.2

მივიღებთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი  $K_{xy} = -0.576$  და დეტერმინაციის კოეფიციენტი  $D_{xy} = 0.332$ . ეს კი ნიშნავს, რომ  $x$  და  $y$  სიდიდეთა შორის დამოკიდებულება სულ რაღაც 33.2%-ია. ამრიგად, დამოკიდებულება მეტად სუსტია, რადგან  $33.2\% < 50\%$ .

ეს კი არ იძლევა შესაბამისი წრფივი რეგრესიული ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას.

განვიხილოთ, შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 4.16, სამომხმარებლო კალათის მოცულობასა და ინფლაციის მაჩვენებელს შორის არსებული კორელაციის ამოცანის გადასაწყვეტად Mathcad - ის ბაზაზე.

ლაბორატორიული სამუშაო 4.16

$$X := \begin{pmatrix} 85.2 \\ 87.1 \\ 106.5 \\ 102.7 \\ 115.8 \\ 111.7 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 108.2 \\ 109.2 \\ 109.2 \\ 110.0 \\ 101.7 \\ 107.1 \end{pmatrix}$$

$$X_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^5 X_i}{6}$$

$$Y_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^5 Y_i}{6}$$

$$s_{x2} := \left[ \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^5 (X_i)^2 \right] - X_{sr}^2$$

$$s_{y2} := \left[ \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^5 (Y_i)^2 \right] - Y_{sr}^2$$

$$S_{xy} := \left[ \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=0}^5 (X_i \cdot Y_i) \right] - X_{sr} \cdot Y_{sr}$$

$$K_{xy} := \frac{S_{xy}}{\sqrt{s_{x2}} \cdot \sqrt{s_{y2}}}$$

$$K_{xy} = -0.576$$

$$D_{xy} := K_{xy}^2$$

$$D_{xy} = 0.332$$

როგორც ვხედავთ, კორელაციის კოეფიციენტია 0.58, ხოლო დეტერმინაციის კოეფიციენტი - 0.332, რაც ნიშნავს, რომ საქართველოს ბიუჯეტსა და გარე ვალებს შორის არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მაშასადამე, კავშირი ან არაწრფივია, ან ეს ცვლადები საერთოდ არ კორელირებენ ერთმანეთთან.

#### 4.17. კავშირი კვების პროდუქტებზე ერთიან მოთხოვნას, საშუალო ხელფასსა და საშუალო ფასს შორის. მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი

განვიხილოთ შესაძლო კავშირი კვების პროდუქტებზე ერთიან მოთხოვნას, საშუალო ხელფასსა და საშუალო ფასს შორის. იმისათვის, რომ დავადგინოთ, როგორაა დამოკიდებული ერთიანი

მოთხოვნა  $y$  საშუალო  $x$  ხელფასსა და საშუალო  $p$  ფასებზე, უნდა შევადგინოთ არსებული მონაცემების შესაბამისი ცხრილი 4.7.

ცხრილი 4.7

№	$y$	$x$	$p$
1	350	400	2.5
2	360	400	3
3	400	400	3.5
4	380	400	3.4
5	400	400	3.35
6	450	400	3.4

მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი წარმოადგენს ორცვლადიანი რეგრესიული ანალიზის განვითარებას, რომელიც იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც სისტემის აგრეგირებული მახასიათებელი დაკავშირებულია ერთზე მეტ დამოუკიდებელ განმსაზღვრელ ცვლადთან.

განვიხილოთ კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის განსაზღვრის მაგალითი. მოსახლეობის  $x$  შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე  $p$  ფასების არსებული მონაცემებიდან გამომდინარე ვიპოვოთ კავშირი

$$y = f(x, p). \quad (4.135)$$

სადაც  $y$  კვების ხარჯების საერთო სიდიდეა;  $f$  – ფუნქცია მოცემული კლასიდან. მაგალითისათვის ვისარგებლოთ პოლინომებით, ანუ პოლინომური რეგრესიით მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისათვის. მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის კერძო სახეს წარმოადგენს მრავალგანზომილებიანი წრფივი რეგრესია, ანუ შემთხვევა, როცა მონაცემებს უახლოვდებით ფორმულით

$$y = \alpha + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot p. \quad (4.136)$$

მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის ამოცანის ამოსახსნელად, მოცემული უნდა იყოს რიცხვთა მასივი, რომელიც შეესაბამება  $Y$  ცვლადს. ვთქვათ

$$Y := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix}; \quad MXP := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix} \quad (4.137)$$

შევქმნათ ორგანზომილებიანი  $MXP$  მონაცემთა მასივი, შესაბამისი  $(x, p)$  წერტილებისათვის.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.17

**ამოცანა.** მოცემულია  $Y$  ერთობლივი მოთხოვნა და შესაბამისი მონაცემთა  $MXP$  მატრიცა, მოსახლეობის  $X$  შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე  $P$  ფასების მიხედვით. ავაგოთ მოსახლეობის ერთობლივი მოთხოვნის მიახლოების მრავალწევრი, გავაკეთოთ პროგნოზი, შევაფასოთ აპროქსიმაციის ცდომილება.

**ამოხსნა.** გამოვიყენოთ  $regress(MXP, Y, n)$  ოპერატორი, სადაც

$n$  მიახლოების პოლინომის ხარისხია.  $n:=1$ ,

$$VS := regress(MXP, Y, n),$$

სადაც  $VS$  პოლინომის საუკეთესო მიახლოების კოეფიციენტებია. ავაგოთ მიახლოების პოლინომი, სადაც  $X_0:=X$  და  $X_1:=P$

$$f(x) := interp(VS, MXP, Y, X).$$

და ბოლოს, შევადგინოთ პროგნოზი  $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$  სხვა მნიშვნელობებისთვისაც.

გრაფიკული ინტერპრეტაციისათვის მოხერხებულია Y ერთობლივი მოთხოვნის აღნიშვნა Z-ით და მონაცემთა მატრიცული სახით შეყვანა.

$$n:=1 \quad Z := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix} \quad MXP := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$

$$VS:=\text{regress}(MXP,Z,n) \quad f(x):=\text{interp}(VS,MXP,Z,x).$$

პროგნოზი:

$$f\left(\begin{pmatrix} 450 \\ 3.40 \end{pmatrix}\right) = ? \quad (\text{პასუხი: } 426) \quad f\left(\begin{pmatrix} 500 \\ 4.00 \end{pmatrix}\right) = ? \quad (\text{პასუხი: } 488)$$

$$X:=MXP^{<0>} \quad P=MXP^{<1>}$$

$$i:=0..5.$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის, კვების ხარჯებისა და თვიური შემოსავლების მონაცემები:

$$Z := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix} \quad MXP := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$



$$X := \text{MXP}^{(0)}$$

$$P := \text{MXP}^{(1)}$$

კოეფიციენტების მოძებნა

$$n := 1$$

$$VS := \text{regress}(\text{MXP}, Z, n)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.439 \\ 67.167 \\ 0.001 \end{pmatrix} \blacksquare$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$$f(x) := \text{interp}(VS, \text{MXP}, Z, x)$$

ერთობლივი მოთხოვნის მნიშვნელობათა პროგნოზირება

$$f \begin{pmatrix} 450 \\ 3.40 \end{pmatrix} = 425.946 \blacksquare$$

$$f \begin{pmatrix} 500 \\ 4 \end{pmatrix} = 488.199 \blacksquare$$

$$\text{coeffs} := \text{submatrix}(VS, 3, \text{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

$$\text{coeffs}^T = (0.439 \ 67.167 \ 0.001)$$

$$\alpha := (\text{coeffs}^T)^{<0>}$$

$$\alpha = (0.439)$$

$$\beta := (\text{coeffs}^T)^{<1>}$$

$$\beta = (67.167)$$

$$m := (\text{coeffs}^T)^{<2>}$$

$$m=(0.001)$$

$Z=m+\alpha \cdot X+\beta \cdot P$  არის ერთობლივი მოთხოვნის ფუნქცია

$$Z_1(X,P) := 0.001 + 0.439 \cdot X + 67.167 \cdot P$$

$$i := 0 \dots 5$$

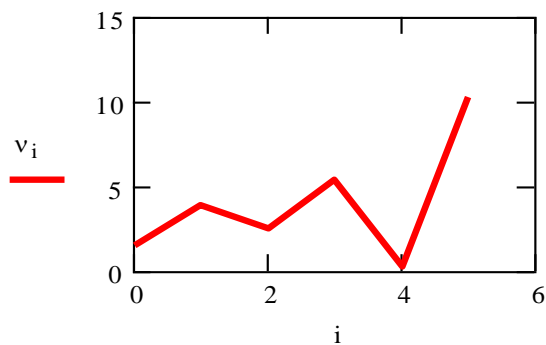
$$\Delta c_i := \left| f \left( \begin{pmatrix} X_i \\ P_i \end{pmatrix} \right) - Z_i \right|$$

$$\Delta c := \begin{pmatrix} 6.457 \\ 17.126 \\ 10.71 \\ 23.993 \\ 0.635 \\ 46.007 \end{pmatrix}$$

$$v := \frac{\Delta c}{450} \cdot 100$$

$$v = \begin{pmatrix} 1.435 \\ 3.806 \\ 2.38 \\ 5.332 \\ 0.141 \\ 10.224 \end{pmatrix}$$

$$\max(v) = 10.224$$



### სავარჯიშო.

მოცემული  $Y$  ერთობლივი მოთხოვნით და შესაბამის მონაცემთა  $MPX$  მატრიცით, მოსახლეობის  $X$  შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე  $P$  ფასების მიხედვით, ააგეთ მიახლოების ოპტიმალური მრავალწევრი:  $Y = \alpha + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot P$ .

შეადგინეთ პროგნოზი და ააგეთ გრაფიკული ინტერპრეტაცია.

## 4.18. კობ-დუგლასის წარმოებითი ფუნქცია Mathcad-ის

### ბაზაზე

1927 წელს, განათლებით ეკონომისტმა პოლ დუგლასმა აღმოაჩინა, რომ, თუ ერთმანეთს შეუთავსებთ  $Y$  გამოშვების რეალური მოცულობის,  $K$  კაპიტალური დანახარჯებისა და  $L$  შრომის დანახარჯების მაჩვენებლების ლოგარითმების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკებს, მაშინ, გამოშვების მაჩვენებლების წერტილებიდან შრომის დანახარჯების მაჩვენებლებისა და კაპიტალის ხარჯების გრაფიკების წარტილებამდე დაშორებები შეადგენს მუდმივ პროპორციას. შემდეგ, მან თხოვნით მიმართა მათემატიკოს ჩარლზ კობს, ეპოვა ასეთი თავისებურების მქონე მათემატიკური დამოკიდებულება. კობმა შესთავაზა შემდეგი ფუნქცია:

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}. \quad (4.138)$$

ხშირად, განიხილავენ კობ-დუგლასის განზოგადებულ ფორმულას:

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta, \quad (4.139)$$

სადაც  $A$ ,  $\alpha$  და  $\beta$  კოეფიციენტები განისაზღვრება არაწრფივი მრავლობითი რეგრესიის მეთოდით, როდესაც მოცემულია  $Y$  მონაცემთა  $K$  და  $L$  ვექტორი.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.18

ამოცანა. მოცემულია წარმოების  $Y$  რეალური მოცულობის,  $K$  რეალური კაპიტალური ხარჯებისა და  $L$  რეალური შრომის ხარჯების ინდექსები ამერიკაში 1899 - 1922 წლებისათვის (ცხრილი 2.8). იპოვეთ კობ-დუგლასის დამოკიდებულება, თუ გვაქვს 2.8 ცხრილში აღნიშნული მონაცემები (საფუძვლად აღებულია 1899 წლის 100-ის ტოლი მოცულობა).

ცხრილი 4.8

წელი	$Y$	$K$	$L$		წელი	$Y$	$K$	$L$
1899	100	100	100		1911	153	216	145
1900	101	107	105		1912	177	226	152
1901	112	114	110		1913	184	236	154
1902	122	122	118		1914	169	244	149
1903	124	131	123		1915	189	266	154
1904	122	138	116		1916	225	298	182
1905	143	149	125		1917	227	335	196
1906	152	163	133		1918	223	336	200
1907	151	176	138		1919	218	387	193
1908	126	185	121		1920	231	407	193
1909	155	198	140		1921	179	417	147
1910	159	208	144		1922	240	431	161

ამოხსნა. კობ-დუგლასის თანადობის პარამეტრების მოსაძებნად გავალოგარიტმით ეს დამოკიდებულება:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L . \quad (4.140)$$

თუ შევიტანთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$\ln Y \equiv y; \ln A \equiv m; \ln K \equiv X; \ln L \equiv P, \quad (4.141)$$

მივიღებთ დამოკიდებულებას:

$$y = m + \alpha \cdot x + \beta \cdot P. \quad (4.142)$$

ანუ, პირველი ხარისხის პოლინომის სახით მოცემულ დამოკიდებულებას, სადაც  $m$ ,  $\alpha$  და  $\beta$  უნდა განვსაზღვროთ მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის მეთოდით, შემდეგ კი განვსაზღვროთ  $A$  პარამეტრიც

$$A = e^m. \quad (4.143)$$

პროგრამა Mathcad-ზე

Y :=	100	K :=	100	L :=	100
	101		107		105
	112		114		110
	122		122		118
	124		131		123
	122		138		116
	143		149		125
	152		163		133
	151		176		138
	126		185		121
	155		198		140
	159		208		144
	153		216		145
	177		226		152
	184		236		154
	169		244		149
	189		266		154
	225		298		182
	227		335		196
	223		366		200
	218		387		193
	231		407		193
	179		417		147
	240		431		161

i := 0.. 23

Y1<sub>i</sub> := ln(Y<sub>i</sub>)

K1<sub>i</sub> := ln(K<sub>i</sub>)

L1<sub>i</sub> := ln(L<sub>i</sub>)

MXP<sup><0></sup> := K1

MXP<sup><1></sup> := L1

n := 1

VS := regress (MXP , Y1, n)

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.233 \\ 0.807 \\ -0.177 \end{pmatrix}$$

$$f(X) := \text{interp}(VS, MXP, Y1, X)$$

$$\text{coeffs} := \text{submatrix}(VS, 3, \text{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის ლოგარითმული გაშლის კოეფიციენტები  $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$ ;

$$\text{coeffs}^T = (0.233 \ 0.807 \ -0.177)$$

$$\alpha := (\text{coeffs}^T)^{(0)}$$

$$\alpha = 0.233$$

$$\beta := (\text{coeffs}^T)^{(1)}$$

$$\beta = 0.807$$

$$A := e^{(\text{coeffs}^T)^{(2)}}$$

$$A = 0.838$$

საწარმოო ფუნქციის პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$f\left(\begin{pmatrix} 420 \\ 330 \end{pmatrix}\right) = 364.107$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}\right) = 335.228$$

**სავარჯიშო.**

მოიძიეთ  $Y$  წარმოების რეალური მოცულობის,  $K$  რეალური კაპიტალური დანახარჯებისა და  $L$  შრომის რეალური ხარჯების ინდექსის ცვლილებები, დროის მიხედვით საქართველოსათვის. იპოვეთ, აუცილებელი მონაცემები და განსაზღვრეთ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები.

#### 4.19. კორელაცია ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის საქართველოს მაგალითზე. ფილიპსის მრუდი

განვიხილოთ შესაძლო კავშირი წლიურ ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის. ამისათვის ვისარგებლოთ არსებული ოფიციალური მონაცემებით (ცხრილი 4.9 და ცხრილი 4.10.)

ცხრილი 4.9

	2005	2006	2007	2008	2009
საშუალო წლიური წინა წლის	108.2	109.2	109.2	110.0	101.7
საშუალო წლიურთან					
დეკემბერი წინა წლის დეკემბერთან	106.2	108.8	111.0	105.5	103.0
წლიური ინფლაციის დონე	6.2	8.8	11.0	5.5	3.0

ცხრილი 4.10

	2005	2006	2007	2008	2009
დასაქმებული	1744,6	1747,3	1704,3	1601,9	1656,1
უმუშევარი	279,3	274,5	261	315,8	335,6
უმუშევრობის კოეფიციენტი	0.138	0.136	0.133	0.165	0.169

წლიურ ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის რომ შევისწავლოთ შესაძლო კავშირი, შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე და გამოვთვალოთ შესაბამისი კორელაციის კოეფიციენტი.



$$a := \frac{S_{xy}}{s_{x^2}}$$

$$b := Y_{sr} - a \cdot X_{sr}$$

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.19

$$X := \begin{pmatrix} 6.2 \\ 8.8 \\ 11.0 \\ 5.5 \\ 3.0 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0.138 \\ 0.136 \\ 0.133 \\ 0.165 \\ 0.169 \end{pmatrix} \quad n := 5 \quad X_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \quad Y_{sr} := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{n}$$

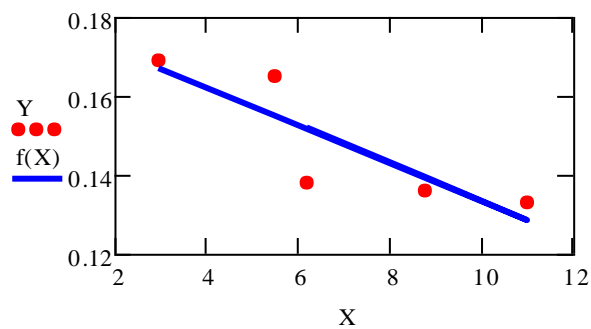
$$s_{x^2} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i)^2 \right] - X_{sr}^2 \quad s_{y^2} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (Y_i)^2 \right] - Y_{sr}^2 \quad s_{y^2} = 0$$

$$s_{x^2} = 7.616 \quad S_{xy} := \left[ \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (X_i \cdot Y_i) \right] - X_{sr} \cdot Y_{sr} \quad K_{xy} := \frac{S_{xy}}{\sqrt{s_{x^2} \cdot s_{y^2}}} \quad D_{xy} := K_{xy}^2$$

$$K_{xy} = -0.857 \quad D_{xy} = 0.734$$

$$a = -0.005 \quad b = 0.181$$

$$f(x) := a \cdot x + b$$



$$\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} (Y_i - a \cdot X_i - b)^2}{n}}$$

$$\delta = 0.008$$

როგორც ვხედავთ, წრფივი რეგრესია საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა უმუშევრობისა და ინფლაციის კოეფიციენტის ურთიერთდამოკიდებულების შესასწავლად. რეგრესიის წრფიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ინფლაციის გაზრდით, უმუშევრობა კვლავ უფრო მეტად იზრდება, რაც სწორედ ფილიპის მრუდის იდეას შეესაბამება.

#### 4.20. განზოგადებული წრფივი რეგრესია საქონლის ფასის პროგნოზირებისათვის

ზოგჯერ წრფივი რეგრესიის მეთოდი უხეშ მიახლოებას იძლევა აქციის კურსის, საქონლის ფასისა და ეროვნული ვალუტის კურსის პროგნოზირებისას. ასეთ შემთხვევებში, ხშირად იყენებენ განზოგადებულ წრფივი რეგრესიის მეთოდს. ამ მეთოდის არსი ისაა, რომ ექსპერიმენტული წერტილების მოცემულ ერთობლიობას უახლოვდება

$$F(x, k_1, k_2, \dots, k_n) = k_1 \cdot F_1(x) + k_2 \cdot F_2(x) + \dots + k_n \cdot F_n(x) \quad (4.144)$$

ტიპის ფუნქციით, ანუ  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $F_n(x)$ , ფუნქციის წრფივი კომბინაციით, ამასთან თვით ეს ფუნქციები შეიძლება იყოს წრფივიც, რაც მკვეთრად აფართოებს ასეთი აპროქსიმაციის შესაძლებლობებს და მას არაწრფივ ფუნქციებზეც განავრცობს.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.20

**ამოცანა.** ცნობილია, რომ 5 თვის განმავლობაში  $VX$  საქონლის ფასი იცვლებოდა შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

<b>VX</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>VY</b>	<b>15</b>	<b>12</b>	<b>9.4</b>	<b>16.2</b>	<b>26</b>	<b>?</b>	<b>?</b>	<b>?</b>

შევადგინოთ მომდევნო სამი თვისათვის ფასის პროგნოზი.

ამოხსნა. ზოგადი სახის წრფივი რეგრესიის რეალიზებისათვის გამოიყენება  $linfit(VX,VY,F)$  ფუნქცია. იგი აბრუნებს ზოგადი სახის წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტების ვექტორს, რომლის დროსაც  $(VX,VY)$  კოორდინატების საწყისი წერტილების “დრუბლის” მიახლოების საშუალო კვადრატული გადახრა იქნება მინიმალური.  $F$  ვექტორი უნდა შეიცავდეს  $F1(x),F2(x),\dots,Fn(x)$  ფუნქციებს, ჩაწერილს სიმბოლური სახით.

### პროგრამა Mathcad-ზე

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9.4 \\ 16.2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციათა მატრიცა

$$F(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x \\ \frac{2}{x} \\ e^x \end{pmatrix}$$

გაშლის კოეფიციენტების პოვნის პროგრამა

$$i := 0..4$$

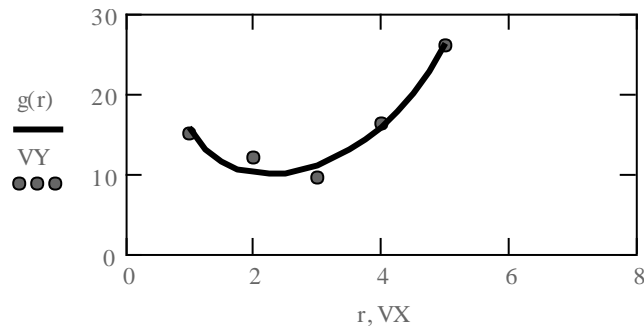
$$K := linfit(VX, VY, F)$$

$$K = \begin{pmatrix} 14.899 \\ 0.509 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$$g(t) := F(t) \cdot K$$

$$r := 1, 1.25..5$$



### ფუნქციონალური დამოკიდებულების პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$g(6) = 48.98$$

$$g(7) = 103.651$$

$$g(8) = 242.607$$

### სავარჯიშო.

განზოგადებული წრფივი რეგრესიის მეთოდით ააგეთ ფასის დინამიკის კანონთან მიახლოება: ა) ნავთობისათვის; ბ) გაზისათვის და გ) ელექტროენერჯისათვის. გამოთვალეთ ფასთა პროგნოზირებული მნიშვნელობები უახლოესი სამი თვისათვის.

### 4.21. არაწრფივი რეგრესია აქციის კურსის პროგნოზისათვის

როცა წრფივი რეგრესია და განზოგადებული წრფივი რეგრესია ჩვენი პროგნოზისათვის უხეშ შედეგებს იძლევა, უმჯობესია მივმართოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის მეთოდებს.

ზოგადი სახის არაწრფივ რეგრესიაში იგულისხმება ნებისმიერი  $F(x, k_1, k_2, \dots, k_n)$  ფუნქციის  $K$  პარამეტრების ვექტორის

პოვნა, რომლის დროსაც უზრუნველყოფილია საწყისი წერტილების “ღრუბლის” ოპტიმალური მიახლოება.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.21

**ამოცანა.** რუსეთის გაზპრომის აქციების კურსი ნახევარი წლის მანძილზე იცვლებოდა ცხრილით მოცემული წესის მიხედვით:

VX	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VY	1.9	1.6	1.34	1.22	1.35	1.05	?	?	?

შეგადგინოთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

**ამოხსნა.** ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის ჩასატარებლად გამოიყენება ფუნქცია

$$genfit(VX, VY, VS, F). \quad (4.145)$$

იგი აბრუნებს  $F$  ფუნქციის  $K$ -პარამეტრების ვექტორს, რომელიც თავის მხრივ გვაძლევს საწყისი მონაცემების  $F(x, k_1, k_2, \dots, k_n)$  ფუნქციით დაახლოების მინიმალურ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას.

$F$  ვექტორი უნდა შეიცავდეს სიმბოლურ ელემენტებს, რომლებიც, თავის მხრივ უნდა შეიცავდეს ანალიზურ გამოსახულებას საწყისი ფუნქციისა და მისი წარმოებულებისათვის ყოველი პარამეტრის მიხედვით, ანუ

$$F(x, k) = \begin{pmatrix} F \\ \frac{d}{dk_1} F \\ \dots \\ \frac{d}{dk_n} F \end{pmatrix}. \quad (4.146)$$

$VS$  ვექტორი უნდა შეიცავდეს საწყის მიახლოებებს  $K$  ვექტორისათვის, რაც აუცილებელია რეგრესიის არაწრფივ განტოლებათა სისტემის იტერაციული მეთოდით ამოსახსნელად.

განვიხილოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის მაგალითი შემდეგი ფუნქციის საშუალებით:

$$F(x, a, b) = a \cdot \exp(-b \cdot x) + a \cdot b. \quad (4.147)$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები ყველა პარამეტრის მიხედვით, ანუ

$$\frac{d}{da} F(x, a, b) \rightarrow \exp(-bx) + b, \quad (4.148)$$

$$\frac{d}{db} F(x, a, b) \rightarrow -a \cdot x \cdot \exp(-b \cdot x) + a. \quad (4.149)$$

მატრიცული  $F(x, k)$  ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$F(x, k) = \begin{pmatrix} k_1 \cdot \exp(-k_2 \cdot x) + k_1 \cdot k_2 \\ \exp(-k_2 \cdot x) + k_2 \\ -k_1 \cdot x \cdot \exp(-k_2 \cdot x) + k_1 \end{pmatrix}. \quad (4.150)$$

განვიხილოთ პროგნოზის კონკრეტული ამოცანა.

გაზპრომის აქციების კურსის ცვლილების კანონის აპროქსიმაციისათვის ვისარგებლოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიით. მიახლოების ფუნქციის საყრდენ კლასად ავირჩიოთ (4.147) ექსპონენციალურ ფუნქციათა სიმრავლე:

$$F(x, k1, k2) = k1 \cdot \exp(-k2 \cdot x) + k1 \cdot k2, \quad (4.151)$$

მაშინ

$$\frac{d}{dk1} F(x, k1, k2) = \exp(-k2 \cdot x) + k2, \quad (4.152)$$

$$\frac{d}{dk2} F(x, k1, k2) = -k1 \cdot x \cdot \exp(-k2 \cdot x) + k1. \quad (4.153)$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

ORIGIN:= 1

საწყისი მონაცემები

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.607 \\ 1.34 \\ 1.22 \\ 1.35 \\ 1.05 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციისა და მისი  $k$  კოეფიციენტებით კერძო წარმომავლების მატრიცა

$$F(x, k) := \begin{pmatrix} k_1 \cdot e^{-k_2 x} + k_1 \cdot k_2 \\ e^{-k_2 x} + k_2 \\ -k_1 \cdot x \cdot e^{-k_2 x} + k_1 \end{pmatrix}$$

უცნობი  $k$  კოეფიციენტების საწყისი მიახლოებები

$$VS := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამოხსნის ოპერატორი

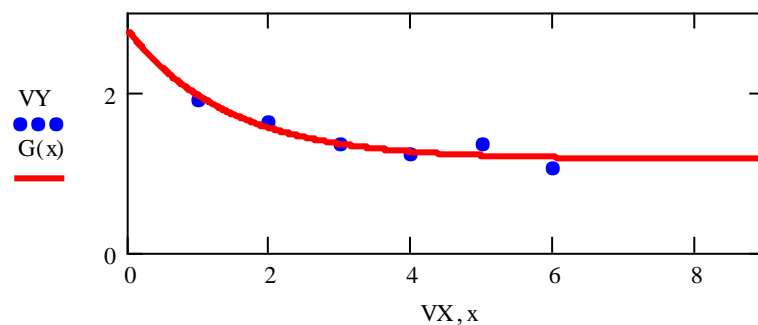
$$P := \text{genfit}(VX, VY, VS, F)$$

გაშლის საძიებელი კოეფიციენტების მნიშვნელობები

$$P = \begin{pmatrix} 1.62 \\ 0.712 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$$G(x) := F(x, P)_1$$



ნაპოვნი პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$\alpha(7) = 1.164$$

$$\alpha(8) = 1.158$$

$$\alpha(9) = 1.156$$

**სავარჯიშო.**

1. PAO ჰC PΦ-ის აქციების კურსი ნახევარი წლის განმავლობაში იცვლებოდა ცხრილით მოცემული წესის მიხედვით:

VX	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VY	2	1.9	1.7	1.8	1.3	1.2 5	?	?	?

შეადგინეთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

2. შეისწავლეთ (ინტერნეტის საშუალებით) მსოფლიოს წამყვანი კორპორაციების აქციების კურსის დინამიკა და შეადგინეთ კურსის პროგნოზი უახლოესი სამი თვისათვის.

#### 4.22. პოლინომური რეგრესია

არაწრფივი რეგრესიის ერთ-ერთი სახეა პოლინომური რეგრესია, რომლის დროსაც აპროქსიმაციის ფუნქციად ირჩევენ მრავალწევრთა სიმრავლეს.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

#### ლაბორატორიული სამუშაო 4.22

**ამოცანა.** მოცემულია სურგუთნავთობის აქციების კურსის დინამიკა:



X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	0.8	3.5	8	15	19	26	?	?	?

ავაგოთ პოლინომი, რომელიც საუკეთესო მიახლოებას მოგვცემს ამ მონაცემებთან; შევადგინოთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

**ამოხსნა.** Mathcad-ში არსებობს ფუნქცია პოლინომური რეგრესიის უზრუნველსაყოფად, რეგრესიის მრავალწევრის ნებისმიერი ხარისხის დროს:

$$VS:=\text{regress}(VX, VY, h), \quad (4.154)$$

რომელიც გვაძლევს შემდეგი ფუნქციით მოთხოვნილ VS ვექტორს:

$$f(x):=\text{interp}(VS, VX, VY, x) \quad (4.155)$$

და შეიცავს ისეთი  $n$ -ური ხარისხის მრავალწევრის კოეფიციენტებს, რომლებიც საუკეთესოდ აახლოვებს  $VX$  და  $VY$  ვექტორებით მოცემულ კოორდინატთა წერტილების ღრუბელს (ერთობლიობას), ხოლო (4.155) ოპერატორი იძლევა  $x$  წერტილში სპლაინის მნიშვნელობას საწყისი  $VX$  და  $VY$ -ით, და სპლაინის  $VS$  კოეფიციენტებით. შევადგინოთ data მონაცემთა მატრიცა

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}. \quad (4.156)$$

ვთქვათ, პოლინომის ხარისხი

$$k:=3. \quad (4.157)$$

შევადგინოთ საწყისი მონაცემების  $VX$  და  $VY$  ვექტორები:

$$VX:=\text{data}^{<0>} \quad VY:=\text{data}^{<1>}. \quad (4.158)$$

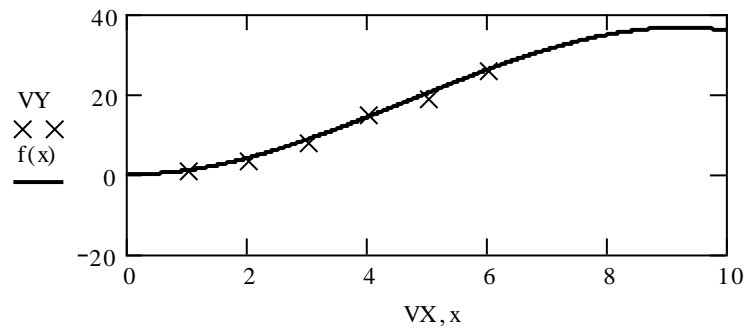
გამოვითვლოთ მესამე ხარისხის “საუკეთესო” მრავალწევრის კოეფიციენტებს ( $k=3$ ):

$$VS:=\text{regress}(VX, VY, k). \quad (4.159)$$

აგაგოთ საუკეთესო პოლინომური მიახლოებები:

$$f(x):=\text{interp}(VS, VX, VY, x) \quad (4.160)$$

და შედეგების გრაფიკული ინტერპრეტაცია:



პოლინომური რეგრესიის ინტერპრეტაცია

უკვე შესაძლებელია გამოვთვალოთ პროგნოზირებული მნიშვნელობები:

$$f(7)=? \quad f(8)=? \quad f(9)=?$$

**პროგრამა Mathcad-ზე**

ამოცანის მონაცემები

$$\text{data} := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$$

მიახლოების პოლინომის ხარისხი

$$k := 3$$

მონაცემთა ვექტორების ფორმირება მატრიცის მონაცემებიდან

$$VX := \text{data} \langle 0 \rangle$$

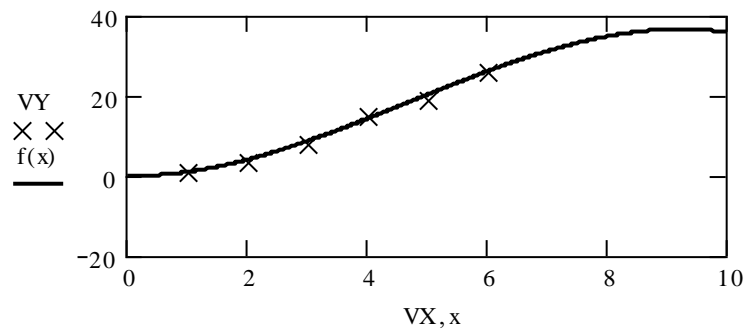
$$VY := \text{data} \langle 1 \rangle$$

ამოცანის ამოხსნის ოპერატორი

$$VS := \text{regress}(VX, VY, k)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.2 \\ -0.391 \\ 1.369 \\ -0.097 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \text{interp}(VS, VX, VY, x)$$



მონაცემთა პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$f(7) = 30.8$$

$$f(8) = 34.514$$

$$f(9) = 36.3$$

გაშლის კოეფიციენტების პოვნა

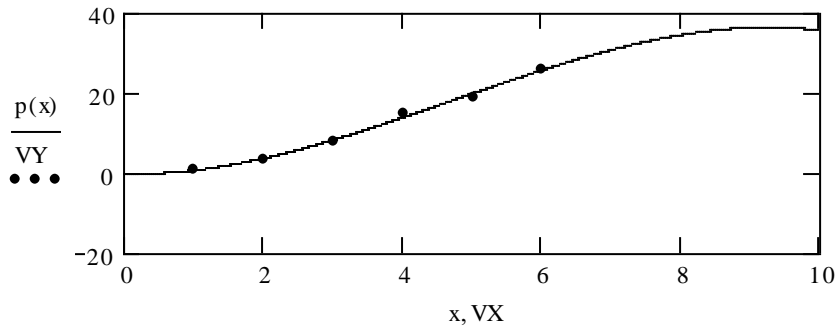
$$\text{coeffs} := \text{submatrix}(VS, 3, \text{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

$$\text{coeffs}^T = (-0.2 \quad -0.391 \quad 1.369 \quad -0.097)$$

$$a := \text{coeffs}$$

## აპროქსიმაციის პოლინომი

$$p(x) := \sum_{i=0}^3 a_{3-i} \cdot x^{3-i}$$



### სავარჯიშო.

პოლინომური რეგრესიის მეთოდით შეისწავლეთ 2011 წლის პირველ ნახევარში ენერგომატარებლებზე ფასის დინამიკა ქალაქ თბილისში და შეადგინეთ პროგნოზი წლის მეორე ნახევრისათვის. შედეგები შეადარეთ რეალურს, ახსენით განსხვავებები.

### 4.23. წრფივი დაპროგრამება

ბევრ პრაქტიკულ დარგში წამოიჭრება ამონახსნის ოპტიმიზაციის თავისებური ამოცანები, რომელთათვისაც დამახასიათებელია შემდეგი თვისებები:

ა) ეფექტურობის მაჩვენებელი  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  წარმოადგენს ამონახსნის  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ელემენტების წრფივ ფუნქციას;

ბ) შესაძლო ამონახსნებზე გავრცელებული შეზღუდვის პირობებს აქვს წრფივი განტოლების ან უტოლობის სახე.

ასეთ ამოცანებს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანა.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.23

**ამოცანა.** მეცხოველეობის ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შეიძლება შედგეს სამი პროდუქტისაგან – თივა, სილოსი, კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

პროდუქტები	საკვები ნივთიერებები		
	ცილა (გ/კგ)	კალციუმი (გ/კგ)	ვიტამინები
თივა	$\alpha_{11} = 50$	$\alpha_{21} = 10$	$\alpha_{31} = 2$
სილოსი	$\alpha_{12} = 70$	$\alpha_{22} = 6$	$\alpha_{32} = 3$
კონცენტრატები	$\alpha_{13} = 180$	$\alpha_{23} = 3$	$\alpha_{33} = 1$

ცილისა და კალციუმის მოხმარების დღე-ღამური ნორმები ერთ სულ ძროხაზე გადაანგარიშებით, შეადგენს არანაკლებ 2000 გ და 210 გ შესაბამისად. ვიტამინების მოხმარება მკაცრად დოზირებულია და უნდა შეადგენდეს 87 მგ-ს დღე-ღამეში.

შევადგინოთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ ერთი კგ თივის ღირებულება 150 ლარია, სილოსის – 200 ლარი და კონცენტრატისა – 600 ლარი.

**ამოხსნა.** ჩამოვყალიბოთ ამოცანა, ანუ შევადგინოთ შესატყვისი მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, ოპტიმალური რაოდენობაა: თივის –  $X_1$  კგ, სილოსის –  $X_2$  კგ, კონცენტრატის –  $X_3$  კგ. მაშინ მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება დღე-ღამეში) იქნება:

$$L(X_1, X_2, X_3) = 150 \cdot X_1 + 200 \cdot X_2 + 600 \cdot X_3. \quad (4.161)$$

ამოცანის პირობებში საჭიროა ამ ფუნქციის მინიმიზაცია.

ჩამოვყალიბოთ შეზღუდვათა რაოდენობა: დღე-ღამეში ცილის  $\geq 2000$ გ, კალციუმის  $\geq 210$ გ, ხოლო ვიტამინები ზუსტად  $=87$ მგ.

$$\begin{cases} 50 \cdot X_1 + 70 \cdot X_2 + 180 \cdot X_3 \geq 2000 \\ 10 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \geq 210 \\ 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 87 \\ X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0 \end{cases} \quad (4.162)$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

მიზნის ფუნქცია

$$f(x_1, x_2, x_3) := 150 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 600 \cdot x_3,$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

$$x_3 := 1,$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი Mathcad-ში.

Given

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_3 \geq 1$$

$$50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 180 \cdot x_3 \geq 2000$$

$$10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 210$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 87$$

$$R := \text{minimize}(f, x_1, x_2, x_3)$$

მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 24.778 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$$f(R_0, R_1, R_2) = 6430.556$$

### სავარჯიშო.

ვთქვათ, მცირე საწარმოს საამქრომ უნდა დაამზადოს სამი ტიპის 100 ნაკეთობა. თითოეული ნაკეთობა უნდა დამზადდეს არანაკლებ 20 ცალისა. ნაკეთობაზე იხარჯება შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ ლითონი, როცა მისი საერთო მარაგი 340 კგ-ა, აგრეთვე 4.75, 11 და 2 კგ პლასტმასა 700 კგ საერთო მოცულობით. თითოეული ტიპის  $X_1$ ,  $X_2$  და  $X_3$  რამდენი ნაკეთობა უნდა დამზადდეს, რომ მივიღოთ გამოშვების მაქსიმალური მოცულობა ფულადი გამოსახულებით, თუ ნაკეთობის ფასი კალკულაციის მიხედვით შეადგენს 4, 3 და 2 ლარს?

#### 4.24. საარსებო მინიმუმის დადგენა მოცემულ ქალაქში, მოცემულ რაიონში

წრფივი დაპროგრამების ამოცანებს განეკუთვნება: ამოცანა საარსებო მინიმუმზე, წარმოებაზე, აგრეთვე სატრანსპორტო ამოცანა გადაზიდვებზე, მინდვრის სავარგულების ოპტიმალურ განაწილებაზე და ა.შ.

**ამოცანა.** განვიხილოთ საარსებო მინიმუმის დადგენა. ვთქვათ, გვაქვს კვების  $n$  პროდუქტი (პური, ხორცი, რძე, კარტოფილი, მარილი, შაქრის ფხვნილი და ა.შ.), რომლებიც შეიცავს სასიცოცხლოდ აუცილებელ ნივთიერებებს (ცხიმებს, ცილებს, ნახშირწყლებს და ვიტამინებს).

ცნობილია შემდეგი პარამეტრები:

$a_{ij}$  არის  $j$ -ური პროდუქტის ერთეულში  $i$ -ური ნივთიერების შემცველობა ( $a_{ij} \geq 0$ );

$b_i$  –  $i$ -ური ნივთიერების მინიმალური რაოდენობა, რომელიც უნდა მოიხმაროს ინდივიდმა დროის მოცემულ შუალედში (დღე-ღამეში, დღეში, თვეში და ა.შ.);

$c_j$  არის  $j$ -ური პროდუქტის ერთეულის საბაზრო ფასი ( $c_j > 0$ ).

კვების ყველა რაციონს  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  შორის, რომლებიც აკმაყოფილებს ინდივიდის მინიმალურ მოთხოვნილებას სასარგებლო ნივთიერებებზე, უნდა ამოვირჩიოთ შედარებით იაფი.  $X_j$  წარმოადგენს ინდივიდის მიერ დროის მოცემულ შუალედში მოხმარებულ  $j$ -ური პროდუქტის რაოდენობას. გარდა ამისა უნდა გავითვალისწინოთ, რომ დროის მოცემულ შუალედში ინდივიდმა უნდა მიიღოს კალორიების მოცემული  $q$  რაოდენობა;

$t_1$  –  $i$ -ური პროდუქტის ერთეულში კალორიების შემცველობა.

**ამოხსნა.** ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა საარსებო მინიმუმის დადგენაზე.

მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება  $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ )

$$L(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j \rightarrow \min. \quad (4.163)$$

შევადგინოთ შეზღუდვები დროის მოცემულ შუალედში ცხიმების, ცილების, ნახშირწყლების და ვიტამინების აუცილებელ რაოდენობებზე:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j \geq b_i, \quad (4.164)$$

სადაც  $i = \overline{1, m}$  და  $m$  აუცილებელი ნივთიერებების რიცხვია.

გარდა (4.164) შეზღუდვისა გვაქვს განტოლების სახით მოცემული შეზღუდვა კალორიების აუცილებელ მოცულობაზე:



$$\sum_{i=1}^n t_i \cdot X_i = q. \quad (4.165)$$

(4.163), (4.164) და (4.165) ამოცანა, წრფივი დაპროგრამების ამოცანებია.

ვიპოვოთ  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ოპტიმალური მნიშვნელობები, როდესაც მიზნის ფუნქცია (4.163) მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ამასთან, ეს მნიშვნელობები უნდა აკმაყოფილებდეს (3.164) და (3.165) შეზღუდვებს.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.24

**ამოცანა.** დავადგინოთ საარსებო მინიმუმი რაიონში, სადაც კვების ძირითად პროდუქტებს შეადგენს: პური, კარტოფილი, ხორცი. საბაზრო ფასი პურზე – 0.5 ლ, კარტოფილზე – 0.6 ლ, ხორცზე – 10 ლარი.

**ამოხსნა.**

მიზნის ფუნქცია იქნება:

$$L(X_1, X_2, X_3) = 0.5 \cdot X_1 + 0.6 \cdot X_2 + 10 \cdot X_3 \rightarrow \min.$$

$b_i$  – ცხიმების, ცილებისა და ვიტამინების აუცილებელი რაოდენობის მნიშვნელობა, აგრეთვე ამ ნივთიერებების შემცველობა  $a_{ij}$  პროდუქტებში, კალორიების აუცილებელი  $q$  რაოდენობა. მოცემულ პროდუქტებში  $t_i$  კალორიების შემცველობა განთავსებულია ინტერნეტში.

მაგალითისათვის (აქ აღებულია ნებისმიერი რიცხვები), თუ

$$b = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}; \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}; \quad q = 15000; \quad t = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix},$$

მაშინ მივიღებთ შემდეგ შეზღუდვებს:

$$0.1 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 + 0.1 \cdot X3 \geq 100;$$

$$0.3 \cdot X1 + 0.4 \cdot X2 + 0.2 \cdot X3 \geq 80;$$

$$0.2 \cdot X1 + 0.1 \cdot X2 + 0.5 \cdot X3 \geq 90;$$

$$20 \cdot X1 + 15 \cdot X2 + 30 \cdot X3 = 15000.$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

ამოცანის მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2, x3) := 0.5 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 + 10 \cdot x3 *$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

$$x3 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამონახსნის პოვნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

$$x3 \geq 0$$

$$0.1 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 + 0.1 \cdot x3 \geq 100$$

$$0.3 \cdot x1 + 0.4 \cdot x2 + 0.2 \cdot x3 \geq 80$$

$$20 \cdot x1 + 15 \cdot x2 + 30 \cdot x3 = 15000$$

$$0.2 \cdot x1 + 0.1 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 \geq 90$$

$$R := \text{Minimize}(f, x1, x2, x3)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 600 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f(R_0, R_1, R_2) = 420$$

**ქალაქ თბილისის ისნის რაიონში საარსებო მინიმუმის დადგენა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის საფუძველზე**

საარსებო მინიმუმის გამოსათვლელად საჭიროა გამოვიკვლიოთ კვების ის პროდუქტები, რომლებზეც საკვლევ რაიონში ყველაზე დიდი მოთხოვნაა.

ისნის რაიონში ყველაზე დიდი მოთხოვნა შემდეგ პროდუქტებზეა:

- პური
- ცხვრის ხორცი
- ხაჭო
- კარტოფილი
- ლობიო
- საქონლის ხორცი
- ბრინჯი.

ცნობილია, რომ სიცოცხლის შესანარჩუნებლად ადამიანმა უნდა მიიღოს: ცილები, ცხიმები და ნახშირწყლები, რომლებსაც შეიცავს მის მიერ მოხმარებული კვების პროდუქტები (მონაცემები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში)

	<i>ნახშირწყლები</i>	<i>ცილები</i>	<i>ცხიმები</i>
პური	$a_{11}=5.0$	$a_{21}=7.9$	$a_{31}=0.8$
ცხვრის ხორცი	$a_{12}=16$	$a_{22}=2.0$	$a_{32}=0$
ხაჭო	$a_{13}=2.8$	$a_{23}=13.2$	$a_{33}=20.0$
კარტოფილი	$a_{14}=16$	$a_{24}=2.0$	$a_{34}=0$
ლობიო	$a_{15}=46$	$a_{25}=21$	$a_{35}=0$

საქონლის ხორცი	$a_{16}=0$	$a_{26}=18.9$	$a_{36}=12.4$
ბრინჯი	$a_{17}=1.0$	$a_{27}=71$	$a_{37}=0$
დღე-ღამური ნორმა	$b_1 \leq 500$	$b_2 \leq 90$	$b_3 \leq 100$

### პროგრამა Mathcad-ზე

$$L(X) := 0.40 X_1 + 1.10 X_2 + 2.5 X_3 + 0.50 X_4 + 2 \cdot X_5 + 4 \cdot X_6 + 1 \cdot X_7$$

$$X_1 := 1$$

$$X_2 := 1$$

$$X_3 := 1$$

$$X_4 := 1$$

$$X_5 := 1$$

$$X_6 := 1$$

$$X_7 := 1$$

**Given**

$$X_1 \geq 0.500$$

$$X_2 \geq 0.500$$

$$X_3 \geq 0.500$$

$$X_4 \geq 0.500$$

$$X_5 \geq 0.500$$

$$X_6 \geq 0.500$$

$$X_7 \geq 0.500$$

$$3950 X_1 + 500 X_2 + 13200 X_3 + 2000 X_4 + 21000 X_5 + 18900 X_6 + 1000 X_7 \geq 90$$

$$400 X_1 + 83500 X_2 + 20000 X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 12400 X_6 + 0 \cdot X_7 \geq 100$$

$$250000 X_1 + 1300 X_2 + 2800 X_3 + 16000 X_4 + 46000 X_5 + 0 \cdot X_6 + 71000 X_7 \geq 500$$

$$255 X_1 + 781 X_2 + 94 X_3 + 94 X_4 + 55 X_5 + 187 X_6 + 351 X_7 = 1200$$

$$R := \text{Minimize}(L, X)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.873 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$L(R) = 6.161$$

საარსებო მინიმუმი ქალაქ თბილისის ისნის რაიონისათვის შეადგენს 6.161 ლარს დღეში და 184.83 ლარს თვეში.

### სავარჯიშო.

დაადგინეთ საარსებო მინიმუმი თქვენს რაიონში, სადაც კვების ძირითადი პროდუქტებია: პური, კარტოფილი, ხორცი და ა. შ.

**შენიშვნა.** გამოიყენეთ საბაზრო ფასები მოცემულ პროდუქტებზე. აუცილებელი ყველა ინფორმაცია მოიპოვეთ ინტერნეტში და შეადგინეთ კვების ოპტიმალური რაციონი.

#### 4.25. რესურსების ოპტიმალური განაწილება

ვთქვათ, მოცემულია გარკვეული რესურსები (ნედლეული, სამუშაო ძალა, დანადგარები):

$$R_1, R_2, \dots, R_m, \quad (4.166)$$

შესაბამისი რაოდენობებით

$$b_1, b_2, \dots, b_m, \quad (4.167)$$

ამ რესურსების გამოყენებით შეიძლება გაწარმოთ საქონელი:

$$T_1, T_2, \dots, T_n. \quad (4.168)$$

$T_j$  საქონლის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა  $R_i$  რესურსის  $a_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) ერთეული.  $R_i$  რესურსის თითოეული ერთეული ღირს  $d_i$  ლარი;  $T_j$  საქონლის თითოეული ერთეულის რეალიზაცია შესაძლოა  $C_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) ლარად.

საქონლის თითოეული სახეობის წარმოებული ერთეულების რაოდენობა შემოფარგლულია მოთხოვნით. ცნობილია, რომ ბაზარი ვერ შთანთქმავს  $T_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) საქონლის  $K_j$  ერთეულზე მეტ რაოდენობას.

**ისმის კითხვა:** რომელი საქონელი და რა რაოდენობით უნდა იქნეს წარმოებული იმისათვის, რომ მოხდეს მაქსიმალური მოგების რეალიზება?

**ამოხსნა.** ამოცანის პირობები ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური მოდელის სახით.

მოთხოვნის პირობები აწესებს შეზღუდვებს:

$$X_i \leq K_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.169)$$

გარდა ამისა, რესურსები მოიხმარება არა უმეტეს იმ რაოდენობისა, ვიდრე გვაქვს საწყობში; ამიტომ დებულობენ შეზღუდვებს:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.170)$$

შევადგინოთ მოგების მიზნის ფუნქცია.  $T_j$  სახის საქონლის ერთეული რაოდენობის  $s_j$  თვითღირებულება უდრის

$$s_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4.171)$$

$T_j$  საქონლის ერთი ერთეულის რეალიზებით მიღებული სუფთა  $q_j$  მოგება ტოლია მის გასაყიდ  $c_j$  ფასსა და  $s_j$  თვითღირებულებას შორის სხვაობისა:

$$q_j = c_j - s_j. \quad (4.172)$$

ყველა საქონლის რეალიზაციით მიღებული საერთო სუფთა მოგება იქნება:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n q_j x_j = \sum_{j=1}^n (c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i) \cdot x_j \rightarrow \max.$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 4.25

**ამოცანა.** სართავი ფაბრიკა ნართის ორი სახეობის საწარმოებლად იყენებს სამი ტიპის ნედლეულს – სუფთა შალს, კაპრონს და აკრილს.

ცხრილში ნაჩვენებია ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, მისი საერთო რაოდენობა, რომელიც ფაბრიკამ წლის განმავლობაში უნდა გამოიყენოს და თითოეული სახის ნართის ერთი ტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

ნედლეულის ტიპი	1 ტ ნართზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები		ნედლეულის რაოდენობა (ტ)
	სახეობა 1	სახეობა 2	
შალი	$\alpha_{11} = 0.5$	$\alpha_{12} = 0.2$	$b_1 = 600$
კაპრონი	$a_{21} = 0.1$	$a_{22} = 0.6$	$b_2 = 620$
აკრილი	$a_{31} = 0.4$	$a_{32} = 0.2$	$b_3 = 500$
1 ტ ნართის რეალიზაციით მიღებული მოგება	$q_1 = 1100$	$q_2 = 900$	

შევადგინოთ მოგების მაქსიმიზაციისათვის ნართის წარმოების წლიური გეგმა.

**ამოხსნა.** ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა მათემატიკურ ენაზე. ვთქვათ,  $x_1$  პირველი სახის ნართის რაოდენობაა და  $x_2$  – მეორე სახის ნართის რაოდენობა.

მაშინ შეზღუდვებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X_1 + 0.2 \cdot X_2 \leq 600 \\ 0.1 \cdot X_1 + 0.6 \cdot X_2 \leq 620 \\ 0.4 \cdot X_1 + 0.2 \cdot X_2 \leq 500 \end{cases}$$

ხოლო მიზნის ფუნქციას (სუფთა მოგებას) - შემდეგი სახე:

$$L(X_1, X_2) = 1100 \cdot X_1 + 900 \cdot X_2 \rightarrow \max.$$

### პროგრამა Mathcad-ზე

ამოცანის მიზნის ფუნქცია



$$f(x_1, x_2) := 1100 \cdot x_1 + 900 \cdot x_2$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი

Given

$$x_1 \geq C$$

$$x_2 \geq C$$

$$0.5 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 \leq 600$$

$$0.1 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 \leq 620$$

$$0.4 \cdot x_1 + 0.24 \cdot x_2 \leq 500$$

$$R := \text{Maximize } f, x_1, x_2$$

მაქსიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f(R_0, R_1) = 1690000$$

**სავარჯიშო.**

სამი სახეობის  $A$ ,  $B$  და  $C$  ნაკეთობის საწარმოებლად გამოიყენება  $T1$ ,  $T2$ ,  $T3$  ტიპის ნედლეული. ამასთან,  $T1$  და  $T3$  ნედლეულის შესყიდვები შეზღუდულია მომწოდებლების შესაძლებლობებით. ცხრილში მოცემულია ნედლეულის ხარჯვის, ნედლეულსა და ნაკეთობაზე ფასების ნორმები და ნედლეულის შესყიდვის შეზღუდვები.

ნედლეულის ტიპი	1კბ ნედლეულის ფასი (ლარი)	ერთ ნაკეთობაზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები (კგ)			ნედლეულის შეძენის შეზღუდვები (კგ)
		A	B	C	
$T_1$	$d_1=2$	$a_{11}=1$	$a_{12}=3$	$a_{13}=a$	$b_1=3000$
$T_2$	$d_2=1$	$a_{21}=4$	$a_{22}=1$	$a_{23}=3$	-
$T_3$	$d_3=b$	$a_{31}=6$	$a_{32}=5$	$a_{33}=2$	$b_3=3320$
ერთი ნაკეთობის ფასი (ლარი)		$c_1=6b+12$	$c_2=5b+22$	$c_3=c$	

განსაზღვრეთ მოგების მაქსიმიზაციის მიზნით პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური გეგმა. შეადგინეთ ზოგადი სახის მათემატიკური მოდელი.

განიხილეთ (a,b,c) პარამეტრების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევები:

a	b	c
2	1	17
2	2	19
2	3	21

#### 4.26. გადაზიდვების სატრანსპორტო ამოცანა

ვთქვათ, რაღაც პროდუქტი (ქვანახშირი, აგური, ბენზინი,...) ინახება  $m$  საწყობში და გამოიყენება  $n$  პუნქტში (ქარხნებში, მშენებლობაზე, მაღაზიებში, ბენზინგასამართ სადგურებში და ა.შ.).

$a_i$  არის პროდუქტის მარაგი  $i$ -ურ საწყობში ( $a_i > 0$ );  $b_j$  – განაცხადები საქონელზე მოხმარების  $j$ -ურ პუნქტში;  $c_{ij}$  –  $i$ -ური

საწყობიდან მოხმარების  $j$ -ურ პუნქტში ერთეულოვანი რაოდენობის პროდუქტის გადაზიდვის ღირებულება,  $c_{ij} > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

ამასთან ითვლება, რომ ამოცანა დაბალანსებულია, ე.ი. ჯამური მარაგები ტოლია ჯამური მოთხოვნილებებისა

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (4.173)$$

უნდა ავირჩიოთ გადაზიდვების ისეთი სტრატეგია, რომ სრულად დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილებები, ამასთან გადაზიდვების ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური.

*ამოხსნა.* ვთქვათ,  $x_{ij}$  საქონლის რაოდენობაა, რომელიც გადაიზიდება  $i$ -ური პუნქტიდან მოხმარების  $j$ -ურ პუნქტში, მაშინ მიზნის ფუნქციას (გადაზიდვების ჯამური ხარჯები) აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (4.174)$$

გარდა ამისა, უნდა დავაკმაყოფილოთ ყველა განაცხადი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4.175)$$

რადგან დასახარჯია საწყობების მთელი მარაგი, გვქვნება:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.176)$$

ცხადია,

$$X_{ij} \geq 0. \quad (4.177)$$

ამრიგად, ვღებულობთ წრფივი დაპროგრამების (4.174)-(4.177) ამოცანას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

## ლაბორატორიული სამუშაო 4.26

**ამოცანა.** რეგიონში არის ცემენტის ორი ქარხანა და მათი პროდუქციის მომხმარებელი სამი ბინათმშენებლობის კომბინატი. ცხრილში მოცემულია ცემენტის წარმოების დღეღამური მოცულობები, კომბინატების დღე-ღამური მოთხოვნილებები და თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე ერთი ტონა ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება.

შეგადგინოთ ცემენტის გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა სატრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის მიზნით.

ქარხნები	ცემენტის წარმოება ტ/დღ	1 ტ ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება		
		კომბ.1	კომბ. 2	კომბ. 3
I ქარხანა	$a_1=40$	$c_{11}=10$	$c_{12}=15$	$c_{13}=25$
II ქარხანა	$a_2=60$	$c_{21}=20$	$c_{22}=30$	$c_{23}=30$
	ცემენტის მოხმარება ტ/დღ	$b_1=50$	$b_2=20$	$b_3=30$

**ამოხსნა.** ამოცანის ამოსახსნელად ვაღგენთ მათემატიკურ მოდელს.

ვთქვათ,  $X_{ij}$  ცემენტის რაოდენობაა ( $i=\overline{1,2}$ ) ორი ქარხნიდან გადაზიდული ( $j=\overline{1,3}$ ) სამ ბინათსამშენებლო კომბინატში. მაშინ, მიზნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(X) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min.$$

გვაქვს შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$\sum_{i=1}^2 X_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,3})$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,2})$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად ვაღებთ შემდეგ პროგრამას

### პროგრამა Mathcad-ზე

ინდექსაცია იწყება i=1-დან

ORIGIN:= 1

გადაზიდვის ფასები

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

ორ ქარხანაში ცემენტის მარაგი

$$A := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

სამი ბინათსამშენებლო კომბინატის მოთხოვნილება

$$B := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების მიზნის ფუნქცია

$$L(X) := \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$i := 1..2$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq 0$$

$$R := \text{Minimize}(L, X)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების ოპტიმიზებული ფასი

**სავარჯიშო.**

შეადგინეთ გადაზიდვების ანალოგიური ამოცანა თქვენი რაიონისათვის და იპოვეთ გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა. (თითოეულ სტუდენტს უნდა ჰქონდეს სხვადასხვა მონაცემები და ამოცანის განსხვავებული შინაარსი).

**4.27. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა**

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

იპოვეთ მინიმუმის (მაქსიმუმის) წერტილი და მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა არაწრფივი ფუნქციისათვის:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.178)$$

შეზღუდვების პირობებში, რომლებიც მოცემულია ტოლობების სახით

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (4.179)$$

ან უტოლობების სახით

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (4.180)$$

**ლაბორატორიული სამუშაო 4.27**

**ამოცანა.** ვიპოვოთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 - (x_1)^2 + x_2$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ამოხსნა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

მიზნის ფუნქცია

$$f(x_1, x_2) := 6 \cdot x_1 + x_2 - x_1^2$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x_1 \geq 0$$

$$4 \geq x_2 \geq 0$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24$$

$$R := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

მაქსიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი



$$f(\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_1) = 13$$

### სავარჯიშო

1. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$

$$10x_1 - x_2 \leq 8 \quad ;$$

$$-18x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

პასუხი:

$$x_{1\min} = \frac{123}{101}; \quad x_{2\min} = \frac{422}{101}; \quad f_{\min} = \frac{324}{101}.$$

$$x_{2\max} = 2; \quad x_{1\max} = 12; \quad f_{\max} = 65.$$

2. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

პასუხი.

$$x_{1\min} = 91; \quad x_{2\min} = 89; \quad f_{\min} = 17278.$$

3. იპოვეთ მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2,$$

თუ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

პასუხი.

$$x_{1\max} = x_{2\max} = 1, \quad f_{\max} = 3.$$

4. იპოვეთ  $f_{\max}$ , თუ

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

პასუხი.

$$x_{1\max} = 0.99528; \quad x_{2\max} = 0.96321; \quad f_{\max} = 2.99957.$$

5. იპოვეთ  $f_{\min}$ , თუ

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2 \\ \begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \geq 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

პასუხი.

$$x_{1\min} = 0.9989; \quad x_{2\min} = 2.999763; \quad f_{\min} = 0.$$

6. იპოვეთ  $f_{\min}$ , თუ

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2; \\ x_1 + x_2 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

პასუხი.

$$x_{1\min} = 2.5; \quad x_{2\min} = 2.5; \quad f_{\min} = 4.5.$$

7. იპოვეთ  $f_{\min}$ , თუ

$$f(x) = (x_1 - 1) \cdot (x_1 - 2) \cdot (x_1 - 3) + x_3$$

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \geq 0$$

$$5 - x_3 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

პასუხი.

$$x_{1\min} = 2.01; \quad x_{2\min} = 0.001; \quad x_{3\min} = 2.011; \quad f_{\min} = 2.0.$$

8. იპოვეთ  $f_{\max}$ , თუ

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

პასუხი.

$$x_{1\max} = 4.021; \quad x_2 = 4.021; \quad f_{\max} = -32.337.$$

#### 4.28. საინვესტიციო პროექტების შეფასების მეთოდები

თანამედროვე ეტაპზე საინვესტიციო პროექტების შეფასებისას, საბაზრო ეკონომიკის მქონე ქვეყნებში ფართოდ გამოიყენება დისკონტირების ტექნიკა, რომელიც ემყარება რთული პროცენტის ლოგიკას. ამ თავში განვიხილავთ ასეთი მეთოდების არსსა და უპირატესობებს.

##### 4.28. 1. პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის გამოთვლა

საინვესტიციო პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის ცნებების შესასწავლად განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

**განსაზღვრება.** მოსალოდნელი შემოსავლის მოცულობის ფარდობას საინვესტიციო კაპიტალის მოცულობასთან პროექტის რენტაბელურობის მაჩვენებელი ეწოდება.

მაგალითად, თუ ჩვენი პროექტის რეალიზაციისათვის საჭიროა \$20000 მოცულობის ინვესტიციები და მოსალოდნელი წლიური შემოსავალია \$30000, მაშინ რენტაბელურობის *ReX* მაჩვენებელი იქნება:

$$RX = \frac{30000}{20000} = 1.5. \quad (4.181)$$

**განსაზღვრება.** დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა ცხრილს შესაბამის ალბათობებთან ერთად.

$X$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$P$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

$p_i$  არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი  $X$  სიდიდის მნიშვნელობა იქნება  $x_i$ .

დისკრეტული შემთხვევითი  $X$  სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის შესაფასებლად შემოდის მათემატიკური ლოდინის ( $MX$ ) ცნება.

**განსაზღვრება.** დისკრეტული შემთხვევითი  $X$  სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ( $MX$ ) ეწოდება  $x_i$  მნიშვნელობათა შესაბამის  $p_i$  ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს, ანუ

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i. \quad (4.182)$$

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია  $DX$  ახასიათებს შემთხვევითი  $X$  სიდიდის მნიშვნელობათა გაბნევას მისი საშუალო მნიშვნელობიდან - მათემატიკური ლოდინიდან.

$$DX = \sum_{i=1}^n (x_i - MX)^2 \cdot p_i. \quad (4.183)$$

**განსაზღვრება.** კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება.

$$SX = \sqrt{DX}. \quad (4.184)$$

**P.S.** ფინანსურ ანალიზში საშუალო კვადრატულ გადახრას რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა ეწოდება.

**განსაზღვრება.** რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა ეწოდება რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობისა და მოსალოდნელი საშუალო შემოსავლის სიდიდის ფარდობას, გამოხატულს პროცენტობით.

$$vX = \frac{SX}{MX} \cdot 100\%. \quad (4.185)$$

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.28.1

**ამოცანა.** მოცემული პროექტის \$20000 მოცულობითი ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგება შეადგენს 30%-ს. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა  $p=0,05$ . შეისწავლეთ რენტაბელურობა და შეაფასეთ შემოთავაზებული პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები.

**ამოხსნა.** პროექტის \$20000 მოცულობითი ინვესტირებისას, წლის ბოლოს გვაქვს ორი შესაძლებლობა:

ა) წარმატება, მაშინ მივიღებთ:  $20000 + 20000 \cdot 0.3 = 20000 \cdot 1.3$ ; ბ) ჩავარდნა, მაშინ ვღებულობთ 0-ს (ე.ი. ჩადებული ფული იკარგება). სამუშაოს შესასრულებლად საჭიროა ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ცნება, როგორცაა: შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და ვარიაციის კოეფიციენტი.

მოსალოდნელი წლიური შემოსავლის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$X$	$20000 \cdot 1.3$	$0$
$P$	$0.95$	$0.05$

ამოვხსნათ მოცემული ამოცანა Mathcad-პროგრამული პაკეტის საშუალებით.

### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$X := \begin{pmatrix} 20000 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 - 0.95 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი

(მათემატიკური ლოდინი),

$$MX := \sum_{i=0}^1 X_i \cdot P_i$$

$$MX = 24700$$

რენტაბელურობის მაჩვენებელი

$$RX := MX / 20000$$

$$RX = 1.235$$

დისპერსია:

$$DX := \sum_{i=0}^1 (X_i - MX)^2 \cdot P_i$$

$$DX = 32110000$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა (საშუალო კვადრატული გადახრა)

$$S := \sqrt{DX}$$

$$S = 5666.569$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა (ვარიაციის კოეფიციენტი)

$$v := \frac{S}{MX} \cdot 100$$

### სავარჯიშო.

მოცემული პროექტის  $I$  მოცულობით ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგებაა  $m\%$ . პროექტის ჩავარდნის ალბათობა  $p=PA$ . შეისწავლეთ რენტაბელურობა და შეაფასეთ წარმოდგენილი პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები, თუ:

1.  $I=\$30000$ ,  $m=25\%$ ,  $PA=0.01$

2.  $I=\$50000$ ,  $m=20\%$ ,  $PA=0.02$

3.  $I=\$60000$ ,  $m=30\%$ ,  $PA=0.03$

4.  $I=\$70000$ ,  $m=15\%$ ,  $PA=0.011$

5.  $I=\$80000$ ,  $m=35\%$ ,  $PA=0.1$

### 4.28.2. ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია

**განსაზღვრება.** ორ საინვესტიციო პროექტს ეწოდება ალტერნატიული, თუ ერთი მათგანის ინვესტირება გამორიცხავს მეორე პროექტის ინვესტირებას.

ორი პროექტის ალტერნატიულობის შემთხვევაში, გამოითვლიან ორივე პროექტისათვის რენტაბელურობის მაჩვენებლებსა და რისკის კოეფიციენტებს.

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები:

ა) თუ ორივე პროექტს რენტაბელურობის ერთი და იგივე მაჩვენებელი აქვს, მაშინ ირჩევენ იმ პროექტს, რომლის რისკის ფარდობითი მაჩვენებელიც ნაკლებია;

ბ) თუ ორივე პროექტის რისკის ფარდობითი კოეფიციენტის მაჩვენებელი ერთნაირია, ამოირჩევენ იმ პროექტს, რომელსაც რენტაბელურობის მაღალი მაჩვენებელი აქვს;

გ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელურობის მაჩვენებელი მეტია და რისკის კოეფიციენტი ნაკლები, ვიდრე მეორე პროექტისა, მაშინ უპირატესობა ენიჭება პირველ პროექტს;

დ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელურობის მაჩვენებელიც და რისკის კოეფიციენტი მეტია მეორე პროექტისაზე, მაშინ არჩევანს აკეთებს მენეჯერი ინვესტორისათვის დამატებითი მონაცემებიდან, კერძოდ, რისკის დასაშვებ სიდიდეებსა და რენტაბელურობის ფარდობითი კოეფიციენტის ღირებულებაზე დაყრდნობით.

რამდენადაც ეს ამოცანა ემყარება მეორე ლაბორატორიულ სამუშაოში მოცემულ ცნებებს, შეგვიძლია პირდაპირ გადავიდეთ კონკრეტულ ამოცანაზე.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.28.2

**ამოცანა.** ინვესტორს წარმოუდგინეს ორი ალტერნატიული საინვესტიციო  $A$  და  $B$  პროექტი.  $A$  პროექტი მოითხოვს \$100 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 25%-იანი წლიური მოგებით და მისი ჩავარდნის ალბათობაა  $PA=0,011$ .  $B$  პროექტი მოითხოვს \$250 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 30%-იანი წლიური მოგებით, ჩავარდნის ალბათობაა  $PB=0,012$ .

გავაკეთოთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის.

**ამოხსნა.** ორივე პროექტისათვის შევადგინოთ მოსალოდნელი შემოსავლებისა და შესაბამისი ალბათობების მატრიცები, ისევე როგორც 4.1 ლაბორატორიული სამუშაოს ამოცანის დროს.

შევადგინოთ განაწილების ფუნქციები:

$A$	$100 \cdot 1.25$	$0$
$PA$	$0.989$	$0.011$

$B$	$250 \cdot 1.3$	$0$
$PB$	$0.988$	$0.012$



თითოეული პროექტისათვის ვიანგარიშით რენტაბელურობის მაჩვენებლები და რისკის კოეფიციენტები, რაც შემდგომში მოგვცემს პროექტების შედარების საშუალებას. განაწილების ფუნქციიდან გამომდინარე, შევადგინოთ პროგრამები **Mathcad**-ზე.

### პროგრამა **Mathcad**-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$A := \begin{pmatrix} 100 \cdot 1.25 \\ 0 \end{pmatrix} \quad PA := \begin{pmatrix} 0.989 \\ 1 - 0.989 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 250 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad PB := \begin{pmatrix} 0.988 \\ 1 - 0.988 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი თითოეული პროექტისათვის

$$MA := \sum_{i=0}^1 A_i \cdot PA_i$$

$$MB := \sum_{i=0}^1 B_i \cdot PB_i$$

$$MA = 123.625$$

$$MB = 321.1$$

რენტაბელურობა

$$RA := \frac{MA}{100}$$

$$RB := \frac{MB}{250}$$

დისპერსია

$$DA := \sum_{i=0}^1 (A_i - MA)^2 \cdot PA_i$$

$$DB := \sum_{i=0}^1 (B_i - MB)^2 \cdot PB_i$$

$$DA = 169.984$$

$$DB = 1252.29$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობები

$$SA := \sqrt{DA}$$

$$SB := \sqrt{DB}$$

$$SA = 13.038$$

$$SB = 35.388$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობები

$$vA := \frac{SA}{MA} \cdot 100$$

$$vB := \frac{SB}{MB} \cdot 100$$

$$vA = 10.546$$

$$vB = 11.021$$

$$RA = 1.236$$

$$RB = 1.284$$

ამ მაგალითში, რენტაბელურობის მაჩვენებლები და ფარდობითი რისკი ორივე პროექტისათვის თითქმის ერთნაირია, ამიტომ პროექტის ამორჩევა ხდება დამატებითი მოსაზრებებიდან ინვესტორისათვის ფულის ღირებულებისა და პროექტების მახასიათებლებს შორის განსხვავებათა შესაბამისი მნიშვნელობების მიხედვით.

### სავარჯიშო.

ინვესტორს წარუდგინეს *A* და *B* ალტერნატიული ორი პროექტი. *A* პროექტი მოითხოვს *IA* მოცულობის ინვესტიციებს *ma%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PA*; ხოლო *B* პროექტი მოითხოვს *IB* მოცულობის ინვესტიციებს *mb%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PB*. გააკეთეთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის, თუ:

$$1. IA = \$ 80\,000, \quad ma = 30\%, \quad PA = 0.02$$

$$IB = \$ 70\,000, \quad mb = 40\%, \quad PB = 0.04$$

$$2. IA = \$ 100\,000, \quad ma = 15\%, \quad PA = 0.011$$

$IB = \$ 200\ 000, mb = 15\%, PB = 0.02$

3.  $IA = \$ 90\ 000, ma = 20\%, PA = 0.05$

$IB = \$ 90\ 000, mb = 18\%, PB = 0.02$

4.  $IA = \$ 400\ 000, ma = 15\%, PA = 0.02$

$IB = \$ 500\ 000, mb = 20\%, PB = 0.05$

5.  $IA = \$ 1.5\ \text{млн.}, ma = 20\%, PA = 0.03$

$IB = \$ 2.1\ \text{млн.}, mb = 15\%, PB = 0.01$

#### 4.28.3. საინვესტიციო პროექტის დღევანდელი სუფთა ღირებულების (NPV) დადგენა

დისკონტი არის კრედიტის ან ფულის მომავალი ღირებულება, რაიმე პერიოდის გასვლის შემდეგ.

საპროცენტო განაკვეთი არის:

ა) დროის ფიქსირებულ ინტერვალში მიღებული შემოსავლის ფარდობითი სიდიდე

ბ) პროცენტული გადასახადების შედარებითი სიდიდე, რომელსაც მსესხებელი უხდის კრედიტორს დროის გარკვეულ პერიოდში (თვე, წელი). იგი შეიძლება გამოისახოს პროცენტის ან ათწილადი რიცხვის სახით.

განვიხილოთ აღნიშვნები:

**PV** — present value, დღევანდელი სიდიდე, საწყისი თანხა;

**FV** — future value, მომავალი სიდიდე, გაზრდილი თანხის სიდიდე;

**I** = (FV - PV) — interest money, შემოსავლის სიდიდე;

**r** = I/PV = (FV-PV)/PV — interest, საპროცენტო განაკვეთი;

**d** = I/FV = (FV-PV)/FV — discount rate, დისკონტირების განაკვეთი.

თუ, ვიცით დისკონტირების განაკვეთი და გაზრდილი თანხის სიდიდე, შეგვიძლია ამოვხსნათ დისკონტირების ამოცანა (ვპოულობთ საწყისი თანხის სიდიდეს):

$$PV = FV \cdot (1-d). \quad (4.186)$$

დისკონტირების განაკვეთი და საპროცენტო განაკვეთი ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი სახით:

$$r = d \cdot (FV/PV); \quad d = r \cdot (PV/FV). \quad (4.187)$$

პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა განისაზღვრება, როგორც დროის ერთსა და იმავე მომენტისათვის დისკონტირებული პროექტის შემოსავლებისა და ხარჯების სხვაობა:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_{INT} - CF_{OFT}}{(1+d)^t}, \quad (4.188)$$

სადაც  $CF_{INT}$  არის პროექტიდან  $t$  დროის განმავლობაში მიღებული ფულის ნაკადი;  $CF_{OFT}$  - პროექტის დანახარჯები  $t$  დროის განმავლობაში;  $d$  - დისკონტირების განაკვეთი;  $n$  - პროექტის სასიცოცხლო ციკლი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფულადი ინვესტიცია ხორციელდება ერთჯერადად, საწყის მომენტში პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=1}^n \frac{CF_{INTt}}{(1+d)^t}, \quad (4.189)$$

სადაც  $C_0$  - საწყისი ინვესტიციაა დროის ნულოვან ეტაპზე.

ამ ფორმულით სარგებლობა საკმაოდ მარტივია. თუ  $NPV > 0$ , მაშინ ინვესტორი მიიღებს ამ სიდიდის შესაბამის შემოსავალს სასურველი თანხის ზემოთ. თუ  $NPV < 0$ , მაშინ ინვესტორი არა მარტო დაიბრუნებს ჩადებულ ინვესტიციას, არამედ მიიღებს გადიდებულ თანხას, დისკონტირების განაკვეთის შესაბამისად.

თუ  $NPV < 0$ , მაშინ ეს პროექტი უნდა უარყოთ.

აღსანიშნავია, რომ  $NPV$  სიდიდე ადიტიურია დროში, ანუ რამდენიმე პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობები შეგვიძლია შევკრიბოთ, რაც მეტად მნიშვნელოვანია

საინვესტიციო პორტფელის ოპტიმალურობის ამოცანის შესწავლისას.

#### 4.28.4. ინვესტიციების რენტაბელურობის $PI$ ინდექსის განსაზღვრა დისკონტირების გათვალისწინებით

ინვესტიციების რენტაბელურობის ინდექსი განისაზღვრება, როგორც დისკონტირებული მოგების ფარდობა შესაბამისი ინვესტიციების მოცულობასთან. ასე რომ, მაგალითად, ერთჯერადი საწყისი ინვესტირების შემთხვევაში, რენტაბელურობის ინდექსი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$PI = \frac{\sum_{t=1}^n CF_{It}}{C_0} \quad (4.190)$$

იმ შემთხვევაში, როცა  $PI > 1$ , პროექტი მომგებიანია; ხოლო, თუ,  $PI < 1$ , მაშინ პროექტზე უარი უნდა ვთქვათ. თუ, რენტაბელურობის ინდექსი ერთის ტოლია, მაშინ პროექტი არც მომგებიანია და არც წამგებიანი.

$PI$  მაჩვენებლის უპირატესობა ისაა, რომ ის ფარდობითი მაჩვენებელია  $NPV$  სუფთა დღევანდელი ფასეულობისაგან განსხვავებით. ამიტომ, როცა რამდენიმე პროექტის შედარება გვიწევს ერთნაირი  $NPV$  მაჩვენებლით, უპირატესობა აქვს პროექტს მეტი რენტაბელურობის მაჩვენებლით. ასევე, როცა რამდენიმე პროექტის არჩევა უწევს ინვესტორს, ის რანჟირებას ახდენს რენტაბელურობის მაჩვენებლების მიხედვით და ირჩევს პროექტების იმ პორტფელს, სადაც რენტაბელურობა მეტია. რადგან ყველა პროექტის ერთდროული დაფინანსებისათვის შეიძლება არ ეყოს ფინანსური რესურსები.

#### 4.28.5. ინვესტიციების რენტაბელურობის $IRR$ ნორმის განსაზღვრა

ინვესტიციების რენტაბელურობის ნორმა (internal rate of return) არის დისკონტირების ის პროცენტული განაკვეთი IRR, რომლის დროსაც პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა ნულის ტოლია, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$NPV = \sum_{t=0}^n \frac{CF_{INTt} - CF_{OFT}}{(1+IRR)^t} = 0. \quad (4.191)$$

IRR კოეფიციენტის სიდიდე გვიჩვენებს პროექტის ხარჯების მაქსიმალურ დასაშვებ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ პროექტი მთლიანად ფინანსდება საბანკო კრედიტის მეშვეობით, მაშინ რენტაბელურობის ნორმა გვიჩვენებს იმ მაქსიმალური საბანკო პროცენტის განაკვეთის სიდიდეს, რომლის ზემოთაც პროექტი წამგებიანი ხდება.

#### 4.28.6. საინვესტიციო პროექტის დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრის მეთოდი

დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული ვადა არის ის მინიმალური დრო, რომლის განმავლობაშიც ინვესტორი მთლიანად იბრუნებს პროექტში ჩადებულ ინვესტიციებს, უბრუნველყოფს რა შემოსავლების საჭირო დონეს.

დანახარჯების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრა ხდება განტოლებიდან:

$$\sum_{t=1}^T \frac{CF_{INTt}}{(1+d)^t} = PV; \quad (4.192)$$

სადაც T დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული დროის სიდიდეა; *PV* – ინვესტიციების დღევანდელი ფასი.

ამ მეთოდს იყენებენ, როცა პროექტების რისკი დიდია; მაშინ ცდილობენ, რაც შეიძლება მაღე ამოიღონ ჩადებული ინვესტიციები.

#### 4.28.7. ფინანსური ინსტრუმენტები

ფინანსურ ინსტრუმენტებს მიეკუთვნება: ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტები, ოპციონები, ვარიანტები, სვოპი, კომბინაციები, სპრედები და ა.შ.

განვიხილოთ, თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე.

1. **ფორვარდული კონტრაქტი ანუ ფორვარდი**, ეს წინასწარი ყიდვა-გაყიდვის შეთანხმებაა გარკვეულ საქონელზე, გარკვეულ დროზე მომავალში ფიქსირებულ ფასზე.

მაგალითად, გლექი, უკვე გაზაფხულზე აწარმოებს მოლაპარაკებას ბოსტნეულის საცავის მეპატრონესთან, რომ შემოდგომაზე ფიქსირებულ ფასად მიაწოდებს ბოსტნეულის განსაზღვრულ მოცულობას, თუმცა, ჯერ არც კი დაურგავს ჩითილები; ბოსტნეულის საცავის მეპატრონე მოლაპარაკებას აწარმოებს რეალიზაციის პუნქტების-მაღაზიების, რესტორნების . . . მეპატრონეებთან, რომ ბოსტნეულს მიაწოდებს წინასწარ შეთანხმებულ, ფიქსირებულ ფასად.

ასეთი შეთანხმებები მონაწილეებს იცავს კატასტროფებისა და ბანკროტობისაგან: გლექს იცავენ რომ ბოსტნეული არ გაუფუჭდეს და დროზე გაყიდოს, ბოსტნეულის საცავის მეპატრონეს საშუალებას აძლევს, რომ არ მოცდეს მისი საცავები და დროზე გაუკეთოს პროდუქციას რეალიზაცია, ხოლო რესტორნებისა და მაღაზიების მეპატრონეებს საშუალებას აძლევს შეუფერხებლად იმუშაონ და მეტი მოგება მიიღონ.

წინასწარი შეთანხმებით მიღებული ფასები შეიძლება აღარ აწყობდეს ერთ-ერთ მონაწილეს, თუმცა, ყველა მონაწილე მზადაა მცირე წაგებისათვის, ოღონდაც თავი დაიცვას უფრო დიდი ზარალისაგან. ასე რომ, **ფორვარდული კონტრაქტი, არის რისკების შემცირების საშუალება** ორივე მონაწილისათვის. ესაა, სწორედ ყველა სხვა წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების წარმოშობის მიზეზიც.

ფორვარდული შეთანხმება ხდება ორ მონაწილეს შორის მოწმის გარეშე, რის გამოც, დიდია ცდუნება რომელიმე მხარემ დაარღვიოს ხელშეკრულება, თუ ადრე შეთანხმებული ფასი, მისთვის უკვე წამგებიანია. სწორედ ასეთი შემთხვევებისათვის შეიქმნა ფიუჩერსები.

2. **ფიუჩერსული კონტრაქტები ანუ ფიუჩერსები** ისეთი შეთანხმებებია, რომლებიც ფორვარდის ანალოგიურია, მაგრამ დამატებული აქვს გადაანგარიშების მექანიზმები, რომლებიც წამგებიანს ხდის ნებისმიერი მონაწილისათვის ხელშეკრულების დარღვევას.

გადაანგარიშების მექანიზმი ბირჟაზე წარმოებს კლირინგის პალატის მეშვეობით, რომელიც შეთანხმების ორივე მონაწილისათვის ხსნის სპეციალურ ანგარიშს. ფიუჩერსული შეთანხმების მომენტისათვის ორივე მონაწილეს შეაქვს ამ ანგარიშებზე გარკვეული თანხა, როგორც წესი 2%-10% ხელშეკრულების მოცულობიდან, რომელსაც საწყის მარჟას უწოდებენ. საქონლის საბაზრო ფასის ცვლილებისას, კლირინგის პალატა თვითონ გადარიცხავს წაგებული მონაწილის ანგარიშზე შესაბამის თანხას, მოგებული ანგარიშიდან, რათა მას აუნაზღაუროს მოსალოდნელი წაგება, თუ მოგებული მხარე მოინდომებს შეცვლილი საბაზრო ფასით სარგებლობას.

3. **ოპციონი** არის კონტრაქტი, რომელიც გამყიდველს ან მყიდველს აძლევს უფლებას გაყიდოს ფასეულობა წინასწარ გარკვეულ დროში, წინასწარ შეთანხმებული პირობებით. ეს პირობები, როგორც წესი, დაიყვანება ყიდვა-გაყიდვის ფასზე.

განასხვავებენ მყიდველის ოპციონს (ოპციონი-კოლი) და გამყიდველის ოპციონს (ოპციონი-პუტი). ოპციონ-კოლის პატრონს უფლება აქვს იყიდოს, ხოლო ოპციონ-პუტის პატრონს აქვს უფლება გაყიდოს.

ოპციონები არსებობს **ევროპული** და **ამერიკული** ტიპის. ევროპული ტიპის ოპციონებში, ყიდვა-გაყიდვის თარიღი



ფიქსირებულია მომავალ დროში; ხოლო ამერიკული ტიპის ოპციონებში ყიდვა-გაყიდვის მომენტს ირჩევს ოპციონის მფლობელი, თუმცა ფიქსირებულია დროის გარკვეული შუალედი, როცა შესაძლებელია ოპციონის შესრულება.

#### **4.29. წილადური რიგის მათემატიკური მოდელები ეკონომიკაში**

წილადური რიგის დიფერენციალურ აღრიცხვას ოთხსაუკუნოვანი ისტორია აქვს. პირველად მის შესახებ ინფორმაციას ვხვდებით ი.ბერნულისა და გ. ლაიბნიცის მიმოწერაში. ჯერ კიდევ 1695 წელს ლაიბნიცმა იწინასწარმეტყველა, რომ წილადური რიგის დიფერენციალებს მომავალში დიდი გამოყენება ექნებოდა. ამ საკითხზე მუშაობდნენ ისეთი გენიოსები, როგორებიც იყვნენ ეილერი და ლაგრანჟი, შემდგომ კი - ლაპლასი, ფურიე, აბელი, ლიუვილი, რიმანი, ხევისაიდი, ხარდი, ზიგმუნდი, კურანტი, ლეტნიკოვი, სიმაკი, ვასილევი და ა.შ.

თანამედროვე ეტაპზე, მიმდინარეობს მათემატიკური ანალიზის ამ ახალი მიმართულების პრაქტიკული გამოყენების აქტიური განვითარება და დანერგვა: ეკონომიკაში, ფინანსურ გათვლებში, სიგნალების თეორიაში, მექანიკასა და სხვა.

##### **4.29.1. ელემენტარული ფუნქციების ჩვეულებრივი და წილადური რიგის წარმოებულების შედარებითი ანალიზი**

წილადური რიგის მათემატიკურ ანალიზში ხშირად გვხვდება კლასიკური - ექსპონენციალური ფუნქციისა და ფაქტორიალის განზოგადება, ამიტომ დავიწყებთ სწორედ ამ ფუნქციებით.

განვიხილოთ, ეილერის გამა-ფუნქცია და მსგავსი კლასიკური ფუნქციები

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dx, & \text{if } \operatorname{Re}(x) > 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \dots (x+n-1)}, & \text{if } \forall x \end{cases} \quad (4.193)$$

გამა-ფუნქციის არგუმენტი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, როგორც მთელი, ასევე წილადურიც. თუ,  $x=n$  მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (4.194)$$

გამა-ფუნქციის გარდა, ფართოდ გამოიყენება აგრეთვე, არასრული გამა-ფუნქცია, ბეტა-ფუნქცია და ფსი-ფუნქცია.

არასრულ გამა-ფუნქციას აქვს სახე

$$\gamma(c, x) = \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \cdot \int_0^x y^{x-1} \cdot \exp(-y) dy = \exp(-x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\Gamma(i+c+1)} \quad (4.195)$$

ბეტა-ფუნქცია განისაზღვრება გამა-ფუნქციის მეშვეობით:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (4.196)$$

ფსი-ფუნქცია გამა-ფუნქციასთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \cdot \frac{d\Gamma(x)}{dx} \quad (4.197)$$

ამ ფუნქციას ახასიათებს რიგი თვისებები, რაც განაპირობებს მის ფართო გამოყენებას წილადურ ანალიზში:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + x^{-1}, \quad (4.198)$$

$$\psi(n+1) = \psi(1) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad (4.199)$$

ფსი-ფუნქცია არის პოლი-გამა ფუნქციის კერძო შემთხვევა.

ახლა, განვიხილოთ ელემენტარული ფუნქციების კლასიკური და წილადური რიგის წარმოებულები.

1. განვიხილოთ ხარისხოვანი  $x(t) = t^k$  ფუნქციის წარმოებულები:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot t^{k-1}; \quad (4.200)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = k \cdot (k-1) \cdot t^{k-2}; \quad (4.201)$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \dots (k-n+1) \cdot t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!} \cdot t^{k-n}. \quad (4.202)$$

როგორც (4.202) ფორმულიდან ჩანს, რადგან გვაქვს ფაქტორი-  
ალის განზოგადებული ცნება წილადური რიცხვებისათვის,  
ადვილად განვაზოგადებთ ამ ფორმულას გამა-ფუნქციის  
მეშვეობით წილადური რიგის წარმოებულები-სათვისაც:

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)} \cdot t^{k-\beta}. \quad (4.203)$$

$\beta$  შეიძლება იყოს როგორც მთელი, ასევე წილადური რიცხვი.

2. განვიხილოთ ექსპონენციალური  $x(t) = e^{k \cdot t}$  ფუნქციის წარმოებუ-  
ლები:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot e^{k \cdot t}; \quad (4.204)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = k^2 \cdot e^{k \cdot t}; \quad (4.205)$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = k^n \cdot e^{k \cdot t}. \quad (4.206)$$

წილადური რიგის წარმოებულებზე ადვილად განზოგადდება  
(4.206) ფორმულა, აქ უბრალოდ მთელი მაჩვენებელი  $n$   
შეიცვლება წილადური  $\beta$  მაჩვენებლით:

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = k^\beta \cdot e^{k \cdot t}. \quad (4.207)$$

3. ლოგარითმული  $x(t) = \ln t$  ფუნქციის წარმოებულები:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{t}; \quad (4.208)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}; \quad (4.209)$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot \frac{1}{t^n}. \quad (4.210)$$

რაც შეეხება ლოგარითმული ფუნქციის წილადური რიგის წარმოებულს, ის განიმარტება ფორმულით

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = t^{-\beta} \cdot (\ln t + \psi(1) - \psi(1 - \beta)) \cdot \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)}. \quad (4.211)$$

1. ანალოგიურად ხდება  $x(t) = \sin(\omega \cdot t + \alpha)$  ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულების განზოგადებაც.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha) = \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha + \frac{\pi}{2}); \quad (4.212)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha + 2 \cdot \pi / 2); \quad (4.213)$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \omega^n \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha + n \cdot \frac{\pi}{2}). \quad (4.214)$$

**(4.214) ფორმულაც მარტივად განზოგადდება წილადური რიგის წარმოებულის შემთხვევისათვის:**

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta} = \omega^\beta \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha + \beta \cdot \frac{\pi}{2}). \quad (4.215)$$

**სავარჯიშო.**

1. იპოვეთ ფუნქციების მეორე და 1/2 რიგის წარმოებულები

ა)  $x(t) = t^5$  ;   ბ)  $x(t) = 3 \cdot e^{2t}$  ;   გ)  $x(t) = 5 \cdot \ln t$  ;   დ)  $x(t) = 8 \cdot \sin 3 \cdot t$  .

2. იპოვეთ ფუნქციების პირველი და 3/4 რიგის წარმოებულები

ა)  $x(t) = t^5 \cdot \sin 2 \cdot t$  ;   ბ)  $x(t) = 3 \cdot e^{2t} \cdot t$  ;   გ)  $x(t) = 5 \cdot t \cdot \ln t$  ;

დ)  $x(t) = 8 \cdot \sin 3 \cdot t \cdot \cos t$  .

#### 4.29.2. წილადური რიგის, დემპფირების ძალის ეკონომიკური რხევითი სისტემა

განვიხილოთ ფუნქციის კლასიკური წარმოებულის სასრულ-სხვაობიანი მიახლოებები და შევადგინოთ წილადური რიგის წარმოებულის შესაბამისი ფორმულა.

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}; \quad (4.216)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}; \quad (4.217)$$

...

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(t - ih), \quad (4.218)$$

სადაც  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$  ბინომიალური კოეფიციენტებია.

თუ, (4.218) ფორმულაში წარმოებულების  $n$  რიგს შევცვლით შესაბამისად, წილადური  $\beta$  ასოთი, ხოლო ფაქტორიალებს გამა-ფუნქციებით, მივიღებთ წილადი რიგის წარმოებულების გრიუნვალდ-ლეტნიკოვის ფორმულას

$$D_t^\beta f(t) = \frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^i \binom{\beta}{i} f(t - ih) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^i \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta-i+1)} f(t - ih); \quad (4.219)$$

სადაც  $[x]$  - არის მთელი ნაწილი.

როცა  $\beta < 0$ , მაშინ (4.219) ფორმულა შეესაბამება წილადური რიგის ინტეგრალის ცნებას.

არსებობს წილადური რიგის წარმოებულისა და ინტეგრალის ცნების განსაზღვრება, რომელიც ემყარება კოშის ინტეგრალური ფორმულის განზოგადებას (რიმან-ლიუვილის ფორმულა). როგორც ვხედავთ, წილადური რიგის მათემატიკური ანალიზისას, წარმოებულსა და ინტეგრალს შორის განსხვავება მხოლოდ  $\beta$  წარმოებულის რიგის ნიშნით გამოიხატება. თუ დადებითია მისი ნიშანი, გვაქვს წარმოებული, თუ უარყოფითია - ინტეგრალი. ამიტომ, მათ საერთო სახელი, დიფერენციალები ეწოდება.

დიფერენციალების კოშისეულ წარმოდგენას აქვს სახე

$$I_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau; \quad (4.220)$$

$$D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad (4.221)$$

სადაც  $I_{a,t}^\beta f(t)$  - ინტეგრალური ოპერატორია თუ ( $\beta < 0$ );

$D_{a,t}^\beta f(t)$  - დიფერენციალური ოპერატორია თუ ( $\beta > 0$ ).

უნდა აღვნიშნოთ, რომ არსებობს წილადური რიგის ინტეგრალ-დიფერენციალური ოპერატორების სხვა განსაზღვრებებიც: ვეილის, კაპუტოს და ა.შ. პრაქტიკის თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ხელსაყრელია კაპუტოს განსაზღვრება. რიმან-ლიუვილისაგან განსხვავებით, ჯერ პოულობენ ფუნქციის წარმოებულს, უმცირესი ნატურალური  $n$  რიგით, რომელიც აღემატება წილადურს და შემდეგ შედეგს აინტეგრებენ  $n - \beta$  რიგით:

$$D_{a,t}^\beta = \frac{1}{\Gamma(\beta-n)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \quad (4.222)$$

სადაც  $n - 1 < \beta < n$ .

განვიხილოთ დიფერინტეგრალების თვისებები:

1. წილადური რიგის წარმოებულისა და ინტეგრალის ოპერატორები წრფივობის თვისებით ხასიათდებიან

$$D_{a,t}^\beta \left( \sum_{i=1}^k b_i f_i(t) \right) = \sum_{i=1}^k b_i D_{a,t}^\beta (f_i(t)); \quad (4.223)$$

$$D_{a,t}^{-\beta} \left( \sum_{i=1}^k b_i f_i(t) \right) = \sum_{i=1}^k b_i D_{a,t}^{-\beta} (f_i(t)); \quad (4.224)$$

2. ორი ფუნქციის ნამრავლის წილადური რიგის წარმოებული და ინტეგრალი, ანუ ორი ფუნქციის ნამრავლის წილადური რიგის დიფერინტეგრალისათვის გვაქვს ფორმულა:

$$\frac{d^\beta(f(x)g(x))}{(d(x-a))^\beta} = \sum_{i=0}^\infty \binom{\beta}{i} \frac{d^{\beta-1}f(x)}{(d(x-a))^{\beta-1}} \cdot \frac{d^i g(x)}{(d(x-a))^i} \quad (4.225)$$

წილადური რიგის ჩვეულებრივ, წრფივ ინტეგრალ დიფერენციალურ განტოლებებს აქვს სახე

$$\sum_{i=1}^m a_i(t) \cdot D_i^{\beta_i} x(t) = f(t); \quad (4.226)$$

$$\text{სადაც } n > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_m. \quad (4.227)$$

განვიხილოთ წილადური რიგის, დემპფირების ძალის მქონე ეკონომიკური რხევითი სისტემა

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = f(t) \quad (4.228)$$

თუ ამ განტოლებაში  $2\gamma \dot{X}$  დემპფირების ძალის შესაბამის წევრს, შევცვლით  $2\gamma D_t^{\frac{3}{2}}$  წილადური რიგის ინტეგროდიფერენციალური ოპერატორით, მივიღებთ ბაგლეი-ტორვიკის განტოლებას შესაბამისი საწყისი პირობებით

$$\dot{X}(t) + 2\gamma D_t^{\frac{3}{2}} X(t) + \omega_0^2 X(t) = f(t); \quad (4.229)$$

$$X(0) = X_0; \quad \dot{X}(0) = X'_0. \quad (4.230)$$

თუ წილადური რიგის წარმოებულს, განვსაზღვრავთ კაპუტოს წესით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + 2\gamma D_t^{\frac{-1}{2}} \dot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = f(t). \quad (4.231)$$

### 4.29.3. წილადური რიგის ფინანსური სისტემის მათემატიკური მოდელი

წილადური მათემატიკური ანალიზი გამოიყენება ფინანსური სისტემების მოდელირების საქმეშიც. შესაბამისი მათემატიკური მოდელები იძლევა საინტერესო დინამიკურ სურათს და საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ფინანსური ქაოსის წარმოქმნის მექანიზმები.

ცნობილია სამი არაწრფივი განტოლებისაგან შემდგარი ფინანსური სისტემის მათემატიკური მოდელი

$$\dot{X} = Z = (Y - a)X; \quad (4.232)$$

$$\dot{Y} = 1 - bY - X^2; \quad (4.233)$$

$$\dot{Z} = -X - cZ, \quad (4.234)$$

სადაც  $X$  საპროცენტო განაკვეთია;  $Y$  - მოთხოვნა კაპდაბანდებებზე;  $Z$  - ფასების ინდექსი;  $a, b, c$  - არაუარყოფითი კოეფიციენტები.

აგებულია ამ მოდელის შესაბამისი წილადური რიგის ფინანსური მათემატიკური მოდელი:

$$\frac{d^{\beta_1} X}{dt^{\beta_1}} = Z = (Y - a)X; \quad (4.235)$$

$$\frac{d^{\beta_2} Y}{dt^{\beta_2}} = 1 - bY - X^2; \quad (4.236)$$



$$\frac{d^{\beta_3} Z}{dt^{\beta_3}} = -X - cZ . \quad (4.237)$$

ამ მოდელის შესწავლა მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს ფინანსური კრიზისების მექანიზმებში გარკვევასა და მათგან დროულად თავდაღწევის საშუალებას.

**ამოცანები და საგარჯიშოები.**

**1.გამოთვალეთ მუდმივის წარმოებულები:**

- ა) კლასიკური აზრით;
- ბ)  $3/2$  რიგის წარმოებული გრიუნვალ-ლექნიკოვის ფორმულით;
- გ)  $5/2$  რიგის წარმოებული რიმან-ლიუვილის ფორმულით;
- დ)  $3/2$  რიგის წარმოებული კაპუტოს ფორმულით.

**2.შეადგინეთ სოციალური სისტემის ფუქციონირების წილადური რიგის მათემატიკური მოდელი.**

#### 4.30. დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა, რომლის არსი ისაა, რომ განვლილი წლის დარგთაშორისი ბალანსის საფუძველზე მეურნეობის ცალკეული დარგების პრიორიტეტული განვითარების აუცილებლობის პირობებში, სწორად დაიგეგმოს მიმდინარე წლის ყველა დარგის პროდუქციის საერთო გამოშვება. ეს ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ცალკე აღებული რომელიმე რაიონის ან რეგიონის ფარგლებში, ისე მთელი სახელმწიფოს მასშტაბით.

შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად შემოვიტანოთ აღნიშვნები: ვთქვათ,  $x_i$  არის  $i$ -ური დარგის საერთო გამოშვება ფულადი გამოსახულებით,  $x_{ij}$  –  $i$ -ური დარგის პროდუქციის მოცულო-

ბა, რომელიც გამოიყენება  $j$ -ური დარგის წარმოების უზრუნველსაყოფად, ხოლო  $y_i$  –  $i$ -ური დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობაა არასაწარმოო დანიშნულებისათვის ფულად გამოსახულებაში.

მაშინ, ვღებულობთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i . \quad (4.238)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} . \quad (4.239)$$

$a_{ij}$  არის  $i$ -ური დარგის პროდუქციის მოცულობა, რომელიც იხარჯება  $j$ -ური დარგის პროდუქციის ერთეულოვანი მოცულობის წარმოებაზე.

**განსაზღვრება.**  $a_{ij}$  მატრიცას ეწოდება ტექნოლოგიური მატრიცა.

(4.238) და (4.239)-დან ვღებულობთ ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + y_i . \quad (4.240)$$

დარგთაშორისი ბალანსის (4.240) განტოლება უნდა ამოიხსნას  $x_i$ -ის მიმართ. ამისათვის შემოვიტანოთ მატრიცული აღნიშვნები:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (4.241)$$

მაშინ, ლეონტიევის (4.241) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ მატრიცული სახით:

$$X = A \cdot X + Y. \quad (4.242)$$

(4.242) განტოლების ამოსახსნელად  $X$ -ის შემცველი შესაკრებები გადავიტანოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ:

$$(E - A) \cdot X = Y. \quad (4.243)$$

(4.243)-დან ადვილად ვღებულობთ ლეონტიევის (4.242) მატრიცული განტოლების ამონახსნს:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y. \quad (4.244)$$

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.30

*ამოცანა.* გასული წლის განმავლობაში მეურნეობის სამმა დარგმა: სოფლის მეურნეობამ, მანქანათმშენებლობამ და ენერგეტიკამ საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორის ბალანსის ცხრილები

<i>N<sub>0</sub></i>		სოფლის მეურნეობა	მანქანათმშენებლობა	ენერგეტიკა	საბოლოო პროდუქტი	საერთო გამოშვება
1	სოფლის მეურნეობა	$x_{11}=10$	$x_{12}=20$	$x_{13}=30$	$y_1=40$	$x_1=100$
2	მანქანათმშენებლობა	$x_{21}=30$	$x_{22}=20$	$x_{23}=10$	$y_2=30$	$x_2=90$
3	ენერგეტიკა	$x_{31}=20$	$x_{32}=30$	$x_{33}=20$	$y_3=50$	$x_3=120$

შევადგინოთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის (სოფლის მეურნეობა) საბოლოო პროდუქტი 10%-ით უნდა გაიზარდოს, მეორე დარგის (მანქანათ-

მშენებლობა) – 20%-ით, ხოლო მესამე დარგისა (ენერგეტიკა) – 8%-ით.

**ამოხსნა:**

**პროგრამა Mathcad-ზე**

სამივე დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობის რეკომენდებული მნიშვნელობები.

$$Y := \begin{pmatrix} 40 \cdot 1.1 \\ 30 \cdot 1.2 \\ 50 \cdot 1.08 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{20}{90} & \frac{30}{120} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{90} & \frac{10}{120} \\ \frac{20}{100} & \frac{30}{90} & \frac{20}{120} \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მოცემული სამი დარგის საერთო გამოშვების გეგმა.

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 111.362 \\ 103.481 \\ 132.919 \end{pmatrix}$$

**საგარჯიშო.**

წინა წელს მეურნეობის რვა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილები:

<i>№</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>საბოლოო პროდუქტი</i>	<i>საერთო გამოშვება</i>
<i>1</i>	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>20</i>	<i>10</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>100</i>	<i>300</i>
<i>2</i>	<i>20</i>	<i>10</i>	<i>40</i>	<i>30</i>	<i>10</i>	<i>20</i>	<i>40</i>	<i>30</i>	<i>150</i>	<i>350</i>

3	40	20	10	20	30	10	30	40	200	400
4	20	20	10	40	40	30	10	30	100	300
5	10	40	20	20	30	30	40	10	200	400
6	10	30	20	40	20	40	30	10	150	350
7	40	30	10	20	40	30	20	10	100	300
8	10	10	20	20	30	30	40	40	50	250

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი გაიზრდება  $m_1\%$ -ით, მეორე დარგისა  $m_2\%$ -ით, მესამისა -  $m_3\%$ -ით, ..., მერვე დარგისა  $m_8\%$ -ით, სადაც:

1.  $m_1=10\%$ ;  $m_2=20\%$ ;  $m_3=5\%$ ;  $m_4=8\%$ ;  $m_5=20\%$ ;  $m_6=5\%$ ;  $m_7=0\%$ ;  $m_8=9\%$ ;
2.  $m_1=5\%$ ;  $m_2=9\%$ ;  $m_3=10\%$ ;  $m_4=8\%$ ;  $m_5=6\%$ ;  $m_6=0\%$ ;  $m_7=0\%$ ;  $m_8=0\%$ ;
3.  $m_1=10\%$ ;  $m_2=5\%$ ;  $m_3=-20\%$ ;  $m_4=2\%$ ;  $m_5=-10\%$ ;  $m_6=5\%$ ;  $m_7=2\%$ ;  $m_8=9\%$ ;
4.  $m_1=9\%$ ;  $m_2=9\%$ ;  $m_3=20\%$ ;  $m_4=5\%$ ;  $m_5=10\%$ ;  $m_6=5\%$ ;  $m_7=2\%$ ;  $m_8=10\%$ ;
5.  $m_1=8\%$ ;  $m_2=-10\%$ ;  $m_3=-25\%$ ;  $m_4=2\%$ ;  $m_5=-40\%$ ;  $m_6=2\%$ ;  $m_7=4\%$ ;  $m_8=20\%$ ;
6.  $m_1=5\%$ ;  $m_2=10\%$ ;  $m_3=10\%$ ;  $m_4=5\%$ ;  $m_5=8\%$ ;  $m_6=20\%$ ;  $m_7=5\%$ ;  $m_8=10\%$ ;
7.  $m_1=20\%$ ;  $m_2=-10\%$ ;  $m_3=50\%$ ;  $m_4=10\%$ ;  $m_5=50\%$ ;  $m_6=10\%$ ;  $m_7=2\%$ ;  $m_8=20\%$ ;
8.  $m_1=10\%$ ;  $m_2=35\%$ ;  $m_3=45\%$ ;  $m_4=10\%$ ;  $m_5=6\%$ ;  $m_6=-10\%$ ;  $m_7=8\%$ ;  $m_8=15\%$ .

#### 4.31. ეროვნული შემოსავლის დინამიკის სამუელსონ-ჰიქსის მოდელი

ეკონომიკისთვის დამახასიათებელია განვითარების ტალღური ბუნება, ამიტომ ეროვნული შემოსავალი ხან იზრდება, ხან მცირდება.

ეკონომიკის განვითარების ტალღური ბუნების შესასწავლად სამუელსონმა და ჰიქსმა შეადგინეს შესაბამისი მათემატიკური

მოდელი. ამ მოდელში  $X(t)$  ეროვნული შემოსავლის სიდიდის რხევები აიხსნება აქსელერაციის პრინციპითა და მულტიპლიკატორის კონცეფციით.

აქსელერაციის პრინციპი ამტკიცებს, რომ ინვესტიციის მასშტაბები დამოკიდებულია საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის ზრდის ტემპზე. საინვესტიციო მოთხოვნა საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის პროპორციულია. პროპორციულობის ხარისხს, ეწოდება აქსელერაციის ფაქტორი.

სამუელსონ-ჰიქსის მოდელში აქსელერაციის პრინციპზე დაფუძნებულ ინვესტიციის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$I(t) = \beta(X(t-1) - X(t-2)), \quad (4.245)$$

სადაც  $\beta$  აქსელერაციის კოეფიციენტია (ფაქტორი).

$C(t)$  ხარჯის სიდიდე წრფივად დამოკიდებულია მოთხოვნაზე, სადაც განიხილება ერთეულოვანი ლაგი (შეყოვნება):

$$C(t) = \alpha \cdot X(t-1) + A, \quad (4.246)$$

სადაც  $\alpha \in (0,1)$  განისაზღვრება რეგრესიული ანალიზის საფუძველზე (ქვემოთ იქნება განხილული).

$$A = (\text{საარსებო მინიმუმი}) \times (\text{მცხოვრებთა რიცხვი}). \quad (4.247)$$

თუ გავითვალისწინებთ მოთხოვნისა და მიწოდების წონასწორობის პირობას, მივიღებთ:

$$X(t) = C(t) + I(t). \quad (4.248)$$

თუ (4.248)-ში შევიტანთ  $C(t)$  და  $I(t)$  მნიშვნელობებს და შევასრულებთ შესაბამის გარდაქმნებს, მივიღებთ სამუელსონ-ჰიქსის განტოლებას:

$$X(t) = (\alpha + \beta) \cdot X(t-1) - \beta \cdot X(t-2) + A. \quad (4.249)$$

$\beta$  აქსელერაციის კოეფიციენტის მიხედვით, (4.249)-დან შეიძლება მივიღოთ ეროვნული შემოსავლის რხევები როგორც მზარდი, ისე კლებადი ამპლიტუდით.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.31

**ამოცანა.** შევისწავლოთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლებით, როცა  $\alpha = 0.5$ .

ქალაქ თბილისისათვის ვიპოვოთ  $A$  კოეფიციენტი და  $\beta$  კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შევისწავლოთ  $X(t)$ -ს დინამიკა.

**ამოხსნა:**

ამოცანის ამოსახსნელად ვირჩევთ საწყის პირობებს.

#### პროგრამა Mathcad-ზე

ეროვნული შემოსავლის საწყისი მნიშვნელობები

$$X_0 := 10^6 \quad X_1 := 10^7$$

(მცხოვრებთა რიცხვი)  $\times$  (საარსებო მინიმუმი)

$$A := 1.5 \cdot 10^8$$

$$\alpha := 0.5$$

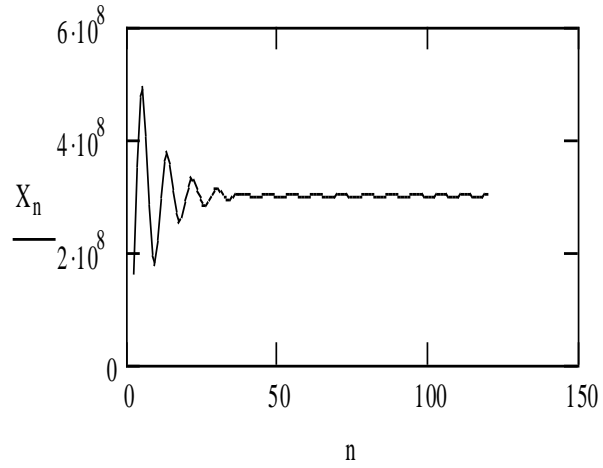
აქსელერაციის კოეფიციენტი,

$$\beta := 0.8$$

სამუელსონ-ჰიქსის რეკურენტული მოდელი

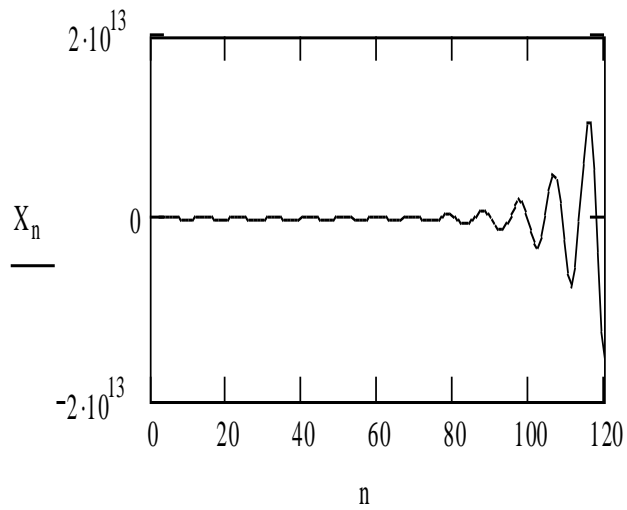
$$n := 2..120$$

$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$



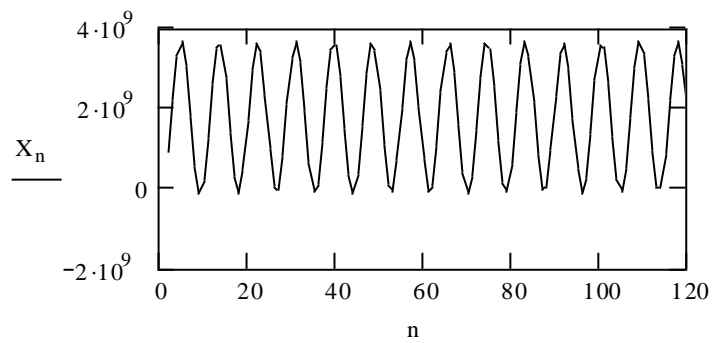
$$\beta := 1.2$$

$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$



$$\beta := 1.$$

$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$





როგორც ვხედავთ, ერთი პარამეტრის ცვლილება საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ დინამიკის სრულიად განსხვავებული რეჟიმები: ა) მიღებული რხევები,

ბ) რხევები მზარდი ამპლიტუდით,

გ) პერიოდული რხევები. ასეთ შემთხვევებში ამბობენ, რომ სისტემაში ადგილი აქვს ბიფურკაციას. ბიფურკაციის წერტილია  $\beta = 1$ . ამ წერტილში სისტემა არის სტრუქტურულად არამდგრადი.

#### 4.32. ფერჰიულსტის მოდელი ბანკში ანაბრების დინამიკისათვის

ვთქვათ,  $X_n$  ფულადი ანაბრების მოცულობაა  $n$  წელიწადში. ანაბრების ფარდობითი ნაზრდის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ  $R$ -ით, მაშინ გვექნება:

$$R = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n}, \quad (4.250)$$

ანუ 
$$X_{n+1} = X_n + R \cdot X_n, \quad (4.251)$$

სადაც  $R = R_0 = const$ .

ანაბრების დინამიკის გამოსაკვლევად (4.251) ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_{n+1} = (1 + R_0) \cdot X_n. \quad (4.252)$$

ცხადია, თუ ფულადი ანაბრების საწყისი მნიშვნელობა იყო  $X_0$ , მაშინ

$$\begin{aligned} X_1 &= (1 + R_0) \cdot X_0, \\ X_2 &= (1 + R_0)X_1 = (1 + R_0)^2 \cdot X_0, \\ &\dots \\ X_n &= (1 + R_0)^n \cdot X_0. \end{aligned} \quad (4.253)$$

(4.253) იტერაციული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ  $n$ -ის ზრდასთან ერთად ფულადი შენატანების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება, რადგან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow \infty. \quad (4.254)$$

(4.253) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ამოცანა  $R$ -ს ზრდის დასაშვები პროცენტების შესახებ. მაგალითად, გავიგოთ როგორი უნდა იყოს  $R_0$ , რომ ანაბრების გაორმაგება მოხდეს 50 წელიწადში. გვაქვს

$$\frac{X_{50}}{X_0} = (1 + R_0)^{50} = 2, \quad (4.255)$$

მაშინ

$$R_0 = \sqrt[50]{2} - 1. \quad (4.256)$$

ე.ი. პროცენტულ გამოსახულებაში ვღებულობთ ნაზრდის ნორმას

$$R_0 = (\sqrt[50]{2} - 1) \cdot 100\% \quad (4.257)$$

დავუშვათ, კლიენტების მოსაზიდად ბანკის დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა  $R_0$  ნაზრდის კოეფიციენტის გაზრდა. გაკორტებისაგან თავის დასაცავად, დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა აღარ დაუშვას ანაბრების შემდგომი ზრდა, თუ მისი სიდიდე მიაღწევს 1-ს – მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ, კოეფიციენტი უნდა გახდეს უარყოფითი, რათა შემცირდეს ანაბრები, ვიდრე არ გახდება 1-ზე ნაკლები.

ამ პროცესის უზრუნველსაყოფად გადაწყდა, რომ

$$R = r(1 - X_n). \quad (4.258)$$

მაშინ (4.253) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = r(1 - X_n), \quad \text{სადაც } r > R_0. \quad (4.259)$$

(4.259)-დან გვექნება რეკურენტული თანაფარდობა

$$X_{n+1} = (1+r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2. \quad (4.260)$$

ამ სისტემას ეწოდება ფერჰიულსტის მოდელი. გამოვიკვლიოთ მისი წონასწორობის წერტილები.

**განსაზღვრება:** რეკურენტული სისტემის წონასწორობის წერტილები ეწოდება  $X_n$ -ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც არ იცვლება  $n$ -ის ზრდასთან ერთად, ე.ი.  $X_n$ -ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$$X_{n+1} = X_n \quad (4.261)$$

წარმოადგენს ფერჰიულსტის მოდელის (4.260) წონასწორობის წერტილებს.

ცხადია, ეს მნიშვნელობებია:

ა)  $X_n=0$ ;   ბ)  $X_n=1$ .

იმისათვის, რომ წონასწორობის წერტილი განხორციელდეს პრაქტიკულად, საჭიროა მისი მდგრადობა მცირე შეშფოთებების მიმართ.

გამოვიკვლიოთ ეს მდგომარეობები მდგრადობაზე:

ა) თავდაპირველად განვიხილოთ წონასწორობის მდგომარეობა  $X_n=0$ , ანუ მდგომარეობა, როცა ჩვენს ანგარიშზე ფული არ არის. დავუმატოთ “მცირე შეშფოთება” –  $\delta_n \ll 1$ , წონასწორობის წერტილს და გამოვიკვლიოთ მისი დინამიკა დროში, ანუ  $X_n = 0 + \delta_n$ , მაშინ (4.260) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\delta_{n+1} = (1+r)\delta_n - r\delta_n^2. \quad (4.262)$$

ვინაიდან  $\delta_n \ll 1$ , ცხადია, რომ  $\delta_n^2 = o(\delta_n) \ll 1$ , ამიტომ (4.262) განტოლებაში ის შეიძლება უგულებელვყოთ. ამის შედეგად გვექნება

$$\delta_{n+1} = (1+r)\delta_n. \quad (4.263)$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\left| \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \right| > 1. \quad (4.264)$$

ამრიგად, შეშფოთებები დროში იზრდება, რაც ნიშნავს წონასწორობის წერტილის  $X_n=0$  არამდგრადობას. ამოცანის არსის მიხედვით, ეს გამოიხატება იმაში, რომ დროთა განმავლობაში ანაბრები გაიზრდება თუ კი ანგარიშზე დაერიცხება ფულის რაღაც სულ მცირე რაოდენობა  $\delta_n$ .

ბ) გამოვიკვლიოთ წონასწორობის მეორე წერტილის  $X_n=1$  მდგრადობა. წონასწორობის წერტილს აქაც მივცეთ მცირე ნაზრდი  $\delta_n \ll 1$ , ანუ განვიხილოთ  $X_n = 1 + \delta_n$  მნიშვნელობა და გამოვიკვლიოთ ამ მდგომარეობის დინამიკა  $n$  დროის განმავლობაში. (4.260) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$1 + \delta_{n+1} = (1+r)(1+\delta_n) - r(1+\delta_n)^2. \quad (4.265)$$

გარდაქმნების შედეგად გვაქვს:

$$1 + \delta_{n+1} = 1 + r + (1+r)\delta_n - r - 2r\delta_n - r\delta_n^2. \quad (4.266)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $\delta_n^2 = o(\delta_n) \ll 1$  და ამის გამო უგულებელვყოფთ მას, გვექნება

$$\delta_{n+1} = (1-r)\delta_n. \quad (4.267)$$

$X_n=1$  წონასწორობის წერტილის მდგრადობისათვის უნდა სრულდებოდეს პირობა

$$\left| \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} \right| < 1, \quad (4.268)$$

$$\text{ანუ} \quad |1-r| < 1. \quad (4.269)$$

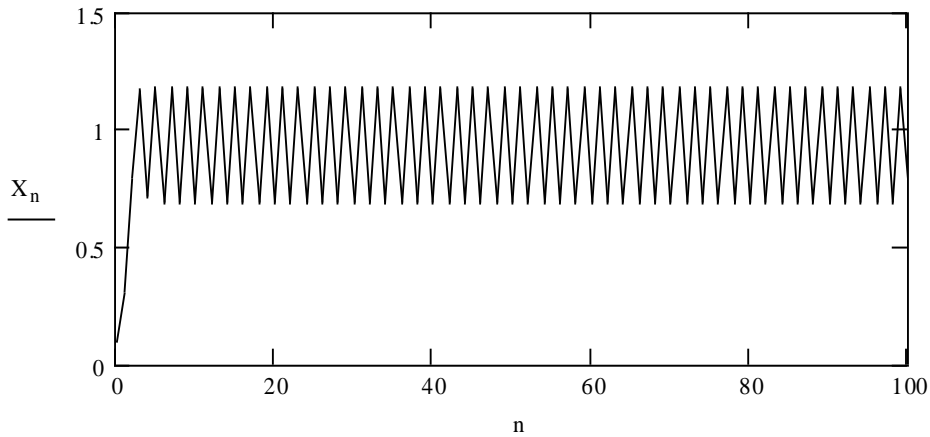
თავის მხრივ, ეს პირობა ნიშნავს, რომ

$$0 < r < 2. \quad (4.270)$$

ამრიგად, თუ სრულდება (4.270) პირობა, მაშინ ფერჭიულსტის სისტემის წონასწორობის წერტილი  $X_n=1$  მდგრადია. წინააღმდეგ

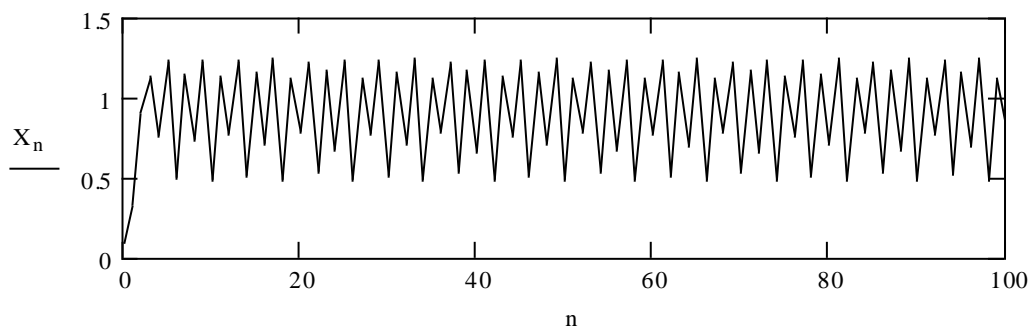
შემთხვევაში, შევიჭრებით არამდგრადობის ზონაში, რომელიც სავსეა მოულოდნელობებით.

კერძოდ, როცა  $r=2.3$ , აღიძვრება  $X_n$ -ის პერიოდული რხევები (ნახ. 4.17).



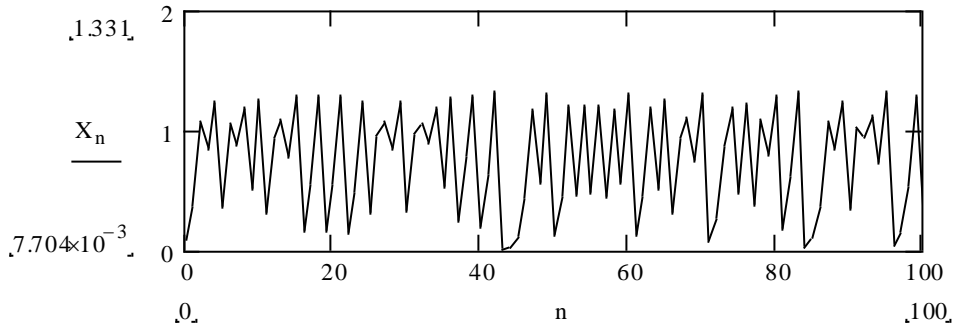
ნახ. 4.17. ანაბარის პერიოდული რხევები

$r=2.57$  შემთხვევაში, სურათი რთულდება და ჩნდება ორმაგად პერიოდული რხევები (ნახ. 4.18).



ნახ. 4.18. ანაბარის ორმაგად პერიოდული რხევები

ნაზრდის  $r$  კოეფიციენტის შემდგომი ზრდისას ვღებულობთ პერიოდის გაოთხმაგებას და ა.შ. თუ  $r \geq 3.0$ , შეინიშნება ქაოსური რხევები (ნახ. 4.19).



ნახ. 4.19. ანაბარის ქაოსური რხევები.

ამრიგად, ფერჭიულსტის ტიპის არაწრფივი რეკურენტული სისტემები მოიცავს ბევრ საიდუმლოს და მათ ასახსნელად საჭიროა დამატებითი კვლევები ცალკეულ კონკრეტულ შემთხვევაში; მით უმეტეს, რომ ყოველთვის არ ხერხდება რეკურენტული სისტემით მოცემული იტერაციული პროცესის კრებადობის გლობალური შეფასება.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.32

*ამოცანა.* გამოიკვლიეთ ფერჭიულსტის მოდელი:

$$X_{n+1} = (1+r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2 \quad (4.271)$$

$r$  ნაზრდის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობებისათვის.

*ამოხსნა.* ლაბორატორიული სამუშაოს შესასრულებლად შემოვიფარგლოთ  $X_0$  საწყისი პირობებით და  $r$  ნაზრდის კოეფიციენტის მნიშვნელობით.

### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი ანაბარი პირად ანგარიშზე

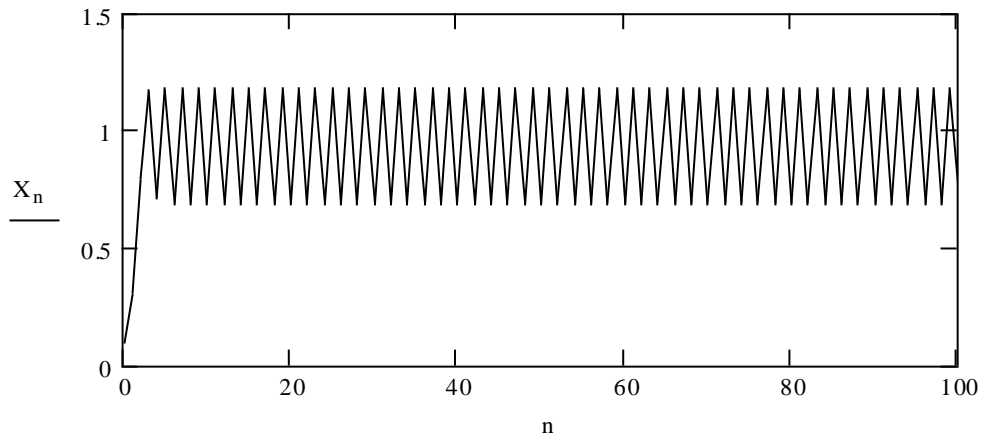
$$X_0 := 0.1$$

ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა ფერჭიულსტის მოდელით პროცენტული განაკვეთით  $r=2.3$ .

$$r := 2.57$$

$$n := 0..100$$

$$X_{n+1} := (1+r) \cdot X_n - r \cdot (X_n)^2$$

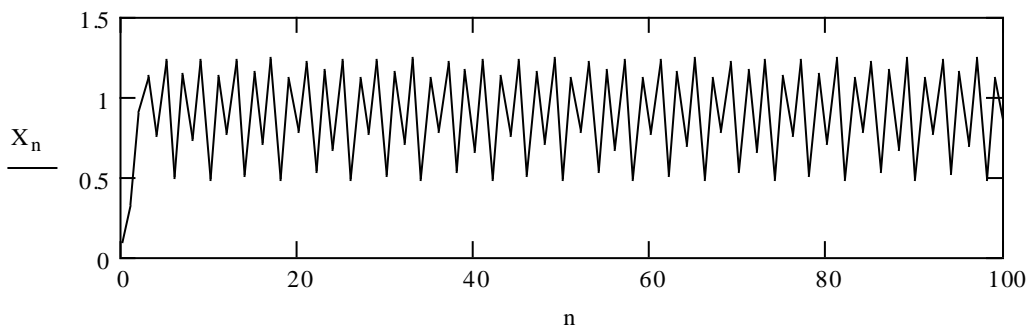


ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა პროცენტული განაკვეთით  $r=2.57$ .

$$r := 2.57$$

$$n := 0..100$$

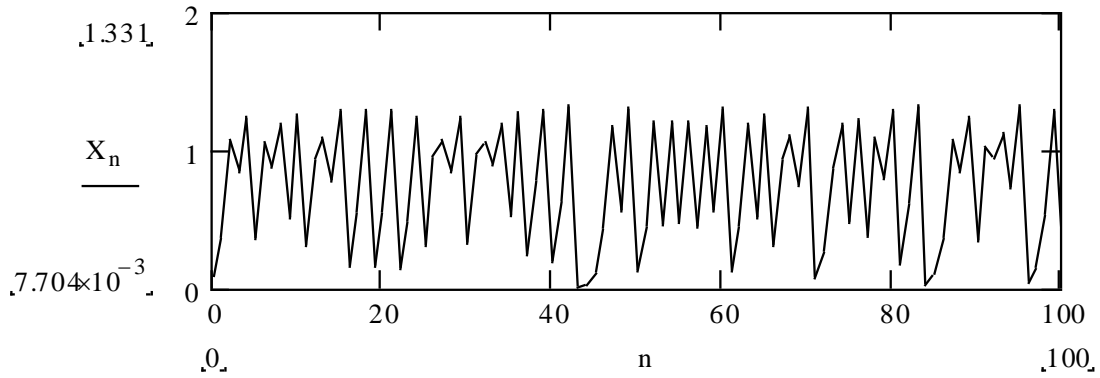
$$X_{n+1} := (1+r) \cdot X_n - r \cdot (X_n)^2$$



ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა პროცენტული განაკვეთით  $r=3$ .

$$r := 3$$

$$X_{n+1} := (1+r) \cdot X_n - r \cdot (X_n)^2$$



როგორც ვხედავთ, აქაც ადგილი აქვს **სისტემის სტრუქტურულ არამდგრადობას**. რაც იწვევს პერიოდული რხევითი სისტემის გადასვლას ქაოსურ რეჟიმში. ეს გადასვლა ხდება პარამეტრის ცვლილებიდან გამომდინარე. ჯერ ვიღებთ ორადპერიოდულ რხევებს, შემდეგ - ოთხადპერიოდულს . . . ბოლოს კი გადავდივართ ქაოსურ რეჟიმში.

### სავარჯიშო.

გამოიკვლიეთ ფერჰიულსტის მოდელი

$$X_{n+1} = (1+r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2$$

$r$  ნაზრდის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობებისათვის, **Mathcad**-ისა და **Matlab**-ის გრაფიკული საშუალებების საფუძველზე.

შეადგინეთ ანალოგიური რეკურენტული არაწრფივი სისტემა, იპოვეთ წონასწორობის წერტილები, გამოიკვლიეთ ისინი მდგრადობაზე.

### 4.33. ფრანგიშვილი-ობგაძის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა, ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა ტოლია მიწოდებისა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი  $X(t)$ , რამდენიც სჭირდება ბაზარს  $Y(t)$



$$X(t) = Y(t). \quad (4.272)$$

$X(t)$  არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა),  $Y(t)$  - მოთხოვნა.

(4.272) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$X(t) = C(t) + I(t), \quad (4.273)$$

სადაც  $C(t)$  მოთხოვნის ფუნქციაა,  $I(t)$  – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-პიკის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t), \quad (4.274)$$

სადაც  $\beta$  აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების წინა ისტორიაზე, გავლილ  $t$  დროში. სხვანაირად,

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau), \tau] d\tau, \quad (4.275)$$

წონასწორობის (4.273) განტოლებაში (4.274) და (4.275) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(\tau)] d\tau. \quad (4.276)$$

(4.276) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \quad (4.277)$$

ანუ, მივიღებთ ფრანგიშვილი-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta} \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta} F[X(t)] = 0 \quad (4.278)$$

ვთქვათ,

$$\beta = -\frac{1}{e}; \quad (4.279)$$

მაშინ მივიღებთ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0, \quad (4.280)$$

სადაც  $e = const$ , ხოლო  $F_1[X(t)]$  მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (4.281)$$

მაშინ (4.280)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A \cos(\omega \cdot t). \quad (4.282)$$

(4.282) განტოლების ამოსახსნელად უნდა გადავწეროთ იგი ნორმალური, ე.ი. პირველი რიგის ორი განტოლების სისტემის სახით. ამისათვის უნდა შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\dot{X}(t) \equiv X_1; \quad X(t) \equiv X_0. \quad (4.283)$$

მაშინ, (4.282) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = X_1 \\ \dot{X}_1(t) = A \cos(\omega \cdot t) + X_0 - X_0^3 - e \cdot X_1 \end{cases}. \quad (4.284)$$

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.33

*ამოცანა.* განვიხილოთ დიუფინგის ეკონომიკური დინამიკის განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases} \quad (4.285)$$

და  $A = 0.25; \omega = 1.0; e = 0.2$  მონაცემებით, შემდეგ ამოხსენით ამოცანა Mathcad-სა და Matlab-ში.

**ამოხსნა.** დიუფინგის განტოლების ამოხსნელად შევადგინოთ პროგრამა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

დემპფირების პროპორციულობის კოეფიციენტი,

$$c := 0.2$$

მოთხოვნის გარე შემფოთების სეზონური სიხშირე,

$$\omega := 1.0$$

მოთხოვნის გარე შემფოთების ამპლიტუდა,

$$A := 0.25$$

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი პირობები

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

დიუფინგის განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარის მატრიცა.

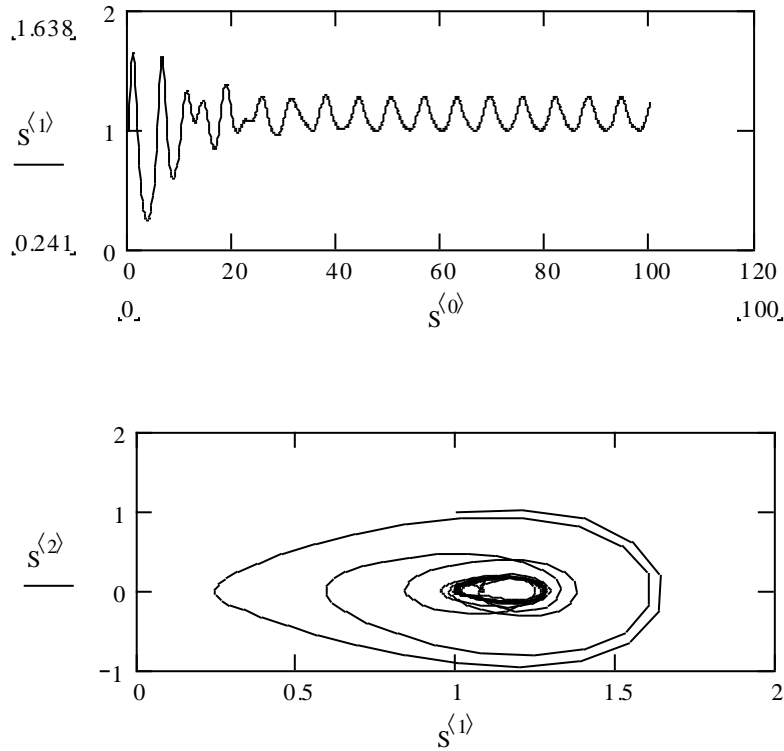
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A \cdot \cos(\omega \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - c \cdot X_1 + 0.3 \end{bmatrix}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ოპერატორი რუნგე-კუტას მეთოდით ცვლადი ბიჯით.

$$S := \text{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე

$$i := 0..last(S^{(0)})$$



### სავარჯიშო.

განიხილეთ დიუფინგის განტოლება ნორმალური სახით:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = X_1 \\ \ddot{X}_1 = A \cos(\omega t) + X_0 - X_0^3 - eX_1 \end{cases}$$

და ამოხსენით საწყისი პირობებით

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases}$$

$A, \omega, e$  პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეეცადეთ ისე შეარჩიოთ პარამეტრების მნიშვნელობები, რომ მიიღოთ ეკონომიკის განვითარების სხვადასხვა რეჟიმები. გამოიკვლიეთ სისტემის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. შეაფასეთ ბიფურკაციის წერტილები.

### 4.34. ეკონომიკური დინამიკის მატეის განტოლება

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით შევადგენთ წონასწორობის განტოლებას

$$X(t)=C(t)+I(t), \quad (4.286)$$

სადაც  $C(t)$  მოხმარებაა,  $I(t)$  – ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \quad (4.287)$$

სადაც  $\beta(t)$  აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა,  $C(t)$  მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, ამავდროულად ის დამოკიდებულია მოხმარების წინა ისტორიაზე, ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე:

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (4.288)$$

(4.287)-ისა და (4.288)-ის (4.286)-ში შეტანით, მივიღებთ

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)] dt. \quad (4.289)$$

(4.289) განტოლების ორივე მხარის  $t$ -თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \quad (4.290)$$

ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + (\dot{\beta}(t) - 1) \dot{X}(t) + F[X(t)] = 0. \quad (4.291)$$

რადგან  $\beta(t) \neq 0$ , შეიძლება (4.291) განტოლება გავყოთ  $\beta(t)$ -ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F[x(t)] = 0. \quad (4.292)$$

თუ (4.292)-ში შევარჩევთ  $\beta(t)$  და  $F[x(t)]$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= t \\ F[x(t)] &= t(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot x(t) \end{aligned} ; \quad (4.293)$$

მივიღებთ ეკონომიკური დინამიკის მატრის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t)x(t) = 0. \quad (4.294)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად უნდა გადავწეროთ ის ნორმალური სახით, ანუ პირველი რიგის ორი განტოლების სისტემის სახით. ამისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\dot{X}_0(t) \equiv X_1; \quad X(t) \equiv X_0. \quad (4.295)$$

მაშინ (4.294) შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = X_1 \\ \dot{X}_1(t) = -(\omega^2 + \varepsilon \cos 2t) \cdot X_0 \end{cases} \quad (4.296)$$

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.34

*ამოცანა.* განვიხილოთ ეკონომიკური დინამიკის მატრის განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases} \quad (4.297)$$

და მონაცემებით  $\omega = 0.5; \varepsilon = 0.3$ . შევისწავლოთ ეკონომიკური დინამიკა  $\omega$ -სა და  $\varepsilon$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ავაგოთ  $X_0(t)$  დამოკიდებულების გრაფიკი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შევისწავლოთ ფაზური პორტრეტი.

ამოხსნა.

პროგრამა Mathcad-ზე

წარმოების მოცულობის დემპფირების კოეფიციენტის შემფოთების მცირე ამპლიტუდა

$$\varepsilon := 0.8$$

შემფოთების სიხშირე

$$\omega := 0.01$$

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი მიახლოებები

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მატიეს განტოლების მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

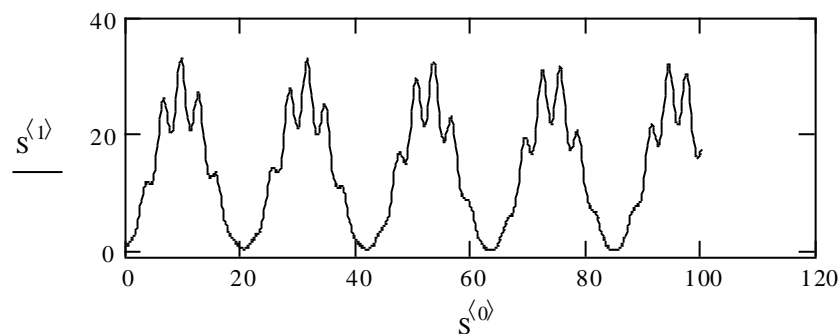
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_0 \cdot (\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot t)) + 1.1 \end{bmatrix}$$

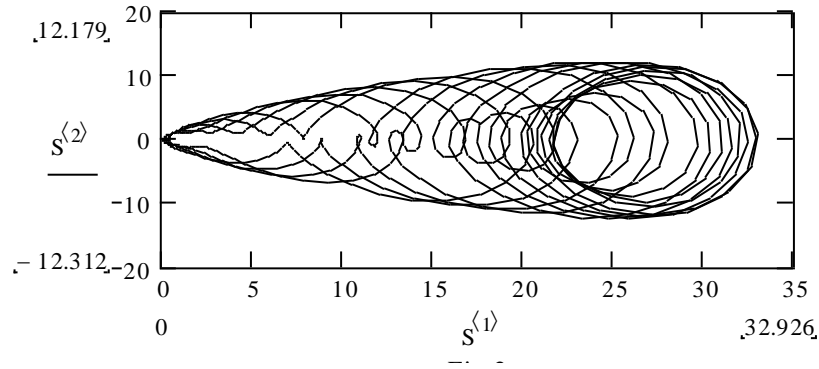
ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯის გამოყენებით

$$S := \text{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზებზე:

$$i := 0..last(S^{(0)})$$





#### 4.35. კურასაოს ეკონომიკურ-პოლიტიკური ბრძოლის მეთოდი

არსებობს არასასურველ ბიოლოგიურ სახეობასთან ბრძოლის სხვადასხვა მეთოდები. ერთი მათგანი ცნობილია “ბრძოლის კურასაოს მეთოდი”-ს სახელწოდებით. მისი არსი შემდეგია: რაღაც არეალზე მცხოვრებ სახეობათა პოპულაციაში, რომლის განადგურებაც განიზრახეს, რეგულარულად შეჰყავთ სტერილური ინდივიდი. ეს სტერილური ინდივიდები არ მონაწილეობენ კვლავწარმოების პროცესში, მაგრამ სხვა დანარჩენებთან ერთად მონაწილეობენ შიდასახეობრივ ბრძოლაში, რითაც ამცირებენ პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის სიჩქარეს. იგივე ხდება ეკონომიკასა და პოლიტიკაშიც.

განვიხილოთ შესაბამისი მოდელი.

ვთქვათ,  $N_1(t)$  ნორმალური ინდივიდების რიცხვია,  $M(t)$  – სიჩქარე, რომლითაც ამ პოპულაციაში შეჰყავთ სტერილური ინდივიდები, რომელთა რაოდენობა  $N_2(t)$ -ს ტოლია. ამოცანის მიზანია, შეძლებისდაგვარად  $M(t)$ -ს იმ მინიმალური სიჩქარის განსაზღვრა, რომლის დროსაც  $N_1$  პოპულაცია ქრება. განვიხილოთ კურასაოს მეთოდის შემდეგი დინამიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{N_1 dt} = a - m(gN_1 + hN_2) \\ \frac{dN_2}{N_2 dt} = \frac{M(t)}{N_2(t)} - m(gN_1 + hN_2) \end{cases} \quad (4.298)$$



სადაც  $m$  პოპულაციის მგრძობიარობის კოეფიციენტია საკვების უკმარისობაზე,  $a$ -ჭარბი საკვების პირობებში პოპულაციის რაოდენობის ბუნებრივი ზრდის კოეფიციენტი,  $g$  და  $h$  კი დადებითი კონსტანტები (პოპულაციის გაუმადრობის კოეფიციენტი).

დავუშვათ, სტერილური ინდივიდები შეჰყავთ პოპულაციის  $N_2(t)$  მოცულობის პროპორციულად, ე.ი.

$$M(t) = K \cdot N_2(t). \quad (4.299)$$

ასევე თუ ავიღებთ გაუმადრობის შემდეგ კოეფიციენტებს:

$$g=h=1, \quad (4.300)$$

(4.298) და (4.299)-დან მივიღებთ კურასაოს მოდელს:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1[a - m(N_1 + N_2)] \\ \dot{N}_2 = N_2(t)[k - m(N_1 + N_2)] \end{cases} \quad (4.301)$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ:

ა) თუ  $a > k$ , ნორმალური პოპულაცია არ კვდება მაშინაც კი, როცა  $N_2(0)$  ძალიან დიდია. უფრო მეტიც, ამ შემთხვევაში სტერილური ინდივიდები აღრე თუ გვიან კვდებიან;

ბ) თუ  $a < k$ , მაშინ ნორმალური პოპულაცია კვდება, ხოლო სტერილური ინდივიდების პოპულაცია იზრდება და მისი რაოდენობა აღწევს თავის მაქსიმალურ  $N_2 = k/m$  მნიშვნელობას. ამის შემდეგ, სტერილურ ინდივიდთა პოპულაციაც იწყებს კვდომას.

კურასაოს მეთოდის ერთ-ერთი სტრატეგიაა: (4.299) დამოკიდებულების ნაცვლად მისი მაქსიმალური სტაბილური, დროში უცვლელი ამონახსნის გამოყენება

$$M = M_0 = K \cdot N_{2\max} = K \cdot \frac{k}{m} = \frac{k^2}{m}. \quad (4.302)$$

ამ შემთხვევაში მიღებულია, რომ  $a$  და  $m$  პარამეტრები ცნობილია, ხოლო  $k$  კოეფიციენტისათვის სრულდება პირობა  $k > a$ , რის შედეგადაც ნორმალური პოპულაციის რაოდენობა  $N_1(t) \rightarrow 0$ .

მეცნიერებაში ანალოგიურ ამოცანას ვაწყდებით, მაგალითად, რომელიმე შემოქმედებითი კოლექტივის სამეცნიერო პოტენციალის ანალიზის დროს, რომლის შეესება ხდება არაკვალიფიცირებული კადრებით.

ეკონომიკური ანალოგიის სახით გამოდგება უვარგისი დანადგარების შექმნა.

ანალოგიური ამოცანა შეიძლება ავავოთ რაიმე საწარმოო ჯგუფების კონკურენციის ანალიზის დროს, საქონლის ახალ სახეობათა წარმოების ათვისებისას, როდესაც, მაგალითად, ერთ-ერთი მოწინააღმდეგე “შეიტყუებს” თავის კონკურენტს კონსტრუქციული დამუშავების ანალიზის ნაკლებად პერსპექტიულ გზაზე, რომელიც მიიყვანს მას არაკონკურენტუნარიანი პროდუქციის შექმნამდე.

### ლაბორატორიული სამუშაო 4.35

**ამოცანა.** შეისწავლეთ ბრძოლის კურასაოს მეთოდის მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1[a - m(N_1 + N_2)] \\ \dot{N}_2 = N_2[k - m(N_1 + N_2)] \end{cases}'$$

საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases} N_1(0) = 2000 \\ N_2(0) = 2000 \end{cases}$$

როდესაც

ა)  $m = \sqrt{0.00001}$ ;  $a = 9.9$ ;  $k = 10$  ( $a < k$ );

ბ)  $m = 0.01$ ;  $a = 10$ ;  $k = 9.9$  ( $a > k$ ).

**ამოხსნა:**

**პროგრამა Mathcad-ზე**

დასათრგუნი პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის ტემპი

$$a := 9.5$$

დასათრგუნი და შეტანილი პოპულაციების საწყისი მოცულობები

$$ic := \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

სტერილური პოპულაციის ზრდის ტემპი

$$k := 10$$

პოპულაციის გაუმადრობის მაჩვენებელი

$$m := \sqrt{0.0000}$$

კურასაოს მოდელის მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_0 \cdot [a - m \cdot (X_0 + X_1)] \\ X_1 \cdot [k - m \cdot (X_0 + X_1)] \end{bmatrix}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯით

$$S := \text{Rkadapt}(ic, 0, 200, 300, D)$$

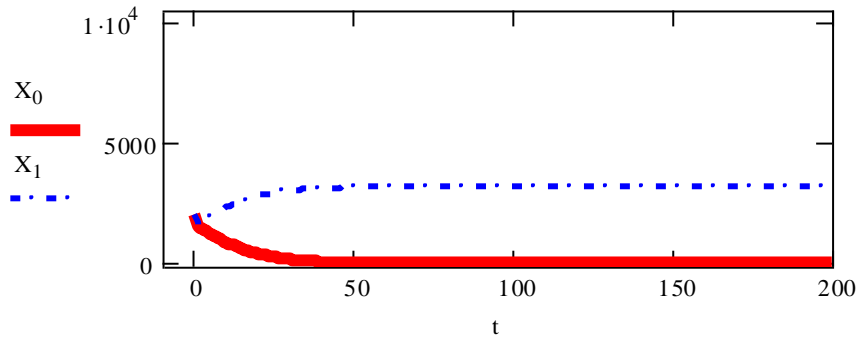
პოპულაციის დინამიკა დროსთან დამოკიდებულებაში

$$i := 0.. \text{last}(S^{(0)})$$

$$t := S^{(0)}$$

$$X_0 := S^{(1)}$$

$$X_1 := S^{(2)}$$



**ამოცანები და სავარჯიშოები.**

1. შეისწავლეთ ბრძოლის კურასაოს მათემატიკური მოდელი  $m$ ,  $a$ ,  $k$  პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს. განიხილეთ საწყისი პირობების სხვადასხვა ვარიანტები. ააგეთ თქვენი შედეგების გრაფიკები და ახსენით მიღებული შედეგები.

2. ა) შეისწავლეთ მატეის მოდელი  $\varepsilon$  და  $\omega$  განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;

ბ) შეისწავლეთ საწყისი პირობების გავლენა დინამიკურ სურათზე.

3. შეისწავლეთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლების მიხედვით, როცა  $\alpha$  ცნობილია. ქალაქისათვის  $N$  მცხოვრებით და  $l$  საარსებო მინიმუმით,  $\beta$  აქსელერაციის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეისწავლეთ  $X(t)$  დინამიკა, თუ:

1.  $\alpha=0.3$ ;  $N=3 \cdot 10^6$ ;  $l=80$ ;  $\beta$  -?
2.  $\alpha=0.2$ ;  $N=3 \cdot 10^6$ ;  $l=80$ ;  $\beta$  -?
3.  $\alpha=0.1$ ;  $N=3 \cdot 10^6$ ;  $l=80$ ;  $\beta$  -?
4.  $\alpha=0.4$ ;  $N=5 \cdot 10^6$ ;  $l=100$ ;  $\beta$  -?
5.  $\alpha=0.5$ ;  $N=5 \cdot 10^6$ ;  $l=100$ ;  $\beta$  -?
6.  $\alpha=0.6$ ;  $N=5 \cdot 10^6$ ;  $l=100$ ;  $\beta$  -?
7.  $\alpha=0.1$ ;  $N=3 \cdot 10^6$ ;  $l=100$ ;  $\beta$  -?
8.  $\alpha=0.1$ ;  $N=3 \cdot 10^6$ ;  $l=100$ ;  $\beta$  -?

## ლიტერატურა

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959
3. Волterra В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976
4. Магнус К. Колебания. Пер. с немецкого. М.: Мир, 1982
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн. Пер. с англ. М.: Мир, 1979
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.2: М: Наука, 1972
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973
10. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006
11. ოზგაძე თ, ოზგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007
12. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001

14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика.Т.1. М.: Наука, 1973
- 15.Постников Л.В., Королев В.И. Сборник задач по теории колебаний. Москва: Наука, 1978
- 16.Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.Линейные колебания и волны.Саратов: изд-во Саратовского ГУ, 2002.
- 17.Obgadze T.A., Prangishvili A.I.,Sakvarelidze N., Iashvili L. Mathematical modelling of excessive demand for essential commodities dynamics at periodic, panic PR-exciter, transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi , 2009
- 18.Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001
- 19.Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненко М.В. Математические модели природы и общества. Москва, 2005
- 20.Кузнецов А.П.,Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.Нелинейные колебания Москва,2002
21. Anrew F.Sigel. Practical Buisness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000
22. Мицкевич А.А. Деловая математика в экономической теории и практике, Высшая школа экономики, Москва, 1995
23. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., Москва, 2002
24. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М., 1997
25. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003
26. ჯიბლაძე ნ., თოფჩიშვილი ა. სტატისტიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები, მართვის სისტემების ინსტიტუტი, თბილისი, 2001

27. Gilbert A.Cherchill. Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996
28. Дьяконов В. Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления. "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001
29. Обгадзе Т.А. Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, Москва, 2002
30. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Министерство образования РФ, ВлГУ, Владимир, 1999
31. Christopher Dougherty. Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992
32. Дьяконов В. Matlab, учебный курс универсальная интегрированная система компьютерной математики, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001
33. Обгадзе Т.А., Цвераидзе З.Н. Математические модели в экономике; 20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 Professional, ГТУ, Тбилиси, 2006
34. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, пер. с англ., М. 1971
35. Яглом А.Я., Яглом И.М. Вероятность и информация, Москва, 1973
36. Прохоров Ю.В. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, СМБ, Москва, 1973
37. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, учеб. пос., М., 1975
38. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей, учеб. пос., задачи и упражнения. Москва, 1973
39. Обгадзе Т.А. Математическая модель Лоренца в экономике производства, ГЭНЖ, компьютерные науки и телекоммуникации, №4(11), 2006

- 40.Летников А.В.Теория дифференцирования с произвольным указателем//Матем.Сб.-1868.-т.3, вып.1.-С. 1-68.
- 41.Самко С.Г.,Килбас А.А.,Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника.-1987-688с.
- 42.Васильев В.В.,Симак Л.А.Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. НАН Украины, Киев, 2008. 256 с.
43. ობგაძე თ., ბიჩენოვა ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (სოციალურ-ეკონომიკური სისტემები), ტ.5. თბილისი: სტუ, 2012



## II ნაწილი. განაწილებულპარამეტრიანი სისტემების მათემატიკური მოდელირება

### V თავი. მრავალნაწილაკიანი სისტემების მათემატიკური მოდელირება კლასიკურ მექანიკაში

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა შედგება მეტად მრავალრიცხოვანი ნაწილაკებისაგან, თითოეული ნაწილაკისათვის ლაგრანჟის განტოლების ჩაწერა, ან მოძრაობის განტოლების რომელიმე სხვა ფორმით ჩაწერა, არ გვაძლევს საიმედო შედეგს, რადგან კომპიუტერის ოპერატიულ მესხიერებაც შემოფარგლულია, ამასთან შეუძლებელია საწყისი პირობების ზუსტი ცოდნაც.

ასეთ შემთხვევაში, მაგალითად, თუ საქმე გვაქვს გაზთან, სითხესთან, ან დეფორმირებად სხეულთან, რომლებიც უამრავი მოლეკულებისაგან შედგება, ჩვენ ვერ გამოვიყენებთ პირდაპირ, იმ მოდულებს, რომლებიც განვიხილეთ წინა თავებში. ამიტომ, უნდა ვეძიოთ სხვა მახასიათებლები და განმსაზღვრელი პარამეტრები, რომლებიც შესასწავლ გარემოს არა მოლეკულურ დონეზე, არამედ უფრო გლობალური – საშუალო მახასიათებლების დონეზე წარმოადგენენ, ან განვიხილოთ სისტემის ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლები.

#### 5.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი

სისტემის, ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლებით მოდელირებას ახდენენ სტატისტიკურ მექანიკასა და კვანტურ ფიზიკაში.

განვიხილოთ, ჰამილტონის განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \quad (5.1)$$

n-მატერიალური წერტილისათვის, როდესაც n-იმდენად დიდია, რომ წერტილთა საწყისი განლაგებანი  $q_i(0)$  და მათი საწყისი

იმპულსები  $p_i(0)$  - განისაზღვრებიან მხოლოდ გარკვეული ალბათობით, გარკვეულ საზღვრებში მაგალითად,  $1\text{მ}^3$  გაზი ნორმალურ პირობებში შეიცავს დაახლოებით  $10^{23}$  მოლეკულას, ამიტომ ცხადია, რომ შეუძლებელია მათი ზუსტი განლაგებისა და იმპულსების დადგენა.

თუ  $f_N(\vec{p}, \vec{q}, \vec{t}) = C$ -არის (5.1) სისტემის პირველი ინტეგრალი ანუ თუ ის შეესაბამება, მოცემული სისტემის რეალურ მოძრაობას, მაშინ სისტემის მოძრაობისას ის რჩება მუდმივი, ე.ი.

$$\frac{df_N}{dt} = 0. \quad (5.2)$$

მაგრამ, თუ გავშლით (5.2) ტოლობას სრული წარმოებულის ფორმულით, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left( \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (5.3)$$

ამ განტოლებაში, თუ შევიტანთ (5.1) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left( \frac{\partial f_N}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (5.4)$$

ამ განტოლებას **ლიუვილის** განტოლებას უწოდებენ. თუ გამოვიყენებთ პუასონის ფრჩხილების ცნებას, ლიუვილის (5.4) განტოლება გადაიწერება სახით:

$$\frac{df_N}{dt} + \{H \cdot f\} = 0. \quad (5.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ სისტემის სტატისტიკურ განხილვას და  $f_N$ -ფუნქციას განვიხილავთ, როგორც შესაძლო საწყისი მონაცემების განაწილების სიმკვრივეს, მაშინ (5.5) ლიუვილის მოდელი, სწორედ ის მოდელია, რომელიც საფუძვლად უდევს მთელ სტატისტიკურ მექანიკას.

(5.5)-მოდელი აღწერს,  $(p, q) \rightarrow (p+dp, q+dq)$  ფაზურ სივრცეში, სისტემის ყოფნის

$f_N$ -აღბათობის სიმკვრივის განაწილებას დროის მიხედვით თუ არ ხდება სხვა-დასხვა ნაწილაკების ურთიერთშეჯახება. ხოლო, თუ გვინდა გავითვალისწინოთ სისტემაში შემავალი მატერიალური წერტილების შეჯახებაც, მაშინ უნდა მივმართოთ **ბოლცმანის მათემატიკურ მოდელს**.

## 5.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ გაზი, რომელიც შეიცავს  $N$ -ერთნაირ მოლეკულას, რომლებიც მოთავსებული არიან  $V$  მოცულობის ჭურჭელში. დაუშვათ, რომ მოლეკულები წარმოადგენენ იდეალურად დრეკად ბურთულებს. შეჯახებისას, მოლეკულების სრული ენერგია და იმპულსი ინახება (არ იცვლება). გაზის სიმკვრივე იმდენად მცირეა, რომ ორი მოლეკულის შეჯახებაზე, მეზობელი მოლეკულები არ მოქმედებენ. ამასთან, ჩვენ შემოვიფარგლებით თითქმის იდეალური გაზით.

ავლნიშნოთ  $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ -იმ მოლეკულების რაოდენობა ( $\leq N$ ) რომელთა სიჩქარეების კომპონენტებიც მოთავსებული არიან  $v_x$  და  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  და  $v_y + dv_y$ ,  $v_z$  და  $v_z + dv_z$ -ს შორის.  $f_N(\vec{v})$ - ფუნქციას უწოდებენ სიჩქარეების განაწილების ფუნქციას. განვიხილოთ ერთგვაროვანი და იზოტროპიული გაზი და უგულებელყოთ გარეშე მოქმედი ძალები. ასეთ შემთხვევაში, განაწილების ფუნქცია არაა დამოკიდებული სივრცით კოორდინატებზე და დამოკიდებულია, მხოლოდ სიჩქარის სიდიდეზე, ე.ი.  $f_N(\vec{v}) = f_N(v^2)$ . განაწილების ფუნქციის ნორმირების პირობას აქვს სახე:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(\vec{v})d\vec{v} = N. \quad (5.6)$$

ცხადია, რომ უსასრულო სიჩქარეები არ არსებობს, ამიტომ  $f_N$ -ფუნქცია უნდა ქრებოდეს  $\pm\infty$ -საკენ ( $\vec{v}$ )-ს მისწრაფებისას. გაზი იმყოფება მოლეკულური ქაოსის მდგომარეობაში. განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევას, როცა ეჯახება ორი მოლეკულა. (ე.ი. სამი მოლეკულის ან მეტის ერთდროული დაჯახება არ განიხილება). ვთქვათ, დაჯახებამდე მოლეკულებს ჰქონდათ  $\vec{v}$  და

$\vec{v}_1$  სიჩქარეები. დაჯახების შემდეგ, მათი სიჩქარეებია  $\vec{v}'$  და  $\vec{v}'_1$ . ვგულისხმობთ, რომ მაშინ ერთ-ერთი უახლოვდება მეორეს  $\vec{g} = \vec{v}_1 - \vec{v}$  ფარდობითი სიჩქარით და სცილდება მას  $\vec{g}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'$  სიჩქარით. დაჯახების მიმართულება ავღნიშნოთ ერთეულოვანი  $\vec{n}$ -ვექტორით, მიმართულია  $\vec{g}$  და  $\vec{g}'$ -ს შორის კუთხის ბისექტრისის გასწვრივ. მაშინ,

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}); \quad |g| = |g'|; \quad (5.7)$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}). \quad (5.8)$$

თუ, გამოვთვლით (5.7) და (5.8) გარდაქმნის იაკობიანს მოცემული  $\vec{n}$  და  $\vec{g}$  ვექტორებისათვის, მივიღებთ რომ

$$d\vec{v}d\vec{v}_1 = d\vec{v}'d\vec{v}'_1. \quad (5.9)$$

ასე, რომ სიჩქარეების ფაზურ სივრცეში ელემენტარული მოცულობა დაჯახების მიმართ ინვარიანტულია.

განვიხილოთ ნაწილაკ-სამიზნის ზედაპირის კონცენტრული სფერო რომლის რადიუსიცაა  $a$  და ავაგოთ შეჯახების ცილინდრი, რომლის ფუძეც მდებარეობს სფეროს ზედაპირზე და ცენტრების ხაზზე. ცილინდრის მსახველი პარალელურია პირველი ნაწილაკის სიჩქარისა დაჯახებამდე. ვთქვათ, დახრილი ცილინდრის ფუძის ფართობია  $a^2 \sin \Psi d\Psi d\Phi$ , ხოლო მსახველის სიგრძეა  $l \sin \theta \times g$ . დროის ერთეულის განმავლობაში სამიზნეს დაეჯახებიან ყველა ნაწილაკები, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია  $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$  შუალედში, ხოლო ცენტრები ვარდებიან ამ ცილინდრში. ასეთი ნაწილაკების რაოდენობაა  $f_N(\vec{v})d\vec{v}$  გამრავლებული ცილინდრის მოცულობაზე:

$$f_N(\vec{v})d\vec{v} \cdot (g \sin \Psi) a^2 \cos \Psi d\Psi d\Phi = f_N(\vec{v})d\vec{v} \cdot g l(\theta, g) d\Omega; \quad (5.10)$$

სადაც

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\Phi; \quad (5.11)$$

$\theta$ -გაბნევის კუთხეა,

$\pi \cdot I(\theta, g)$ - გაბნევის კვეთია, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში უდრის  $\frac{\pi a^2}{4}$

ასეთი გაბნევის ცენტრების რაოდენობა, ანუ იმ მოლეკულების რაოდენობა, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია  $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$  შუალედში, უდრის  $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ . ამიტომ, აღნიშნული ტიპის დაჯახებათა რაოდენობა დროის ერთეულში იქნება:

$$A = f_N(\vec{v})f_N(\vec{v}_1)d\vec{v}d\vec{v}_1 \cdot gI(\theta, g)d\Omega. \quad (5.12)$$

არსებობენ, აგრეთვე მოცემული დაჯახებების შექცეული დაჯახებებიც, რომელთა რაოდენობა:

$$B = f_N(\vec{v}')f_N(\vec{v}'_1)d\vec{v}'d\vec{v}'_1 \cdot gI(\theta, g)d\Omega. \quad (5.13)$$

განაწილების ფუნქციის სრული ცვლილება  $\frac{df_N}{dt}d\vec{v}$  იქნება B-A სხვაობის ინტეგრალი  $\vec{v}_1, \vec{v}'_1$  და კუთხეების მიხედვით:

$$\frac{df_N}{dt} = \int (f'_N f'_{1N} - f_N f_{1N}) gI(\theta, g) d\vec{v}_1 d\Omega. \quad (5.14)$$

$$\text{სადაც } f_N = f_N(\vec{v}), f_{1N} = f_N(\vec{v}_1), f'_N = f_N(\vec{v}'), f'_{1N} = f_N(\vec{v}'_1). \quad (5.15)$$

(5.14) განტოლებას **ბოლცმანის** განტოლებას უწოდებენ.

სტატისტიკური მექანიკის ძირითადი ამოცანაა, გამოსახოს მაკროსკოპული სიდიდეები: T-ტემპერატურა, p-წნევა,  $\rho$ -სიმკვრივე და ა.შ. განაწილების აღბათობათა  $f_N$  სიმკვრივის მეშვეობით ფაზურ სივრცეში. შესაბამისი ტექნიკა მოითხოვს **განზოგადოებული ფუნქციების** ცოდნას, რაც საკმაოდ რთულია, ამიტომ უწყვეტ ტანთა მექანიკის მოდელების შესადგენად ჩვენ გამოვიყენებთ ტენზორულ აღრიცხვას და შენახვის კანონებს.

### 5.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ტენზორული აღგებრა არის ვექტორული აღრიცხვის განზოგადოება მრუდწირული კოორდინატების შემთხვევაში.

ტენზორული აღნიშვნები საშუალებას გვაძლევენ გავამარტივოთ უწყვეტ ტანთა მათემატიკური მოდელები.

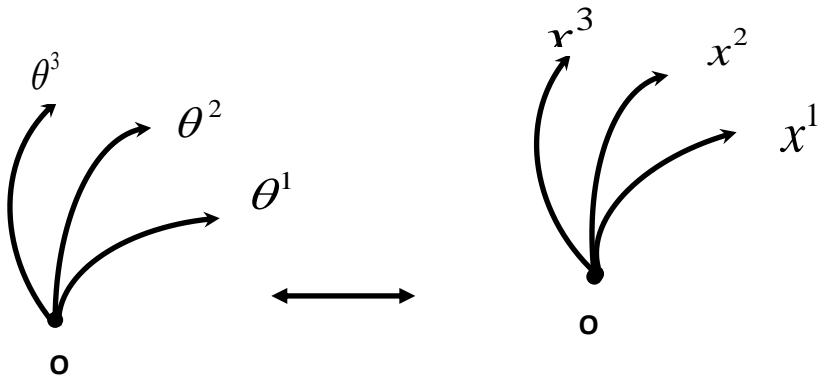
ტენზორულ აღგებრაში  $\vec{a}$  - ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს:

$$a_i \text{ და } a^i ; \tag{5.16}$$

თუ ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ – მაშინ მათ უწოდებენ  $\vec{a}$  - ვექტორის

$a^i$ -კონტრავარიანტულ კომპონენტებს, ხოლო თუ, ინდექსები ჩაწერილია ქვემოთ, მაშინ მათ უწოდებენ  $\vec{a}$ -ვექტორის  $a_i$ -კოვარიანტულ კომპონენტებს.

ტენზორის, კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების განსასაზღვრად, განვიხილოთ ერთი  $\theta^i$ - მრუდწირული კოორდინატა სისტემიდან მეორე  $x^i$ -კოორდინატა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები.



ნახ. 5.1.  $\theta^i$  და  $x^i$  მრუდწირული კოორდინატა სისტემებია ვთქვათ, გარდაქმნის ფორმულებს აქვს სახე:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\} . \tag{5.17}$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში:

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (5.18)$$

ჩავთვალოთ, რომ (5.18) გარდაქმნები არიან, ურთიერთცალსახა და ორმხრივ უწყვეტნი (ჰომეომორფიზმი), P-წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (5.19)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (5.18) ფორმულები შეიძლება შევაბრუნოთ P-წერტილის მიდამოში, ანუ ამოვხსნათ  $\theta^i$ -კოორდინატების მიმართ,

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (5.20)$$

(5.18) ფორმულების ბაზაზე, დავადგინოთ თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები.

$P \in \mathbb{R}^3$  წერტილის მიდამოში, (5.18)-დან მივიღებთ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (5.21)$$

სიმბოლური აღნიშვნების მეშვეობით (5.21) გადაიწერება მოკლედ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (5.22)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ, ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ j-ინდექსით ხდება შეჯამება  $j = \overline{1,3}$ .

**განსაზღვრება:** იმ j-ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება – ყრუ ინდექსი ეწოდება.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ყრუ ინდექსი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი სხვა ინდექსით, რომელიც არ გვხვდება მოცემულ ჩანაწერში.

**განსაზღვრება:** იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში არ მეორდება თავისუფალი ინდექსი ეწოდება.

(5.22)-ჩანაწერში  $i$ -არის თავისუფალი ინდექსი,  $j$ -ყრუ ინდექსია.

**განსაზღვრება:** ტენზორის კომპონენტების თავისუფალ ინდექსთა რიცხვს – ტენზორის რანგი ეწოდება.

**მაგალითად:**  $a_i$  და  $a^i$  - პირველი რანგის ტენზორის (რანგის) კომპონენტებია;

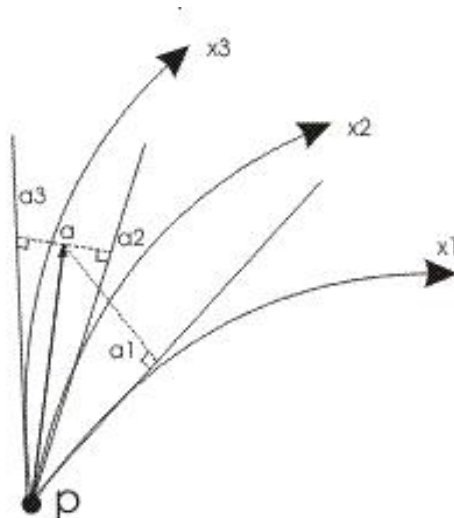
$a_{ij}, a^{ij}, a_i^j$  -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებია  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ -სკალარული ფუნქცია, ანუ, ნულ-რანგის ტენზორია.

**განსაზღვრება:**  $P$ -წერტილში განსაზღვრულ  $a^i$ -სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების (5.22) დიფერენციალები, ანუ, თუ ძველ სისტემაში  $a^j$  და ახალ სისტემაში  $a'^i$  -კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (5.23)$$

იმისათვის, რომ გავიგოთ კონტრავარიანტული კომპონენტების არსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 5.2)  $P$ -წერტილში, სადაც მოდებულია  $\vec{a}$ -ვექტორი.





ნახ. 5.2.  $\vec{a}$ -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული  $x^i$ -დერძების მხეხები P-წერტილში. მაშინ  $\vec{a}$ -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ ამ ვექტორის ორთოგონალურ პროექციებს  $a^i$ , შესაბამისი მრუდწირული დერძების მხების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებულები არიან P-წერტილში.

მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტებიც გარდაიქმნებიან (5.23) ფორმულების ანალოგიურად.

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრულ  $\sigma^{ij}$ -სიდიდეებს ეწოდებათ მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^m} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^n} \sigma^{mn}. \quad (5.24)$$

ამ ფორმულებში აინშტაინის შეთანხმების თანახმად, იგულისხმება ორმაგი შეჯამება m და n ყრუ ინდექსებით, ხოლო i და j – თავისუფალი ინდექსებია.

უფრო მაღალი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

ესლა განვიხილოთ ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება  $\varphi$ -ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ, მოცემული გვაქვს  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ - სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \quad (5.25)$$

ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \quad (5.26)$$

(5.26) – ფორმულაში იგულისხმება შეჯამება  $j$ -ყრუ ინდექსით (ეს არის რთული ფუნქციის წარმოებული),  $i$ -თავისუფალი ინდექსია.

**განსაზღვრება:**  $P$ -წერტილში განსაზღვრულ  $a_i$  - სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ძველ კოორდინატთა სისტემაში  $a_j$  და ახალ კოორდინატთა სისტემაში  $a'_i$  დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან სკალარული ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის (5.26) ფორმულების მსგავსად:

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j \quad (5.27)$$

ამ ფორმულებში  $j$ -ყრუ ინდექსია (ხდება შეჯამება ამ ინდექსით),  $i$ -თავისუფალი ინდექსია.

**მეორე რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების განსაზღვრისთვის გამოიყენება (5.27) ფორმულების მსგავსი გარდაქმნები.**

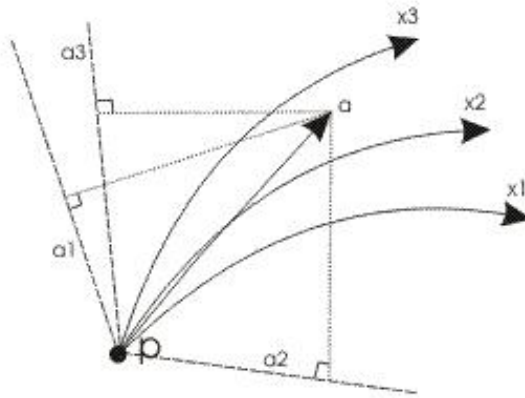
**განსაზღვრება:**  $P$ -წერტილში განსაზღვრული  $\sigma_{ij}$  სიდიდეებს ეწოდებათ მეორე რანგის კოვარიანტული კომპონენტები, თუ

კოორდინატთა გარდაქმნისას ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \sigma_{mn} . \quad (5.28)$$

ამ ფორმულებში  $m$  და  $n$  ყრუ ინდექსებია (ორმაგი ჯამია), ხოლო  $i$  და  $j$  – თავისუფალი ინდექსებია.

პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული აზრის ასახვასნელად, განვიხილოთ ნახ. 5.3 პირველი რანგის ტენზორი, ანუ,  $\vec{a}$ -ვექტორი მოდებულია P-წერტილში.



ნახ. 5.3.  $\vec{a}$ -ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

$\vec{a}$ -ვექტორის  $a_1$  - კოვარიანტული კომპონენტი წარმოადგენს  $\vec{a}$ -ვექტორის ორთაგონალურ პროექციას  $x^2$  და  $x^3$  ღერძებზე მოჭიმული მინიმალური ზედაპირის P-წერტილში აღმართულ დადებით ნორმალურ (პერპენდიკულარ) მიმართულებაზე,

$$\hat{e}_1 = \frac{\hat{e}^2 \times \hat{e}^3}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}; \quad (5.29)$$

აქ  $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$  - P-წერტილში განსაზღვრული კონტრავარიანტული ბაზისია  $Ox^1, x^2, x^3$  მრუდწირული კოორდინატთა სისტემისათვის, რომელთაც აქვს ღერძებისადმი მხები მიმართულება,  $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$  - შესაბამისი კოვარიანტული ბაზისია, სადაც

$$\hat{e}_2 = \frac{\hat{e}^3 \times \hat{e}^1}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\hat{e}^1 \times \hat{e}^2}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}. \quad (5.30)$$

ხოლო  $[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]$  - კონტრავარიანტული ბაზისის ვექტორების შერეული ნამრავლია.

მაშასადამე, საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $\vec{a}$  - ვექტორის,  $a_i$ -კოვარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ  $\vec{a}$  - ვექტორის ორთოგონალურ პროექციებს, შესაბამისი

$\hat{e}_i$ - კოვარიანტული ბაზისის ვექტორის მიმართულებაზე.

**P.S.** თუ გამოვიყენებთ (5.28) გარდაქმნის ფორმულების ანალოგიურ ფორმულებს, შეგვიძლია შემოვიყვანოთ უფრო მაღალი რანგის ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტების ცნებაც.

ზოგჯერ, განიხილავენ ტენზორის შერეულ კომპონენტებს, ე.ი. ისეთ კომპონენტებს, რომლებსაც ზოგიერთი ინდექსი აქვთ კოვარიანტული და ზოგიც კონტრავარიანტული.

განვიხილოთ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები.

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრული  $T_{.nq}^{m..}$ -სიდიდეებს ეწოდებათ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$T_{.sp}^{'r..} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} \cdot T_{.nq}^{m..}. \quad (5.31)$$

**შენიშვნა:** ამ კომპონენტებში  $s$  და  $p$  – კოვარიანტული ინდექსებია,  $r$  – კონტრაგარიანტული. მარჯვენა მხარეში, იგულისხმება შეჯამება სამი ინდექსით (სამმაგი ჯამი)  $m, n$  და  $q$ .

#### 5.4. სიმბოლური აღნიშვნები

მათემატიკური მოდელების კომპაქტურად ჩასაწერად იყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს (ხშირად განიხილავენ დეკარტულ ტენზორებს).

განვიხილოთ ველის თეორიის ოპერატორები (როგორც დეკარტული ტენზორები, სადაც არ ანსხვავებენ კონტრაგარიანტულ და კოვარიანტულ კომპონენტებს):

**სკალარული ველის გრადიენტი**

$$\text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} \right). \quad (5.32)$$

ველის გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\varphi_{,i} \quad (5.33)$$

მაშასადამე,

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}; \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}; \quad \varphi_{,3} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}. \quad (5.34)$$

ანალოგიურად,  $\vec{v}$  -ვექტორული ველის დივერგენცია,

$$\text{div}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right). \quad (5.35)$$

ვექტორული ველის დივერგენცია სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ასე:

$$v^{i}_{\cdot,i} \quad (5.36)$$

აქ  $i$ -ყრუ ინდექსია (იგულისხმება შეჯამება  $i$ -ინდექსით).

ვექტორული  $\vec{v}$ -ველის როტორი, როგორც ვიციოთ გამოითვლება დეტერმინანტით:

$$\operatorname{rot} \vec{v} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \begin{vmatrix} \hat{e}^1 & \hat{e}^2 & \hat{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}. \quad (5.37)$$

ამ ოპერატორის ჩასაწერად სიმბოლური ფორმით, უნდა განვიხილოთ ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორი, რომლის კოვარიანტული  $\varepsilon_{ijk}$ -კომპონენტებიც განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \\ -1, \\ 0, \end{cases} \quad \text{შესაბამისად,} \quad (5.38)$$

თუ, (i,j,k) ლუწი ჩასმია (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;

თუ, (i,j,k) კენტი ჩასმია (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;

თუ, (i,j,k)-ში, რომელიმე ორი ან სამივე ინდექსი ერთმანეთის ტოლია.

მაგალითად:  $\varepsilon_{312} = 1$ ,  $\varepsilon_{132} = -1$ ,  $\varepsilon_{122} = 0$  და ა.შ.

ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის  $\varepsilon_{ijk}$ -კომპონენტები, საშუალებას გვაძლევენ კომპაქტურად ჩავწეროთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. მაგალითად, თუ

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}; \quad (5.39)$$

მაშინ

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (5.40)$$

ასევე, სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი,

$$\lambda = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (5.41)$$

მაშასადამე, ლევი-ჩივიტას ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების მეშვეობით, მოკლედ ჩაიწერება ვექტორული ნამრავლი, შერეული ნამრავლი და ასევე დეტერმინანტიც.

რადგან ვექტორული  $\vec{v}$ -ველის როტორი წარმოადგენს ნაბლა

$\vec{V}$ -ოპერატორისა და  $\vec{v}$ -ვექტორის, ვექტორულ ნამრავლს

$$\text{rot}\vec{v} = \vec{v} \times \vec{v}; \quad (5.42)$$

სიმბოლურად, ველის როტორის კომპონენტები ჩაიწერება ფორმულით:

$$(\text{rot}\vec{v})_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}. \quad (5.43)$$

განვიხილოთ ესლა, ლაპლასის  $\Delta$ -ოპერატორი:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}. \quad (5.44)$$

ლაპლასის ოპერატორი სიმბოლურად, ჩაიწერება ასეთი ფორმით

$$\Delta\varphi = \varphi_{,ii}. \quad (5.45)$$

აქ  $i$ -ყრუ (მუნჯი) ინდექსია ე.ი. იგულისხმება შეჯამება.

სიმბოლურ აღნიშვნებში გაწარმოების ოპერატორი აღინიშნება მძიმეთი, ყველა ინდექსი რომელიც მძიმეს მოყვება, წარმოადგენს იმ ცვლადის ინდექსს, რომლითაც ხდება გაწარმოება. მაგალითად:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = T_{,ij}; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} = \sigma_{ij,mn}. \quad (5.46)$$

## 5.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორი

**განსაზღვრება:** ორი ტენზორის გარე ნამრავლი ეწოდება ისეთ ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც წარმოადგენენ თანამამრავლი ტენზორების კომპონენტების ყველა შესაძლო ნამრავლს. მაგალითად:

$$a_i \cdot b_j = T_{ij} \quad v_i \cdot T_{jk} = T_{ijk}.$$

**P.S.** გარე ნამრავლის რანგი წარმოადგენს თანამამრავლთა რანგების ჯამს.

$$\text{rang}T_{ij} = \text{rang}a_i + \text{rang}b_j = 1 + 1 = 2$$

**განსაზღვრება:** ტენზორის ნახვევის ოპერაცია, ეწოდება ისეთ ოპერაციას, როცა ერთმანეთს უტოლდება რომელიმე ორი ინდექსი და ხდება შეჯამება ამ ინდექსით.

**მაგალითად:**  $\varepsilon_{ijk}$ -ტენზორის კომპონენტებზე ნახვევის ოპერაცია მოგვცემს:  $\varepsilon_{iik} \vee \varepsilon_{iji} \vee \varepsilon_{ijj}$ .

**P.S.** ნახვევის ოპერაციის შედეგად, ტენზორის რანგი მცირდება ორით.

**მაგალითად:** მეორე რანგის ტენზორის ნახვევი – სკალარული ფუნქციაა,  $\sigma_{ij}$ -ს ნახვევია  $\sigma_{ii}$ -სკალარი.

**განსაზღვრება:** ორი ტენზორის შიგა ნამრავლი, ეწოდება ისეთ ნამრავლს, რომელზედაც მოქმედებს ისეთი ნახვევის ოპერაცია, რომ უტოლდებიან რომელიმე ორი ინდექსი სხვადასხვა თანამამრავლებიდან.

**მაგალითად:** თუ გვაქვს ორი ვექტორი (პირველი რანგის ტენზორები)  $\vec{a}$  და  $\vec{b}$ , მაშინ მათი გარე ნამრავლია  $a_i b_j$ , ხოლო შიგა ნამრავლი იქნება:  $a_i b_i$ -ე.ი. სკალარული ნამრავლი.

მაღალი რანგის ტენზორებს გააჩნიათ რამოდენიმე შიგა ნამრავლი.



მაგალითად: ძაბვის-  $\sigma_{ij}$  ტენზორისა და დეფორმაციის  $\varepsilon_{mn}$  ტენზორებისათვის, გვაქვს შიგა ნამრავლები:

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{in} ; \sigma_{ij}\varepsilon_{mi} ; \sigma_{ij}\varepsilon_{jn} ; \sigma_{ij}\varepsilon_{mj} . \quad (5.47)$$

მეტრიკული ტენზორის შემოსატანად, განვიხილოთ  $IR^3$ -ში მახლობელი წერტილები  $P(x)$  და  $Q(x+dx)$ . ამ ორ წერტილს შორის მანძილის დიფერენციალის კვადრატი, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში არის:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (5.48)$$

სიმბოლურ აღნიშვნებში გვაქვს ჩანაწერი:

$$ds^2 = dx^i dx^i . \quad (5.49)$$

თუ, გადავალთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემაში

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \quad \text{და} \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p . \quad (5.50)$$

მაშინ (5.49) მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^q d\theta^p . \quad (5.51)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$g_{qp} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} . \quad (5.52)$$

$g_{qp}$ -წარმოადგენენ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს, რომელსაც მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ.

ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის (5.51) კვადრატი, (5.52)-მეტრიკული ტენზორის მეშვეობით მოიცემა მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში:

$$ds^2 = g_{ij}d\theta^i d\theta^j . \quad (5.53)$$

**განსაზღვრება:** მრავალსახეობას, სადაც მეტრიკა (მანძილი) განისაზღვრება დადებითად-განსაზღვრული (5.53) კვადრატული დიფერენციალური ფორმით-რიმანის მრავალსახეობა ეწოდება.

რიმანის მრავალსახეობაში არ არსებობს ერთიანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემა მთელი სივრცისათვის და ეს არის სივრცის შინაგანი თვისება. ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი, რიმანის მრავალსახეობაში შეიძლება იყოს რაღაც მრუდი (და არა წრფის მონაკვეთი), რომელსაც გეოდეზიურ წირს უწოდებენ. ეს ცნება შემოიღო გაუსმა, რომელიც სწავლობდა სფეროს ზედაპირზე მანძილების გამოთვლის ამოცანას (დედამიწისთვის).

ზოგად შემთხვევაში მეტრიკული ტენზორის  $g_{ij}$  კომპონენტები დამოკიდებული არიან სივრცით კოორდინატებზე. თუ, მეტრიკული ტენზორი არ არის დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე, მაშინ ასეთ სივრცეს ერთგვაროვან რიმანის მრავალსახეობას უწოდებენ.

იმის მიუხედავად, რომ რიმანის სივრცეში, საზოგადოდ, შეუძლებელია ერთიანი დეკარტული კოორდინატთა სისტემის შემოტანა, ამ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის შეგვიძლია შემოვიღოთ ლოკალური(ადგილობრივი) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მოგვცემს საშუალებას შევისწავლოთ ამ წერტილის მახლობელი არეების გეომეტრია. ასეთ არეებს – რუქებს უწოდებენ, ხოლო რუქების ერთობლიობას უწოდებენ რიმანის სივრცის ატლასს.

მეტრიკული ტენზორის  $g^{kj}$ -კონტრაგარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$g_{ij}g^{kj} = g_{ji}g^{jk} = \delta_i^k . \quad (5.54)$$

სადაც  $\delta_i^k$ -კრონეკერის ტენზორის შერეული კომპონენტებია. (5.54) ტოლობიდან ჩანს, რომ მეტრიკული ტენზორის

კონტრავარიანტული კომპონენტების  $g^{kj}$ -მატრიცა, წარმოადგენს მისი  $g_{ij}$ -კოვარიანტული კომპონენტების მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას.

მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები საშუალებას გვაძლევენ შემოვიღოთ ინდექსთა ჟონგლირების ოპერაცია, ანუ მათი აწვევ-დაწვევის ოპერაცია.

მაგალითად:

$$g^{ij}T_{kj} = T_k^i ; \quad (5.55)$$

$$g_{ij}T_{mn}^i = T_{jmn} . \quad (5.56)$$

შემდგომი, მათემატიკური მოდელების განსახილველად, ჩვენთვის საკმარისია დეკარტული ტენზორების განხილვა.

**განსაზღვრება:** ისეთ ტენზორებს, რომელთათვისაც განიხილება კოორდინატთა სისტემის მხოლოდ ორთოგონალური გარდაქმნები, დეკარტული ტენზორები ეწოდებათ.

დეკარტული ტენზორებისათვის, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები ემთხვევიან კრონეკერის ტენზორის კომპონენტებს:

$$g_{ij} = \delta_{ij} ; \quad (5.57)$$

სადაც

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

შესაბამისად,

თუ,  $i=j$  ;

თუ,  $i \neq j$ .

ანუ  $\delta_{ij}$ -კომპონენტები ადგენენ ერთეულოვან მატრიცას.

**შენიშვნა:** დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევა.

ჩვენ (ამ თავში) გამოვიყენებთ, მხოლოდ დეკარტულ ტენზორებს, რადგან არადეკარტული ტენზორები გამოიყენებიან, მხოლოდ სპეციალური, რთული მოდელებისათვის ფარდობითობის თეორიასა და გარსთა თეორიაში.

## 5.6 მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები.

### ჰამილტონ-კელის თეორემა

განვიხილოთ, მეორე რანგის  $T$  ტენზორის შიგა ნამრავლი, პირველი რანგის  $n$  ტენზორზე:

$$\vec{v} = T \cdot \vec{n}; \quad (5.58)$$

ეს ტოლობა კომპონენტებში მიიღებს სახეს:

$$v_i = T_{ij} \cdot n_j; \quad (5.59)$$

მეორე რანგის  $T$  ტენზორს შეიძლება შევხედოთ, როგორც წრფივ ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს  $\vec{n}$  ვექტორულ ველზე და გვაძლევს ახალ  $\vec{v}$  ვექტორულ ველს.

**ისმის კითხვა:** არსებობენ, თუ არა ისეთი  $\vec{n}$  ვექტორები, რომლებიც წრფივი  $T$  ოპერატორის მოქმედების შემდეგ, არ იცვლიან მოქმედების წრფეს, ანუ

$\lambda$ -ინვარიანტულნი არიან  $T$  ოპერატორის მიმართ?

**პასუხი:** თუ  $\vec{n}$  ვექტორი ინვარიანტულია  $T$  ოპერატორის მიმართ, მაშინ  $\vec{v} \updownarrow \vec{n}$  ანუ

$$v_i = \lambda \cdot n_j; \quad (5.60)$$

სადაც  $\lambda$ -ნულისგან განსხვავებული რიცხვია, მაშინ

$$T_{ij} n_j = \lambda \cdot n_j. \quad (5.61)$$

ასეთ, ინვარიანტულ მიმართულებებს, მეორე რანგის  $T$  ტენზორის მთავარ მიმართულებებს უწოდებენ, ხოლო შესაბამის

$\lambda$ -რიცხვებს, მთავარი მიმართულების შესაბამის საკუთრივ რიცხვებს (მნიშვნელობებს) ეძახიან.

ცხადია, რომ

$$n_i = \delta_{ij} \cdot n_j; \quad (5.62)$$

ამიტომ, თუ შევიტანთ (5.61)-ში, გადავიტანთ მარცხენა მხარეში და ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ  $n_j$ -ს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას  $n_j$ -ის მიმართ:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_j = 0. \quad (5.63)$$

ეს არის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა. იმისათვის, რომ მას ჰქონდეს არანულოვანი  $n_j$  ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს განტოლებას:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (5.64)$$

ამ განტოლებას საუკუნოვან(მახასიათებელ) განტოლებას უწოდებენ, რადგან ის შემოვიდა განხილვაში ცის მექანიკის ამოცანებიდან (პლანეტათა ორბიტების საუკუნოვანი ცვლილებების შესწავლიდან). გაშლილად (5.64) განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\lambda^3 - I_T \cdot \lambda^2 + II_T \cdot \lambda - III_T = 0. \quad (5.65)$$

ამ განტოლებას, მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ, ხოლო სკალარული კოეფიციენტები  $I_T$ ,  $II_T$  და  $III_T$  წარმოადგენენ  $T_{ij}$ -მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტებს.

$$I_T = T_{ij} = tr T_{ij} \quad (\text{მატრიცის კვალი}) \quad (5.66)$$

$$II_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \quad (\text{მეორე ინვარიანტი}) \quad (5.67)$$

$$III_T = |T_{ij}| = \det T_{ij} \quad (\text{მესამე ინვარიანტი}) \quad (5.68)$$

(5.65) განტოლების  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  - ფესვებს,  $T_{ij}$ -ტენზორის მთავარი (საკუთრივი) მნიშვნელობები ეწოდებათ.

სიმეტრიულ ტენზორებს (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ზემოთ), ყოველთვის აქვს ნამდვილი საკუთრივი მნიშვნელობები. თუ, ისინი, ყველა განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, მაშინ, მათი შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ურთიერთპერპენდიკულარულია. მთავარ ღერძებში, მეორე რანგის ტენზორს აქვს სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5.69)$$

თუ,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , მაშინ ტენზორის დიაგონალური სახე არაა დამოკიდებული მათი შესაბამისი მიმართულებების არჩევაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ  $\lambda_3$ -ის შესაბამის მიმართულებაზე. თუ  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$  მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი მიმართულებაა.

$Ox_1x_2x_3$ -დან, მთავარ  $Ox_1^*x_2^*x_3^*$  ღერძებზე, გადასვლის მატრიცას აქვს სახე:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$x_1^*$	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
$x_2^*$	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
$x_3^*$	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

სადაც  $n_i^{(j)}$  არის  $j$ -იური მთავარი მიმართულების მიმართული კოსინუსები.

იმისათვის, რომ  $T_{ij}$ -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტები გადავიყვანოთ მთავარ მიმართულებებში  $T^*$ , საჭიროა გამოვიყენოთ გარდაქმნა:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T; \quad (5.70)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}; \quad (5.71)$$

გადასვლის მატრიცაა, ხოლო  $A^T$ -მისი ტრანსპონირებული მატრიცა. პირველ სტრიქონში (5.71) გვაქვს პირველი  $\lambda_1$  საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, მეორეში  $\lambda_2$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, ხოლო მესამეში,  $\lambda_3$ -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები.

**ჰამილტონ-კელის თეორემა:** მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა აკმაყოფილებს თავის საუკუნოვან (მახასიათებელ) განტოლებას.

**დამტკიცება:** მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა გადავიყვანოთ მთავარ ღერძებში, მაშინ მას ექნება სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

განვიხილოთ მისი კვადრატი, მაშინ მივიღებთ  $T^{*2} = T^* \cdot T^*$  და მაშასადამე,

$$(T^*)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

ასევე ვპოულობთ, რომ  $(T^*)^3 = (T^*)^2 \cdot T^*$  და

$$(T^*)^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

თუ, შევადარებთ (5.69), (5.72), (5.73), (5.74) დავინახავთ, რომ ტენზორს და მის ხარისხებს ერთნაირი საკუთრივი (მთავარი)

მიმართულებები აქვთ. ყველა საკუთრივი მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (5.65) მახასიათებელ განტოლებას, ამიტომ თვით  $T$  ტენზორიც აკმაყოფილებს მახასიათებელ განტოლებას

$$T_{ij}^3 - I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E = 0. \quad (5.75)$$

სადაც  $E$ -ერთეულოვანი მატრიცაა.

ამ თანადობას ჰამილტონ-კელის თანადობა ეწოდება.

**შედეგი:** (5.75)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$(T_{ij})^3 = I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E; \quad (5.76)$$

თუ, გავამრავლებთ (5.76) ტოლობას  $T_{ij}$ -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (T_{ij})^4 &= I_T \cdot T_{ij}^3 - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = I_T \cdot (I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E) - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = \\ &= (I_T^2 - II_T) T_{ij}^2 + (III_T - I_T \cdot II_T) T_{ij} + I_T \cdot III_T \cdot E \end{aligned} \quad (5.77)$$

კიდევ ერთხელ თუ გავამრავლებთ (5.77) ტოლობას  $T_{ij}$ -ზე მივიღებთ  $(T_{ij})^5$ -ს გამოსახულებას, თუ გამოვიყენებთ წინა ფორმულებს მივიღებთ საბოლოოდ, რომ:

**P.S.** მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ნებისმიერ ხარისხს აქვს სახე:

$$(T_{ij})^n = \varphi_0(I_T, II_T, III_T) \cdot E + \varphi_1(I_T, II_T, III_T) \cdot T_{ij} + \varphi_2(I_T, II_T, III_T) (T_{ij})^2. \quad (5.78)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ინტეგრალური ფორმულები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

**სტოქსის თეორემა:**

$$\oint_c F_i dx_i = \iint_s n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} ds. \quad (5.79)$$

**გაუსის თეორემა:**



$$\int_{\Omega} v_{i,i} d\omega = \int_{\partial\Omega} v_i \cdot n_i ds. \quad (5.80)$$

### 5.7. დაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები

უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები ემყარებიან ისეთ ძირითად ცნებებს, როგორცაა დაბვა და დეფორმაცია.

დაბვის  $\sigma$ -ტენზორი – მეორე რანგის ტენზორია, ანუ მას გააჩნია კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცა:

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

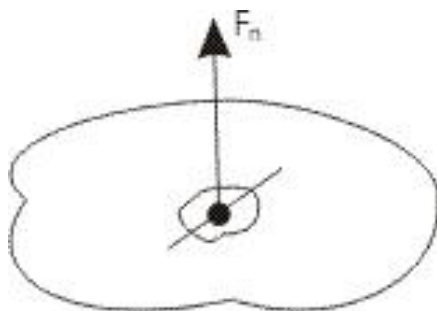
ამ მატრიცაში, დიაგონალურ  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ -კომპონენტებს ნორმალური დაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი იწვევენ გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაციას.

დაბვის ტენზორის დანარჩენ კომპონენტებს, მხებ დაბვებს უწოდებენ და ისინი იწვევენ სხეულის ფორმის ცვლილებას.

დაბვის  $\sigma_{ij}$  ტენზორის ცნება – განაზოგადოებს, მექანიკური  $\sigma$  დაბვის ცნებას სივრცითი სხეულისათვის. ამიტომ, ჯერ განვიხილოთ მექანიკური დაბვის ცნება:

**განსაზღვრება:** მექანიკური დაბვა  $\sigma$ -არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის  $\vec{n}$  ნორმალის მიმართულებით  $S$ -ფართის ერთეულზე მოქმედი  $F_n$ -ძალის სიდიდით.

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \quad (5.82)$$

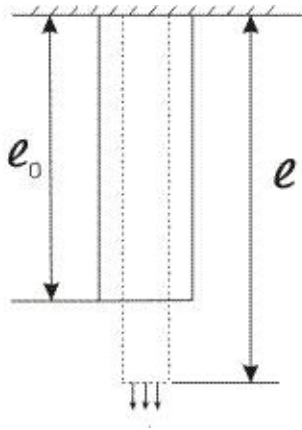


ნახ. 5.4. მექანიკური ძაბვა

სრულიად ანალოგიურად, დეფორმაციის  $\varepsilon_{ij}$ -ტენზორის ცნება წარმოადგენს, ძელის ფარდობითი  $\varepsilon$ -წაგრძელების ცნების სივრცულ განზოგადობას.

**განსაზღვრება:** ძელის ფარდობით  $\varepsilon$ -წაგრძელებას დეფორმაცია ეწოდება. დეფორმაცია ძელის გაჭიმვისას გამოითვლება ფორმულით:

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}. \quad (5.83)$$



დეფორმაციის ტენზორს  $IR^3$ -ში შეესაბამება კომპონენტების მატრიცა

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.84)$$

აქ, ისევე, როგორც ძაბვის ტენზორის შემთხვევაში,  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ -ნორმალური დეფორმაციაა, ანუ გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაცია, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები შეესაბამებიან ფორმის ცვლილებას, მათ მხები დეფორმაციები (ზოგჯერ ძვრის დეფორმაციები) ეწოდებათ.

როგორც ფიზიკიდან ვიცით, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ( $\varepsilon \ll 1$ ) დრეკადი სხეულები ემორჩილებიან ჰუკის კანონს:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon; \quad (5.85)$$

სადაც  $E$ -იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან დეფორმაციას, ანუ სიგრძის გაორმაგებას ( $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0$ )

ჰუკის კანონს ზოგჯერ ჩაწერენ ასე:

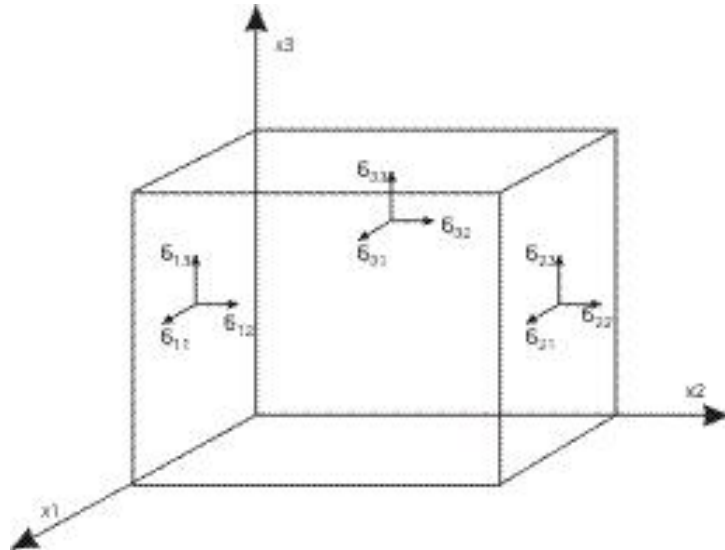
$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l - l_0}{l_0}; \quad (5.86)$$

თუ, ჩვენ გვინდა განვაზოგადოთ ჰუკის კანონი სივრცული შემთხვევისათვის, უნდა ჩავწეროთ წრფივი დამოკიდებულება ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (5.87)$$

(5.85)-ტოლობიდან განსხვავებით, სადაც საკმარისი იყო მასალის თვისებებიდან გამომდინარე, გვეპოვა ერთი  $E$ -მუდმივი (ექსპერიმენტებით), სივრცულ (5.87) შემთხვევაში გვაქვს 81 მუდმივი (თუ მასალა ერთგვაროვანია, თუ არადა, საზოგადოდ, 81-ფუნქცია კოორდინატებზე და დროზე დამოკიდებული), რომელთა რაოდენობაც იზოტროპული მასალებისათვის (როცა მასალის თვისება არაა დამოკიდებული მიმართულებაზე) დადის 2 მუდმივამდე, ასე რომ იზოტროპული მასალებისათვის გვაქვს  $\lambda$  და  $\mu$  ეგრეთწოდებული **ლამეს მუდმივები**. ამ მუდმივებს აქვთ სხვადასხვა მნიშვნელობა, სხვადასხვა მასალისათვის და მაშასადამე, დამოკიდებულია მასალის გვარობაზე.

ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების ფიზიკური აზრის ასახსნელად, განვიხილოთ დრეკადი მასალიდან ამოჭრილი კუბი ნახ. 5.5.



ნახ. 5.5. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრის ინტერპრეტაცია

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ  $\sigma_{ij}$ -არის ძაბვის კომპონენტი, რომელიც მოქმედებს  $i$ -ური ღერძების ნორმალურ ფართზე,  $j$ -ური ღერძის მიმართულებით. ასეთივეა „დეფორმაციის ტენზორის“ კომპონენტების მექანიკური აზრიც.

ზოგჯერ, ცდილობენ გამოყონ საშუალო ნორმალური ძაბვები და მხები ძაბვები. ამ მიზნით, ძაბვის ტენზორს წარმოადგენენ **სფერული და დევიატორული ნაწილების** ჯამის სახით.

**განსაზღვრება:** ძაბვის ტენზორის **სფერული ნაწილი** ეწოდება ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც მოიცემა მატრიცით:

$$\sigma_{cp.} \cdot E = \begin{pmatrix} \sigma_{cp.} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp.} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (5.88)$$

სადაც  $\sigma_{cp.} = -p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$  - საშუალო ნორმალური ძაბვაა.

**განსაზღვრება:** ძაბვის ტენზორის **დევიატორული ნაწილი** ეწოდება ტენზორს, რომელიც ავსებს სფერულ ტენზორს, ძაბვის სრულ ტენზორამდე, ანუ

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{cp.} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{cp.} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (5.89)$$

ასე, რომ ძაბვის ტენზორი სიმბოლურ აღნიშვნებში შეიძლება ჩავწეროთ ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + S_{ij}. \quad (5.90)$$

ადვილად დასამტკიცებელია, რომ ძაბვის ტენზორის დევიატორის პირველი ინვარიანტი ნულის ტოლია (მართლაც (5.89)-ის მთავარ დიაგონალზე მდგარი წევრების ჯამი ნულის ტოლია).

ანალოგიურად, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ სფერული და დევიატორული ნაწილების ჯამის სახით.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + e_{ij}. \quad (5.91)$$

სადაც  $e_{ij}$ -დეფორმაციის ტენზორის დევიატორის კომპონენტებია.

თუ, გამოვიყენებთ (5.91) ფორმულას ჰუკის კანონისთვის იზოტროპული მასალი შემთხვევაში, მაშინ (5.87) გადაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (5.92)$$

მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში, ე.ი. როცა გადაადგილების გრადიენტები გაცილებით მცირეა ერთზე, დეფორმაციის ტენზორისა და გადაადგილების გრადიენტის კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (5.93)$$

სადაც  $u_i$ -გადაადგილების ვექტორის კომპონენტი.

ხოლო თუ, დეფორმაციები არაა მცირე ანუ გვაქვს სასრული დეფორმაციები, მაშინ (5.93)-ის მაგივრად გვაქვს ფიზიკურად არაწრფივი დეფორმაციები. (ელიერის დეფორმაციის ტენზორი)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} \cdot u_{k,j}). \quad (5.94)$$

**P.S.** თუ, დრეკადობის თეორიას ავაგებთ ჰუკის (5.92) კანონზე და დეფორმაციის (5.93) ტენზორზე მივიღებთ წრფივ მათემატიკურ მოდელს, ხოლო თუ გამოვიყენებთ ელიერის არაწრფივი დეფორმაციის ტენზორს, მივიღებთ არაწრფივი დრეკადობის მათემატიკურ მოდელს, მიუხედავად ჰუკის კანონის წრფივი ხასიათისა. სინამდვილეში, მასალათა უმრავლესობას აქვს თავისი დეფორმაციის წესი (დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის), რომელსაც რეოლოგიას უწოდებენ. მასალათა რეოლოგიის დასადგენად საჭიროა ექსპერიმენტების ჩატარება და შედეგების სტატისტიკური დამუშავება.

### 5.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები, დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით

წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის ჰუკის განზოგადოებული კანონი გვაძლევს კავშირს ძაბვის ტენზორის  $\sigma_{ij}$  კომპონენტებსა და დეფორმაციის ტენზორის  $\varepsilon_{ij}$  კომპონენტებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (5.95)$$

ერთგვაროვანი მასალებისათვის  $A_{ijmn}$  მუდმივებისაგან შემდგარი მატრიცეს კომპონენტები არ არიან დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე. მათი რაოდენობაა 81. თუ, გავითვალისწინებთ ძაბვის ტენზორისა და დეფორმაციის ტენზორის სიმეტრიულობას:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{და} \quad \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}; \quad (5.96)$$

მივიღებთ, რომ

$$A_{ijmn} = A_{jimn} \quad \text{და} \quad A_{ijmn} = A_{jinm}; \quad (5.97)$$

ე.ი. დამოკიდებულ მუდმივათა რიცხვი 81-დან მცირდება 36-მდე.

თუ არსებობს დეფორმაციის  $W$  ენერჯის ფუნქცია, ანუ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (5.98)$$

სადაც

$$W = \frac{1}{2} A_{ijmn} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{mn}; \quad (5.99)$$

მაშინ, კოეფიციენტების  $A_{ijmn}$ -მატრიცას მოეთხოვება სიმეტრიის უფრო მაღალი ხარისხი, ე.ი.

$$A_{ijmn} = A_{jinm}. \quad (5.100)$$

(5.95) ტოლობაში, (5.100)-ის გათვალისწინებით, დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა  $A_{ijmn}$ -მატრიცაში მცირდება და ხდება 13.

**განსაზღვრება:** დრეკად მასალას, რომლის ელასტიურობის თვისებებიც სიმეტრიულია რომელიმე **სამი ურთიერთმართობული სიბრტყის მიმართ ორთოტროპიული** მასალა (სხეული) ეწოდება.

ორთოტროპიული მასალისათვის დამოუკიდებელ მუდმივათა რიცხვი არის 12. ხოლო თუ, ორთოტროპიული მასალისათვის არსებობს დეფორმაციის ენერჯის (5.99) ფუნქცია, მაშინ მუდმივთა რიცხვია 9.

ცხადია, რომ რაც მეტია არანულოვან დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა  $A_{ijmn}$  მატრიცაში, მით უფრო რთული იქნება შესაბამისი მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელი.

მუდმივთა დიდი რაოდენობა დამახასიათებელია კომპოზიტური მასალებისათვის. ამიტომ, კომპოზიტთა მექანიკის

მათემატიკური მოდელები უფრო რთულია, ვიდრე იზოტროპიული მასალებისა.

იზოტროპიული, დრეკადი მასალებისათვის  $A_{ijmn}$  მატრიცა შეიცავს მხოლოდ ორ მუდმივ ელემენტს, რომელთაც  $\lambda$  და  $\mu$  ლამეს მუდმივებს უწოდებენ.

ჰუკის კანონს იზოტროპული მასალისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (5.101)$$

ამ ფორმულის გადასაწერად იუნგისა  $E$  და პუასონის  $\nu$  მუდმივების მეშვეობით, განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ძელის გაჭიმვის ამოცანა  $Ox_1$ -ღერძის გასწვრივ, მაშინ იუნგის  $E$ -მოდული და პუასონის  $\nu$ -კოეფიციენტი წარმოადგენენ პროპორციულობის კოეფიციენტებს,  $E$ -სიგრძივი დეფორმაციისას და  $\nu$ -განივი დეფორმაციისას:

$$\sigma_{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \wedge \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}. \quad (5.102)$$

ამ ტოლობებისა და (5.101)-ის გათვალისწინებით, ზოგადი იზოტროპიული მასალისათვის მივიღებთ ჰუკის კანონს შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{\nu + 1} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (5.103)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ადრე, ჰუკის კანონი ახასიათებს წრფივად-დრეკადი იზოტროპიული მასალის ელასტიურ თვისებებს, ამიტომ მას ზოგჯერ ელასტიური (დრეკადი) მასალის რეოლოგიურ განტოლებასაც უწოდებენ მცირე დეფორმაციების

( $\varepsilon \ll 1$ ) შემთხვევაში.

ელასტიური (დრეკადი) მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად რეოლოგიური განტოლება, ის ძირითადი განტოლებაა, რომელიც აღწერს შესასწავლი მასალის ელასტიურ თვისებებს და რომელიც დგინდება, ექსპერიმენტული მასალების სტატისტიკური გადამუშავების შედეგად.



უმეტესწილად, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, რეოლოგიურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}); \quad (5.104)$$

სადაც  $f$ -ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ფიზიკური ექსპერიმენტების შედეგად.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა განიხილება **რთული რეოლოგიის** მქონე მასალები, გამოიყენება ზოგადი სახის რეოლოგიური კანონი:

$$F(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \dots, x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (5.105)$$

$F$ -ფუნქციის კონკრეტული სახე დამოკიდებულია შესასწავლი მასალის ელასტიურ და ბლანტი-პლასტიკურ თვისებებზე.

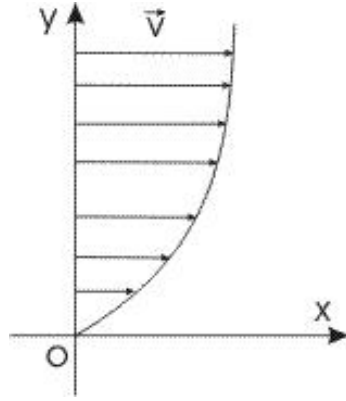
ამ ფუნქციის კონკრეტული სახის დასადგენად იყენებენ ფიზიკურ ექსპერიმენტებს და მიღებული შედეგების სტატისტიკური დამუშავებით ადგენენ უმარტივესი პროცესების შემთხვევისათვის (5.105) ტიპის თანადობას. შემდეგ ხდება ამ თანადობათა განზოგადოება და მიღებული რთული მოდელით ტესტური ამოცანების შესწავლა მოდელის ადეკვატურობის დასადგენად.

### 5.9. ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის

წყლისა და სხვა ბლანტი სითხეებისათვის, ნიუტონმა ცდებით დაადგინა კანონი:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}; \quad (5.106)$$

სადაც  $\tau$ -ძვრის მხები ძაბვაა სითხის ფენებს შორის, რომელსაც ადგილი აქვს სითხის სიბლანტის გამო;  $\mu$ -სიბლანტის კოეფიციენტი,  $v$ -სითხის სიჩქარე ნახ. 5.6.



ნახ. 5.6. ბლანტი სითხის მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა

როგორც (5.106) ფორმულიდან ჩანს, მხებ ძაბვებსა და სიჩქარის გრადიენტს შორის დამოკიდებულება არის წრფივი. (5.106) არის ჰუკის კანონის ანალოგი:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (5.107)$$

თუმცა, ჰუკის კანონი იძლევა რეოლოგიურ თანადობას წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, ხოლო (4.106) აღწერს უკუმშვადი ნიუტონური ბლანტი სითხის რეოლოგიას.

ნიუტონის განზოგადოებულ კანონს ბლანტი სითხეებისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn}; \quad (5.108)$$

სადაც  $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ -დეფორმაციის სიცქარის ტენზორის კომპონენტებია,

$B_{ijmn}$ -სითხის თვისებებზე დამოკიდებული მუდმივათა მატრიცა 81 კომპონენტით. დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა, დამოკიდებულია, ისევე როგორც დრეკადი მასალის შემთხვევაში, სითხის შინაგანი, ფიზიკური თვისებების სიმეტრიის ხარისხზე.

იზოტროპული, ბლანტი უკუმშვადი სითხისათვის  $B_{ijmn}$ -მატრიცაში გვაქვს მხოლოდ ორი  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  დამოუკიდებელი მუდმივა (სიბლანტის კოეფიციენტი) და (5.108) ნიუტონის რეოლოგიური კანონი, ამ შემთხვევაში, ჩაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^* \cdot D_{ij}; \quad (5.109)$$

სადაც  $p$ -ჰიდროსტატიკური წნევაა,

$D_{ij}$  - დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია, რომლებიც მიიღებიან შესაბამისი დეფორმაციის ტენზორის გაწარმოებით დროით, მაშასადამე

$$D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (5.110)$$

სადაც  $v_i$ -სითხის ნაკადის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

### 5.10. ნოლის თეორემა. რეინერის დრეკადი მასალა. რეინერ-რივლინის სითხის რეოლოგიური განტოლება. მასალები მესხიერებით. განზომილებათა მეთოდი

არსებობენ მასალები უფრო რთული რეოლოგიით, ვიდრე წრფივად-დრეკადი მასალები და ნიუტონური სითხეები.

განვიხილოთ უფრო ზოგადი დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორსა და დეფორმაციის ტენზორს შორის (ელასტიური მასალებისათვის).

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij}) \quad (5.111)$$

და დამოკიდებულება ძაბვის ტენზორსა და დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს შორის (ბლანტი სითხეებისათვის):

$$\sigma_{ij} = g(D_{ij}). \quad (5.112)$$

როგორც ვხედავთ, (5.111) და (5.112) თუმცა შეეხებიან სხვადასხვა ტიპის პროცესებს, ისინი იძლევიან ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას, ორ მეორე რანგის ტენზორს შორის და აქვთ ერთნაირი მათემატიკური სტრუქტურა.

იზოტროპიული არეებისათვის ეს თანადობები (მასალები, სითხეები, გაზები...), (5.111) და (5.112) უნდა აკმაყოფილებდნენ გარკვეულ ინვარიანტობის პირობებს, რომლებიც გამომდინარეობენ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების თვისებებისაგან.

(5.111) და (5.112) ტიპის თანადობათა ზოგადი სახის დასადგენად ნოლმა დაამტკიცა თეორემა:

**ნოლის თეორემა:** თუ, გვაქვს ფუნქციონალური დამოკიდებულება ორი მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს შორის ( $f \in C^\infty(\Omega)$ ),

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}); \quad (5.113)$$

მაშინ, ეს დამოკიდებულება ყველაზე ზოგად შემთხვევაში იქნება შემდეგი სახის:

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2. \quad (5.114)$$

**დამტკიცება:** გავშალოთ (5.113) ტეილორის მწკრივად  $(\varepsilon_{ij})$ -ს მიმართ, მივიღებთ:

$$\sigma_{ij} = M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2 + M_3 (\varepsilon_{ij})^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} M_k \cdot (\varepsilon_{ij})^k; \quad (5.115)$$

სადაც

$$M_k = \varphi_k(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon); \quad (5.116)$$

$$I_\varepsilon = \varepsilon_{ii}; \quad (5.117)$$

$$II_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}; \quad (5.118)$$

$$III_\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}. \quad (5.119)$$

ჰამილტონ-კელის თეორემის თანახმად ყოველი მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა, აკმაყოფილებს თავის მახასიათებელ განტოლებას, საიდანაც შეგვიძლია ვიპოვოთ  $\varepsilon_{ij}^3$ , როგორც უფრო დაბალი ხარისხების წრფივი კომბინაცია:

$$\varepsilon_{ij}^3 = I_\varepsilon (\varepsilon_{ij})^2 - II_\varepsilon (\varepsilon_{ij}) + III_\varepsilon \cdot \delta_{ij}. \quad (5.120)$$

თუ გავამრავლებთ (5.120) ტოლობას  $\varepsilon_{ij}$ -ზე და  $\varepsilon_{ij}^3$ -ისათვის გამოვიყენებთ (5.120) გამოსახულებას, მაშინ  $(\varepsilon_{ij})^4$ -გამოსახება  $\varepsilon_{ij}$ -ს ხარისხების წრფივი კომბინაციით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს. თუ გავავრძელებთ ამ პროცესს, ანალოგიურად მივიღებთ რომ ნებისმიერი ხარისხი  $(\varepsilon_{ij})^n$ , იმ ხარისხების წრფივი კომბინაციით, რომელთა ხარისხი არ აღემატება ორს, ხოლო კოეფიციენტები იქნებიან  $\varepsilon_{ij}$ -ს ინვარიანტებზე დამოკიდებული  $\varphi_k$ -მრავალწევრები, ასე რომ

$$\sigma_{ij} = \varphi_0(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon)\delta_{ij} + \varphi_1(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon)\varepsilon_{ij} + \varphi_2(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon)\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \quad (5.121)$$

რაც ნიშნავს (5.114) დასამტკიცებელს.

**განსაზღვრება:** დრეკად (ელასტიურ) მასალებს, რომელთათვისაც რეოლოგიურ კანონს აქვს (5.121) სახე, **რეინერის დრეკადი მასალა** ეწოდებათ.

**შენიშვნა:** ჰუკის წრფივად-დრეკადი მასალა, რეინერის დრეკადი მასალის კერძო შემთხვევაა, მიიღება, როცა  $\varphi_2 \equiv 0$ . (5.121) რეოლოგიურ ტოლობაში კვადრატული  $\varphi_2$ -წევრი საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ ისეთი კომპოზიტიური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელი, რომლებიც სიგრძივი გაჭიმვისას შეიძლება გაიზარდონ სისქეშიც.

თუ, ნოლის თეორემას გამოვიყენებთ (5.112) თანადობისათვის, მივიღებთ რეოლოგიურ განტოლებას **რეინერ-რივლინის ბლანტი სითხისათვის:**

$$\sigma_{ij} = \psi_0(I_D, II_D, III_D)\delta_{ij} + \psi_1(I_D, II_D, III_D)D_{ij} + \psi_2(I_D, II_D, III_D)D_{ik}D_{kj} \quad (5.122)$$

სადაც  $I_D, II_D, III_D$ -დეფორმაციის სიჩქარის კომპონენტების  $D_{ij}$  მატრიცის ინვარიანტებია.

**განსაზღვრება:** სითხეებს, რომლებიც ემორჩილებიან (5.122) რეოლოგიურ კანონს **რეინერ-რივლინის ბლანტი** სითხეები ეწოდებათ.

**შენიშვნა:** ნიუტონური სითხეები წარმოადგენენ რეინერ-რივლინის სითხის კერძო შემთხვევას, მიიღებიან როცა  $\psi_2 \equiv 0$ .

(5.122) რეოლოგიურ ტოლობაში, კვადრატული  $\psi_2$  წევრი იძლევა საშუალებას შევადგინოთ ისეთი სითხეების მათემატიკური მოდელები, რომელთაც ახასიათებთ **დილატაციის** თვისება, ანუ ფხვიერი, სითხით გაჟღენთილი მასალების თვისება „ისუნთქონ-იბუყბუყონ“ მოძრაობისას (მოძრაობისადმი პერპენდიკულარული-განივი მიმართულებით).

უფრო რთული რეოლოგიის მქონე ელასტიური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, იყენებენ **რივლინის რეოლოგიურ კანონს**. რივლინმა დაუშვა, რომ რივი რთული რეოლოგიის მასალები თავისში აერთიანებენ როგორც დრეკად, ასევე, სიბლანტის თვისებებს ანუ გვაქვს დამოკიდებულება:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}, D_{ij}). \quad (5.123)$$

რივლინმა გამოიყენა ჰამილტონ-კელის განზოგადოებული თეორემა და დაამტკიცა (დაამტკიცეთ თვითონ), რომ (5.123) რეოლოგიურ კანონს, ყველაზე უფრო ზოგად შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & M_0 \delta_{ij} + M_1 \varepsilon_{ij} + M_2 (\varepsilon_{ij})^2 + M_3 D_{ij} + M_4 (D_{ij})^2 + M_5 (\varepsilon_{ik} D_{kj} + D_{ik} \varepsilon_{kj}) + \\ & + M_6 ((\varepsilon_{ij})^2 D_{ij} + D_{ij} (\varepsilon_{ij})^2) + M_7 (\varepsilon_{ij} \cdot (D_{ij})^2 + (D_{ij})^2 \cdot \varepsilon_{ij}) + \\ & + M_8 ((\varepsilon_{ij})^2 \cdot (D_{ij})^2 + (D_{ij})^2 \cdot (\varepsilon_{ij})^2) \end{aligned} \quad (5.124)$$

---

სადაც  $M_k = F_k(I_\varepsilon, I_D, II_\varepsilon, II_D, III_\varepsilon, III_D)$ .

ტრუსდელმა, იგივე მეთოდის გამოყენებით, ააგო ჰიპო-დრეკადი მასალების მუშაობის შესაბამისი რეოლოგიური განტოლება:

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(D_{ij}, \sigma_{ij}). \quad (5.125)$$

მასალებისათვის, რომელთაც ახასიათებთ ბლანტი-ელასტიურობა (მასალები მეხსიერებით, სხვანაირად რომ ვთქვათ – ცოცვადი მასალები), რეოლოგიურ კანონს, აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = f(t, \varepsilon_{ij}, D_{ij}). \quad (5.126)$$

ასეთი მასალებისათვის, განიხილება რეოლოგიური განტოლება შემდეგი ფორმით:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijmn}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (5.127)$$

სადაც  $\varepsilon_{ijmn}(t)$ -მასალის რელაქსაციის ფუნქციაა.

ზოგჯერ (5.127)-ის ნაცვლად იხილავენ რეოლოგიურ განტოლებას ფორმით:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t J_{ijmn}(t-\tau) \frac{d\sigma_{mn}}{d\tau} d\tau; \quad (5.128)$$

სადაც  $J_{ijmn}$ -ცოცვადობის ფუნქციაა.

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ზოგადია ტრუსდელის რეოლოგიური კანონი:

$$F(t, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}) = 0. \quad (5.129)$$

სადაც  $\dot{\varepsilon}_{ij} = D_{ij}$ -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია. (მეორეზე უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები ართულებენ ანალიზს, მაგრამ სანაცვლოდ არ იძლევიან არაფერს).

**P.S.** რეოლოგიური კანონის დადგენა ხდება ექსპერიმენტის მეშვეობით, რასაც წინ უძღვის პროცესებისა და მასალების

მეცნიერული ანალიზი. ექსპერიმენტული მასალების დამუშავება კი ხდება სტატისტიკის მეშვეობით.

ექსპერიმენტების ჩატარების მეთოდთა და შედეგების დამუშავების ტექნიკა, ცალკე შესწავლის საგანია, ინტელექტუალური მოღვაწეობის ამა თუ იმ სფეროში, ამიტომ ამ საკითხზე ჩვენ აღარ შევჩერდებით (ზოგადად არ განვიხილავთ  $\pi$ -თეორემას, რომელიც ბუკინგემს ეკუთვნის).

მათემატიკური მოდელირებისას, ზოგჯერ იყენებენ განზომილებათა მეთოდს (კერძო შემთხვევაა  $\pi$ -თეორემის).

ამ მეთოდის გასაცნობად, განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი: დაადგინეთ კავშირი, მათემატიკური ქანქარას რხევის T-პერიოდსა, ძაფის  $l$  - სიგრძესა და თავისუფალი ვარდნის  $g$ -აჩქარებას შორის.

ამოხსნა: დაუშვათ ჰიპოთეზა, რომ ამ კავშირს აქვს სახე

$$T = K \cdot l^\alpha \cdot g^\beta. \quad (5.130)$$

სადაც  $\alpha$  და  $\beta$  სიდიდეებს დავადგენთ იმ პირობებიდან, რომ (5.130) ტოლობაში, მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების განზომილებები უნდა იყვნენ ერთნაირნი, K-მუდმივი უგანზომილებო სიდიდეა, რომლის საპოვნელადაც საჭიროა ექსპერიმენტების ჩატარება.

$$[T] = [l^\alpha] \cdot [g^\beta]; \quad (5.131)$$

ანუ

$$[T] = [l]^\alpha \cdot [g]^\beta. \quad (5.132)$$

გამოვიყენოთ განზომილებათა საერთაშორისო SI-სისტემა, მაშინ

$$[T] = \text{წმ}; \quad [l] = \text{მ}; \quad [g] = \text{მ}\cdot\text{წმ}^{-2} \quad (5.133)$$

თუ, (5.133)-ს შევიტანოთ (5.132)-ში, მივიღებთ:

$$\text{წმ} = \text{მ}^\alpha \cdot (\text{მ}\cdot\text{წმ}^{-2})^\beta \quad (5.134)$$



ანუ

$$\sqrt[m]{m} = m^{\alpha+\beta} \cdot \sqrt[m]{m}^{-2\beta} \quad (5.135)$$

(5.135)-დან, თუ გავუტოლებთ ერთნაირი განზომილებების ხარისხებს, მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ:

$$\begin{cases} -2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad (5.136)$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$$\beta = -\frac{1}{2} ; \quad \alpha = \frac{1}{2} . \quad (5.137)$$

თუ, (5.137) ამონახსნებს ჩავსვამთ (5.130) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$T = K \cdot l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} ; \quad (5.138)$$

ანუ

$$T = K \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} . \quad (5.139)$$

რაც მოგვაგონებს სკოლის ფიზიკის კურსიდან ცნობილ ფორმულას

K-კოეფიციენტის დასადგენად ეხლა უნდა ჩატარდეს ექსპერიმენტი მათემატიკურ ქანქარაზე. რაც საშუალებას მოგვცემს ვიპოვოთ (5.130) თანადობა საბოლოოდ. ეს ექსპერიმენტი სტუდენტობისთვის კარგი საგარჯიშოა. თუმცა, მარტივად ჩასატარებელია, მაგრამ K-ს საპოვნელად საჭიროა ცდის რამოდენიმეჯერ გამეორება და შემდეგ შედეგების სტატისტიკურად დამუშავება.

ანალოგიურ მოსაზრებებს, ხშირად იყენებენ, უფრო რთული რეოლოგიური კანონების დასადგენადაც.

## ამოცანები და საგარჯიშოები

1. იპოვეთ ჰამილტონის H-ფუნქცია ერთი მატერიალური წერტილისათვის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებში.

პასუხი:  $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$ . (შეამოწმეთ!)

2. როდის ემთხვევა, ბოლცმანის განტოლება ლიუვილის განტოლებას?

3. სამგანზომილებიან სივრცეში  $\mathbb{R}^3$ , წარმოადგინეთ:

$A_{ii}, B_{ij}, R_{ij}, a_i T_{ij}, a_i b_j S_{ij}$  ტენზორები, კომპონენტების მეშვეობით.

4. დაამტკიცეთ, განსაზღვრებიდან გამომდინარე, რომ ლევი-ჩივიტას  $\varepsilon_{ijk}$ -ტენზორის კომპონენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

ა)  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kij} = 6$ ;      ბ)  $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$ .

5. დეკარტის კოორდინატებსა და სფერულ  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  კოორდინატებს შორის გვაქვს კავშირი:

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ x_2 = \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ x_3 = \theta_1 \cos \theta_2 \end{cases}$$

იპოვეთ,  $g_{pq} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_p} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_q}$  - მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები

სფერულ  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  კოორდინატთა სისტემაში.

6. იპოვეთ დეკარტული T-ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები და მთავარი მიმართულებები, თუ ის მოცემულია მატრიცით:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. ჰამილტონ-კელის თეორემის გამოყენებით იპოვეთ  $B^4$ , თუ B-ტენზორის კომპონენტები მოცემიან მატრიცით:

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. ელასტიურ (დრეკად) სხეულებში ძაბვების განაწილება მოიცემა ძაბვის ტენზორით:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \cdot x_2 & (1-x_2^2)x_1 & 0 \\ (1-x_2^2)x_1 & (x_2^3-3x_2)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ, ძაბვის ტენზორის დევიატორის მთავარი მნიშვნელობები

$P(a,0,2\sqrt{a})$ -წერტილში.

### ლიტერატურა.

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974
5. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел, пер. с англ., Мир, Москва, 1956
6. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, пер. с болгарского, Мир, Москва, 1979
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986
8. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956

9. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. методы и приложения, Наука, Москва. 1986
10. Новиков С.П., Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Задачи по геометрии(дифференциальная геометрия и топология), МГУ им.М.В.Ломоносова, Москва, 1978
11. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004
12. Литвинов Д.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости,Москва, 1982
13. Амензаде Ю.А. Теория упругости, Москва, 1976
14. Тимошенко С.П..Гудьер Дж. Теория упругости,пер. с англ.,Москва, 1979
15. Лодж А.С. Эластичные жидкости.Введение в реологию конечнодеформируемых полимеров,пер. с англ.,Москва, 1969
16. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности,пер. с англ.,Мир,Москва,1987
17. Трусделл К. первоначальный курс рациональной механики сплошных сред,пер. с англ.,Мир.Москва,1975

## VI თავი. დრეკადი (ელასტიური) მასალების ქცევის მათემატიკური მოდელირება

### 6.1. დრეკადობის (ელასტიურობის) თეორიის სტატიკური ამოცანები

დრეკადი(ელასტიური) მასალებისათვის, ფიზიკური ექსპერიმენტების მეშვეობით ადგენენ დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის რეოლოგიურ კანონს.

**წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, იზოტროპიულ შემთხვევა-ში** გვაქვს რეოლოგიური თანადობა, რომელსაც ჰუკის კანონს უწოდებენ.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (6.1)$$

უფრო რთული მოდელებიდან, ხშირად გამოიყენება **რეინერის დრეკადი** მასალის რეოლოგიური განტოლება

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} ; \quad (6.2)$$

სადაც  $\varphi_i$ - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვარიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

დრეკადი მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად მხოლოდ რეოლოგიური კანონი არაა საკმარისი.

**საჭიროა:** წონასწორობის განტოლება, კინემატიკური თანადობანი და სასაზღვრო პირობები.

განვიხილოთ იზოტროპიული მასალებისათვის ელასტიური მუშაობის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელი:

ა) **წრფივად-დრეკადი იზოტროპიული მასალებისათვის სტატიკის (წონასწორობის) ამოცანა** ისმება შემდეგნაირად:

**წონასწორობის განტოლება** კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 , \quad (6.3)$$

სადაც  $\rho$ - ელასტიური მასალის სიმკვრივეა,  $b$  - ერთეულ მოცულობაზე მოქმედი გარეშე ძალის ვექტორის კომპონენტები;

კინემატიკური თანადობები მცირე დეფორმაციების

( $\varepsilon \ll 1$ ) შემთხვევაში:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (6.4)$$

ჭუკის რეოლოგიური განტოლება:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (6.5)$$

(6.3),(6.4) და (6.5) განტოლებები უნდა დაკმაყოფილდეს ელასტიური  $\Omega$  მასალის ნებისმიერ წერტილში. ამასთან ერთად უნდა დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობებიც  $\partial\Omega$ - საზღვრის ნებისმიერი წერტილისათვის.

სასაზღვრო პირობების მიხედვით სტატიკაში განიხილება სამი ტიპის ამოცანა:

ა.1) საზღვრის თითოეულ წერტილში მოცემულია გადაადგილებები:

$$u_{i\partial\Omega} = g(x_1, x_2, x_3); \quad (6.6)$$

ასეთ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია გარდავქმნათ (6.3),(6.4) და (6.5) ამოცანა ისე, რომ გვექონდეს ერთი განტოლება გადაადგილებების მიმართ შესაბამისი სასაზღვრო (6.6) პირობებით.

ამისათვის (6.4) ჩავსვათ (6.5)-ში და მიღებული შედეგი შევიტანოთ (6.3)-ში.

მართლაც, თუ (6.4)-ს ჩავსვამთ (6.5)-ში მივიღებთ

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \lambda (u_{k,k} + u_{k,k}) \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (6.7)$$

თუ, ამ გამოსახულებას შევიტანთ დინამიკის (6.3) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \rho b_i = 0, \quad (6.8)$$

ანუ თუ გავამარტივებთ გვექნება განტოლება გადაადგილებებისათვის შემდეგი ფორმით:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0. \quad (6.9)$$

ამ განტოლებას ლამეს განტოლებას უწოდებენ, ზოგჯერ კი ნაფიე-კოშის მოდელს.

ამ განტოლებისათვის განიხილება დირიხლეს (მოცემულია გადაადგილებები მასალის საზღვრის წერტილებში და უნდა ვიპოვოთ გადაადგილებები არის შიგა წერტილებში) (6.6) ამოცანა.

**P.S.** (6.6) – არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები შეგვიძლია გავანულოთ (ვაქციოთ ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანად) თუ, მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას

$$u_i = v_i + g(x_1, x_2, x_3). \quad (6.10)$$

მაშინ (6.9) განტოლება გადაიწერება  $v_i$ -ს მიმართ და სასაზღვრო (6.6) პირობები მიიღებენ ერთგვაროვან ფორმას

$$v_{i\partial\Omega} = 0, \quad (6.11)$$

რაც აადვილებს ამოცანის ამოხსნას.

ა.2) მეორე ტიპის სასაზღვრო ამოცანა მიიღება იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულია ძაბვები საზღვრის ყოველი წერტილისათვის:

$$(\sigma_{ij} n_j)_{\partial\Omega} = \sigma_{0i}. \quad (6.12)$$

ამ შემთხვევაში, ჰუკის კანონის, წონასწორობის განტოლებისა და სენ-ვენანის პირობებიდან შესაძლებელი დეფორმაციებისათვის

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0, \quad (6.13)$$

მიიღება ელასტიურობის განტოლება ძაბვების მიმართ:

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \rho b_{k,k} = 0. \quad (6.14)$$

ამ განტოლებას ბელტრამი-მიჩელას განტოლებას უწოდებენ.

ბელტრამი-მიჩელას განტოლებებით დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად (6.14) განტოლებას ხსნიან (6.12) პირობებში, (6.3) წონასწორობის განტოლებების გათვალისწინებით.

ა.3) მესამე ტიპის ამოცანა – ეს არის შერეული ტიპის ამოცანა, როცა საზღვრის ერთ  $\partial\Omega_1$ - ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები, ხოლო მეორე  $\partial\Omega_2$ - ნაწილზე მოცემულია ძაბვები და

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2. \quad (6.15)$$

ამასთან, მოითხოვება განისაზღვროს ძაბვები და დეფორმაციები  $\Omega$ - არის ნებისმიერი წერტილისათვის.

ამ შემთხვევაში, ხსნიან ამოცანას ზოგადი სახით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0; \quad (6.16)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (6.17)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}; \quad (6.18)$$

$$(u_i)_{\partial\Omega_1} = g(x_1, x_2, x_3); \quad (6.19)$$

$$(\sigma_{ij} n_j)_{\partial\Omega_2} = \sigma_{0i}. \quad (6.20)$$

## 6.2. დინამიკის ამოცანების მათემატიკური მოდელირება

როცა გვინდა შევისწავლოთ ელასტიური მასალის ქცევა დროის მიხედვით ცვლად პირობებში, ვიხილათ დინამიკის განტოლებებს კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (6.21)$$

კინემატიკურ თანადობებს:



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (6.22)$$

რეოლოგიურ კანონს(ჰუკის კანონი);

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (6.23)$$

სტატიკის ამოცანებისაგან განსხვავებით, დინამიკის შესწავლისას სასაზღვრო პირობებთან ერთად განიხილავენ საწყის პირობებსაც.

ა.1) თუ გვაქვს ამოცანა საზღვარზე მოცემული გადაადგილებებით, ვიყენებთ ლამეს მათემატიკურ მოდელს:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (6.24)$$

ამავე დროს, გვაქვს სასაზღვრო პირობები

$$(u_i)_{\partial \Omega_1} = g_i(x_1, x_2, x_3, t); \quad (6.25)$$

და საწყისი პირობები

$$(u_i)_{t=0} = f_i(x_1, x_2, x_3). \quad (6.26)$$

ა.2) რთული რეოლოგიის მასალებისათვის ხშირად იყენებენ რეინერის ელასტიური მასალის მათემატიკურ მოდელს (კომპოზიტები, სელები, ზვავები, მრავალფაზიანი მასალები და ა.შ.), რომელსაც აქვს სახე:

დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (6.27)$$

კინემატიკური თანადობები

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.28)$$

რეინერის რეოლოგიური განტოლება

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}; \quad (6.29)$$

სადაც

$\varphi_i$  - დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვარიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

ამ ფუნქციების კონკრეტული სახე დგინდება ხანგრძლივი და მძიმე ექსპერიმენტების შედეგად.

სასაზღვრო და საწყისი პირობები აქ ისმება ისეთივე სახით, როგორც წრფივად-დრეკადი მასალების შემთხვევაში (6.25), (6.26).

### 6.3. წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის მათემატიკური მოდელი

წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის შემთხვევაში, ასევე, მოქმედებს დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i; \quad (6.30)$$

კინემატიკური თანადობები

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.31)$$

დამატებით, განიხილება შესაბამისი რეოლოგიური კანონი

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}; \quad (6.32)$$

სადაც  $\alpha$  - წრფივი გაფართოვების ტემპერატურული კოეფიციენტი;  $T_0$  - ელასტიური მასალის საწყისი ტემპერატურა;  $\lambda$  და  $\mu$  - ლამეს კოეფიციენტებია, რომლებიც ახასიათებენ მასალის თვისებებს დეფორმაციების თვალსაზრისით;

და ენერჯიის განტოლება

$$kT_{,ii} = \rho c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T \dot{\varepsilon}_{kk}; \quad (6.33)$$

სადაც  $k$  - მასალის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი;  $c^{(v)}$  - კუთრი სითბოტევადობა მუდმივი დეფორმაციის(მოცულობის) პირობებში. ამ მათემატიკურ მოდელში უცნობებია:  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  და  $T$ .

უცნობების საპოვნელად აგებულ განტოლებათა (6.30) – (6.33) სისტემას, უნდა მივუერთოთ შესაბამისი სასაზღვრო და საწყისი პირობები.

### ლიტერატურა

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974

## VII თავი. სითხეთა დინამიკის მათემატიკური მოდელები

სითხეთა დინამიკას შეისწავლის ჰიდროაერომექანიკა. ისევე, როგორც დრეკადი(ელასტიური) მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაერომექანიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის(გაზის ანუ აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად.

### 7.1. ნიუტონური და არანიუტონური სითხეების რეოლოგიური კანონები

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადოებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn} \quad ; \quad (7.1)$$

სადაც  $D_{mn} = \dot{\epsilon}_{mn}$  დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია.

თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ  $B_{ijmn}$ - მუდმივი სიდიდეებისაგან შედგება, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სითხის ბლანტ თვისებებს.

თუ, განვიხილავთ იზოტროპიულ ნიუტონურ სითხეს, მაშინ მუდმივათა მატრიცაში 81 კომპონენტიდან მხოლოდ ორია  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  დამოუკიდებელი.

შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} \quad ; \quad (7.2)$$

სადაც  $\lambda^*$  და  $\mu^*$  სითხის სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} \quad ; \quad (7.3)$$

სადაც  $\chi^*$  - სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტი.

თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ

$$\chi^* = 0, \quad (7.4)$$

მაშინ (7.3)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p, \quad (7.5)$$

ანუ ჰიდროსტატიკური წნევა ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა – მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

გარდა რეოლოგიური (7.2) კანონისა, მათემატიკური მოდელის ასაგებად იზოტროპიული ნიუტონური სითხეებისათვის, საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის(უწყვეტობის) განტოლება, ენერჯის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს სახე

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho v_i \dot{\quad}; \quad (7.6)$$

სადაც  $v_i$  - სითხის ნაწილაკების მოძრაობის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება ფორმით:

$$\rho + \rho v_{i,i} = 0. \quad (7.7)$$

ენერჯის შენახვის კანონს აქვს ფორმა:

$$U = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}C_{i,i} + Z; \quad (7.8)$$

სადაც  $U$  – შინაგანი ენერჯიაა,  $C_i$  - სითბური ნაკადის ვექტორის კომპონენტები, რომელიც დროის ერთეულში, ერთეულ ფართში

გადის სითბოგამტარობის ხარჯზე,  $Z$  – ერთეულ დროში გამოსხივებული სითბოს მუდმივაა, გადაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება(ექსპერიმენტებიდან) ჩაიწერება ასე:

$$p = p(\rho, T). \quad (7.9)$$

თუ, საჭიროა სითბური ეფექტების გათვალისწინებაც, რაც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, მაშინ (7.6),(7.7) – (7.9) განტოლებათა სისტემას უნდა მიეუერთოთ ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ მოკლედ:

$$C_i = -kT_i \quad (7.10)$$

სადაც  $k$  – სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

კალორიული განტოლება ჩაიწერება ექსპერიმენტებზე დაყრდნობით

$$U = U(\rho, T). \quad (7.11)$$

მიიღება 16 განტოლება 16 უცნობით, ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც სითხის მიკვრის პირობებს უწოდებენ:

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.12)$$

## 7.2. ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითბური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ.

თუ, კინემატიკურ თანადობებს:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (7.13)$$

შევიტანო ნიუტონის სითხის რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (7.14)$$

შემდეგ, (7.14) განტოლებას თუ შევიტანო მოძრაობის (7.6) განტოლებაში, გვექნება:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,jj} + v_{j,ji}) + \rho b_i. \quad (7.15)$$

ანუ, საბოლოოდ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*)v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (7.16)$$

ამ (7.16) განტოლებას ეწოდება ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის.

**P.S.** თუ სითხე უკუმშავია(როგორც წყალი), მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (7.17)$$

### 7.3. ნავიე – სტოქსის განტოლება უკუმში სითხეებისათვის

თუ განვიხილავთ უკუმში სითხეებს, მაშინ სითხის უკუმშეადობის (7.17) პირობის გათვალისწინებით (7.16) – დან მივიღებთ ნავიე – სტოქსის მათემატიკურ მოდელს:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (7.18)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (7.19)$$

$$(v_i)_{\infty} = 0; \quad (7.20)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (7.21)$$

მიღებული (7.18) – (7.21) მათემატიკური მოდელი აღწერს ბლანტი, უკუმში სითხის მოძრაობას  $\Omega$  - არეში,  $\partial\Omega$ - საზღვრით.

#### 7.4. ნავიე – სტოქსის განტოლება გაზებისათვის

თუ ნავიე – სტოქს – დიუგემის მოდელში, გავითვალისწინებთ სტოქსის პირობას

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^* \quad (7.22)$$

მაშინ, მივიღებთ ნავიე – სტოქსის განტოლებას გაზებისათვის:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \rho b_i \quad (7.23)$$

ამ განტოლებას უნდა მივუერთოთ მდგომარეობის (7.9) განტოლება, ენერჯიის (7.8) განტოლება და უწყვეტობის (7.7) განტოლება(თუ არა გვაქვს სითბური ეფექტები).

#### 7.5. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბლანტი, უკუმში სითხის დინება. შესაბამისი მათემატიკური მოდელი გადავწეროთ უგანზომილებო სახით და დავადგინოთ მსგავსების კრიტერიუმები, დინებათა ფიზიკური მოდელების შესადგენად (ექსპერიმენტების ჩასატარებლად).

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = b_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu^*}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right); \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = b_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu^*}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right); \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (7.26)$$



$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (7.27)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (7.28)$$

თუ (7.24) – (7.28) განტოლებებში გადავალთ უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე ფორმულებით:

$$x_i = l_0 x'_i; \quad v_i = v_0 v'_i; \quad t = \frac{l_0}{v_0} t'; \quad p = \rho v_0^2 p'; \quad b_i = g b'_i. \quad (7.29)$$

მაშინ, მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_1}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} = g b'_1 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_1} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_1; \quad (7.30)$$

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_2}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = g b'_2 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_2; \quad (7.31)$$

$$\frac{v_0}{l_0} \left( \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) = 0; \quad (7.32)$$

$$(v'_1)_{t=0} = v'_{10}; \quad (v'_2)_{t=0} = v'_{20}; \quad (7.33)$$

$$(v'_1)_{\partial\Omega} = 0; \quad (v'_2)_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.34)$$

თუ, (7.30) – (7.34) განტოლებებში შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0 \rho}{\mu^*}; \quad \text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}; \quad (7.35)$$

და აღარ დავწერთ შტრიხებს, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს უგანზომილებო ფორმით:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{\text{Fr}^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_1; \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{\text{Fr}^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_2; \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (7.38)$$

$$(v_1)_{t=0} = v_{10}; \quad (v_2)_{t=0} = v_{20}; \quad (7.39)$$

$$(v_i)_{\infty} = 0. \quad (7.40)$$

მუდმივ კოეფიციენტს  $Re$  – რეინოლდსის რიცხვი ეწოდება, ხოლო  $Fr$  – ფრუდის რიცხვი.

იმისათვის რომ, სხვადასხვა მასშტაბის ორი მოდელი იყოს ექვივალენტური, მათ შორის უნდა არსებობდეს მსგავსება. ცხადია, რომ ორი მოდელი მსგავსი იქნება, თუ მოდელის რეჟიმის განმსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტები ( $Re$  და  $Fr$ ), იქნებიან შესაბამისად ტოლები, ანუ, თუ

$$Re_1 = Re_2; \quad Fr_1 = Fr_2. \quad (7.41)$$

ამ პირობების ერთდროულად დაცვა კი ძალზედ რთულია, განსაკუთრებით იმ ამოცანებში, სადაც მნიშვნელობა აქვს სიმძიმის ძალის გავლენას.

მოდელების მათემატიკურად გამოსაკვლევად, მათ როგორც წესი, გადაწერენ უგანზომილებო ფორმით. გათვლების შედეგების პრაქტიკაში გადასატანად იყენებენ შესაბამისი გადასვლის ფორმულებს (7.29).

## 7.6. ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის

განვიხილოთ ბლანტი, უკუმშვადი სითხის დინამიკა იმ შემთხვევაში, როცა რეინოლდსის რიცხვი იზრდება. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ მოცემული ამოცანის პირობებში, არსებობს რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, ასე რომ, თუ  $Re \leq Re_{kr}$  გვაქვს ლამინარული (ფენოვანი, წყნარი) დინება, ხოლო, თუ  $Re \geq Re_{kr}$  გვაქვს ფენების შერევა-დიფუზია, ამ რეჟიმს ტურბულენტური დინება ეწოდება.

თუ განვიხილავთ დინებას, რომლის დროსაც  $Re \rightarrow \infty$ , მივიღებთ ისეთ ტურბულენტურ დინებას, რომლის დროსაც განვითარებული დიფუზიის გამო, სიბლანტის თვისებას აღარ აქვს ფიზიკური გავლენა ანუ დინება შეიძლება განხილული იყოს,

როგორც ისეთი სითხის დინება, რომლის ფენებს შორისაც არა გვაქვს ხახუნის ძალა(ასეთ სითხეებს იდეალურს უწოდებენ).

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი შეიძლება მივიღოთ ბლანტი სითხის მოდელიდან, თუ მოვახდენთ შესაბამის ზღვარზე გადასვლას იმ პირობით, რომ  $Re \rightarrow \infty$ . მაშინ, (7.36) –(7.40) მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (7.44)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}; \quad (7.45)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0. \quad (7.46)$$

მათემატიკურ მოდელს, რომელიც მოიცემა (7.42) – (7.46) სახით ეილერის მოდელი ეწოდება.

### 7.7. უწყვეტ გარემოში სითხოს განაწილების მათემატიკური მოდელირება(დიფუზიის განტოლება)

განვიხილოთ,  $R^3$  - ში რაიმე უწყვეტი  $\Omega$  გარემო(სითხე, გაზი, ელასტიური მასალა ...),  $\partial\Omega$  საზღვრით.

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ დროის  $\Delta t$  მონაკვეთში,  $\partial\Omega$  ზედაპირს გასჭოლავს  $\Delta Q$  რაოდენობის სითხო, რომელიც გამოითვლება ზედაპირული ინტეგრალით:

$$\Delta Q = \iint_{\partial\Omega} k \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dS \Delta t; \quad (7.47)$$

სადაც  $n$  – არის საზღვრის გარეწრმალის  $(x,y,z)$  ვერტიკლში;

$k$  – შიდა სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

ვთქვათ, ადგილი აქვს უწყვეტი გარემოს(მასალის) გაცივების პროცესს, მაშინ

$$\frac{\partial T}{\partial n} \leq 0; \quad (7.48)$$

და მაშასადამე, (7.47) მიიღებს სახეს

$$\Delta Q_1 = - \iint_{\partial \Omega} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \Delta t. \quad (7.49)$$

$\partial \Omega$  - საზღვრის ზედაპირს გადაკვეთს  $\Delta Q_1$  - სითბოს რაოდენობა, რომელიც დაკარგა  $\Omega$  მოცულობის უწყვეტმა გარემომ (მასალამ).

$\Omega$  მოცულობის  $m$  მასისა და  $c$  კუთრი სითბოტევადობის,  $\rho$  სიმკვრივის გარემო გასცემს  $\Delta Q_2$  სითბოს რაოდენობას, რომელიც გამოითვლება ჯერადი ინტეგრალით

$$\Delta Q_2 = - \iiint_{\Omega} c \rho [T(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - T(x_1, x_2, x_3, t)] d\omega; \quad (7.50)$$

უარყოფითი ნიშანი მიუთითებს იმაზე, რომ ხდება მასალის გაცივება. თუ უწყვეტი გარემოს შიგნით არიან სითბოს განაწილებული წყაროები

$I(x_1, x_2, x_3)$  კუთრი სიმძლავრეებით, მაშინ  $\Delta t$  დროში წყაროების მიერ გამომუშავებული სითბოს  $\Delta Q_3$  რაოდენობა იქნება:

$$\Delta Q_3 = \iiint_{\Omega} I(x_1, x_2, x_3, t) d\omega \Delta t. \quad (7.51)$$

სითბური ბალანსის განტოლებას აქვს სახე:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3; \quad (7.52)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$- \iint_{\partial \Omega} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \Delta t = - \iiint_{\Omega} c \rho [T(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - T(x_1, x_2, x_3, t)] d\omega + \iiint_{\Omega} I(x_1, x_2, x_3, t) d\omega \Delta t. \quad (7.53)$$

რადგან

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad}T \cdot n_0; \quad n_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}; \quad (7.54)$$

და  $n_0 dS = d\vec{S}$ , ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\iint_{\partial\Omega} k \frac{\partial T}{\partial n} dS = \iint_{\partial\Omega} k \text{grad}T \cdot d\vec{S}; \quad (7.55)$$

მაგრამ, გაუსის ფორმულის თანახმად

$$\iint_{\partial\Omega} k \text{grad}T \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \text{div}(k \text{grad}T) d\omega; \quad (7.56)$$

თუ (7.54) – (7.56)-ს, შევიტანთ (7.53)-ში მივიღებთ

$$\begin{aligned} - \iiint_{\Omega} \text{div}(k \text{grad}T) d\omega \Delta t &= - \iiint_{\Omega} c\rho [T(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) - T(x_1, x_2, x_3, t)] d\omega + \\ &+ \iiint_{\Omega} I(x_1, x_2, x_3, t) d\omega \Delta t \end{aligned}; \quad (7.57)$$

თუ, ყველა ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას ერთი ინტეგრალის ქვეშ მოვაქცევთ, გავყოფთ  $\Delta t$ -ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$\text{div}(k \cdot \text{grad}T) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + I(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (7.58)$$

ამ განტოლებას სითბოსგამტარობის (დიფუზიის) განტოლებას უწოდებენ. ამ განტოლებაში

$$k = f_1(T, x_1, x_2, x_3, t); \quad c = f_2(T, x_1, x_2, x_3, t). \quad (7.59)$$

ე.ი. (7.58), (7.59) ზოგად შემთხვევაში გვაძლევს არაწრფივ მოდელს.

თუ, დავუშვებთ, რომ

$$k = \text{const} \wedge c = \text{const}, \quad (7.60)$$

მაშინ, მივიღებთ წრფივ განტოლებას ერთგვაროვანი გარემოსათვის:

$$\Delta T = \zeta \frac{\partial T}{\partial t} - I(x_1, x_2, x_3, t); \quad (7.61)$$

სადაც

$$\zeta = \frac{c\rho}{k}; \quad \Delta T = T_{,ii} \quad (7.62)$$

თუ, უწყვეტ გარემოში არ არიან განაწილებული სითბური წყაროები, მაშინ (7.61) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\Delta T = \zeta \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (7.63)$$

## VIII თავი. მასალათა პლასტიკური მუშაობის მათემატიკური მოდელირება

დრეკადი (ელასტიური) მასალები, მოდებული დატვირთვებისაგან (ძალებისაგან) განთავისუფლების შემდეგ, მთლიანად აღიდგენენ თავის საწყის არადეფორმირებულ მდგომარეობას. მაგრამ, არსებობენ ელასტიური მასალები, რომლებიც ნაწილობრივ ინარჩუნებენ დაძაბულ – დეფორმირებულ მდგომარეობას, მოდებული დატვირთვების მოხსნის შემდეგაც. ასეთ მასალებს **პლასტიკური მასალები** ეწოდებათ, ხოლო ნარჩენ დეფორმაციებს – **პლასტიკური დეფორმაციები**.

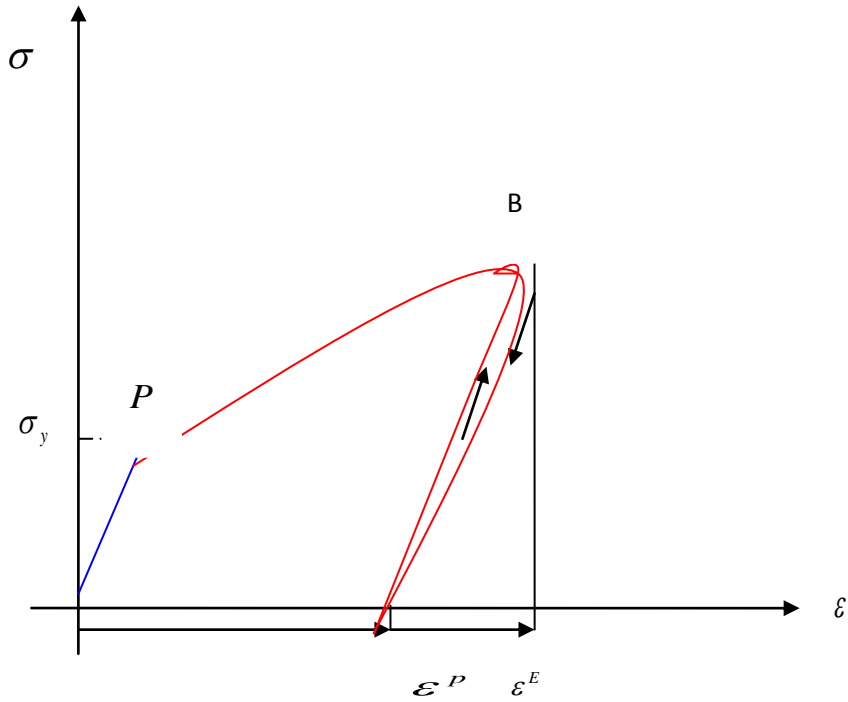
### 8.1. პლასტიკური დეფორმაცია

პლასტიკური დეფორმაციები წარმოიშობიან დეფორმირებად მასალაში, როცა ძაბვის ინტენსივობა მიიღებს გარკვეულ  $\sigma_y$ -მნიშვნელობას, რომელსაც **დრეკადობის ზღვარი ან დენადობის ზღვარი** ეწოდება.

პლასტიკური მასალების მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესადგენად, საჭიროა დადგინდეს შესაბამისი რეოლოგიური თანადობა და ის პირობები, რომლის დროსაც იწყება პლასტიკური დეფორმაციები. **მიკროსკოპიულ დონეზე პლასტიკური დეფორმაციების შესწავლა არის მყარი სხეულის ფიზიკის ამოცანა, ჩვენ კი, შევისწავლით მაკროსკოპიულ ფენომენოლოგიურ მიდგომას.**

პლასტიკურ ზონაში მუშაობისას (სითხეებისაგან განსხვავებით), მასალებისათვის დამახასიათებელია მხები ძაბვების არსებობა მაშინაც, როცა მისი ნაწილაკები არ მოძრაობენ.

პლასტიკური მუშაობისათვის დამახასიათებელი ცნებები განვიხილოთ ჰიპოთეტური – პლასტიკური მასალის, ძაბვა – დეფორმაციების დიაგრამის მეშვეობით, რომელიც ყოველი კონკრეტული მასალისათვის იგება მასალის ლაბორატორიული შესწავლისას გაჭიმვა – შეკუმშვის დეფორმაციაზე (ასევე ძვრის დეფორმაციაზე) (ნახ. 8.1).



ნახ. 8.1. პლასტიკური მასალის მუშაობის დაძაბულ – დეფორმირებულმდგომარეობის დიაგრამა

ამ ნახაზზე  $\sigma$  - პირობითი ძაბვა(ძალა გაყოფილი საწყის კვეთზე); ხოლო  $\varepsilon$  - ტექნიკური ფარდობითი დეფორმაციაა

$$\varepsilon = e = \frac{L - L_0}{L_0}, \quad (8.1)$$

(სადაც  $L$  - ნიმუშის სიგრძეა,  $L_0$  - საწყისი სიგრძე);

ან ნატურალური(ლოგარითმული) დეფორმაციაა

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(1 + e) = e - \frac{e^2}{2} + O(e^3). \quad (8.2)$$

მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, დეფორმაციის ეს ორი მახასიათებელი ერთმანეთს ემთხვევა( $\varepsilon = e$ ).

ნახაზზე  $P$  - წერტილი, რომელიც შეესაბამება დრეკადობის ზღვარს, დიაგრამას ყოფს ორ ნაწილად: დრეკად (ლურჯი გრაფიკი) და პლასტიკურ(წითელი გრაფიკი) ზონად.



ზოგჯერ, პლასტიკურ ზონად იღებენ ისეთი J – წერტილიდან, როცა მხების დახრილობა შეადგენს 50%-ს საწყის დახრილობასთან შედარებით(დენადობის ჯონსონის ზღვარი).

P – წერტილამდე (წრფივი დრეკადობის ზონა - ლურჯი), ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულება, ამიტომ ძაბვების მოხსნისას მასალა აღიდგენს საწყის მდგომარეობას.

პლასტიკურ ზონაში (P – წერტილის მარჯვნივ – წითელი), სიტუაცია იცვლება. მაგალითად, თუ B – წერტილში დავიწყებთ განტვირთვას (თანდათან მოვხსნით მოქმედ ძაბვებს), მაშინ განტვირთვის მრუდი, რომელიც შესაბამის დაძაბულ – დეფორმირებულ მდგომარეობას აღწერს გაყვება BC – წრფეს, რომელიც პრაქტიკულად პარალელურია OP – წრფივი დრეკადობის ზონის მრუდის ნაწილისა. C – წერტილში, სადაც  $\sigma = 0$ , ჩვენ გვაქვს ნარჩენი  $\epsilon^p$  - დეფორმაცია. ნახაზზე  $\epsilon^E$  - აღნიშნავს დეფორმაციის დრეკად ნაწილს(რომელიც მთლიანად აღდგება ძალების მოხსნის შემდეგ). ხელახლა დატვირთვისას მდგომარეობის მრუდი C – წერტილიდან წავა B – სკენ, მაგრამ არ გაუყვება BC – ს და არ მოხვდება ზუსტად B – წერტილში, რადგან დატვირთვა – განტვირთვისას ხდება ენერჯიის დისიპაცია (ხარჯვა) და მაშასადამე, გვექნება **ჰისტერეზისის მრუდი.**

B – წერტილში დაბრუნებისას, დეფორმაციების გასაზრდელად საჭიროა ძაბვის გაზრდა, ამ მოვლენას მასალის გამყარებას უწოდებენ. ცხადია, რომ პლასტიკურ ზონაში ძაბვა დამოკიდებულია დატვირთვა – განტვირთვისა და დეფორმაციის მთელ ისტორიაზე.

**P.S.** ა) პლასტიკური დეფორმაციები ძლიერაა დამოკიდებული ტემპერატურაზე, მაგრამ მათემატიკური მოდელირებისას (სიმარტივისათვის) თვლიან, რომ ტემპერატურა მუდმივია და განიხილება იზოთერმული პლასტიკური დეფორმაციები;

ბ) ასევე (სიმარტივისათვის), პლასტიკურობის თეორიაში, დატვირთვა – განტვირთვის სიჩქარეც არ მიიღება მხედველობაში და თვლიან, რომ პლასტიკური დეფორმაციები არაა

დამოკიდებული დროზე (ამ მიმართულებით ელასტიურობის მოდელების დასაზუსტებლად, პლასტიკურობის თეორიის პარალელურად, განიხილავენ მასალის ცოცვადობისა და რელაქსაციის მათემატიკურ მოდელებს).

---

## 8.2. პლასტიკური დეფორმაციების წარმოშობის კრიტერიუმები

პლასტიკურობის კრიტერიუმები განაზოგადებენ დრეკადობის ზღვარის ცნებას სამგანზომილებიანი შემთხვევებისათვის. პლასტიკურობის კრიტერიუმები გვაძლევენ განტოლებებს, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ძაბვის ტენზორის კომპონენტები, იმისათვის რომ დაიწყოს პლასტიკური დინება:

$$f1(\sigma_{ij}) = C_y; \quad (8.3)$$

სადაც  $C_y$  - პლასტიკური დინების მუდმივაა მოცემული მასალისათვის.

ზოგჯერ (8.3) თანადობა ჩაიწერება ერთგვაროვანი ფორმით

$$f2(\sigma_{ij}) = 0; \quad (8.4)$$

ასეთ შემთხვევაში,  $f2$ - ფუნქციას დენადობის ფუნქციას უწოდებენ.

ყველაზე უფრო გავრცელებული და მათემატიკურად მარტივი, პლასტიკურობის კრიტერიუმებია: ტრესკის კრიტერიუმი და მიზესის კრიტერიუმი.

განვიხილოთ თითოეული მათგანი ცალ – ცალკე:

ა) ტრესკის კრიტერიუმი: პლასტიკური დენადობა იწყება მაშინ, როდესაც მაქსიმალური მხები ძაბვები აღწევენ კრიტიკულ  $C_y$ - მნიშვნელობას.

თუ  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ძაბვის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობებია და

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3; \quad (8.5)$$

მაშინ ტრესკის კრიტერიუმს აქვს სახე:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = C_y = const = \frac{\sigma_y}{2}; \quad (8.6)$$

ანუ

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y. \quad (8.7)$$

ბ) მიზესის კრიტერიუმი: პლასტიკური დენადობა იწყება მაშინ, როდესაც ძაბვის ტენზორის დევიატორის მეორე ინვარიანტი აღწევს კრიტიკულ  $C_y$ -მნიშვნელობას.

მათემატიკურად მიზესის კრიტერიუმი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6 \cdot C_y^2 = 2\sigma_y^2. \quad (8.8)$$

**P.S.** პლასტიკური მასალებისათვის ერთიანი თეორია ჯერ-ჯერობით არ არსებობს, არსებობს რიგი მიახლოებითი ტექნიკური თეორიებისა, რომელთა გამოყენებაც შემოიფარგლება შესაბამისი მასალებით და რომელთა აღწერაც მოიცემა შესაბამის სპეციალურ კურსებში.

**ლიტერატურა**

1. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ., Мир, Москва, 1974
2. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва, 1954
3. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва, 1965
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости, пер. с англ., Мир, Москва, 1974

5. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально-пластических тел, пер. с англ., Мир, Москва, 1956
6. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред, пер. с болгарского, Мир, Москва, 1979
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, Наука, Москва, 1986
8. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956
9. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004
10. Roahe P.J. Computational fluid dynamics, Albuquerque, New Mexico, 1976
11. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and computational aspects of convective heat transfer, New York, 1984
12. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика, пер. с англ., Мир, Москва, 1989
13. Хемш М., Нилсен Дж. Аэродинамика ракет, том 1, том 2, пер. с англ., Мир, Москва, 1989
14. Краснов Н.Ф., Кошевой В.Н., Данилов А.Н. и др. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пос., Москва, 1985
15. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости, Москва, 1976
16. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости, Москва, 1979
17. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость, Москва, 1980

### III ნაწილი. დინამიკური სისტემების კვლევის მეთოდები

#### IX თავი. ბულის ალგებრების კატეგორია

##### შესავალი

კატეგორიათა თეორია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც მათემატიკურ სტრუქტურებს და მათ შორის კავშირებს სწავლობს გარკვეული აბსტრაქტული მეთოდების გამოყენებით. კატეგორიები პირველად შემოიტანეს სონდერს მაკლეინმა და სამუელ აილენბერგმა. კატეგორიათა თეორიის საბაზისო ცნებებია: კატეგორია, ფუნქტორი, ბუნებრივი გარდაქმნა, შეუღლება და ა.შ. კატეგორიათა თეორია ფართოდ გამოიყენება თეორიულ ინფორმატიკაში. ჩვენ განვიხილავთ ბულის ალგებრების კატეგორიას, სადაც მორფიზმების როლს ასრულებენ ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

#### 9.1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგესხენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ გამონათქვამებს უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

მაგალითად:  $p$  – “სოკრატე ადამიანია”;  
 $q$  – “ადამიანი მოკვდავია”;  
 $r$  – “სოკრატე მოკვდავია”.

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ უნარული და ბინარული ოპერაციები.

**განსაზღვრება:** უნარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე (გამონათქვამზე). უნა – ლათინურად ნიშნავს ერთს.

**განსაზღვრება:** ბინარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე (გამონათქვამზე). ბი – ლათინურად ნიშნავს ორს.

**განსაზღვრება:** ორი  $p$  და  $q$  გამონათქვამის დიზიუნქცია (“ $\vee$ ” – ან) ეწოდება ისეთ  $p \vee q$  გამონათქვამს ( $p$  ან  $q$ ), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან  $p$  ან  $q$  (ერთ-ერთი მაინც).

არისტოტელეს მოდელში[1-3] (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი(**true**) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი(**false**) გამონათქვამისა კი, უდრის 0-ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის (ცხრილი 9.1):

ცხრილი 9.1

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**განსაზღვრება:** ორი **p** და **q** გამონათქვამის კონიუნქცია (“ $\wedge$ ” – და) ეწოდება ისეთ  $p \wedge q$  გამონათქვამს(**p** და **q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია **p** და **q** (ორივე ერთდროულად).

კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი (ცხრილი 9.2):

ცხრილი 9.2

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**განსაზღვრება:** ორი **p** და **q** გამონათქვამს ექვივალენტური ( $\equiv$ ) ეწოდებათ (ჩაწერენ  $p \equiv q$ ), თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები, მათში შემავალი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი ორი ბინარული ოპერაციის (“ $\vee$ ” და “ $\wedge$ ”) თვისებები. ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად (ცხრილი 9.3).

გამონათქვამების თვისებები	თვისების დასახელება	შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის	ემთხვევიან(+), თუ, არ ემთხვევიან(-) თვისებები
$p \vee q \equiv q \vee p$	კომუტაციურობის თვისება	$a+b=b+a$	+
$p \wedge q \equiv q \wedge p$		$axb=bxa$	+
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	ასოციურობის თვისება	$(a+b)+c=a+(b+c)$	+
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		$(axb)xc=ax(bxc)$	+
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	დისტრიბუციულობის თვისება	$(a+b)xc=axc+bxc$	+
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$		$(axb)+c \neq (a+c)x(b+c)$	-
$p \vee p \equiv p$	იდემპოტენტობის თვისება	$a+a \neq a$	-
$p \wedge p \equiv p$		$axa \neq a$	-

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან შედარებით. რაც იმის მომასწავებელია, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართებაში (აღგებრის თვალსაზრისით) უფრო სხვა სტრუქტურული სისტემაა ბულის აღგებრასთან შედარებით.

ეხლა, განვიხილოთ უარყოფის უნარული ოპერაცია, რომელიც განისაზღვრება გამონათქვამებზე:

განსაზღვრება:  $p$  გამონათქვამის უარყოფა (“ $\neg$ ”-არა) ეწოდება ისეთ  $\neg p$  გამონათქვამს(არა  $p$ ), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა  $p$  მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა  $p$  ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე (ცხრილი 9.4) :

ცხრილი 9.4

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

ამრიგად, გამონათქვამთა აღგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია ( $\vee, \wedge, \neg$ ). ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს

მთელ გამონათქვამთა ალგებრას. ანალოგიურ, ალგებრულ სისტემებს ბულის ალგებრებს უწოდებენ.

ყველა სხვა ოპერაცია გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას: “თუ  $p$ , მაშინ  $q$ ”. ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად:  $p \Rightarrow q$  ( $p$  – დან გამომდინარეობს  $q$ ). “ $\Rightarrow$ ” - სიმბოლოს იმპლიკაციის უწოდებენ.

იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებები, საჭიროა გამოვეყნოთ ის ძირითადი კანონები, რომლებსაც ჩვენ აზროვნების კანონებს ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალისაცა გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას (ცხრილი 9.5) :

ცხრილი 9.5

კანონის ფორმალური ჩაწერა	კანონის დასახელება
$p \vee (\neg p) \equiv 1$	გამორიცხული მესამის კანონი
$p \wedge (\neg p) \equiv 0$	წინააღმდეგობის კანონი
$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p; p \wedge 0 \equiv 0$	შთანთქმის კანონები
$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$	კონტრაპოზიციის კანონი
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r)$	სილოგიზმის კანონი
$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$	დე მორგანის კანონები
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$	
$\neg(\neg p) \equiv p$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	ექვივალენტობის კანონი

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა : სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალისაცა გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

**მაგალითად:** ვთქვათ, გვაქვს წინადადება - “თუ, დიდია ტენიანობა და მაღალია ტემპერატურა, მაშინ ჩვენ, თავს ვერ ვგრძნობთ კარგად”. მოვახდინოთ მისი ფორმალისაცა. ამისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები :

“დიდია ტენიანობა” – აღვნიშნოთ **P** ასოთი ;

“მაღალია ტემპერატურა” – აღვნიშნოთ **Q** ასოთი ;

“თავს ვგრძნობთ კარგად” – აღვნიშნოთ **C** ასოთი ;

მაშინ, შემოთავაზებული წინადადება შეიძლება ფორმალურად ჩავწეროთ შემდეგი სახით:



$$(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg C). \quad (9.1)$$

ასეთნაირად აგებულ ფორმალურ გამოსახულებებს **ბულის ფორმულებს** უწოდებენ.

**განსაზღვრება:** ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც აიგებიან ატომებზე - საწყის გამონათქვამებზე, ბულის ალგებრის სამი ოპერაციისა, იმპლიკაციის ცნებისა და ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით **ბულის ფორმულები** ეწოდებათ.

**მაგალითად:**  $P \wedge$  ; და  $\Rightarrow(\neg C)$  - არა არიან ბულის ფორმულები.

**განსაზღვრება:** ბულის ფორმულებს **ექვივალენტური** ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

**მაგალითად:** განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები მართლაც ექვივალენტური არიან. ამისათვის, განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების (p,q) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 9.6) და ვახვენოთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \text{ დე მორგანის პირველი კანონი} \quad (9.2)$$

**დამტკიცება :**

ცხრილი 9.6

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. ანუ, ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური.

**განსაზღვრება:** ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების

(გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – ტავტოლოგია ეწოდება.

მაგალითად : 1)  $G \equiv p \vee (\neg p)$  – ტავტოლოგიაა, გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

2) განვიხილოთ ფორმულა :  $H \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$  . მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად, საჭიროა, ან შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი, ან გავამარტივოთ ის აზროვნების ზემოთ მოყვანილი კანონების მიხედვით. ჩვენ, ამ მაგალითში, ვირჩევთ ბულის ფუნქციის გამარტივების გზას :

$$H \equiv (((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \vee Q) \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q) \equiv$$

(9.3)

$$\equiv (0 \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q \equiv ((Q \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (\neg(Q \wedge P)) \vee Q \equiv (\neg Q) \vee (\neg P) \vee Q \equiv$$

$$\equiv 1 \vee (\neg P) \equiv 1.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა.

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ ფორმულა **წინააღმდეგობრივია** (არაა სწორი), თუ, ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების(მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად :  $G \equiv p \wedge (\neg p)$  ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

**სავარჯიშო:** აჩვენეთ, რომ ფორმულა

$$H \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge (\neg Q)) - \text{წინააღმდეგობრივია.} \quad (9.4)$$

**განსაზღვრება:** ატომს ან ატომის უარყოფას **ლიტერა** ეწოდება.

მაგალითად :  $Q$ ;  $\neg P$  - ლიტერებია.  $P \Rightarrow Q$  – არაა ლიტერა.

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n ; \quad (9.5)$$

წარმოადგენილია **კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული  $F_i$  წარმოადგენს **დიზიუნქტიურ ლიტერას**.

ანუ, კონიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა, შეიცავს ლიტერების დიზიუნქციათა კონიუნქციას.

$$\text{მაგალითად : } F \equiv (P \vee (\neg Q)) \wedge (\neg P \vee Q). \quad (9.6)$$

ანალოგიურად, განიხილავენ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ცნებას.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n \quad (9.7)$$

წარმოადგენილია დიზიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში, თუ თითოეული  $F_i$  წარმოადგენს კონიუნქტიურ ლიტერას. ანუ, დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა შეიცავს ლიტერების კონიუნქციას დიზიუნქციას.

მაგალითად :  $F \equiv (P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q)$ . (9.8)

**თეორემა :** ვთქვათ მოცემულია ფორმულები  $F_1; F_2; \dots F_n$  და ფორმულა  $G$ . ფორმულა  $G$  გამომდინარეობს  $F_1; F_2; \dots F_n$  ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა  $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow G$  ტავტოლოგიაა.

**თეორემა :** ვთქვათ მოცემულია ფორმულები  $F_1; F_2; \dots F_n$  და ფორმულა  $G$ . ფორმულა  $G$  გამომდინარეობს  $F_1; F_2; \dots F_n$  ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა  $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \wedge (\neg G)$  წინააღმდეგობრივი ფორმულაა.

**P.S.**

1) წარმოდგენილი თეორია, არა მარტო წარმოადგენს სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის შესახებ, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით [4];

2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს სამნიშნა ლოგიკაც. აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია [3].

3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n-ნიშნა ლოგიკაც**. რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერ-ჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში [5].

4) შემუშავებულია არამკაფიო ლოგიკაც [6]. აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანაში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია.

5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, ინტუიციონისტურ ლოგიკას, რომლის ფუძემდებლებიც არიან ბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი [7]. ინტუიციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

## 9.2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგი-ურად. სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

**მაგალითად:**

**A** – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;

**N** – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

**Z** – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

**Q** – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

**R** – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

**M** – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი გეორგ კანტორი[8]. სიმრავლის ცნებას ზუსტი განსაზღვრება არა აქვს, თუმცა ის მოიცემა ინტუიციურად გ.კანტორ-რის მიერ შემდეგი ფორმით:

**მინიშნება:** სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

**განსაზღვრება:** ორ სიმრავლეს ეწოდებათ ტოლი, თუ, ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად:  $A=B$ .

შემოვიღოთ დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.

**განსაზღვრება:** ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლის გაერთიანება (“ $\cup$ ” - გაერთიანება) ეწოდება ისეთ  $A \cup B$  სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის ან  $A$ , ან  $B$  სიმრავლეს(ერთ-ერთს მაინც).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \vee e \in B\}. \quad (9.9)$$

ჩანაწერი  $e \in A$  - წაიკითხება ასე "e ეკუთვნის (როგორც ელემენტი) A სიმრავლეს".

**P.S.** როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განისაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

**განსაზღვრება:** ორი A და B სიმრავლის *თანაკვეთა* ("∩" - თანაკვეთა) ეწოდება ისეთ  $A \cap B$  სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A-საც და B - საც (ერთდროულად).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cap B = \{e \mid e \in A \wedge e \in B\}. \quad (9.10)$$

**P.S.** როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განისაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ეხლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

**განსაზღვრება:** ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს ცარიელი სიმრავლე ( $\emptyset$ ) ეწოდება.

**P.S.** ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

**განსაზღვრება:** ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ყველა სხვა სიმრავლეს უნივერსალური (E) სიმრავლე ეწოდება.

**P.S.**

**1.** უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

**2.** აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას.

სიმრავლე, რომელიც თავის თავს შეიცავს ელემენტის სახით, ცოცხალი სისტემების სივრცეში მოხვედრისას, ფრაქტალად გარდაიქმნება, რადგან სხვადასხვა მასშტაბში აქვს, ერთიდაიგივე, ერთმანეთში უსასრულოდ ჩალაგებული განუსაზღვრელი სტრუქტურა.

ამდენად, ასეთი ტიპის წარმონაქმნები არ უნდა ჩავთვალოთ კლასიკურ სიმრავლედ, ანუ, უნივერსალური სიმრავლისათვის ასეთი წინააღმდეგობრივი სტრუქტურის მოთხოვნა არაა მართლზომიერი.

ის ფაქტი რომ  $A$  სიმრავლე არის სხვა  $B$  სიმრავლის ნაწილი, ანუ ჩართულია მასში როგორც ქვესიმრავლე, ჩაიწერება შემდეგნაირად:  $A \subseteq B$ .

ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ  $A$  სიმრავლე არის სხვა  $B$  სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდევ მას.

იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხებულია, ამბობენ რომ,  $A$  სიმრავლე არის სხვა  $B$  სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი და ჩაწერენ  $A \subset B$ .

ეხლა განვიხილოთ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა (ცხრილი 9.7).

ცხრილი

9.7

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთისა თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A \cup B = B \cup A$	კომუტაციურობა	$p \vee q \equiv q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ასოციურობა	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$		$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$A \cup A = A$	იდემპოტენტობა	$p \vee p \equiv p$
$A \cap A = A$		$p \wedge p \equiv p$
$A \cup E = E; A \cup \emptyset = A;$ $A \cap E = A; A \cap \emptyset = \emptyset$	შთანთქმის კანონები	$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p; p \wedge 0 \equiv 0$

ეხლა, შემოვიღოთ გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას სიმრავლის დამატებას ეძახიან.

**განსაზღვრება:** მოცემული  $A$  სიმრავლის დამატება  $E$  უნივერსუმამდე ეწოდება ისეთ  $A^c$  სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის  $E$ -ს და არ ეკუთვნის  $A$ -ს.

ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$A^c = \{e \mid e \in E \wedge e \notin A\}. \quad (9.11)$$

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (9.12)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (9.13)$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგნაირად:

$$(A^c)^c = A. \quad (9.14)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაობისა, ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან.

**განსაზღვრება:** ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ **ჰომომორფული**, თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.

ასე, რომ ცხადია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა **ჰომომორფულია** სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.

### 9.2.1. ფრაქტალი, როგორც სიმრავლე

$A$  სიმრავლე მოიცემა თავისი ელემენტების საშუალებით

$$A = \cup_{i \in I} A_i,$$

სადაც  $A_i$  მოცემული  $A$  სიმრავლის  $i$ -ური ელემენტია, ხოლო  $I$  ინდექსთა სიმრავლეა.

სიმრავლის თითოეული  $A_i$  ელემენტი, ის უმცირესი “აგურთაგანია”, რომლისგანაც  $A$  სიმრავლე შედგება. თუ, გვინდა  $A_i$  ელემენტის შიგნით შევიდეთ, მაშინ მას უნდა შევხედოთ, როგორც “დამოუკიდებელ” ახალ სიმრავლეს. ეს მოგვცემს საშუალებას “დავინახოთ” მისი შემადგენელი  $(A_i)_j$  ელემენტები. თუ გვინდა შევიდეთ უფრო ღრმად, ანუ, შევისწავლოთ  $((A_i)_j)_k$  სიმრავლე, მაშინ  $(A_i)_j$  ელემენტებს უნდა შევხედოთ როგორც დამოუკიდებელ სიმრავლეებს და ა.შ.

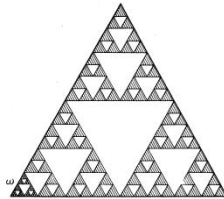
ცხადია, რომ  $A_i$  არის  $A$  სიმრავლისათვის წერტილი, ხოლო  $(A_i)_j$  არის  $A_i$  სიმრავლის წერტილი და ა.შ. ანუ, შეგვიძლია შემოვიღოთ ცნება:

**განსაზღვრება:**  $A$  სიმრავლის ყოველ  $A_i$  ელემენტს, მისი წერტილი ეწოდება.

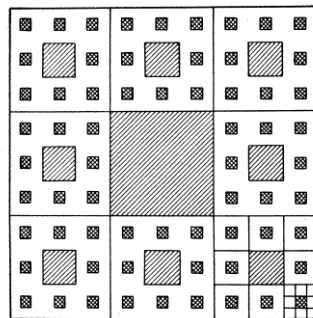
თუ,  $A$  სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა (ანუ, გვაქვს მასში მანძილის ცნება), მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $A$  სიმრავლის დიამეტრი არაა ნაკლები, მისი  $A_i$  წერტილების დიამეტრებზე, ანუ,  $diam A \geq diam(\max_i(A_i))$ .

**განსაზღვრება:** თუ,  $A, A_i, (A_i)_j \dots$  ერთნაირი გეომეტრიული სტრუქტურის სიმრავლეებია, მაშინ  $A$  სიმრავლეს **ფრაქტალი** ეწოდება.

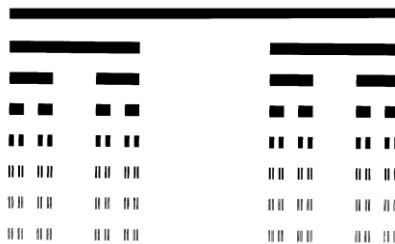
ფრაქტალებს ახასიათებს სხვადასხვა მასშტაბში განმეორებადი გეომეტრიული სტრუქტურა. მაგალითად, ცნობილი კლასიკური, **ფრაქტალური** სიმრავლეებია: სერპინსკის სამკუთხედი (ნახ.9.1); სერპინსკის კვადრატული ხალიჩა (ნახ. 9.2); კანტორის სიმრავლე (ნახ. 9.3).



ნახ. 9.1. სერპინსკის სამკუთხედი



ნახ. 9.2. სერპინსკის კვადრატული ხალიჩა



ნახ. 9.3. კანტორის სიმრავლე



ასევე, ფრაქტალთა ტყეში ყოველი ხე, რომლის თითოეულ ტოტს აქვს ერთნაირი გეომეტრიული სტრუქტურა, თუმცა, რაც უფრო ზემოთ კენწეროსკენაა ტოტი, მისი ზომები უფრო მცირე მასშტაბისაა.

ფრაქტალური ფორმა აქვს ცოცხალი ორგანიზმების შინაგანი ორგანოების ქსოვილს(ფილტვს, ღვიძლს, გულს, სისხლძარღვებს), თუმცა, თითოეული მათგანის ფრაქტალური სტრუქტურა ინდივიდუალურია, ამდენად, ცოცხალი სისტემები მულტიფრაქტალური სტრუქტურის მატარებლები არიან.

### 9.3. რელაციური სისტემები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს  $A$  სიმრავლე. მაშინ ამ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს აღნიშნავენ  $A \times A = A^2$  სიმბოლოთი.

**განსაზღვრება:** ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთი  $(a;b)$  დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის  $A$ -ს, ხოლო მეორე  $B$ -ს. სიმბოლოების საშუალებით ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$$A \times B = \{(a;b) | a \in A \wedge b \in B\}. \quad (9.15)$$

ეს განმარტება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ მიმართებისა და ფუნქციის ცნება.

**განსაზღვრება:** ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ  $R$  ქვესიმრავლეს, მიმართება ეწოდება.

ე.ი. თუ  $R$  მიმართებაა, მაშინ  $R \subset A \times B$ . (9.16)

**მაგალითი :** თუ,  $A$  – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა(წრფის წერტილების სიმრავლე), მაშინ  $A^2$  – დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს და ნებისმიერი მონაკვეთი ამ სიბრტყეზე, ან ნებისმიერი წერტილთა ქვესიმრავლე, იქნება მიმართება განსაზღვრული  $A$  სიმრავლეზე.

**განსაზღვრება:** ისეთ მიმართებას, რომლის დროსაც  $a$ -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება  $b$ -ს ერთადერთი მნიშვნელობა ფუნქცია ეწოდება.

ე.ი. ფუნქცია ისეთი გადასახვაა  $f : A \rightarrow B$ , რომლისთვისაც  $A$  სიმრავლის ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეესაბამება  $B$  სიმრავლის

ერთადერთი ელემენტი. სხვანაირად რომ ვთქვათ,  $f$  ფუნქციას მოეთხოვება ცალსახობა.

**P.S.**

არსებობს სამი ტიპის გადასახვა: **სურექცია, ინექცია და ბიექცია**. სურექციის დროს გადასახვაში მონაწილეობენ  $A$  და  $B$  სიმრავლეების ყველა ელემენტი; ინექციის დროს  $A$  სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაშია  $B$  სიმრავლის რაღაც ნაწილთან; ხოლო ბიექციის დროს, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა  $A$  და  $B$  სიმრავლეებს შორის. ასე, რომ ბიექცია არის, ერთდროულად, ინექციაც და სურექციაც.

**განსაზღვრება:** თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა  $f:A \rightarrow B$ , რომ  $A$  და  $B$  რაიმე აბსტრაქტული სიმრავლეებია (ფუნქციები, ადამიანები არჩეული გარკვეული ნიშნით, ქალაქები, ნეირონები . . .), მაშინ  $f$  გადასახვას **ოპერატორს** უწოდებენ.

**განსაზღვრება:** ფუნქციებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება.

**მაგალითი:**  $C^\infty(G)$ - თავის ნებისმიერი რიგის წარმოებულთან ერთად უწყვეტი, ფუნქციებისაგან შემდგარი სიმრავლეა.

$L_2$  - კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებისაგან შედგენილი ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა.

რაც შეეხება ოპერატორის ცნებას, ჩვენ ვიცით, წარმოებულის ოპერატორი  $\frac{d}{dx}:L_2 \rightarrow L_2$ ; სადაც  $L_2$  ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა; ასევე, ვიცით ინტეგრების ოპერატორი; კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ოპერატორი და.შ.

**განსაზღვრება:** თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა  $f:A \rightarrow B$ , რომ  $A$  რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა, ხოლო  $B$  რაიმე რიცხვითი სიმრავლე, მაშინ  $f$  გადასახვას **ფუნქციონალს** უწოდებენ.

ეს ფუნქციონალი პრაქტიკაში გამოიყენება შემდეგი ფორმით:

$$K(f) = \int_0^1 f(x)dx. \tag{9.17}$$

**მაგალითი:**  $\int_0^1 dx:L_2 \rightarrow R$  ფუნქციონალი ნებისმიერ ფუნქციას

$L_2$ -ფუნქციონალური სივრციდან გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა  $R$  სიმრავლეში. ანუ, ნებისმიერ ფუნქციას შეუსაბამებს, მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობას ამ ფუნქციიდან.

**განსაზღვრება:** თუ, მოცემული გვაქვს  $A$  სიმრავლე და მასზე განსაზღვრულია  $R$  მიმართება, მაშინ  $\langle A;R \rangle$  წყვილს **რელაციური სისტემა** ეწოდება.

**მაგალითი:** თუ,  $A$  გამონათქვამთა ბულის ალგებრაა, ხოლო  $R$  მასში განსაზღვრული რაიმე მიმართება, მაშინ  $\langle A;R \rangle$  იქნება რელაციური სისტემა. ასევე, თუ,  $B$  სიმრავლეთა ბულის ალგებრაა და  $S$  მასზე განსაზღვრებული რაიმე მიმართება, მაშინ  $\langle B;S \rangle$  რელაციური სისტემაა.

**განსაზღვრება:** ორი  $\langle A;R \rangle$  და  $\langle B;S \rangle$  რელაციურ სისტემას ეწოდებათ **იზომორფული**, თუ, არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა  $f:A \rightarrow B$ , რომ ნებისმიერი  $(\forall) x,y \in A$  ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xRy \equiv f(x)Sf(y). \quad (9.18)$$

იზომორფული რელაციური სისტემებისათვის, თუ რაიმე თვისებას აქვს ადგილი  $\langle A;R \rangle$ -ში, მაშინ, აქვს ადგილი  $\langle B;S \rangle$ -შიც. მაშასადამე, **იზომორფული სისტემები ალგებრულად იდენტურია(ერთნაირია).**

**P.S.**

ჰომომორფიზმი, იზომორფიზმისაგან განსხვავებით, არ ითხოვს შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას. ხოლო, თუ ჰომომორფიზმის მოთხოვნას დავემატებთ შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას მივიღებთ იზომორფიზმს. რელაციური სისტემები ფართოდ გამოიყენება ინფორმაციის გეომეტრიული კოდირების თეორიაში [9-17] (**RO-ფუნქციის მეთოდი**).

#### 9.4. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები

თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორია არის **ხელოვნური ინტელექტის** შემუშავების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა კომპიუტერის საშუალებით დავადგინოთ, რომ მოცემული მრავალრიცხოვანი ინფორმაციიდან შესაძლებელია, თუ არა, გავაკეთოთ გარკვეული დასკვნა. მაშინ, როცა ჩვენი ამოცანა ფორმალიზებულია ბულის ფორმულების მეშვეობით, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა წარმოადგენს,

თუ არა მოცემული ფორმულა, სხვა აგებულ ფორმულათა სიმრავლის ლოგიკურ შედეგს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ, აქციების კურსი ეცემა, თუ მათი საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება. დავუშვათ, ასევე, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურად გრძნობს თავს, როცა აქციების კურსი ეცემა. ვთქვათ, ცნობილი გახდა, რომ საწყისი საპროცენტო განაკვეთები იზრდება. მაშინ, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

იმისათვის, რომ გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა ავტომატურად, მოვახდინოთ მოცემული ამოცანის ფორმალიზაცია.

$P$  – აქციების საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება;

$S$  – აქციების ფასი ეცემა;

$U$  – ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

მაშინ, ამ ამოცანის ფორმალიზაციას აქვს სახე:

$$P \Rightarrow S; \quad (9.19)$$

$$S \Rightarrow U; \quad (9.20)$$

$$P; \quad (9.21)$$

$$U. \quad (9.22)$$

ვაჩვენოთ, რომ (9.22) ჭეშმარიტია, როგორც კი ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულა:

$((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$ . ჯერ, ეს ფორმულა გარდავქმნათ კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმამდე:

$$\begin{aligned} ((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P) &\equiv ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \wedge P \equiv (P \wedge ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ &\equiv (((P \wedge (\neg P)) \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv ((0 \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ &\equiv (P \wedge S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv (P \wedge S \wedge (\neg S)) \vee (P \wedge S \wedge U) \equiv P \wedge S \wedge U. \end{aligned} \quad (9.23)$$

ასე, რომ თუ,  $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$  ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ  $P \wedge S \wedge U$  ფორმულაც ჭეშმარიტია. რადგან ფორმულა  $P \wedge S \wedge U$  ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია  $P, S$  და  $U$  გამონათქვამები ერთდროულად, ცხადია, რომ მაშინ ჭეშმარიტია  $U$  გამონათქვამიც. რაც, იმას ნიშნავს რომ, ფორმულა  $U$ , არის (1.19), (1.20) და (1.21) ფორმულების შედეგი.

**P.S.** ანალოგიურად ხდება სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ფორმალიზაცია და მათი ავტომატური ამოხსნა კომპიუტერის მეშვეობით, რისთვისაც შემუშავებულია გილმორის, დევისის, რობინსონის, ჩენის, კოვალსკის და ერბრანის ალგორითმები[4].

**9.5. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგადის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდი**

ჩვენს მიერ ადრე განხილულ გამონათქვამებს ქონდათ ფიქსირებული სახე: “სოკრატე ადამიანია”, “სოკრეტე მოკვდავია” დ.ა.შ. პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ გამონათქვამ-ფუნქციებს: “x რაციონალური რიცხვია”, “y კეთილი ადამიანია”. . .

**განსაზღვრება:** ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს პრედიკატებს უწოდებენ.

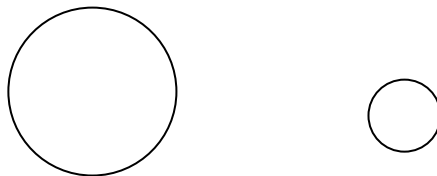
ხარკოველმა ინჟინერმა რვაჩოვმა შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც R – ფუნქციის მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად[9]. მოგვიანებით, R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგადის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე [10-11], რაც საშუალებას იძლევა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბდეს R - ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადდეს მრავლადბმული შემთხვევებისათვის.

ესლა გადავიდეთ, თვით RO – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის მეშვეობით ბულის ალგებრების კატეგორიაში (ბულის ალგებრების კატეგორია არის ბულის ალგებრების სიმრავლე, მათ შორის არსებულ გადასხვებთან (მორფიზმებთან) ერთად):

$$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_r \quad , \quad (9.24)$$

სადაც  $L_1$  - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,  
 $L_2$  - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,  
 $L_r$  - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები. ეს ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია (ნახ. 9.4)



ნახ. 9.4. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(9.24) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ  $L_1$  სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ **საყრდენ სიმრავლეებს**, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (9.25)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \geq 0\}, \quad (9.26)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (9.27)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \geq 0\}. \quad (9.28)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \quad (9.29)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით  $L_2$ -ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით  $L_2$ -ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (9.30)$$

სადაც  $P_1$  - არის გამონათქვამი  $x_1 \geq 0$ ,

$P_2$  - არის გამონათქვამი  $x_2 \geq 0$ ,

$P_3$  - არის გამონათქვამი  $x_3 \geq 0$ ,

$P_4$  - არის გამონათქვამი  $x_4 \geq 0$ ,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$

$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \quad (9.31)$$

$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2.$$

ესლა, გადავიდეთ  $L_r$ -ში რვაჩოვის ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (9.32)$$

მივიღებთ  $R$  - ფუნქციას :

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \quad (9.33)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (9.31) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია თ.ობგადის ჰომომორფიზმი[10] სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_{ro}, \quad (9.34)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (9.35)$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი”  $\Leftrightarrow$  “უდრის ნულს”;  
“მცდარი”  $\Leftrightarrow$  “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \quad (9.36)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (9.37)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 ; \quad (9.38)$$

$$\text{ე.ი. } P = P_1 \vee P_2 ; \quad (9.39)$$

სადაც

$$P_1 - \text{არის გამონათქვამი } (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad (9.40)$$

$$P_2 - \text{არის გამონათქვამი } (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0 ; \quad (9.41)$$

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2].$$

როგორც ვხედავთ, თ.ობგადის[10] ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად გამარტივდა R – ფუნქციის ანალიზური სახეც [12-17]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს ხშირად, რვაჩოვ-ობგადის RO – მეთოდს ეძახიან.

**P.S.**

სალაპარაკო ენა – ცოცხალი სისტემაა, მას ახასიათებს ევოლუცია, რაც გამოიხატება ახალი სიტყვებით შევსებასა და გრამატიკის დახვეწაში. ეს სისტემა ღია სისტემაა, რადგან მასზე

მოქმედებას ახდენენ სხვა ენები. მაგრამ ცოცხალი სისტემებისათვის დამახასიათებელია თვითმყობადობის დაცვის მექანიზმებიც (იმუნური სისტემა), რაც ირთვება მაშინ, როდესაც გარედან ცდილობენ მის დარღვევა – დაზიანებას(ასე მოხდა როცა გარედან ცდილობდნენ ქართული ენის სახელმწიფო სტატუსის შეცვლას). ეს იყო ერთერთი მთავარი მიზეზთაგანი, რამაც გამოიწვია ეროვნული მოძრაობის აღმავლობის დაჩქარება და ხელისუფლების ბიფურკაციულად – სტიქიურად, შეცვლაც.

## ამოცანები და საგარჯიშოები

### ვარიანტი 1

1. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით.
2. განსაზღვრეთ ბინარული ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup A^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee (\neg q)) \wedge q \equiv ?$
5. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით?
6. რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან სურექცია და ბიექცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 2

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების მეშვეობით.
2. ჩამოწერეთ შთანთქმის კანონები სიმრავლეებისათვის.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cap B) \cup (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \wedge 1) \vee (p \wedge (\neg p)) \equiv ?$
5. გაქვთ 3 ლიტრიანი და 5 ლიტრიანი ქილები. როგორ ჩავასხათ მათი მეშვეობით ღოქში 4 ლიტრი ღვინო ?
6. რა განსხვავებაა მიმართებასა და ფუნქციას შორის ? პასუხი დაასაბუთეთ.



### ვარიანტი 3

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
2. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup A^c) \cap (B \cap B^c) \cap (A \cup B \cup C)^c = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $((p \vee (\neg p)) \wedge (q \wedge (\neg q))) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv ?$
5. რომელიღაც თვეში 3 კვირა დღე დაემთხვა ლუწო რიცხვს. რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვში?
6. რა განსხვავებაა ოპერატორსა და ფუნქციონალ შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 4

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
2. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup B \cup C) \cap A^c \cap (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge (\neg r))) \equiv ?$
5. ტურნირში მონაწილეობდა 7 მოჭადრაკე. სულ რამდენი პარტია გადამაშდებოდა?
6. რა განსხვავებაა ფუნქციასა და ფუნქციონალს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 5

1. განსაზღვრეთ დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციები.
2. განსაზღვრეთ ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup \emptyset) \cap (A \cap A) \cap (A \cup A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee 0) \wedge (p \wedge p) \wedge ((p \vee (\neg p))) \equiv ?$

- 1983 წელს იყო 53 შაბათი დღე. კვირის რა დღე იყო 1 იანვარი ამ წელს?
- რა განსხვავებაა რელაციური სისტემების ჰომომორფიზმსა და იზომორფიზმს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 6

- ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილის მეშვეობით.
- განსაზღვრეთ მოცემული სიმრავლის დამატებით სიმრავლის ცნება.
- გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup B) \cup (A \cup A^c) \cup (B \cap B^c) = ?$
- ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(\neg q) \wedge ((q \vee (q \vee 0)) \wedge ((p \vee (\neg p))) \equiv ?$
- ოცი ქალაქიდან თითოეული შეერთებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია?
- რა კავშირია სურექციას, ინექციასა და ბიექციას შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 7

- განსაზღვრეთ იმპლიკაციისა და ევივალენციის მიმართებები.
- ჩამოაყალიბეთ მიმართების, ფუნქციის, ოპერატორისა და ფუნქციონალის ცნებები და აჩვენეთ ფუნქციისა და ფუნქციონალის განმასხვავებელი ნიშნები.
- გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cap E) \cup (B \cap \emptyset) \cup (A^c \cap B) = ?$
- ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee p) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (p \vee 1) \wedge (p \vee 0)) \equiv ?$
- 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?
- რა განსხვავებაა კონიუნქტიურ და დიზიუნქტიურ ლიტერებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 8

1. რელაციური სისტემების იზომორფიზმის ცნება. იზომორფულია თუ ჰომომორფული გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა?
2. განსაზღვრეთ ფუნქციონალის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup B^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $((p \wedge p \wedge ((q \vee (\neg q))) \vee ((q \wedge (\neg q))) \equiv ?$
5. მოიტანეს 5 ჩემოდანი და 5 გასაღები. არ ვიცით, რომელი გასაღები აღებს ამა თუ იმ ჩემოდანს. ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ცდაა საჭირო რომ, ყველა ჩემოდანს მოვარგოთ თავისი გასაღები?
6. რა განსხვავებაა ბულის ფორმულის დიზიუნქტიურ და კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

## ლიტერატურა

1. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970
2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Prinston, 1963
3. Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965
4. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука, Москва, 1986
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, [McGraw-Hill, Inc.](#), New York. 1995.
7. Heyting A. Intuitionism An introduction, Amsterdam, 1956
8. Kantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J.Reine Angew. Math., 73 1951
9. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982
10. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования, Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн.инст, учеб.пос., Тбилиси, 1989
11. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ, учеб.пос., Владимир, 1999

12. Пескова М.В. Применение метода регулярных источников ОГ для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами, Тезисы докладов Воронежского симпозиума “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках” Воронеж, 20-27 января 2000
13. Аракелян С.М., Папонов В.С., Дроган Ю.Е., Пигарина А.А., Прокошев В.Г., Обгадзе Т.А. Исследование гидродинамической устойчивости течения смеси топливо-газ в нагнетательных трубопроводах дизеля, Материалы международного Школа семинара “Нелинейные задачи гидродинамической теории устойчивости и турбулентность “ 12-20 февраля, Москва, 2000
14. Obgadze T.A., Barinov V.V., Fedotova O.I.. Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
15. Obgadze T.A., Prokoshev V.G., Parfionov S.D. Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material, Edited by M. Geiger, A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> LANE, Erlangen, August 28-31, 2001
16. Обгадзе Т.А., Прангишвили А.И., Цвераидзе З.Н., Матиашвили И.Г. Математическое моделирование лавинообразных потоков и расчет определяющих параметров на основе обратной вариационной постановки Купрадзе – Бреббия, Международный научный журнал. Проблемы прикладной механики, Тбилиси, № 4(21), 2005
17. Обгадзе Т.А., Прангишвили, А.И. Цвераидзе, З.Н., Матиашвили И.Г. Математическое моделирование грязевых селевых потоков, Международный научный журнал, Проблемы прикладной механики. Тбилиси, № 4(21), 2005

**X თავი. რიცხვითი სიმრავლეები და ალგებრული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები**

**შესავალი**

აღამიანი, ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში, დადგა სიმრავლეთა რაოდენობრივი შედარების აუცილებლობის წინაშე. ამგვარად, წარმოიშვა ნატურალური რიცხვის ცნება.

**განსაზღვრება:** თვლის პროცესში წარმოშობილ რიცხვებს, ნატურალური რიცხვები ეწოდებათ.

ნატურალური რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება  $N$  ასოთი.

$$N = \{1; 2; 3; \dots\}. \quad (10.1)$$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. იმისათვის, რომ შეადარონ უსასრულო სიმრავლეების ელემენტთა რაოდენობა, შემოაქვთ სიმრავლის სიმძლავრის ცნება.

**განსაზღვრება:** თუ, ორი უსასრულო სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია), მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ.

**განსაზღვრება:** ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს თვლადი უსასრულობა ეწოდება.

P.S, ცხადია, რომ ყველა სიმრავლე, რომლის ელემენტების გადანომრვაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით, აგრეთვე თვლადი იქნება.

ნატურალური რიცხვები არსებობს ორი სახის: მარტივი და შედგენილი რიცხვები.

**განსაზღვრება:** ერთისაგან განსხვავებულ რიცხვს მარტივი ეწოდება, თუ ის იყოფა მხოლოდ ერთზე და თავის თავზე. ხოლო, ერთზე მეტ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არაა მარტივი შედგენილი ეწოდება.

**მაგალითი:** მარტივი რიცხვებია

$$P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \dots\}.$$

შედგენილი რიცხვებია

$$N \setminus P \setminus \{1\} = \{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; \dots\}.$$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, დღემდე, ბევრი ამოუხსნელი ამოცანაა დაგროვილი; რომელთა ჩამოყალიბება ელემენტარულია, მაგრამ ამოხსნა ჯერ-ჯერობით ვერ ხერხდება. ეს პრობლემები, ძირითადად ეხება მარტივ რიცხვთა განაწილების

კანონს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობაში. ჩამოვაყალიბოთ ზოგიერთი ასეთი ამოცანა(პრობლემა):

1. ვიცით ლუწი რიცხვების ზოგადი ფორმულა:  $n = 2k$ ; ასევე, ვიცით კენტი რიცხვების ზოგადი ფორმულა:  $n = 2k + 1$ . ეს ფორმულები გვაძლევენ შესაბამისად, ყველა ლუწ და კენტ რიცხვებს, როცა  $k$  ცვლადი გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. საჭიროა, ვიპოვოთ ანალოგიური ფორმულა მარტივი რიცხვებისათვის.

2. ცნობილია ეილერის მრავალწევრი:  $f(x) = x^2 + x + 41$ , რომელიც იძლევა მარტივ რიცხვებს, თუ  $x = 0; 1; 2; \dots; 39$ . უცნობია, არსებობენ, თუ არა ისეთი ნატურალური  $m > 41$  რიცხვები, რომ  $f(x) = x^2 + x + m$  მრავალწევრი იძლეოდეს მარტივ რიცხვებს, როცა  $x = 0; 1; 2; \dots; m - 2$ .

3. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა  $n^2 + 1$  სახის მარტივი რიცხვების სიმრავლე.

4. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა ისეთი მარტივი რიცხვების სიმრავლე, რომელთა შორის სხვაობა 2-ის ტოლია(ჰოლდბახის პრობლემა).

5. უცნობია, შესაძლებელია, თუ არა ნებისმიერი ლუწი რიცხვის წარმოდგენა ორი მარტივი რიცხვის სხვაობის სახით.

ზემოთ მოყვანილი პრობლემები, ძირითადად, დაკავშირებული არიან მარტივი რიცხვების ზოგადი ფორმულის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან. ამ პრობლემის ამოხსნის გზაზე საგრძნობ წინსვლას იძლევა ობგაძის თეორემა.

**ობგაძის თეორემა(1972წ):** მარტივი რიცხვების სიმრავლის ზოგად ფორმულას, არ შეიძლება ქონდეს  $f(x) = ax^2 + bx + c$  კვადრატული ფუნქციის სახე.

**დამტკიცება:** განვიხილოთ  $f(x) = ax^2 + bx + c$  კვადრატული ფუნქციის სასრული სხვაობები:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b;$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = 2a(x+1) + a + b - 2ax - a - b = 2a;$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = 0.$$

ცხადია, რომ უფრო მაღალი რიგის  $k \geq 3$  სასრული სხვაობები კვადრატული ფუნქციიდან, აგრეთვე იქნებიან ნულის ტოლნი. (ადვილად შემოწმდება, რომ ანალოგიური თვისებები აქვთ საზოგადოდ  $n$  ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციებს(პოლინომებს),

რომელთათვისაც შესაბამისად ყველა  $k \geq n+1$  ხარისხის სასრული სხვაობები იქნებიან ნულის ტოლი).

ახლა, განვიხილოთ მარტივი რიცხვების მიმდევრობა და მათი შესაბამისი სასრული სხვაობები მესამე რიგამდე ჩათვლით. თუ, მესამე რიგიდან დაწყებული ყველა სასრული სხვაობა არ აღმოჩნდა ნულის ტოლი, მაშინ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიძლება მოიცემოდეს კვადრატული ფუნქციით და ჩვენი თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და შესაბამისი სასრული სხვაობები:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
1	2	2	4	2	4	2	4	6	
	1	0	2	-2	2	-2	2	2	
		-1	2	-4	4	-4	4	0	

როგორც ვხედავთ მესამე რიგის სასრული სხვაობა(მეოთხე სტრიქონი) არაა მხოლოდ ნულებისაგან შემდგარი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მარტივი რიცხვის ზოგად ფორმულას არ შეიძლება, რომ ჰქონდეს კვადრატული ფუნქციის სახე რ.დ.გ.

**P.S.** თეორემის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ეს თეორემა ადვილად ზოგადდება ნებისმიერი  $n$  სასრული ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციისათვის.

ზემოთმოყვანილი დანარჩენი პრობლემების ამოხსნა ავტორისათვის არაა ცნობილი და ამდენად, ახალგაზრდებს შეუძლიათ გამოსცადონ ძალები მათ ამოსახსნელად.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ყოველთვის შეიძლება ორი რიცხვის შეკრება. ასე, რომ ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ისევ ნატურალური რიცხვი იქნება. ამ ფაქტს მათემატიკაში ჩამოაყალიბებენ ასე: “ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების ოპერაციის მიმართ”. მაგრამ, ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობა, საზოგადოდ არაა ნატურალური რიცხვი.

**მაგალითი:**  $5-7 \notin N$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, შეუძლებელია  $x+7=5$  განტოლების ამოხსნა.

ამიტომ, საჭირო გახდა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოვება მთელ რიცხვთა სიმრავლემდე.

**განსაზღვრება:** ნატურალური რიცხვების, მათი მოპირდაპირე რიცხვების და ნულის გაერთიანებას **მთელ რიცხვთა** სიმრავლე ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება  $Z$  ასოთი. ფორმალურად, ეს განსაზღვრება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$Z = N \cup N_- \cup \{0\}. \quad (10.2)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$N \subset Z. \quad (10.3)$$

ამ სიმრავლეში განტოლება  $x+7=5$ , უკვე ამოხსნადია და

$$x=5-7 \Leftrightarrow x=-2; \quad (10.4)$$

მაგრამ, წრფივი განტოლება, საზოგადოდ, არაა ამოხსნადი.

**მაგალითი:**  $2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \notin Z.$  (10.5)

ამიტომ, საჭიროა რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოება **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლემდე.

**განსაზღვრება:**  $\frac{a}{b}$  სახის რიცხვების სიმრავლეს, სადაც  $a \in Z \wedge b \in N$  **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლე ეწოდება. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება  $Q$  ასოთი.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \wedge b \in N \right\}. \quad (10.6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$Q \subset Z \subset N. \quad (10.7)$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, უკვე, შეგვიძლია ამოვხსნათ წრფივი განტოლებები, თუმცა, არც ეს სიმრავლე აღმოჩნდა საკმარისი აღგებრული განტოლებების ამოსახსნელად. ასე შემოვიდა მათემატიკაში **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე** და **კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე**. ხოლო მოგვიანებით, **ჰიპერკომპლექსური** და **კლიფორდის რიცხვების** ცნებები. ამ რიცხვითი სიმრავლეების აგება მოითხოვს ფაქიზი მათემატიკური ცნებების ცოდნას და ჩვენი ამოცანებისათვის იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ ჩვენ ჩავუღრმავდებით თანდათანობით.

## 10.1. ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი

**ნუმეროლოგიის ელემენტები.** ნატურალური რიცხვის ცნებას ფართოდ იყენებს მეცნიერების ყველა დარგი. ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, როდესაც მეცნიერება და რელიგია ერთად შეისწავლებოდა, როგორც საერთო სიბრძნის ნაწილები,



მეცნიერები სწავლობდნენ ამა, თუ იმ მოვლენის რიცხვით მახასიათებლებს: ზომავდნენ სამეურნეო სავარგულების ფართს, მანძილებს, ჭურჭლის მოცულობას და ა.შ. ზოგიერთ შემთხვევაში, კი ისეთი მეცნიერებიც კი, როგორც იყო პითაგორა სწავლობდნენ რიცხვთა მაგიას. მათ სჯეროდათ, რომ ადამიანის მთელი ცხოვრება და ხასიათი განპირობებულია არა მარტო ვარსკვლავთა და პლანეტების განლაგებით (ასტროლოგია), არამედ იმ რიცხვითი მახასიათებლებით, რაც დაკავშირებულია მოცემული ადამიანის დაბადების თარიღთან (ნუმეროლოგია)[1-2]. ნუმეროლოგიით იყო გატაცებული ისააკ ნიუტონიც.

მაგალითისათვის, თუ, ადამიანი დაიბადა 1976 წლის 19 ნოემბერს, მაშინ მისი პერსონალური რიცხვი იქნება დაბადების რიცხვის ციფრების ჯამი  $1+9=10$  ანუ  $1+0=1$ . ხოლო დაბადების თარიღის პერსონალური რიცხვი რომ მივიღოთ, უნდა შევკრიბოთ მისი შესაბამისი თვის ნომრის ციფრებიც ნოემბერი=11 ე.ი.  $1+1=2$ , გარდა ამ რიცხვებისა უნდა შევკრიბოთ დაბადების წლის ციფრებიც ე.ი.  $1+9+7+6=23$  ამ რიცხვის ციფრების ჯამია  $2+3=5$ , საბოლოოდ, უნდა შევკრიბოთ დაბადების რიცხვის, თვის და წლის ციფრები ერთად 19.11.1976. მაშინ მივიღებთ  $(1+9)+(1+1)+(1+9+7+6)=10+2+23=35$  თუ, ამ რიცხვის ციფრებსაც შევკრიბავთ, მივიღებთ  $3+5=8$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ პიროვნებისათვის დამახასიათებელია რიცხვი 8-ის უპირატესი გავლენა. ეს ნიშნავს იმას, რომ განხილული პიროვნება უმეტესწილად, არის წარმატებული ყველა წამოწყებაში, ამასთან ერთად, მასზე მოქმედებს დაბადების რიცხვის(19) ციფრების ჯამი 1, რაც მიგვანიშნებს მისი პატრონის ლიდერულ თვისებებზე. საზოგადოდ, ადამიანი განიცდის როგორც თავისი რიცხვების, ასევე, ცხოვრების ადგილისა და მოცემული თარიღის გავლენასაც.

განიხილავენ პერსონალური წლის 9 მიმდევრობით საფეხურს, ათვლილს დაბადებიდან:

- I წელი – შესაძლებლობათა წელია;
- II წელი – წონასწორობის წელია;
- III წელი – შემოქმედებითი აქტივობის წელია;
- IV წელი – მშენებლობის წელია;
- V წელი – კომუნიკაბელობის წელია;
- VI წელი – დავალებათა შესრულების წელია;
- VII წელი – განხორციელებების წელია;
- VIII წელი – კარმის წელია;
- IX წელი – ციკლის დასრულების წელია.

**P.S. ყოველი 9 წლის შემდეგ, ციკლი იწყებს განმეორებას.**

**ასევე, განიხილავენ დაბადების თვეთა გავლენას:**

- იანვარი – გმირული;
- თებერვალი – წონასწორობა;
- მარტი – სიხარული;
- აპრილი – პასუხისმგებლობა;
- მაისი – ცხოვრების ენერჯია;
- ივნისი – შემსრულებლობა, მორჩილება და მზრუნველობა;
- ივლისი – სინთეზურობა;
- აგვისტო – ლიდერობა;
- სექტემბერი – რწმენა;
- ოქტომბერი – სიბრძნე;
- ნოემბერი - შთაგონებული;
- დეკემბერი – დასრულებულობა.

**ყოველ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ხასიათი:**

- რიცხვი 1** - შეესაბამება ეგოცენტრულ ლიდერს;
- რიცხვი 2** – მგრძობიარე, კომუნიკაბელური, უყვარს კუთხეების მომრგვალება;
- რიცხვი 3** – მხიარული, ცდილობს მიიღოს სიამოვნება ფიზიკური შრომიდან, უყვარს ხელებით მუშაობა;
- რიცხვი 4** – იწვევს დაუდევარ ხასიათს, რომელიც პერიოდულად, ცდილობს თავი დააღწიოს მონოტონურობას;
- რიცხვი 5** – იწვევს ნათელ გონებას და კომუნიკაბელობისაკენ მიდრეკილებას. ამ რიცხვის ხალხს ახასიათებთ მაგნეტიზმი და ჰიპნოზის უნარი, რომელიც იზიდავს მათკენ ხალხს.
- რიცხვი 6** – იძლევა თანაგრძობის მწვავე გრძობას. უყვარს წესრიგი, სამართლიანობისაკენ სწრაფვა. უყვარს კოლექტიური შრომა. არად დაგიდევს სხვის აზრს, თუ ისინი ეწინააღმდეგებიან მის საკუთარ ინტერესებს.
- რიცხვი 7** – იწვევს განვითარებულ ინტუიციას. უყვარს მარტოობა. არის პუნქტუალური და აკურატული. ხშირად მოსდის შემაშფოთებელი აზრები და ეძებს პრობლემებს იქაც, სადაც ისინი არ არიან.
- რიცხვი 8** – იძლევა მომთმენ, დინჯ ხასიათს და აღწევს წარმატებებს ყველა საქმეში. წარმატებული ადამიანია. თქვენი გარშემომყოფნი გრძობენ თქვენს განსაკუთრებულობას და რესპექტაბელობას, ცდილობენ მოგექცენ მოწიწებით.
- რიცხვი 9** – იწვევს ცოდნისაკენ და ფილოსოფიური აზროვნებისაკენ სწრაფვას. ადვილად პატიობთ სხვებს ცოდვებს. ვერ იტანთ ხეპრე ადამიანებს.

ასევე, მნიშვნელოვანია შესაბამისობა ასოებსა და რიცხვებს შორის(ინფორმაციის კოდირების ერთ-ერთი პირველი ისტორიული მაგალითი):

1	ა	ბ	ტ	ძ
2	გ	წ	უ	წ
3	ბ	მ	ფ	ჭ
4	ღ	ნ	ქ	ხ
5	ე	ო	ღ	ჯ
6	კ	პ	ყ	ჭ
7	ზ	შ	შ	
8	თ	რ	ჩ	
9	ი	ს	ც	

ამ შესაბამისობის გამოყენების მაგალითისათვის განვიხილოთ სახელები:

იესო ქრისტე=ი+ე+ს+თ+ქ+რ+ი+ს+ტ+ე=9+5+9+5+4+8+9+9+1+5=64,  
ციფრთა ჯამი=6+4=10; საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში;

ალაჰი=ა+ლ+ა+ჰ+ი=1+2+1+6+9=19, ციფრთა ჯამი=1+9=10;  
ანუ საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში.

იეღოვო=ი+ე+ღ+ო+ვ+ო=9+5+5+5+6+5=35, ციფრთა ჯამი=3+5=8;  
ეშმაკი=ე+შ+მ+ა+კ+ი=5+7+3+1+1+9=26, ციფრთა ჯამი=2+6=8;  
სატანა=ს+ა+ტ+ა+ნ+ა=9+1+1+1+4+1=17, ციფრთა ჯამი=1+7=8;  
რაც შეესაბამება ამქვეყნიურ წარმატებებს სიამოვნებათა სფეროში, იმქვეყნიური სამუდამო ტანჯვის სანაცვლოდ.

კრიშნა=კ+რ+ი+შ+ნ+ა=1+8+9+7+4+1=30, ანუ 3+0=3, რაც შეესაბამება ღმერთის მსახურს მორჩილებით.  
ნათელა=ნ+ა+თ+ე+ლ+ა=4+1+8+5+2+1=21, ციფრთა ჯამი=2+1=3;  
ილია=ი+ლ+ი+ა=9+2+9+1=21, ციფრთა ჯამი=2+1=3;  
ნათელა=ილია=3=სწრაფვა ღმერთისაკენ მორჩილებით.

ბიზანტია=ბ+ი+ზ+ა+ნ+ტ+ი+ა=2+9+7+1+4+1+9+1=34, ციფრთა ჯამი=3+4=7;  
რომი=8+5+3+9=25, ციფრთა ჯამი=2+5=7;  
ბაბილონი=ბ+ა+ბ+ი+ლ+ო+ნ+ი=2+1+2+9+2+5+4+9=34, ციფრთა ჯამი=3+4=7;  
ისრაელი=9+9+8+1+5+2+9=27+16=43; ციფრთა ჯამი=3+4=7;

ციფრი 7 შეესაბამება ღმერთთან მებრძოლ, დაუდგარ ქვეყნებს, რომლებიც ადრე თუ, მალე ქრებიან რუკიდან.

ღმერთი=ღ+მ+ე+რ+თ+ი=5+3+5+8+8+9=38, ციფრთა ჯამი=3+8=11; ანუ 1+1=2;

ოსანა=5+9+1+4+1=20 რაც იმას ნიშნავს, რომ 2 ღმერთის რიცხვია.

აფხაზეთი=ა+ფ+ხ+ა+ზ+ე+თ+ი=1+3+4+1+7+5+8+9=38, ციფრთა ჯამი=3+8=11; ანუ 1+1=2. რაც იმას ნიშნავს, რომ აფხაზეთი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.

ერაყი=5+8+1+6+9=29; ციფრთა ჯამი=2+9=11; ანუ 1+1=2. რაც იმას ნიშნავს, რომ ერაყი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.

რუსეთი=რ+უ+ს+ე+თ+ი=8+2+9+5+8+9=41; ანუ 4+1=5; ძლიერი ქვეყანაა, ახასიათებს კომუნიკაბელობა და მაგნეტიზმი, რომელიც იზიდავს სხვადასხვა ჯურის ხალხს თავისაკენ.

ებრაელი=ე+ბ+რ+ა+ე+ლ+ი=5+2+8+1+5+2+9=32; ანუ 3+2=5;

ებრაელებისათვის მეტად ხელსაყრელი ქვეყანაა რუსეთი.

**P.S.** ცხადია, რომ დაინტერესებულმა მკითხველმა, ზემოთ მოყვანილი პითაგორისეული რიცხვთა მაგიის უფრო დეტალურად გასაცნობად, უნდა მიმართოს დამატებით ლიტერატურას[1-2].

### 10.1.1. რიცხვთა თეორიის ელემენტები

ამ გამოყენებათა გამო, ძველად, ხელისუფალთა ფართო მხარდაჭერით სარგებლობდნენ ბრძენნი(მეცნიერებისა და ფილოსოფიის მსახურნი). სწორედ, ამან მისცა ანტიკურ ხანაში ბიძგი მეცნიერებისა და მათ შორის, რიცხვთა თეორიის განვითარებას. მოგვიანებით, ღირსხლეს, გაუსისა და ეილერის ფუნდამენტალურმა შრომებმა, ახალი იმპულსი მისცა რიცხვთა თეორიის განვითარებას. გაუსის მიერ შემუშავებულ იქნა შედარებათა თეორია[3-7] განუსაზღვრელი განტოლებების ამოსახსნელად  $N$  - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. მოგვიანებით, ამ თეორიამ დიდი გამოყენება პოვა კრიპტოგრაფიაში[8-9] (ინფორმაციის დაცვა და გაშიფრვა); ასევე, მონაცემთა ციფრული დამუშავების თეორიაში[10] (ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა). ამიტომ, ჩვენ უფრო დეტალურად შევისწავლით გაუსის შედარებათა თეორიას.

**განსაზღვრება:** ორ  $a$  და  $b$  რიცხვს ურთიერთმარტივი ეწოდებათ თუ, მათი უდიდესი საერთო გამყოფი  $(a;b)=1$ .

**მაგალითი:** 2 და 3 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, რადგან  $(2;3)=1$ .

3 და 5 ; 7 და 9 ; 9 და 11 და.შ.

**თეორემა :** თუ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ორი  $a$  და  $b>0$  მთელი რიცხვები, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი მთელი  $q$  და  $r$  რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r \leq b-1. \quad (10.8)$$

$r$  - რიცხვს უწოდებენ  $a$ -რიცხვის  $b$ -ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს.

**მაგალითი:**  $a=185$  ;  $b=12$ ; მაშინ  $185=12 \cdot 15+5$ , ანუ  $q=15$  და  $r=5$ .

ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად იყენებენ ევკლიდეს ალგორითმს, რომელიც ემყარება (10.8) წარმოდგენას. მართლაც, ვთქვათ  $a$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია და  $b$  ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი, მაშინ თეორემის თანახმად, ადგილი ექნება ტოლობებს :

$$a = bq_0 + r_0; \quad 0 < r_0 < b;$$

$$b = r_0q_1 + r_1; \quad 0 < r_1 < r_0;$$

$$r_0 = r_1q_2 + r_2; \quad 0 < r_2 < r_1;$$

. . . . .

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n; \quad 0 < r_n < r_{n-1};$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}.$$

(10.9)

რიცხვები  $r_0, r_1, r_2, \dots$  ადგენენ მკაცრად კლებად არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობას; მაგრამ ყოველი ასეთი მიმდევრობა სასრულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი  $a$  და  $b>0$  წყვილისათვის მიმდევრობითი გაყოფის პროცესი(ევკლიდეს ალგორითმი) სასრულია, ე.ი. სასრულია (10.9) ტოლობათა რიცხვი. პროცესი წყდება იმ საფეხურზე, რომელზედაც გაყოფა შესრულდება უნაშთოდ. ანუ როცა  $r_{n+1} = 0$ . ამგვარად,  $r_n$  არის უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი-უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, რომ

$$(a;b) = (b;r_0) = (r_0;r_1) = \dots = (r_{n-1};r_n) = r_n. \quad (10.10)$$

**მაგალითი:** ვიპოვოთ  $d=(664;480)$  ;  $a=664$  ;  $b=480$ .

მაშინ, ევკლიდეს ალგორითმის თანახმად გვექნება :

$$664=480 \cdot 1+184 ;$$

$$480=184 \cdot 2+112 ;$$

$$184=112 \cdot 1+72 ;$$

$$112=72 \cdot 1+40 ;$$

$$72=40 \cdot 1+32 ;$$

$$40=32 \cdot 1+8 ;$$

$$32=8 \cdot 4.$$

ე.ი  $d=(664 ; 480)=8$ .

**არითმეტიკის ძირითადი თეორემა:** ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით(თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად.

ანუ, თუ  $n$  ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$n = p_1 p_2 \dots p_n \quad (10.11)$$

ამ ნამრავლში ზოგიერთი თანამამრავლი შეიძლება რამდენიმეჯერ მეორდებოდეს, ამიტომ თუ, გამოვიყენებთ განმეორებათა რიცხვის ხარისხებს, მივიღებთ (10.11) გაშლის კანონიკურ წარმოდგენას

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} . \quad (10.12)$$

ამ (10.12) ჩანაწერიდან ნათლად ჩანს, რომ  $n$  რიცხვის განსხვავებულ გამყოფთა რაოდენობა იქნება:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) . \quad (10.13)$$

P.S. ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის მათ ნამრავლს გაყოფილს მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განისაზღვრება რიგი არითმეტიკული ფუნქციებისა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ეილერის  $\varphi(n)$  ფუნქციას, რომელიც უდრის 1-დან  $n$ -მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც ურთიერთმარ-ტივი არიან  $n$ -ის მიმართ.

**მაგალითი:**  $\varphi(1) = 1; \varphi(2) = 1; \varphi(3) = 2; \varphi(4) = 2; \varphi(5) = 4; \varphi(6) = 2$ .

ვთქვათ,  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$  მოცემული რიცხვის კანონიკური დაშლაა, მაშინ

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) . \quad (10.14)$$

თუ,  $p$  მარტივი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} . \quad (10.15)$$

კერძო შემთხვევაში,

$$\varphi(p) = p - 1. \quad (10.16)$$

**მაგალითი:**  $\varphi(60) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16;$

$$\varphi(81) = 81 - 27 = 54;$$

$$\varphi(5) = 5 - 1 = 4.$$

### 10.1.2. შედარებათა თეორიის ელემენტები

განიხილოთ მთელი რიცხვები მოცემულ  $m$  ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას, მიღებული ნაშთების თვალსაზრისით. ამ  $m$  რიცხვს მოდულს უწოდებენ. ყოველ ნატურალურ რიცხვს,  $m$  რიცხვზე გაყოფისას შეესაბამება ნაშთის გარკვეული მნიშვნელობა

$(0; 1; 2; 3; \dots; m-1)$ -ნაშთთა სრული სისტემიდან. სხვანაირად, რომ ვთქვათ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა  $m-1$  კლასად. თითოეულ კლასში მოთავსებული არიან ურთიერთსადარი რიცხვები  $m$  მოდულ-ლით. თუ, განიხილება შედარებათა თეორია უფრო ფართო რიცხვით სიმრავლეში, კერძოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ განიხილავენ აბსოლუტურად უმცირეს ნაშთთა სრულ სისტემას:

$$-\frac{m-2}{2}; -\frac{m-4}{2}; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; \frac{m}{2}; \text{ როცა } m \text{ ლუწია};$$

$$-\frac{m-1}{2}; -\frac{m-3}{2}; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; \frac{m-1}{2}; \text{ როცა } m \text{ კენტია}.$$

**განსაზღვრება:** ორ მთელ  $a$  და  $b > 0$  რიცხვს ეწოდებათ ურთიერთსა-დარი მოდულით  $m$ , თუ  $m$  - ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან.

შედარების დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$a \equiv b \pmod{m}. \tag{10.17}$$

(10.17) იკითხება ასე:  $a$  სადარია  $b$  -სი მოდულით  $m$ .

ცხადია, რომ თუ  $a$  სადარია  $b$  -სი, ანუ  $m$  - ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან, მაშინ მათი სხვაობა  $(a-b)$  უნაშთოდ იყოფა  $m$  - ზე.

**მაგალითი:**  $25 \equiv 15 \pmod{10}$ , რადგან  $25$  და  $15$   $10$ -ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან  $5$ -ს. ასევე, ცხადია რომ  $25-15=10$  და იყოფა  $10$ -ზე(შედარების მოდულზე).

**შედარებათა თვისებები :**

1. ერთნაირმოდულიანი შედარებები შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ, ანუ,

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}; a_2 \equiv b_2 \pmod{m}; \dots; a_n \equiv b_n) \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i \pmod{m} \right). \tag{10.18}$$

2. შედარებანი ერთნაირი მოდულით, შეიძლება წევრ-წევრად გადავამრავლოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}; a_2 \equiv b_2 \pmod{m}; \dots; a_n \equiv b_n) \Rightarrow \left( \prod_{i=1}^n a_i \equiv \prod_{i=1}^n b_i \pmod{m} \right). \tag{10.19}$$

3. შედარების ორივე მხარე და მოდული შეიძლება ერთდროულად გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}) \Rightarrow (a_1 n \equiv b_1 n \pmod{mn}). \quad (10.20)$$

4. თუ, შედარებას ადგილი აქვს რამდენიმე მოდულით, მაშინ ამ შედარებას ადგილი ექნება ახალი მოდულითაც, რომელიც მოცემული მოდულების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია, ანუ

$$(a \equiv b \pmod{m_1} \wedge a \equiv b \pmod{m_2}) \Rightarrow (a \equiv b \pmod{[m_1; m_2]}). \quad (10.21)$$

5. შედარების ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს, მათ ისეთ საერთო გამყოფზე, რომელიც მოდულთან ურთიერთმარტივია, ანუ

$$(an \equiv bn \pmod{m} \wedge (m; n) = 1) \Rightarrow (a \equiv b \pmod{m}). \quad (10.22)$$

**ეილერის თეორემა:** თუ  $m$  ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და  $(a; m) = 1$ , მაშინ

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

(10.23)

კერძო შემთხვევაში, როცა  $m = p$  მარტივი რიცხვია და  $(a; p) = 1$ ,  $\varphi(p) = p - 1$ , მიიღება ფერმას მცირე თეორემა :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (10.24)$$

**განვიხილოთ ერთუცნობიანი შედარებების ამოხსნის მაგალითები:**

1)  $x^3 + x^2 - 3x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$

ეს შედარება მესამე ხარისხისაა. 5-ის მოდულით ნაშთთა სრული სისტემიდან: (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4) ამ შედარებას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 1. ე.ი. მას აქვს ერთი ფესვი. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება

$$x \equiv 1 \pmod{5}.$$

2)  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{4}$

შედარება კვადრატულია. ნაშთთა სრული სისტემიდან 4-ის მოდულით: (0 ; 1 ; 2 ; 3), მას არცერთი რიცხვი არ აკმაყოფილებს. ე.ი. მას ამონახსნი არა აქვს.

3)  $12x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{6}$

ეს შედარებაც კვადრატულია, რადგან უფროსი კოეფიციენტი კუბთან მოდულზე იყოფა უნაშთოდ, ანუ  $12 \equiv 0 \pmod{6}$ . ასე, რომ იგი შემდეგი შედარების ექვივალენტურია :

$$3x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{6}.$$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 6-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5) მას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 3, ე.ი. მისი ერთადერთი ფესვი იქნება

$$x \equiv 3 \pmod{6}.$$



$$4) x^5 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 7-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5;6) ამ შედარებას აკმაყოფილებს ორი რიცხვი 2 და 4; ამიტომ გვექნება ორი ამონახსნი:

$$x \equiv 2 \pmod{7}; \quad x \equiv 4 \pmod{7}.$$

**განსაზღვრება:** ორ მრავალწევრს ეწოდება ურთიერთმისადა-რი მოდულით  $m$ , თუ მათი სათანადო კოეფიციენტები ურთიერთსადა-რია  $m$ -ის მოდულით. ანუ,

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{m}. \quad (10.25)$$

**P.S.**

1. შედარებათა თეორიითა და მათი ინფორმატიკაში გამოყენებებით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიმართოს სათანადო ლიტერატურას[3-10].
2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებთან მიმართებაში ქმნის ალგებრულ სისტემას, რომელსაც მათემატიკაში კომუტაციურ, უნიტარულ რგოლს უწოდებენ[11-12].

**10.2. რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიური აგება**

რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში, მთელ რიცხვთა სიმრავლისაგან განსხვავებით, არსებობს მოცემული რიცხვის შებრუნებული რიცხვი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამიტომ, მათემატიკოსები ალგებრულ სისტემას, რომელსაც ქმნის **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლე, მასში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ **ველს** [11-12] უწოდებენ. ალგებრის(ალგებრულ ოპერაციებთან მიმართებაში) თვალსაზრისით არ არის სხვაობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის. ასე, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც ალგებრული სისტემის თვალსაზრისით ქმნის **ველს**. თუმცა, ამ ორ სიმრავლეს შორის აშკარა სხვაობაა **ტოპოლოგიის**[11-12] თვალსაზრისით.

ტოპოლოგიის ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ ზღვარისა და უწყვეტი ფუნქციის ცნებები, რაც ესოდენ მნიშვნელოვანია ცოცხალი სისტემების მათემატიკური მოდელირებისათვის.

**განსაზღვრება:** მოცემულ  $Q$  სიმრავლეს, მისი ყოველი  $x$  ელემენტის შემცველ ღია  $B(x)$  სიმრავლეებთან (ტოპოლოგიის ბაზა) ერთად ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიის ბაზას წარმოადგენს მისი ყველა ღია ინტერვალების  $B(x)$  სიმრავლე. ამასთან ერთად, რადგან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, მისი ტოპოლოგიის ბაზაც თვლადია.

განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობის ცნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

**განსაზღვრება:** ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გადასახვას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რაციონალურ რიცხვთა  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  მიმდევრობა ეწოდება.

**განსაზღვრება:** რაციონალურ რიცხვთა  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  მიმდევრობას ეწოდება კოშის (ფუნდამენტალური მიმდევრობა), თუ

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} |q_m - q_n| = 0. \quad (10.26)$$

**თეორემა:** თუ, რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა კრებადია რაციონალური რიცხვისაკენ, მაშინ ის კოშის მიმდევრობას წარმოადგენს.

მაგრამ, თუ  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  კოშის მიმდევრობაა, მისი ზღვარი, საზოგადოდ, შეიძლება არც არსებობდეს (თუ ზღვართი წერტილი არაა რაციონალური რიცხვი).

**განსაზღვრება:**  $x_0 \in Q$  წერტილს ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ზღვართი წერტილი, თუ ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე (ინტერვალი), შეიცავს რაციონალურ რიცხვს.

**თეორემა:**  $x_0 \in Q$  წერტილი წარმოადგენს ზღვართ წერტილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს  $Q$  რაციონალურ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ , რომელიც კრებადია  $x_0$  რიცხვისაკენ  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x_0$ .

თუ, შევადგენთ რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობას ისეთნაირად, რომ ყოველი შემდეგი წევრი წარმოადგენდეს  $\sqrt{2}$ -ის უკეთეს მიახლოებას, მაშინ მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა კოშის მიმდევრობას, რომელიც კრებადია არარაციონალური  $\sqrt{2}$  რიცხვისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიცავს თავისი ზღვართი წერტილების მთლიან

სიმრავლეს. თუმცა, ის შეიცავს რაციონალურ რიცხვებს და თითოეული რაციონალური რიცხვი ზღვართი წერტილია.

**განსაზღვრება:**  $Q$  რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანებას მისი ზღვართი წერტილების  $\mathcal{D}$  სიმრავლესთან  $Q$  რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის  $\bar{Q}$  ჩაკეტვა ეწოდება.

$$\bar{Q} = Q \cup \mathcal{D}. \quad (10.27)$$

**განსაზღვრება:** რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის  $\bar{Q}$  ჩაკეტვას ნამდვილ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე ეწოდება.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოადგენს ზღვართი წერტილს და მაშასადამე, შეგვიძლია ავაგოთ მისკენ კრებადი მიმდევრობა.

**განსაზღვრება:** სიმრავლეს **სრული** ეწოდება, თუ ნებისმიერი კოშის მიმდევრობა კრებადია ამ სიმრავლეში.

**მაგალითი:** რაციონალურ რიცხვთა  $Q$  სიმრავლე არაა სრული, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე სრულია(რადგან ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს).

**განსაზღვრება:**  $A$  სიმრავლეს ეწოდება **მკვრივი**  $B$  სიმრავლეში, თუ  $B$  სიმრავლის ნებისმიერი  $x_0$  ელემენტისათვის, მოიძებნება  $A$  სიმრავლის ელემენტების ისეთი მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება ამ  $x_0$  ელემენტისაკენ.

**მაგალითი:** რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა მკვრივი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში(დაასაბუთეთ რატომ?).

**განსაზღვრება(ინტუიციური):** სიმრავლეს **მეტრიკულ სივრცეს** უწოდებენ, თუ, მასში განსაზღვრულია ორ ელემენტს შორის მანძილის ცნება.

**მაგალითი:** მანძილი ორ რაციონალურ რიცხვს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(q_1; q_2) = |q_2 - q_1|. \quad (10.28)$$

ფორმულა (10.28)-ის გათვალისწინებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა. თუ, გავიხსენებთ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის მანძილის ცნებას, რომელიც (10.28) ფორმულის ანალოგიურია, მივიღებთ რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც მეტრიკული სივრცეა.

**განსაზღვრება:** მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ არსებობს არაუმეტეს ვიდრე თვლადი, მასში მკვრივი ქვესიმრავლე.

**მაგალითი:** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სეპარაბელურია, რადგან მასში, არსებობს მასში ყველგან მკვრივი თვლადი, რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

**P.S.**

სეპარაბელობის თვისება საშუალებას იძლევა მეტრიკული სივრცის ელემენტებს მივუახლოვდეთ თვლადი სიმრავლის ელემენტების მიმდევრობით. ეს თვისება ფართოდ გამოიყენება ვარიაციულ(პირდაპირ) რიცხვით მეთოდებში.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, უკვე, საკმარისია საინჟინრო პრაქტიკაში გამოყენებელი ალგებრული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად.

### 10.2.1. არაწრფივი განტოლების ამოსხნა ნიუტონის ალგორითმით

#### შესავალი

განტოლებების ამოსახსნელად, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს, რომლებსაც ზოგჯერ **პიკარის თანდათანობითი მიახლოების მეთოდებსაც უწოდებენ**. ამ ტიპის მეთოდების არსის შესაცნობად, განვიხილოთ არაწრფივი განტოლება

$$f(x) = 0. \tag{10.29}$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად, მას გადაწერენ შესაბამისი იტერაციული ფორმულის სახით

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{10.30}$$

აირჩევენ ფესვის საწყის მიახლოებას

$$x = x_0, \tag{10.31}$$

ამის შემდეგ, (10.30) ფორმულების მეშვეობით პოულობენ შემდგომ მიახლოებებს

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \dots \tag{10.32}$$

როგორ ვხედავთ, აღწერილი იტერაციული პროცედურა ყოველ  $x_{n+1}$  ეტაპზე, იყენებს წინა  $x_n$  ერთი ბიჯის მნიშვნელობას. ასეთ, (10.30) ტიპის იტერაციულ ფორმულებს, **ერთბიჯიან იტერაციულ ფორმულებს უწოდებენ**. არსებობენ ორბიჯიანი, სამბიჯიანი და ა.შ. იტერაციული ფორმულებიც

$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1})$  – ორბიჯიანი ფორმულაა;

$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$  – სამბიჯიანი ფორმულაა და ა.შ.

(10.30) იტერაციული ფორმულის აგების შემდეგ, ისმის კითხვები:

ა) რამდენი  $n$  მიახლოება უნდა ავიღოთ, ანუ, იტერაციული პროცესი როდის უნდა გავაჩეროთ, რომ მიღებული მიახლოება იყოს წინასწარ მოთხოვნილ ფარგლებში ?

ბ) კრებადია, თუ, არა (10.30) იტერაციული პროცესი (10.29) განტოლების ფესვისაკენ ?

ამ კითხვებს პასუხობენ შემდეგნაირად:

ა) წინასწარ ირჩევენ გამოთვლის დასაშვებ  $\varepsilon$  ცდომილებას და იტერაციულ პროცესს აჩერებენ როგორც კი გამოთვლის აბსოლუტური ცდომილება დააკმაყოფილებს პირობას

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon;$$

ბ) იტერაციული (10.30) პროცესის კრებადობისათვის, მისი აგებისას, უნდა გავითვალისწინოთ ბანახის თეორემა კუმშვადი ასახვების შესახებ, ანუ, კრებადობის საკმარისი პირობა.

**განსაზღვრება:** ვთქვათ  $M$  მეტრიკული სივრცეა  $\rho$  მეტრიკით,  $A: M \rightarrow M$  ოპერატორს ეწოდება **მკუმშავი**, თუ, არსებობს ისეთი  $\alpha \in [0; 1]$ , რომ  $M$  სივრცის ნებისმიერი ორი  $x$  და  $y$  ელემენტებისათვის, ადგილი აქვს უტოლობას  $\rho(Ax; Ay) \leq \alpha\rho(x; y)$ .

**ბანახის თეორემა.** თუ,  $A$  არის მკუმშავი ოპერატორი სრულ  $M$  მეტრიკულ სივრცეში, მაშინ  $x = Ax$  განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი  $\xi$  ამონახსნი, რომელიც შეიძლება მივიღოთ როგორც ამ სივრცის  $u_n$  ელემენტების მიმდევრობის ზღვარი  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \xi$ , სადაც  $u_{n+1} = Au_n$  ხოლო საწყისი  $u_0 \in M$  მიახლოება შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერად.

აქვე, შეგვიძლია შევადგინოთ ერთბიჯიანი კუმშვადი იტერაციული ფორმულების აგების წესიც. ამისათვის განვიხილოთ (10.30) ფორმულა და გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა სასრული ნაზრდების შესახებ, მაშინ მივიღებთ

$$x_{n+1} - x_{m+1} = \varphi(x_n) - \varphi(x_m) = \varphi'(\tau_k)(x_n - x_m), \quad (10.33)$$

აქედან ცხადია, რომ კუმშვადობის პირობა

$$|x_{n+1} - x_{m+1}| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = |\varphi'(\tau_k)(x_n - x_m)| \leq \alpha|x_n - x_m|,$$

შესრულდება თუ,  $\max|\varphi'(\tau_k)| < 1$ .

ესლა, განვიხილოთ ნიუტონის იტერაციული ფორმულა.

ნიუტონის იტერაციული ფორმულისათვის უნდა ავირჩიოთ საწყისი მიახლოება, ამისათვის იყენებენ ვეიერშტრასის თეორემას:

თუ,  $[a; b]$  შუალედის ბოლოებზე  $f(x)$  უწყვეტ ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობები, ანუ,  $f(a)f(b) < 0$ , მაშინ ამ შუალედში არსებობს ისეთი  $\xi$  წერტილი რომ  $f(\xi) = 0$ .

მაშასადამე, საწყისი  $x_0$  მიახლოება უნდა ავირჩიოთ ისეთ  $[a; b]$  შუალედში, რომლის ბოლოებზეც სრულდება  $f(a)f(b) < 0$  პირობა. ცხადია, რომ რაც უფრო მოკლე იქნება  $[a; b]$  შუალედი, მით უფრო ცოტა იტერაციები დაგვჭირდება ფესვის საპოვნელად. მიახლოების შესაფასებლად ვირჩევთ ანგარიშის დასაშვებ  $\varepsilon$  ცდომილებას.

(10.29) განტოლების ამოსახსნელად  $f(x)$  ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად საწყისი  $x_0$  მიახლოების მიდამოში

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots = 0, \quad (10.34)$$

თუ, ტეილორის (10.34) ფორმულაში უგულებელვყოფთ კვადრატულ და უფრო მაღალი რიგის წევრებს, მივიღებთ ფესვის შემდგომი მიახლოების საპოვნელ ფორმულას

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0, \quad (10.35)$$

აქედან ცხადია, რომ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (10.36)$$

ფესვის შემდგომი მიახლოებების საპოვნელად, ანალოგიური პროცედურის გავლით მივიღებთ

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad (10.37)$$

და საზოგადოდ, გვექნება ნიუტონის იტერაციული ფორმულა

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (10.38)$$

იტერაციული პროცესი გრძელდება, ვიდრე არ შესრულდება პირობა  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

### P.S.

ნიუტონის იტერაციული ფორმულა პრაქტიკულად კარგად მუშაობს, მხოლოდ მაშინ, როცა საწყისი მიახლოება ახლოსაა ზუსტ ამონახსნთან. ამიტომ, უმეტესწილად, იყენებენ იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდს ან მონტე-კარლოს, ფესვის შემთხვევითი ძებნის მეთოდს.

## 10.2.2. არაწრფივი განტოლების ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით

მიუხედავად იმისა, რომ არსებობს არაწრფივი ალგებრული განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის, კლასიკური მეთოდების დიდი სიმრავლე, პრაქტიკაში, უფრო ხშირად იყენებენ იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდს. ის თავის თავში მოიცავს კლასიკური მეთოდების დადებით თვისებებს და საშუალებას იძლევა, ინდივიდუალურად მივუდგეთ ყოველ არაწრფივ განტოლებას და ავაგოთ შესაბამისი კრებადი იტერაციული ფორმულა.

განვიხილოთ, იაკობის იტერაციული ფორმულის აგების ალგორითმი.

ვთქვათ, ამოსახსნელი გვაქვს არაწრფივი ალგებრული განტოლება

$$f(x) = 0. \tag{10.39}$$

ა) განტოლების ორივე მხარეს ვამრავლებთ რაღაც  $\lambda$  რიცხვზე, რომლის მნიშვნელობასაც მოგვიანებით ავარჩევთ იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობიდან, მივიღებთ

$$\lambda f(x) = 0. \tag{10.40}$$

ბ) მიღებული (10.40) განტოლების ორივე მხარეს ვუმატებთ  $x$ -ს და მარცხენა მხარეს ავღნიშნავთ  $\varphi(x)$ -ით, მაშინ გვექნება

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x. \tag{10.41}$$

გ) ვაგებთ შესაბამის (10.30) იტერაციულ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n). \tag{10.42}$$

დაგვრჩა მხოლოდ  $\lambda$  მამრავლის მნიშვნელობის პოვნა (10.42) იტერაციული პროცესის კრებადობის  $\max|\varphi'(\tau_k)| < 1$  პირობიდან.

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x), \text{ ანუ, კრებადობის პირობა მიიღებს სახეს } \max_{x \in [a; b]} |1 + \lambda f'(x)| < 1. \tag{10.43}$$

პრაქტიკაში იყენებენ უფრო მარტივ პირობას

$$|1 + \lambda f'(x_0)| < 1. \tag{10.44}$$

ამ პირობიდან პოულობენ  $\lambda$  მამრავლის  $\lambda_0$  მნიშვნელობას, რაც საბოლოოდ, გვაძლევს იაკობის კრებად იტერაციულ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_0 f(x_n). \tag{10.45}$$

იტერაციული პროცესის გაჩერების პირობაა

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (10.46)$$

ამ შემთხვევაში, აბსოლუტური ცდომილებაა

$$\Delta(\xi) = \varepsilon, \quad (10.47)$$

ხოლო, ფარდობითი ცდომილებაა

$$\delta(\xi) = \frac{\Delta(\xi)}{|x_n|}. \quad (10.48)$$

**განვიხილოთ მაგალითი.**

ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ განტოლება

$$2x - \lg x = 7, \quad (10.49)$$

$\varepsilon = 10^{-4}$  სიზუსტით.

**ამოხსნა:**

გადავწეროთ (10.49) განტოლება ზოგადი (10.39) ფორმით

$$f(x) = 7 + \lg x - 2x = 0. \quad (10.50)$$

ეხლა, გამოვიყენოთ მისთვის ზემოთმოყვანილი პროცედურა და ავაგოთ იაკობის, შესაბამისი იტერაციული ფორმულა

$$ა) \quad \lambda f(x) = \lambda(7 + \lg x - 2x) = 0; \quad (10.51)$$

$$ბ) \quad \varphi(x) = x + \lambda f(x) = x, \text{ ანუ,} \\ x = x + \lambda(7 + \lg x - 2x) = \varphi(x). \quad (10.52)$$

$$გ) \quad x_{n+1} = x_n + \lambda(7 + \lg x_n - 2x_n), \quad (10.53)$$

დარჩა ამოცანა:  $\lambda$  მამრავლისათვის ვიპოვოთ ისეთი  $\lambda_0$  მნიშვნელობა, რომლისთვისაც დაკმაყოფილდება იტერაციული ფორმულის კრებადობის პირობა  $|1 + \lambda f'(x_0)| < 1$ , რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე

$$\left| 1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{x_0 \ln 10} \right| < 1. \quad (10.54)$$

საწყისი მიახლოების საპოვნელად ვიყენებთ ვეიერშტრასის თეორემას.

$$f(1) = 7 + \lg 1 - 2 \cdot 1 = 5 > 0$$

$$f(10) = 7 + \lg 10 - 2 \cdot 10 = -12 < 0$$

ე.ი.  $x_0 \in [1; 10]$ . საწყის მიახლოებად ავირჩიოთ  $x_0 = 4$ . მაშინ კრებადობის (2.54) პირობა მიიღებს სახეს

$$|\varphi'(4)| = \left| 1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{4 \ln 10} \right| < 1. \quad (10.55)$$

ამ პირობას აკმაყოფილებს, მაგალითად  $\lambda = 0.5$ , ეს მნიშვნელობა ცხადია, რომ არაა ერთადერთი. მივიღეთ იაკობის იტერაციული ფორმულა მოცემული (10.49) განტოლებისათვის.

$$x_{n+1} = x_n + 0.5(7 + \lg x_n - 2x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = 0.5(7 + \lg x_n). \quad (10.56)$$

$$x_0 = 4. \quad (10.57)$$



ამ იტერაციული ფორმულებით გათვლა გვაძლევს, რომ

$$x_1 = 0.5(7 + \lg 4) \approx 3.801$$

$$x_2 = 0.5(7 + \lg 3.801) \approx 3.7899$$

$$x_3 = 0.5(7 + \lg 3.7899) \approx 3.7893$$

$$x_4 = 0.5(7 + \lg 3.7893) \approx 3.7893$$

$|x_4 - x_3| < 0.0001$ , რაც იმას ნიშნავს რომ მოცემული განტოლება ამოხსნილია მოთხოვნილი  $10^{-4}$  სიზუსტით და მისი ფესვია 3.7893

ფარდობითი ცდომილება იქნება

$$\delta(\xi) = \frac{\Delta(\xi)}{|x_n|} = \frac{0.0001}{3.7893} \approx 0.00003 \quad (10.58)$$

რაც სავსებით მისაღებია მოცემული ამოცანისათვის.

### 10.2.3. ორ და სამ ცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა მატრიცული ხერხით Mathcad – ის ბაზაზე

ორ და სამცვლადიან, წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად, გამოიყენება არსებული პროგრამული პაკეტები რომლებიც ეყრდნობიან გაუსის მეთოდს, ესენია: Mathcad, Matlab, Mathematica და ა.შ. ჩვენ სიმარტივისათვის, გამოვიყენებთ Mathcad პაკეტს.

ვთქვათ, ამოსახსნელია მესამე რიგის, წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

გადავწეროთ მას მატრიცული ფორმით:

$$A \cdot X = B, \quad (*)$$

სადაც,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

მაშინ, მატრიცული (\*) განტოლების ამონახსნს ექნება სახე  $X = A^{-1} \cdot B$ .

განვიხილოთ მაგალითი

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 20, \\7x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 24, \\8x_1 + 9x_2 + 5x_3 &= 41.\end{aligned}$$

შავადგინოთ შესაბამისი Mathcad პროგრამა

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 41 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში, Mathcad პროგრამა საკმაოდ მარტივია და ემთხვევა ამოცანის მატრიცულ ამოხსნას. ცხადია, რომ მაღალი რიგის ( $n \geq 10^4$ ) სისტემების ასეთნაირად ამოხსნა, საკმაოდ მოუხერხებელია, მითუმეტეს, როდესაც სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი ახლოსაა ნულთან (სისტემა ცუდადაა განპირობებული).

#### 10.2.4. მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით

მაღალი რიგის ( $n \geq 3$ ) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ნადავლად, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს.

იმისათვის, რომ შევისწავლოთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ალგორითმების კრებადობა, ცდომილება და გამოთვლების მდგრადობა, იყენებენ ვექტორისა და მატრიცის ნორმის ცნებას, რომლებიც ვექტორის სიგრძის ცნების განზოგადებას წარმოადგენენ.

წრფივი  $R^n$  ვექტორული სივრცის  $f \in R^n$  ელემენტის ნორმა ეწოდება  $\|f\|$  რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

- 1)  $\|f\| \geq 0$ ;  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ;
- 2)  $\|\alpha f\| = \alpha \|f\|$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = const$ ;
- 3)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ვექტორისათვის, როგორც წესი, განიხილავენ ორი ტიპის ნორმას

$$\|a\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \tag{10.59}$$

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (10.60)$$

კვადრატული  $A = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$  მატრიცის ნორმა განისაზღვრება  $x$  და  $Ax$  ვექტორების ნორმების საშუალებით:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \quad (10.61)$$

დამტკიცებულია, რომ

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (10.62)$$

$$\|A\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad (10.63)$$

ამასთან, თუ, მატრიცა სიმეტრიულია, ანუ,  $A = A^T$ , მაშინ

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|, \text{ და } \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}, \quad (10.64)$$

სადაც,  $\lambda_i(A)$  მოცემული  $A$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია, ანუ,  $\det(A - \lambda E) = 0$  მახასიათებელი განტოლების ფესვებია.

**განვიხილოთ ნორმის გამოთვლის მაგალითები Mathcad –ის ბაზაზე.**

ა)  $x$  ვექტორის პირველი და მეორე ნორმა:

$$x := \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \max(x) = 10 \quad \sqrt{\sum_{i=0}^3 (x_i)^2} = 11.619$$

ბ) ეხლა განვიხილოთ, მოცემული არასიმეტრიული  $A$  მატრიცის პირველი ნორმა და მეორე ნორმის შეფასება ზემოდან:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad j := 0..2 \quad v_j := \sum_{i=0}^2 \left| \left[ (A^T)^{<j>} \right]_i \right| \quad v = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \max(v) = 11$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 (A_{i,j})^2} = 9.381$$

მატრიცის ნორმების გამოთვლა უფრო მარტივია, თუ გამოვიყენებთ Mathcad –ის სტანდარტულ პროგრამებს

$$\text{norm1}(A) = 11 \quad \text{norm2}(A) = 8.847$$

**განვიხილოთ ნორმის თვისებები:**

ა)  $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$ ;  $\|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|$ ;

ბ)  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ .

რიცხვითი ალგორითმების რეალიზაციისას გარდაუვალია ცდომილებები, რომელთა შეფასებაც ხდება ცდომილების  $\rho$  ვექტორის ნორმის საშუალებით. ცდომილებები გამოწვეულია საწყისი მონაცემების ცდომილების ვექტორით, რომლის ნორმას ავლნიშნავთ  $\rho_1$ , თვით მეთოდის ცდომილებებით, რომლის ვექტორის ნორმას ავლნიშნავთ  $\rho_2$  და კომპიუტერში რიცხვების დამრგვალების ცდომილების ვექტორით ნორმით  $\rho_3$ . ჯამური  $\rho$  ცდომილება ფასდება უტოლობით

$$\rho \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \quad (10.65)$$

როგორც წესი, თვლიან რომ მეთოდის ცდომილება 10-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს საწყისი მონაცემების ცდომილებაზე. თავის მხრივ, დამრგვალების ცდომილება 10-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს მეთოდის ცდომილებაზე.

ცვლადთა გამორიცხვის გაუსის მეთოდი ზუსტი მეთოდია, მას არა აქვს მეთოდის ცდომილება, თუმცა, საწყისი მონაცემების ან დამრგვალების მცირე ცდომილებასაც შეუძლია ამოხსნის შედეგში მოგვცეს მნიშვნელოვანი ცდომილება.

წრფივ განტოლებათა  $Ax = b$  სისტემის  $x$  ამონახსნის ცდომილების შესაფასებლად მარჯვენა  $B$  მხარეზე დამოკიდებულებით, განიხილავენ სისტემის ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების შეფარდებას მარჯვენა მხარეების ფარდობით ცდომილებებთან

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\|r\|}{\|x\|}}{\frac{\|\eta\|}{\|b\|}} &= \frac{\|r\| \cdot \|b\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} = \frac{\|Ax\| \cdot \|A^{-1}\eta\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\eta\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} = \\ &= \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu(A), \end{aligned} \quad (10.66)$$

სადაც  $r$  ამონახსნის ცდომილებაა,  $\eta$  - მარჯვენა მხარეების ცდომილება.

$\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  რიცხვს **A** მატრიცის განპირობებულობის რიცხვს უწოდებენ. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი, ახასიათებს სისტემის მარჯვენა მხარეებში ცდომილების გავლენით, ამონახსნის ცდომილების ზრდის სისწრაფეს. თუ, განპირობებულობის რიცხვი გაცილებით მეტია ერთზე, მაშინ სისტემას ცუდად განპირობებული ეწოდება და მისი ამხსნისას ცდომილება დიდია.

**სიმეტრიული მატრიცებისათვის**

$$\nu(A) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|} \geq 1. \quad (10.67)$$

განვიხილოთ მაგალითი **Mathcad** –ის ბაზაზე.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{\max(\text{eigenvals}(A))}{\min(\text{eigenvals}(A))} = 3.588$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში, მატრიცის განპირობებულობის რიცხვია 3.588.

ზუსტი მეთოდების გამოყენება წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად, მაღალი რიგის ( $n \geq 10^4$ ) შემთხვევაში არაა მიზანშეწონილი, რადგან ოპერაციათა რიცხვი სწრაფად მატულობს განზომილებასთან ერთად და მაშასადამე მატულობს ანგარიშის ცდომილებაც. თუ, სისტემის მატრიცა სამდიაგონალაა, მაშინ იყენებენ თომასის გაშვების მეთოდს, რაც ფაქტიურად, გაუსის მეთოდია, თუმცა ოპერაციათა რიცხვი მცირდება, რადგან ნულოვან დიაგონალებთან არ ხდება ოპერაციები, რაც ამცირებს ოპერაციათა საერთო რაოდენობას და მაშასადამე ცდომილებას.

სასრულ-სხვაობათა მეთოდის გამოყენებას წრფივი, კერძოწარ-მოებუდიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად, მიყვარათ მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნის აუცილებლობასთან. ასეთ შემთხვევაში, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს, რომელთაც საზოგადოდ აქვთ სახე

$$B \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{\tau_{n-1}} + Ax_{n-1} = b, \quad n \in N, \quad (10.68)$$

სადაც  $\tau_{n-1}$  იტერაციის პარამეტრია. თუ,  $B = E$ , მაშინ იტერაციულ მეთოდს

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{\tau_{n-1}} + Ax_{n-1} = b, \quad n \in N, \quad (10.69)$$

ეწოდება ცხადი იტერაციული სქემა და ამონახსნი მოიცემა სქემით

$$x_n = x_{n-1} - \tau_{n-1}(Ax_{n-1} - b), \quad n \in N. \quad (10.70)$$

თუ,  $B \neq E$  მაშინ იტერაციულ სქემას ეწოდება არაცხადი და ის მოიცემა ფორმულით

$$Bx_n = Bx_{n-1} - \tau_{n-1}(Ax_{n-1} - b), \quad n \in N. \quad (10.71)$$

არაცხადი იტერაციული სქემის შემთხვევაში, იტერაციის ყოველ ახალ ბიჯზე, უნდა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა (10.71).

იაკობის მარტივი იტერაციის სქემას წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის აქვს სახე

$$x_{n+1} = x_n - \tau(Ax_n - b) = (E - \tau A)x_n + \tau b = Dx_n + C, \quad (10.72)$$

$$D = E - \tau A, \quad C = \tau b, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.73)$$

თეორემა. თუ,  $\|D\| < 1$  მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და (10.72) იტერაციული პროცესი კრებადია სისტემის ამონახსნისაკენ გეომეტრიული პროგრესიის სისწრაფით.

იტერაციული პროცესით მიღებული ამონახსნის, ზუსტ ამონახსნთან აბსოლუტური ცდომილება ფასდება უტოლობით

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\|D\|}{1 - \|D\|} \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (10.74)$$

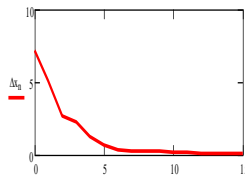
ეს უტოლობა საშუალებას გვაძლევს გავაჩეროთ იტერაციული პროცესი მაშინ, როცა მიღწეულია ამონახსნის შესაბამისი სიზუსტე.

განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი **Mathcad**-ის ბაზაზე

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \tau := 0.4 \quad N := 15 \quad x^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D := A^0 - \tau \cdot A$$

$$\text{norm2}(D) = 1.231 \quad n := 0..N \quad x^{(n+1)} := D \cdot x^{(n)} + b \quad \Delta x_n := |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$$

$$\Delta x_N = 9.19 \times 10^{-3} \quad \text{მიახლოებითი ამონახსნი} \quad x^{(N+1)} = \begin{pmatrix} 2.241 \\ -1.24 \\ 10.214 \end{pmatrix}$$



ცდომილება

ამონახსნი

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.25 \\ 10.25 \end{pmatrix} \quad \text{ზუსტი}$$

### 10.2.5. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით

თუ, გვინდა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (10.75)$$

იტერაციული მეთოდით, მაშინ ისეთნაირადვე ვიქცევით, როგორც სკალარულ შემთხვევაში. (10.75) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ ვექტორული ფორმით, თუ შემოვიღებთ შესაბამის აღნიშვნებს

$$\begin{cases} F(x) = 0 \\ F^T = (f_1, f_2, \dots, f_n) \\ x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (10.76)$$

შესაბამის იტერაციულ სქემას ექნება სახე:

$$x_{n+1} = x_n + \tau F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.77)$$

თუ, იტერაციული პროცესის წარმომქმნელი  $\varphi(x) = x + \tau F(x)$  ფუნქცია, აკმაყოფილებს ბანახის თეორემის პირობებს, მაშინ (10.77) პროცესი კრებადია (10.75) არაწრფივი განტოლების ამონახსნისაკენ.

განვიხილოთ, არაწრფივ განტოლებათა სისტემის იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით ამოხსნის მაგალითი.

ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა

$F(x) = 0$ . შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა **Mathcad** –ის ბაზაზე

ამოსახსნელი სისტემის მარცხენა მხარის ვექტორ-ფუნქცია.

$$F(x) := \begin{bmatrix} (x_0)^2 + x_1 - 1 \\ e^{-x_1} - x_1 \end{bmatrix}$$

იტერაციის პარამეტრი:  $\tau := 1$

იტერაციათა რიცხვი:  $N := 15$

უცნობების საწყისი მიახლოებები:  $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

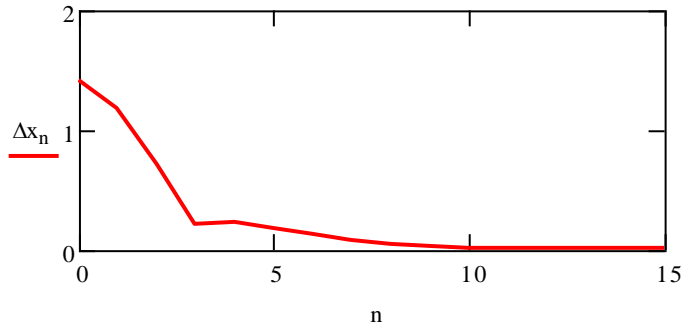
იაკობის მარტივი იტერაციის სქემა:

$$n := 0..N \quad x^{(n+1)} := x^{(n)} + \tau \cdot F(x^{(n)})$$

ცდომილებების დინამიკა იტერაციების ნომრის მიხედვით:

$$\Delta x_n := |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$$

ცდომილების დინამიკის გრაფიკული სურათი:



მიახლოებითი ამონახსნი მეთხუთმეტე იტერაციაზე:

$$x^{(N+1)} = \begin{pmatrix} -0.658 \\ 0.567 \end{pmatrix}$$

$F(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა  $F(x^{(N+1)})$ :

$$F(x^{(N+1)}) = \begin{pmatrix} -4.699 \times 10^{-4} \\ 1.182 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

როგორც ვხედავთ, აბსოლუტური ცდომილებაა  $\varepsilon \approx 10^{-4}$ .

### 10.2.6. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიუტონის მეთოდით

განვიხილოთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (10.78)$$

ამოხსნის ნიუტონის ალგორითმი. აქაც უნდა ვისარგებლოთ (10.76) ვექტორული აღნიშვნებით. ანუ, გვაქვს განტოლებათა სისტემა  $F(x) = 0$ . განვიხილოთ, ამ ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულებისაგან შედგენილი მატრიცა (იაკობის მატრიცა):

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (10.79)$$

მაშინ, ნიუტონის იტერაციული სქემა არაწრფივ განტოლებათა სისტემისათვის, ჩაიწერება ვექტორული ფორმით:



$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} \cdot F(x_n). \quad (10.80)$$

თუ, სისტემის იაკობის მატრიცა არაა გადაგვარებული  $|F'(x)| \neq 0$  და საწყისი პირობები “საკმაოდ ახლოსაა ამონახსნთან”, მაშინ ნიუტონის იტერაციული პროცესი კრებადია. თუმცა, ნიუტონის სქემით, არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა არაპრაქტიკულია, თეორიულად ის მრავალი ახალი იდეის მომცემია.

### 10.3. კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრფის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა-ბიექცია; რაც საშუალებას იძლევა, წრფესთან დაკავშირებული გეომეტრიული ამოცანები ჩავწეროთ ნამდვილი რიცხვების მეშვეობით და ამოვხსნათ ალგებრული მეთოდების საშუალებით. მაგრამ, წრფეების გარდა გეომეტრიაში არსებობენ სიბრტყეებიც (ორგანზომილებიანი სივრცე). ისმის კითხვა: ვიცით, რომ ერთგანზომილებიან სივრცეს - წრფეს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, არსებობენ თუ არა სიბრტყის შესაბამისი “ბრტყელი რიცხვები”?

ამ კითხვაზე პასუხი არის დადებითი: დიას არსებობენ, თან ასეთი რიცხვითი სიმრავლეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

სიბრტყის ყოველ  $P$  წერტილს შეესაბამება ორი რიცხვი(მისი კოორდინატები)  $P(x;y)$ . ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ “ბრტყელი რიცხვები”. ვთქვათ, გვაქვს რიცხვები  $A = (\alpha; \beta)$ ;  $B = (\gamma; \delta)$ . იმისათვის, რომ აზრი ქონდეს ახალი რიცხვების შემოღებას, უნდა გვქონდეს შესაბამისი ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები. ამის შემდეგ, შეგვეძლება დავახასიათოთ შესაბამისი ალგებრული სისტემა. ამიტომ, შემოვიღოთ ოპერაციები “ბრტყელ რიცხვებზე”.

$$A + B = (\alpha; \beta) + (\gamma; \delta) = (\alpha + \beta; \gamma + \delta); \quad (10.81)$$

$$A \cdot B = (\alpha; \beta) \cdot (\gamma; \delta) = (\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta; \alpha \cdot \delta + \beta \gamma); \quad (10.82)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(\alpha; \beta)}{(\gamma; \delta)} = \left( \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \frac{\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right). \quad (10.83)$$

თუ, შემოვიღებთ ნულისა და ერთის შესაბამის ბრტყელ რიცხვებს

$$0 = (0; 0); \quad (10.84)$$

$$1 = (1; 0).$$

მივიღებთ ალგებრულ სისტემას, რომლის ოპერაციებიც ძირითადად აკმაყოფილებენ იგივე თვისებებს, რასაც ოპერაციები

ნამდვილ რიცხვებზე(წრფივ რიცხვებზე), თუმცა, არის განსხვავებებიც. კერძოდ, თუ “ბრტყელ რიცხვებს” ჩავწერთ ალგებრული ფორმით  $A = \alpha + i \cdot \beta$ . სადაც,  $i = (0;1)$ ;  $\alpha = (\alpha; 0)$ . მაშინ გვექნება

$$i^2 = i \cdot i = -1. \quad (10.85)$$

ასეთი ტოლობა შეუძლებელია ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში. ასე, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ახალი ტიპის ალგებრულ სისტემასთან რომელსაც  $\mathbb{C}$  - კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს[13] უწოდებენ.  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ .

### 10.3.1. კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები

**განსაზღვრება:**  $z = a + ib$  კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება სიბრტყეზე ამ რიცხვის გამომსახველი წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილს  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე ; ხოლო ორი გვერდის სხვაობა ნაკლებია მესამე გვერდზე :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (10.86)$$

**განსაზღვრება:**  $z = a + ib$  კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება  $\bar{z} = a - ib$  კომპლექსურ რიცხვს.

ცხადია, რომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$|\bar{z}| = |z|; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \quad (10.87)$$

**განსაზღვრება:**  $z = a + ib$  კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება  $\operatorname{Re} z = a$  რიცხვს, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება  $\operatorname{Im} z = b$  რიცხვს.

კომპლექსური რიცხვი იგივე სიბრტყის წერტილია. სიბრტყის წერტილები კი, შეგვიძლია გამოვსახოთ, როგორც დეკარტის კოორდინატებში(შეესაბამება კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ჩაწერის ფორმა  $z = x + iy$ ), ასევე, პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

ამ შემთხვევაში წერტილი ხასიათდება  $|z|$  მოდულით (მანძილით კოორდინატთა სათავემდე) და კუთხით აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , რომელიც აითვლება

საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით  $2\pi k$  სიზუსტით და რომელსაც კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი  $\arg z$  ეწოდება.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k; \quad (10.88)$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k; \quad (10.89)$$

$$k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (10.90)$$

შედეგად, კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია ჩაწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$z = a + ib = |z|(\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)). \quad (10.91)$$

თუ, გავიხსენებთ ეილერის ფორმულას

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi; \quad (10.92)$$

მაშინ, კომპლექსური რიცხვის (10.91) ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გადავალთ მის მაჩვენებლიან ფორმაზე;

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z}. \quad (10.93)$$

**მაგალითი:**  $z = 1 + i \cdot 1$  კომპლექსური რიცხვი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით.

ამოხსნა:  $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ;  $\arg z = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$  აქედან გამომდინარე,

ტრიგონომეტრიულ ფორმას ექნება სახე:

$$z = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad \text{ხოლო შესაბამის მაჩვენებლიან} \quad (10.93)$$

ფორმას, მივიღებთ სახით  $z = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$ .

### 10.3.2. ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \cdot \sin(\arg z_1 + \arg z_2)). \quad (10.94)$$

ამ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \arg z) + i \cdot \sin(n \cdot \arg z)); \quad (10.95)$$

ამ ფორმულიდან გვაქვს:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right). \quad (10.96)$$

სადაც

$$k = 0; 1; 2; \dots; n-1.$$

აქედან ნათლად ჩანს, რომ კომპლექსური რიცხვიდან  $n$ -ური ხარისხის ფესვს აქვს  $n$  მნიშვნელობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ  $n$  ხარისხის მრავალწევრს აქვს  $n$  ფესვი.

განვიხილოთ ორწევრა განტოლებები:

1)  $x^2 = -1$  ამ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს. ეხლა ვნახოთ მისი ამონახსნები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x = \sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \cdot \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}$$

$k = 0; 1$  ანუ გვაქვს ორი ამონახსნი

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}.$$

2)  $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$  ფესქვეშა გამოსახულება გადავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით და მერე ვისარგებლოთ (10.96) ფორმულით.

$$x = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[3]{2} \cdot \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} \right).$$

$k = 0; 1; 2$ . მაშასადამე, გვაქვს სამი ამონახსნი:

$$x_1 = \sqrt[3]{2}; \quad x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$x_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

### P.S.

კომპლექსურ რიცხვებს ფართო გამოყენება აქვს ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვის ამოცანების შესწავლისას და სიგნალების ფილტრაციის საქმეში [13-14]. ასევე, დიდია მათი გამოყენების არეალი უწყვეტ ტანთა მექანიკის ბრტყელი ამოცანების შესწავლის საქმეში [15-16]. არსებობენ კომპლექსური რიცხვებისაგან განსხვავებული სხვა ბრტყელი რიცხვებიც. კონკრეტულად, **დუალური და ორმაგი რიცხვები**, მაგრამ ამ რიცხვებისათვის გაყოფის ოპერაცია არაა ყოველთვის შესაძლებელი (აქ არაა ლაპარაკი ნულზე გაყოფაზე), ამიტომ პრაქტიკაში “ბრტყელი რიცხვებიდან”, ჯერ-ჯერობით, ფართო გამოყენება აქვთ, ძირითადად, კომპლექსურ რიცხვებს.

## 10.4. რიცხვითი სისტემების აგება გრასმან-კლიფორდის პროცედურით

კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა არაა დალაგებული, ანუ არაა მათთვის, საზოგადოდ, განმარტებული მეტობა-ნაკლებობის მიმართება. კომპლექსურმა რიცხვებმა დიდი გამოყენება პოვა ფიზიკასა და ტექნიკაში, მექანიკასა და მათემატიკაში. სწორედ ამიტომ, გაგრძელდა ახალი ტიპის განზოგადებული, რიცხვითი სისტემების ძიება და შესწავლა [19-23], იმ პირობით რომ, მათ ქონოდათ ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვების ძირითადი თვისებები. ასე წარმოიქმნა **ორმაგი და დუალური რიცხვითი სისტემები, კვატერნიონები, ოქტავები, კლიფორდის რიცხვები, გრასმანის სისტემები** და ა.შ.

განვიხილოთ ახალი, განზოგადებული რიცხვითი სისტემების აგების **გრასმან-კლიფორდის პროცედურა**.

ვთქვათ  $a, b$  - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. განვიხილოთ

$$z = a + bi, \tag{10.97}$$

სახის რიცხვების სიმრავლე, სადაც  $i$  - რაღაც სიმბოლოა (ობიექტი), რომელიც ნამდვილ რიცხვებზე გამრავლებისას, აკმაყოფილებს კომუტაციურობის პირობას, ანუ,  $bi = ib \forall b \in \mathbb{R}$  და ადგილი აქვს ტოლობას  $i^2 = -1 \vee i^2 = 1 \vee i^2 = 0$ , ანუ,

$$i^2 = \varepsilon, \tag{2.98}$$

სადაც  $\varepsilon$  იღებს მნიშვნელობებს -1, ან 1 ან 0.  $a, b$  - რიცხვებს ეწოდებათ რთული  $z$  რიცხვის კომპონენტები, ხოლო  $i$  - ს უწოდებენ წარმოსახვით ერთეულს. ასე, რომ გრასმან-კლიფორდის პროცედურის პირველი ბიჯის შემდეგ, ხდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაორმაგება: ერთი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ადგენს  $a$  კომპონენტს, ხოლო მეორე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე  $b$  - კომპონენტს.

**განსაზღვრება:** (2.97) სახის რიცხვებს ეწოდებათ **კომპლექსური რიცხვები**, თუ,  $i^2 = -1$ , ეწოდებათ **ორმაგი რიცხვები**, თუ,  $i^2 = 1$  და ეწოდებათ **დუალური რიცხვები**, თუ,  $i^2 = 0$ .

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე, **კომპლექსური, ორმაგი და დუალური რიცხვების ნამრავლი** შესაბამისად, განისაზღვრება უბრალო არითმეტიკული ფორმულებით (10.98) პირობის გათვალისწინებით

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc) \cdot i, \tag{10.99}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bd + (ad + bc) \cdot i, \tag{10.100}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc) \cdot i. \tag{10.101}$$

ყველა შემთხვევაში, გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურიცაა და ასოციატიურიც.

ხოლო, ორმაგი და დუალური რიცხვები არიან სისტემები გაყოფის გარეშე, რადგან მათთვის გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის არაა შესაძლებელი (ორმაგი რიცხვები არ იყოფა  $z = a \pm ai$  რიცხვებზე, ხოლო დუალური რიცხვები არ იყოფა  $z = ai$  რიცხვებზე).

გამოვიკვლიოთ რომელი  $z_1 \neq 0$  და  $z_2 \neq 0$  რიცხვებისათვის აქვს ადგილი ტოლობას

$$z_1 \cdot z_2 = 0. \quad (10.102)$$

ასეთ რიცხვებს ნულის გამყოფები ეწოდებათ. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ნულის გამყოფები არ გვაქვს, რადგან

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0. \quad (10.103)$$

ორმაგ რიცხვთა სიმრავლეში

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = a + ai \vee z_2 = a - ai. \quad (10.104)$$

ყველა ასეთი სახის რიცხვები როცა  $a \neq 0$ , ნულის გამყოფებია.

დუალურ რიცხვთა სიმრავლეში ნულის გამყოფებია  $ai$  რიცხვები, რომლებისთვისაც  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , რადგან

$$ai \cdot bi = abi^2 = 0, \quad (10.105)$$

ნებისმიერი ნამდვილი  $a, b$  რიცხვებისათვის.

გადავიდეთ გრასმან-კლიფორდის პროცედური მეორე ნაბიჯზე. ვთქვათ,  $z_1$  და  $z_2$ , (10.97) სახის რაიმე რიცხვებია, სადაც წარმოსახვითი  $i$  ერთეული აკმაყოფილებენ (10.98) პირობას. შემოვიღოთ რაიმე მეორე  $j$  სიმბოლო (ობიექტი), რომელისთვისაც

$$j^2 = \delta, \quad (10.106)$$

სადაც  $\delta$  იღებს მნიშვნელობებს  $-1$ , ან  $1$  ან  $0$ . ამასთანავე,  $j$  სიმბოლოს ნამრავლი ნამდვილ რიცხვებზე არის კომუტაციური, ხოლო  $i$  წარმოსახვით ერთეულზე მარჯვენა ნამრავლი ანტიკომუტაციურია ( $ji = -ij$ ), ან კომუტაციურია ( $ji = ij$ ), ან გადაგვარებულია ( $ji = 0$ ), ანუ,

$$ji = \alpha ij, \quad (10.107)$$

სადაც  $\alpha$  იღებს მნიშვნელობებს  $-1$ , ან  $1$  ან  $0$ . განვიხილოთ

$$u = z_1 + z_2 j, \quad (10.108)$$

სახის რიცხვების სიმრავლე. რადგან  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ ,

$$u = a + bi + cj + dij. \quad (10.109)$$

ამ ფორმულაში  $ij$  ნამრავლი წარმოადგენს ობიექტს ახალი თვისებებით. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $ij = k$ . მაშინ მივიღებთ რომ

$$u = a + bi + cj + dk. \quad (10.110)$$

$u$  ობიექტისათვის  $i, j, k$  სიმბოლოებს წარმოსახვით ერთეულებს უწოდებენ. მათ ნამრავლებს აქვთ სახე იხ. ცხრილი 10.1

ცხრილი 10.1

	$i$	$j$	$k$
$i$	$\varepsilon$	$k$	$\varepsilon j$
$j$	$\alpha k$	$\delta$	$\alpha \delta i$
$k$	$\alpha \varepsilon j$	$\delta i$	$\alpha \varepsilon \delta$

### 10.4.1. კვატერნიონები

უფრო დეტალურად განვიხილოთ (10.110) ტიპის რიცხვები. როცა  $\varepsilon = \delta = \alpha = -1$ , ანუ,  $i^2 = j^2 = -1$  და  $ji = -ij$ , მაშინ წარმოსახვითი  $i, j, k$  ერთეულები მრავლდებიან ერთმანეთზე წესით, რომელიც მოცემულია ცხრილით 10.2

ცხრილი 10.2

	$i$	$j$	$k$
$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$j$	$-i$	-1

ასეთ  $u = a + bi + cj + dk$  რიცხვებს, კვატერნიონებს უწოდებენ. ეს რიცხვები პირველად განიხილა ჰამილტონმა.

ნებისმიერი კვატერნიონისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$u\bar{u} = \bar{u}u = \|u\|^2, \quad \overline{u_1 u_2} = \bar{u}_2 \bar{u}_1, \quad \|u_1 u_2\| = \|u_1\| \cdot \|u_2\|, \quad (10.111)$$

სადაც  $\bar{u} = a - bi - cj - dk$  არის  $u = a + bi + cj + dk$  კვატერნიონის შუღლებული კვატერნიონი, ხოლო  $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$  არის კვატერნიონის ნორმა. კვატერნიონების  $H$  სიმრავლე არის სისტემა გაყოფით. კვატერნიონების სიმრავლეს აქვს კომპლექსური რიცხვების მრავალი თვისება. კვატერნიონების გამრავლებას შეესაბამება სამგანზომილებიანი და ოთხგანზომილებიანი სივრცეების პარალელური გადატანა, ბრუნვა და მსგავსების გარდაქმნა, ცენტრალური და დერძული სიმეტრია.

### 10.4.2. პაულის რიცხვები

თუ, გავავრძელებთ ზემოთმოყვანილ გრასმან-კლიფორდის პროცედურას მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით, მაშინ  $n$ -ურ ბიჯზე მივიღებთ

$$w = v_1 + v_2 l, \quad (10.112)$$

სახის რიცხვებს, სადაც  $v_1, v_2$  არის გრასმან-კლიფორდის პროცედურით  $(n-1)$  ბიჯზე აგებული რიცხვები, ხოლო  $l$  ახალი სიმბოლოა, რომელსაც წარმოსახვითი ერთეულებისნაირი თვისებები აქვს. მაშინ ცხადია, რომ  $w$  რიცხვებს ექნებათ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_m i_m, \quad (10.113)$$

სადაც  $m = 2^n - 1$ , ხოლო  $a_0, a_1, \dots, a_m$  ნამდვილი რიცხვებია;  $i_1, i_2, \dots, i_m$  წარმოსახვითი ერთეულებია, რომლებიც გამრავლებისას კომუტირებენ ნამდვილ რიცხვებთან. ხოლო, ერთმანეთზე ნამრავლებისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$i_p^2 = \varepsilon_p, \quad i_q i_p = \alpha_{pq} i_p i_q, \quad p < q, \quad p, q = 1, 2, \dots, n, \quad (10.114)$$

სადაც  $\varepsilon_p, \alpha_{pq}$  იღებს მნიშვნელობებს  $-1$ , ან  $1$  ან  $0$ .

თუ,  $n = 1$  და  $\varepsilon_1 = -1$  მაშინ (10.112),(10.113) კომპლექსური რიცხვებია; თუ,  $n = 1$  და  $\varepsilon_1 = 1$  მაშინ (10.112),(10.113) ორმაგი რიცხვებია; თუ,  $n = 1$  და  $\varepsilon_1 = 0$  მაშინ (10.112),(10.113) დუალური რიცხვებია; თუ,  $n = 2$  და  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \alpha_{12} = -1$ , მაშინ (10.112),(10.113) კვადრნიონებია; თუ, (10.114) ნამრავლებში ყველა  $\alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (10.112),(10.113) კლიფორდის რიცხვებია; თუ, ყველა  $\varepsilon_p = 0, \alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (10.112),(10.113) გრასმანის რიცხვებია; თუ,  $n = 3$  და ყველა  $\varepsilon_p = 1, \alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (10.112),(10.113) პაულის რიცხვებია; თუ,  $n = 4$  და  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1, \alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (10.112),(10.113) დირაკის რიცხვებია.

პაულის რიცხვებს აქვთ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_{12} + a_5 i_{13} + a_6 i_{23} + a_7 i_{123}, \quad (10.115)$$

სადაც  $i_{12} = i_1 i_2, i_{13} = i_1 i_3, i_{23} = i_2 i_3, i_{123} = i_1 i_2 i_3$ . ამას გარდა,

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1, \quad i_2 i_1 = -i_1 i_2, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3, \quad i_3 i_2 = -i_2 i_3. \quad (10.116)$$

**P.S.** პაულის რიცხვების ნამრავლი ასოციატიურია, მაგრამ არაა კომუტაციური. ასეთივე თვისება აქვთ კლიფორდის რიცხვებს, გარდა კომპლექსური რიცხვებისა.

### 10.4.3 ჰიპერკომპლექსური რიცხვები

ყველა, ზემოთგანხილული რიცხვები ჰიპერკომპლექსურ რიცხვებს მიეკუთვნებიან. ასე ეძახიან მათემატიკურ ობიექტებს, რომლებსაც აქვთ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \quad (10.117)$$

სადაც  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო  $i_k, k = 1, 2, \dots, n$  წარმოსახვითი ერთეულებია, რომლებიც კომუტირებენ ნამდვილ რიცხვებთან ნამრავლში. ასეთი რიცხვებისათვის



ტოლობა და ჯამი ისევე განიმარტება, როგორც ვექტორებისათვის, ხოლო მათი ერთმანეთზე ნამრავლები განისაზღვრება, წარმოსახვითი ერთეულების გამრავლების დადგენილ წესზე დამოკიდებულებით

$$i_p i_q = \alpha_{pq0} + \alpha_{pq1} i_1 + \alpha_{pq2} i_2 + \dots + \alpha_{pqn} i_n, \quad (10.118)$$

სადაც  $\alpha_{pq} \in \mathbb{R}; p, q = 1, 2, \dots, n$ .

(10.117) სახის რიცხვების სიმრავლეს, მათზე ზემოთ განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით და მათი ტოლობის ცნებით,  $n + 1$  რანგის ჰიპერკომპლექსური რიცხვითი სისტემა ეწოდება.

### 10.5. კელი-დიქსონის პროცედურა

ვთქვათ,  $U$  არის (10.117) სახის ჰიპერკომპლექსური სისტემა რაიმე გარკვეული (10.118) ტიპის გამრავლების წესით. განვიხილოთ  $U^{(2)}$  ტიპის რიცხვითი სისტემა

$$u = u_1 + u_2 e, \quad (10.119)$$

სადაც  $u_1, u_2 \in U$ , ხოლო  $e$  ახალი სიმბოლოა, რომელიც ნამრავლებში კომპუტირებს ნამდვილ რიცხვებთან. განვსაზღვროთ ტოლობა, აგრეთვე, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები  $U^{(2)}$  ტიპის რიცხვებისათვის შემდეგი წესით

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 e = v_1 + v_2 e &\Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2; \\ (u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) &= u_1 + v_1 + (u_2 + v_2) e; \end{aligned} \quad (10.120)$$

$$(u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) = u_1 v_1 - \tilde{v}_2 u_2 + (v_2 u_1 + u_2 \tilde{v}_1) e;$$

სადაც  $\tilde{u} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \dots - a_n i_n$ .

განსაზღვრება:  $2(n + 1)$  რანგის  $U^{(2)}$  ჰიპერკომპლექსურ სისტემას გაორმაგებული  $U$  სისტემა ეწოდება, ხოლო თვით  $U^{(2)}$  სისტემის აგების პროცედურას – კელი-დიქსონის გაორმაგების პროცედურა.

ეს პროცედურა განსხვავდება გროსმან-კლიფორდის პროცედურისაგან გამრავლების (10.120) წესით. ამას გარდა, საწყის  $U$  სისტემას შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რანგი (განზომილება) და გამრავლების ნებისმიერი (10.118) ტიპის წესი.

#### 10.5.1. ოქტავები

განვიხილოთ, კლასიკური რიცხვითი სიმრავლეებიდან კელი-დიქსონის პროცედურის შედეგად მიღებული სისტემები.

- ა) თუ,  $U = \mathbb{R}$ , მაშინ  $U^{(2)}$  არის კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე  $\mathbb{C}$ , ანუ,  $U^{(2)} = \mathbb{C}$ ;  
 ბ) თუ,  $U = \mathbb{C}$ , მაშინ  $U^{(2)} = H$  კვატერნიონების რიცხვითი სისტემაა;  
 გ) თუ,  $U = H$ , მაშინ  $U^{(2)}$  არის
- $$w = u_1 + u_2 e = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) e =$$

$$= \sum_{k=0}^7 a_k i_k, \quad (10.121)$$

სახის რიცხვითი სისტემაა, სადაც  $u_1, u_2 \in H$  კვატერნიონებია,  $a_k \in \mathbb{R}$ , ასევე,  $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k, i_4 = e, i_5 = ie, i_6 = je, i_7 = ke$  წარმოსახვითი ერთეულებია, რომელთა ყველა შესაძლო ნამრავლები (2.120) წესების თანახმად მოცემულია ცხრილში 10.3

ცხრილი 10.3

	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
$i_1$	-1	$i_3$	$-i_2$	$i_5$	$-i_4$	$-i_7$	$i_6$
$i_2$	$-i_3$	-1	$i_1$	$i_6$	$i_7$	$-i_4$	$-i_5$
$i_3$	$i_2$	$-i_1$	-1	$i_7$	$-i_6$	$i_5$	$-i_4$
$i_4$	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_5$	$i_4$	$-i_7$	$i_6$	$-i_1$	-1	$-i_3$	$i_2$
$i_6$	$i_7$	$i_4$	$-i_5$	$-i_2$	$i_3$	-1	$-i_1$
$i_7$	$-i_6$	$i_5$	$i_4$	$-i_3$	$-i_2$	$i_1$	-1

განსაზღვრება: (10.121) სახის რიცხვებს, წარმოსახვითი ერთეულების გამრავლების ცხრილში მოყვანილი წესით, ოქტავეები ეწოდებათ.

ოქტავეების ნამრავლი, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური და ასოციაციური.

### 10.6. ზოგიერთი რიცხვითი სისტემის მატრიცული წარმოდგენა

ჰიპერკომპლექსური რიცხვების პრაქტიკული გამოყენებისას, ხშირად, მიზანშეწონილია მათი მატრიცული წარმოდგენა.

- ა) განვიხილოთ  $z = a + bi$  კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე. ჩავწეროთ ისინი  $z = ai_0 + bi_1$  სახით, სადაც  $i_0 = 1$  და  $i_1 = i$ . გავითვალისწინოთ ამ სიმბოლოების ალგებრული თვისებები:

$$i_0^2 = i_0, \quad i_0 i_1 = i_1 i_0, \quad i_1^2 = -i_0, \quad a i_0 = i_0 a, \quad a i_1 = i_1 a, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (10.122)$$

ამ  $i_0$  და  $i_1$  ობიექტების ნაცვლად, განვიხილოთ შესაბამისი კვადრატული მატრიცები

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.123)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს მატრიცები აკმაყოფილებენ (10.122) პირობებს. მაგალითად,

$$i_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i_0. \quad (10.124)$$

(10.123) მატრიცული შესაბამისობებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ  $z = ai_0 + bi_1$  კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება მატრიცა

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (10.125)$$

ამ შესაბამისობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კომპლექსურ რიცხვებსა და (10.125) ტიპის მატრიცებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც, კომპლექსური რიცხვების ჯამსა და ნამრავლს შეესაბამება (10.125) სახის შესაბამისი მატრიცების ჯამი და ნამრავლი. ასეთ შესაბამისობას ორ სიმრავლეს შორის, **იზომორფიზმი** ეწოდება.

ბ)  $u = a + bi + cj + dk = ai_0 + bi_1 + ci_2 + di_3$

კვადრატული მატრიცებისათვის გვაქვს შესაბამისობა

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

სადაც  $i \in \mathbb{C}$ . ამ შესაბამისობის გათვალისწინებით, კვადრატული მატრიცული წარმოდგენას აქვს სახე:

$$u = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \quad (10.126)$$

ამრიგად, კვადრატული მატრიცებისათვის და (10.126) სახის კომპლექსურ რიცხვებს შორის არსებობს იზომორფიზმი.

გ) პაულის რიცხვების მატრიცული წარმოდგენისათვის,

$i_0$  ობიექტისა და მთავარი წარმოსახვითი ერთეულებისათვის იყენებენ წარმოდგენებს

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ხოლო სხვა წარმოსახვითი ერთეულების მატრიცული წარმოდგენებისათვის უნდა გამოვიყენოთ ფორმულები

$$i_{12} = i_1 i_2, \quad i_{13} = i_1 i_3, \quad i_{23} = i_2 i_3, \quad i_{123} = i_1 i_2 i_3.$$

დ) კლიფორდის რიცხვების წარმოდგენა ხდება ოთხი მატრიცული კომპონენტით:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

აქ, ადგილი აქვს ნორმირების თანადობებს  $\gamma_i^2 = +1$ . კლიფორდის რიცხვების მეშვეობით იგება სპეციალური სპინორული ოპერატორები[17-18], რომელთაც ფართო გამოყენება აქვთ თეორიულ ფიზიკაში.

## ამოცანები და საგარჯიშოები

### ვარიანტი 1

- 1.რაში მდგომარეობს ეკკლიდეს ალგორითმის არსი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში(რისი პოვნის საშუალებას იძლევა) ?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 120; 180?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:  
 $x^3 + 3x^2 + x \equiv 0 \pmod{2}$ ;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  
 $x^5 = 1$ ;
- 6.სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე(რატომ)?

### ვარიანტი 2

- 1.ეკკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით იპოვეთ  $d(150;100)$  ?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 12; 18?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:  
 $x^3 + 3x^2 + x \equiv 0 \pmod{5}$ ;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  
 $x^5 = i$ ;

6. სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (რატომ)?

### ვარიანტი 3

1. რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 150; 18?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:  
$$F(y) := \frac{25 - 0.75y}{0.5};$$
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  
$$\alpha y := \left( \frac{244 - 940}{12y^2} \right)^2;$$
6. როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

### ვარიანტი 4

1. რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 125; 8?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:  
$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{5};$$
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  
$$x^3 = 8;$$
6. როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

### ვარიანტი 5

1. ჩაწერეთ  $z = 3 + 4i$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 56?
3. იპოვეთ  $w = \frac{2+3i}{4i}$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:  
$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{7};$$

5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$$x^4 = -1;$$

6. მოიყვანეთ სეპარაბელური სივრცის განსაზღვრება?

### ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ  $z = (3 + 4i)(2 - 3i)$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 250; 560?

3. იპოვეთ  $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4. ამოხსენით შედარება:

$$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{3};$$

5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$$x^4 = -16;$$

6. მოიყვანეთ კვატერნიონების განსაზღვრება?

### ვარიანტი 7

1. ჩაწერეთ  $z = (3 + 4i)^{107}$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 50; 60?

3. იპოვეთ  $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{200}$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4. ამოხსენით შედარება:

$$5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{8};$$

5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$$x^4 = -16i;$$

6. მოიყვანეთ კლიფორდის რიცხვების განსაზღვრება?

### ვარიანტი 8

1. ჩაწერეთ  $z = (1 + i)(1 - i)$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 60?

3. იპოვეთ  $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4. ამოხსენით შედარება:

$$x^3 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{2};$$

5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$$x^4 = -i;$$

6. მოიყვანეთ სრული მეტრიკული სივრცის განსაზღვრება?

### ლიტერატურა

1. Дьюси С. Нумерология: числа и судьбы, пер. с англ., Москва, 1999
2. Ключников. Священная наука чисел, Москва, 2000
3. Лежен Дирихле П.Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., Санкт-Петербург, 1863
4. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел, пер. с англ., Москва, 1965
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел, Москва, 1972
6. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел, Москва, 1970
7. კოდობის პ. რიცხვთა თეორია, თბილისი, 1961
8. Rivest R.L. Kryptographi/Hndbook of Theoretical computer Science Vol. A. Algorithms and Cmplexity/J. van Leuwn, ed. Amsterdam: Elsevier, Cambridge, Mass.:The MIT Press., 1990
9. Успенский В.А. Как теория чисел помогает в шифровальном деле, соросовский образовательный журнал, №6, 1996
10. Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., Москва, 1983
11. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974
12. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971
13. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика, учеб. пос., Омск, 2002
14. Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques, Washington, USA, 2002
15. Muskhelishvili N. Praktische lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. – ZAMM, 13, 1933
16. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Москва, 1966
17. Маделунг Э. Математический аппарат физики, пер. с англ., Москва, 1961
18. Картан Э. Теория спиноров, пер. с франц., Москва, 1947
19. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций, М.: Наука, 1978

20. Кантор И.Л., Садовников А.С. Гиперкомплексные числа, М.: Наука, 1973
21. Понрягин Л.С. Обобщения чисел, М.: Наука, 1986
22. Райдер Л. Квантовая теория поля, М.: Мир, 1987
23. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. Clifford Analysis, Boston; Melbourne; Pitnam, 1982



## XI თავი. ფუნქციონალური სიმრავლეები

### შესავალი

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ახასიათებთ გარკვეული ზოგადი თვისებები, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში - ფუნქციონალურ სიმრავლეებში[1-3]. ასევე, უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ჩვენ ვეძებთ დიფერენცი-ალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა როგორც კლასიკურ, ასევე, განზოგადოებულ ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლეების) შესწავლა მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა.

### 11.1. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

**განსაზღვრება:**  $G$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა  $L$  სიმრავლეს ეწოდება ლინეალი(წრფივიანი), თუ  $u_1(x)$  და  $u_2(x)$  ფუნქციებთან ერთად, ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ  $a_1u_1(x) + a_2u_2(x)$  ფუნქციას).

**მაგალითები :**

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე,  $L$  იქნება ლინეალი.
2. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 5$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ  $u(x) = 3$  და  $a = 2$ , მივიღებთ  $au(x) = 6 > 5$ .

**P.S.** თუ  $L$  არის ლინეალი, მაშინ  $n$  ფუნქციებთან  $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$  ერთად

ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც  $\sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$ . სადაც  $a_i \in R$

ნამდვილი რიცხვებია. თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავაგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალის ორი  $u(x)$  და  $v(x)$  ფუნქციების სკალარული ნამრავლი  $(u;v)$  შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით:

$$(u;v) = \int_G u(x)v(x)dx. \quad (11.1)$$

ასე, რომ ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

**მაგალითი :**  $u(x)=x$ ;  $v(x)=1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u;v) = \int_G u(x)v(x)dx = \int_0^5 x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{25}{2}.$$

(11.1) სკალარული ნამრავლის თვისებები გამომდინარეობენ, უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან:

$$(u;v) = (v;u); \tag{11.2}$$

$$(a_1u_1 + a_2u_2;v) = a_1(u_1;v) + a_2(u_2;v); \tag{11.3}$$

$$(u;u) \geq 0; \tag{11.4}$$

$$(u;u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad \forall x \in G. \tag{11.5}$$

**განსაზღვრება:** L ლინეალის  $u(x)$  ფუნქციის ნორმა  $\|u(x)\|$  ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u;u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)dx}. \tag{11.6}$$

ეხლა შემოვიღოთ მანძილის ცნება ლინეალის ორ ფუნქციას შორის, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში მეტრიკას უწოდებენ:

**განსაზღვრება:** L ლინეალის ორ  $u(x)$  და  $v(x)$  ფუნქციებს შორის მანძილი (ანუ მეტრიკა) ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2 dx}. \tag{11.7}$$

**მაგალითი:**  $u(x)=x$ ;  $v(x)=1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ , მაშინ

$$\|u(x)\| = \sqrt{\int_0^5 x^2 dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3} \Big|_0^5} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2 dx} = \sqrt{\int_0^5 (x-1)^2 dx} = \sqrt{\frac{64+1}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}.$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძირითად თვისებებს, რომელსაც აკმაყოფილებს მეტრიკა(მანძილი):

$$\rho(u;v) \geq 0; \tag{11.8}$$

$$\rho(u;v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x); \tag{11.9}$$

$$\rho(u;v) = \rho(v;u); \tag{11.10}$$

$$\rho(u;z) \leq \rho(u;v) + \rho(v;z). \tag{11.11}$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მეტრიკას.

გარდა (11.7) მეტრიკისა, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ განიხილავენ მეტრიკის სხვა სახეებსაც. მაგალითად, ჩებიშევის მეტრიკას

$$\rho_c(u;v) = \max_{x \in G} |u(x) - v(x)|. \quad (11.12)$$

P.S. მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (11.8)-(11.11) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (11.12) მეტრიკა უფრო ინტუიციურად ზუსტია (11.7) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციებისათვის, მას იშვიათად იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე წყვეტილ ფუნქციებთან, რომლებისთვისაც ჩებიშევის მეტრიკა არ გამოდგება. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის გამოვიყენებთ (11.7) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ, ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით  $(u;v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$ , სადაც  $\overline{v(x)}$  არის  $v(x)$  ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.

## 11.2. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

**განსაზღვრება:**  $G$  არეზე განსაზღვრულ  $u(x)$  ფუნქციას კვადრატით ინტეგრებადი ეწოდება, თუ ლებეგის ინტეგრალები

$$\int_G u(x)dx; \quad \int_G u^2(x)dx; \quad (11.13)$$

ერთდროულად არსებობენ(არიან კრებადი).

კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. თუ,  $\int_G u^2(x)dx = 0$ , მაშინ  $u(x) = 0$  თითქმის ყველგან(გარდა ისეთი

წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს). ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ, ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება, არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები ერთმანეთს თითქმის ყველგან.

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (11.6) ნორმით და (11.7) მეტრიკით, ჰილბერტისწინა(უნიტარული)  $S_2$  სივრცე ეწოდება.

$G$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს აღნიშნავენ  $C(G)$  სიმბოლოთი. ხოლო, თუ ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულებიც უწყვეტია, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს(სიმრავლეს) აღნიშნავენ  $C^\infty(G)$  სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება  $S_2$  ფუნქციონალურ სივრცეში.

**განსაზღვრება:** ვიტყვით, რომ  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია  $u(x)$  ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n; u) = 0. \quad (11.14)$$

ანუ, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx = 0. \quad (11.15)$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რაც ჩვენ გვქონდა რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

**განსაზღვრება:**  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ფუნქციათა მიმდევრობას კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \rho(u_m; u_n) = 0$ .

**განსაზღვრება:** ვიტყვით, რომ  $u(x)$  წარმოადგენს  $S_2$  უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილს, თუ  $u(x)$  ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება  $S_2$  სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

**თეორემა:**  $u(x)$  ფუნქცია არის  $S_2$  უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების(ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , რომელიც კრებადია  $u(x)$  ფუნქციისაკენ.

P.S. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში,  $S_2$  უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.

**განსაზღვრება:**  $S_2$  უნიტარული(ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვართი წერტილების სიმრავლესთან, ამ სივრცის ჩაკეტვა ეწოდება. ეს განსაზღვრება სიმბოლოურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2} = S_2 \cup \partial S_2. \quad (11.16)$$

**განსაზღვრება:** ჰილბერტის წინა(უნიტარული) სივრცის  $\overline{S_2}$  ჩაკეტვას, ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცე ეწოდება.

**განსაზღვრება:** წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია, ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ, ბანახის სივრცე ეწოდება.

**P.S.**

ჰილბერტის  $B := 12\alpha$  სივრცე სრულია, ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების(ფუნქციების) სიმრავლეც მკვრივია  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ, ჰილბერტის სივრცეც სეპარაბელურია, ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მიუხაზლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოვებით ანალიზში. ჰილბერტის სივრცე ყოველთვის არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატითინტეგრებადი ფუნქციების(ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჰილბერტის სივრცე  $\overline{S_2}$ , ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე(რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდებულო რომ გვექონდეს სკალარული ნამრავლი).

**განსაზღვრება:** ფუნქციათა სისტემას  $\left\{ \begin{matrix} e^{i\pi x} \\ e^{i2\pi x} \\ \vdots \end{matrix} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ ამ სისტემის ერთი ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას უწოდებენ.

**მაგალითი:** ფუნქციათა სისტემა  $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{matrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

წრფივად დამოკიდებულია, რადგან  $u_3 = 4u_1 + 4u_2$ . იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი.

**თეორემა:** ფუნქციათა სისტემა  $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$  წრფივად დამოუკიდებელია ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ანუ

$$D(u_1; u_2; \dots; u_k) = \begin{vmatrix} (u_1; u_1) & (u_1; u_2) & \dots & (u_1; u_k) \\ (u_2; u_1) & (u_2; u_2) & \dots & (u_2; u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k; u_1) & (u_k; u_2) & \dots & (u_k; u_k) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (11.17)$$

**მაგალითი:** ფუნქციათა სისტემა  $u_1 = \sin x$ ;  $u_2 = \cos x$ ;  $u_3 = 1$  წრფივად დამოუკიდებელია  $L_2[0; \pi]$  სივრცეში, რადგან

$$(u_1; u_1) = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}; \quad (u_1; u_2) = \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0; \quad (u_1; u_3) = 2; \quad (u_2; u_2) = \pi.$$

$$Y_1(P_1, P_2) := a_1 + \frac{\alpha_1 \cdot (B - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2)}{P_1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$Y_2(P_1, P_2) := a_2 + \frac{\alpha_2 \cdot (B - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2)}{P_2 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

**განსაზღვრება:** წრფივად დამოუკიდებელ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული**  $P_1=15$   $P_2=12$  სივრცეში, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო  $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$  წრფივი კომბინაციებით მიღებული  $\psi(x)$  ფუნქცი-ათა სიმრავლე მკვრივია  $P := 12$  სივრცეში.

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ  $Y(P) := 28 - \frac{1}{4} \cdot P$  ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს შაუდერის ბაზისს  $EY(P) = \left(\frac{d}{dx}\right)^P \cdot Y(P)$  სივრცეში, თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ  $EPY(P) := 1 - |EY(P)|$  სახით.

**მაგალითი:**  $P := 12$  ფუნქციონალურ სივრცეში, როცა  $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$  შაუდერის მრავალწევრა ბაზისია:  $1; x; y; x^2; xy; y^2; \dots$

ასევე,  $L_2(0, 2\pi)$  სივრცეში, არსებობს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბაზისი:  $1; \sin x \cdot \cos y; \sin 2x \cdot \cos y; \sin x \cdot \cos 2y; \sin 2x \cdot \cos 2y; \dots$

ცნობილია, რომ  $L_2(R)$  სივრცეში შეიძლება აიგოს ვეილერტ ფუნქციებისაგან შემდგარი ბაზისებიც.

**P.S.**

მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ-ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს.

### 11.3. ანალოგია $n$ განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ ანალოგიები  $n$  განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

№	$R^n$ ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია $\bar{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\bar{x}; \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x); g(x)) = \int_G f(x)g(x)dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $ \bar{x}  = \sqrt{(\bar{x}; \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\ f(x)\  = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int_G f^2(x)dx}$
4.	მანძილი ორ ვერტიკალს შორის $ \bar{x} - \bar{y}  = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}; \bar{x} - \bar{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	მეტრიკა $\rho(f(x); g(x)) = \ f(x) - g(x)\  = \sqrt{(f(x) - g(x); f(x) - g(x))} = \sqrt{\int_G (f(x) - g(x))^2 dx}$
5.	თუ, $\{e_i\}_{i=1}^n$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა $R^n$ -ში, მაშინ ნებისმიერი $\bar{x}$ ელემენტი(ვექტორი) ამ სივრციდან წარმოიდგინება სახით: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$	თუ, $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ შაუდერის ბაზისია $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი(ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: $f(x) = \sum_{i=1}^\infty a_i u_i(x)$

### 11.4. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის  $L_2(G)$  ფუნქციონალური სივრცე. პრაქტიკული, ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u'v' dx ; \quad (11.18)$$

და გავიმეორებთ  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას,

მაშინ მივიღებთ სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს  $W_2^1(G)$ .

ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u'v' dx + \int_G u''v'' dx ; \quad (11.19)$$

მაშინ, მივიღებთ  $W_2^2(G)$  სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.

ანალოგიურად აიგება სობოლევის  $W_2^k(G)$  ფუნქციონალური სივრცე, შესაბამისი სკალარული ნამრავლის შემოღებით.

$$(u;v) = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)}v^{(i)} dx. \quad (11.20)$$

## 11.5. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ველაზე უფრო “კარგი” ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს  $P_n(x)$ , სადაც არგუმენტი საზოგადოდ,

$m$ -განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი.  $P_n(x)$  მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა).

ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა  $C(R^m)$  ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე(ნაწილი).

უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის(ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცია ნაწილი.

ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი თავის მხრივ ჰილბერტის ფუნქციონალური



სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის  $W_2^k(G)$  სივრცეში, თუ  $k \geq 1$ .

## ამოცანები და საგარჯიშოები

### ვარიანტი 1

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 8$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა უნიტარულ, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 2

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 9$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^2$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^2$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა სობოლევის, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 3

- 1.ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 6$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^3$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- 3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
- 4.გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
- 5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^3$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
- 6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 4

- 1.ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 66$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^4$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- 3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
- 4.გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
- 5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^4$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
- 6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 5

- 1.ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას

- $|u(x)| \leq 88$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^5$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^5$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 6

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 1$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^8$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^8$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 7

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 10$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^6$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^{16}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6.რა განსხვავებაა ბანახისა და სობოლევის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 8

1.ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 11$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2.  $u(x) = x^{13}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ

სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:

$$u(x) = x^{13}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}?$$

6.რა არის გრამის დეტერმინანტი და რა ინფორმაციას იძლევა მისი მნიშვნელობა?

### ლიტერატურა

- 1.Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике, пер. с англ., Мир, Москва, 1985
- 2.Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974
- 3.Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971
- 4.Шварц Л. Анализ, Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, Москва, 1972
- 5.Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, Москва, 1971
- 6.Рудин У. Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, Москва, 1966

## XII თავი. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალები

მეცნიერები სამყაროს კვლევისა და მოდელირების პროცესში, როგორც წესი, ყურადღებას ამახვილებდნენ ხოლმე ისეთ სიმრავლეებსა და ფუნქციებზე, რომლებისთვისაც ადვილი გამოსაყენებელია გამოთვლის კლასიკური მეთოდები. ისეთ ფუნქციებს კი, რომლებიც არ იყვნენ სათანადო სიგლუვის მატარებელი ანუ რეგულარული, ხშირად თვლიდნენ ხოლმე პათოლოგიებად და არ უთმობდნენ სათანადო ყურადღებას. დიდი ხანი არ არის, რაც სიტუაცია შეიცვალა და არაგლუვმა ფუნქციებმა თუ სიმრავლეებმა დიდი პოპულარობა მოიპოვა, რაც განპირობებულია ბუნებაში მიმდინარე პროცესების კომპიუტერით უფრო ზუსტად აღწერის აუცილებლობით. **ბენუა მანდელბროტის ფრაქტალური გეომეტრია** [1] სწორედ ასეთი არარეგულარული სიმრავლეების შესწავლითაა დაკავებული. ფრაქტალური გეომეტრიის ძირითადი ცნებაა **ფრაქტალი**, რომლის წარმოშობაც მნიშვნელოვნადაა დაკავშირებული კომპიუტერული მოდელირების ამოცანებთან. მნიშვნელოვანია ფრაქტალების გამოყენებანი ინფორმაციის შეკუმშვისა და კომპიუტერული დიზაინის სფეროში. დიდი ხანი არაა, რაც ფრაქტალების საშუალებით აღიწერა წყლის გრუნტში ფილტრაციის ტრაექტორიები, ჭექა-ქუხილის დროს ცაზე წარმოქმნილი ნათება, ხის ტოტების ზრდის დინამიკა, ადამიანის შინაგანი ორგანოების, ფსიქიკისა და ორგანიზაციული სისტემების ფრაქტალური სტრუქტურა.

ამჟამად, არ არსებობს მათემატიკის თვალსაზრისით ფრაქტალის ზუსტი განსაზღვრება. **ლევერიეს** [2] აზრით, **ფრაქტალი** არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელშიც ერთი და იგივე გეომეტრიული ფრაგმენტი მეორდება სხვადასხვა მასშტაბში შემცირებისას. ასეთი ფრაქტალები წრფივი (აფინური) კუმშვადი მსგავსების ასახვით მიიყვანება “უძრავ წერტილამდე” რომლის საწყისსაც ჩვენ **კონსტრუქციულ დედა ფრაქტალს** ვუწოდებთ.

არსებობს სხვა ტიპის ფრაქტალიც, რომელიც წარმოიქმნება არაწრფივ დინამიკურ სისტემებში და ამიტომ მას, ზოგჯერ, **დინამიკურ ფრაქტალს** უწოდებენ [3]. მათაც ახასიათებთ “მასშტაბური ინვარიანტობა”, თუმცა, მხოლოდ მიახლოებით. ორივე ტიპის ფრაქტალის ერთდროულად აღსაწერად, ბენუა

მანდელბროტმა მოგვცა ფრაქტალის შემდეგი განსაზღვრება: “ფრაქტალი ისეთი სიმრავლეა, რომლის ტოპოლოგიური განზომილებაც ნაკლებია, ვიდრე მისი ხაუსდორფის (ფრაქტალური) განზომილება”.

ცხადია რომ, ამ განსაზღვრებას დამატებითი განმარტება ჭირდება, რომელსაც მოგვიანებით გავაკეთებთ. პირველი განმარტებით, ცნება - “ფრაქტალი” წარმოდგება ლათინური სიტყვიდან “fractus”, რაც ნიშნავს დამსხვრეულს. მეორე განსაზღვრებაში, ეს ცნება დაკავშირებულია ინგლისურ სიტყვასთან “fractional” რაც ნიშნავს წილადურს.

დინამიკური ფრაქტალი 1918 წელს აღწერა ფრანგმა მათემატიკოსმა გასტონ ჟულიამ [4]. თუმცა, მაშინ კომპიუტერები არ არსებობდა და შესაბამისი გეომეტრიული ილუსტრაციები მხოლოდ მოგვიანებით გამოჩნდა [5].

აღმოჩნდა, რომ ხისმაგვარ რეგულარულ მათემატიკურ ფრაქტალში თუ, შევიტანთ შემთხვევით შემფოთებებს მივიღებთ ნამდვილი ხის მოდელს. ფრაქტალებს იყენებენ რთული, სხვადასხვა ტიპის სიგნალების კლასიფიკაციისათვის. გამოიყენება, აგრეთვე, ეკონომიკაში ვალუტის კურსის რხევების შესწავლისას, ჰიდროაერომექანიკაში ტურბულენტური დინების აღსაწერად, გრუნტში სითხის ფილტრაციის დროს ტრაექტორიების აღსაწერად. ფრაქტალისმაგვარი სიმრავლეებია ღრუბელის საზღვარი, ზღვის სანაპირო, დედამიწის რღვევის წირები, გულსისძარღვთა სისტემა, შინაგანი ორგანოების სტრუქტურა. გამოიყენება ქაოსის თეორიაში და ა.შ.

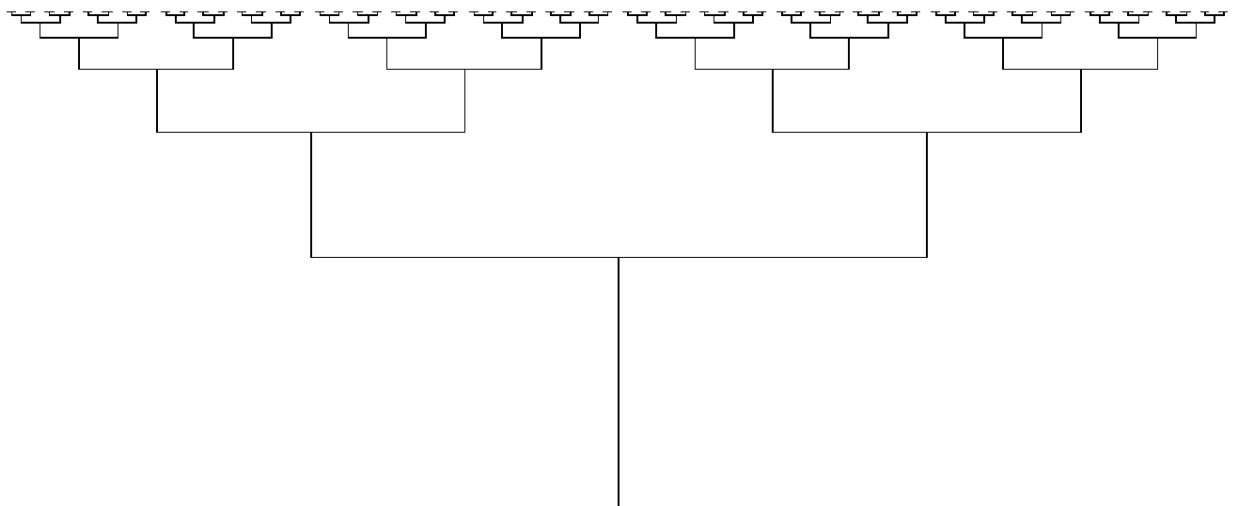
ამჟამად, არ არსებობს მათემატიკის თვალსაზრისით ფრაქტალის ზუსტი განსაზღვრება. ლევერიეს [2] განმარტებით, ფრაქტალი არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელშიც ერთი და იგივე გეომეტრიული ფრაგმენტი მასშტაბურად შემცირებისას მეორდება სხვადასხვა მასშტაბში. ასეთი ფრაქტალები წრფივი (აფინური) კუმშვადი მსგავსების ასახვით მიიყვანება “უძრავ წერტილამდე”.

## 12.1. ფრაქტალი და პოზიციური თვლის სისტემა

როგორც ვიცით, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ თითოეული რიცხვისათვის სხვადასხვა სიმბოლოს შემოღება არაპრაქტიკულია. აქედან გამომდინარე, შემუშავებულ იქნა პოზიციური თვლის სისტემები, რომლებიც სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით გვერდს უვლის ამ სირთულეს, ნატურალური რიცხვების სხვადასხვა პოზიციაში განლაგებით და თითოეული პოზიციისათვის გარკვეული შინაარსის მინიჭებით. ამიტომაც უწოდებენ ამ სისტემებს პოზიციურს. იმის მიხედვით თუ, რიცხვების ჩასაწერად რამდენ სიმბოლოს ვიყენებთ, განასხვავებენ ათობით, ორობით, რვაობით, ოცობით, სამოცობით და ა.შ. რიცხვით სისტემებს.

### 12.1.1. პოზიციური სისტემების ხისმაგვარი სტრუქტურა

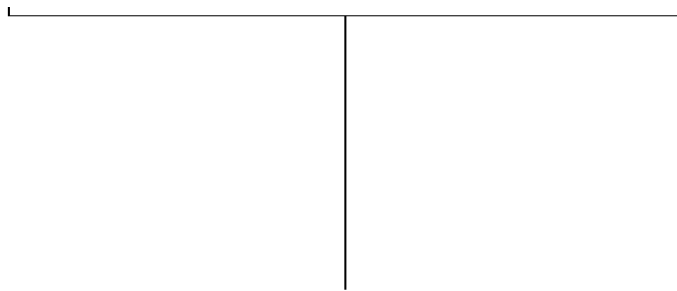
განვიხილოთ ფრაქტალ – “დენდრიტის” ერთ-ერთი სახე: ორობითი ხე. სიტყვა **დენდრიტი** – წარმოდგება ბერძნული “dendron” – სიტყვისაგან, რაც ნიშნავს ხეს.



ნახ. 12.1. ორობითი ხე

ეს სახელი სახეებით შეესაბამება ამ ფრაქტალს, რადგან მისი სტრუქტურა ძლიერ წააგავს ხის სტრუქტურას: ძირითადი ღეროდან გამოდის ორი ტოტი, რომელთაგან თითოეული ხდება მასშტაბში უფრო მცირე ღერო შემდგომი დატოტვისათვის და ა.შ. თუ, ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მაშინ გვექნება ღონეთა უსასრულო რაოდენობა ნახ. 12.1. ამ ნახაზზე,

თვალშისაცემია **თვითმსგავსება** სხვადასხვა მასშტაბში. შემცირების მასშტაბი არჩეულია 0.5. ვერტიკალური ღეროების რაოდენობა ორმაგდება ყოველ შემდეგ დონეზე, ხოლო მათი სიგრძეები ორჯერ კლებულობს. კორიზონტული ხაზები ორჯერ უფრო გრძელია წინა დონის ვერტიკალურ ღეროსთან შედარებით. რაც უფრო ზემოთა არიან ტოტები, მით უფრო მჭიდროა მათი განლაგება. სიმრავლის დაჯგუფება ან დაყოფა ორ-ორ ელემენტად დამახასიათებელია თვლის ორობითი სისტემისათვის (ათობითი სისტემისათვის დამახასიათებელია ათ-ათ ელემენტად დაჯგუფება). ნახ. 12.1. წარმოადგენს ორობითი სისტემის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას **ფრაქტალ-დენდრიტის** ფორმით. ამ **ფრაქტალის წარმომქმნელ საწყის ფრაგმენტ - ელემენტს დედა-ფრაქტალს ვუწოდებთ.** ნახ.1.1-ზე გამოსახული დენდრიტის დედა-ფრაქტალი იქნება ნახ. 12.2.



ნახ. 12.2. ორობითი ხის დედა-ფრაქტალი

ათობითი სისტემა, რომლითაც ჩვენ ვსარგებლობთ შემუშავებულ იქნა **ინდოელების მიერ 14 საუკუნის წინ**, ან უფრო ადრე, **ჩინელების მიერ.** თანამედროვე ათწილადები ევროპაში შემოვიდა **სიმონ სტევისის** საშუალებით **მეთექვსმეტე საუკუნეში.** ათობითი სისტემა ჩვენ გვეჩვენება მოქნილად და პრაქტიკულად. ამ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ 10-ის ხარისხების საშუალებით:

$$2016 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0. \quad (12.1)$$

ათობითი სისტემის გავრცელება დაკავშირებულია ალბათ იმ ფაქტთან, რომ ადამიანს აქვს 10 თითი. ალბათ არსებობენ სხვა პლანეტაზე ხალხი რომელთაც აქვთ 8 თითი და მათთვის უფრო ბუნებრივია რვაობითი სისტემა.



უნდა აღინიშნოს, რომ ათობით სისტემასაც, ისევე, როგორც ნებისმიერ სხვას, აქვს ნაკლიც. თუნდაც ის რომ წილადი  $\frac{1}{3}$  ვერ გამოიხატება სასრული ათწილადით და იძულებული ვართ დაეჯერდეთ მის მიახლოებით მნიშვნელობას.

დაახლოებით 5000 წლის წინ შუმერებმა მესოპოტამიაში შეიმუშავეს სამოცობითი სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებდა მათ მოთხოვნებს აგროკულტურასა და ასტროლოგიაში. ჩვენ დღესაც ვსარგებლობთ ამ სისტემით დროის გამოთვლისას: გვაქვს საათში 60 წუთი, წუთში 60 წამი. ასევე, კუთხეების გაზომვისას  $1^\circ = 60'$ ;  $1' = 60''$ .

მაიას ტომები სარგებლობდნენ ოცობითი სისტემით (ხელებზე და ფეხებზე ერთად გვაქვს 20 თითი). ეს სისტემა დამახასიათებელია ალბათ ქართველებისთვისაც, რადგან ვიყენებთ რიცხვთა დასახელებებს: ორმოცი=ორი ოცი, სამოცი=სამი ოცი . . .

ამჟამად, მთელი მსოფლიო სარგებლობს ათობითი სისტემით, ხოლო კომპიუტერებში, გამოიყენება ორობითი სისტემა.

### 12.1.2. ორობითი სისტემა

ორობით სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენება ორი სიმბოლო: 0 და 1. მაგალითად,

$$1_{10} = 1_2 \quad 2_{10} = 10_2 \quad 3_{10} = 11_2 \quad 4_{10} = 100_2 \quad 5_{10} = 101_2$$

$$6_{10} = 110_2 \quad 7_{10} = 111_2 \quad 8_{10} = 1000_2 \quad 9_{10} = 1001_2$$

ორობითი სისტემიდან რომ გადავიყვანოთ რიცხვი ათობით სისტემაში, საჭიროა წარმოვადგინოთ 2-ის ხარისხებად და დავიანგარიშოთ. მაგალითად,

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \quad (12.2)$$

$$101101_2 = 45_{10} \quad (12.3)$$

შესაბამისად, ათობითი სისტემიდან რომ გადავიყვანოთ რიცხვი ორობითში, უნდა წარმოვადგინოთ ის 2-ის ხარისხებად და მიმდევრობით ამოვწეროთ წარმოდგენის კოეფიციენტები. ეხლა განვიხილოთ ორობითი გამრავლების ტაბულა, ცხრილი 12.1:

ცხრილი 12.1

X	0	1
0	0	0
1	0	1

### 12.1.3. სამობითი სისტემა

სამობით სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენებენ სამ სიმბოლოს: 0; 1; 2. მაგალითად,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^0 = 12_3 = 5_{10}. \quad (12.4)$$

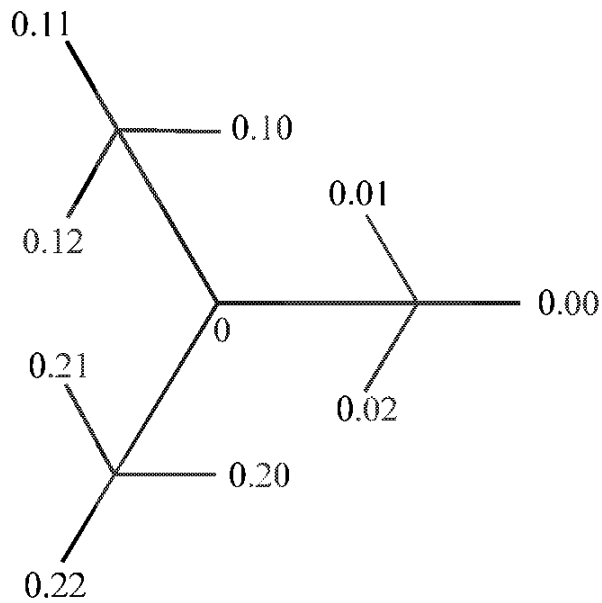
$$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 121_3 = 16_{10}. \quad (12.5)$$

როგორც ვხედავთ, აქ რიცხვი წარმოდგება სამის ხარისხების მიხედვით. სამობით სისტემაში გამრავლების ტაბულა მოიცემა ცხრილი 12.2-ით:

ცხრილი 12.2

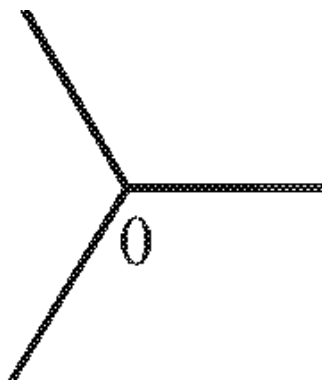
X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

აუაგოთ სამობითი სისტემის შესაბამისი დენდრიტი ნახ. 12.3.



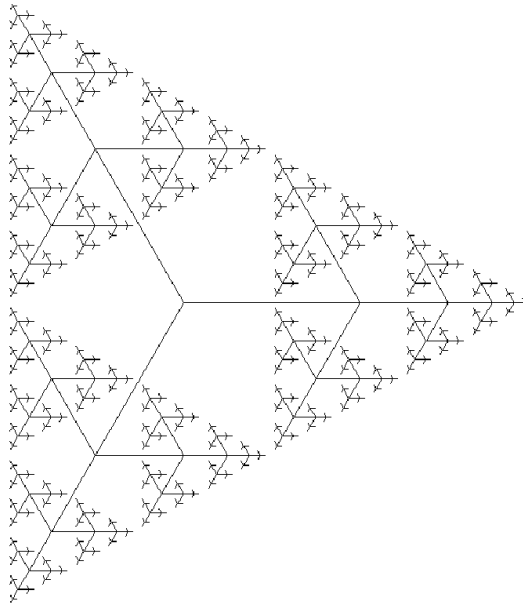
ნახ. 12.3. სამობითი დენდრიტი

ამ ნახაზზე საწყისი წერტილია 0, საიდანაც ერთმანეთისადმი 120°-იანი კუთხით გამოდის სამი ღერო, რომლების ბოლოებიც, შემდგომ ეტაპზე, თვითონ ხდებიან საწყისი წერტილი და სამი ღეროს მშობელი და ა.შ. მიმართულებას მარჯვნივ აღვნიშნავთ “0”-ით, მიმართულებას მარცხნივ-ზემოთ – “1” და მიმართულებას მარცხნივ-ქვევით – “2”-ით. სამობითი დენდრიტის დედა-ფრაქტალს აქვს სახე ნახ. 12.4.



ნახ. 12.4. სამობითი დენდრიტის დედა-ფრაქტალი

ამ ალგორითმიდან გამომდინარე, შეგვიძლია სამობითი დენდრიტი ავაგოთ კომპიუტერზეც ნახ. 12.5.

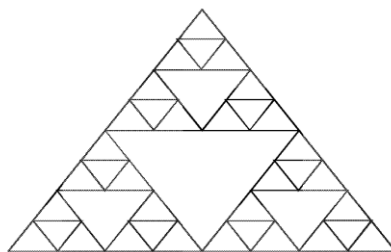


ნახ. 12.5. სამობითი დენდრიტი

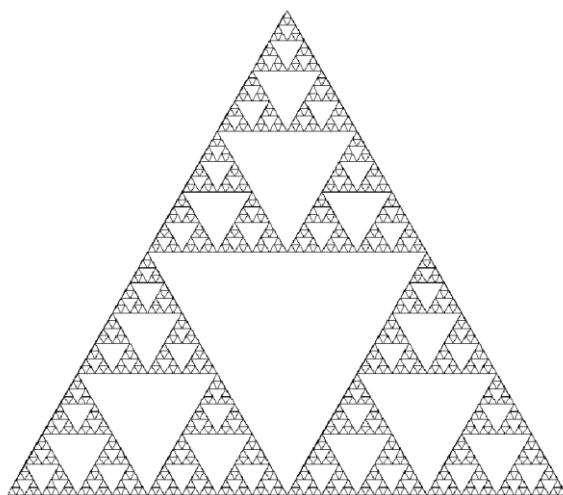
#### 12.14. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა

პოლონელმა მათემატიკოსმა ვაცლავ სერპინსკიმ 1915 წელს შექმნა ლამაზი მათემატიკური ობიექტი, რომელიც ძალზე წააგავს სამობით დენდრიტს. ამ ობიექტს სერპინსკის ფრაქტალურ ხალიჩას უწოდებენ.

მის ასაგებად, ვიწყებთ ტოლგვერდა სამკუთხედიდან, სადაც ამოვჭრით გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებულ სამკუთხედს. შემდეგ დარჩენილ სამ სამკუთხედს ვექცევით ანალოგიურად და ამ პროცესს ვაგრძელებთ უსასრულოდ ნახ. 12.6, ნახ. 12.7.

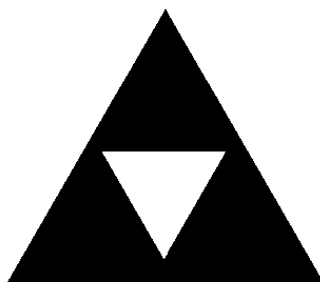


ნახ. 12.6. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის აგების დაწყებითი ეტაპები



ნახ. 12.7. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა

სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის დედა-ფრაქტალია ტოლგვერდა სამკუთხედი და მისგან მამა-ფრაქტალის მოქმედებით (შუა სამკუთხედის ამოჭრა) მიიღება სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის წარმომქმნელი ელემენტი ნახ. 12.8.



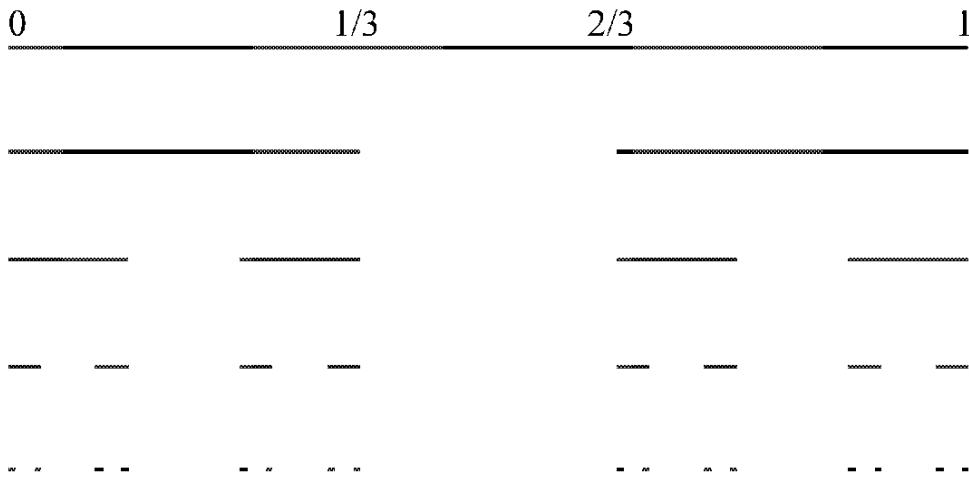
ნახ. 12.8. სერპინსკის ხალიჩის წარმომქმნელი ელემენტი

### 12.15. კანტორის ფრაქტალი

სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთმა შემქმნელმა - გეორგ კანტორმა შეისწავლა საინტერესო სიმრავლე, რომელსაც კანტორის სიმრავლეს უწოდებდნენ. ჩვენ კი კანტორის ფრაქტალს ვუწოდებთ.

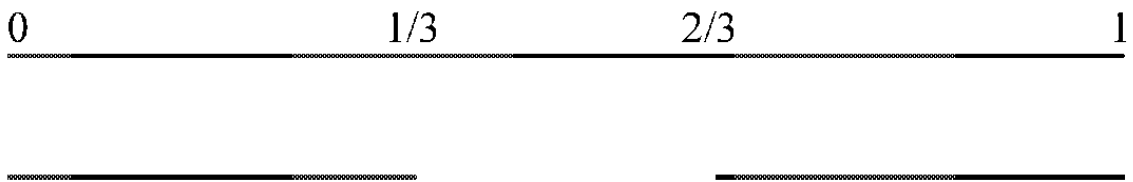
კანტორის ფრაქტალის ასაგებად განიხილავენ ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთს. საწყის ეტაპზე: დაყოფენ სამ ტოლ ნაწილად და ამოჭრიან შუა  $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$  მონაკვეთს. შემდეგ, დარჩენილ ორ მონაკვეთსაც ასევე მოექცევიან და ამოაჭრიან შუა მესამედს. ეს

პროცესი გრძელდება უსასრულოდ. ზღვარში მიღებულ წერტილთა სიმრავლეს კანტორის ფრაქტალს უწოდებენ ნახ.12.9.



ნახ. 12.9. კანტორის ფრაქტალი

კანტორის ფრაქტალის დედა-ფრაქტალს აქვს სახე ნახ. 12.10:



ნახ. 12.10. კანტორის ფრაქტალის წარმომქმნელი ელემენტი რომელიც მიიღება კანტორის დედა-ფრაქტალიდან (მონაკვეთი  $[0;1]$ ) შუა მონაკვეთის ამოჭრით (მამა-ფრაქტალი)

ცხადია რომ სამი ბიჯის შემდეგ გვექნება  $2^3 = 8$  მონაკვეთი, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა  $3^{-3} = \frac{1}{27}$ . ცხადია, რომ  $n$  ბიჯის შემდეგ მივიღებთ  $2^n$  მონაკვეთს, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა  $3^{-n}$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ დარჩენილი მონაკვეთების საერთო სიგრძეა  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ . გასაგებია რომ, როცა  $n \rightarrow \infty$  დარჩენილი მონაკვეთების საერთო სიგრძე ნულისკენ მიისწრაფის. ეს იმას ნიშნავს რომ, კანტორის სიმრავლის ლებეგის ზომა ნულის ტოლია და მაშასადამე მისი ტოპოლოგიური განზომილებაც ნულოვანია. არსებობს განზომილების განსაზღვრების სხვა წესიც, რომლის მიხედვითაც კანტორის ფრაქტალის განზომილებაა 0.6309. ეს განზომილება წილადურია

(არაა მთელი რიცხვი). აქედან წარმოდგება ფრაქტალური განზომილების ცნებაც.

## 12.2. ფრაქტალური სიმრავლეების განზომილების ექსპერიმენტული განსაზღვრა

ფრაქტალის განზომილება განისაზღვრება ექსპერიმენტიდან გამომდინარე, რომელიც ჩატარდა რიჩარდსონის მიერ, დიდი ბრიტანეთის სანაპირო ზოლის სიგრძის განსაზღვრისთვის.

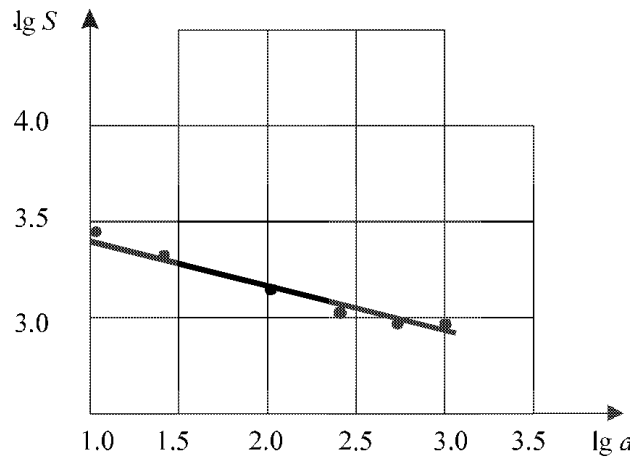
### 12.2.1. რიჩარდსონის ექსპერიმენტი

ფრაქტალებისადმი დიდი ყურადღება განპირობებულია ბენუა მანდელბროტის ღრმა ნაშრომებით [1],[6],[7]. მანდელბროტის ეს წარმატება მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული მისი წინამორბედის, ცნობილი მეტეოროლოგის რიჩარდსონის ნაშრომებით [8].

რიჩარდსონის ნაშრომში, რომელიც გამოქვეყნდა მისი სიკვდილის შემდეგ 1961 წელს, მანდელბროტმა აღმოაჩინა ბრიტანეთის სანაპირო ზოლის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა. რიჩარდსონმა შენიშნა რომ, გაზომვის სიზუსტე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული რუკის მასშტაბზე. თუ რუკაზე ავირჩევთ რაიმე სიგრძის ერთეულს და გავზომავთ ფარგლის მეშვეობით რამდენჯერ ეტევა ეს მონაკვეთი სანაპირო ზოლის კონტურში, მივიღებთ რომ  $S = N \cdot a$ , სადაც  $N$ -კონტურის მთლიანად მოსავლელად აუცილებელი ბიჯების რაოდენობაა, როცა სიგრძის ერთეულია  $a$ . სიგრძის ერთეულის შემცირებისას, ცხადია რომ სანაპირო ზოლის სიგრძის მნიშვნელობა იზრდება რადგან სულ უფრო მეტი მიხვეულ-მოხვეულების სიგრძეების დამატება ხდება. ამ გაზომვების შედეგად, რიჩარდსონმა შენიშნა, რომ სანაპირო ზოლის სიგრძის ლოგარითმებსა და სიგრძის მასშტაბის ლოგარითმების მნიშვნელობებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მან ააგო წრფივი რეგრესიის წრფე და დაადგინა ამ წრფის დახრილობა ნახ. 12.11, რამაც საშუალება მისცა განესაზღვრა სანაპირო ზოლის კონტურის ფრაქტალური განზომილება. სურ. 12.1-ზე მოცემულია სანაპირო ზოლის რეალური სახე.



სურ. 12.1. კუნძულის სანაპირო ზოლი



ნახ. 12.11. რიხარდსონის ექსპერიმენტების შედეგი რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე:

$$\ln S = -0.22 \cdot \ln a + \ln S_1, \quad (12.6)$$



სადაც  $S_1$  არის სანაპირო ზოლის სიგრძე როცა სიგრძის ერთეულად მიღებული იყო  $a = 1$ კმ. ფორმულა (12.6)-ის ამოხსნა გვაძლევს გამოსახულებას:

$$S = S_1 \cdot a^{-0.22}. \quad (12.7)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით:

$$S = S_1 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{0.22}. \quad (12.8)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს რომ, თუ სიგრძის ერთეულს  $a$ -ს შევამცირებთ 32-ჯერ, მაშინ სანაპიროს სიგრძე გაიზრდება დაახლოებით 2-ჯერ. როცა  $a \rightarrow 0$  მაშინ  $S \rightarrow \infty$ , მაგრამ რეალურად, სიგრძე უსასრულო არ იქნება რადგან სიგრძის ერთეულის შემცირება გარკვეული ბიჯის შემდეგ აღარ გამოიწვევს სანაპირო ზოლის სიგრძის შეცვლას (აღარ გვექნება დამატებითი მიხვეულ-მოხვეულები საზღვრის კონტურში).

სასარგებლო იქნებოდა კონტურის მრუდწირულობისათვის გვექნოდა რაღაც რიცხვითი მახასიათებელი. მანდელბროტმა ფორმულა (12.8)-ში ხარისხის მაჩვენებელს დაუმატა ერთი და მიიღო რიცხვი  $D$  რომელსაც მან სანაპიროს კონტურის ფრაქტალური განზომილება უწოდა (ამ შემთხვევაში  $D = 1.22$ ).

## 12.2.2. ფრაქტალური განზომილების ცნება

მათემატიკაში არსებობს სიმრავლის განზომილების განსაზღვრების სხვადასხვა წესი, მათგან ყველაზე პოპულარულია ა.პუანკარეს ტოპოლოგიური განზომილების განსაზღვრება, რომლის მიხედვითაც, ცარიელი სიმრავლის განზომილებაა “-1”, შემდგომი სიმრავლეებისათვის განზომილება განიმარტება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით: თუ ვიცით, რა არის “ $n-1$ ” განზომილება, მაშინ სიმრავლის განზომილებაა “ $n$ ” ნიშნავს, რომ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ რაგინდ მცირე “ $n-1$ ”-განზომილებიანი სიმრავლეების საშუალებით და არ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ “ $n-2$ ” განზომილებიანი სიმრავლეებით. ამ განმარტებიდან გამომდინარე, წერტილს, წრფეს, ზედაპირს

შესაბამისად, აქვთ 0; 1 და 2 ტოპოლოგიური განზომილება. მოგვიანებით, განზომილების უფრო ზუსტი განმარტება მოგვცა ბრაუნერმა, ხოლო განზომილების სხვა განმარტებები შემოიღეს ხაუსდორფმა, ბეზიკოვიჩმა და კოლმოგოროვმა, რომელთა განსაზღვრებები უკვე მოიცავს წილადური განზომილების სივრცეებსაც.

დავუბრუნდებით რიჩარდსონის ექსპერიმენტებს. თუ, რუკაზე ავირჩევთ რაიმე სიგრძის ერთეულს და გავზომავთ ფარგლის მეშვეობით, რამდენჯერ ეტევა ეს მონაკვეთი სანაპირო ზოლის კონტურში, მივიღებთ რომ  $S = N \cdot a$ , სადაც  $N$ -კონტურის მთლიანად მოსაველეად აუცილებელი ბიჯების (ტეხილის მონაკვეთების) რაოდენობაა, როცა სიგრძის ერთეულია  $a$ . მანდელბროტის განსაზღვრების თანახმად, ტეხილის “ფრაქტალური განზომილება  $D$ ” ტოლია:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}}. \quad (12.9)$$

ცხადია, რომ  $D$  არის სანაპირო ზოლის წირის “მიხვევ- მოხვევადობის” რიცხვითი მახასიათებელი. თუ  $a$  ბიჯის შემდგომი შემცირებისას, (12.9) ფორმულაში შემავალი წილადის მნიშვნელობა ღარ იცვლება, ეს ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}}, \quad (12.10)$$

ანუ

$$N = \left(\frac{1}{a}\right)^D. \quad (12.11)$$

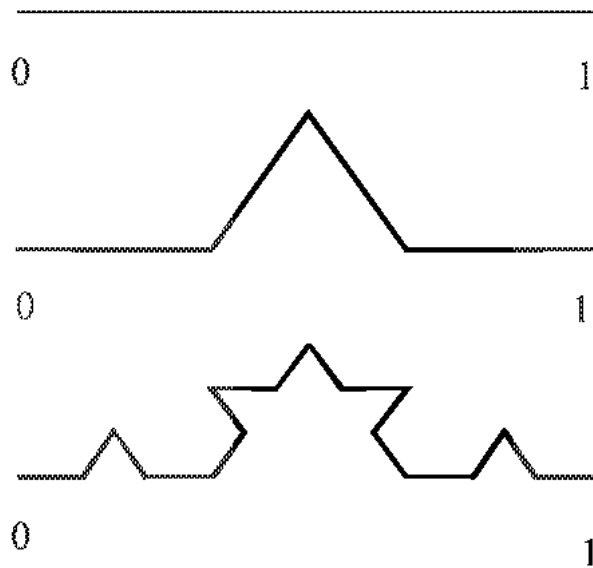
თუ გავიხსენებთ, რომ  $S = N \cdot a$ , მაშინ გვექნება

$$S = \left(\frac{1}{a}\right)^{D-1}. \quad (12.12)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს თუ, როგორ იცვლება სანაპირო ზოლის სიგრძის გაზომილი  $S$  მნიშვნელობა, გაზომვის  $a$  მასშტაბის მიხედვით.

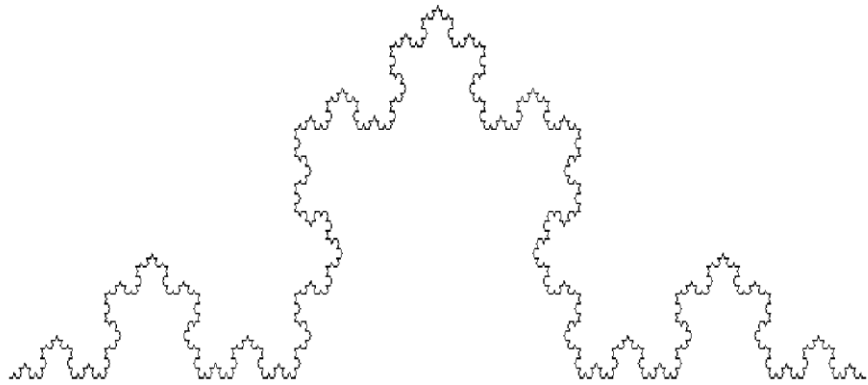
### 12.3. კოხის “დაფრაქტალეული” წირი

კოხის დაფრაქტალეზებული წირის ასაგებად, ვიქცევით იმის ანალოგიურად, როგორც კანტორის ფრაქტალის აგების დროს. განსხვავება ისაა, რომ საწყისი ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთის ამოჭრილი შუა ნაწილი კი არ უქმდება, არამედ, შეივსება ტოლგვერდა სამკუთხედამდე ქვედა გვერდის გარეშე (მამა-ფრაქტალი) ნახ. 12.12 და ეს პროცესი გრძელდება მიღებული ტეხილის ყველა მონაკვეთისათვის.



ნახ. 12.12. კოხის დაფრაქტალეზებული წირის აგების ალგორითმის სქემა

კოხის ალგორითმით, მონაკვეთის დედა-ფრაქტალიდან  $[0;1]$  მონაკვეთიდან) მამა-ფრაქტალის (მონაკვეთის ამოჭრილი შუა ნაწილის მაგივრად ჩასმული, ამოზნექილი ორი მონაკვეთი) ზემოქმედებით მიღებულ დაფრაქტალეზებულ წირს აქვს სახე:



ნახ. 12.13. კოხის დაფრაქტალებული წირი

ვიპოვოთ კოხის დაფრაქტალებული წირის ფრაქტალური განზომილება (12.5) ფორმულის საშუალებით. რადგან საწყისი მონაკვეთის სიგრძეა 1, პირველი ბიჯის შემდეგ მიღებული თითოეული ფრაგმენტის (მონაკვეთის) სიგრძე იქნება  $\frac{1}{3}$  და მაშასადამე ოთხივე მონაკვეთი ერთად მოგვცემს  $S = \frac{4}{3}$  სიგრძეს. შემდეგი ბიჯი მოგვცემს 16 მონაკვეთს, რომელთაგან თითოეულის სიგრძე იქნება  $\frac{1}{9}$  და მაშასადამე, მიღებული წირის სიგრძეა  $S = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$  და ა.შ. აქედან გამომდინარე, (12.12) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{\ln 4^2}{\ln 3^2} = \dots \quad (12.13)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ კოხის დაფრაქტალებული წირის განზომილებაა  $D \approx 1.26$ .

ადვილი შესამჩნევია რომ, კოხის დაფრაქტალებულ წირს ახასიათებს თვითმსგავსება: მისი ყოველი ნაწილი რომელიც მიიღება შემდეგ ბიჯზე, არის მასშტაბში შემცირებული წინა ბიჯის წირის კოპიო.

ფრაქტალური წირით შეგვიძლია ავაგოთ რეალური ქვიშის ქარიშხლის საზღვრის მოდელიც სურ. 12.2

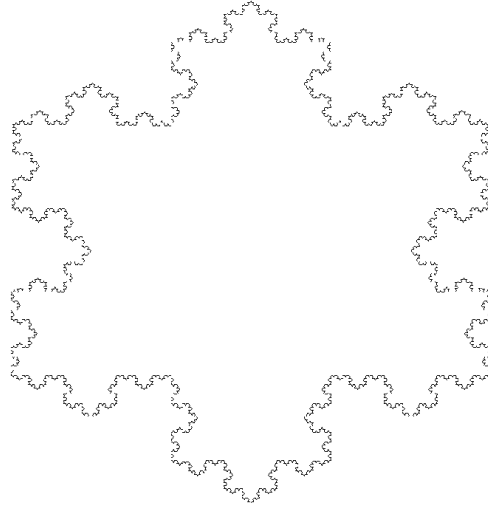


სურ. 12.2. ერაყის ერთ-ერთ ქალაქს უახლოვდება ქვიშის ქარიშხალი

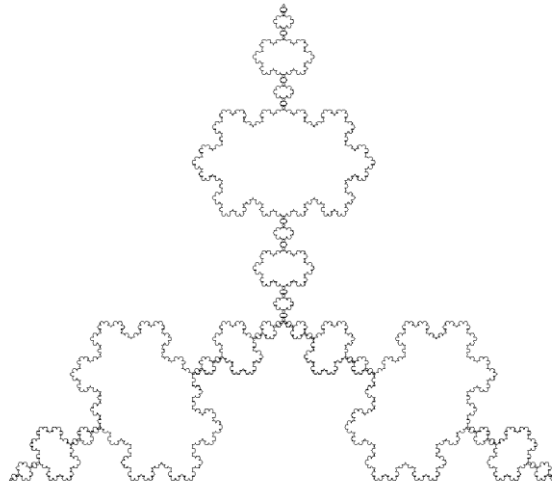
### 12.3.1. კოხის დაფრაქტალეზული კუნძული

თუ, კოხის დედა-ფრაქტალად ავიღებთ რაიმე წესიერ მრავალ-კუთხედს (მაგალითად, წესიერ სამკუთხედს) და მის შემადგენელ ყოველ მონაკვეთზე ვიმოქმედებთ კოხის გარეთ მიმართული მამა-ფრაქტალით, მივიღებთ **კოხის დაფრაქტალეზულ კუნძულს**

ნახ. 2.4, ხოლო, თუ ვიმოქმედებთ შიგნით მიმართული მამა-ფრაქტალით, მივიღებთ **კოხის დაფრაქტალეზულ კუნძულს** რაც გამოსატულია ნახ. 12.14:



ნახ. 12.14. კოხის დაფრაქტალეზებული კუნძული გარეთ მიმართული მამა-ფრაქტალით



ნახ. 12.15. კოხის დაფრაქტალეზებული კუნძული შიგნით მიმართული მამა-ფრაქტალით

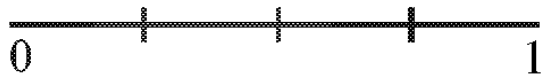
რეალურად, ბუნებაში გვხვდება ცოცხალი სისტემები, რომლებსაც წააგავს კოხის კუნძული სურ. 12.3.



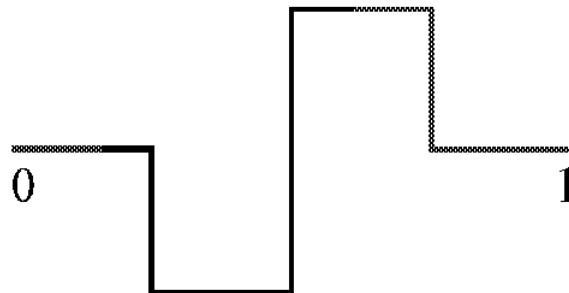
სურ. 12.3. სვეული კომბოსტო

### 12.3.2. მინკოვსკის ფრაქტალი

მინკოვსკის ფრაქტალისათვის გვაქვს დედა-ფრაქტალი ნახ.2.6 და მამა-ფრაქტალი ნახ. 2.7.

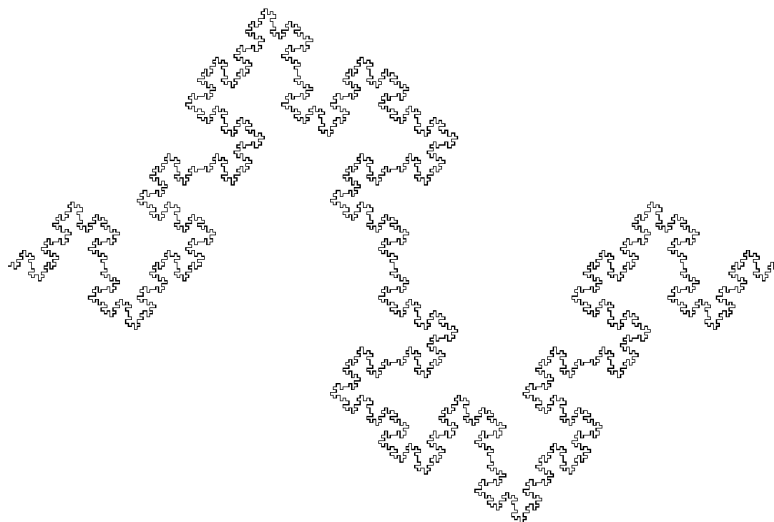


ნახ. 12.16. მინკოვსკის დედა-ფრაქტალი



ნახ. 12.17. მინკოვსკის მამა-ფრაქტალი

თუ, მამა-ფრაქტალით ვიმოქმედებთ მინკოვსკის დედა-ფრაქტალზე და შემდეგ, თითოეულ მიღებულ მონაკვეთს განვიხილავთ დედა-ფრაქტალად, მათზეც ვიმოქმედებთ მინკოვსკის მამა-ფრაქტალით და ა.შ. ოთხი ბიჯის შემდეგ მივიღებთ მინკოვსკის ფრაქტალს ფორმით ნახ. 12.18.



ნახ. 12.18. მინკოვსკის ფრაქტალი

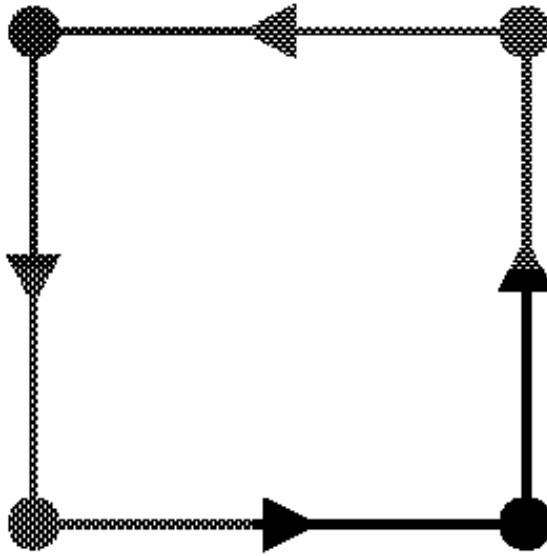
მინკოვსკის ფრაქტალის განზომილებას გამოვითვლით (12.12) ფორმულით:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}} = \frac{\ln N^2}{-\ln a^2} = \frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{0.25}} = 1.5. \quad (12.14)$$

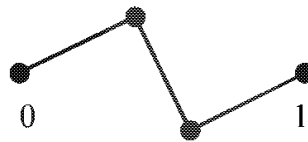
### 12.3.3. ფრაქტალური კუნძული

ვთქვათ, დედა-ფრაქტალია კვადრატი წვეროვებით წერტილებში  $(\pm 1; \pm 1)$ , ნახ. 12.19, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ. 12.20,



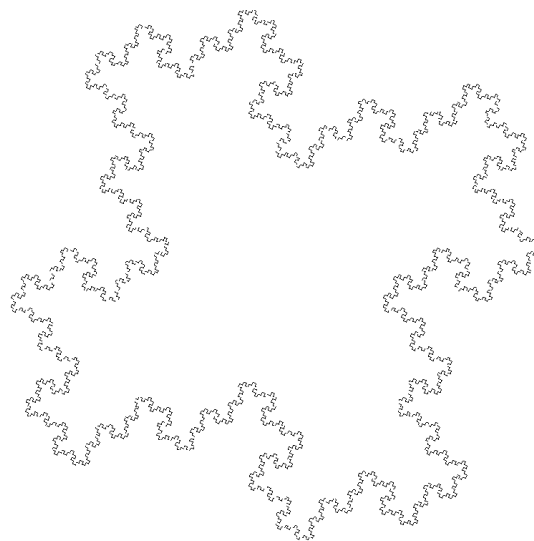


ნახ. 12.19. კვადრატი წვეროებით  $(\pm 1; \pm 1)$  წერტილებში



ნახ. 12.20. მამა-ფრაქტალი შუალედური წერტილებით  $(0.4; 0.2)$   
და  $(0.6; -0.2)$

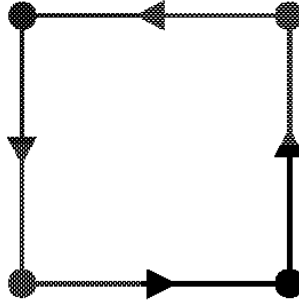
მაშინ მივიღებთ ფრაქტალურ კუნძულს ნახ. 12.21



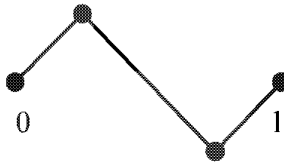
ნახ. 12.21. ფრაქტალური კუნძული

### 12.3.4. მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული

დედა-ფრაქტალად ავიღოთ ისევ კვადრატი  $\mathbb{V}$  ვეროებით  $(\pm 1; \pm 1)$ , ნახ. 12.22, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ. 12.23,

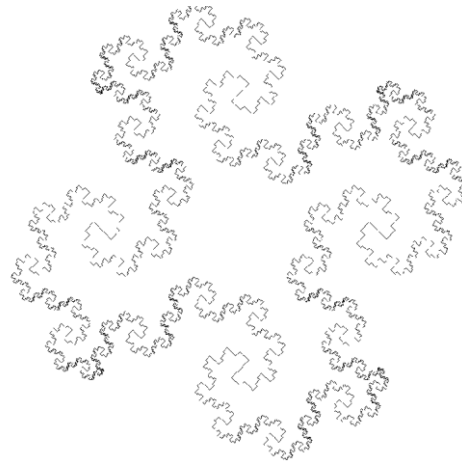


ნახ. 12.22. კვადრატი  $\mathbb{V}$  ვეროებით  $(\pm 1; \pm 1)$  ვერტილებში



ნახ. 12.23. მინკოვსკის მამა-ფრაქტალი  $\mathbb{U}$  უაღედური ვერტილებით  $(0.25; 0.25)$  და  $(0.75; -0.25)$

შესაბამისად, აგებულ მინკოვსკის ფრაქტალურ კუნძულს აქვს ფორმა ნახ. 12.24.



ნახ. 12.24. მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული

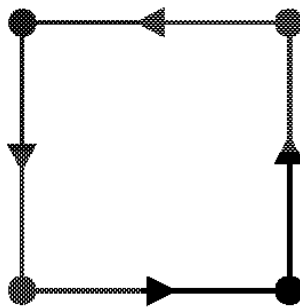
მინკოვსკის ფრაქტალით შეგვიძლია მიუახლოვდეთ მცენარის, კრასულა ბუდას ტაძრის ფორმას სურ. 12.4



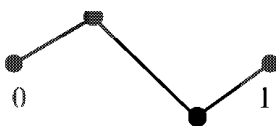
სურ. 12.4. კრასულა ბუდას ტაძარი

### 12.3.5. ფიორდების ფრაქტალური კუნძული

თუ, დედა-ფრაქტალი კვლავ კვადრატია ნახ. 12.25 წვეროებით წერტილებში  $(\pm 1; \pm 1)$ , ნახ. 12.25, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენ-ტი ნახ. 12.26,

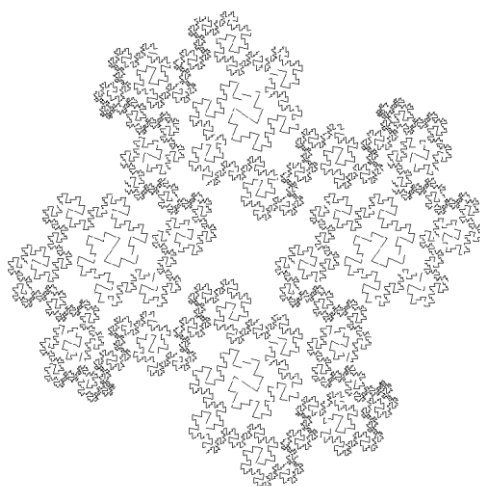


ნახ. 12.25. კვადრატის წვეროებით  $(\pm 1; \pm 1)$  წერტილებში



ნახ. 12.26. ფიორდის მამა-ფრაქტალი შუალედური წვეროებით  
(0.3; 0.3) და (0.7; -0.3)

მაშინ, შესაბამის ფიორდის ფრაქტალურ კუნძულს ექნება  
სახე ნახ. 12.27



ნახ. 12.27. ფიორდის ფრაქტალური კუნძული

ბუნებაში ხშირად გვხვდება სხვადასხვა ფრაქტალური  
ფორმის ობიექტი სურ. 12.5, სურ. 12.6.



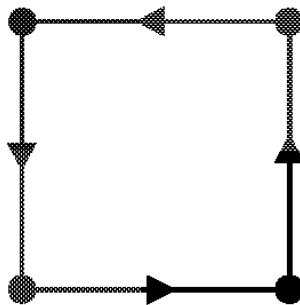
სურ. 12.5. ფრთის ფორმის ღრუბლის ფრაქტალი წარმოიქმნება  
7-10კმ სიმაღლეზე, აღმავალი ჰაერის მასების ატმოსფერული  
ფრონტის გაციებისას



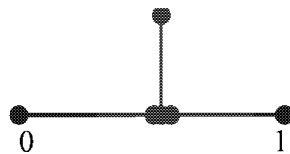
სურ. 12.6. ყინულის ბუნებრივი ფრაქტალი

### 12.3.6. ყინულოვანი ფრაქტალური კვადრატი

განვიხილოთ დედა-ფრაქტალად კვადრატი  $\mathbb{V}$  ვეროებით  $(\pm 1; \pm 1)$  წერტილებში ნახ. 2.18, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ. 12.29 სამი შუალედური წერტილით:  $(0.5; 0)$ ,  $(0.5; 0.33)$  და  $(0.5; 0)$ .



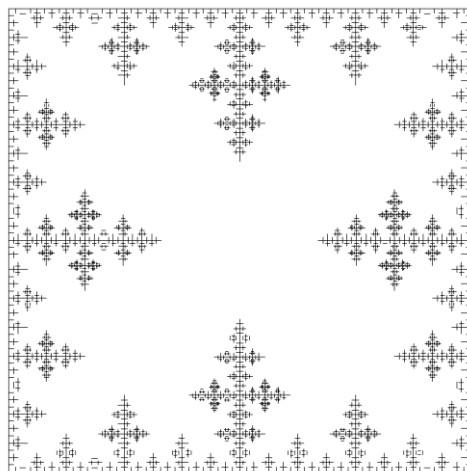
ნახ. 12.28. დედა ფრაქტალი



ნახ. 12.29. მამა-ფრაქტალი შუალედური  $\mathbb{V}$  ვეროებით წერტილებში  $(0.5; 0)$ ,  $(0.5; 0.33)$  და  $(0.5; 0)$



შესაბამის ყინულოვან ფრაქტალურ კვადრატს ექნება შემდეგი სახე ნახ. 12.30:



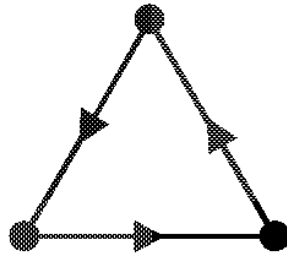
ნახ. 12.30. ყინულოვანი ფრაქტალური კვადრატი  
შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალია თოვლის ფიფქი სურ. 12.7



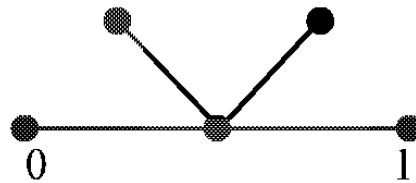
სურ. 12.7. თოვლის ფიფქის ყინულოვანი ფრაქტალი

### 12.3.7. ყინულოვანი ფრაქტალური სამკუთხედი

დედა-ფრაქტალად განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი წვეროებით წერტილებში  $(0;0)$ ,  $(0.5;0.85)$  და  $(0;1)$  ნახ. 12.31, ხოლო მამა-ფრაქტალად განვიხილავთ ფრაგმენტს ნახ. 22.32 შუალედური წვეროებით წერტილებში  $(0.5;0)$ ,  $(0.375;0.2165)$  და  $(0.625;0.2165)$ .

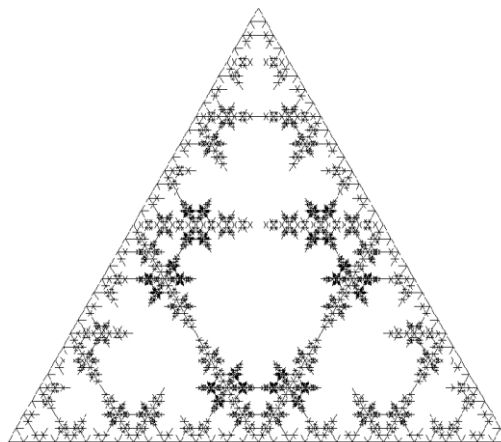


ნახ. 12.31. დედა-ფრაქტალი



ნახ. 12.32. მამა-ფრაქტალი

მაშინ, შესაბამის ყინულოვან ფრაქტალურ სამკუთხედს ექნება სახე ნახ. 12.33



ნახ. 12.33. ყინულოვანი ფრაქტალური სამკუთხედი



სურ. 12.8. წვიმის ღრუბლის წყლის ორთქლისაგან შედგენილი ფრაქტალი, წარმოიქმნება 0.5-2კმ სიმაღლეზე



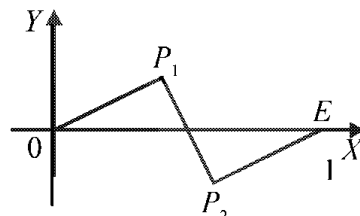
სურ. 12.9. ყინულის ნაწილაკებისაგან შედგენილი ღრუბლის ფრაქტალი 8კმ სიმაღლეზე წარმოიქმნება



### 12.3.8. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალის აგების ალგორითმი

ზემოთ განხილული, გემეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების აგების მაგალითებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ავაგოთ ზოგადი ალგორითმი.

ვთქვათ, დედა-ფრაქტალი შედგება  $n$  რაოდენობის მონაკვეთისგან, ხოლო, მამა-ფრაქტალის ფრაგმენტი მოიცავს  $m$  მონაკვეთს. დედა-ფრაქტალისა და მამა-ფრაქტალის მონაკვეთების ბოლოების კოორდინატები, ითვლება რომ წინასწარაა განსაზღვრული. ვთქვათ, მოცემულია მამა-ფრაქტალი ნახ. 12.34

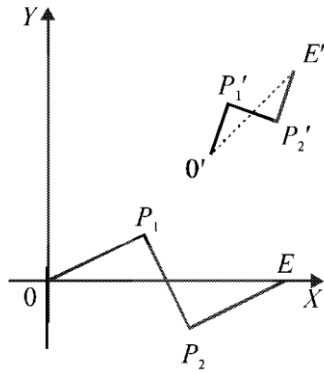


ნახ. 12.34. მამა-ფრაქტალი

$O$  წერტილი კოორდინატთა სათავეა კოორდინატებით  $(0; 0)$ , ხოლო  $E$  წერტილების კოორდინატებია  $(1; 0)$ . შუალედური წვეროების კოორდინატებია  $P_1(0.4; 0.2)$ ,  $P_2(0.6; -0.2)$ . მაშინ  $OP_1 = P_1P_2 = P_2E = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

დედა-ფრაქტალად განვიხილოთ კვადრატი წვეროებით  $(1; 1)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(-1; -1)$ ,  $(1; -1)$ . თუ ბიჯების რაოდენობაა  $k$ , მაშინ  $OE$  მამა-ფრაქტალის მოქმედებით დედა-ფრაქტალის ყოველ მონაკვეთზე, მივიღებთ  $m^k - 1$  წვეროს მქონე ტეხილს. ამ ტეხილის წვეროების კოორდინატები გამოითვლება მსგავსების გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = (x_2 - x_1) \cdot x - (y_2 - y_1) \cdot y + x_1 \\ y' = (y_2 - y_1) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + y_1 \end{cases} \quad (12.15)$$

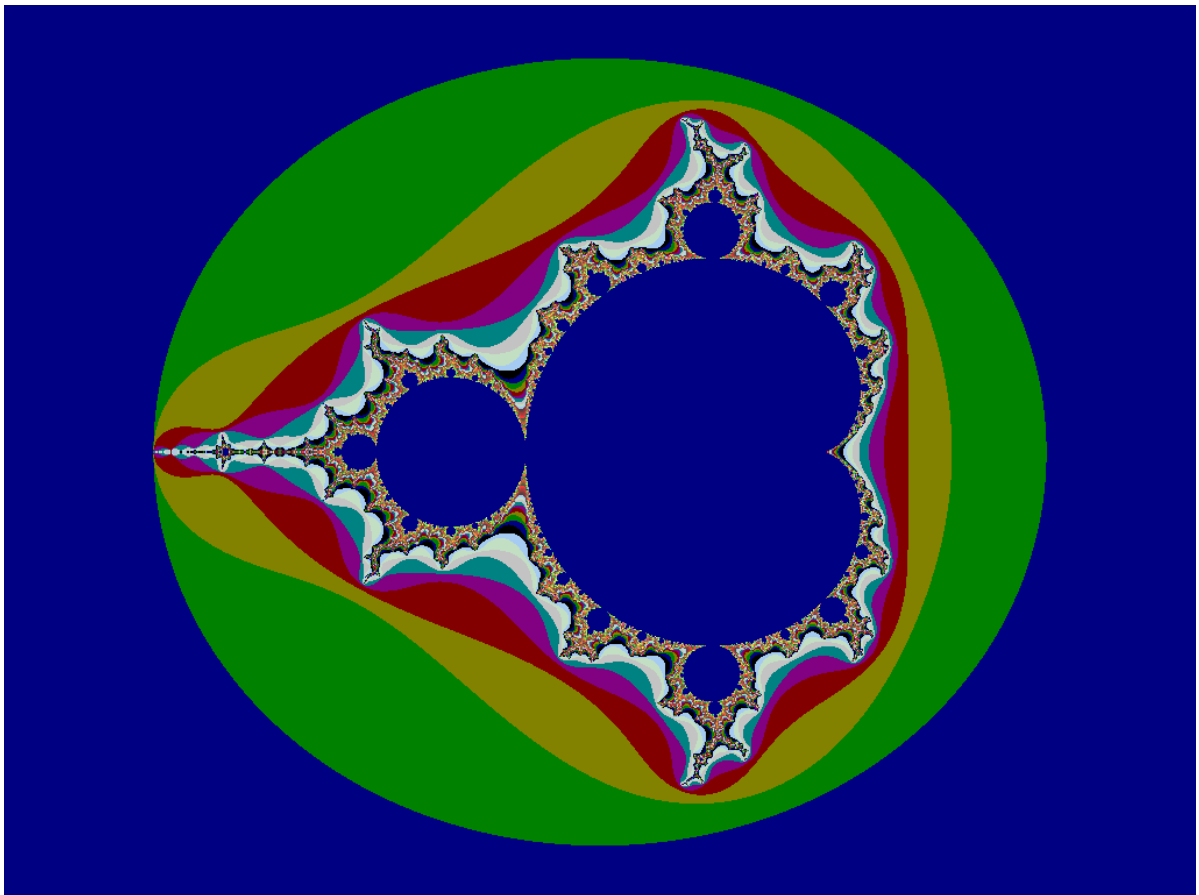


ნახ. 12.35. მსგავსების გარდაქმნა

ამ გარდაქმნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია ნახ. 12.35. შესაბამისად გვაქვს ასახვა:  $O(0; 0) \rightarrow O'(x_1; y_1)$ ,

$$E(1; 0) \rightarrow E'(x_2; y_2), P(x; y) \rightarrow P'(x'; y').$$

თვითმსგავსება კარგად ჩანს ანალიზურად აგებულ [5] მანდელბროტის ფრაქტალში ნახ. 12.36.



ნახ. 12.36. მანდელბროტის ფრაქტალი

### **XIII თავი. სპირალები, ხეები და ვარსკვლავები**

პითაგორამ დაამტკიცა თავისი სახელგანთქმული თეორემა, რომლისთვისაც მან, მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე ააგო კვადრატები. ამჟამად, ამ ფიგურიდან უკვე წარმოიქმნა “ხე”. არქიმედის ყურადღება მიიპყრო სპირალურმა ფორმამ და მან ტრაქტატიც კი მიუძღვნა სპირალს. ერთ-ერთი ტიპის სპირალს არქიმედის სახელი ქვია. სპირალი ცოცხალი სისტემის ასაგები აგურის როლს თამაშობს. ცნობილია რომ, ლოკოკინა თავის სახლს აგებს სპირალური ფრაგმენტების საშუალებით. უჯრედის ბირთვი იგება ორმაგი გადაჯაჭვული სპირალური ფრაგმენტით – დიზოქსირიბონუკლეინის მქავის სტრუქტურით, რომელიც შეიცავს ფორმირებადი ცოცხალი სისტემის გენეტიკურ კოდს. ასევე, ხშირად, სპირალური ფორმა აქვს განვითარების გარკვეულ ეტაპზე მყოფ გალაქტიკასაც.

#### **13.1. სპირალები**

გამოყოფენ სამი ტიპის სპირალს:

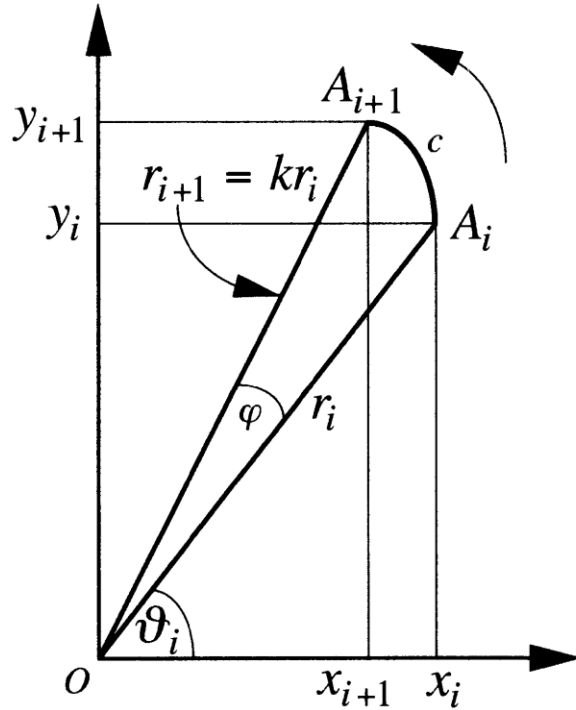
ა) დახვეული ძაფის გახსნისას ძაფის, გაჭიმული ბოლოს მიერ სივრცეში აღწერილი სპირალი;

ბ) არქიმედის სპირალი;

გ) ლოგარითმული ზრდის სპირალი.

განვიხილოთ თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე:

ა) ტიპის სპირალის აღსაწერად მივმართოთ ნახ. 13.1-ს.



ნახ. 13.1. ძაფის ნახვევი გაშლისას მისი გაჭიმული ბოლო ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას წაგრძელებით

ადვილი მისახვედრია რომ, თუ ძაფის ბოლოს საწყისი მდგომარეობაა  $A_i$ , ხოლო მომდევნო მდგომარეობა -  $A_{i+1}$ , მაშინ რადიუს ვექტორი  $OA_i$  შემობრუნდება  $OA_{i+1}$  მდგომარეობაში  $\varphi$  კუთხით და რადიუს ვექტორის საწყისი სიგრძე გარკვეულად წაგრძელდება  $k$ -ჯერ ანუ  $r_{i+1} = k \cdot r_i$ . აქედან გამომდინარე, რადგან  $OA_i$  რადიუს-ვექტორის აბსცისთა ღერძთან დახრის კუთხეა  $\vartheta_i$ , გვექნება ტოლობები:

$$x_{i+1} = k \cdot r_i \cdot \cos(\vartheta_i + \varphi) = k \cdot r_i \cdot (\cos \vartheta_i \cdot \cos \varphi - \sin \vartheta_i \cdot \sin \varphi), \quad (13.1)$$

$$y_{i+1} = k \cdot r_i \cdot \sin(\vartheta_i + \varphi) = k \cdot r_i \cdot (\sin \vartheta_i \cdot \cos \varphi + \cos \vartheta_i \cdot \sin \varphi), \quad (13.2)$$

მაგრამ

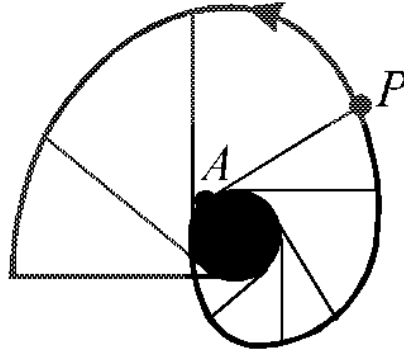
$$x_i = r_i \cdot \cos \vartheta_i \quad \text{და} \quad y_i = r_i \cdot \sin \vartheta_i. \quad (13.3)$$

აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$x_{i+1} = k \cdot (x_i \cdot \cos \varphi - y_i \cdot \sin \varphi), \quad (13.4)$$

$$y_{i+1} = k \cdot (y_i \cdot \cos \varphi + x_i \cdot \sin \varphi). \quad (13.5)$$

ამრიგად, მივიღეთ სპირალი, რომელიც ყოველ ბიჯზე, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნდება  $\varphi$  კუთხით და შესაბამისად, დაშორდება კოორდინატთა სათავეს  $k$ -ჯერ ნახ. 13.2.



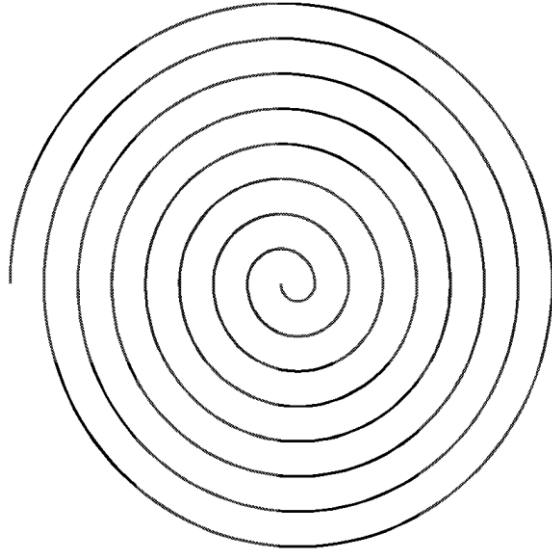
ნახ. 13.2. ა) ტიპის სპირალი

ბ) არქიმედის სპირალი ნახ. 13.3.

არქიმედის სპირალი პოლარ-კოორდინატებში ჩაიწერება ფორმით:

$$r = k \cdot \varphi, \quad (13.6)$$

სადაც  $k > 0$  მუდმივი რიცხვია და ის გარკვეულ შესაბამისობაშია მეზობელ ხვეულებს შორის მანძილთან, ხოლო  $\varphi$  შესაბამისი მობრუნების კუთხეა. მართლაც, რადგან  $r$  არის მანძილი სპირალის რომელიმე წერტილიდან პოლუსამდე, ავიღოთ წერტილი პირველ ხვეულზე როცა  $\varphi = 2\pi$  ანუ  $r = k \cdot 2\pi$ , სპირალი კიდევ ერთხელ შემობრუნებისას გვექნება  $\varphi_1 = 4\pi$  და  $r_1 = k \cdot 4\pi$ ; მაშინ მანძილი მეზობელ ხვეულებს შორის იქნება  $\Delta r = r_1 - r = 4\pi \cdot k - 2\pi \cdot k = 2\pi \cdot k$ .



ნახ. 13.3. არქიმედის სპირალი



სურ. 13.1. ცოცხალი ფრაქტალი: სპირალური სუკულენტი

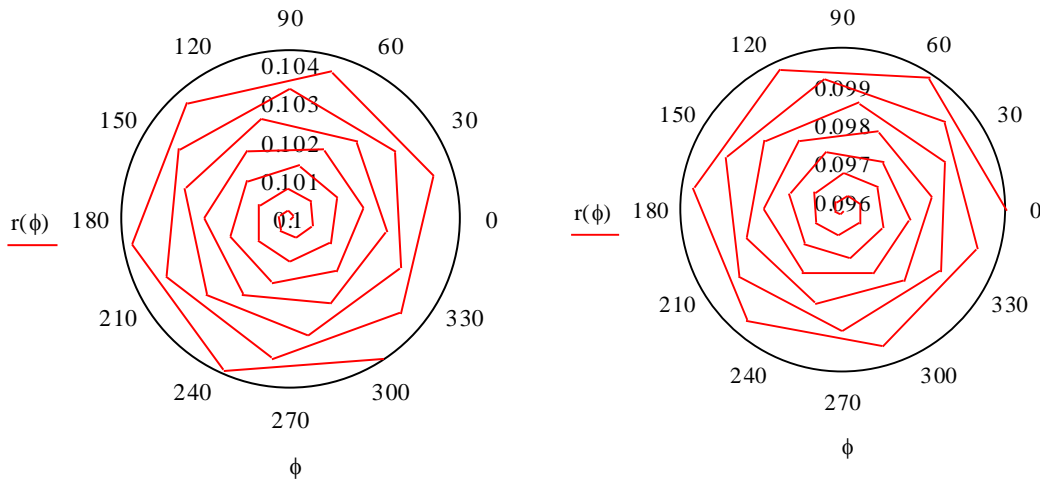
გ) ლოგარითმული ზრდის სპირალი ნახ. 13.4.

პოლარ-კოორდინატებში ლოგარითმული ზრდის სპირალს აქვს სახე:

$$\ln r = k \cdot \varphi \Leftrightarrow r = r_0 \cdot e^{k \cdot \varphi}. \quad (13.7)$$

ლოგარითმული სპირალისათვის ნახ. 13.4 დამახასიათებელია რიგი საინტერესო თვისებებისა, თუ განვიხილავთ სპირალის ბრუნვას თანაბარი სიჩქარით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით და შესაბამის სამ, მიმდევრობით მდგომარეობას ნახ. 13.5, მაშინ:

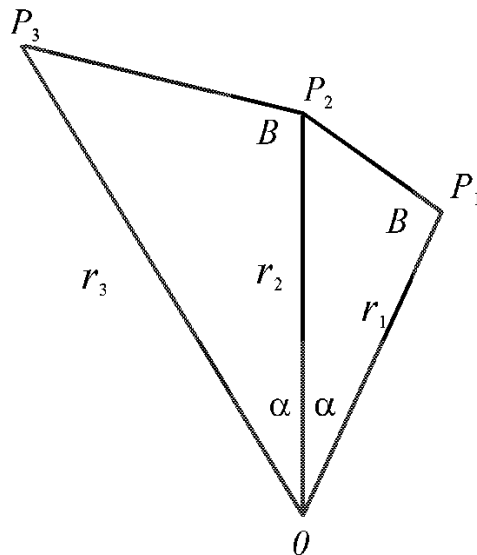
$$\ln \frac{r_3}{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow r_2^2 = r_1 \cdot r_3. \quad (13.8)$$



ა)  $k > 0$

ბ)  $k < 0$

ნახ. 13.4. ლოგარითმული სპირალი (დახვევის მიმართულება დამოკიდებულია  $k$  კოეფიციენტის ნიშანზე. თუ ის უარყოფითია, მაშინ დახვევის მიმართულება დაემთხვევა საათის ისრის მიმართულებას)



ნახ. 13.5. ლოგარითმული სპირალის სამი მიმდევრობითი წერტილი

სხვანაირად რომ ვთქვათ,  $r_1; r_2; r_3$  ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. იაკობ ბერნულიმ ამ სპირალს “სასწაულებრივი” უწოდა, რადგან აღმოაჩინა მისი მასშტაბური ინვარიანტობის

თვისება (თვითმსგავსება). ანუ სპირალის მასშტაბური შემცირება გვაძლევს იგივე შედეგს, რაც მისი მობრუნება რაიმე  $\alpha$  კუთხით. მართლაც,

$$r = r_0 \cdot e^{k \cdot (\varphi - \alpha)} = r_0 \cdot e^{-k \cdot \alpha} \cdot e^{k \cdot \varphi} = \bar{r}_0 \cdot e^{k \cdot \varphi}. \quad (13.9)$$

იმდენად განაცვიფრა ამ ფაქტმა, რომ მის საფლავზე გააკეთებინეს წარწერა “Eadem mutata resugo” რაც ნიშნავს შემდეგს “მე უცვლელად აღვდგები”.

შეგვიძლია შევნიშნოთ რომ, ბუნებაში ფართოდაა გავრცელებული სპირალური ფრაქტალის ფორმა სურ. 13.1, სურ. 13.2, სურ. 13.3, სურ. 13.4, სურ. 13.5, სურ. 13.6.



სურ. 13.2. ლოკოკინას სახლის ფრაქტალი ( $k < 0$ )





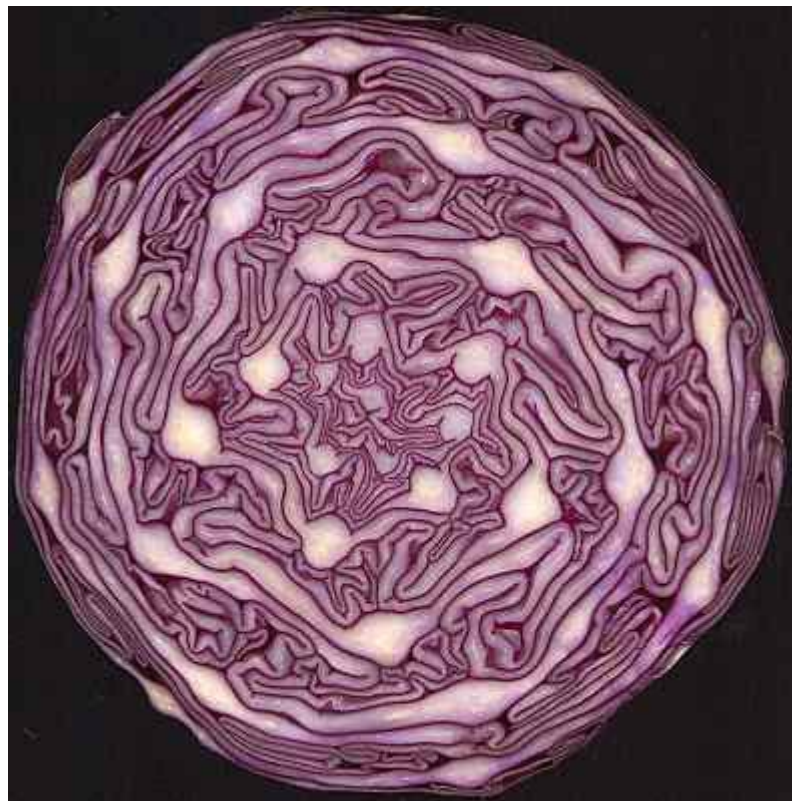
სურ. 13.3. ლოკოკინას სახლის ლოგარითმული, სპირალური ფრაქტალი (ჭრილი)



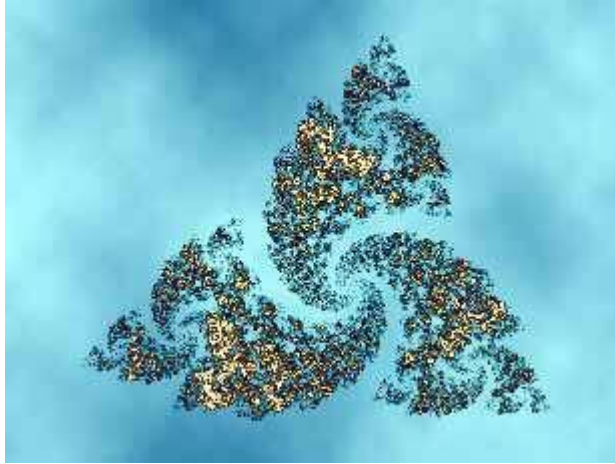
სურ. 13.4. მზესუმზირას ლოგარითმული სპირალური ფრაქტალი ( $k > 0$ )



სურ. 13.5. გეორგინას სპირალური ფრაქტალი



სურ. 13.6. კომბოსტოს ფოთლების სტრუქტურა ქმნიან ლოგარითმულ, სპირალურ ფრაქტალს ( $k < 0$ )

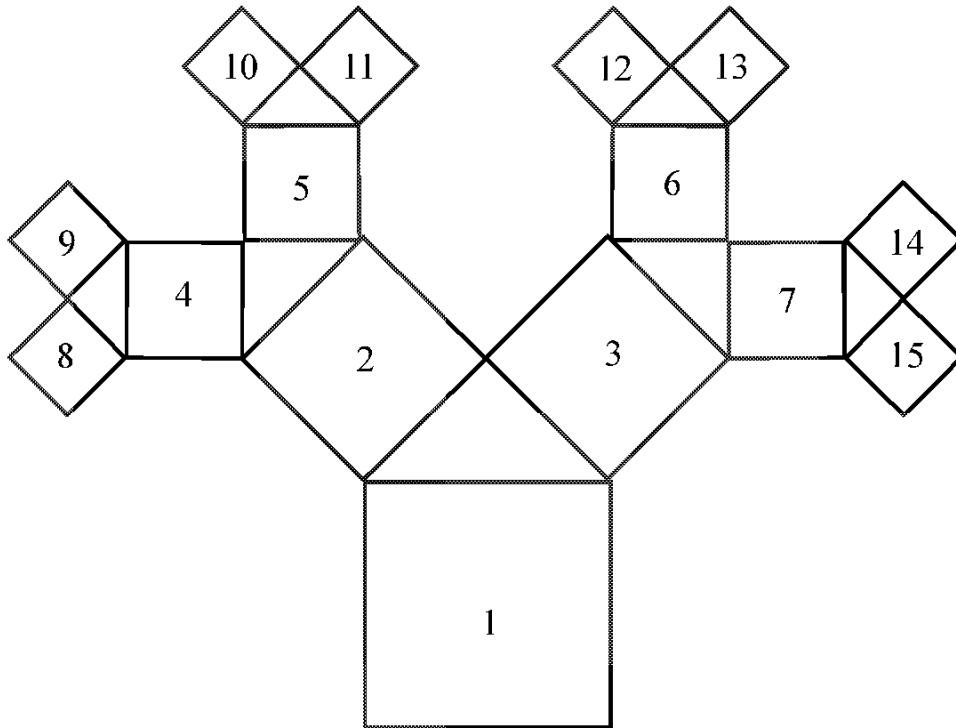


სურ. 13.7. გალაქტიკის სპირალური ფრაქტალი ( $k < 0$ )

### 13.2. პითაგორას ფრაქტალური ხე

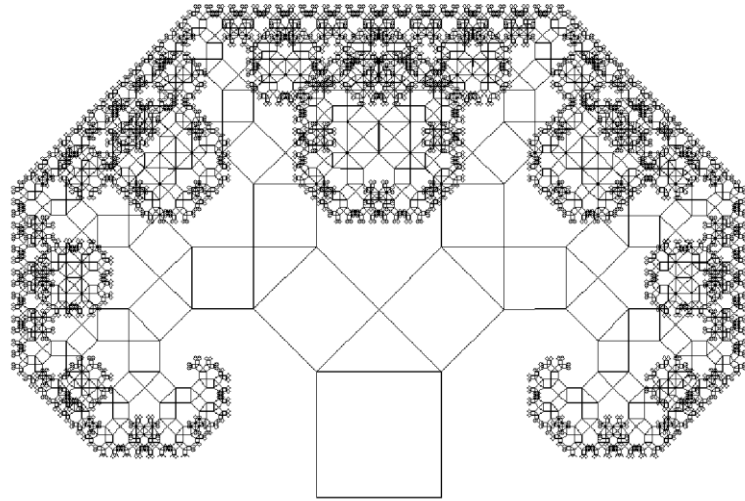
როგორც ვიცით, პითაგორას თეორემის თანახმად: *მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძის კვადრატი უდრის კათეტების სიგრძეთა კვადრატების ჯამს*. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ ერთეულოვანი ფართობის მქონე კვადრატი, როგორც **დედა-ფრაქტალი ნომერად 1**, ნახ. 13.6, ხოლო მამა-ფრაქტალი იყოს მის ზედა გვერდზე ჰიპოტენუზით დაყრდნობილი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი მის კათეტებზე აგებული კვადრატებით ნომრით 2 და 3, შემდეგ ეს პროცესი მეორდება თითოეული ამ ახალი კვადრატისათვის და ა.შ. ადვილი მისახვედრია, რომ 2 და 3 ნომრიანი კვადრატების ფართობთა ჯამიც იქნება 1. იგივე ფაქტს ექნება ადვილი სხვა კვადრატებისთვისაც.





ნახ. 13.6. პათაგორას ფრაქტალური ხის აგების დაწყებითი ეტაპები

თუ დავაკვირდებით ნახ. 13.6-ს დავინახავთ, რომ კვადრატზე ინდექსით  $n$ , დაყრდნობილია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებზე იზრდება უფრო მცირე სიდიდის ორი კვადრატი. მარცხნივ მდგომი კვადრატის ინდექსია  $2n$ , ხოლო მარჯვნივ მდგომი კვადრატისა -  $(2n + 1)$ . მაშინ ყოველ დონეზე არსებული კვადრატების ფართობთა ჯამი, საწყისი კვადრატის ფართობის ტოლია ანუ თუ ავიღებთ კვადრატებს ნომრით 8;9;10;11;12;13;14;15 აღმოვაჩინოთ, რომ მათი ფართობების ჯამიც ერთის ტოლი იქნება. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ მივიღებთ პითაგორას ფრაქტალურ ხეს ნახ. 13.7



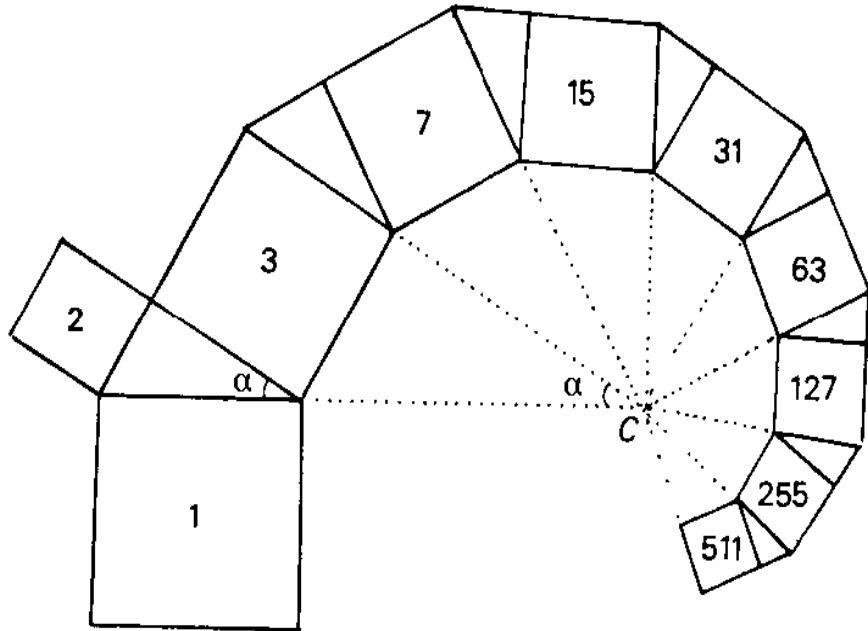
ნახ. 13.7. პითაგორას ფრაქტალური ხე



სურ. 13.8. მაგნიუმის ხელოვნური დენდრიტი, რომელიც მიიღება მაგნიუმის ორთქლის კონდენსაციით ცივ ზედაპირზე. ძალიან გავს ნაძვის გირჩების გროვას

### 13.2.1. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე

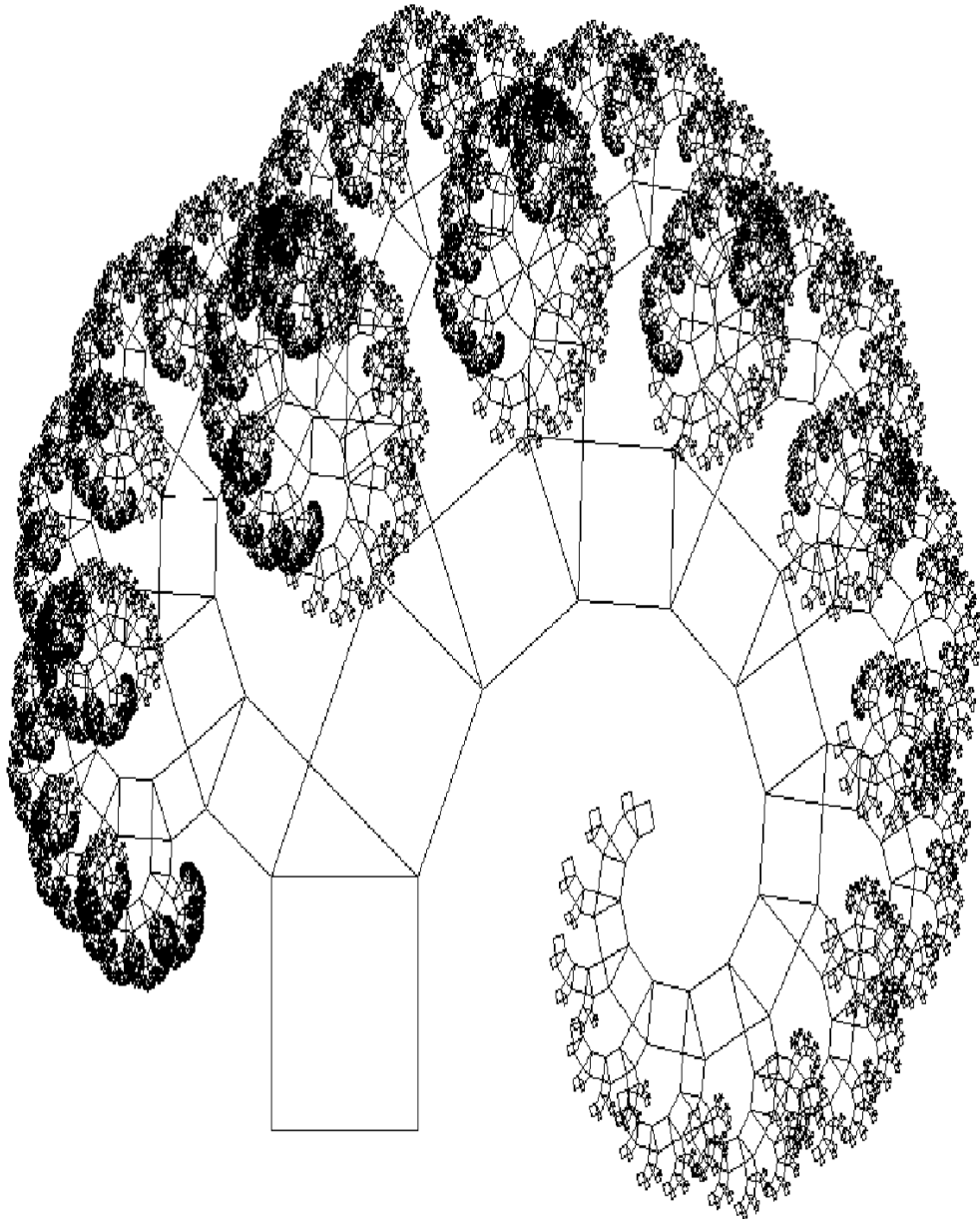
პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე წარმოადგენს პითაგორას ფრაქტალური ხის განზოგადებას. მისი აგების ალგორითმი მოცემულია ნახ. 13.8-ზე.



ნახ. 13.8. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმი

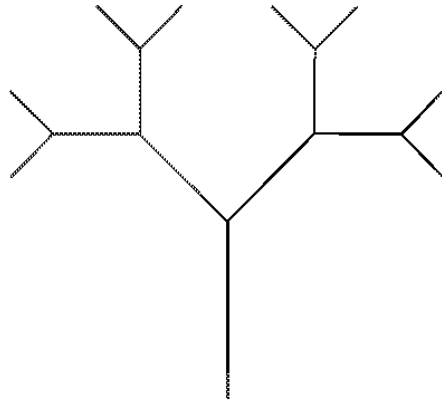
ფრაქტალი წარმოიქმნება თითოეულ ბიჯზე, მარჯვენა მხრიდან კვადრატის დამატებით.

ლოგარითმული სპირალი (ტეხილი) წარმოიქმნება მსგავსების გარდაქმნით, რომელიც წარმოადგენს მობრუნებას  $\alpha$  კუთხით და მასშტაბური შემცირებით  $\cos \alpha$ -ჯერ. ერთდროულად, შეგვიძლია განვიხილოთ მსგავსების გარდაქმნა რომელიც მოქმედებს მარცხენა მხრიდან: მობრუნება  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ -კუთხით და მასშტაბური შემცირება  $\sin \alpha$ -ჯერ. მაშინ მივიღებთ სპირალურ ფრაქტალურ ხეს ნახ. 3.9, სადაც  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , [2].

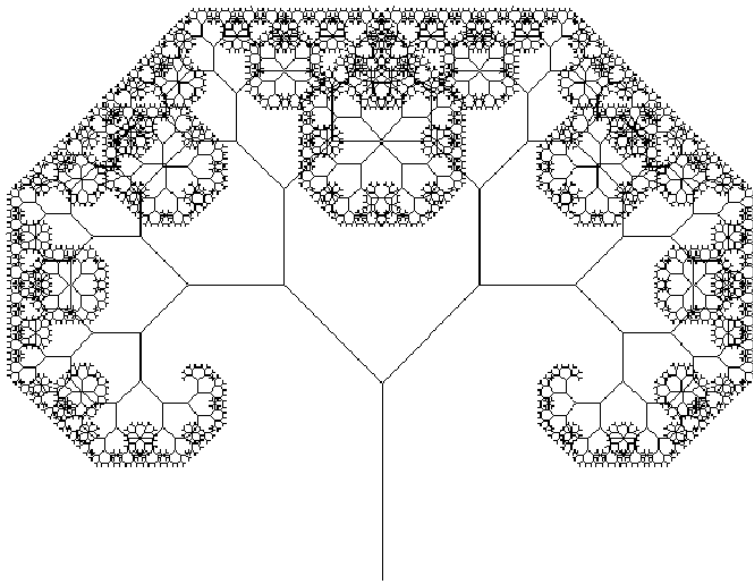


ნახ. 13.9. სპირალური ფრაქტალური ხე

თუ გავამარტივებთ პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმს, ამისათვის უკუვაგდებთ კვადრატებს და დავხატავთ მხოლოდ იმ მონაკვეთებს, რომლებიც სამკუთხედების “ცენტრებს” აერთებენ, ხოლო სამკუთხედებს აღარ დავხატავთ, მივიღებთ პითაგორას სპირალურ, გაშიშვლებულ ფრაქტალურ ხეს, რომელიც გამოსახულია ნახ. 13.10 და ნახ. 13.11-ზე.



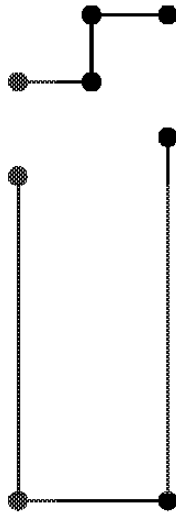
ნახ. 13.10. პითაგორას სპირალური გაშიშვლებული, ფრაქტალური ხის აგების საწყისი ბიჯები



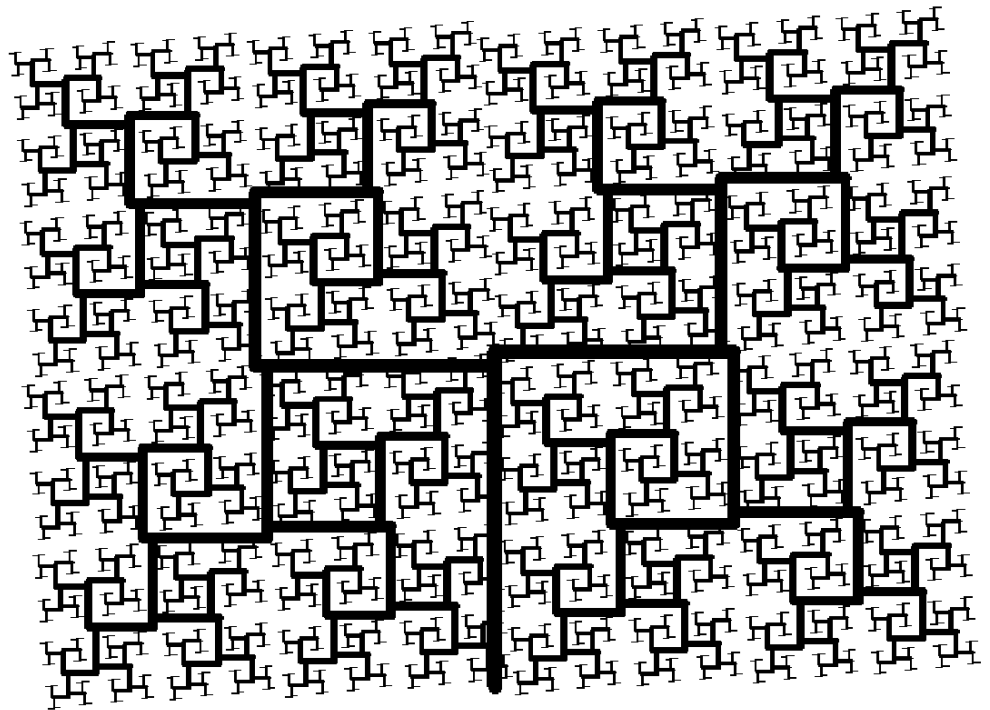
ნახ. 13.11. პითაგორას სპირალური გაშიშვლებული ფრაქტალური ხე

მანდელბროტის წიგნში [1] განხილულია ფრაქტალური ხის სხვა ვარიანტებიც ნახ. 13.12, ნახ. 13.13



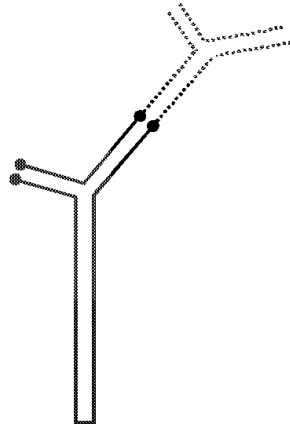


ნახ. 13.12. მანდელბროტის ფრაქტალური ხის დედა-ფრაქტალი და ზემოთა აგრეგატი(მამა-ფრაქტალი)

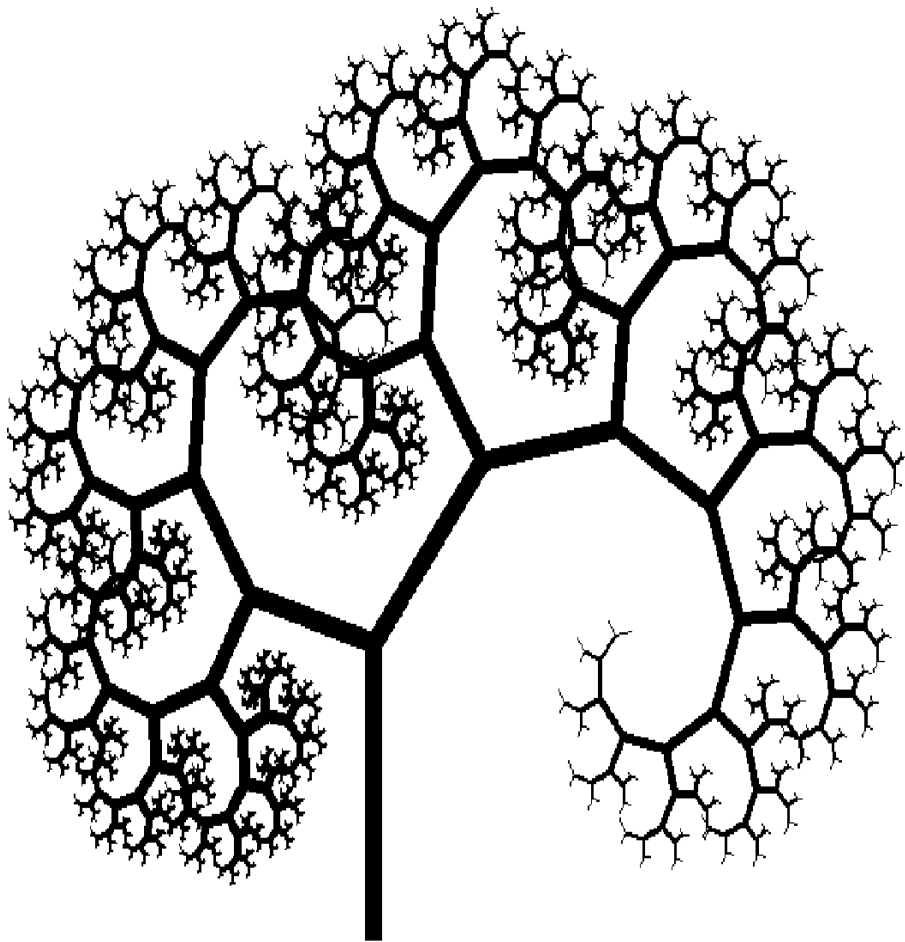


ნახ. 13.13. მანდელბროტის ფრაქტალური ხე

მანდელბროტმა ააგო რეალური ფრაქტალური ხის მოდელიც  
 ნახ. 13.14 და ნახ. 13.15



ნახ. 13.14. რეალური ფრაქტალური ხის მოდელი



ნახ. 13.15. რეალური ფრაქტალური ხე

განვიხილოთ შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალების სურათები:  
სურ. 13.8-13.18



სურ. 13.9. დედამიწის ზედაპირის სურათები კოსმოსიდან გაძღვევენ ფრაქტალური ფორმის ლანდშაფტს



სურ. 13.10. თხევადი ან გაზობრივი ნივთიერების კრისტალიზაციით წარმოქმნილი მინერალის ფრაქტალი



სურ. 13.11. ქვიშის დიუნის წყლით ნაწილობრივი მორეცხვის შედეგად წარმოქმნილი ფრაქტალი



სურ. 13.12. ხის ტოტები – ბუნებრივი ფრაქტალი





სურ. 13.13. ხის ტოტები იყოფა ორად, შემდეგ ბიჯზე, თითოეული ტოტი კვლავ იყოფა და ა.შ. გარკვეულ სასრულ რაოდენობამდე (როგორც მის გენეტიკურ პროგრამაშია ჩადებული), ესაა დენდრიტის ტიპის-ფრაქტალი



სურ. 13.14. ბაობაბი, აგრეთვე, ფრაქტალური კანონით იტოტება, თუმცა, ყველა ხეს თავისი გენეტიკური კოდი (დატოტვის წესი) აქვს

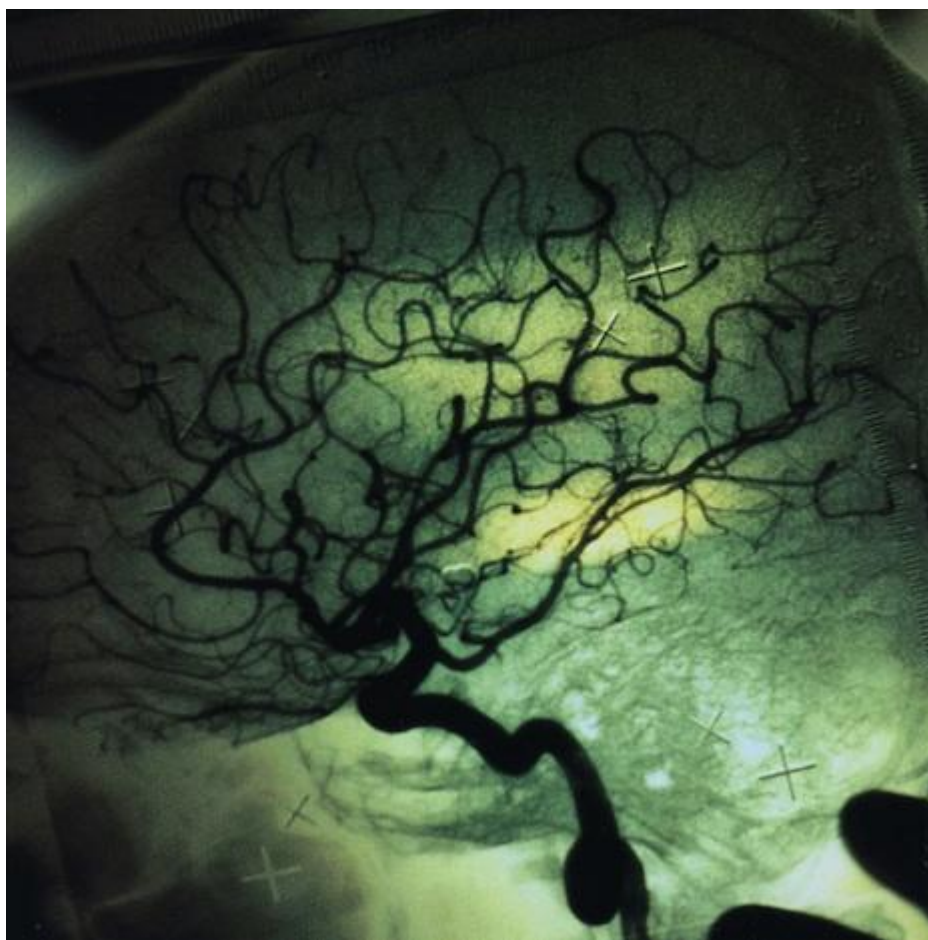


სურ. 13.15. ამოფრქვეული ვულკანის გაცივებული ლავა ინარჩუნებს დინების ფრაქტალურ ფორმას



სურ. 13.16. მცენარეთა ფრაქტალური ფორმაა-დენდრიტი

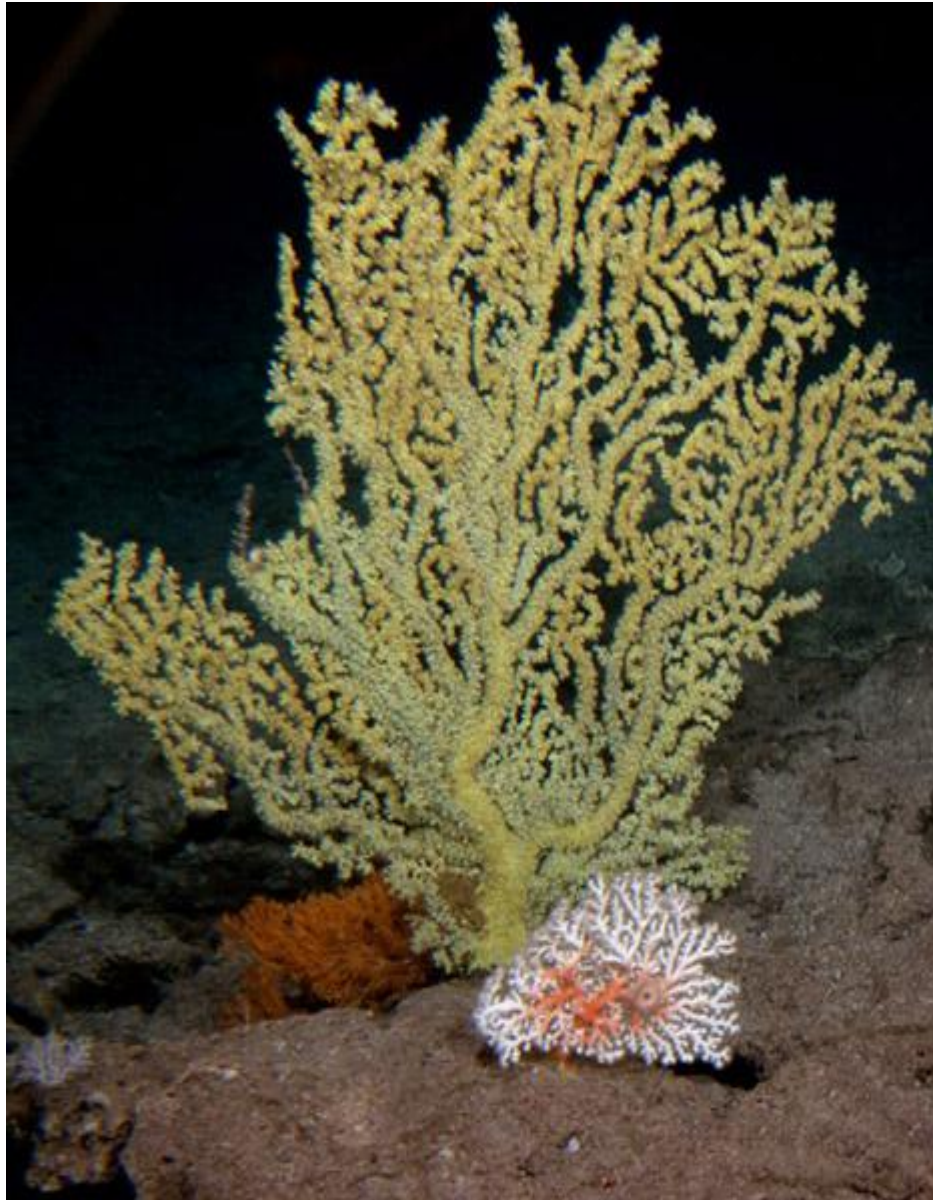




სურ. 13.17. ადამიანის ტვინის სისხლძარღვთა სისტემაც დენდრიტია



სურ. 13.18. მდინარეთა დატოტვის ფრაქტალიც დენდრიტია

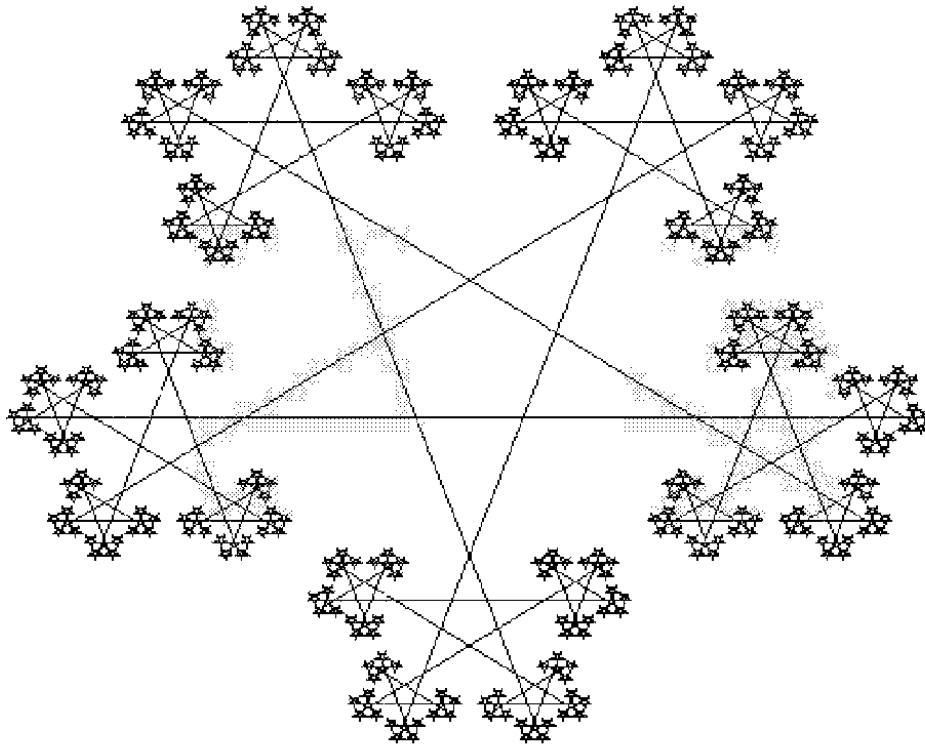


სურ. 13.19. მარჯანის ფრაქტალიც დენდრიტია

### 13.3. ვარსკვლავები

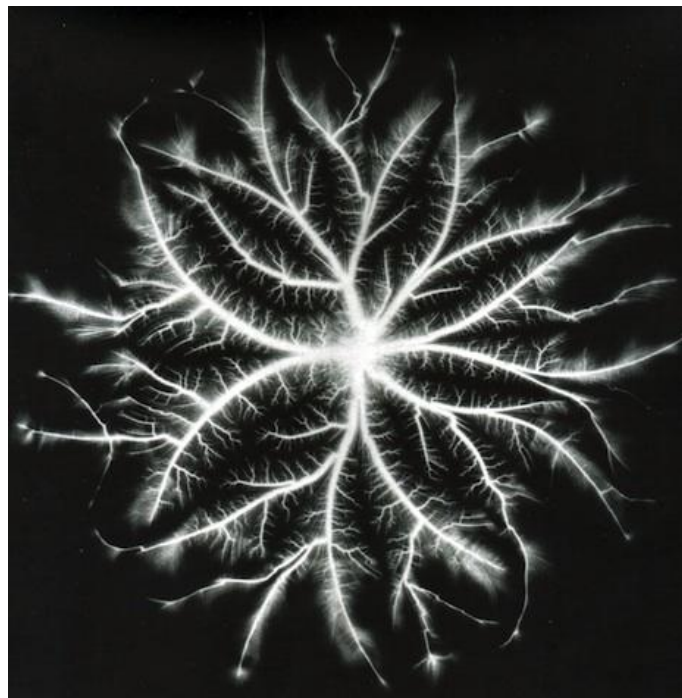
განვიხილოთ ვარსკვლავური ფრაქტალი. ის შედგება ხუთქიმიანი ვარსკვლავისაგან 5 უფრო მცირე გირლიანდით, რომლებიც უფრო მცირე მასშტაბის ვარსკვლავებს წარმოადგენენ და თითოეულის ოთხ წვეროზე უფრო მცირე ზომის ვარსკვლავებია განლაგებული. თეორიულად ეს პროცესი უსასრულოდ გრძელდება ნახ. 13.16.





ნახ. 13.16. ვარსკვლავური ფრაქტალი

განვიხილოთ ბუნებრივი ვარსკვლავური ტიპის ფრაქტალები:  
სურ. 13.19-13.22



სურ. 13.20. მცენარის ფესვთა ვარსკვლავური ფრაქტალი



სურ. 13.21. ფილტვი შეიცავს ერთმანეთში გადაჯაჭვულ სამ ფრაქტალს: სასუნთქი ფრაქტალი, სისხლძარღვთა ვენოზური სისხლის და არტერიული სისხლის ფრაქტალები



სურ. 13.22. ამაზონის წყლის შროშანი





სურ. 13.23. ბაობაბის დატოტვის სისტემა მოგვაგონებს სისხლძარღვთა სისტემასაც

### ლიტერატურა

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Пер. с англ., Ижевск, 2002
2. Lauwerier H.A. Fractals – images of chaos. Princeton Univ., press, 1991
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ., Москва, 2000

4. Julia G. Memoir sur l'iteration des fonctions rationnelles. J. de Mathematiques pures et appliquees, v. 1, Paris, 1918
5. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Пер. с англ., Мир, Москва, 1993
6. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. Пер. с франц., Ижевск, Москва, 2004
7. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Пер. с англ., Ижевск, Москва, 2009
8. Richardson L.F. Weather prediction by numerical process. Cambridge University press, 1922
9. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Институт компьютерных исследований, Ижевск, Москва, 2002
10. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001
11. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие, пер. с англ., Триумф, Москва, 2003
12. Hutchinson J.E. Fractals and Self Similarity. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5, 1981, pp. 713-747
13. Barnsley M. Fractals Everywhere. Academic Press, Boston, 1993
14. Daubechies I. Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. 1992
15. Shumaker L., Webb G., editor. Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press. 1993
16. Teolis A. Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser, 1998
17. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П. Петухова. Москва, 2001
18. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков// Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4, 1997
19. Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты. Москва, 2002
20. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. Москва, 2005
21. Мильнор Дж. Голоморфная динамика, пер. с англ., Ижевск, 2000
22. Fatou P. Sur les equations fonctionnelles, bulletin societe, Math. France, v.47, 1919

## XIV თავი. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების გარდაქმნათა ანალიზი

კომპიუტერზე გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების ასაგებად, ხშირად გამოიყენება აფინურ გარდაქმნათა ნახევარჯგუფი. სიბრტყეზე აფინური გარდაქმნაა: გაჭიმვა-კუმშვის, მობრუნებისა და სიმეტრიის ასახვა.

### 14.1. ინვარიანტული გარდაქმნა

უმარტივეს შემთხვევაში, აფინური გარდაქმნა მოიცემა როგორც მასშტაბში შემცირებისა და მობრუნების წრფივ ასახვათა კომპოზიცია:

$$(x; y) \rightarrow (x'; y'), \quad (14.1)$$

რომელიც მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (14.2)$$

(14.2) გარდაქმნას, გარდაქმნის  $A$  მატრიცით ავლნიშნავთ მოკლედ  $T$  ასოთი.

თუ, სიბრტყე აისახება თავის თავზე ისე რომ,  $x' = x$  და  $y' = y$ , მაშინ (14.2) გარდაქმნის ფორმულებიდან მივიღებთ რომ

$$\begin{cases} x = a \cdot x + b \cdot y \\ y = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1) \cdot x + b \cdot y = 0 \\ c \cdot x + (d - 1) \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}. \quad (14.3)$$

მაშასადამე, სიბრტყის თავის თავზე ასახვისას, გვაქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი  $O(0;0)$ . ამ უძრავი წერტილის ტიპის დასადგენად, უნდა ამოვხსნათ  $A$  მატრიცის მახასიათებელი განტოლება:

$$\lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda + \Delta = 0, \quad (14.4)$$

სადაც  $\Delta = \det A$ .

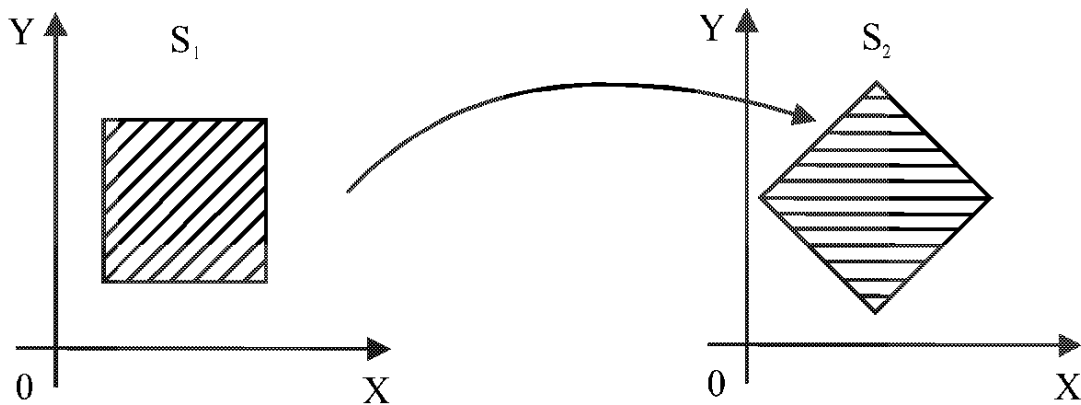
გვაქვს ოთხი შემთხვევა:

1. თუ  $|\lambda_1| < 1$  და  $|\lambda_2| < 1$ , მაშინ  $O$  წერტილი მდგრადია;

2. თუ  $|\lambda_1| < 1$  და  $|\lambda_2| > 1$ , მაშინ  $O$  უნაგირა (ჰიპერბოლური) წერტილია;
3. თუ  $|\lambda_1| = 1$  და  $|\lambda_2| = 1$ , მაშინ  $O$  ელიფსური წერტილია;
4. თუ  $|\lambda_1| > 1$  და  $|\lambda_2| > 1$ , მაშინ  $O$  არამდგრადი წერტილია.

ამბობენ რომ,  $T$  ასახვა ინახავს ფართობს თუ  $|\det A| = 1$ . ამ შემთხვევაში, ცხადია რომ  $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = 1$ . ფართობის შემნახველი ასახვის უძრავი წერტილი, შეიძლება იყოს მხოლოდ ელიფსური ან ჰიპერბოლური ტიპის.

განვიხილოთ ფართობის შემნახველი ასახვა ნახ. 14.1



$$S_1 = S_2$$

ნახ. 14.1.  $S$  ფართობის შემნახველი ასახვა

**თეორემა:** არსებობს არაგადაგვარებული წრფივი ასახვა  $(x; y) \rightarrow (x'; y')$ , რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (14.5)$$

სადაც  $\alpha$ - მობრუნების კუთხეა, თუ  $|\lambda_1| = 1$ ,  $|\lambda_2| = 1$  და  $\Delta = 1$ .

## 14.2. მობრუნება

განვიხილოთ, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით, (გაჭიმევა-შეკუმშვის გარეშე)  $\alpha$  კუთხით მობრუნების გარდაქმნა. ასეთი გარდაქმნა მოიცემა ფორმულებით (14.5). ამ გარდაქმნის იაკობიანი ცხადია, რომ ტოლია 1-ის. ეს ფორმულები ასახავენ სიბრტყის მობრუნებას კოორდინატთა სათავის გარშემო.

ასახვა, რომელიც მდგომარეობს სიბრტყის რაიმე  $(x_0, y_0)$  (უძრავი) წერტილის გარშემო, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით  $\alpha$  კუთხით მობრუნებაში, ჩაიწერება ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cdot \cos \alpha - (y - y_0) \cdot \sin \alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) \cdot \sin \alpha + (y - y_0) \cdot \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (14.6)$$

### 14.3. გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა

გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა დაკავშირებულია მასშტაბის ცვლილებასთან. ცენტრალური გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა  $O(0; 0)$  კოორდინატთა სათავის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის  $k$  მახასიათებლით, მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases} \quad (14.7)$$

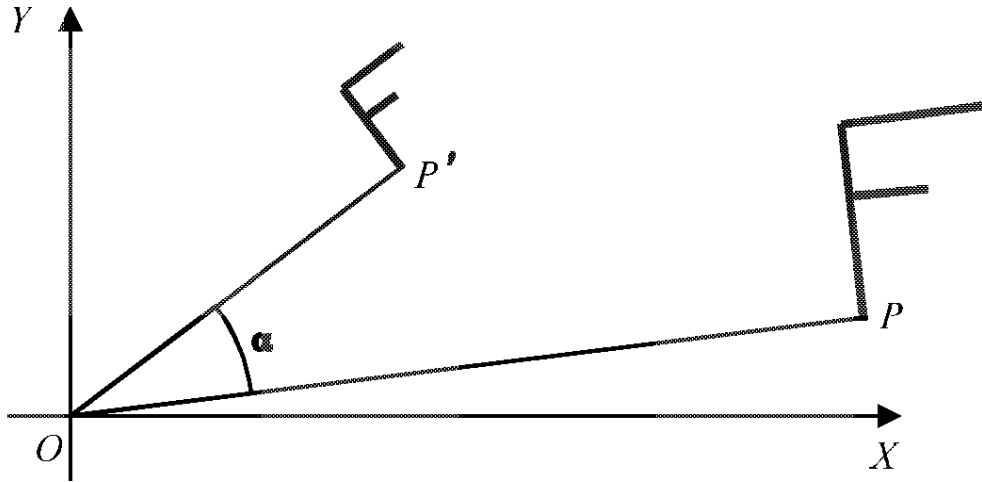
ხოლო, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა  $M(x_0; y_0)$  წერტილის მიმართ,  $k$  მახასიათებლით, მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = k \cdot (x - x_0) + x_0 \\ y' = k \cdot (y - y_0) + y_0 \end{cases} \quad (14.8)$$

როცა  $|k| > 1$  ეს გარდაქმნები აღწერენ გაჭიმვის ასახვას, ხოლო როცა  $|k| < 1$  გვაქვს შეკუმშვის ასახვა. თუ  $k = -1$  გვაქვს არეკვლა  $M(x_0; y_0)$  წერტილის მიმართ ანუ მობრუნება  $180^\circ$ -იანი კუთხით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

### 14.4. მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია

კომპიუტერზე, გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალუბის ასაგებად, ხშირად გამოიყენება მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია. აქ განმსაზღვრელია: მობრუნების კუთხე, ცენტრის მდებარეობა და მასშტაბირების კოეფიციენტი. ნახ. 14.2-ზე მოცემულია მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის ოპერაციის შედეგი კოორდინატთა  $O(0; 0)$  სათავის მიმართ:



ნახ. 14.2. მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია

რომელიც მოიცემა (14.9) გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y \\ y' = b \cdot x + a \cdot y \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}. \quad (14.9)$$

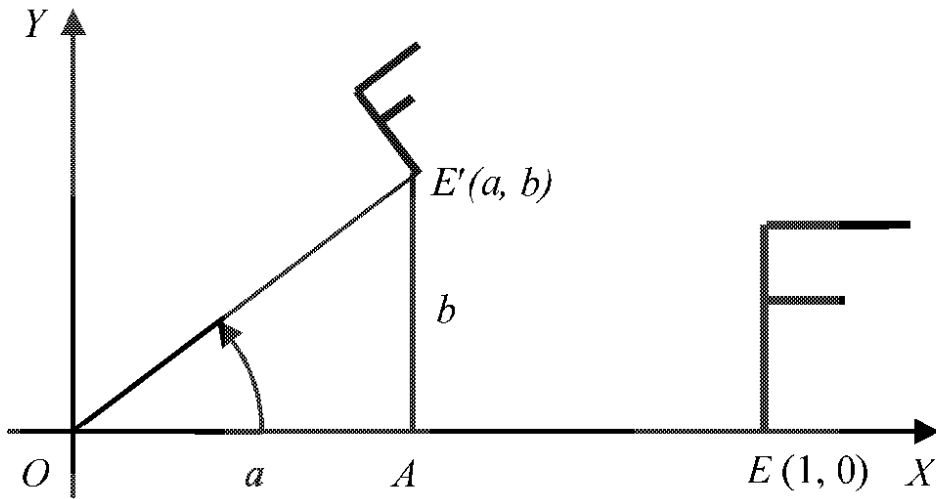
$\Delta$  სიდიდე ახასიათებს გაჭიმვა-შეკუმშვის სიდიდეს. როცა  $\Delta > 1$  გვაქვს გაჭიმვა, ხოლო  $\Delta < 1$ -ის შემთხვევაში გვაქვს შეკუმშვა. თუ გვაქვს მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა, რომლის დროსაც  $E(1; 0)$  აისახება  $E'(a; b)$  წერტილში ნახ. 14.3, მაშინ მასშტაბირების კოეფიციენტი იქნება:

$$k = \frac{OE'}{OE} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (14.10)$$

ამ ასახვისას, მობრუნების კუთხეა  $\alpha$ , რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობებს:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OE'} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{AE'}{OE'} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (14.11)$$



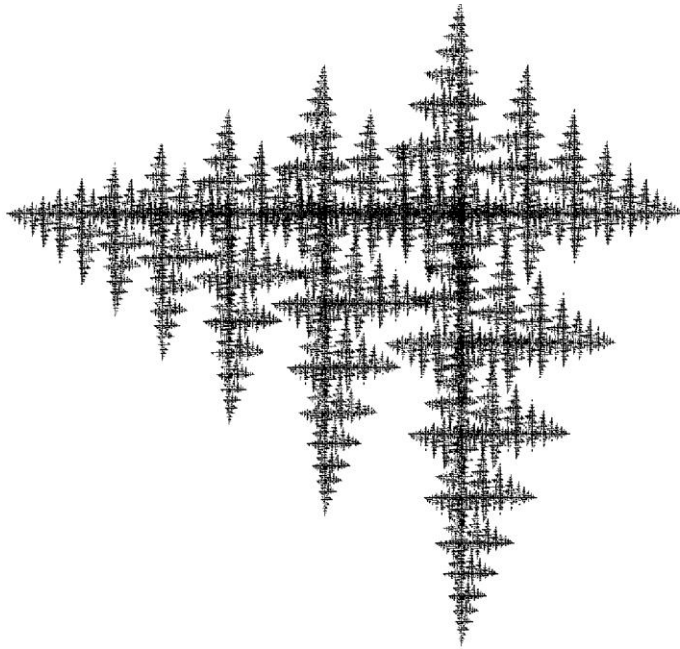


ნახ. 14.3. მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა

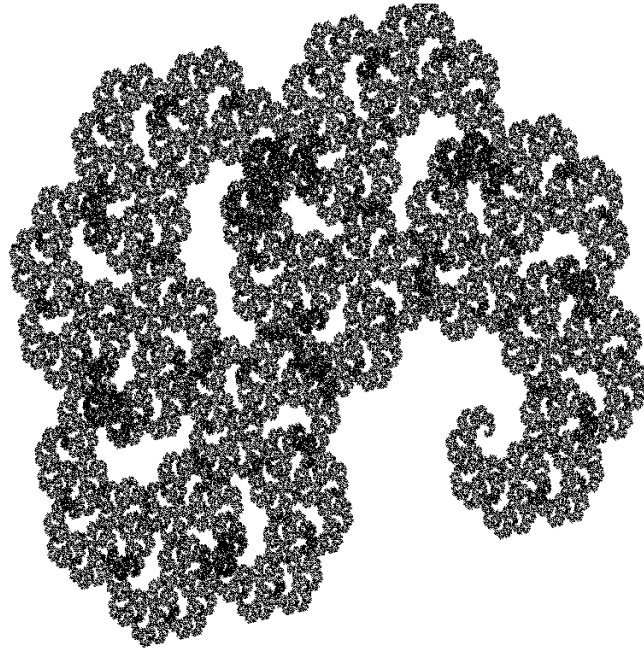
თუ გვინდა ჩავწეროთ, მობრუნება გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა ნებისმიერი  $M(x_0; y_0)$  წერტილის მიმართ, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y + x_0 \\ y' = b \cdot x + a \cdot y + y_0 \end{cases} \quad (14.12)$$

ამ გარდაქმნების საფუძველზე იგება ფრაქტალები ნახ. 14.4, ნახ. 14.5



ნახ. 14.4. მობრუნება-შეკუმშვის გარდაქმნით მიღებული ფრაქტალი



ნახ. 14.5. ორმაგი მობრუნება-შეკუმშვის გარდაქმნით მიღებული ფრაქტალი

ბუნებაში გვხვდება მსგავსი ფრაქტალებიც სურ. 14.1



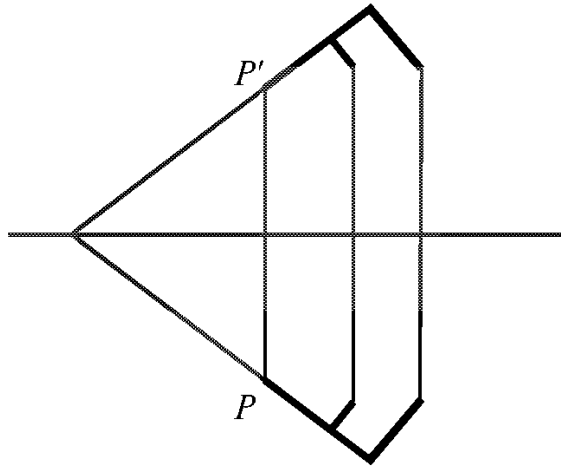
სურ. 14.1. კაქტუსი

## 14.5. სიმეტრიის გარდაქმნა

სიმეტრიის  $S$  ასახვა შეგვიძლია განვმარტოთ ტოლობით:

$$S^2 = E, \quad (14.13)$$

სადაც  $E$  იგივეური გარდაქმნაა. მართლაც, მოცემული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის სიმეტრიის გარდაქმნა გვაბრუნებს მოცემულ ფიგურასთან ნახ. 14.6



ნახ. 14.6. ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა

ფრაქტალების კონსტრუირების დროს სიმეტრიის გარდაქმნა უმეტესწილად, გვხვდება შეკუმშვის ასახვასთან კომპოზიციაში. შეკუმშვის ასახვისას გვაქვს შეკუმშვის უძრავი ცენტრი და მასშტაბირების კოეფიციენტი, ხოლო სიმეტრიის ასახვისას გვაქვს უძრავი ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფე.

თუ უძრავი ცენტრია კოორდინატთა სათავე  $O(0;0)$ , მაშინ გვაქვს გარდაქმნა:

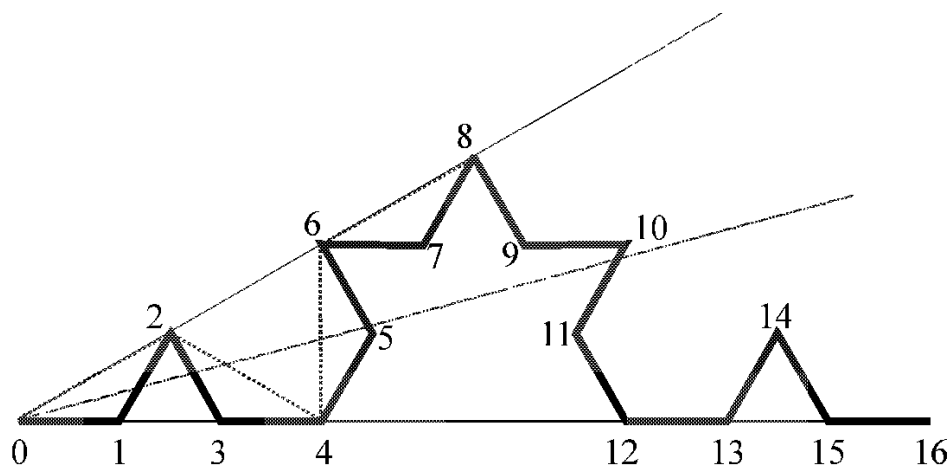
$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = -k \cdot y \end{cases} \quad (14.14)$$

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა გვაქვს უძრავი  $M(x_0; y_0)$  ცენტრი, კუმშვა-სიმეტრიის ასახვა მოიცემა გარდაქმნებით:

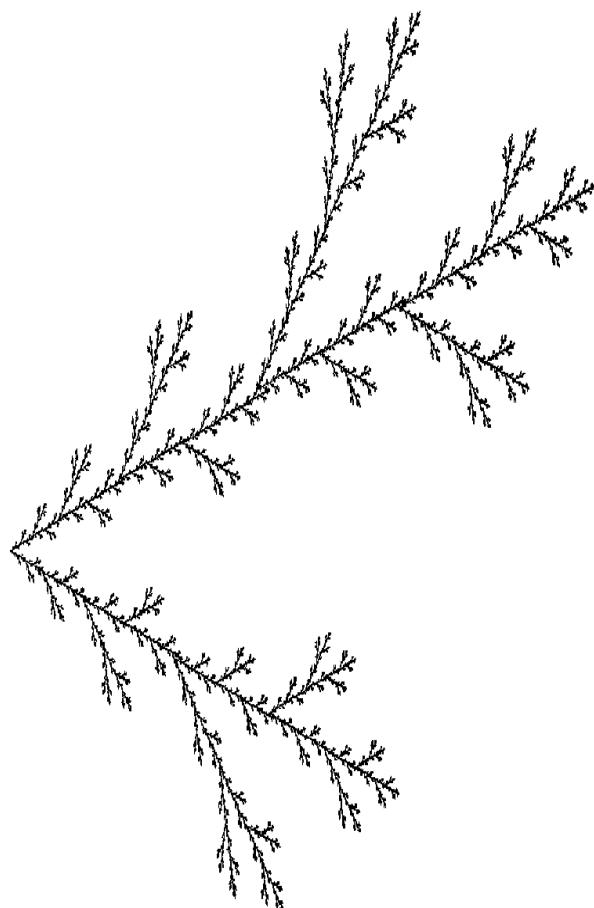
$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y + x_0 \\ y' = b \cdot x - a \cdot y + y_0 \end{cases} \quad (14.15)$$

სადაც მასშტაბირების კოეფიციენტი  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

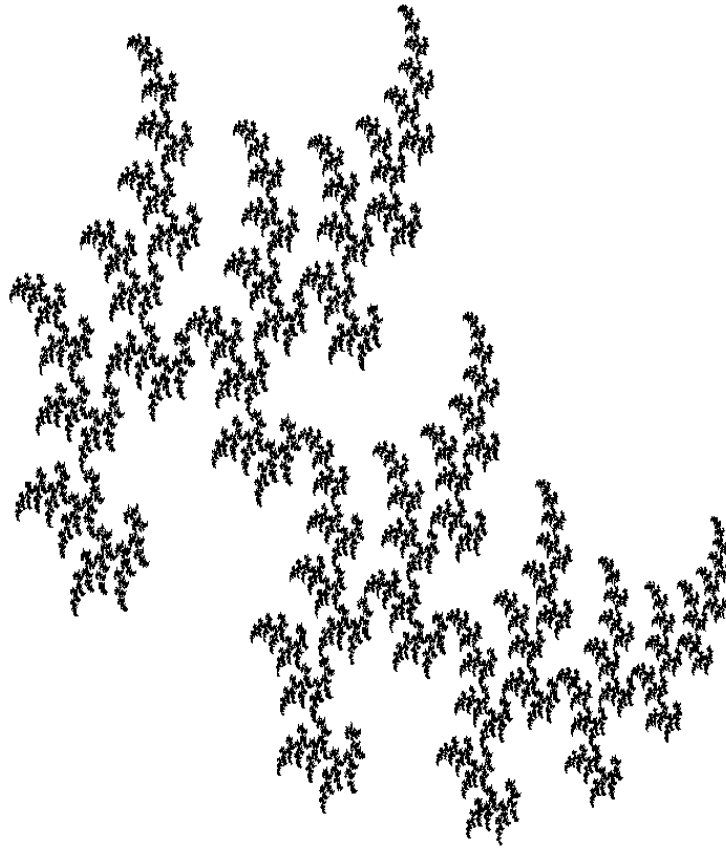
შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია ფართოდ გამოიყენება ფრაქტალების აგებისას: ნახ. 14.7-14.9



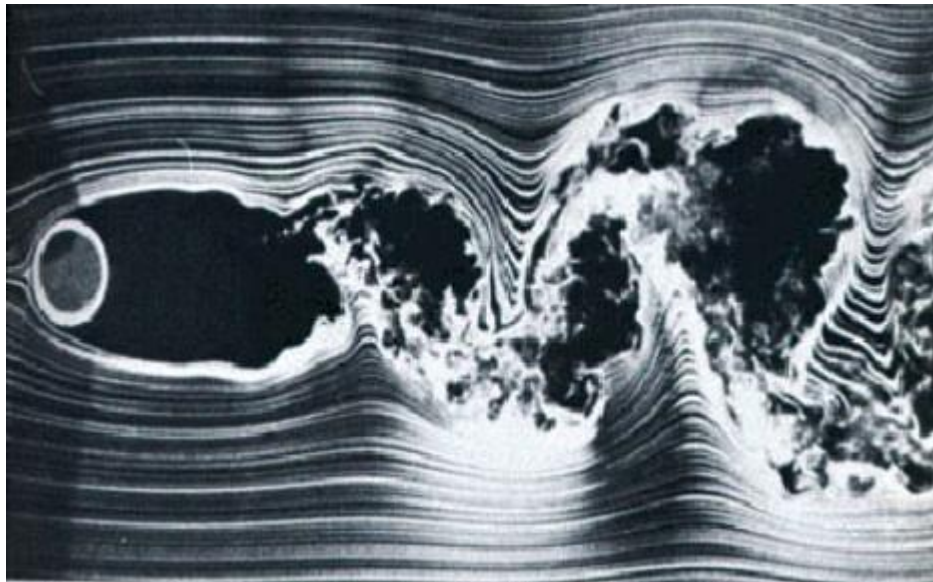
ნახ. 14.7. შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია კოხის ფრაქტალში



ნახ. 14.8. შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია დენდრიტის ფრაქტალში



ნახ. 14.9. ფრაქტალი რომელიც მიიღება მობრუნება-შეკუმშვისა და შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიციით

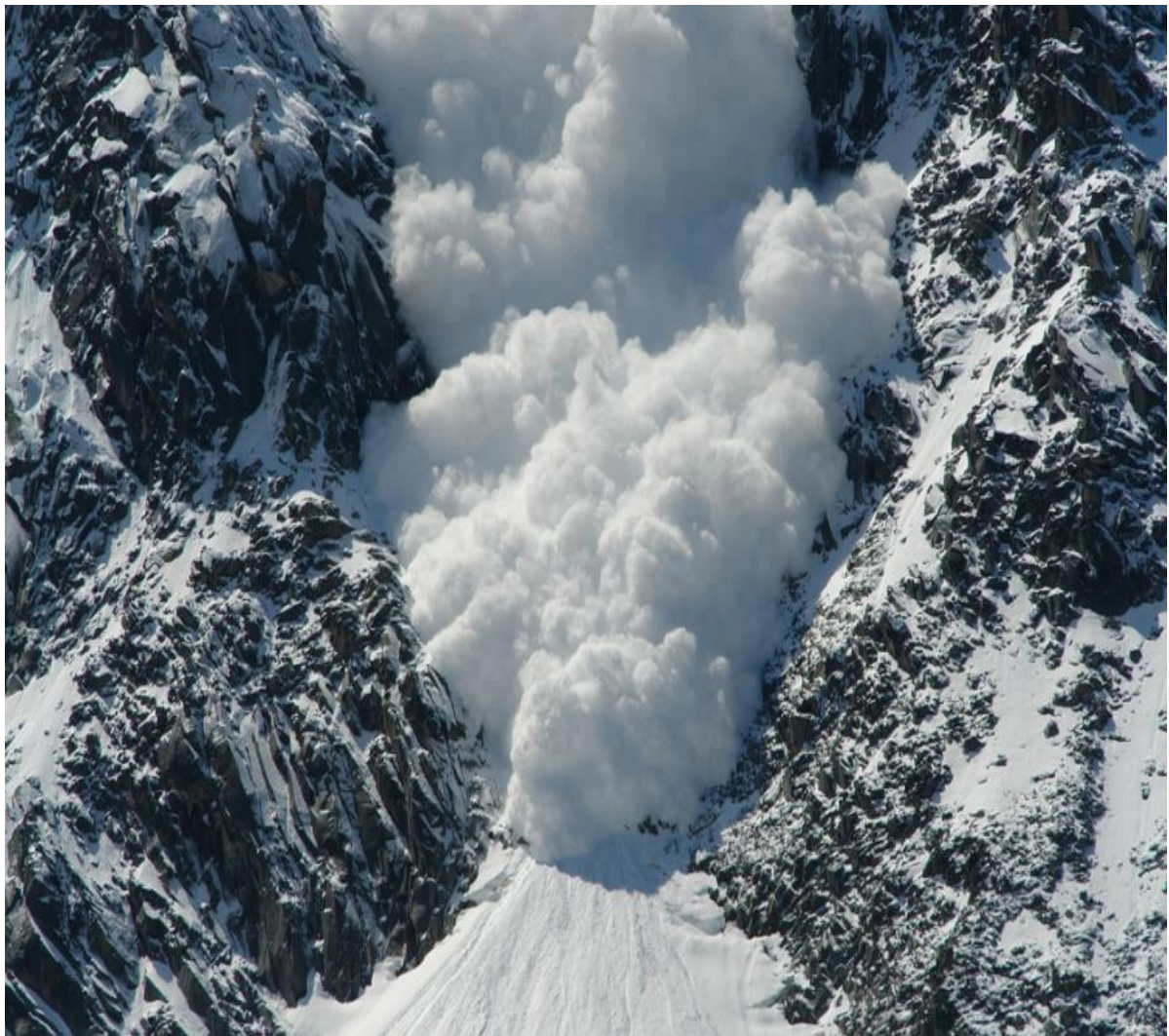


სურ. 14.1. ბლანტი სითხით ცილინდრის გარსდენისას მიიღება ტურბულენტური კვალი, რომელიც რღვევის უბნებში, ქმნის ბუნებრივ ფრაქტალს





სურ. 14.2. ჭექა-ქუხილის დროს ცაზე გამოსახული ფრაქტალი



სურ. 14.3. თოვლის ზეაგის ფრაქტალიც ცოცხალი სისტემაა





სურ. 14.4. თერგის ჩანჩქერის ფრაქტალი



სურ. 14.5. ლორწომის კლდის დაფრაქტალეებული ზედაპირი ქსნის ხეობაში





სურ. 14.6. ცხავატის გამშრალი თიხის ზედა ფენის ფრაქტალი, რომელიც ძალიან წააგავს კანის ტექსტურასა და მცენარეთა ფოთლის აღნაგობას



სურ. 14.7. წყლისა და მიწის ურთიერთქმედებით ჩამოყალიბებული კავკასიონის მთათა ფრაქტალური ლანდშაფტი





სურ. 14.8. “იუპიტერის თვალის ფრაქტალი”. იუპიტერი გაზობრივ მდგომარეობაში მყოფი პლანეტაა. ეს თვალები მისი ატმოსფეროს დინამიკური წარმონაქმნია

#### 14.6. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალის დინამიკური სტრუქტურა

გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ზოგადი ფორმულით:

$$\text{GKIFRACTAL} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Fr}(m, f, \text{gekev}), \quad (14.16)$$

სადაც  $m$  - დედა-ფრაქტალი(საწყისი სიმრავლე),  $f$  - მამა-ფრაქტალი(ყოველ ბიჯზე დამატებადი გეომეტრიული აგრეგატი), ხოლო პარამეტრი  $\text{gekev}$  ფრაქტალის ევოლუციის გენეტიკური კოდია, რომელიც მიუთითებს თუ, რამდენი ბიჯი კეთდება თვითმსგავსების პრინციპით აგებისას და როგორია ფრაქტალის ზრდის კანონის გენეტიკა (ევოლუციის წესი).

ფრაქტალს იდეალურს ვუწოდებთ, რადგან მხედველობაში არ მიიღება გარემო პირობების შემთხვევითი RND ზემოქმედება ფრაქტალის ევოლუციის გეომეტრიაზე.

ამგვარად, წარმოდგენილი ფრაქტალები, ფართოდ გამოიყენება ცოცხალი სისტემების მოდელირებისას.

თუ ვიცით დედა-ფრაქტალის, მამა-ფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის სახე, შეგვიძლია ავაგოთ გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი. ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად, არსებობს შესაბამისი ალგორითმებიც.

თუმცა, გაცილებით მნიშვნელოვანია ისეთი ალგორითმის დამუშავება, რომელიც ამოგვისნის შებრუნებულ ამოცანას ანუ როცა ვიცით ცოცხალი სისტემის გეომეტრიული ფორმა, როგორ დავადგინოთ შესაბამისი დედა-ფრაქტალი, მამა-ფრაქტალი და გენეტიკური კოდი.

მართლაც, ცნობილია რომ ადამიანის შინაგანი ორგანოები წარმოდგენენ ფრაქტალებს, რომელთაგან თითოეულს აქვს თავისი დედა-ფრაქტალი, მამა-ფრაქტალი და გენეტიკური კოდი; მათი ცოდნა გაგვიადვილებდა შინაგანი ორგანოების ლაბორატორიულ პირობებში აღდგენის პრობლემას და დაავადებული ორგანოების შეცვლას. ცნობილია რომ, კიბოსაც ფრაქტალური სტრუქტურა აქვს. თუ შევძლებთ მისი დედა-ფრაქტალის, მამა-ფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის დადგენას, მაშინ გვეცოდინება თუ, როგორ ვებრძოლოთ ამ დაავადებას უფრო ეფექტურად, ვიდრე ეს დღესაა შესაძლებელი.

ასე რომ, გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალების სახეთა გამოცნობის ამოცანა, რაც ამ შემთხვევაში, ნიშნავს მისი აგების შებრუნებული ალგორითმის დადგენას, მეტად მნიშვნელოვნად გამოიყურება პრაქტიკული მედიცინის თვალსაზრისითაც.

#### 14.7. მეტრიკული სივრცის აფინური გარდაქმნა

განვიხილოთ  $X$  სივრცე. ვთქვათ, ამ სივრცეში გვაქვს  $X \times X$  დეკარტულ ნამრავლზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის  $d(x, y)$  ფუნქცია ისე რომ, ადგილი აქვს აქსიომებს:

$$a) d(x, y) \geq 0; \forall (x, y) \in X \times X; \quad (14.17)$$

$$b) d(x, y) = 0 \Rightarrow (x = y); \quad (14.18)$$

$$g) d(x, y) = d(y, x); \quad (14.19)$$

$$d) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z); \forall x, y, z \in X. \quad (14.20)$$

მაშინ  $(X, d)$  წყვილს მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მეტრიკული სივრცე არის სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული მეტრიკის (მანძილის) ცნებით.

ვთქვათ მოცემულია  $(X, d)$  მეტრიკული სივრცე.  $T$  ასახვას ეწოდება **კუმშვადი (შეკუმშვა)** თუ არსებობს ისეთი  $0 < s < 1$  რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$d(T(x), T(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad (14.21)$$

რაც იმას ნიშნავს რომ, კუმშვად ასახვას ნებისმიერი ორი წერტილი გადაყავს ისეთ სხვა ორ წერტილში, რომელთა შორისაც მანძილი უფრო ნაკლებია, ვიდრე იყო ის ასახვამდე.

კუმშვადი ასახვები საშუალებას გვაძლევენ ვიმსჯელოთ ასახვათა **უძრავ წერტილებზე**.  $f(x)$  ასახვის უძრავი წერტილი ეწოდება ისეთ  $x = x_0$  წერტილს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f(x_0) = x_0. \quad (14.22)$$

ადგილი მისახვედრია, რომ  $f(x)$  ფუნქცია მოგვცემს **კუმშვად ასახვას**, თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f'(x)| < s < 1. \quad (14.23)$$

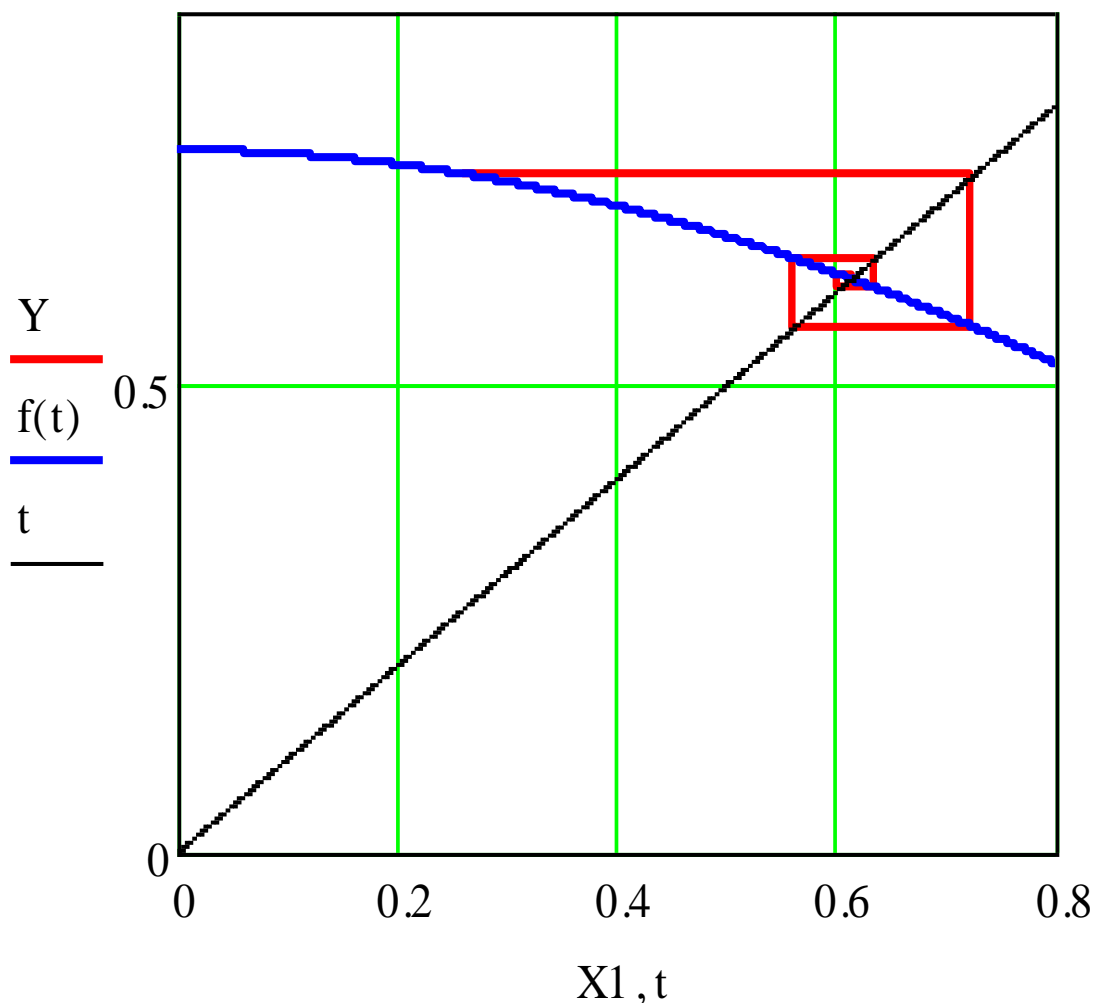
ცხადია რომ, თუ  $f(x)$  კუმშვადი ასახვაა, მაშინ ერთბიჯიან იტერაციულ სქემას, ცნობილი საწყისი  $x_0$  მიახლოებით:

$$x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}, \quad (14.24)$$

აქვს უძრავი წერტილი  $x = \xi$  ანუ  $f(\xi) = \xi$ , სადაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi. \quad (14.25)$$

**მაგალითისათვის:** განვიხილოთ  $f(x) = 0.75 \cdot \cos x$  ფუნქცია  $[0; \frac{\pi}{4}]$  შუალედში. ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია და უწყვეტი ამ შუალედში. ამასთან ერთად  $|f'(x)| = 0.75|\sin x| \leq 0.75 < 1$ , რაც იმას ნიშნავს რომ, შესაბამისი ერთბიჯიანი იტერაციული სქემა  $x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}, x_0 = 0.26$  საწყისი მიახლოებით კრებადია უძრავი წერტილისაკენ ნახ. 14.10



ნახ. 14.10. ობობას ქსელისმაგვარი დიაგრამა ერთბიჯიანი იტერაციული სქემისათვის

ახლა გადავიდეთ მეტრიკული სივრცის აფინურ გარდაქმნაზე. მეტრიკული სივრცის წრფივ გარდაქმნას შემდგომი გადატანის ასახვით, აფინური გარდაქმნა ეწოდება.

მეტრიკული  $\mathbb{R}^n$  სივრცის  $L$  გარდაქმნას ეწოდება წრფივი, თუ მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი ორი  $x$  და  $y$  ელემენტისათვის და  $\lambda, \mu$  ნამდვილი რიცხვებისათვის, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y). \quad (14.26)$$

თუ  $L$  წრფივი გარდაქმნაა, მაშინ ადგილი აქვს მის მატრიცულ წარმოდგენას:

$$L(x) = A \cdot x. \quad (14.27)$$

გადატანის  $T$  გარდაქმნა განისაზღვრება ტოლობით:

$$T(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (14.28)$$

სადაც  $a$  გადატანის მუდმივი ვექტორია.

ამგვარად, აფინური გარდაქმნა საზოგადოდ, შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}. \quad (14.29)$$

$\mathbb{R}^2$  სიბრტყის გარდაქმნის შემთხვევაში აფინური გარდაქმნა მოიცემა ექვსი მუდმივის  $(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2; \gamma_1; \gamma_2)$  საშუალებით:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (14.30)$$

გარდაქმნა (14.30) აღიღებს  $(\delta > 1)$  ან ამცირებს მრავალკუთხედის ფართობს  $(\delta < 1)$  შესაბამისად  $\delta$ -ჯერ, იმის მიხედვით თუ, როგორია გარდაქმნის

$$\delta = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (14.31)$$

მატრიცის დეტერმინანტი.

#### 14.8. მანძილი მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლებს შორის

განვიხილოთ  $(X, d)$  მეტრიკული სივრცე.

**განსაზღვრება:** ვიტყვიტ რომ  $X$  მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  კრებადია  $a \in X$  წერტილისაკენ, თუ  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$ .

**განსაზღვრება:** ვიტყვიტ რომ,  $X$  მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  არის ფუნდამენტური ანუ კოშის მიმდევრობა, თუ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$ .

ცხადია რომ მეტრიკულ სივრცეში ყოველი კრებადი მიმდევრობა კოშის მიმდევრობაა, თუმცა შებრუნებული დებულება არაა ყოველთვის ჭეშმარიტი ანუ ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა, საზოგადოდ არაა კრებადი.

**განსაზღვრება:** მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სრული**, თუ მასში ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია.

**განსაზღვრება:**  $(X, d)$  მეტრიკული სივრცის  $A$  ქვესიმრავლეს ეწოდება **ჩაკეტილი**  $(X, d)$  სივრცეში, თუ ის შეიცავს მისი ფუნდამენტალური მიმდევრობების ყველა ზღვარით წერტილს.

**განსაზღვრება:**  $(X, d)$  მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **კომპაქტური**, თუ მისი წერტილების ნებისმიერი  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ მასში კრებადი ქვემიმდევრობა.

**P.S.** თუ საწყისი მეტრიკული სივრცეა  $\mathbb{R}^n$ , მაშინ მისი ქვესიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული.

ვთქვათ მოცემულია  $(X, d)$  სრული მეტრიკული სივრცე. შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $K(X)$ -ით აღვნიშნოთ  $X$  სიმრავლის ყველა კომპაქტური ქვესივრცე. განვსაზღვროთ მანძილის ცნება  $X$  სიმრავლის რაიმე  $x \in X$  წერტილსა და  $K(X)$ -ის რაიმე  $B \in K(X)$  კომპაქტურ სიმრავლეს შორის როგორც უმოკლესი მანძილი ტოლობით:

$$d(x; B) = \min\{d(x; y) : y \in B\}. \quad (14.32)$$

ახლა უკვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ მანძილი ორ კომპაქტურ  $A$  და  $B$  სიმრავლეს შორის ტოლობით:

$$d(A; B) = \max\{d(x; B) : x \in A\}. \quad (14.32)$$

ადვილი შესამოწმებელია რომ, საზოგადოდ,

$$d(A; B) \neq d(B; A). \quad (14.33)$$

ამ ფაქტის გამოსწორება შესაძლებელია, თუ შემოვიღებთ მანძილის ახალ  $h(A; B)$  ცნებას ფორმულით:

$$h(A; B) = \max\{d(A; B); d(B; A)\}. \quad (14.34)$$

ახლა უკვე სრულდება მეტრიკის სიმეტრიულობის თვისება

$$d(A; B) = d(B; A) \quad (14.35)$$

და  $h(A; B)$  არის  $K(X)$  სივრცის მეტრიკა. ამ მეტრიკას ხაუსდორფის მეტრიკა ქვია. ხოლო  $(K(X), h)$  სივრცეს ხაუსდორფის მეტრიკული სივრცე ეწოდება. ბარნსლიმ ამ სივრცეს “ფრაქტალების საცხოვრისი” უწოდა. ეს სრული მეტრიკული სივრცეა. იმ შემთხვევაში, როცა საწყისი მეტრიკული სივრცეა  $\mathbb{R}^2$  შესაბამის კომპაქტურ ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს აღნიშნავენ მოკლედ  $K(\mathbb{R}^2)$ .

## ლიტერატურა

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Пер. с англ., Ижевск, 2002
2. Lauwerier H.A. Fractals – images of chaos. Princetion Univ., press, 1991
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ., Москва, 2000
4. Julia G. Memoir sur l’iteration des fonctions rationnelles. J. de Mathematiques pures et appliquees, v. 1, Paris, 1918
5. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Пер. с англ., Мир, Москва, 1993

6. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы. Пер. с франц., Ижевск, Москва, 2004
7. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Пер. с англ., Ижевск, Москва, 2009
8. Richardson L.F. Weather prediction by numerical process. Cambridge University press, 1922
9. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Институт компьютерных исследований, Ижевск, Москва, 2002
10. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001
11. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие, пер. с англ., Триумф, Москва, 2003
12. Hutchinson J.E. Fractals and Self Similarity. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5, 1981, pp. 713-747
13. Barnsley M. Fractals Everywhere. Academic Press, Boston, 1993
14. Daubechies I. Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. 1992
15. Shumaker L., Webb G., editor. Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press. 1993
16. Teolis A. Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser, 1998
17. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П. Петухова. Москва, 2001
18. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков// Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4, 1997
19. Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты. Москва, 2002
20. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. Москва, 2005
21. Мильнор Дж. Голоморфная динамика, пер. с англ., Ижевск, 2000
22. Fatou P. Sur les equations fonctionnelles, bulletin societe, Math. France, v.47, 1919

## XV თავი. დინამიკური ფრაქტალები

ფრაქტალთა სამყარო მეტად ფართოა და მრავალფეროვანი. ფრაქტალებს ვხვდებით მექანიკასა და აკუსტიკაში, ქიმიასა და ბიოლოგიაში. ახალი რიცხვითი მეთოდები, საშუალებას იძლევა თავიდან ავიცილოთ მოსალოდნელი სოციალური კატასტროფებიც. სინერგეტიკის სპეციალისტები უკვე დარწმუნდნენ, რომ ქიმიური, ფიზიკური, ბიოლოგიური და სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები უფრო ზუსტად აღიწერება ფრაქტალური სტრუქტურებით, ვიდრე კლასიკური უწყვეტი და გლუვი ფუნქციებით. ფრაქტალები ახალი მიმართულება გახდა ხელოვნებაშიც, სადაც მათი საშუალებით იქმნება საოცარი სილამაზისა და მიმზიდველობის სურათები. თუმცა, ჩვენი ინტერესების სფეროა ის მათემატიკური კანონზომიერებები, რაც დაკავშირებულია ფრაქტალებთან.

### 15.1. დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალები

ფრაქტალის ძირითადი მახასიათებელია თვითმსგავსების თვისება, რაც გამოიხატება მამა-ფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის საშუალებით, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დედა-ფრაქტალიდან შესაბამისი რეკურსიით (რეკურენტული ფორმულით)[20] მივიღოთ დინამიკური ფრაქტალი.

განვიხილოთ  $z = x + iy$  კომპლექსური ცვლადი და კომპლექსური რიცხვი  $c = a + ib$ . მათი საშუალებით შევადგინოთ რეკურენტული ფორმულა:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \tag{15.1}$$

რომელიც შეგვიძლია გადავწეროთ სხვა სახითაც, თუ გამოვყოფთ მასში ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მართლაც:

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = (x_n + iy_n)^2 + a + ib, \tag{15.2}$$

ანუ

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \tag{15.3}$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \tag{15.4}$$

განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა, როცა

$$x_0 = 0, y_0 = 0, a = -0.1194, b = 0.6289. \tag{15.5}$$

შევადგინოთ პროგრამა და გამოვთვალოთ  $(x_i, y_i)$  წერტილების მნიშვნელობები  $n = \overline{1,100}$  მნიშვნელობებისათვის, რომლის



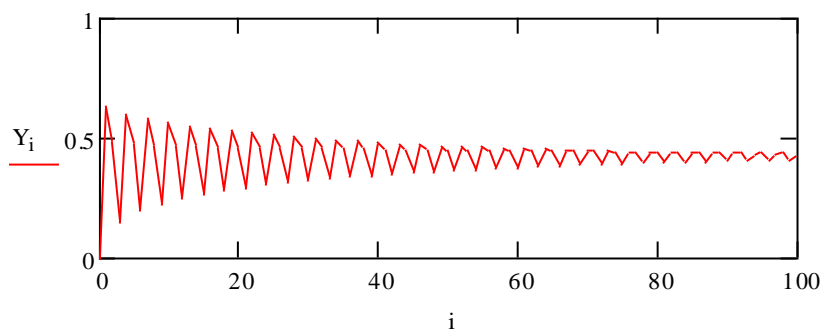
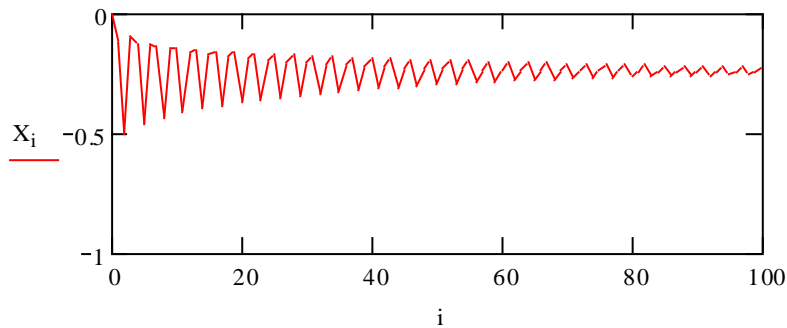
გრაფიკი იქნება ნახ. 15.1, ხოლო შესაბამისი სისტემის ფაზური პორტრეტი მოყვანილია ნახ. 15.1a.

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა და ვაწარმოოთ გამოთვლა Mathcad პროგრამის ბაზაზე:

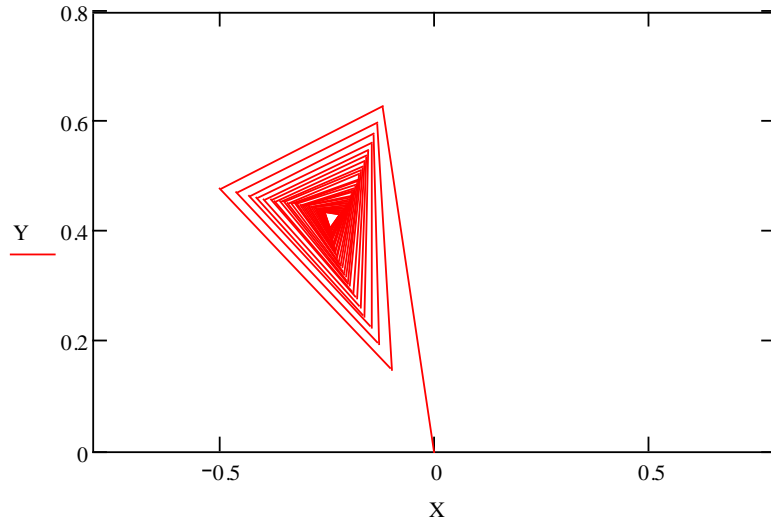
$$X_0 := 0 \quad Y_0 := 0 \quad i := 0..100$$

$$a_i := -0.1194 \quad b_i := 0.6289$$

$$\begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} (X_i)^2 - (Y_i)^2 + a_i \\ 2 \cdot X_i \cdot Y_i + b_i \end{bmatrix}$$

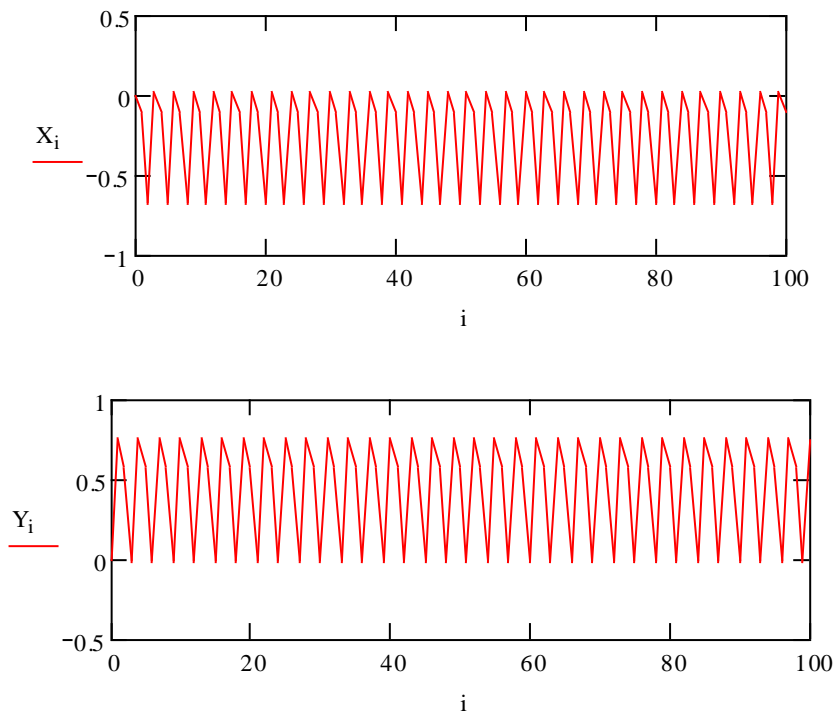


ნახ. 15.1. დისკრეტული დინამიკური სისტემის დინამიკა, როცა  
 $a = -0.1194$ ,  $b = 0.6289$

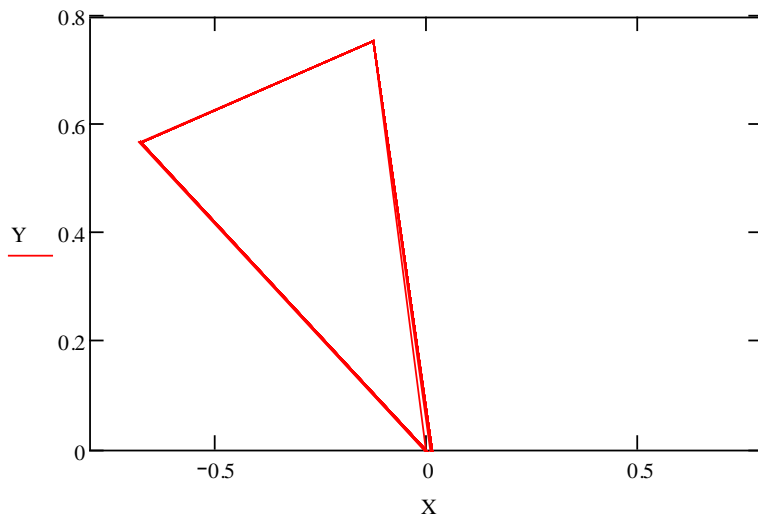


ნახ. 15.1a. დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალის ორბიტა, როცა  $a = -0.1194$ ,  $b = 0.6289$

ანალოგიურად, თუ  $(a; b)$  პარამეტრების მნიშვნელობებია  $a = -0.1244$ ,  $b = 0.756$ , გვექნება პერიოდულად ცვლადი დინამიკური სისტემა ნახ. 15.2, ხოლო შესაბამის ფაზურ პორტრეტს ექნება სახე ნახ. 15.2a.

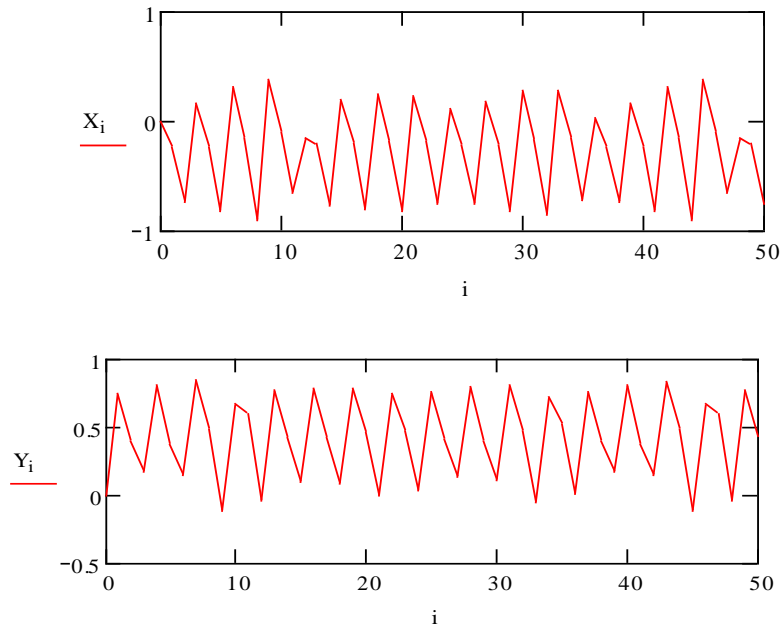


ნახ. 15.2. დისკრეტული დინამიკური სისტემის დინამიკა, როცა  $a = -0.1244$ ,  $b = 0.756$



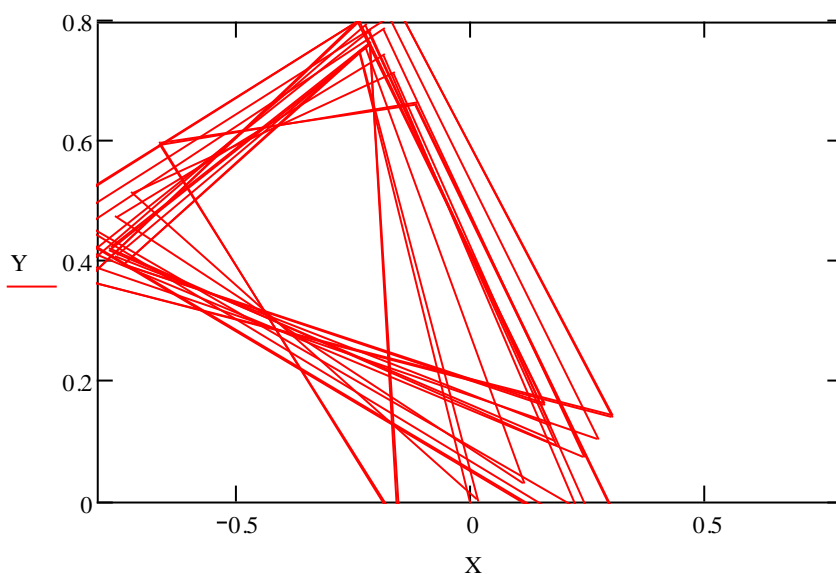
ნახ. 15.2.a. დისკრეტული სამის პერიოდის მქონე დინამიკური სისტემის პერიოდული ორბიტა, როცა  $a = -0.1244$ ,  $b = 0.756$

თუ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებია  $a = -0.237$ ,  $b = 0.75$ ,



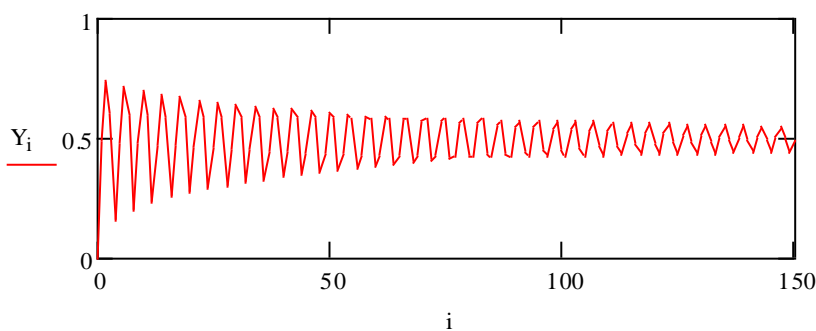
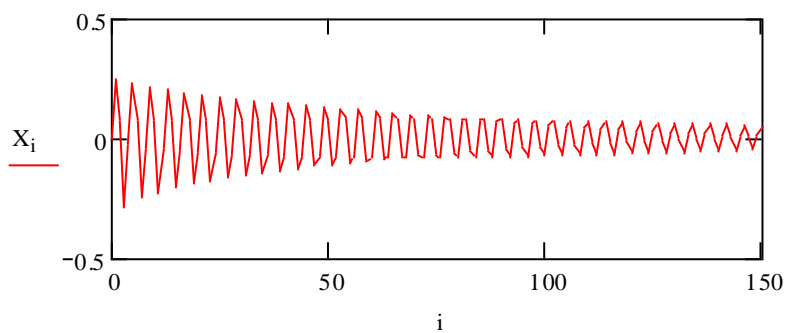
ნახ. 15.3. დისკრეტული ქაოსური სისტემის დინამიკა, როცა  $a = -0.237$ ,  $b = 0.75$

გვეჩვენება ქაოსური დინამიკური სისტემა ნახ. 15.3, შესაბამისი ფაზური პორტრეტით ნახ. 15.3a.



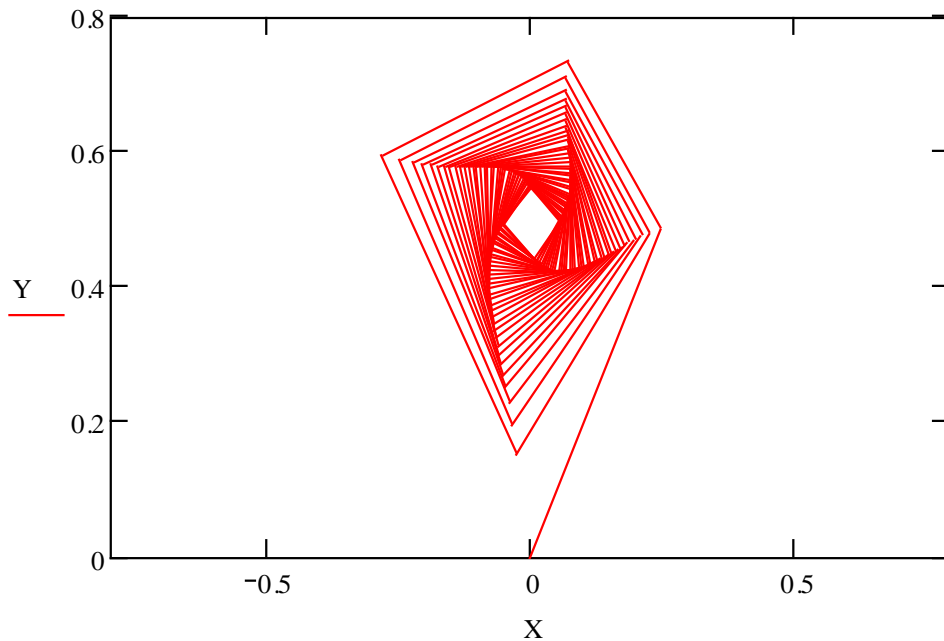
ნახ. 15.3.a. დისკრეტული ქაოსური, უსასრულობისაკენ მიმავალი სისტემის ორბიტა, როცა  $a = -0.237$ ,  $b = 0.75$

თუ  $(a ; b)$  პარამეტრების მნიშვნელობებია  $a = 0.25$ ,  $b = 0.49$ ,



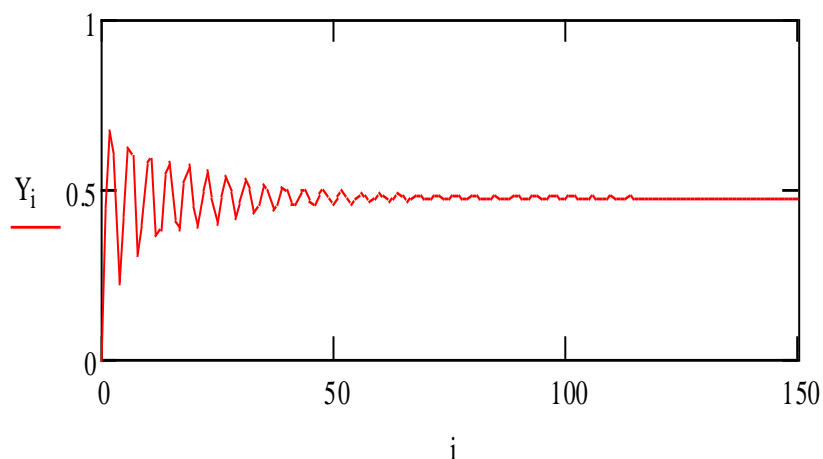
ნახ. 15.4. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემა

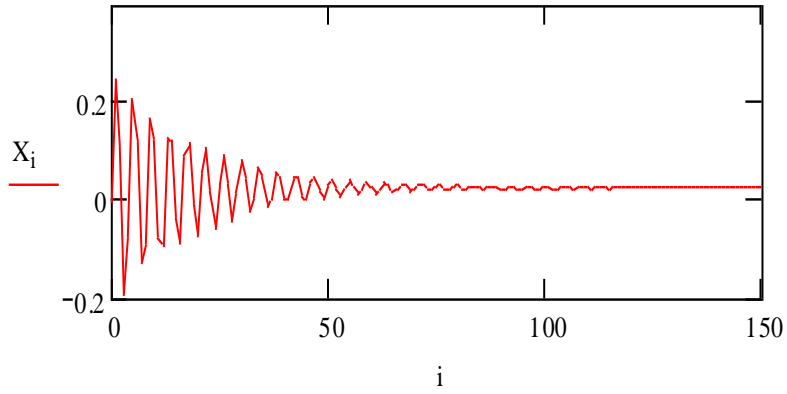
მაშინ გვექნება ფრაქტალური ცენტრისაკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა ნახ. 15.4, რომლის ფაზურ პორტრეტს აქვს ფრაქტალური ორბიტის სახე ნახ. 15.4a.



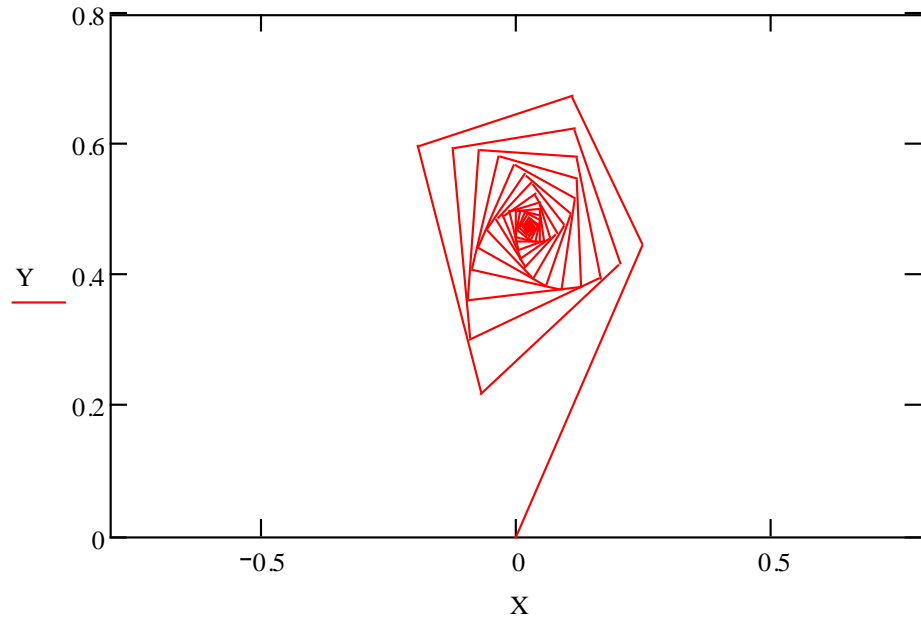
ნახ. 15.4a. ფრაქტალური ცენტრისაკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა  $a = 0.25$ ,  $b = 0.49$

თუ განვიხილავთ  $(a ; b)$  პარამეტრების მნიშვნელობებს:  $a = 0.25$ ,  $b = 0.45$ , მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა ნახ. 15.5, შესაბამისი ნახ. 15.5a, ფაზური პორტრეტით.



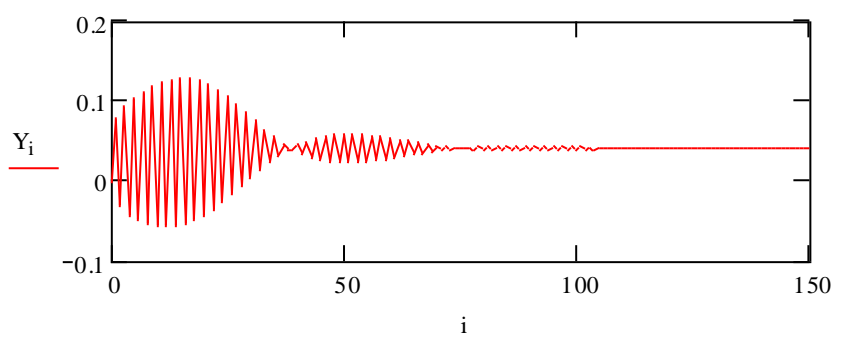
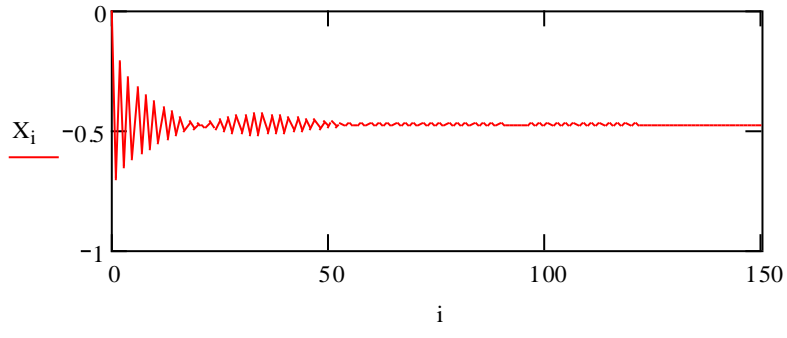


ნახ. 15.5. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა  $a = 0.25$ ,  $b = 0.45$

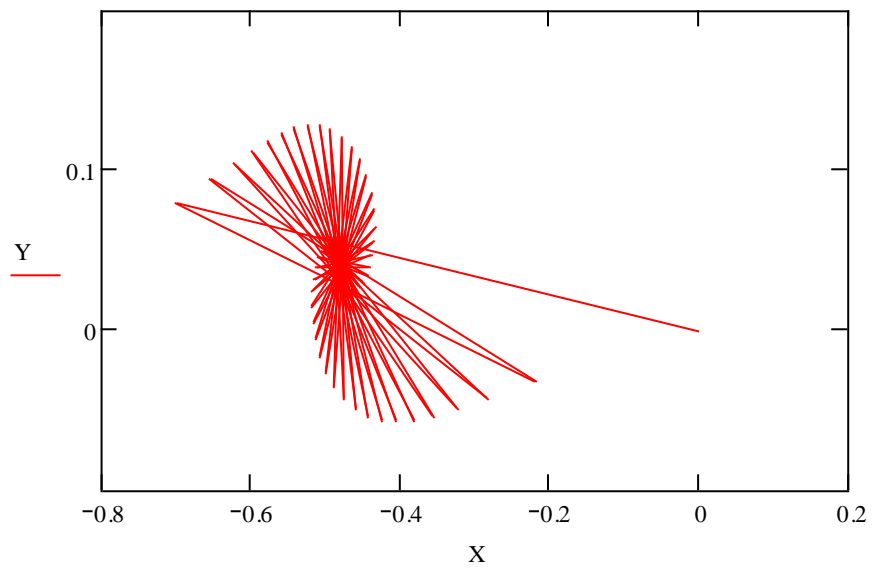


ნახ. 15.5a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა  $a = 0.25$ ,  $b = 0.45$

განვიხილოთ  $(a ; b)$  პარამეტრების მნიშვნელობებს:  
 $a = -0.7$ ,  $b = 0.08$ , მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა ნახ. 15.6, შესაბამისი ნახ. 15.6a, ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.



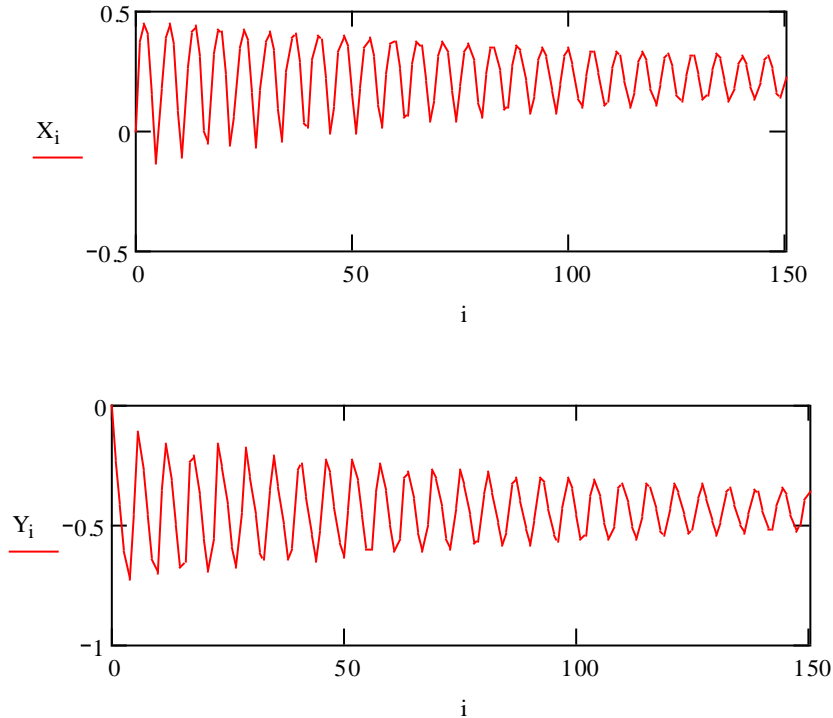
ნახ. 15.6. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა  $a = -0.7$ ,  $b = 0.08$



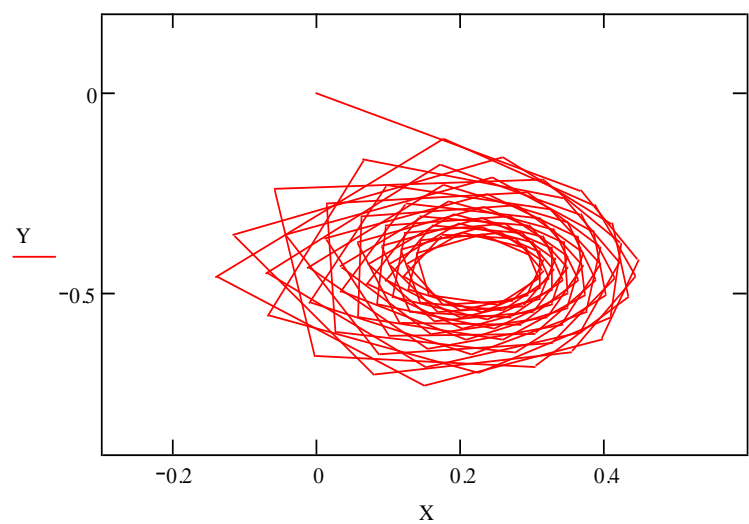
ნახ. 15.6a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა  $a = -0.7$ ,  $b = 0.08$

განვიხილოთ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებს:

$a = 0.37$ ,  $b = -0.24$ , მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა ნახ. 15.7, შესაბამისი ნახ. 15.7a, ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.



ნახ. 15.7. ფრაქტალური ცენტრისაკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა  $a = 0.37$ ,  $b = -0.24$



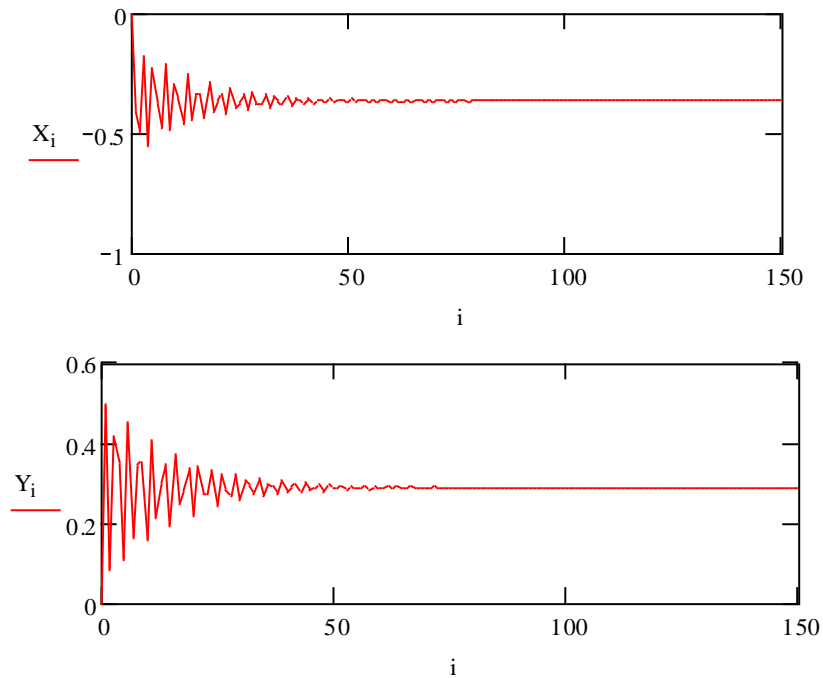
ნახ. 15.7a. ფრაქტალური ცენტრისაკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა  $a = 0.37$ ,  $b = -0.24$

განვიხილოთ  $(a ; b)$  პარამეტრების მნიშვნელობები:

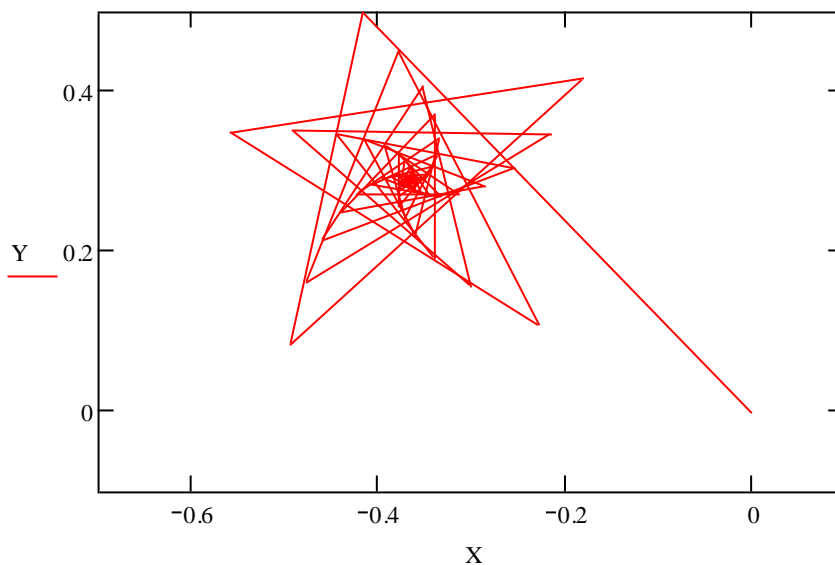
$a = -0.4161$ ,  $b = 0.5$ , მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა ნახ. 15.8, შესაბამისი ნახ. 15.8a, ფაზური



პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.



ნახ. 15.8. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა  $a = -0.4161$ ,  $b = 0.5$



ნახ. 15.8a. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა  $a = -0.4161$ ,  $b = 0.5$

განვიხილოთ (15.3), (15.4) იტერაციული ფორმულებით მოცემული დისკრეტული დინამიკური სისტემის  $(x,y)$  ორბიტები, რომლებიც წარმოიშობა სისტემის სხვადასხვა საწყისი  $(a,b)$  პირობების შემთხვევაში. ნახ. 15.1a წარმოადგენს დისკრეტულ დინამიკურ ფრაქტალს, რომელიც წარმოიშობა (15.5) საწყისი

პირობების შემთხვევაში და მიისწრაფის  $(-0.2381; 0.4242)$  მიზიდულობის ცენტრისაკენ. ნახ. 15.2a არაა ფრაქტალური, ის წარმოადგენს პერიოდულ ორბიტას, რომლის პერიოდიცაა სამი, თუმცა, მისი საწყისი პირობები, დიდად არ განსხვავდებიან წინა ნახ. 15.1a ფრაქტალის საწყისი პირობებისაგან. ნახ. 15.3a წარმოადგენს უსასრულობისკენ მიმავალ იტერაციულ ორბიტას, რომელიც შეესაბამება ქაოსურ სისტემას. ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ სამი სხვადასხვა ტიპის ორბიტა: ა) ფრაქტალური, მიზიდულობის ცენტრისკენ მიმავალი ორბიტა (ნახ. 15.1a; 15.4a-15.8a); ბ) პერიოდული ორბიტა ნახ. 15.2a; გ) ქაოსური, უსასრულობისკენ მიმავალი ორბიტა ნახ. 15.3a.

ყველაზე მეტ ყურადღებას იმსახურებენ ფრაქტალური ორბიტები.

## 15.2. ფრაქტალური ორბიტები და ჟულიას სიმრავლეები

განვიხილოთ უფრო დეტალურად (15.1) დისკრეტული დინამიკური სისტემა, რათა გავერკვეთ თუ, რატომ არსებობს საწყის მონაცემებსა და პარამეტრის არჩევაზე დამოკიდებული სამი სხვადასხვა ტიპის ორბიტა.

ამ პრობლემის შესწავლის მიზნით, განვიხილოთ ჯერ (15.1) დინამიკური სისტემის მსგავსი, ნამდვილი ცვლადის (15.6) დინამიკური სისტემა:

$$f(x): x_{n+1} = x_n^2 + a, \quad a = \text{const.} \quad (15.6)$$

დავუშვათ, რომ  $a = 0$ , მაშინ (15.6) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$x_{n+1} = x_n^2, \quad (15.7)$$

ამ სისტემის უძრავი (წონასწორობის) წერტილების საპოვნელად უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

$$x_{n+1} = x_n = x_0. \quad (15.8)$$

მაშინ (15.7) იტერაციული ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$x_0 = x_0^2 \text{ ანუ } x_0 = 0 \vee x_0 = 1 \vee x_0 = \infty. \quad (15.9)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (15.7) დინამიკურ სისტემას აქვს სამი წერტილი  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = \infty$  და  $x_0 = 1$ .

**შევისწავლოთ მათი მდგრადობის საკითხი.** ამისათვის, წონასწორობის წერტილს უნდა მივცეთ მცირე ნაზრდი  $0 < \delta_n \ll 1$  და (15.7) სისტემიდან გამომდინარე შევისწავლოთ ნაზრდის დინამიკა. თუ ის იზრდება, მაშინ შესაბამისი წერტილი არაა მდგრადი, ხოლო თუ ნულისკენ მიისწრაფის, მაშინ გვაქვს მდგრადობა. განვიხილოთ ცალ-ცალკე წონასწორობის წერტილების მდგრადობის საკითხი.

ა)  $x_0 = 0$ . მაშინ განვიხილავთ ამ წერტილის შემოფოთებას ანუ

$$x_n = 0 + \delta_n. \quad (15.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ (15.7) სისტემის სახეს, გვექნება

$$\delta_{n+1} = \delta_n^2. \quad (15.11)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta_n \ll 1, \quad (15.12)$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \quad (15.13)$$

ე.ი. წონასწორობის წერტილი  $x_0 = 0$  მდგრადია. რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ თუ ავიღებთ სისტემის საწყის მდებარეობად  $|x_0| < 1$  მნიშვნელობას, მაშინ სისტემას აქვს ფრაქტალური მიზიდვის ცენტრი  $x = 0$  და ნებისმიერი ასეთი  $|x_0| < 1$  საწყისი პირობის შემთხვევაში, მისი ორბიტა მიიზიდება ამ ცენტრის მიერ. ასევე, მიზიდულობის ცენტრია  $x_0 = \infty$  და მისკენ მიიზიდებიან ისეთი წერტილების ორბიტები, რომელთათვისაც  $|x_0| > 1$ .

ბ)  $x_0 = 1$ . მაშინ განვიხილავთ ამ წერტილის შემოფოთებას ანუ

$$x_n = 1 + \delta_n. \quad (15.14)$$

თუ გავითვალისწინებთ (15.7) სისტემის სახეს, გვექნება

$$1 + \delta_{n+1} = (1 + \delta_n)^2, \quad (15.15)$$

ანუ

$$1 + \delta_{n+1} = 1 + 2\delta_n + \delta_n^2, \quad (15.16)$$

მაშინ

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 2 + \delta_n. \quad (15.17)$$

და რადგან  $0 < \delta_n \ll 1$ , მივიღებთ რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \infty. \quad (15.18)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $x_0 = 1$  წონასწორობის წერტილი არაა მდგრადი. მაშასადამე, თუ სისტემის საწყისი მდგომარეობაა  $x_0 = 1$  მაშინ მცირე შემოფოთებაც კი საკმარისია რომ სისტემის ორბიტა წავიდეს უსასრულობაში, თუმცა შემოფოთების არ არსებობის შემთხვევაში, სისტემა იძლევა პერიოდულ პროცესს. თუ საწყისი მნიშვნელობა  $|x_0| > 1$  მაშინ სისტემა იძლევა უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას.

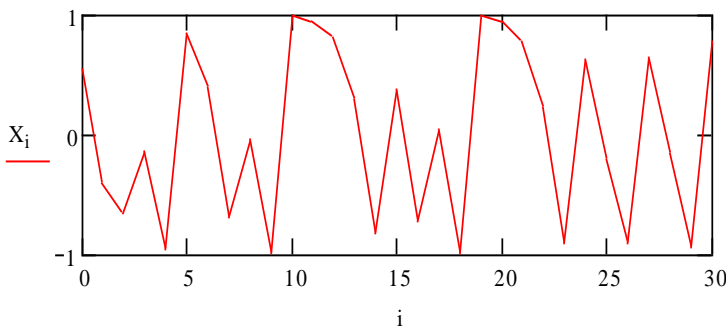
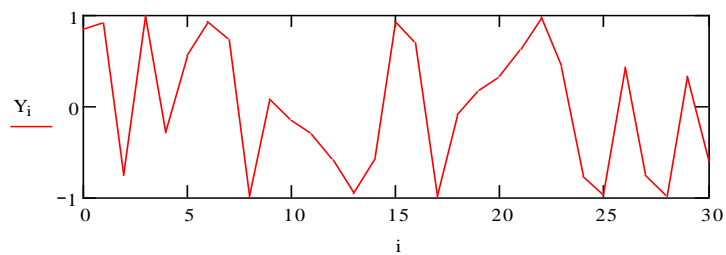
ეს სამი შემთხვევა, შეესაბამება ნახ. 15.1a - 15.3a სამ შემთხვევას.

ეხლა განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადების შემთხვევა (15.1).

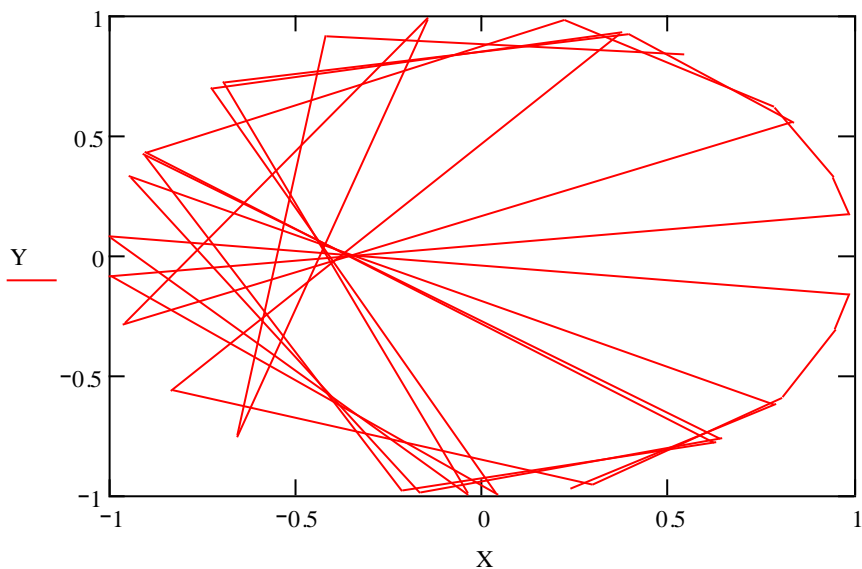
$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \quad (15.19)$$

თუ იტერაციის რომელიმე ბიჯზე  $|z_n| > 1$  მაშინ ფუნქცია მოგვცემს უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას. არსებობს ზღვრული შემთხვევა  $|z_n| = 1$ ;  $c = 0$ .

მაგალითად, თუ  $x_0 = \cos 1$ ;  $y_0 = \sin 1$ , მაშინ წერტილები ლაგდებიან ერთეულოვანი რადიუსის წრეწირზე, თუმცა, რამდენიმე ბიჯის შემდეგ თანდათან ცილდებიან მას ნახ. 15.9, ნახ. 15.9a. ითვლება რომ, წრეწირზე მდებარე წერტილები არამდგრადია და ისინი ან მოგვცემენ უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას ან მიიზიდებიან წრის რომელიმე შიგა წერტილის მიერ.



ნახ. 15.9. სისტემის დინამიკა როცა  $|z_n| = 1$ ;  $c = 0$



ნახ. 15.9a. დისკრეტული დინამიკური სისტემის ორბიტა, როცა  
 $|z_n| = 1; c = 0$

$f(z)$  ფუნქციის  $J(f)$  ჟულიას სიმრავლე, ეწოდება იმ  $z$  წერტილების სიმრავლის საზღვარს რომელთა ორბიტაც უსასრულობისკენ მიდის  $n$ -თან ერთად [3].

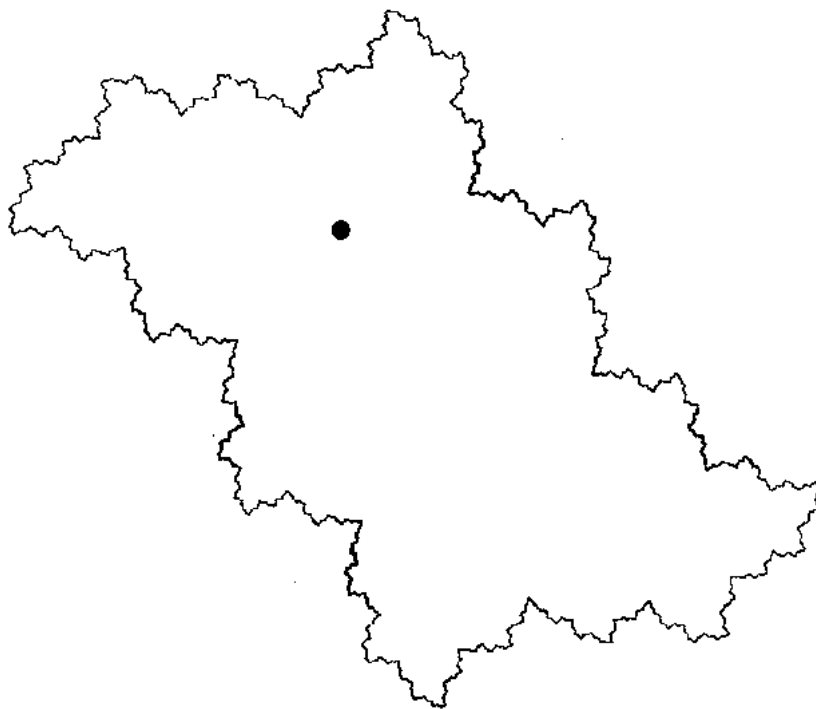
$$J(f) = \partial\{z: \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \rightarrow \infty\}. \quad (15.20)$$

ან სხვანაირად:

$J(f)$  ჟულიას სიმრავლე, არის  $f$  ფუნქციის ყველა მიზიდულობის წონასწორობის წერტილის (მათ შორის  $\infty$ -ის), მიზიდულობის ველის საზღვარი.

უმარტივესი  $z_{n+1} = z_n^2$  სისტემისათვის ჟულიას სიმრავლეს აქვს სახე  $|z| = 1$ . აქ გვაქვს ქაოსი, თუმცა, ეს სიმრავლე არ წარმოადგენს ფრაქტალს, მაგრამ როგორც წესი, ჟულიას სიმრავლე ფრაქტალია[21]. ამიტომ როგორც წესი, განიხილავენ მოცემული  $c$  მნიშვნელობისათვის  $z$ -ის ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც  $|z| < 2$  და შესაბამისი წერტილების სიმრავლეს ჟულიას შიდა სიმრავლეს უწოდებენ. ითვლება, რომ თუ  $|z| > 2$  მაშინ შესაბამისი ორბიტა მიდის უსასრულობისაკენ. ჟულიას შიდა სიმრავლის საზღვარს ჟულიას წირს უწოდებენ. ხოლო ჟულიას წირის დამატებით სიმრავლეს - ფატუს სიმრავლეს[4],[22].

ნახ. 15.1a-ზე გამოსახული დისკრეტული დინამიკური სისტემის შესაბამის ჟულიას სიმრავლეს აქვს სახე ნახ. 15.10:



ნახ. 15.10. დისკრეტული დინამიკური სისტემის ჟულიას სიმრავლე, რომლის ორბიტაც გამოსახულია ნახ. 15.1a-ზე

განიხილოთ  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  სქემისათვის ჟულიას შიდა სიმრავლის აგების პროგრამა ფსევდოკოდებში, სადაც  $c = a + ib$ : მონაცემების შეტანა:

$a, b$

$(c, d)$  (ფანჯრის ცენტრი)

$s$  (ფანჯრის ზომები)

$p$  (პიქსელების რაოდენობა ფანჯრის ყოველ გვერდში)

შედეგების გამოტანა:

ჟულიას შიდა სიმრავლის გამოსახვა

ინიციალიზაცია:

გრაფიკული ეკრანის ფანჯრის ზომებია  $\left[ c - \frac{s}{2}, c + \frac{s}{2} \right] \times \left[ d - \frac{s}{2}, d + \frac{s}{2} \right]$   
ბიჯები:

for  $m = 1$  to  $p$

$$x_0 = c - \frac{s}{2} + \frac{ms}{p}$$

for  $n = 1$  to  $p$

$$y_0 = d - \frac{s}{2} + \frac{ns}{p}$$

$$x = x_0$$

$$y = y_0$$

$$z = 0$$

iter = 1

while iter < 20

iter = iter + 1

$$x_1 = x^2 - y^2 + a$$

$$y_1 = 2xy + b$$

$$x = x_1$$

$$y = y_1$$

$$z = x^2 + y^2$$

if  $z > 4$  ციკლიდან გამოსვლა, end if

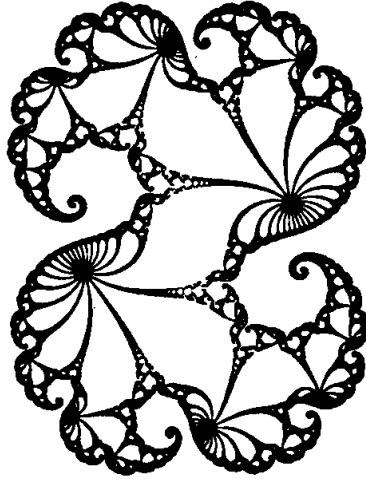
end While

if  $z < 4$  ავაგოთ წერტილები  $(x_0, y_0)$ , end if

end for

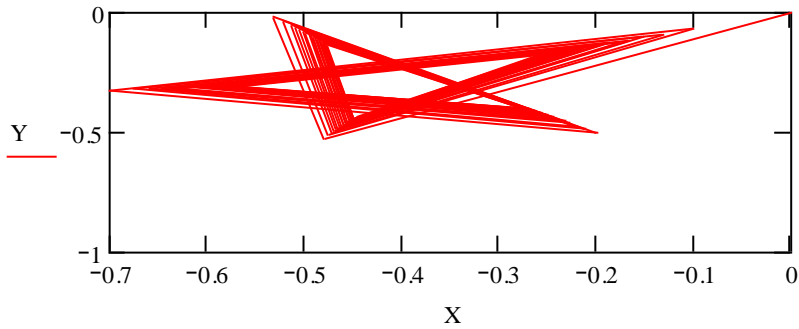
end for

ფრო ხშირად განიხილავენ ჟულიას შიდა სიმრავლის საზღვარს და მას უწოდებენ ჟულიას წირს, რომელთა მაგალითებიც გამოსახულია ნახ. 15.11, ნახ. 15.12, ნახ. 15.13, ნახ. 15.14

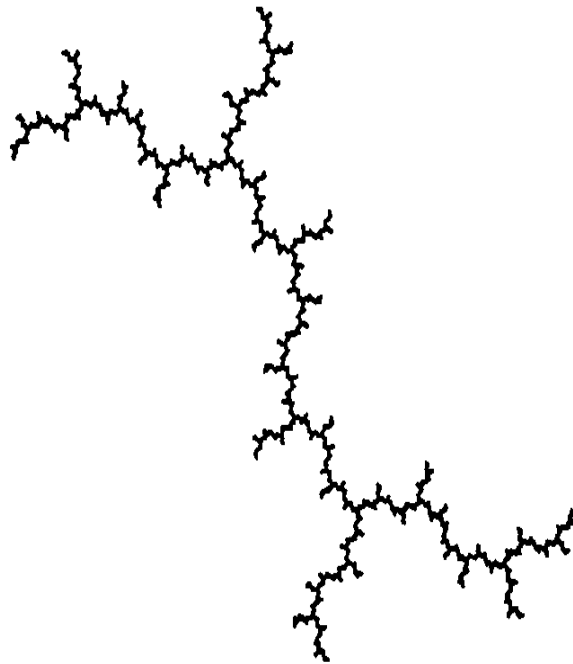


ნახ. 15.11. ჟულიას წირი. პარაბოლური შემთხვევა, როცა  $c = -0.48 - 0.53i$

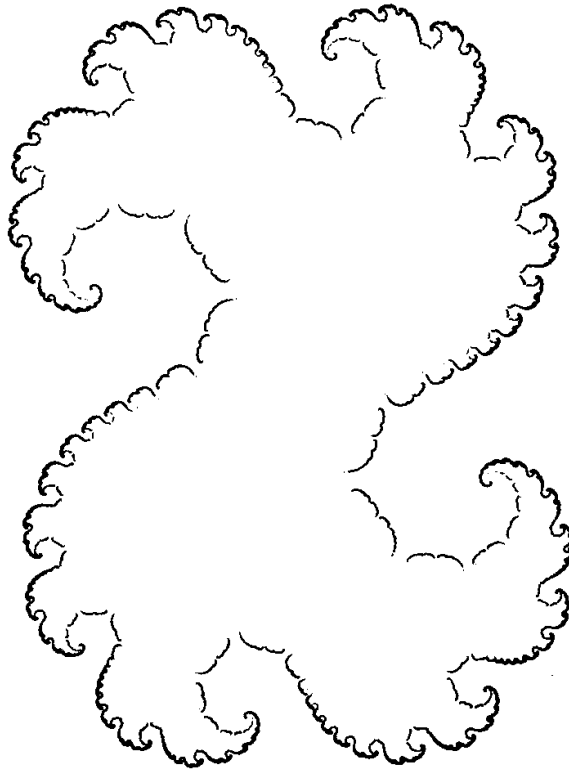
ამ შემთხვევაში, ფაზური პორტრეტი წარმოადგენს ვარსკვლავის ფორმის ორბიტას ნახ. 15.11a



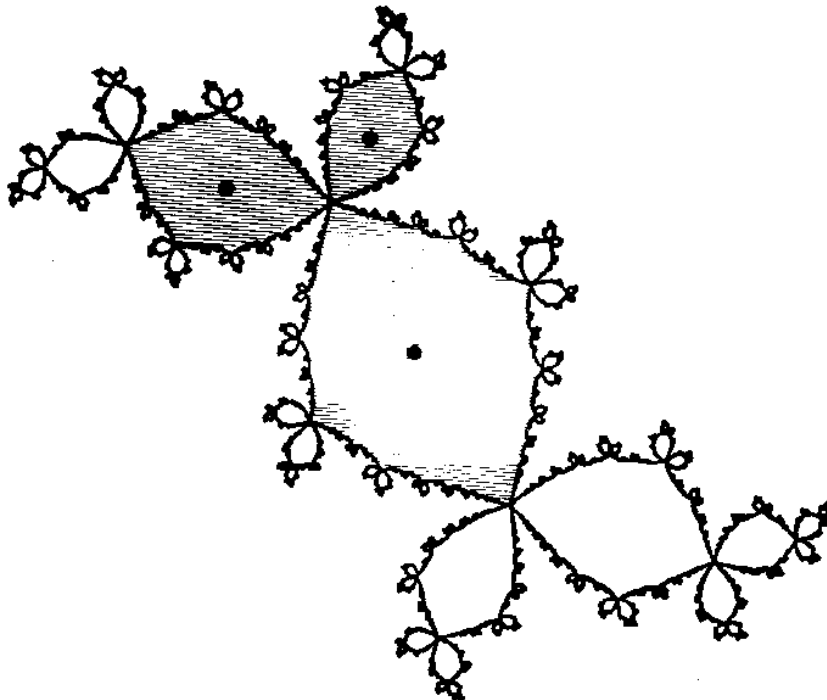
ნახ. 15.11a. ფაზური პორტრეტი ვარსკვლავის ფორმის ორბიტაა, როცა  $c = -0.48 - 0.53i$



ნახ. 15.12. ჟულიას წირი. დენდრიტი როცა  $c = i$



ნახ. 15.13. ჟულიას წირი. როცა  $c = 0.32 + 0.043i$

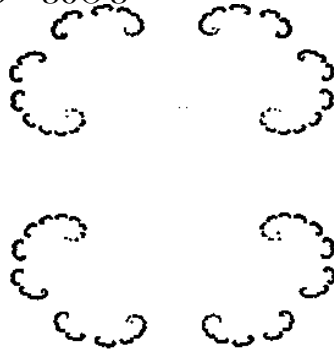


ნახ. 15.14. დისკრეტული სამის პერიოდის სმქონე დინამიკური სისტემის ჟულიას სიმრავლე, რომლის ორბიტაც გამოსახულია ნახ. 15.2. ა-ზე

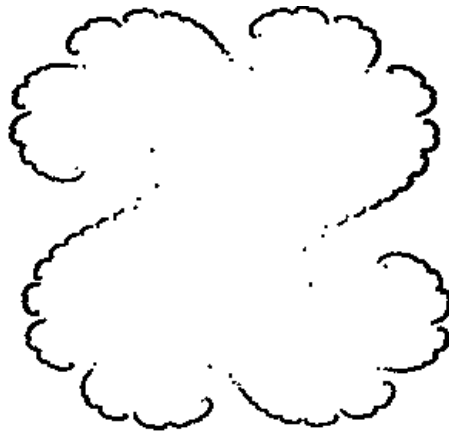


### 15.3. მანდელბროტის სიმრავლე

როგორც უკვე ვიცით,  $f(z) = z^2 + c$  ფუნქციის ჟულიას სიმრავლე შეიძლება იყოს სხვადასხვა ტიპის, იმის მიხედვით თუ როგორია  $c$  პარამეტრის მნიშვნელობა. ამის მიუხედავად, ამ ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ ორი ტიპის ჟულიას სიმრავლე: ა) ბმული სიმრავლე; ბ) სრულიად არა ბმული. ბმული ჟულიას სიმრავლეები ერთმანეთისაგან შეიძლება ძალიან განსხვავდებოდეს ვიზუალური თვალსაზრისით. ერთნი შეიძლება წარმოადგენდნენ შეკრულ წირებს ფრაქტალური სტრუქტურით, როგორც მაგალითად,  $0 < |c| < 0.25$  შემთხვევაში; ხოლო სრულიად არაბმულ ჟულიას სიმრავლეებს აქვთ კანტორის მტვერის გეომეტრიული სტრუქტურა ნახ. 15.15, ნახ. 15.16

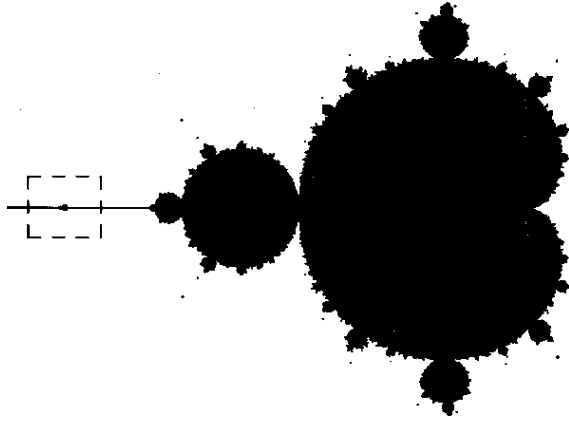


ნახ. 15.15. ჟულიას სიმრავლე, როცა  $c = 0.5$



ნახ. 15.16. ჟულიას სიმრავლე, როცა  $c = 0.31 + 0.04i$

მოცემული  $f(z) = z^2 + c$  ფუნქციის ჟულიას სიმრავლის ტიპის ინდიკატორს წარმოადგენს მისი მანდელბროტის სიმრავლე ნახ. 15.17



ნახ. 15.17. მანდელბროტის სიმრავლე

მანდელბროტის სიმრავლის ყოველ  $c$  წერტილს შეესაბამება ბმული ჟულიას სიმრავლე, ხოლო მის დამატებით სიმრავლეს  $c$  – სრლიად არაბმული ჟულიას სიმრავლე.

განსაზღვრება:  $f(z) = z^2 + c$  ფუნქციის მანდელბროტის სიმრავლე ეწოდება ისეთი  $c \in \mathbb{C}$  კომპლექსური რიცხვების სიმრავლეს, რომლებსთვისაც  $0$  წერტილის ორბიტები შემოსაზღვრულია.

ახლა შევადგინოთ  $f(z) = z^2 + c$  ფუნქციის მანდელბროტის სიმრავლის აგების პროგრამა ფსევდოკოდებში:

მონაცემების შეტანა:

$(i, j)$  (ფანჯრის ცენტრი მაგ.  $(0 ; 0)$ )

$s$  (ფანჯრის ზომები  $s \times s$ )

$p$  (პიქსელების რაოდენობა ფანჯრის ყოველ გვერდში)

*iter* (იტერაციათა რაოდენობა)

შედეგების გამოტანა:

მანდელბროტის სიმრავლის გამოსახვა

ინიციალიზაცია:

გრაფიკული ეკრანის ფანჯრის ზომებია  $\left[ i - \frac{s}{2}, i + \frac{s}{2} \right] \times \left[ j - \frac{s}{2}, j + \frac{s}{2} \right]$

ბიჯები:

```

for m = 1 to p
  a = i - s/2 + ms/p
  for n = 1 to p
    b = j - s/2 + ns/p
    x = 0
    y = 0
    iter = 1
  
```

```

while iter ≤ 20
  iter = iter + 1
  x1 = x2 - y2 + a
  y1 = 2xy + b
  x = x1
  y = y1
  z = x2 + y2
if z > 4, ციკლიდან გამოსვლა, end if
end while
if z < 4
  plot(a; b)
end if
end for
end for

```

## XVI თავი. გამოსახულების შეკუმშვა ვეივლეტებით

### 16.1. ვეივლეტები და სიგნალების მათემატიკური მოდელირება

ვეივლეტები - არის გარკვეული ზოგადი დასახელება განსაკუთრებული ტიპის ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ მოკლე, ტალღათა პაკეტის სახე, ნულოვანი ინტეგრალური მნიშვნელობით და გარკვეული, ზოგჯერ რთული ფორმით, რომელსაც ახასიათებს ლოკალური ძვრა და მასშტაბირება.

ვეივლეტები იგება სპეციალური ბაზისური ფუნქციების მეშვეობით, რომლებიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს. ვეივლეტების ერთობლიობას შეუძლია ფუნქციისა და სიგნალების მიახლოება ზუსტად ან გარკვეული სიზუსტით. ვეივლეტები საშუალებას იძლევა გამოსახულებები დავამუშაოთ, გავუკეთოთ დეკომპოზიცია, რესტავრაცია და იდენტიფიკაცია; ასევე გავფილტროთ ხმაურისაგან, შევკუმშოთ ფაილები, რომლებიც შეიცავენ რიცხვით მონაცემებსა და გამოსახულებებს.

ვეივლეტების ცნება შემოღებულ იქნა გროსმანისა და მორლეს მიერ 80-იანი წლებში [14]. ამჟამად, ვეივლეტები ფართოდ გამოიყენება სახეთა ამოცნობის ამოცანებში; სხვადასხვა ტიპის სიგნალების დამუშავებისა და სინთეზის ამოცანებში; ტურბულენტური ველების თვისებების შესწავლისათვის და ა.შ.

**ვეივლეტ-გარდაქმნა** მდგომარეობს იმაში, რომ სიგნალს დაშლიან სოლიტონისებრი ფუნქციებისაგან შემდგარი, მასშტაბური და წანაცვლებული ბაზისის მიმართ. ბაზისის თითოეული ფუნქცია ახასიათებს როგორც გარკვეულ სივრცით (დროით) სიხშირეს, ასევე მის ლოკალიზაციას ფიზიკურ სივრცეში (დროში).

სიგნალების ანალიზის ტრადიციული ფურიეს გარდაქმნი-სგან განსხვავებით, ვეივლეტ-გარდაქმნა გვაძლევს ერთგანზომი-ლებიანი სიგნალის ორგანზომიებიანი სიხშირე-კოორდინატად წარმოდგენას. ამის შედეგად, საშუალება გვქვია შევისწავ-ლოთ სიგნალი, ერთდროულად, ფიზიკურ და სპექტრულ სივრცეში.

ცნობილია მოკლე, მაღალსიხშირიანი ან ლოკალიზებულ მაღალსიხშირიანი სიგნალების დამუშავების სირთულე. ასეთი მონაცემების ადეკვატური გაშიფრვისათვის საჭიროა ისეთი ბაზისი, რომლის ელემენტები წარმოადგენს მაღალ სიხშირეებს და ასევე კარგად ლოკალიზებულია სივრცეში (დროში). ვეივლეტები საშუალებას გვაძლევს დავამუშაოთ ასეთი სიგნალები მოძრავი სიხშირე-დროის ფანჯრით. ამის გამო, ზოგჯერ ვეივლეტებს მათემატიკურ მიკროსკოპსაც უწოდებენ. სიგნალების წარმოდგენისას მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ ისეთი წარმოდგენა, რომელიც გარკვეული აზრით ოპტიმალური იქნება. სასურველია სიგნალის ისეთი წარმოდგენა, რომელიც შეინარჩუნებს სიგნალის ყველა თვისებას. ასეთი წარმოდგენა შეიძლება  $x$  სიგნალის **დეკომპოზიციით**, **ელემენტარული  $x_i$  სიგნალებით**:

$$x = \sum_i x_i, \tag{16.1}$$

სადაც  $x_i$  ელემენტარული ფუნქციებია. უფრო მეტიც, სასურველია, რომ ამ ფუნქციებს ჰქონდეთ გარკვეული ფიზიკური ინტერპრეტაცია. სიგნალის დეკომპოზიცია უნდა შესრულდეს სწრაფი ალგორითმით, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მას მხოლოდ თეორიული ღირებულება ექნებოდა. დეკომპოზიციისას უნდა ამოიხსნას აპროქსიმაციის ამოცანა ანუ დეკომპოზიციის

შედგენი, რაც შეიძლება ახლოს უნდა იყოს საწყის სიგნალთან. ეს უნდა განხორციელდეს, რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის ელემენტარული ბლოკების გამოყენებით. სხვადასხვა “ოპტიკური დაშვებით”, ანალიზის კონცეფცია საშუალებას მოგვცემს შევასრულოთ ეს მოთხოვნები ბუნებრივად, საწყისი უხეში აპროქსიმაციის თანდათანობითი დაზუსტებით, დეტალების მიმდევრობითი დამატებით. ასეთი ამოცანის კლასიკურ გადაწყვეტას გვაძლევს ფურიეს გარდაქმნა როგორც უწყვეტი, ასევე წყვეტილი დროით. შემუშავებულია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მრავალი ალგორითმი. მიუხედავად იმისა, რომ ეს სხვადასხვა ალგორითმით ამოიხსნება, თითოეულისთვის დამახასიათებელია ერთი და იგივე მათემატიკური აპარატის გამოყენება.

თუ მოცემულია ერთსიხშირიანი სიგნალი  $e^{i\omega t}$ , მაშინ ფურიეს გარდაქმნაზე დამყარებული მეთოდები საშუალებას მოგვცემს  $\omega$  სიხშირეზე ვიპოვოთ სიგნალის პიკი. თუ სიგნალი შეიცავს ორ სინუსოიდას მაინც, განსაზღვრულს სხვადასხვა დროით ინტერვალზე, მაშინ წარმოიშობა პრობლემა. მიიღება ორი პიკი დროის ლოკალიზაციის გარეშე. აქედან გამომდინარეობს სიგნალის სიხშირე-დრო ცვლადებში წარმოდგენის აუცილებლობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა მიგველო ლოკალური ინფორმაცია სიგნალის შესახებ როგორც სიხშირით, ასევე დროის არეში. ცხადია, რომ საჭიროა უფრო ლოკალიზებული ბაზისური ფუნქციები, ვიდრე სინუსოიდაა. ამიტომ განიხილავენ ე.წ. ფანჯრებს

$$\omega(t) \sin t, \tag{16.2}$$

სადაც  $\omega(t)$  ფანჯრის ფუნქციაა, რომელიც იძლევა დროის ლოკალიზაციას. ასეთ გარდაქმნას **ფანჯრულ ფურიეს გარდაქმნას** უწოდებენ. მიღებული ელემენტარული ბლოკები ყოფენ სიხშირე-დრო სიბრტყეს გარკვეულ ნაწილებად. ასეთ სიტუაციაში, **ჰეიზენბერგის პრინციპიდან** გამომდინარე, შეუძლებელია მივალწიოთ ერთნაირად კარგ, დროით და სიხშირით ლოკალიზაციას. სიხშირისა და დროის დაშვებები შემოიფარგლება **ჰეიზენბერგის უტოლობით**:

$$\Delta t \cdot \Delta f \leq \frac{1}{4\pi}. \quad (16.3)$$

ვეივლეტ-ანალიზი შედარებით ახალი ცნებაა, ამიტომ მისი გადმოცემისას გამოიყენება ფურიე-ანალიზის პარალელური განხილვა.

ვთქვათ,  $L_2(0;2\pi)$  არის  $(0;2\pi)$ -შუალედში განსაზღვრული, კვადრატით ინტეგრირებად ფუნქციათა სიმრავლე (ფუნქციონალური სივრცე) ანუ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (16.4)$$

ეს ალაგ-ალაგ უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლის განსაზღვრებაა. ის შეიძლება პერიოდულ ფუნქციამდე შევავსოთ ნამდვილ რიცხვთა  $R$  სიმრავლეში

$$f(x) = f(x - 2\pi), \quad \forall x. \quad (16.5)$$

ნებისმიერი  $2\pi$ -პერიოდიანი კვადრატით ინტეგრირებადი  $f(x) \in L_2(0;2\pi)$  ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ფურიეს მწკრივით

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}. \quad (16.6)$$

სადაც  $C_n$  მუდმივი რიცხვებია და

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (16.7)$$

ამავე დროს (16.6) მწკრივი თანაბრად კრებადია ანუ

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=M}^N C_n e^{inx} \right|^2 dx = 0. \quad (16.8)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ

$$W_n(x) = e^{inx}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (16.9)$$

ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს  $L_2(0;2\pi)$  სივრცეში. ბაზისური ფუნქციები მიიღება ერთადერთი  $W(x) = e^{ix}$  ფუნქციის მასშტაბური ცვლილებებით ისე, რომ

$$W_n(x) = W(nx). \quad (16.10)$$

ამ მოქმედებას ინტეგრალურ გაფართოებას უწოდებენ.

**P.S.** ასე, რომ  $L_2(0;2\pi)$ -ს ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრირებადი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ბაზისური  $W(x) = e^{ix}$  ფუნქციის  $W_n(x) = W(nx)$  ინტეგრალური გაფართოების სუპერპოზიციით.

რადგან (16.9) ბაზისი ორთონორმირებულია, ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (16.11)$$

ეხლა განვიხილოთ  $f(x)$  ფუნქციის წარმოდგენა ვეივლეტების მეშვეობით. განვიხილოთ კვადრატით ინტეგრირებადი ფუნქციების  $L_2(\mathbb{R})$  ფუნქციონალური სივრცე, სადაც

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (16.12)$$

$L_2(\mathbb{R})$  და  $L_2(0;2\pi)$  ფუნქციონალური სივრცეები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისაგან. კერძოდ,  $L_2(\mathbb{R})$  სივრცის ნებისმიერი ფუნქციის საშუალო ლოკალური მნიშვნელობა მიისწრაფვის ნულისკენ. ამიტომ, სინუსოიდური ტალღა არ ეკუთვნის  $L_2(\mathbb{R})$ -ს და, მაშასადამე,  $W_n(x)$  არ შეიძლება იყოს ამ ფუნქციონალური სივრცის ბაზისი. ვიპოვოთ მარტივი ფუნქციები  $L_2(\mathbb{R})$  ბაზისის კონსტრუირებისათვის. ბაზისის წარმომქმნელი ფუნქცია უნდა მიისწრაფოდეს ნულისკენ ორივე მიმართულებით. ვეივლეტი-ნიშნავს პატარა ტალღას.

როგორც  $L_2(0;2\pi)$  სივრცის შემთხვევაში,  $L_2(\mathbb{R})$ -შიც შეგვცადოთ ავაგოთ ბაზისი ერთი  $\psi(x)$  წარმომქმნელი ფუნქციის მეშვეობით (ის შეიძლება იყოს რამდენიმე სიხშირიანი ან ერთსი-

ხშირიანი ვეივლეტი). თუ ვეივლეტი სწრაფად მისწრაფვის ნულისკენ, ამ ფუნქციებით როგორ დავფაროთ მთელი რიცხვითი ღერძი? ყველაზე მარტივად ეს შეიძლება გაგაკეთოთ **k** სიდიდით წანაცვლების ოპერაციის საშუალებით ანუ გვექნება  $\psi(x-k)$ . ამ ოპერაციას ინტეგრალურ ძვრას უწოდებენ. განვიხილოთ სინუსოიდური სიხშირის ანალოგი სიმარტივისათვის, ის წარმოვადგინოთ ორის ხარისხით.

$$\psi(2^j \cdot x - k), \tag{16.13}$$

სადაც  $j; k$  მთელი რიცხვებია.

რადგან

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx}, \tag{16.14}$$

ამიტომ

$$\|\psi(2^j \cdot x - k)\| = 2^{-\frac{j}{2}} \|\psi(x)\|. \tag{16.15}$$

მაშინ ორთონორმირებულ ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k). \tag{16.16}$$

საზოგადოდ, ვეივლეტს ეწოდება ორთონორმალური, თუ შესაბამისი ვეივლეტ-ბაზისი  $\psi_{jk}$  აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\langle \psi_{jk}; \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}. \tag{16.17}$$

მაშინ  $\forall f(x) \in L_2(R)$  ადგილი აქვს ვეივლეტ-წარმოდგენას:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \psi_{jk}(x). \tag{16.18}$$

ამ ჯერადი მწკრივის თანაბარი კრებადობა ჩაიწერება შემდეგი ზღვარით:

$$\lim_{M1, N1, M2, N2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{M2}^{N2} \sum_{M1}^{N1} C_{jk} \psi_{jk} \right\| = 0. \tag{16.19}$$



ყველაზე მარტივი ორთოგონალური ვეივლეტი ხაარის ვეივლეტია  $\psi^H(x)$ :

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{if } x < 0 \vee x > 1 \end{cases}; \quad (16.20)$$

## 16.2. ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა

ახლა განვიხილოთ ვეივლეტები ზოგად შემთხვევაში, როცა მასშტაბური ცვლილება არ არის აუცილებლად ორის ხარისხი. ასევე, განვიხილოთ ნებისმიერი წანაცვლება. ერთი წარმომქმნელი  $\psi(x)$ -ვეივლეტ ფუნქციის ინტეგრალური  $a$  გაფართოებით და  $b$  წანაცვლებით შესაძლებელია კონსტრუირება გაუუკეთოთ ნებისმიერ ფუნქციას  $L_2(\mathbb{R})$  ფუნქციონალური სივრციდან.

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \psi \in L_2(\mathbb{R}). \quad (16.21)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა:

$$[W_\psi f](a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx, \quad (16.22)$$

სადაც  $\psi$  ფუნქციას ვეივლეტის დედაფუნქციას (წარმომქმნელს) უწოდებენ.

(16.22) ფორმულაში  $\psi_{a,b}(x)$  ფუნქცია იგივე როლს ასრულებს, რასაც  $e^{i\omega t}$  ფუნქცია ფურიეს გარდაქმნაში.

თუ გაავარძელებთ ანალოგიის ძეხნას ფურიეს გარდაქმნასთან, მაშინ (16.23) ფორმულაში  $f(x)$  ფუნქციის ვეივლეტებით წარმოდგენის  $C_{jk}$  კოეფიციენტები

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k), \quad (16.23)$$

შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$C_{jk} = \langle f; \psi_{jk} \rangle. \quad (16.24)$$

ტოლობებიდან გამომდინარე, ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ:

$$C_{jk} = [W_{\psi} f] \left( \frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right). \quad (16.25)$$

### 16.3. ვეივლეტისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები

ვეივლეტ-გარდაქმნა საშუალებას გვაძლევს სიგნალი განვიხილოთ სოლიტონისებრივი ფუნქციებისაგან შემდგარი ბაზისის მიმართ.

განვსაზღვროთ ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც უნდა ჰქონდეთ სოლიტონისებრ (წარმომქმნელ)  $\psi(x)$  დედაფუნქციებს (ვეივლეტებს), რათა განვიხილოთ იქნეს, როგორც ვეივლეტები.

#### ლოკალიზაცია

ვეივლეტ-გარდაქმნა ფურიეს გარდაქმნისგან განსხვავებით იყენებს ისეთ ბაზისურ (წარმომქმნელ) დედაფუნქციას, რომელიც ლოკალიზებულია სივრცის (დროის) შემოსაზღვრულ არეში. ვეივლეტი უნდა იყოს ლოკალიზებული როგორც ფიზიკურ, ასევე სპექტრულ სივრცეში, როგორც წესი,  $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$ .

#### ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობა

რაც ნიშნავს, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (16.26)$$

გამოყენებითი ამოცანების განხილვისას, ზოგჯერ, მოითხოვება უფრო მკაცრი პირობაც:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0. \quad (16.27)$$

ასეთ ვეივლექტს  $m$  რიგის ვეივლექტს უწოდებენ. ასეთი პირობა მაშინ განიხილება, როცა საჭიროა ვეივლექტის წარმოებულების განხილვა,  $m$  რიგის ჩათვლით.

**შემოსაზღვრულობა** მოიცემა პირობით

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (16.28)$$

კარგი ლოკალიზაცია და შემოსაზღვრულობა ზოგჯერ მოიცემა პირობებით

$$|\psi(x)| < \frac{1}{1+|x|^n} \quad (16.29)$$

ან შესაბამისი ფურიე-გარდაქმნისათვის

$$\left| \hat{\psi}(\omega) \right| < \frac{1}{1+|k-\omega_0|^n}, \quad (16.30)$$

სადაც  $\omega_0$  ვეივლექტის დომინანტური სიხშირეა.

**ახლა განვიხილოთ ვეივლექტ-გარდაქმნის თვისებები:**

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$[W_\psi f](a, b) = w(f) = w(a, b). \quad (16.31)$$

**ვეივლექტ-გარდაქმნის ოპერატორის წრფივობის თვისება**

$$w[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha w(f_1) + \beta w(f_2) = \alpha w_1(a, b) + \beta w_2(a, b). \quad (16.32)$$

**ინვარიანტულობა წანაცვლების ოპერაციის მიმართ**

$$w[f(x-b_0)] = w(a, b-b_0). \quad (16.33)$$

**ინვარიანტულობა მასშტაბის ცვლილების მიმართ**

$$w\left[f\left(\frac{x}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} w\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \quad (16.34)$$

**ენერჯის შენახვის თვისება**

ვეივლეტ-გარდაქმნისთვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობის ანალოგს:

$$\int f_1(x) \cdot f_2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w_1(a,b)w_2(a,b)dadb}{a^2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\int f^2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w^2(a,b)dadb}{a^2}. \quad (16.35)$$

#### 16.4. ვეივლეტ-ფუნქციების კერძო შემთხვევები

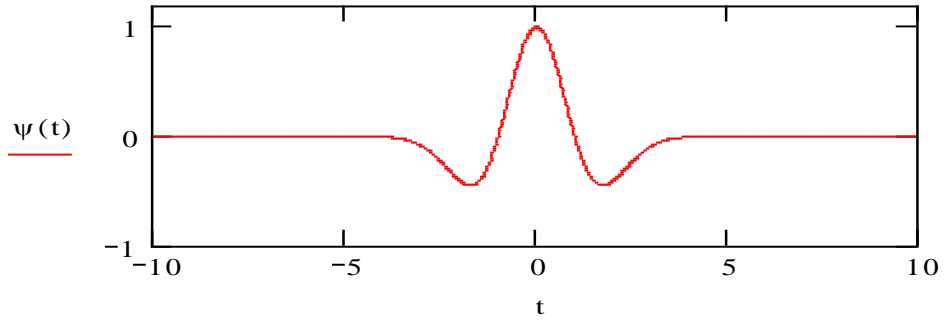
განვიხილოთ ვეივლეტ-ფუნქციების კონკრეტული სახეები:

**მექსიკური ქუდი (მაარის ვეივლეტი)**

ასე უწოდებენ ფუნქციას, რომელიც მიიღება გაუსის ფუნქციის ორჯერ გაწარმოებით

$$\psi(t) = (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (16.36)$$

მექსიკური ქუდის გრაფიკი მოცემულია 16.1 ნახ-ზე.



ნახ. 16.1. მათრის ვეივფუნქტი-მექსიკური ქუდი

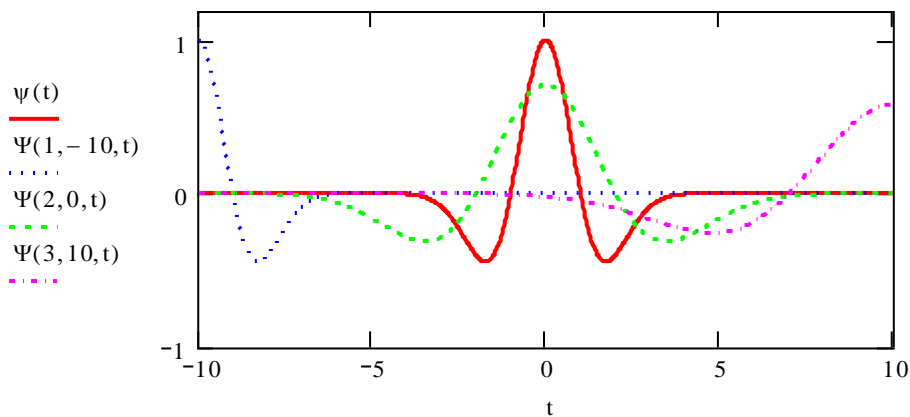
შესაბამის ვეივფუნქტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k). \quad (16.37)$$

დამასშტაბებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია მათრის ვეივფუნქტისათვის მოცემულია 16.2 ნახ-ზე.

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right),$$

$$\Psi(a,b,t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

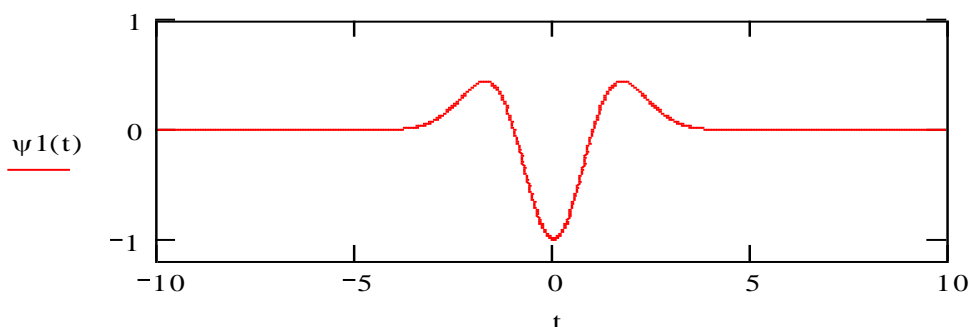


ნახ. 16.2. დამასშტაბებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია

ზოგჯერ იყენებენ გადაბრუნებულ მექსიკურ ქუდს, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$\psi_1(t) = (1+t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (16.38)$$

გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი მოცემულია 16.3 ნახ-ზე.



ნახ. 16.3. მაარის ვეივლეტი-გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი

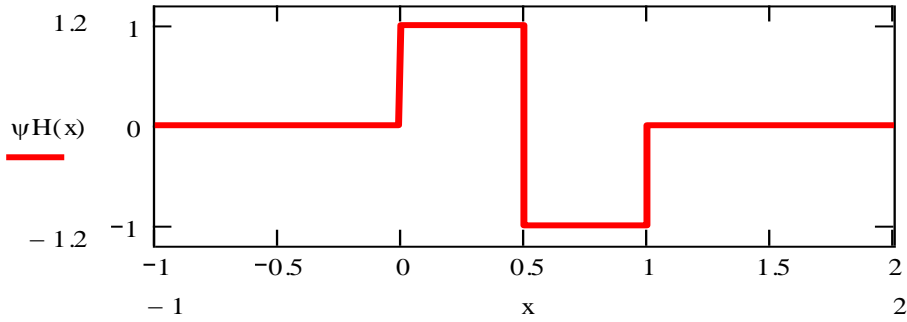
შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{1_{jk}} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi_1(2^j \cdot x - k). \quad (16.39)$$

### ხაარის ვეივლეტი

სიგნალების დეკომპოზიციისა და რეკონსტრუქციისათვის, ხშირად, იყენებენ ხაარის ვეივლეტებს, რომელთა წარმომქმნელ (დედა) ფუნქციას აქვს სახე (ნახ. 16.4):

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{if } (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ 0 & \text{if } ((x < 0) \vee (x > 1)) \end{cases}; \quad (16.40)$$



ნახ. 16.4. ხაარის ვეივლეტი

შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk}^H = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^H(2^j \cdot x - k). \quad (16.41)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი ორი  $\psi_{jk}^H \wedge \psi_{mn}^H$  ფუნქცია ვეივლეტ-ბაზისიდან, რომლებიც მიიღება ხაარის დედა-ფუნქციიდან,  $\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^m}$ -ინტეგრალური გაფართოებისა და  $\frac{k}{2^j}, \frac{n}{2^m}$ -წანაცვლების შემდეგ ორთონორმალურია ერთმანეთის მიმართ ანუ ადვილი აქვს ტოლობას

$$\langle \psi_{jk}^H; \psi_{mn}^H \rangle = \delta_{jm} \delta_{kn}. \quad (16.42)$$

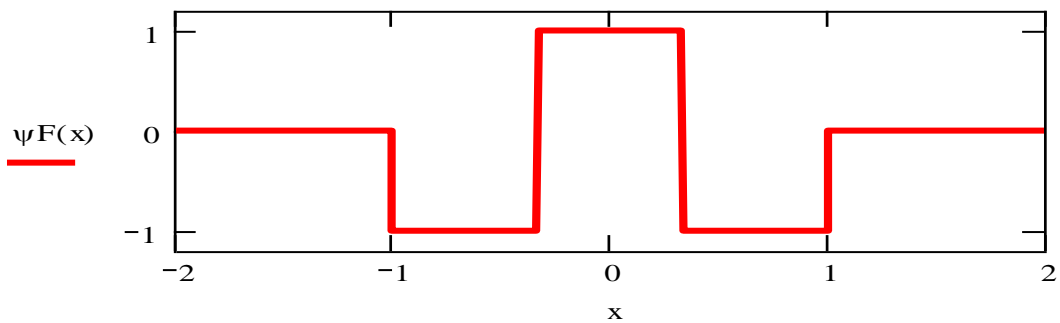
**P.S.** ხაარის ბაზისის უარყოფითი მხარეა ის, რომ ეს ვეივლეტი არასიმეტრიულია და გლუვი, თუმცა ზოგიერთ ამოცანაში სიგნალების დამუშავებისას ეს უმნიშვნელოა. ამდენად, ხაარის ვეივლეტებს ხშირად იყენებენ პრაქტიკაში.

უფრო ხშირად იყენებენ ხაარის ვეივლეტის მსგავს, სიმეტრიულ წარმომქმნელ ვეივლეტს (დედაფუნქციას), რომელსაც ფრანგულ ქუდს უწოდებენ.

**ფრანგულ ქუდი**

ამ ვეივლეტს ჩაწერენ შემდეგი სახით:

$$\psi^F = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq \frac{1}{3} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{3} < |x| \leq 1; \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases} \quad (16.43)$$



ნახ. 16.5. ვეივლექტი-ფრანგული ქუდი

შესაბამის ვეივლექტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^F_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^F(2^j \cdot x - k). \quad (16.44)$$

უფრო რთული, ორგანზომილებიანი სიგნალებისათვის გარდა წანაცვლებისა და დამასშტაბებისა საჭიროა გავითვალისწინოთ მობრუნებაც.

ვეივლექტ-გარდაქმნები ფართოდ გამოიყენება სიგნალების ფილტრაციისა და შეკუმშვისათვის [14-15].

მაღალი რიგის ვეივლექტებისათვის, წარმომქმნელი-დედა ვეივლექტის ასაგებად, როგორც წესი, გამოიყენება შესაბამისი ფილტრაციის კოეფიციენტების გამოთვლის იტერაციული, ფუნქციური განტოლებები, რომელთათვისაც აუცილებელია შემქმნელი-მამა ვეივლექტების აგება. ასე აიგება, მაგალითად, დობეშის მეოთხე რიგის ვეივლექტი [14-16] შესწავლა.

### 16.5. ვეივლექტ-ანალიზი Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემულია სიგნალი  $s(t)$ , რომლის ენერგია შემოსახლდერულია ანუ



$$\int_R s^2(t) dt < \infty. \quad (16.45)$$

ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა, ფურიეს გარდაქმნის ანალოგიურად, მოიცემა შესაბამისი ვეივლეტ-კოეფიციენტების მეშვეობით:

$$C(a,b) = \langle s(t), \psi(a,b,t) \rangle = \int_R s(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (16.46)$$

ასე, რომ ვეივლეტ-კოეფიციენტები მოიცემა სიგნალისა და მოცემული სახის ვეივლეტ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლით.

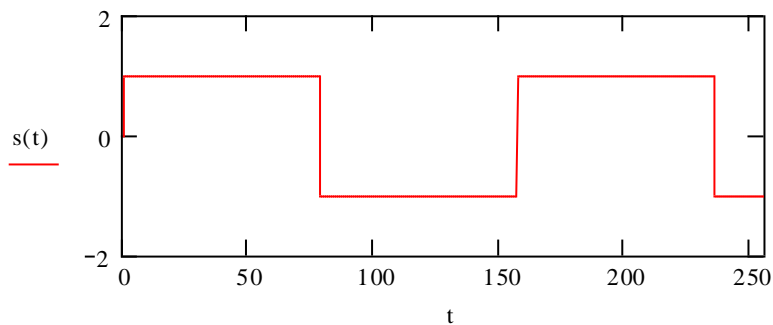
განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის მაგალითები:

1) მოცემულ სიგნალს აქვს სიმეტრიული მართკუთხა იმპულსების სახე - მენდრა. მოიცემა ანალიზური ფორმულით:

$$s(t) = \text{sign}(\sin(0.04 \cdot t)). \quad (16.47)$$

გრაფიკულად, მენდრას ტიპის სიგნალი მოცემულია

ნახ. 16.6 -ზე.



ნახ. 16.6. მენდრას გრაფიკული სახე

ავაგოთ, ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მათის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის მეშვეობით Matcad 2001-ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$N=24$

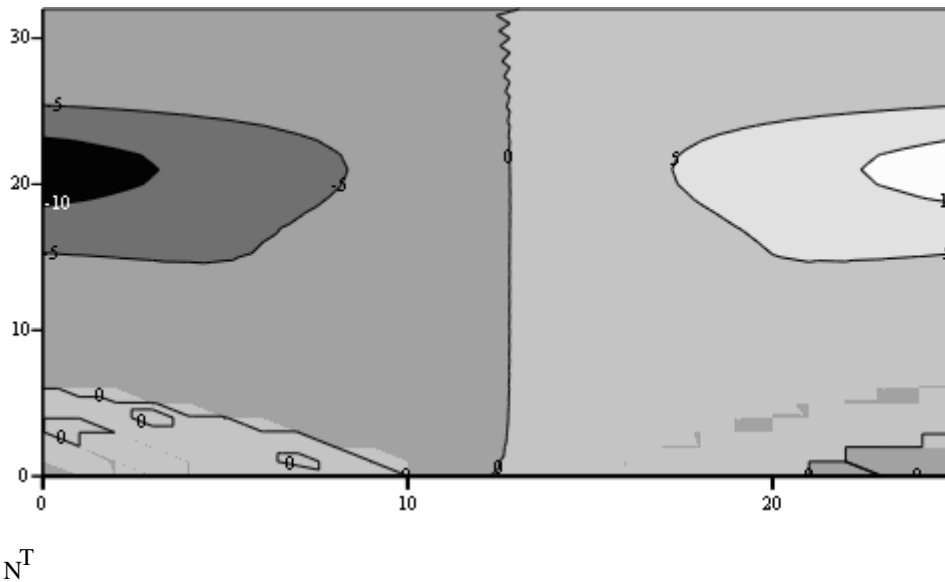
$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \cdot s(t) dt$$

$j := 0..32$

$b := 0, 1.. \frac{N}{10}$

$a_j := \frac{(j+12)^4}{3 \cdot 10^4}$

$N_{j, b} := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$

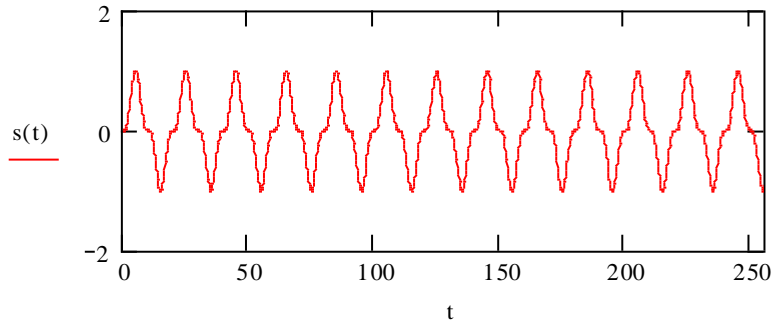


ნახ. 16.7. მეანდრას ტიპის სიგნალის სპექტროგრამა

2) მოცემულ სიგნალს აქვს სინუსის კუბის სახე ანუ

$$s(t) = \sin(0.1 \cdot \pi)^3. \tag{16.48}$$

გრაფიკულად, ამ ტიპის სიგნალი მოცემულია ნახ. 16.8 -ზე.



ნახ. 16.8. სინუსკუბის გრაფიკული სახე

აუაგოთ ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მათრის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის მეშვეობით Matcad 2001-ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad s(t) := \sin(0.1 \cdot \pi \cdot t)^3$$

$N := 32$

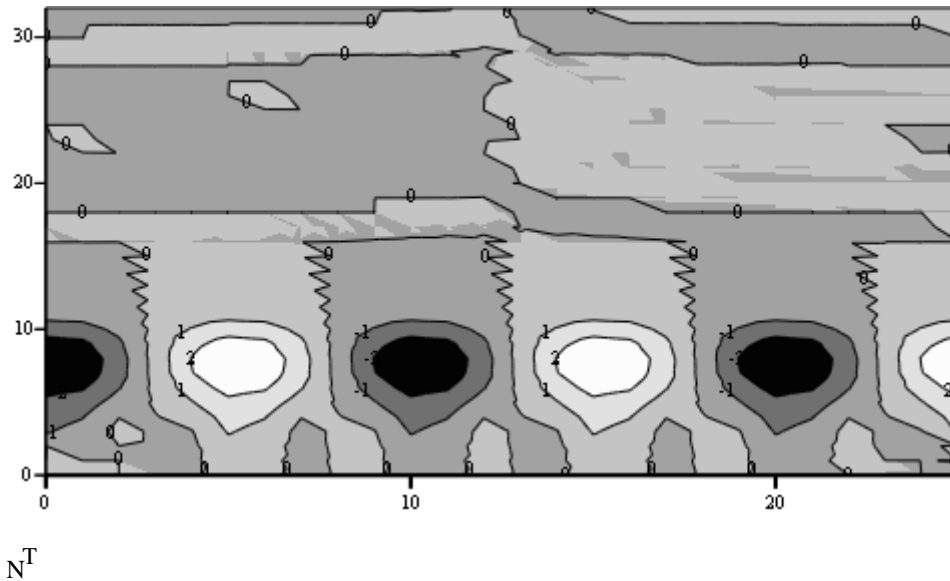
$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \cdot s(t) dt$$

$j := 0..32$

$$b := 0, 1.. \frac{N}{10}$$

$$a_j := \frac{(j+12)^4}{3 \cdot 10^4}$$

$$N_{j, b} := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$$



ნახ. 16.9. სინუსკუბის სპექტროგრამა

იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს პერიოდული სიგნალი, უმჯობესია გამოვიყენოთ ფურიე-გარდაქმნები. თუმცა, როცა სიგნალი ხასიათდება სივრცითი ან დროითი ლოკალიზაციით, მაშინ ვეივლეტ-გარდაქმნა ყველაზე უფრო ზუსტია. ეს უპირატესობები მკვეთრად ჩანს ბგერითი და გამოსახულებათა სიგნალების შემთხვევებში.

## 16.6. ვეივლეტ-გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტვრა

### Mathcad-ის ბაზაზე

სიგნალები შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მისი უხეში მიახლოებისა და დამაზუსტებელი (უფრო დეტალური) წარმოდგენათა ჯამი. ამ პროცესის რეალიზაციისათვის ორთოგონალური ვეივლეტები გამოიყენება, რომელთა ასაგებად, ხშირად, გამოიყენება მულტიმასშტაბური (multiresolution) ანალიზი. ეს ანალიზი ემყარება შემდეგ ძირითად ფაქტებს:

- სიგნალების  $V$  სივრცე შეიძლება დაიყოს ისეთ იერარქიულ  $V_j$  ქვესივრცეებად, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთს და რომელთა გაერთიანებაც ზღვარში  $L_2(\mathbb{R})$  სივრცეს იძლევა;

- ნებისმიერი  $s(t) \in V_j$  ფუნქციისათვის, მისი შეკუმშული ვერსია ეკუთვნის  $V_{j-1}$  ქვესივრცეს;
- არსებობს ისეთი  $\varphi(x) \in V_0$  ფუნქცია, რომლისთვისაც მისი წანაცვლება  $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k)$  ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს  $V_0$  სივრცეში.

რადგან  $\varphi_{0,k}(t)$  ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს  $V_0$  სივრცეში

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \cdot \varphi(2^{-j} \cdot t - k) \quad (16.49)$$

ფუნქციები ადგენენ ორთონორმირებულ ბაზისს  $L_2(\mathbb{R})$  სივრცეში. ამ ფუნქციებს **შემქმნელ-მამა ვეივლეტებს** უწოდებენ. ისინი მამასშტაბირებელი ფუნქციებია, რადგან ქმნიან თავისნაირ ფუნქციებს სხვადასხვა მასშტაბში. ე.ი.  $s(t)$  სიგნალი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს, როგორც მისი  $V_j$  სუბქვესივრცეებში თანამიმდევრული მიახლოების ზღვარი

$$s(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j(t). \quad (16.50)$$

როგორც წესი, სიგნალის დეკომპოზიციის წესიდან გამომდინარე,  $j$ -ს დიდი მნიშვნელობისათვის მიიღება **უხეში მიახლოებები**, ხოლო მცირე მნიშვნელობისათვის-უფრო ზუსტი მიახლოებები.

სიგნალის აპროქსიმაციას შეესაბამება იტერაციული ფორმულა:

$$s_j(t) = \sum_k C(j,k) \cdot \varphi_{j,k}(t), \quad (16.51)$$

$$\varphi_{0,0}(t) = 2 \cdot \sum_k h_k \varphi(2 \cdot t - k). \quad (16.52)$$

ზოგად შემთხვევაში, სიგნალის რეკონსტრუქცია  $j_n$  დაშვების დონეზე ხორციელდება

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n,k} \cdot \varphi_{j_n,k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_k(t), \quad (16.53)$$

სადაც  $a_{j_n,k}$  აპროქსიმაციის კოეფიციენტებია;  $d_{j,k}$  - დამაზუსტებელი კოეფიციენტები;  $\varphi_{j_n,k}(t)$  - შემქმნელი-მამა ვეივლეტი;

$\psi_k(t)$  - წარმომქმნელი-დედა ვეივლეტი. სიგნალის მთლიანი აღდგენა შესაძლებელია, თუ

$$\forall k \in Z, \exists \{h_k\} \left| \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sum_k h_k \varphi(t-k). \right. \quad (16.54)$$

ამ განტოლებას დამაზუსტებელი (refinement) ეწოდება.

**მაგალითი.** ხაარის ვეივლეტისათვის  $h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$s(t) = C_{0,0} \cdot \varphi(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t), \quad (16.55)$$

შადაც  $C_{0,0}$  არის სიგნალის დაბალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტი;  $d_{j,k}$  - სიგნალის მაღალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტების მატრიცა;  $\varphi(t)$  - მამა-ვეივლეტი;  $\psi_{j,k}(t)$  - დედა-ვეივლეტი;

ვთქვათ, გვაქვს სიგნალი  $y = \{1;0;-3;2;1;0;1;2\}$ , რომელიც განსაზღვრულია  $L_2[0,1]$  სივრცეში.

თუ გამოვიყენებთ ხაარის ვეივლეტს და დეკომპოზიციის (16.55) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ მატრიცას:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{2,2} \\ d_{2,3} \end{pmatrix}. \quad (16.56)$$

**ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიდ მატრიცაში**

➤ პირველი სვეტი არის მასშტაბირების  $\varphi(t)$  ფუნქცია;

- მეორე სვეტი - ხაარის ვეივლეტი;
- მესამე და მეოთხე სვეტები სიგნალის პირველი დონის წარმოდგენის რიცხვითი მნიშვნელობები;
- მეხუთე-მეორვე სვეტები შეესაბამება სიგნალის მეორე დონის წარმოდგენას.

ასე, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის უცნობი მატრიცის გამოსათვლელად საჭიროა (16.56) მატრიცული განტოლების ამოხსნა. როცა შემომავალი სიგნალის რიცხვითი მნიშვნელობების რაოდენობა საკმაოდ დიდია, ვეივლეტ-კოეფიციენტები გამოითვლება ფილტრაციის მეთოდებით.

განვიხილოთ შემომავალი სიგნალის დეკომპოზიციის (ფილტრაციის) ალგორითმი:

$$(Ha)_k = \sum_n h(n-2k) \cdot a_n, \quad (16.57)$$

$$(Ga)_k = \sum_n g(n-2k) \cdot a_n, \quad (16.58)$$

შადაც  $Ha$ -სიგნალის დაბალსიხშირიანი ფილტრაციის ოპერატორია;  $Ga$ -სიგნალის მაღალსიხშირიანი ფილტრაციის ოპერატორი;  $h$ -ვეივლეტ-ფილტრის დაბალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორი;  $g$ -ვეივლეტ-ფილტრის მაღალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორი.

ცნობილია, რომ ხაარის ვეივლეტ-ფილტრის შემთხვევაში

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad g_1 = -g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (16.59)$$

ამ ფაქტების გათვალისწინებით, მოვახდინოთ შემომავალი  $y$  სიგნალის დეკომპოზიცია

$$\begin{array}{rcccccccc}
y = c^{(3)} & & 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
d^{(2)} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & -\frac{3}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \\
c^{(2)} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \frac{3}{\sqrt{2}} & \\
d^{(1)} & & & & 1 & & & & -1 & \\
c^{(1)} & & & & 0 & & & & 2 & \\
d^{(0)} & & & & & & & & -\sqrt{2} & \\
c^{(0)} & & & & & & & & \sqrt{2} & 
\end{array}$$

**დეკომპოზიციის პირველ დონეზე, სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის (16.57) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ:**

$$(Ha)_1 = \sum_{n=1}^8 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-3+2)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2)\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$$

ანალოგიურად, (16.58) გამოსახულების საფუძველზე შეგვიძლია ვიპოვოთ სიგნალის შესაბამისი მაღალსიხშირიანი მდგენელიც.

**შემდეგ, დეკომპოზიციის მეორე დონეზე, სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის მივიღებთ:**

$$(Ha)_2 = \sum_{n=1}^4 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \{0; 2\}.$$

შესაბამისად, დეკომპოზიციის მესამე დონეზე მივიღებთ, რომ

$$(Ha)_3 = \sum_{n=1}^2 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0+2)\right) = \sqrt{2}.$$

ამრიგად, შემომავალი სიგნალი  $y = \{1; 0; -3; 2; 1; 0; 1; 2\}$  გარდაიქმნება ახალ  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$  ვექტორად, რომლის კომპონენტების რაოდენობა ემთხვევა შემომავალი სიგნალის ელემენტების რაოდენობას, თუმცა, ენერჯიის ძირითადი ნაწილი მოქცეულია კომპონენტების შედარებით მცირე რაოდენობის ელემენტებში. თუ შემთხვევითი შეშფოთებების ზღვრულ მნიშვნელობად ავიღებთ 0.9, მივიღებთ რეზულტატის ახალ ვექტორს:



$\left(0; -\frac{3}{\sqrt{2}}; 0; 0; 1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ . რაც ნიშნავს, რომ კოეფიციენტების ნაწილი ატარებს უმნიშვნელო ინფორმაციას და მათი მნიშვნელობები შეგვიძლია ნულოვნად ჩავთვალოთ.

ამის შემდეგ, შესაბამისი შემომაგალი სიგნალის აღსადგენად უნდა ვისარგებლოთ ოპერატორებით:

$$(Ha^*)_n = \sum_k h(n-2k)a_n, \quad (16.60)$$

$$(Ga^*)_n = \sum_k g(n-2k)a_n. \quad (16.61)$$

**P.S.** ეს ალგორითმი ამარტივებს სიგნალის ფილტრაციის ალგორითმს.

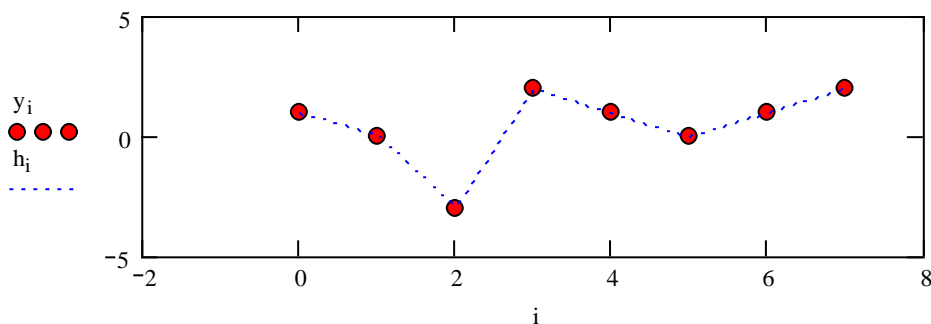
განვიხილოთ ამ სიგნალის ვეივლეტ-გარდაქმნა და უკუგარდაქმნა Mathcad-ის ბაზაზე (ნახ.6.10).

```

y :=  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 
W := wave(y)
h := iwave(W)

i:=0..7

```



ნახ. 16.10. სიგნალის ვეივლეტ-ფილტრაცია, ანალიზ-სინთეზი

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტული და ვეივლექტ-ფილტრით სინთეზირებული სიგნალები ერთმანეთს ემთხვევა.

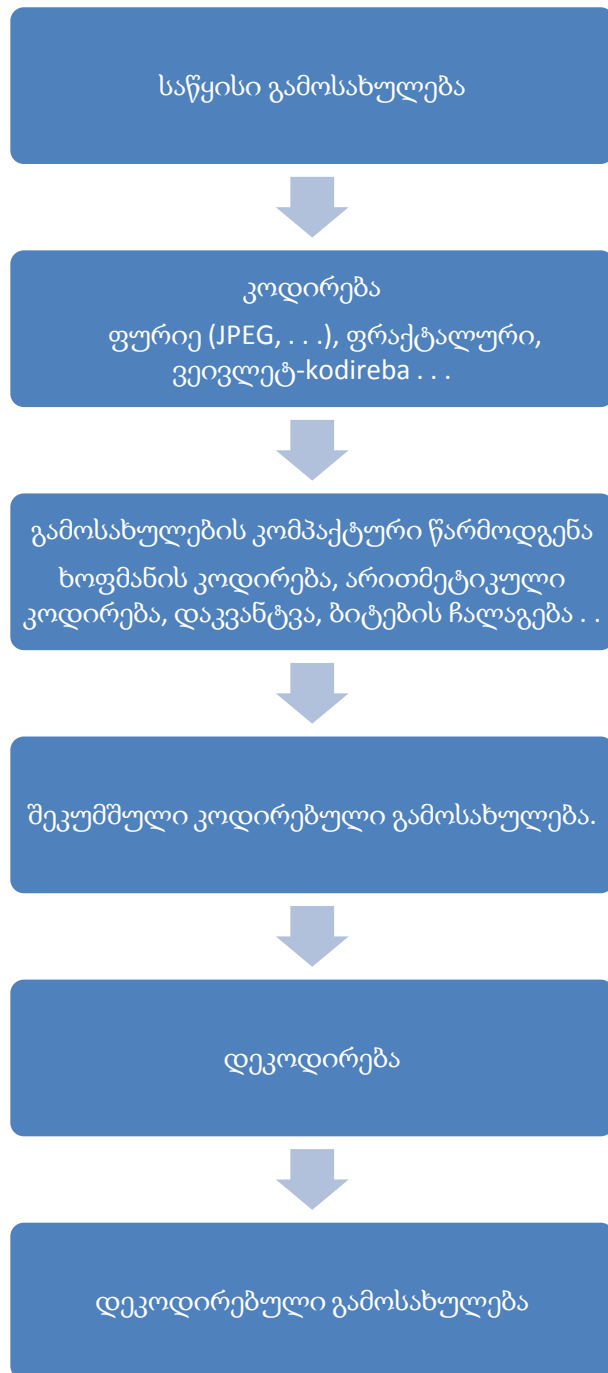
### 16.7. შერეული ფრაქტალურ-ვეივლექტური კოდირება

თვითმსგავსების არსებობა ფრაქტალის ძირითადი თვისებაა. ვეივლექტები კი საშუალებას გვაძლევენ გავითვალისწინოთ მასშტაბური ეფექტები, ამიტომ ვეივლექტები ფრაქტალური ანალიზის ბუნებრივი ინსტრუმენტია. ამიტომაცაა რომ, გამოსახულებათა შეკუმშვისათვის, უმეტესწილად, იყენებენ შერეულ ფრაქტალურ-ვეივლექტურ მეთოდებს. გამოსახულების შეკუმშვის პროცესი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი ბლოკ-სქემით ნახ. 16.11. ციფრული გამოსახულება – პიკსელთა მნიშვნელობების მასივია, რომელიც გამოისახება რიცხვითი მატრიცის საშუალებით. გამოსახულების შეკუმშვის ოპერაცია შედგება ორი ძირითადი ნაწილისაგან: **კოდირება და დეკოდირება.**

**კოდირება** გარდაქმნის საწყის რიცხვით მასივს ისე რომ, მან რაც შეიძლება ნაკლები მესხიერება დაიკაოს კომპიუტერში.

**დეკოდირება** აღადგენს საწყის გამოსახულებას კოდირებულიდან (შებრუნებული გარდაქმნით). თუ დეკოდირებული გამოსახულება ზუსტად ემთხვევა საწყის გამოსახულებას, მაშინ ამბობენ რომ კოდირება-დეკოდირების ალგორითმი არის **ალგორითმი დანაკარგის გარეშე**. თუ დეკოდირებული გამოსახულება განსხვავდება საწყისი გამოსახულებისაგან, მაშინ ამბობენ რომ გვაქვს **ალგორითმი დანაკარგებით**. შეკუმშვის სხვა უმრავლეს მეთოდებთან ერთად, ფრაქტალური და ვეივლექტ მეთოდებიც წარმოადგენენ ალგორითმებს დანაკარგებით. არსებობს, მონაცემთა შეკუმშვის ორი ხერხი:

- ა) შეგვიძლია შევამციროთ მონაცემები მათი გაფილტვრის საშუალებით, მაშინ შემცირდება მათ შესანახად საჭირო ბიტების რაოდენობაც;
- ბ) ან დავამრგვალოთ რიცხვები მოცემულ მასივებში და ამით შევამციროთ შესანახად აუცილებელი მესხიერება. **სრულ სქემებში** გამოიყენება შეკუმშვის ორივე მეთოდი.



ნახ. 16.11. გამოსახულების შეკუმშვის პროცესის ბლოკ-სქემა

მონაცემთა შეკუმშვისათვის საფუძვანმა შეიმუშავა ენტროპიული მეთოდი, რომელიც ამოწმებს ციფრულ მონაცემთა განაწილების სტრუქტურას. იმ რიცხვით მნიშვნელობებს, რომლებიც მასივში ხშირად გვხვდება, შეუსაბამებენ ნაკლები რაოდენობის ბიტებს, ხოლო იმ მნიშვნელობებს რომელიც უფრო იშვიათად გვხვდება, შეუსაბამებენ უფრო მეტ ბიტებს. ენტროპიულ მიდგომას იყენებს არითმეტიკული კოდირების მეთოდიც.

პრაქტიკაში მიზანშეწონილია ყველა ამ მეთოდის სინთეზურად გამოყენება, რათა ყველა მიდგომის დადებითი მხარე იქნას გამოყენებული გამოსახულების ეფექტური კოდირებისათვის.

მონაცემთა ფრაქტალური შეკუმშვისათვის, მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ხათჩინსონისა [12] და ბარნსლის [13] იტერირებად ფუნქციათა თეორია. ამიტომ განვიხილოთ იტერირებად ფუნქციათა სისტემები (IFS) და მათი გამოყენებანი.

### 16.8. იტერირებად ფუნქციათა სისტემები

სიბრტყის აფინური გარდაქმნის განხილვისას მივიღეთ გარდაქმნის ფორმულები რომლებიც დამოკიდებულია ექვს თავისუფალ ცვლადზე. აქედან გამომდინარე, ცხადია რომ, თუ გვინდა ბრტყელი ფიგურის სამი სხვადასხვა წერტილის კოორდინატები  $(x_1; y_1); (x_2; y_2); (x_3; y_3)$  ავსახოთ სხვა, განსხვავებულ სამ წერტილში  $(x'_1; y'_1); (x'_2; y'_2); (x'_3; y'_3)$ , მაშინ ცალსახად განისაზღვრება გარდაქმნის ექვსი ცვლადის მნიშვნელობები განტოლებებიდან:

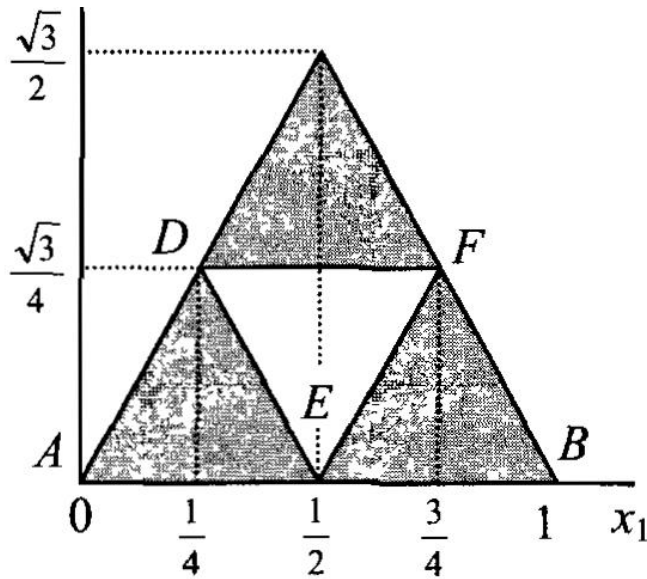
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (16.62)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}. \quad (16.63)$$

ავაგოთ  $\mathbb{R}^2$  სიბრტყის აფინური გარდაქმნები

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (16.64)$$

რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ ავაგოთ სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა ნახ. 16.12



ნახ. 16.12. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის დედა და მამა ფრაქტალები

ამ ნახაზზე კარგად ჩანს, რომ ერთი სამკუთხედი  $\Delta ABC$  იცვლება სამი სამკუთხედით  $\Delta DCF, \Delta ADE$  და  $\Delta EFB$ . აქვეა მითითებული წვეროთა შესაბამისი კოორდინატები. ესლა ჩვენი ამოცანაა: *ვიპოვოთ ის აფინური გარდაქმნები, რომლებიც დიდ სამკუთხედს გადასახავენ სამ მცირე სამკუთხედზე.*

აი ეს აფინური გარდაქმნებიც:

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta ADE: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (16.65)$$

$$C \Rightarrow D: \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16.66)$$

ასეთნაირადვე მოწმდება სხვა წერტილების ასახვებიც:

$$\Delta ABC \Rightarrow EFB: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (16.67)$$

$$C \Rightarrow F: \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16.68)$$

ბოლოს

$$\Delta ABC \Rightarrow DCF: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}; \quad (16.69)$$

$$C \Rightarrow C: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}. \quad (16.70)$$

მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ დიდი სამკუთხედის ფართობი ყოველ ბიჯზე მცირდება  $D = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 4$ -ჯერ.

პროცესის გეომეტრიულად გამოსახვისათვის აფინური ასახვები უნდა გავიმეოროთ ყოველი ახლად წარმოქმნილი პატარა სამკუთხედისათვის და შედეგები გამოვხაზოთ საწყისი სამკუთხედის ნახაზზე. ამისათვის დაგვჭირდება კიდევ ოთხი ტიპის ასახვა: მობრუნება  $\vartheta$  კუთხით, სიმეტრიის ასახვა  $OX$  ღერძის მიმართ,  $OY$  ღერძის მიმართ და ცენტრული სიმეტრია კოორდინატთა სათავეს მიმართ. ეს ასახვები შესაბამისად მოიცემა ასახვის მატრიცებით:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (16.71)$$

ეს ალგორითმი ადვილად რეალიზებადია *Matlab* გარემოში.

### 16.8.1. გამოსახულების კოდირების მაგალითი

განვიხილოთ გვიმრის ორობითი ტიპის გამოსახულება ნახ. 16.13, რაც იმას ნიშნავს რომ, აქ პიკსელის მნიშვნელობა არის 0 ან 1.



ნახ. 16.13. გვიმრის ორობითი ტიპის გამოსახულება

ამ გამოსახულებას ახასიათებს თვითმსგავსება ანუ ფრაქტალური სტრუქტურა. ამ შემთხვევაში, მისი ფრაქტალური

კოდირებისათვის საკმარისია ოთხი ობიექტის კოდირება, რომელთაგან თითოეული ამ შემთხვევაში ხასიათდება სამი რიცხვით: პირველი ობიექტია ქვედა მარცხენა ტოტის მომცველი მინიმალური ზომის სამკუთხედი (სამი წვეროთი), მეორე ობიექტია ქვედა მარჯვენა ტოტის მომცველი მინიმალური სამკუთხედი (სამი წვეროთი), მესამე ობიექტია ქვემო დატოტვიდან შემდგომ დატოტვამდე არსებული დეროს მონაკვეთი (ორი დატოტვის წერტილი და მათ შორის შუა წერტილი) და მეოთხე ობიექტია ზედა წვეროს მომცველი მინიმალური სამკუთხედი (სამი წვეროთი). აქედან გამომდინარე, ამ გამოსახულების ფრაქტალური კოდირებისათვის საკმარისია 24 რიცხვის შენახვა. მართლაც, სამკუთხედის აფინურ გარდაქმნას ჭირდება 6 რიცხვი(16.62-16.63) და 4 ტრიადის(სამი წერტილის) გადასახვას დაჭირდება  $4 \cdot 6 = 24$  პიქსელი. ეს აადვილებს გამოსახულების კოდირებას. დანარჩენი ტოტების მიღება ხდება აფინური, თვითმსგავსების პრინციპიდან გამომდინარე, რადგან გვიმრის ტოტებს ერთნარი გეომეტრიული აღნაგობა აქვთ და მხოლოდ მასშტაბით განსხვავდებიან. საზოგადოდ, ყველა გამოსახულებას არა აქვს ფრაქტალური სტრუქტურა და ასეთ შემთხვევებში უნდა ვეძებოთ განმეორებადი ფრაგმენტები, რათა გავიმარტივოთ გამოსახულების კოდირება.

### 16.8.2. IFS ფუნქციათა სისტემები ხაუსდორფის სივრცეში

ფრაქტალურ გამოსახულებებს განვიხილავთ  $(K(X); h)$  ხაუსდორფის სივრცეში. განვსაზღვროთ კუმშვადი ასახვების სპეციალური სახე რომელიც მოქმედებს გამოსახულებაზე ანუ  $(K(X); h)$  სივრცის ელემენტებზე.

ვთქვათ  $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$  არის  $(X, d)$  მეტრიკული სივრცის კუმშვად ასახვათა სასრული რაოდენობა კუმშვის შესაბამისი  $s_1, s_2, \dots, s_N$  კოეფიციენტებით, სადაც  $s_i \in [0; 1)$ . შემოვიღოთ  $W$  ასახვა, რომელიც მოქმედებს  $X$  სივრცის კომპაქტურ ქვესიმრავლეებზე (ანუ  $K(X)$  ელემენტებზე) შემდეგნაირად:

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{i=1}^N w_i(B), \quad \forall B \in K(X). \quad (16.72)$$

მაშასადამე,  $W: K(X) \rightarrow K(X)$  არის კუმშვადი ასახვა ხაუსდორფის  $(K(X); h)$  სივრცეში კუმშვის  $s$  კოეფიციენტით, სადაც  $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$  და ადგილი აქვს უტოლობას:

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B, C \in K(X). \quad (16.73)$$

**P.S.** იტერირებად ფუნქციათა (IFS) სისტემა შედგება სრული მეტრიკული  $(X, d)$  სივრცისა და სასრული რაოდენობის კუმშვითი

ასახვებისაგან. ასეთი სახვეებისათვის იხმარება აღნიშვნა  $\{X, w_i; i = \overline{1, N}\}$ .

კუმშვადი სახვეები შეგვიძლია გამოვიყენოთ იტერირებადი ფუნქციებისათვისაც. გამოსახულებას, რომელიც არის **IFS** სახვეის ერთადერთი უძრავი წერტილი, ატრაქტორი ეწოდება. ბარნსლიმ ჩამოაყალიბა თეორემა ხაუსდორფის მეტრიკულ სივრცეში კუმშვითი სახვეების შესახებ და მას **კოლაჟის თეორემა** უწოდა.

**კოლაჟის თეორემა:** ვთქვათ  $L$  არის წერტილი  $L \in K(X)$ . მოცემულია  $\varepsilon > 0$  მუდმივის რაღაც მნიშვნელობა. ავირჩიოთ IFS ფუნქციათა სისტემა  $\{X, w_i; i = \overline{1, N}\}$  კუმშვის  $s$  კოეფიციენტით  $0 < s < 1$  ისე რომ, ადგილი ქონდეს უტოლობას:

$$h(L, \cup_{i=1}^N w_N(L)) \leq \varepsilon, \quad (16.74)$$

მაშინ

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} \cdot h(L, \cup_{i=1}^N w_N(L)) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}, \quad (16.75)$$

სადაც  $A$  არის IFS ფუნქციათა სისტემის ატრაქტორი.

რადგან  $A$  ატრაქტორი არის IFS იტერაციათა უსასრულო რაოდენობის შედეგი, ცხადია რომ ის ფრაქტალურია. კოლაჟის თეორემა გვაძლევს ალგორითმს გამოსახულების შესაბამისი ფრაქტალების ასაგებად. ეს ნათლად გამოჩნდა გვიმრის ორობითი ფრაქტალის აგებისას.

### 16.8.3. გამოსახულების ფრაქტალური კოდირება შავ-თეთრ ფერებში

ისეთი გამოსახულება როგორცაა, გვიმრის ორობითი გამოსახულება, შეგვიძლია ავაგოთ შედარებით მარტივი IFS ფუნქციათა სისტემის საფუძველზე, რადგან მას ახასიათებს გლობალური თვითმსგავსება. ეს იმას ნიშნავს რომ მთლიანი გამოსახულება შედგება მისი ან მისი ნაწილების მსგავსი მასშტაბში შემცირებული ფრაგმენტებისაგან. ამასთან, ასეთი გამოსახულება – ორობითი ტიპის გამოსახულებაა, რადგან მის ყოველ პიქსელს აქვს მნიშვნელობა 1 ან 0. რეალურ ობიექტთა უმრავლესობას არა აქვს თვითმსგავსების თვისება, უფრო მეტიც, მათი უმრავლესობა არაა ორობითი ტიპის ანუ ყოველი პიქსელი იღებს მნიშვნელობებს გარკვეულ დიაპაზონში შავ-თეთრი გამოსახულებებისათვის ან ხასიათდება ვექტორით ფერადი



გამოსახულების შემთხვევაში. ამ შემთხვევაში დაგვიჩვენებთ IFS სისტემაზე უფრო ზოგადი სისტემა.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ შავ-თეთრი ტიპის გამოსახულება შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $I^2 = I \times I$  კვადრატზე განსაზღვრული ორი ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია  $f(x, y)$  ანუ

$$f: I^2 \rightarrow \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}, \quad (16.76)$$

სადაც  $N$  შავი ფერის გრადაციითა რაოდენობაა. ჩვენ შეგვიძლია ამ ტიპის ფუნქციითა სიმრავლეზე შემოვიღოთ მეტრიკა:

$$d_2(f, g) = \left( \int_1^N \int_1^N |f(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16.77)$$

აქედან გამომდინარე, ჩვენ ვიხილავთ კვადრატით ინტეგრირებად  $F$  სრულ მეტრიკულ სივრცეს. ამ სივრცისათვის ადგილი აქვს თეორემას კუმშვადი ასახვის შესახებ.

ჩვენ განვიხილავთ ციფრულ გამოსახულებებს.  $n \times m$  ზომის ციფრული გამოსახულება წარმოადგენს  $f_{i,j}$  მატრიცას, სადაც  $i = \overline{1, n}$  და  $j = \overline{1, m}$ , ხოლო  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ . ასეთ შემთხვევაში, ჩვენ ვიტყვით რომ, გვაქვს გაუსის დისკრეტული მეტრიკა:

$$d_{dG}(f, g) = \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) - g(x_i, y_j)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16.78)$$

#### 16.8.4. ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციითა სისტემა

გამოსახულების ფრაქტალური შეკუმშვისათვის გამოიყენება სპეციალური ტიპის ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციითა სისტემა (*partitioned iterated function system – PIFS*). ეს სისტემა შედგება სრული მეტრიკული  $X$  სივრცისა, მისი  $D_i \subset X$ ,  $i = \overline{1, n}$  ქვესიმრავლეებისა და კუმშვითი  $w_i: D_i \rightarrow X$ ,  $i = \overline{1, n}$  ასახვებისაგან.

### 16.8.5. შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების აფინური ასახვა

ვთქვათ, გვაქვს ერთეულოვანი კვადრატის აფინური ასახვა თავის თავზე:

$$\bar{w}_i: I^2 \rightarrow I^2. \quad (16.79)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, გვაქვს  $2 \times 2$  ზომის  $A_i$  მატრიცისა და  $2 \times 1$  ზომის  $b_i$  ვექტორისათვის აფინური ასახვის ჩანაწერი:

$$\bar{w}_i(x, y) = A_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_i. \quad (16.80)$$

ვთქვათ  $D_i \subset I^2$  არის ერთეულოვანი კვადრატის რაღაც ქვესიმრავლე და  $R_i$  არის  $\bar{w}_i$  ასახვის სახე, მისი  $D_i$  ქვესიმრავლეზე მოქმედებისას, მაშინ  $\bar{w}_i(D_i) = R_i$ . ეხლა ჩვენ უკვე შეგვიძლია ჩავწეროთ  $f(x, y)$  ფუნქციაზე მოქმედი  $w_i: F \rightarrow F$  ასახვა შემდეგნაირად:

$$w_i(f)(x, y) = s_i \cdot f(\bar{w}_i^{-1}(x, y)) + o_i. \quad (16.81)$$

$s_i$  კონსტანტაზეა დამოკიდებული გამოსახულების კონტრასტულობა. ხოლო  $o_i$  გამოსახულების სიკაშკაშეს მართავს.

$\bar{w}_i$  ასახვას  $w_i$  ასახვის სივრცულ მდგენელს უწოდებენ. (16.81) ასახვა ის ბაზური ასახვაა, რომელსაც იყენებენ შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების ფრაქტალური კოდირებისას.

ეხლა განვიხილოთ შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების კუმშვითი ასახვა. იმისათვის რომ  $w_i: F \rightarrow F$  ასახვა იყოს კუმშვითი, უნდა შესრულდეს უტოლობა:

$$d_2(w_i(f), w_i(g)) \leq s \cdot d_2(f, g), \quad (16.82)$$

სადაც  $s \in (0, 1)$ . თუ გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას ორჯერად ინტეგრალში, მაშინ მივიღებთ, რომ [11]

$$d_2^2(w_i(f), w_i(g)) \leq |s_i|^2 \cdot |\det A_i| \cdot d_2^2(f, g), \quad (16.83)$$

სადაც  $A_i$  არის  $w_i$  გარდაქმნის მატრიცა,  $\det A_i$  - გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი,  $s_i$  - კუმშვის კოეფიციენტი.

### 16.8.6. შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების კუმშვითი ასახვა

ერთეულოვანი  $I^2$  კვადრატი დაეფაროს რანგული ბლოკების  $\{R_i\}$  სიმრავლით, ისე რომ

$$I^2 = \cup R_i, \quad (16.84)$$

$$R_i \cap R_j = 0. \quad (16.85)$$

ვთქვათ  $\bar{w}_i$  არის ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციათა სისტემა PIFS:

$$\bar{w}_i : D_i \rightarrow R_i, \quad (16.86)$$

ასე რომ  $D_i$ , დომენური არეებია  $D_i \subset I^2$  რომლებიც შეიძლება იკვეთებოდნენ კიდევ.  $\bar{w}_i$  ასახვა  $D_i$  დომენებს ასახავს რანგულ  $R_i$  სიმრავლეებზე. დომენები შეიძლება იკვეთებოდნენ კიდევ, ხოლო რანგული არეები მთლიანად ფარავენ ერთეულოვან კვადრატს.

თითოეული  $\bar{w}_i$  ასახვისათვის განვსაზღვრავთ შესაბამის  $w_i$  ასახვას გამოსახულებათა  $F$  სიმრავლეზე:

$$w_i(f)(x, y) = s_i \cdot f(\bar{w}_i^{-1}(x, y)) + o_i, \quad (16.87)$$

სადაც  $s_i$  აირჩევა ისე, რომ  $w_i$  იყოს კუმშვითი ასახვა. ახლა განვსაზღვროთ  $W: F \rightarrow F$  შემდეგნაირად:

$$W(f)(x, y) = w_i(f)(x, y), \quad \forall (x, y) \in R_i. \quad (16.88)$$

რადგან რანგული არეები მთლიანად ფარავენ ერთეულოვან კვადრატს,  $W$  ასახვა მოქმედებს მთელ ერთეულოვან კვადრატზე და შესაბამისად  $W(f)$  არის შეკუმშული გამოსახულება. კუმშვადი ასახვების შესახებ თეორემიდან ვიცით, რომ გვექნება ერთადერთი უძრავი წერტილი:

$$W(f_w) = f_w. \quad (16.89)$$

თეორემა კუმშვადი ასახვების შესახებ არის ბაზური, გამოსახულებათა ფრაქტალური კოდირების საქმეში. მართლაც, თუ გვაქვს  $f$  ციფრული გამოსახულება, მაშინ ვეძებთ ისეთ კუმშვით  $W$  ასახვას რომ მისი უძრავი წერტილი  $f_w$ , ახლოს იყოს საწყის  $f$  გამოსახულებასთან. მაშინ  $W$  შეიცავს მთელ ინფორმაციას  $f_w$ -ს მისაღებად და თუ  $W$  იკავებს უფრო მცირე ადგილს, ვიდრე საწყისი ციფრული გამოსახულება, მაშასადამე მიგვიღწევია ციფრული ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვისათვის. აქაც კოლაჟის თეორემა საშუალებას იძლევა ფრაქტალური კოდირება მოვახდინოთ ერთ ბიჯზე და აღარ გვჭირდება იტერაციათა უსასრულო რაოდენობა.

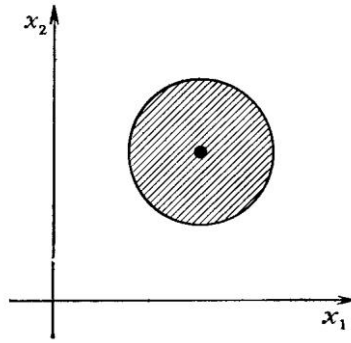
**XVII თავი. ტოპოლოგიური მეთოდები**  
**17.1.  $\mathbb{R}^n$  სივრცე და მისი ტოპოლოგია**

$\mathbb{R}^n$  სივრცე არის ჩვეულებრივი ვექტორული ალგებრის  $n$ -განზომილებიანი სივრცე; ამ სივრცეში წერტილს, შეესაბამება  $n$  ნამდვილი რიცხვი  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . ინტუიციურად ვთვლით, რომ ეს უწყვეტი სივრცეა: ამ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის არსებობენ მასთან, რაგინდ ახლომდებარე წერტილები, ასევე, ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად, ეს სივრცე შეიცავს ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთსაც. არსებობენ დისკრეტული სივრცეებიც. უწყვეტობის ცნება ზუსტ აზრს იძენს მისი ტოპოლოგიის შესწავლისას. მათემატიკაში «ტოპოლოგიის» ცნებას ორგვარი ინტერპრეტაცია აქვს. ჩვენ განვიხილავთ «ლოკალურ ტოპოლოგიას». მისგან განსხვავებით, არსებობს «გლობალური ტოპოლოგიაც» რომელიც, შეისწავლის მთლიანი სივრცის თვისებებს, მაგალითად, იმ თვისებებს, რომლებიც განასხვავებენ სფეროს ტორისაგან. გლობალურ ტოპოლოგიაზე ვისაუბრებთ მოგვიანებით, დიფერენციალური ფორმების განხილვისას. აქ კი განვიხილავთ *ლოკალური ტოპოლოგიის* ძირითად ცნებებს.

აქ ძირითადი ცნებაა  $\mathbb{R}^n$  სივრცის **წერტილის მიდამოს** ცნება. ამ ცნების შემოსატანად გვჭირდება სივრცის ორ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  და  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  წერტილს შორის მანძილის ცნება:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (17.1)$$

$\mathbb{R}^n$  სივრცის  $x$  **წერტილის მიდამო** ეწოდება ამ სივრცის იმ  $N_r(x)$  წერტილების სიმრავლეს, საიდანაც  $x$  წერტილამდე მანძილი ნაკლებია მოცემულ  $r$  რიცხვზე. მაგალითად,  $\mathbb{R}^2$  სივრცის შემთხვევაში  $x$  წერტილის მიდამო წარმოადგენს  $r$  - რადიუსიანი წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილების სიმრავლეს, რომლის ცენტრიც  $x$  წერტილშია ნახ. 17.1



ნახ. 17.1.  $\mathbb{R}^2$  სივრცის შემთხვევაში  $x$  წერტილის მიდამო წარმოადგენს  $r$  - რადიუსიანი წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილების სიმრავლეს, რომლის ცენტრიც  $x$  წერტილშია

ახლა, უკვე შეგვიძლია სივრცის უწყვეტობის ცნების უფრო ზუსტად ჩამოყალიბება.  $\mathbb{R}^n$  სივრცის წერტილების სიმრავლეს ეწოდება დისკრეტული, თუ მის ყოველ წერტილს აქვს ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს ამ სიმრავლის სხვა წერტილებს. ცხადია, რომ თვითონ  $\mathbb{R}^n$  სივრცე არაა დისკრეტული. ამბობენ, რომ  $\mathbb{R}^n$  სივრცის რაიმე  $S$  წერტილების სიმრავლე ღიაა, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერ  $x$  წერტილს აქვს ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად ეკუთვნის  $S$  სიმრავლეს. ცხადია რომ დისკრეტული სიმრავლე არ არის ღია და მას აღარ გამოვიყენებთ. ღია სიმრავლის მარტივი მაგალითია  $\mathbb{R}^1$  სივრცის ისეთი  $x$  წერტილების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას  $a < x < b$ .

$\mathbb{R}^n$  სივრცის ნებისმიერ ორ წერტილს აქვს ისეთი მიდამოები, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთენ (თუმცა მათ ისეთი მიდამოებიც აქვთ, რომლებიც იკვეთებიან, მაგრამ, თუ საკმაოდ შევამცირებთ მათ რადიუსებს, შეგვიძლია მივადწიოთ იმას, რომ ისინი აღარ გადაიკვეთონ). ამ თვისებას  $\mathbb{R}^n$  სივრცის განცალკევადობას (ანუ ხაუსდორფობას) უწოდებენ. არსებობს არაგანცალკევადი სივრცეც, მაგრამ ჩვენი მიზნებისათვის ის არ გამოდგება, ამიტომ მას არ განვიხილავთ.

ამრიგად, შემოვიღეთ  $\rho(x, y)$  მანძილის ფუნქცია, რამაც საშუალება მოგვცა განგვემარტა წერტილის მიდამოს და, მაშასადამე, ღია სიმრავლის ცნება. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $\mathbb{R}^n$  სივრცის ტოპოლოგია

ინდუცირებულია  $\rho(x, y)$  მანძილის ფუნქციით. რაც იმას ნიშნავს, რომ მანძილის ცნების საშუალებით განისაზღვრება ღია სიმრავლეები  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში, რომლებიც აკმაყოფილებენ თვისებებს:

ა) თუ  $S_1$  და  $S_2$  ღია სიმრავლეებია, მაშინ მათი თანაკვეთის

$S_1 \cap S_2$  სიმრავლეც ღიაა;

ბ) ნებისმიერი რაოდენობის ღია სიმრავლის გაერთიანება ღიაა.

იმისათვის, რომ პირველი (ა) თვისება ძალაში იყოს ნებისმიერი ღია სიმრავლისათვის, ჩავთვალოთ რომ, ცარიელი სიმრავლე ღიაა განსაზღვრების თანახმად.

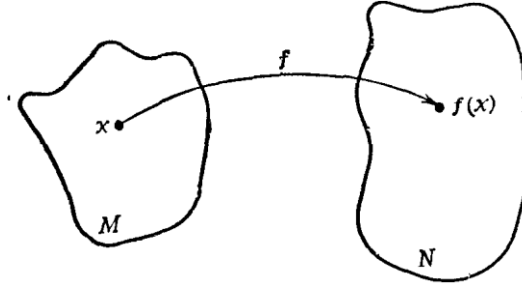
როგორც ვხედავთ, მანძილის  $\rho(x, y)$  ფუნქცია  $\mathbb{R}^n$  სივრცეს გადააქცევს ტოპოლოგიურ სივრცედ. მანძილის ფუნქციას (მეტრიკას) შეიძლება ჰქონდეს სხვანაირი სახეც. ამიტომ ისმის კითხვა: «რამდენადაა დამოკიდებული ინდუცირებული ტოპოლოგია მანძილის ფუნქციის კონკრეტულ სახეზე?». განვიხილოთ, მაგალითად, ახალი მანძილის ფუნქცია

$$\rho'(x, y) = \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + 0.5(x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (17.2)$$

ამ მეტრიკასაც მივყავართ მიდამოსა და ღია სიმრავლის ცნებებამდე; რაც, თავის მხრივ, გვაძლევს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. აქ მთავარია ის, რომ, თუ სიმრავლე ღიაა  $\rho'(x, y)$  მეტრიკის პირობებში, მაშინ ის ღიაა  $\rho(x, y)$  მეტრიკაშიც და, პირიქით. ასე რომ, ტოპოლოგიური თვისებები უფრო «უხეშია» მეტრიკულთან შედარებით, ამიტომ მანძილის ფუნქციის კონკრეტულ სახეს არა აქვს პრინციპული მნიშვნელობა.  $\rho(x, y)$  მეტრიკით ინდუცირებულ ტოპოლოგიას ბუნებრივ ტოპოლოგიას უწოდებენ. აქ მთავარია ის, რომ წერტილებს შორის მანძილი რავინდ მცირე შეიძლება იყოს და სხვადასხვა წერტილს შორის მანძილი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი. ზოგჯერ მიდამოს ცნებაც შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა ფორმით და  $x$  წერტილის მიდამო ვუწოდოთ მის შემცველ ნებისმიერ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ამ წერტილის მომცველ ღია სიმრავლეს.

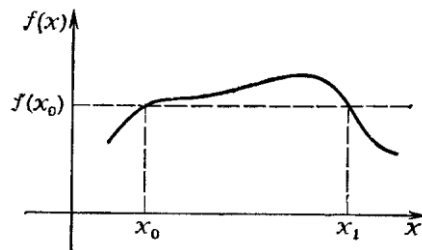
## 17.2. ასახვა

$f$  ასახვა  $M$  სივრციდან  $N$  სივრცეში არის  $f$  წესი, რომელიც  $M$  სივრცის ყოველ  $x$  ელემენტს, შეუსაბამებს  $N$  სივრცის რომელიმე ერთადერთ  $f(x)$  ელემენტს. ამ შესაბამისობის ნათლად წარმოსადგენად განვიხილოთ ნახ.1.2



ნახ.17.2. ასახვის სქემა  $f: M \mapsto N$ , რომელიც აღნიშნავს შესაბამისობას  $x \mapsto f(x)$

ასახვის უმარტივესი მაგალითია ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია  $\mathbb{R}^1$  სიმრავლეზე. ასეთი ფუნქცია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერ  $x$  წერტილს შეუსაბამებს ამავე სიმრავლის  $f(x)$  წერტილს. განვიხილოთ ასეთი ფუნქციის გრაფიკული წარმოდგენა ნახ. 17.3



ნახ. 17.3. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის არაურთიერთცალსახა ასახვა თავის თავზე

თუ გვაქვს ასახვა  $f: M \mapsto N$ , მაშინ  $M$  სიმრავლის ნებისმიერი  $S \subset M$  ქვესიმრავლე აისახება  $N$  სიმრავლის რაღაც  $T \subset N$  ქვესიმრავლეში, რომელსაც  $S$  სიმრავლის სახე ეწოდება  $f$  ასახვისას და აღინიშნება  $f(S)$ -ით. პირიქით,  $S$  სიმრავლეს, რომელიც შედგება  $T$  სიმრავლეში ასახული ელემენტებისაგან,  $T$  სიმრავლის წინასახე ეწოდება და აღინიშნება  $f^{-1}(T)$ -ით. თუ  $f$  ასახვას რამდენიმე წერტილი გადაჰყავს ერთ წერტილში, მაშინ

$f^{-1}$  აღარ იქნება ასახვა, რადგან ის აღარ იქნება ცალსახა. ასე რომ,  $f^{-1}(T)$  გამოსახულებას, საზოგადოდ, უნდა შევხედოთ როგორც ერთიან სიმბოლოს, რომელიც აღნიშნავს სიმრავლეს და არა  $f^{-1}$  ასახვას. იმ შემთხვევაში, როცა  $T$  სიმრავლის ყოველ წევრს აქვს ერთადერთი წინასახე  $S$  სიმრავლეში, ამბობენ, რომ  $f$  **ინექტური** ასახვაა ანუ არსებობს შებრუნებული ასახვა  $f^{-1}$ , რომელიც  $M$  სიმრავლის სახეთა სიმრავლეს ასახავს ისევ  $M$  სიმრავლეში. ასეთ ასახვებს, ზოგჯერ 1-1 ასახვას უწოდებენ.

1-1 ასახვის მაგალითია საქართველოს გეოგრაფიული რუკა. ამ შემთხვევაში დედამიწის ზედაპირის გარკვეული ნაწილის ყოველი წერტილი აისახება სიბრტყის გარკვეულ წერტილში.

თუ გვაქვს ორი  $f$  და  $g$  ასახვა, სადაც  $f: M \rightarrow N$  და  $g: N \rightarrow P$ , მაშინ განისაზღვრება **ასახვათა კომპოზიცია**  $g \circ f$ , რომელიც  $M$  სიმრავლეს ასახავს  $P$  სიმრავლეში  $g \circ f: M \rightarrow P$ . ხსვანაირად რომ ვთქვათ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

საზოგადოდ, ვსაუბრობთ  $M$  სიმრავლის ასახვაზე  $N$  სიმრავლეში. ხოლო, თუ  $N$  სიმრავლის ყოველ წევრს აქვს წინასახე  $M$  სიმრავლეში, მაშინ ვამბობთ რომ გვაქვს  $M$  სიმრავლის ასახვა  $N$  სიმრავლეზე ანუ **სურექცია**. ისეთ ასახვას, რომელიც ერთდროულად ინექციაცაა და სურექციაც, **ბიექცია** ეწოდება.

შემოტანილი ცნებები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ **უწყვეტი ასახვა** ტოპოლოგიური ენით. ვიტყვით რომ გვაქვს **უწყვეტი ასახვა**  $f: M \rightarrow N$  მოცემულ  $x$  წერტილში, თუ  $N$  სიმრავლის  $f(x)$  ელემენტის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე მოიცავს  $M$  სიმრავლის  $x$  ელემენტის შემცველი რომელიღაცა ღია სიმრავლის სახეს. იგულისხმება რომ  $M$  და  $N$  ტოპოლოგიური სივრცეებია (წინააღმდეგ შემთხვევაში უწყვეტობაზე ლაპარაკს აზრი არა აქვს). ვიტყვით რომ  $f$  ასახვა **უწყვეტია**  $M$  სიმრავლეზე, თუ ის უწყვეტია მის ყოველ წერტილში.



მართებულია თეორემა: ასახვა  $f: M \rightarrow N$  უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ  $N$  სიმრავლის ყოველი ღია სიმრავლის წინასახე  $M$  სიმრავლეში ღია სიმრავლეა.

რადგან უკვე გავერკვიეთ უწყვეტ ასახვებში, შეგვიძლია განვიხილოთ ფუნქციათა დიფერენცირებადობის საკითხებიც.

ვიტყვიან, რომ  $\mathbb{R}^n$  სივრცის რაიმე ღია  $S$  სიმრავლეზე განსაზღვრული  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქცია (ასახვა) არის  $C^k$  კლასის, თუ ის უწყვეტია თავის ყველა ( $k$  რიგის ჩათვლით) კერძო წარმოებულ-თან ერთად. კერძო შემთხვევებია: უწყვეტ ფუნქციათა კლასი  $C^0$ ; უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციები  $C^\infty$ .

თუ ინექტიურ 1-1 ასახვას  $\mathbb{R}^n$  სივრცის რაიმე ღია  $M$  სიმრავლე გადაჰყავს ამავე სივრცის სხვა  $N$  ღია სიმრავლეზე, მაშინ ეს ასახვა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ანუ } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (17.3)$$

სადაც  $x \in M \wedge y \in N$ . თუ ყველა  $f_i$  ფუნქცია არის  $C^k$  კლასის, მაშინ ამ ასახვას  $C^k$ -ასახვა ეწოდება.

$C^1$ -ასახვის იაკობის მატრიცა ეწოდება  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  კერძო წარმოებულებისაგან შემდგარ მატრიცას. ამ მატრიცის დეტერმინანტს იაკობიანს უწოდებენ. მას ზოგჯერ გამოსახავენ შემდეგნაირად:

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (17.4)$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე, თუ მოცემულ  $x$  წერტილში იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ამ წერტილის მიდამოში ასახვა ბიექციაა (ურთიერთცალსახა ასახვა) და შესაძლებელია  $x$  წერტილის მიდამოში (17.3) ფორმულების ამოხსნა ძველი ცვლადების მიმართ  $x_i = f^{-1}(\mathbf{y})$ .

თუ  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  და  $g_*(y_1, y_2, \dots, y_n)$  ფუნქციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_*(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (17.5)$$

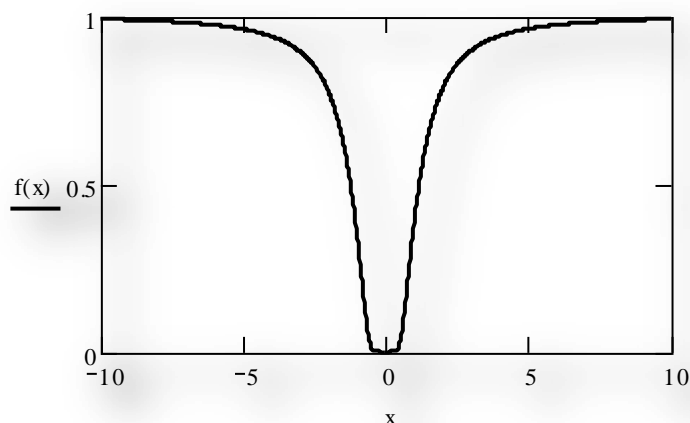
მაშინ ინტეგრალი  $g$  ფუნქციიდან  $M$  სიმრავლეზე ტოლია ინტეგრალისა  $g_*$  ფუნქციიდან  $N$  სიმრავლეზე.

### 17.3. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია

ერთი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება **ანალიზური**  $x = x_0$  წერტილში, თუ ამ წერტილის მიდამოში არსებობს მისი  $f(x)$  ფუნქციისაკენ კრებადი წარმოდგენა ტეილორის მწკრივად:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} + \dots \quad (17.6)$$

ცხადია, რომ, თუ  $f(x)$  ფუნქციას არა აქვს ყველა რიგის წარმომებული  $x = x_0$  წერტილში, მაშინ ის არაა ანალიზური, თუმცა შეიძლება ფუნქცია იყოს  $C^\infty$  კლასის, მაგრამ არ იყოს ანალიზური. მაგალითად,  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ . ამ ფუნქციის მნიშვნელობა, ყველა რიგის წარმომებულის მნიშვნელობასთან ერთად  $x = 0$  წერტილში ნულის ტოლია, თუმცა ნულის ნებისმიერ მიდამოში ის განსხვავდება ნულისაგან ნახ. 14



ნახ. 17.4. არაანალიზური ყველგან დიფერენცირებადი  $C^\infty$  კლასის  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  ფუნქციის გრაფიკი

მიუხედავად იმისა, რომ ანალიზური  $C^\omega$  ფუნქციების კლასი საკმაოდ ვიწროა, მათ მაინც დიდი გამოყენება აქვთ ფუნქციონალურ ანალიზში. ეს განპირობებულია იმით, რომ კვადრატით ინტეგრებად  $L_2$  კლასის ყველა  $f(x)$  ფუნქციას შეგვიძლია რაგინდ დიდი სიზუსტით ( $L_2$  ნორმით) მივუახლოვდეთ შესაბამისი  $g(x)$  ანალიზური ფუნქციით. ანუ ნულთან რაგინდ ახლოს იქნება ინტეგრალი

$$\int (f(x) - g(x))^2 dx \rightarrow 0. \quad (17.7)$$

ამიტომ, სადაც ეს შესაძლებელია, დიდი სიზუსტით შეგვიძლია გამოვიყენოთ მიახლოებული ანალიზური  $C^\omega$  ფუნქციები.

განსაზღვრების თანახმად, **A** ოპერატორი  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში განსაზღვრულ  $f$  ფუნქციას ასახავს სხვა  $A(f)$  ფუნქციაში. მაგალითად, თუ  $A(f) = gf$ , სადაც  $g$  რაიმე ფიქსირებული ფუნქციაა, მაშინ ეს ოპერატორი აღნიშნავს უბრალოდ გამრავლებას. ოპერატორების სხვა მაგალითებია ჩვეულებრივი დიფერენცირების ოპერატორი  $D(f) = \frac{\partial f}{\partial x}$  ან ინტეგრების ოპერატორი მოცემული  $g$  გულით  $(G(f))(x) = \int_0^x f(y)g(x,y)dy$  ან უფრო რთული ოპერატორი  $E(f) = f^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ .

ოპერატორი შეიძლება განსაზღვრული იყოს ყველა  $f$  ფუნქციაზე ან შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული განსაზღვრის არე. მაგალითად,  $D$  ოპერატორი განსაზღვრულია მხოლოდ დიფერენცი-რებად ფუნქციებზე, ხოლო  $G$  არაა განსაზღვრული იმ ფუნქციებზე, რომლებისთვისაც შესაბამისი ინტეგრალი არ არსებობს.

ორი  $A$  და  $B$  ოპერატორის კომუტატორი აღინიშნება ასე:  $[A, B]$  და განისაზღვრება, როგორც ახალი ოპერატორი, ფორმულით

$$[A, B](f) = (AB - BA)(f) = A(B(f)) - B(A(f)). \quad (17.8)$$

თუ ორი ოპერატორის კომუტატორი ნულის ტოლია, მაშინ ამბობენ რომ ეს ოპერატორები კომუტირებენ. აქ სიფრთხილება

საჭირო ოპერატორების განსაზღვრის არესთან დაკავშირებით. კომუტატორის განსაზღვრის არე შეიძლება უფრო ვიწრო აღმოჩნდეს ვიდრე ცალკეული  $A$  და  $B$  ოპერატორების. დიფერენციალურ ოპერატორებთან პრაქტიკული მუშაობისას, ხშირად, ხელსაყრელია განსაზღვრის არედ ავიდოთ  $C^\infty$  კლასის ფუნქციები და არ შემოვიფარგლოთ განსაზღვრის არეებზე ფიქრით.

#### 17.4. ჯგუფთა თეორია

$G$  სიმრავლის ელემენტების ერთობლიობას, მათზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაციით (ადენიშნავთ წერტილით) ეწოდება **ჯგუფი**, თუ მართებულია აქსიომები:

ა) ასოციატიურობა: ნებისმიერი  $x, y, z$  ელემენტებისათვის  $G$  სიმრავლიდან

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad (17.9)$$

ბ) მარჯვენა ერთეულის არსებობა:  $G$  შეიცავს ისეთ  $e$  ელემენტს, რომ ნებისმიერი სხვა  $x \in G$  ელემენტისათვის

$$x \cdot e = x, \quad (17.10)$$

გ) მარჯვენა შებრუნებულის არსებობა: ნებისმიერი  $x \in G$  ელემენტისათვის არსებობს ისეთი  $x^{-1} \in G$ , რომ

$$x \cdot x^{-1} = e. \quad (17.11)$$

ჯგუფს ეწოდება **აბელური (კომუტატიური)**, თუ ამას გარდა, ნებისმიერი  $x, y \in G$  ელემენტისათვის მართებულია პირობა:

$$x \cdot y = y \cdot x. \quad (17.12)$$

სასრული ჯგუფის სტანდარტული მაგალითია  $n$  - ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების **გადანაცვლებათა ჯგუფი**; ორი გადანაცვლების ბინარული კომპოზიცია არის, ამ ორი გადანაცვლების მიმდევრობითი შესრულების შედეგი. ამ ჯგუფში არის  $n!$  ელემენტი. ერთეული ელემენტის როლს ასრულებს ისეთი გადანაცვლება, რომელიც ყველა ელემენტს ადგილზე ტოვებს.

ჯგუფების განმარტებაში შემავალი აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ  $e$  ერთეულოვანი ელემენტი ერთადერთია და ამავე დროს მარცხენა ერთეულიცაა ანუ  $e \cdot x = x$ ; უნდა აღინიშნოს, რომ  $x^{-1} \in G$  შებრუნებულის ერთადერთია და ამავე

დროს ის მარცხენა შებრუნებულიცაა ანუ  $x^{-1} \cdot x = e$ . ზოგჯერ გამრავლების ნიშანს გამოტოვებენ ხოლმე და წერენ, უბრალოდ,  $xy$ .

ცოცხალი სისტემისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს **ლის ჯგუფებს**, რომელთაც დეტალურად განვიხილავთ მეორე თავში. ესაა **უწყვეტი ჯგუფი**: ლის ჯგუფის ყოველი ღია სიმრავლისათვის დასაშვებია 1-1 ასახვა, რომელსაც ის გადაჰყავს  $n$  – განზომილებიანი  $\mathbb{R}^n$  სივრცის რაიმე ღია სიმრავლეზე. ლის ჯგუფის მაგალითს წარმოადგენს  $\mathbb{R}^n$  სივრცის ტრანსლაციათა ( $x \mapsto x + a$ ) ჯგუფი, სადაც  $a = const$ . ამ  $a$  რიცხვის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ტრანსლაციათა ლის ჯგუფის რომელიღაც ელემენტი. ასე რომ, ტრანსლაციათა ლის ჯგუფი ურთიერთცალსახად აისახება მთელ  $\mathbb{R}^n$  სივრცეზე. ჯგუფის ოპერაციაა ჩვეულებრივი შეკრება, ორ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  და  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  ელემენტს შეესაბამება მათი ჯამი

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (17.13)$$

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ჯგუფის ოპერაცია ყოველთვის არ აღინიშნება **მულტიპლიკაციური** " $\cdot$ " სიმბოლოთი. აბელური ჯგუფისათვის, რომლის მაგალითიც უკვე განვიხილეთ უფრო ხელსაყრელია **ადიტიური** " $+$ " სიმბოლო.

$G$  ჯგუფის **ქვეჯგუფი** ეწოდება მის ნებისმიერ  $S$  ქვესიმრავლეს, რომელიც არის ჯგუფი, მასში შემავალი ელემენტებისათვის  $G$  ჯგუფის ბინარული ოპერაციის მიმართ.

წინსართი ქვე სშირად გვხვდება და მას ვიყენებთ, როცა ლაპარაკია საწყისი სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის შესახებ, რომელსაც იგივე სტრუქტურა აქვს, რაც საწყის სიმრავლეს (ქვემრავალსახეობა, ლის ქვეჯგუფი, ლის ქვეალგებრა . . .)

ქვეჯგუფი არის ჯგუფი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის ყოველთვის შეიცავს ერთეულოვან ელემენტს.

**მაგალითად:** გადანაცვლებათა ჯგუფისათვის ადვილი ასაგებია ქვეჯგუფები; განვიხილოთ  $n$  – ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფის ისეთი ქვესიმრავლე,

რომლის ელემენტებიც არის ისეთი გადანაცვლებები, რომლებიც უძრავად ტოვებენ პირველ ელემენტს. ცხადია, რომ ეს იქნება  $n$  – ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფის ქვეჯგუფი; მართლაც, ა) ასეთი ქვესიმრავლის ელემენტებისათვის ბინარული კომპოზიცია ასოციატიურია; ბ) იგივეური გარდაქმნა უძრავად ტოვებს პირველ ელემენტს და, მაშასადამე, ის ერთეულოვანი ელემენტია ქვესიმრავლისათვისაც; გ) თუ მოცემული გადანაცვლება უძრავად ტოვებს პირველ ელემენტს, მაშინ მისი შებრუნებულიც უძრავად ტოვებს პირველ ელემენტს. ეს ქვეჯგუფი ემთხვევა  $n-1$  - ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფს.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ  $n$  - ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფის ისეთი ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ლუწ გადანაცვლებებს, აგრეთვე ქვეჯგუფია, ხოლო მხოლოდ კენტი გადანაცვლებების შემცველი ქვესიმრავლე არაა ქვეჯგუფი.

ჩვენი წინადადება, რომ  $n$  ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფის რომელიღაც ქვეჯგუფი, ემთხვევა  $n-1$ - ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფს, იმას ნიშნავს, რომ ეს ორი ჯგუფი **იზომორფულია**.

ორ  $G_1$  და  $G_2$  ჯგუფს შესაბამისი ბინარული ოპერაციებით " $\cdot$ " და " $*$ " ეწოდება **იზომორფული**, თუ არსებობს ისეთი  $1-1$  ასახვა  $f: G_1 \rightarrow G_2$ , რომელიც ინარჩუნებს ჯგუფის ოპერაციას:

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y). \quad (17.14)$$

**მაგალითი:** ვთქვათ,  $G_1$  არის დადებითი ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი ჯგუფი გამრავლების (მულტიპლიკაციური) ოპერაციის მიმართ, ხოლო  $G_2$  არის ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი ჯგუფი შეკრების (ადიტიური) ოპერაციის მიმართ. მაშინ, თუ  $\forall x \in G_1$  და  $f(x) = \log x$ , გვექნება ასახვა  $f: G_1 \rightarrow G_2$ , რომელიც აკმაყოფილებს (17.14) პირობას:

$$\log(xy) = \log x + \log y. \quad (17.15)$$

ეს ორი ჯგუფი იზომორფულია და  $f$  არის იზომორფიზმი.

მეორე მნიშვნელოვანი ცნებაა **ჯგუფთა ჰომომორფიზმი**. მისი განსაზღვრება ანალოგიურია იზომორფიზმის განსაზღვრებისა, ოღონდ, ამ შემთხვევაში არ მოითხოვება ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია), მაგრამ (1.14) თანადობა აუცილებლად უნდა სრულდებოდეს. ჯგუფის თავის თავზე ტრივიალური **ჰომომორფიზმი** არის ისეთი ასახვა, როცა ჯგუფის ყველა ელემენტი გადადის ერთეულოვან ელემენტში. ნაკლებად ტრივიალურია – გადანაცვლებათა ჯგუფის ჰომომორფიზმი მულტიპლიკაციურ ჯგუფზე, რომელიც შედგება მხოლოდ ორი ელემენტისაგან  $\{1; -1\}$ . ამ ფომომორფიზმის დროს, ნებისმიერ ლუწ გადანაცვლებას შეესაბამება 1, ხოლო კენტი გადანაცვლება გადადის -1-ში.

## 17.5. წრფივი ალგებრა

$V$  სიმრავლეს ეწოდება ვექტორული სივრცე (ნამდვილ რიცხვთა ველის ზემოთ), თუ ის ქმნის აბელურ ჯგუფს, მასში განსაზღვრული ადიტიური "+" ოპერაციის მიმართ და, თუ განსაზღვრულია მისი ელემენტების " $\cdot$ " ნამრავლი ნამდვილ რიცხვებზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ აქსიომებს:

$$V1) a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad (17.16)$$

$$V2) (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \quad (17.17)$$

$$V3) (ab) \cdot x = a(b \cdot x), \quad (17.18)$$

$$V4) 1 \cdot x = x. \quad (17.19)$$

ერთეულოვანი ელემენტი  $V$  აბელურ ჯგუფში აღინიშნება 0-ით. გარდა ჩვეულებრივი ვექტორების სიმრავლისა, ვექტორული სივრცის მაგალითებია:

- 1) კვადრატული  $n \times n$  მატრიცების სიმრავლე, სადაც "+" ოპერაცია ნიშნავს მატრიცების შესაბამისი კომპონენტების შეკრებას, ხოლო მატრიცის "·" გამრავლება ნამდვილ რიცხვზე ნიშნავს, მატრიცის თითოეული ელემენტის გადამრავლებას ამ რიცხვზე;
- 2) მოცემულ  $[a; b]$  შუალედზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე შესაბამისი ოპერაციებით.

როგორც წესი, გამოტოვებენ ხოლმე წერტილს ნამდვილ რიცხვზე გადამრავლებისას და ფრჩხილებს, რომლებიც ფიგურირებენ ვექტორული სივრცის განსაზღვრების აქსიომებში.

$V$  ვექტორული სივრცის  $x, y, z$  ელემენტების **წრფივი კომბინაცია** ეწოდება გამოსახულებას

$$ax + by + cz, \tag{17.20}$$

სადაც  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$V$  ვექტორული სივრცის  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ელემენტებს ეწოდებათ **წრფივად დამოუკიდებელი**, თუ არ არსებობს ისეთი არანულოვანი რიცხვთა ერთობლიობა  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0. \tag{17.21}$$

**წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ეწოდება მაქსიმალური**, თუ მასთან ნებისმიერი სხვა ვექტორის მიერთებას, მიუყავართ **წრფივად დამოუკიდებელ** სისტემამდე. განსაზღვრების თანახმად, ეს იმას ნიშნავს, რომ  $V$  ვექტორული სივრცის ნებისმიერი ელემენტი შეგვიძლია გამოვსახოთ მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით.

ასე რომ, მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა ქმნის  $V$  ვექტორული სივრცის ბაზისს.

მაგალითად, თუ განვიხილავთ ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი კვადრატული  $n \times n$  მატრიცების სიმრავლეს, მაშინ



მისი ერთ-ერთი ბაზისი შედგება  $n^2$  სხვადასხვა მატრიცისაგან, რომელთაგან თითოეულში მხოლოდ ერთი ელემენტი არანულოვანი, დანარჩენი ნულებია.

საზოგადოდ, ბაზისის ელემენტების რაოდენობას  $V$  ვექტორული სივრცის განზომილება ეწოდება.

მოცემული სივრცის ნებისმიერი ბაზისი შედგება ერთი და იმავე რაოდენობის ელემენტებისაგან, თუ სივრცის განზომილება სასრუ-ლია.

ვთქვათ,  $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$  არის  $V$  ვექტორული სივრცის ბაზისი, მაშინ  $\forall y \in V$  გვექნება წარმოდგენა

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (17.22)$$

სადაც  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  რიცხვებს უწოდებენ  $y$  ვექტორის კომპონენტებს მოცემული  $\{x_i, i = 1, \dots, n\}$  ბაზისისათვის. ცხადია, რომ სხვა ბაზისში ვექტორის კომპონენტები, საერთოდ, სხვა რიცხვები იქნება.

$V$  ვექტორული სივრცის ქვესივრცე ეწოდება მის ქვესიმრავლეს, რომელიც თვითონაა ვექტორული სივრცე.

ცხადია, რომ ქვესივრცე უნდა შეიცავდეს ნულოვან ვექტორს და თავისი ელემენტების ყველა შესაძლო წრფივ კომბინაციას. ამბობენ, რომ  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  ვექტორთა სიმრავლე წარმოქმნის  $V$  ვექტორული სივრცის ქვესივრცეს, რომელიც შედგება ამ ვექტორების ყველა შესაძლო წრფივი კომბინაციისაგან. ამ სისტემის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების რაოდენობა ქმნის ქვესივრცის განზომილებას. თუ  $m < n$ , მაშინ წრფივი კომბინაციებით წარმოქმნილი სიმრავლე წარმოადგენს, საკუთრივ ქვესივრცეს. ანუ მთლიანად შედის საწყის  $V$  ვექტორულ სივრცეში.

აქამდე არაფერი გვითქვამს ვექტორების სკალარული ნამრავლის და ვექტორის სივრცის შესახებ. ეს ცნებები დამატებითი ცნებებია ვექტორული სივრცისათვის და არაა სავალდებულო ვექტორების ზოგადი თეორიისათვის. ამ ცნებათა

შემოტანის ერთ-ერთი მეთოდია, ვექტორული სივრცისათვის ნორმის ცნების შემოტანა.

ნორმირებული ვექტორული  $V$  სივრცე არის ვექტორული სივრცე მასზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის ისეთი  $n(x)$  ფუნქციით (მას ნორმას უწოდებენ), რომელიც აკმაყოფილებს აქსიომებს:

$$N1) n(x) \geq 0, \forall x \in V, (n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0); \quad (17.23)$$

$$N2) n(ax) = |a|n(x), \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in V; \quad (17.24)$$

$$N3) n(x + y) \leq n(x) + n(y), \forall x, y \in V. \quad (17.25)$$

არსებობს მრავალი სხვადასხვა სახის  $n(x)$  ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებს ამ აქსიომებს.

მაგალითად, განვიხილოთ  $\mathbb{R}^n$ , როგორც ვექტორული სივრცე, სადაც ვექტორთა ჯამი განისაზღვრება ტოლობით

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (17.26)$$

ხოლო ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) \text{ -ტოლობით.} \quad (17.27)$$

ჩვენ შეგვიძლია, ნორმა შემოვიტანოთ, როგორც მანძილი ვექტორის ბოლოდან კოორდინატთა სათავემდე.

$$n(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}; \quad (17.28)$$

$$n(x)' = \sqrt{5x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + x_n^2}; \quad (17.29)$$

$$n(x)'' = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|). \quad (17.30)$$

პირველი ორი ნორმა (17.28) და (17.29), მესამე (17.30) ნორმისაგან განსხვავებით, აკმაყოფილებს პარალელოგრამის აქსიომას (დიაგონალების კვადრატების ჯამი უდრის გვერდების კვადრატების ჯამს):

$$n(x + y)^2 + n(x - y)^2 = 2n(x)^2 + 2n(y)^2, \quad (17.31)$$

რაც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ორი ვექტორის ბიწრფივი, სიმეტრიული სკალარული ნამრავლი

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{4}n(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 - \frac{1}{4}n(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2. \quad (17.32)$$

ბიწრფივობა ნიშნავს, რომ

$$(\mathbf{ax} + \mathbf{by}) \cdot \mathbf{z} = a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + b(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}), \quad (17.33)$$

და

$$\mathbf{z} \cdot (\mathbf{ax} + \mathbf{by}) = a(\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) + b(\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}). \quad (17.34)$$

სიმეტრიულობა ნიშნავს, რომ

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}, \quad (17.35)$$

ამას გარდა, სკალარული ნამრავლი დადებითად განსაზღვრულია ანუ

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \text{ და } \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (17.36)$$

ეს ცხადია, რადგან  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = n(\mathbf{x})^2$ .

$\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცისათვის ზემოთ განსაზღვრულ  $n(\mathbf{x})$  ნორმას ევკლიდური ნორმა ეწოდება.

$\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცეს მასზე განსაზღვრული ევკლიდური ნორმით  $n$ -განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე ეწოდება და მას აღვნიშნავთ  $E^n$  სიმბოლოთი.

უნდა განვასხვავოთ  $\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცე და  $E^n$  ევკლიდური სივრცე. პირველი მათგანი, მხოლოდ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ვექტორთა ერთობლიობაა, ყოველგვარი მანძილისა და ვექტორის სიგრძის ცნების გარეშე. ამ განსხვავების მნიშვნელობას გავიგებთ მეორე თავში.

სკალარული ნორმის ბილინეარობისა და სიმეტრიულობის დასამტკიცებლად გვჭირდება მხოლოდ პარალელოგრამისა და (N2) აქსიომები.

თუ დარღვეულია (N1) და (N3) აქსიომები, მაშინ გვაქვს **ფსევდონორმა**. ამ შემთხვევაში, არაა სავალდებულო, რომ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი იყოს დადებითი. ფსევდონორმის ცნებას ფართო გამოყენება აქვს **ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში**, სადაც ფართო გამოყენება აქვს მინკოვსკის ფსევდოევკლიდური სივრცის ცნებას და მის გეომეტრიას, რაც მნიშვნელოვანწილად განაპირობებს ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ფიზიკურ არსს.

ჩვენ განვიხილეთ ვექტორული სივრცეები ნამდვილ რიცხვთა ველის ზემოთ, თუმცა შეგვიძლია ანალოგიურად ავაგოთ ვექტორული სივრცეები კომპლექსურ რიცხვთა ველის ზემოთაც. ამისათვის დაგვჭირდება მხოლოდ ის, რომ მუდმივი  $a$  და  $b$  რიცხვები ავიღოთ  $\mathbb{C}$  კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლიდან. მაშინ ვექტორის კომპონენტები იქნება კომპლექსური რიცხვები. ასეთი ვექტორული სივრცეები ხშირად გამოიყენება **კვანტურ მექანიკაში** და ტალღური პროცესების მოდელირებისას.

### 17.6. კვადრატულ მატრიცათა ალგებრა

$V$  ვექტორული სივრცის  $T$  ასახვას თავის თავზე  $T: V \rightarrow V$  ეწოდება **წრფივი გარდაქმნა**, თუ მართებულია გარდაქმნის წრფივობის თვისება

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y). \quad (17.37)$$

თუ გვაქვს  $V$  ვექტორული სივრცის  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  ბაზისი, მაშინ

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i ; \quad (17.38)$$

$$T(x) = T(\sum_{i=1}^n a_i e_i) = \sum_{i=1}^n a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n T_{ij} e_j, \quad (17.39)$$

სადაც ყოველი  $T(e_i)$  ვექტორი შევცვალებთ მისი წარმოდგენით მოცემულ ბაზისში  $\sum_{j=1}^n T_{ij} e_j$ . ამ წარმოდგენაში  $T_{ij}$  კოეფიციენტებს  $T$  წრფივი გარდაქმნის მატრიცის კომპონენტებს

უწოდებენ და ისინი წარმოქმნიან  $T$  წრფივი გარდაქმნის კვადრატულ  $n \times n$  მატრიცას მოცემულ  $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$  ბაზისში.

განვიხილოთ მნიშვნელოვანი ალგებრული იგივეობა, რომელსაც შემდგომ, ხშირად გამოვიყენებთ

$$\sum_{i=1}^n A_i (\sum_{j=1}^m B_{ij} C_j) = \sum_{j=1}^m C_j (\sum_{i=1}^n B_{ij} A_i). \quad (17.40)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, შეჯამების რიგს არა აქვს მნიშვნელობა. ამიტომ, ეს გამოსახულება ხშირად ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_i B_{ij} C_j \text{ ან უფრო მარტივად, } \sum_{i,j} A_i B_{ij} C_j ; \quad (17.41)$$

რაც ხაზს უსვამს იმ ფაქტს, რომ ესაა ჯამი, სადაც ინდექსები იღებენ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას.

წრფივ გარდაქმნათა კომპოზიცია ანუ ორი  $T$  და  $U$  წრფივი გარდაქმნის მიმდევრობით ზემოქმედება  $V$  ვექტორულ სივრცეზე გვაძლევს ახალ  $UT$  გარდაქმნას :

$$UT(\mathbf{x}) = U(T(\mathbf{x})) = U(\sum_{i,j} a_i T_{ij} \mathbf{e}_j) = \sum_{i,j,k} a_i T_{ij} U_{jk} \mathbf{e}_k = \sum_{i,k} a_i (\sum_j T_{ij} U_{jk}) \mathbf{e}_k. \quad (17.42)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $UT$  გარდაქმნის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\sum_j T_{ij} U_{jk}. \quad (17.43)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ვექტორული სივრცის ორი წრფივი გარდაქმნის კომპოზიციის შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა უდრის ამ გარდაქმნების შესაბამისი მატრიცების მატრიცულ ნამრავლს!

მატრიცათა ნამრავლი, საზოგადოდ, არ არის კომუტაციური ანუ  $AB \neq BA$ .

$A$  მატრიცის ტრანსპონირებული  $A^T$  მატრიცის კომპონენტები მოიცემა

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \quad (17.44)$$

ფორმულით.

თუ  $A$  მატრიცა კომპლექსურია, მაშინ მისი  $A^*$  შეუღლებული მატრიცა განისაზღვრება

$$(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}, \quad (17.45)$$

ფორმულით, სადაც ხაზი ასოს თავზე აღნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებულს.

ერთეულოვანი  $I$  მატრიცას მთავარ დიაგონალზე აქვს ერთიანები, სხვაგან კი - ნულები. ეს ფაქტი მისი კომპონენტებისათვის ჩაიწერება  $\delta_{ij}$  კრონეკერის სიმბოლოს საშუალებით:

$$(I)_{ij} = \delta_{ij}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}; \quad (17.46)$$

იგივე გარდაქმნისას ნებისმიერი ვექტორი უძრავად რჩება ანუ მას შეესაბამება ერთეულოვანი მატრიცა  $\delta_{ij}$  კომპონენტებით.

$A$  მატრიცის შებრუნებულ  $A^{-1}$  მატრიცას განსაზღვრავენ ფორმულით

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \quad (17.47)$$

ნულოვანი მატრიცას არა აქვს შებრუნებული მატრიცა. თუ მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ ეს შებრუნებული ერთადერთია. თუ მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ ამბობენ, რომ ეს მატრიცა არაგადაგვარებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცა გადაგვარებულია.

ყველა არაგადაგვარებული  $n \times n$  მატრიცის სიმრავლე ქმნის ჯგუფს მატრიცების გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამ ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტია ერთეულოვანი მატრიცა. ესაა ლის ჯგუფის მნიშვნელოვანი მაგალითი და აღინიშნება სპეციალური  $GL(n, \mathbb{R})$  სიმბოლოთი.

მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტი  $\det A$  განისაზღვრება ტოლობით:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A = ad - bc. \quad (17.48)$$

უფრო მაღალი რიგის მატრიცების დეტერმინანტები განისაზღვრება ინდუქციურად ლაპლასის თეორემაზე დაყრდნობით. განვიხილოთ მესამე რიგის მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (17.49)$$

მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა შეგვიძლია დავიყვანოთ მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლამდე. ამისათვის გვჭირდება მატრიცის  $a_{ij}$  ელემენტის ალგებრული დამატების ცნება. ამ ელემენტის ალგებრული დამატება ეწოდება  $a^{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  გამოსახულებას, სადაც  $M_{ij}$  არის იმ მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება მოცემული  $A$  მატრიცისაგან, თუ მასში ამოვშლით  $a_{ij}$  ელემენტის შესაბამის სტრიქონსა და სვეტს. ცხადია, რომ  $M_{ij}$  მატრიცის რიგი ერთით ნაკლებია საწყისი  $A$  მატრიცის რიგზე ანუ მესამე რიგის მატრიცის შემთხვევაში გვექნება მეორე რიგის  $M_{ij}$  მატრიცის დეტერმინანტები. მოცემული მატრიცის დეტერმინანტი უდრის, მისი რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლების ჯამს ანუ

$$\det A = a_{11}a^{11} + a_{12}a^{12} + a_{13}a^{13}; \quad (17.50)$$

ამრიგად, მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა, დაიყვანება სამი მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის ჯამის გამოთვლამდე. ანალოგიურად ხდება მეოთხე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლის დაყვანა ოთხი მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლამდე და ა.შ. ნებისმიერი სასრული რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ უფრო დაბალი რიგის მატრიცების დეტერმინანტების გამოთვლამდე. მატრიცა არაგადაგვარებულია, თუ მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

$A$  მატრიცის კვადრი ეწოდება მისი მთავარი დიაგონალის კომპონენტების ჯამს

$$\operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}. \quad (17.51)$$

$A$  მატრიცის მსგავსების გარდაქმნა არაგადაგვარებული  $B$  მატრიცით ეწოდება  $A \mapsto B^{-1}AB$  გარდაქმნას.

გავიხსენოთ რამდენიმე საჭირო ფორმულა

$$(AB)^T = B^T A^T ; \quad (17.52)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} ; \quad (17.53)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) ; \quad (17.54)$$

$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(A) ; \quad (17.55)$$

$$\det(A^T) = \det(A). \quad (17.56)$$

ამბობენ, რომ  $\lambda$  არის  $A$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვი და  $\bar{V}$  მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი, თუ

$$A(\bar{V}) = \lambda\bar{V}, \quad (17.57)$$

სადაც (17.57) ტოლობის მარცხენა ნაწილში  $A$  მატრიცა მოქმედებს  $\bar{V}$  ვექტორზე, როგორც წრფივი გარდაქმნა. საკოორდინატო ფორმაში ეს ტოლობა გადაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\sum_j (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})V_j = 0. \quad (17.58)$$

ამ სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (17.58) სისტემის დეტერმინანტი უდრის ნულს ანუ

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (17.59)$$

ამ  $n$ -ური რიგის განტოლების ამონახსნები გვაძლევენ  $A$  მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს. მათი ჩასმით (1.58) სისტემაში, მივიღებთ შესაბამის საკუთრივ ვექტორებს.

მნიშვნელოვანია, რომ:

- 1) მოცემული  $A$  მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები ემთხვევა მისი ტრანსპონირებული მატრიცის საკუთრივ მნიშვნელობებს;



$$2) \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i; \quad (17.60)$$

$$3) \operatorname{tr}(A) = \sum_i \lambda_i. \quad (17.61)$$

### ამოცანები და საგარჯიშოები

1. როგორ ვაქციოთ  $\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცე ტოპოლოგიურ სივრცედ. არის თუ, არა მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სივრცის სტრუქტურა დამოკიდებული მანძილის ცნების ანალიზურ სახეზე ?

2. ჩამოაყალიბეთ ასახვის განსაზღვრება და აღწერეთ სახეები. ასახვათა კომპოზიცია. ასახვის უწყვეტობის ცნება. იაკობის მატრიცა;

3. განმარტეთ ოპერატორების კომუტატორის ცნება. ოპერატორის განსაზღვრის არე;

4. ჩამოაყალიბეთ ჯგუფის ცნება. აბელური ჯგუფი. ლის ჯგუფი. გადანაცვლებათა ჯგუფი. ჯგუფთა იზომორფიზმი და ჰომომორფიზმი. ლის ჯგუფი  $GL(n, \mathbb{R})$ ;

5. განმარტეთ წრფივი ვექტორული სივრცე. ბაზისია ცნება. ნორმის ცნება და მისი სახეები  $\mathbb{R}^n$  ვექტორულ სივრცეში. ფსევდონორმის ცნება. ვექტორული სივრცის წრფივი გარდაქმნა. წრფივ გარდაქმნათა კომპოზიცია.

### ლიტერატურა

1. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. Пер. с англ., Мир, Москва, 1972
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Пер. с англ., Мир, Москва, 1979
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ., Мир, Москва, 1989
4. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. "განათლება", თბილისი, 1972
5. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, том 1, механика, Пер. с англ., Наука, Москва, 1975

6. Ферми Э. Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ., Мир, Москва, 1968
7. Бёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
8. Бёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
9. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Пер. с англ., Мир, Москва, 1976
10. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ., Мир, Москва, 2002
11. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. Пер. с англ., Мир, Москва, 1985

## XVIII თავი. დიფერენცირებადი მრავალსახეობა და ტენზორი

ცოცხალი სისტემა უწყვეტი სისტემაა. უწყვეტია, როგორც ცოცხალი ორგანიზმის ორგანოთა ქსოვილები, როგორც ფიზიკური სივრცე, ოთხგანზომილებიანი დრო-სივრცე, კლასიკური და კვანტური მექანიკის ფაზური სივრცე, სისტემის თერმოდინამიკური წონასწორობის მდგომარეობათა სივრცე და უფრო ზოგადი, აბსტრაქტული სივრცე. ყველა ამ სივრცეს გააჩნია საერთო გეომეტრიული თვისებები, რომლებიც დაკავშირებული არიან სივრცის უწყვეტობასთან. ამ თვისებათა ყველაზე მნიშვნელოვანი ნაწილი იძლევა საფუძველს იმისა, რომ შევისწავლოთ დიფერენცირებადი მრავალსახეობის ცნება, რომელიც აზუსტებს ტერმინ “სივრცის” მათემატიკურ მნიშვნელობას.

### 18.1. მრავალსახეობის ცნება

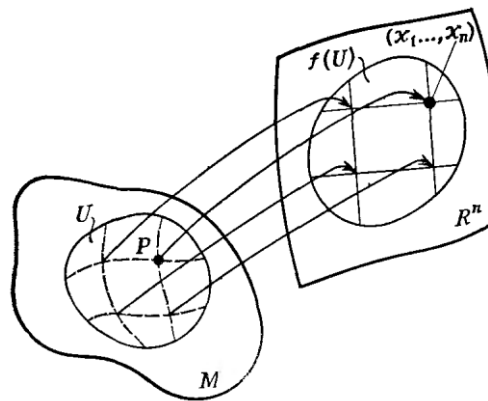
$\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცე შედგება  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  წერტილებისაგან, სადაც თითოეული  $x_i$  კოორდინატი მიიღებს ყველა შესაძლო მნიშვნელობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან.

წერტილებისაგან შედგენილ  $M$  სიმრავლეს ეწოდება **მრავალსახეობა**, თუ მის ყოველ წერტილს გააჩნია ისეთი ღია მიდამო, რომლისთვისაც არსებობს 1-1 ასახვა  $\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცის რომელიმე ღია სიმრავლეზე რომელიცაა  $n$ -ისათვის.

ასე რომ,  $M$  მრავალსახეობა ლოკალურად ემსგავსება  $\mathbb{R}^n$ -ს. ცხადია, რომ  $n$  იქნება **მრავალსახეობის განზომილება**. როგორც ვხედავთ, მრავალსახეობის განსაზღვრებაში მონაწილეობენ მხოლოდ ღია სიმრავლეები და არა მთლიანად  $M$  ან მთლიანად  $\mathbb{R}^n$ , ასე რომ, ჩვენ არ ვაძებთ არავითარ შეზღუდვას  $M$  მრავალსახეობის გლობალურ ტოპოლოგიას. უნდა მივაქციოთ ყურადღება, რომ გადასახვისაგან მოითხოვება მხოლოდ ურთიერთცალსახობა და არ მოითხოვება სიგრძის, კუთხის ან სხვა გეომეტრიული თვისებების შენარჩუნება. გეომეტრიის ამ

დონეზე მანძილის ცნება არც არის განმარტებული და არსებობენ ისეთი ცოცხალი სისტემები, სადაც მანძილის ცნება არც არის საჭირო. გეომეტრიის ამ უმარტივეს დონეზე გეჭირდება მხოლოდ ის, რომ სივრცის ლოკალური ტოპოლოგია იყოს ისეთივე, როგორცაა  $\mathbb{R}^n$ -ში. მრავალსახეობა არის სივრცე ასეთი ტოპოლოგიით.

განსაზღვრის თანახმად, 1-1 კოორდინატული ასახვისას,  $M$  მრავალსახეობის თითოეულ  $P$  წერტილს შეუსაბამებენ  $n$  რიცხვს  $(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$  ნახ. 18.1. ამ  $x_i(P)$  რიცხვებს უწოდებენ  $P$  წერტილის კოორდინატებს მოცემული გადასახვის მიმართ.



ნახ. 18.1.  $M$  მრავალსახეობის  $P$  წერტილის შემცველი  $U$  ღია სიმრავლის  $\mathbb{R}^n$  სივრცის  $f(U)$  ღია სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა  $f$  ასახვა

$n$ -განზომილებიანი მრავალსახეობის განსაზღვრების ერთ-ერთი კონცეფციის მიხედვით, მრავალსახეობა განსაზღვრება მისი ყოველი წერტილის ღია მიდამოში განსაზღვრული  $n$  დამოუკიდებელი კოორდინატით. სწორედ ეს კოორდინატები განსაზღვრავენ მის ასახვას  $\mathbb{R}^n$  სივრცის  $f(U)$  ღია სიმრავლეზე.

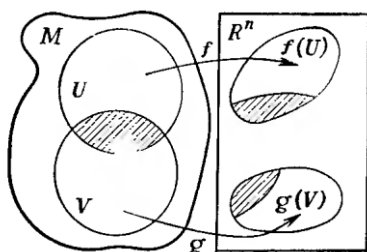
ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობით შევქმენით ზოგადი წარმოდგენა იმის შესახებ, თუ რა არის მრავალსახეობა. ახლა უფრო დეტალურად განვიხილოთ კოორდინატული ასახვა, რათა უფრო ზუსტად განვსაზღვროთ მრავალსახეობის ცნება.

ვთქვათ,  $f$  არის ინექტიური ასახვა  $M$  მრავალსახეობის  $P$  წერტილის შემცველი  $U$  ღია სიმრავლისა,  $\mathbb{R}^n$  სივრცის  $f(U)$  ღია

სიმრავლეზე. ცხადია, რომ არაა სავალდებულო  $U$  ღია სიმრავლე, შეიცავდეს მთელ  $M$  მრავალსახეობას. ასე რომ, არსებობენ სხვა ღია სიმრავლეებიც საკუთარი კოორდინატული ასახვებით, ამავე დროს,  $M$  მრავალსახეობის ყოველი წერტილი უნდა შედიოდეს ერთ ასეთ ღია სიმრავლეში მაინც.

წყვილს „წერტილის ღია მიდამო შესაბამისი კოორდინატული ასახვა“ რუკა ეწოდება.

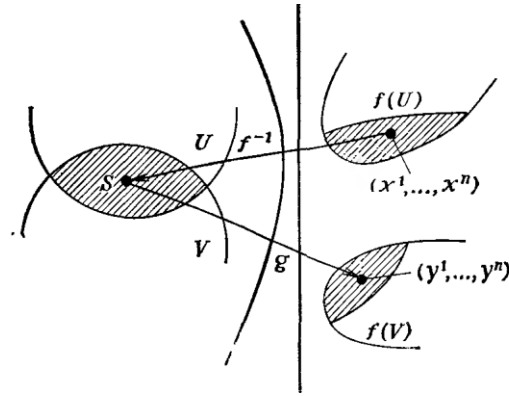
რადგან ნებისმიერი წერტილი შედის ერთ ღია მიდამოში მაინც, ცხადია, რომ ეს ღია სიმრავლეები უნდა კვეთდნენ ერთმანეთს. სწორედ ეს გადაკვეთები იძლევა მრავალსახეობის ცნების დაზუსტების საშუალებას ნახ. 18.2.



ნახ. 18.2. მრავალსახეობის წერტილების  $U$  და  $V$  ღია მიდამოები კვეთენ ერთმანეთს(დაშტრიხული არე)

ამ მიდამოების შესაბამისი  $f$  და  $g$  ასახვები  $\mathbb{R}^n$ -ში, გვაძლევენ თანაკვეთის ზონებში(თანაკვეთაც ღია სიმრავლეა) ორ სხვადასხვა ასახვას და, მაშასადამე, ორ სხვადასხვა საკოორდინატო ბადეს. ამ ორი საკოორდინატო სისტემის ურთიერთმიმართება ახასიათებს მრავალსახეობის სიგლუვეს.

ვიპოვოთ კავშირი ამ ორ საკოორდინატო სისტემას შორის. ამისათვის, განვიხილოთ თანაკვეთის რაიმე წერტილის სახე  $\mathbb{R}^n$ -ში  $f$  ასახვის მიმართ ანუ  $f(U)$ -ში. ვთქვათ, ესაა  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  წერტილი ნახ. 2.3.  $f$  ასახვას გააჩნია  $f^{-1}$  შებრუნებული, ამიტომ არსებობს ერთადერთი  $S$  წერტილი, რომელიც მოთავსებულია  $U$  და  $V$  ღია მიდამოების ისეთ თანაკვეთაში, რომელსაც აქვს მოცემული კოორდინატები  $f$  ასახვის მიმართ.



ნახ. 18.3. ასახვათა კომპოზიცია  $g \circ f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

ახლა ვთქვათ,  $g$  ფუნქციას თანაკვეთის  $S$  წერტილი გადაჰყავს  $\mathbb{R}^n$ -ის სხვა  $(y^1, y^2, \dots, y^n)$  წერტილში. მაშინ გვაქვს ასახვათა კომპოზიცია  $g \circ f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს კოორდინატებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება

$$y^1 = y^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (18.1)$$

$$y^2 = y^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (18.2)$$

.....

$$y^n = y^n(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (18.3)$$

თუ ყველა ამ ფუნქციის კერძო წარმოდებულები  $k$  რიგის ჩათვლით არსებობს და არის უწყვეტი, მაშინ ამბობენ რომ  $f$  და  $g$  ფუნქციები  $C^k$ -თანხმობაში არიან ერთმანეთთან, ან უფრო ზუსტად,  $(U, f)$  და  $(V, g)$  რუკები  $C^k$ -თანხმობაში არიან ერთმანეთთან.

თუ შესაძლებელია რუკათა სრული ერთობლიობის(ატლასი), აგება ისე, რომ მრავალსახეობის თითოეული წერტილი შედიოდეს ერთ მათგანში მაინც და ნებისმიერი რუკა ყველა მის თანამკვეთ სხვა რუკასთან იყოს  $C^k$ -თანხმობაში, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს  $C^k$ -მრავალსახეობა.  $C^1$  კლასის მრავალსახეობას დიფერენცირებად (გლუვ) მრავალსახეობას უწოდებენ. ცხადია, რომ  $C^k$ -მრავალსახეობა, საზოგადოდ, დიფერენცირებადი მრავალსახეობაა.

მრავალსახეობის დიფერენცირებადობა საშუალებას გვაძლევს გავამდიდროთ ის სხვადასხვა სტრუქტურით: შეგვიძლია განვსაზღვროთ ტენზორი, დიფერენციალური ფორმა, ლის წარმოებული. ჩვენ ჯერ არ შემოგვიტანია მეტრიკის ცნება - ამიტომ ჯერ არ გვაქვს წარმოდგენა მრავალსახეობის „ფორმაზე“ ან „სიმრუდეზე“. ვიცით მხოლოდ, რომ ის ლოკალურად დიფერენცირებადია და ესაა ჩვენთვის მნიშვნელოვანი. შემდგომ ჩავთვლით, რომ მრავალსახეობები დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით.

## 18.2. სფერო, როგორც მრავალსახეობა

სფერო (ბირთვის ზედაპირი) არის მრავალსახეობის ერთ-ერთი უმარტივესი მაგალითი, რომელიც წარმოადგენს იმ ფაქტის ნათელ ილუსტრაციას, რომ საჭიროა ერთზე მეტი რუკა. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სფერო  $S^2$  ანუ  $\mathbb{R}^3$  სივრცის წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც

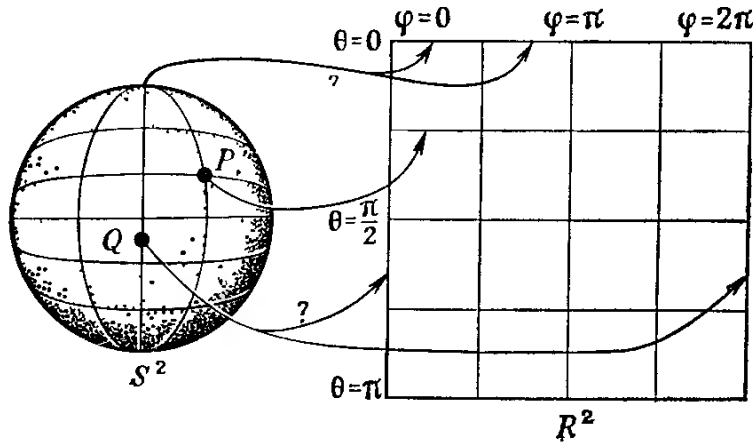
$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = const. \quad (18.4)$$

ყოველ მის წერტილს, აქვს საკმაოდ მცირე მიდამო რომელიც შესაძლებელია 1-1 გადასახვით ავსახოთ  $\mathbb{R}^2$ -ში წრეზე ნახ. 18.4.



ნახ. 18.4.  $S^2$  სფეროს  $P$  წერტილის მიდამო ურთიერთცალსახად აისახება  $\mathbb{R}^2$ -ში

ცხადია, რომ ეს ასახვა არ ინახავს სიგრძესა და კუთხეს. მაგალითისათვის, განვიხილოთ სფერული კოორდინატები  $\theta \equiv x^1$ ,  $\varphi \equiv x^2$ . ერთი შეხედვით, შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ მთელი სფერო აისახება  $0 \leq x^1 \leq \pi$ ,  $0 \leq x^2 \leq 2\pi$  მართკუთხედზე ნახ. 18.5.



ნახ. 18.5. ჩვეულებრივი სფერული კოორდინატები გვაძლევენ გადასახვას  $S^2$ -დან  $\mathbb{R}^2$ -ში, მაგრამ ეს არ არის 1-1 ასახვა

უფრო დეტალური განხილვისას ვხვდებით, რომ ეს ასე არ არის. მართლაც,  $\theta = 0$  პოლუსში „ასახვა ფუჭდება“, რადგან ერთი წერტილი აისახება მონაკვეთის წერტილებში

$$x^1 = 0, \quad 0 \leq x^2 \leq 2\pi, \quad (18.5)$$

ასე რომ, პოლუსში არ გვაქვს 1-1 ასახვა. მეორე მხრივ, წერტილები, რომელთათვისაც  $\varphi = 0$  აისახება ორ სხვადასხვა ადგილას:  $x^2 = 0$  და  $x^2 = 2\pi$ . ასე რომ, ისევ ირღვევა 1-1 ასახვის პირობები. ამ სირთულიდან გამოსავალი არის ასახვის შემოფარგვლა ღია სიმრავლით:

$$0 < x^1 < \pi, \quad 0 < x^2 < 2\pi. \quad (18.6)$$

მაშინ ასახვიდან ითიშება, როგორც პოლუსები, ისე მათი შემაერთებელი  $\varphi = 0$  ნახევარწრე. ამიტომ მთელი სფეროს 1-1 ასახვისათვის გვჭირდება ორი ასახვა მაინც. მეორე ასახვა შეიძლება იყოს სხვა სფერულ კოორდინატთა სისტემა, რომლისთვისაც  $\varphi = 0$  მერიდიანი წარმოადგენს პირველი სისტემის ეკვატორს. ცხადია, რომ სფეროს ყოველი წერტილი ძვეს ამ ორი რუკიდან ერთ-ერთში მაინც. თანაკვეთის ფუნქციები, რომლებიც აკავშირებს მეორე სისტემის კოორდინატებს პირველის კოორდინატებთან, ამ შემთხვევაში საკმაოდ რთულად გამოიყურება, მაგრამ ცხადია, რომ ისინი ანალიზური არიან; რაც იმას ნიშნავს, რომ სფერო ანალიზური მრავალსახეობაა. სფერული ზედაპირის სიბრტყეზე, მეორე „უფრო კარგი ასახვა“



სტერეოგრაფიული პროექცია, თუმცა ამ შემთხვევაშიც მინიმუმ **ორი რუკა** გვჭირდება. არ არსებობს ისეთი კოორდინატული გარდაქმნა, რომელიც გამოდგებოდა მთელი  $S^2$ -დან  $\mathbb{R}^2$ -ში 1-1 ასახვისათვის. ეს ფაქტი უკავშირდება სფეროს ზედაპირის **გლობალურ ტოპოლოგიას**.

### 18.3. მრავალსახეობის სხვა მაგალითები

მრავალსახეობის ცნების მნიშვნელოვანი თვისებაა მისი ზოგადობა. მრავალსახეობა ზოგჯერ ისეთი სიმრავლეა, რომ, თუ არ გვექნებოდა მრავალსახეობის ცნება, მას არც კი ჩათვლიდნენ სივრცედ. განსაზღვრის თანახმად, ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც უშვებს უწყვეტ პარამეტრიზაციას წარმოადგენს მრავალსახეობას, რომლის განზომილებაც ემთხვევა დამოუკიდებელი პარამეტრების რაოდენობას. **მაგალითად:**

- 1) სამგანზომილებიანი სივრცეში, მყარი სხეულის ყველა შესაძლო ბრუნვა წარმოადგენს მრავალსახეობას, რადგან უშვებს პარამეტრიზაციას ეილერის კუთხეების მეშვეობით;
- 2) **ლორენცის ყველა გარდაქმნის სიმრავლეს**, რომლებიც გვაძლევენ მოძრავ ათვლის სისტემაზე გადასვლის ფორმულებს, აქვს სამგანზომილებიანი მრავალსახეობის სტრუქტურა. პარამეტრებს წარმოადგენს მოძრაობის სიჩქარის სამი კომპონენტი;
- 3)  $N$  რაოდენობის ნაწილაკისათვის, მათი მდგომარეობისა ( $3N$ ) და სიჩქარის კომპონენტების ( $3N$ ) სიდიდეები, წარმოქმნიან წერტილებს  $6N$ -განზომილებიან მრავალსახეობაში, რომელ-საც **ფაზური სივრცე** ეწოდება;
- 4) თუ  $y$  ცვლადის  $x$  არგუმენტზე დამოკიდებულების საპოვნელად, მოცემული გვაქვს ალგებრული ან დიფერენციალური განტოლება, მაშინ შესაძლებელია მრავალსახეობის სტრუქტურის შემოტანა  $(y, x)$  წყვილების **სიმრავლეზე**, სადაც ყოველი კერძო ამონახსენი იქნება წირი ამ მრავალსახეობაზე. ეს მაგალითი ადვილად განზოგადდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვისაც

5) მრავალსახეობის მაგალითია ვექტორული  $V$  სივრცე, რომელიც ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება. მართლაც, ნებისმიერი  $y$  ვექტორი  $n$ -განზომილებიან სივრცეში მოიცემა ბაზისის მიხედვით, როგორც  $y = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ ; რაც იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს ასახვა  $\mathbb{R}^n$ -ში,

$$y \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (18.7)$$

ასე რომ, მთელი ვექტორული სივრცე იფარება ერთი რუკით. უფრო მეტიც,  $V$  და  $\mathbb{R}^n$  ერთმანეთის იზომორფული არიან. რაც იმას ნიშნავს, რომ, როცა გვჭირდება, ყოველი ვექტორული სივრცე, შეგვიძლია ჩავთვალოთ  $\mathbb{R}^n$  სივრცედ.

ახლა, უკვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ლის ჯგუფი.  $G$  სიმრავლეს ეწოდება ლის ჯგუფი, თუ ის არის ჯგუფი და ამავე დროს  $C^\infty$  - მრავალსახეობა, ამასთან, ჯგუფის ოპერაცია უნდა ინდუცირებდეს  $G$  მრავალსახეობის  $C^\infty$ - ასახვას თავის თავში.

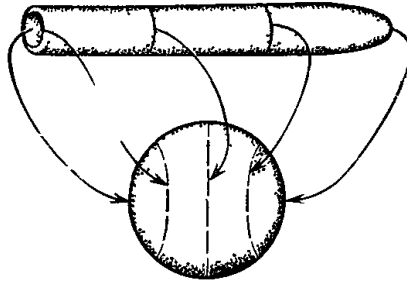
ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი  $a \in G$  ელემენტი ინდუცირებს  $G$  მრავალსახეობის თავის თავში ასახვას, რომლის დროსაც ნებისმიერი  $b \in G$  ელემენტისათვის  $b \mapsto ba$ . მოითხოვება, რომ ეს ასახვა იყოს  $C^\infty$  კლასის. კოორდინატთა ენაზე ეს იმას ნიშნავს, რომ  $ba$  წერტილის კოორდინატები უნდა იყოს  $b$  წერტილის კოორდინატის  $C^\infty$  კლასის ფუნქციები. სინამდვილეში, ეს მოთხოვნა არის ჯგუფის სტრუქტურის მრავალსახეობის სტრუქტურასთან თანხმობის პირობა.

ადვილი მისახვედრია, რომ მყარი სხეულის მობრუნებების სიმრავლე ადგენს ჯგუფს, რომლის ჯგუფური სტრუქტურა თანხმობაშია სამგანზომილებიანი მრავალსახეობის სტრუქტურასთან. ლის ამ ჯგუფს  $SO(3)$  ჯგუფს უწოდებენ. ლის ჯგუფის მაგალითია თვით  $\mathbb{R}^n$ .

#### 18.4. მრავალსახეობის გლობალური თვისებები

რადგან ყოველი მრავალსახეობა, ლოკალურად ისევეა მოწყობილი, როგორც  $\mathbb{R}^n$ , ნებისმიერი ორი ერთნაირგანზომილებიანი და ერთნაირი სიგლუვის მრავალსახეობა დეფერენციალური გეომეტრიის ამ დონეზე ლოკალურად არ განირჩევა ერთმანეთისაგან. სიტუაცია მკვეთრად იცვლება, როცა გადავდივართ მრავალსახეობის გლობალურ სტრუქტურაზე, და ამის ნათელი მაგალითია  $S^2$  და  $\mathbb{R}^2$ . ასე რომ, მათი გლობალური სტრუქტურის მიხედვით, მრავალსახეობები იყოფა სხვადასხვა კლასად.

მაგალითად, სფეროს ზედაპირს და ცარცის ზედაპირს ერთნაირი გლობალური სტრუქტურა აქვთ. არც ერთი მათგანი არ შეიძლება ავსახოთ  $\mathbb{R}^2$  – ზე, თუმცა ისინი შეგვიძლია 1-1 ასახვით ავსახოთ ერთმანეთზე ნახ. 2.6.



ნახ. 18.6. ცარცის გლუვი ზედაპირი შეგვიძლია ურთიერთცალსახად ავსახოთ  $S^2$  სფეროზე და ეს ასახვა გლობალურია (დიფეომორფიზმი)

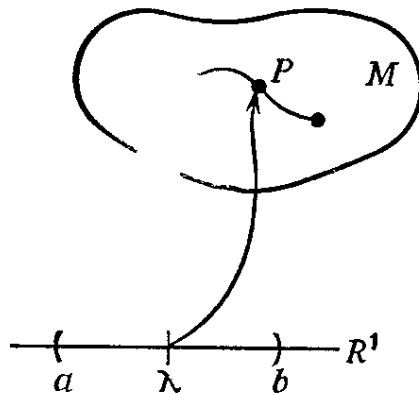
**განსაზღვრება:**  $C^\infty$  მრავალსახეობის ურთიერთცალსახა  $C^\infty$  კლასის *ასახვას* ამავე კლასის სხვა მრავალსახეობაზე  $M \rightarrow N$ , სადაც  $N$  მრავალსახეობის წერტილების კოორდინატები გამოისახება  $M$  მრავალსახეობის შესაბამისი წერტილების კოორდინატებით ისე, რომ გამოსახვის ფუნქციები, მათ შებრუნებულ ფუნქციებთან ერთად, არიან  $C^\infty$  კლასის, ეწოდება  $M$  მრავალსახეობის **დიფეომორფიზმი**  $N$  მრავალსახეობაზე.

ასეთ  $M$  და  $N$  მრავალსახეობებს **დიფეომორფული** ეწოდება. მაგალითად, ყავის ფინჯანი დიფეომორფულია ტორის (ბუბლიკის ზედაპირი), რადგან უწყვეტი დეფორმაციით შეგვიძლია ერთი მათგანი გადავიყვანოთ მეორეში. ძირითადად გამოვიყენებთ ლოკალურ გეომეტრიას, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ მრავალსახეობის დიფერენციალურ სტრუქტურაზე, თუმცა განფენისა და ფუნქციათა ინტეგრირების დროს გვექნება ისეთი საკითხებიც, როცა დაგვჭირდება მრავალსახეობის გლობალური თვისებებიც.

## 18.5. მრუდი

ჩვენთვის მეტად მნიშვნელოვანია მრავალსახეობაზე მოცემული მრუდის ცნება. საზოგადოდ, მიღებულია **მრუდის** განმარტება, როგორც მრავალსახეობის უწყვეტად ჩალაგებული წერტილების ერთობლიობისა. ჩვენთვის მიზანშეწონილია მისი ეკვივალენტური სხვა განმარტება.

განსაზღვრება:  $\mathbb{R}^1$ -ის ღია სიმრავლის დიფერენცირებად ასახვას  $M$  მრავალსახეობაში მრუდი ეწოდება ნახ. 18.7.



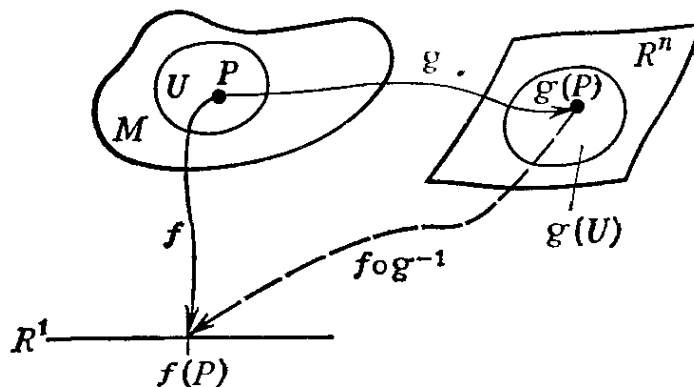
ნახ. 18.7.  $\lambda \in \mathbb{R}^1 \rightarrow P \in M$  ამ გადასახვის სახეა მრუდი  $M$  მრავალსახეობაში

ასე რომ, ღია  $(a; b) \in \mathbb{R}^1$  სიმრავლე აისახება  $M$  მრავალსახეობაში, ისე, რომ თითოეულ წერტილს  $(a; b)$  ღია შუალედიდან შეესაბამება  $\lambda$  პარამეტრის რაღაც კონკრეტული მნიშვნელობა (ნამდვილი რიცხვი), რომლის შესაბამისი სახეც არის  $M$  მრავალსახეობის რაღაც წერტილი. ამ სახეების ერთობლიობაა სწორედ, ჩვენ მიერ განსაზღვრებული მრუდი. ამ განსაზღვრების თანახმად, წირის ყოველ წერტილს შეესაბამება  $\lambda$  პარამეტრის რაღაც კონკრეტული მნიშვნელობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ მოვახდინეთ წირის პარამეტრიზაცია ამ პარამეტრით. ამიტომ სხვადასხვანაირად პარამეტრიზებული წირები უნდა განვასხვაოთ ერთმანეთისაგან, მაშინაც კი, როცა მათი წერტილების სიმრავლეები ემთხვევა ერთმანეთს  $M$ -ში. როგორც ადრე აღვნიშნეთ ასახვას ეწოდება დიფერენცირებადი, თუ ასახვის სახე წერტილების კოორდინატების ფუნქციები  $\{x^i(\lambda), i \in \mathbb{N}\}$  დიფერენცირებადია  $\lambda$  პარამეტრის მიმართ.

### 18.6. მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქცია

განსაზღვრება:  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$  ასახვას ეწოდება ფუნქცია  $M$  მრავალსახეობაზე, თუ  $f$  არის წესი, რომელიც  $M$  მრავალსახეობის ყოველ წერტილს შეესაბამებს ერთადერთ ნამდვილ

რიცხვს(ფუნქციის მნიშვნელობას). თუ  $M$  მრავალსახეობის რაღაც ღია სიმრავლე გლუვი 1-1 კოორდინატული ასახვით აისახება  $\mathbb{R}^n$ -ში, მაშინ  $M$  მრავალსახეობის ფუნქცია გადაიქცევა ფუნქციად  $\mathbb{R}^n$ -ში ნახ. 18.8.



ნახ. 18.8. თუ,  $f$  არის ფუნქცია  $\mathbb{R}^1$ -ზე  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ , ხოლო  $g$  არის კოორდინატული ასახვა  $g: U \rightarrow g(U)$ , (სადაც  $g(U) \in \mathbb{R}^n$ ), რომელიც ცხადია შექცევადია, მაშინ ასახვათა კომპოზიცია  $f \circ g^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  არის ფუნქცია  $\mathbb{R}^n$ -ზე ანუ გვაქვს უბრალოდ  $f(P)$ -ს გამოსახვა  $P$  წერტილის კოორდინატებით.

თუ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს დიფერენცირებადი ფუნქცია  $M$  მრავალსახეობაზე. რადგან  $P$  წერტილი მოიცემა თავისი კოორდინატებით, ჩვენი ფუნქცია შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ . თუ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია არგუმენტების მიმართ, მაშინ მას დიფერენცირებად ფუნქციას უწოდებენ. თვითონ კოორდინატები, რა თქმა უნდა, უწყვეტია და უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ამის შემდეგ აღარ ვილაპარაკებთ კოორდინატულ ასახვებზე, თუმცა გვქნება კოორდინატები, რომლებიც იძლევიან ამ ასახვებს. კოორდინატულ ასახვებს ვიყენებდით, რათა ზუსტად გადმოგვეცა ძირითად ცნებათა განსაზღვრებები. ამის შემდეგ ამ ცნებათა გამოყენება დაგვავინტერესებს მხოლოდ ცოცხალი სისტემისათვის, რისთვისაც დაგვჭირდება მრავალსახეობაზე რამდენიმე დიფერენციალური სტრუქტურის შემოღება.

დავუშვებთ, რომ განხილულ მრავალსახეობებში ყველგან შეგვიძლია შემოვიღოთ კოორდინატები  $\{x^i, i \in \mathbb{N}\}$  და ნებისმიერი

გლუვი  $y^i = y^i(x^j)$  ფუნქციებისათვის, რომლებიც ლოკალურად შექცევადია (იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან), შეგვიძლია გადავიდეთ ახალ კოორდინატთა სისტემაზე.

### 18.7. ვექტორი და ვექტორული ველი

განვიხილოთ  $M$  მრავალსახეობის  $P$  წერტილზე გამავალი წირი, რომელიც მოიცემა შემდეგი განტოლებით:

$$x^i = x^i(\lambda), \quad i \in \mathbb{N}. \quad (18.8)$$

აიღოთ ამ მრავალსახეობაზე დიფერენცირებადი  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$  ფუნქცია, რომელსაც ზოგჯერ მოკლედ ასე ჩავწერთ  $f(x^i)$ . წირის ყოველ წერტილში გამოითვლება ამ ფუნქციის მნიშვნელობა. ასე რომ, წირის გასწვრივ წარმოიქმნება დიფერენცირებადი  $g(\lambda)$  ფუნქცია, რომელიც იძლევა  $f$  ფუნქციის მნიშვნელობას  $\lambda$  პარამეტრის შესაბამის წერტილში:

$$g(\lambda) = f(x^1(\lambda), x^2(\lambda), \dots, x^n(\lambda)) = f(x^i(\lambda)). \quad (18.9)$$

გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (18.10)$$

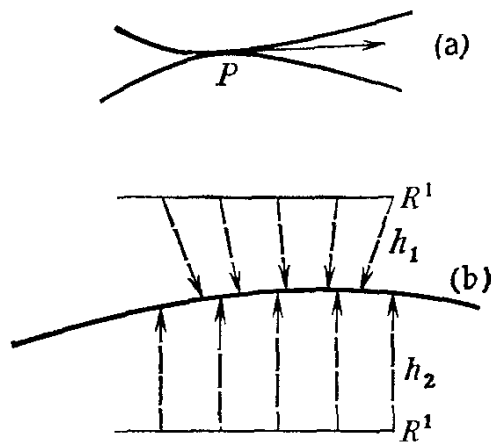
ეს ფორმულა მართებულია ნებისმიერი  $g$  ფუნქციისათვის, ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (18.11)$$

ჩვეულებრივი ვექტორული აღრიცხვის თვალსაზრისით, ევკლიდურ სივრცეში  $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$  სიდიდეები იმ ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც  $x^i(\lambda)$  წირის მხებს წარმოადგენს; ეს ადვილად შეიძლება გავიგოთ იქიდან, რომ  $\{dx^i\}$  უსასრულოდ მცირე გადაადგილებაა წირის გასწვრივ და მისი გაყოფა  $d\lambda$  სიდიდეზე ცვლის მხოლოდ ვექტორის სიგრძეს და არა

მიმართულებას. განსაზღვრების თანახმად,  $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$  სიდიდეები წარმოადგენს წირის მხები ვექტორის კომპონენტებს.

ცხადია, რომ ყოველი ვექტორი წარმოადგენს მხებ ვექტორს  $P$  წერტილზე გამავალი უსასრულოდ ბევრი წირისათვის და ამას აქვს ორი მიზეზი: ჯერ ერთი, არსებობს  $P$  წერტილზე გამავალი უსასრულოდ ბევრი წირი, რომლებიც ერთმანეთს ეხება და აქვთ საერთო მხები ვექტორი; მეორეც, მოცემული წირი შეიძლება იქნეს პარამეტრიზებული ისე, რომ  $P$  წერტილში არსებული მხები ვექტორი არ შეიცვალოს. ეს ფაქტი გამოსახულია ნახ. 18.9



ნახ. 18.9. a) საერთო მხების მქონე ორი მრუდი; b) ორი გეომეტრიულად თანმხვედრი მრუდი სხვადასხვა პარამეტრიზაციით

თუ სხვადასხვა პარამეტრიზაციის შესაბამის ასახვებს აღვნიშნავთ  $h_1$ -ითა და  $h_2$ -ით, მაშინ  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  ორი სხვადასხვა პარამეტრიზაციისათვის, ასახვათა კომპოზიცია  $h_2^{-1} \circ h_1$  იძლევა კავშირს  $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$ . თუ  $P$  წერტილში  $\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = 1$ , მაშინ ამ წერტილში, სხვადასხვა პარამეტრიზაციის შედეგად მიღებული ორი წირის მხები ვექტორები ერთმანეთს ემთხვევა.

რადგან მრავალსახეობაში არაა სავალდებულო ორ წერტილს შორის მანძილის ცნების შემოღება, საჭიროა ვექტორი განვსაზღვროთ  $M$  მრავალსახეობის წერტილების ინფინიტეზიმალური მიდამოების საშუალებით. ვთქვათ, a და b ორი ნებისმიერი

რიცხვია,  $x^i = x^i(\mu)$  კი -  $P$  წერტილზე გამავალი წირი. მაშინ ამ წერტილში გვექნება

$$\frac{d}{d\mu} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (18.12)$$

და

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} = \sum_i \left( a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (18.13)$$

ასე რომ, რიცხვები  $\left\{ a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right\}$  იმ ახალი ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც ეხება  $P$  წერტილზე გამავალ რომელიღაც წირს. შესაბამისად, უნდა არსებობდეს რომელიღაც  $\varphi$  წირი, ისეთი, რომ  $P$  წერტილში

$$\frac{d}{d\varphi} = \sum_i \left( a \frac{dx^i}{d\lambda} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (18.14)$$

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარე, ადვილად დავასკვნით, რომ  $P$  წერტილში

$$a \frac{d}{d\lambda} + b \frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\varphi}. \quad (18.15)$$

შესაბამისად, წირის გასწვრივ დიფერენცირების ოპერატორები მოცემულ  $P$  წერტილში ადგენენ ვექტორულ სივრცეს. ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში არსებობენ სპეციალური წირები, საკოორდინატო ხაზები. გასაგებია, რომ ამ წირების გასწვრივ დიფერენცირების ოპერატორებია  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  და (18.11) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი  $\frac{d}{d\lambda}$  ოპერატორი შეიძლება წარმოვადგინოთ  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  კერძო წარმოებულების წრფივი კომბინაციის სახით. ამიტომ  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  სისტემა წარმოადგენს ვექტორული სივრცის ბაზისს. (18.11) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ  $\frac{d}{d\lambda}$  ვექტორს ამ ბაზისში აქვს კოორდინატები  $\left\{ \frac{dx^i}{d\lambda} \right\}$ . ამრიგად, მივიღეთ, რომ  $P$  წერტილში ყველა მხევი ვექტორის სივრცესა და ამ წერტილში გამავალი წირების გასწვრივ დიფერენცირებათა სივრცეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა. ამიტომ მათემატიკოსები



ამბობენ, რომ  $\frac{d}{d\lambda}$  არის  $x^i(\lambda)$  წირის მხები ვექტორი. ახლა უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ამ პირობებში შეიძლება მხოლოდ ისეთი ვექტორების შეკრება, რომლებიც მოდებული არიან ერთ წერტილში. მხები ვექტორები არა  $M$  მრავალსახეობაშია, არამედ მისი  $P$  წერტილის მხებ სივრცეში, რომელიც აღინიშნება  $T_P$ -თი. ადვილი მისახვედრია, რომ სფეროს შემთხვევაში, მის  $P$  წერტილში გავლებული მხები სივრცე ემთხვევა მხებ სივრცეს. უფრო რთული მრავალსახეობებისათვის ასეთი წარმოდგენა რთულია. ტერმინ **ვექტორულ ველს**, გამოვიყენებთ იმ წესის აღსანიშნავად, რომელიც  $M$  მრავალსახეობის ყოველ წერტილს შეუსაბამებს ვექტორს.

### 18.8. ბაზისური ვექტორები და ბაზისური ვექტორული ველები

$M$  მრავალსახეობის ნებისმიერი  $P$  წერტილისათვის, ამ წერტილში აგებული  $T_P$  მხები სივრცე იმავე  $n$  განზომილებისაა, რომლისაც საწყისი  $M$  მრავალსახეობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი  $n$  წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ქმნის ბაზისს  $T_P$  მხებ სივრცეში.

თუ აგებული  $T_P$  მხები სივრცეებისათვის ავირჩევთ რაღაც ბაზისს  $M$  მრავალსახეობის თითოეული  $P$  წერტილისათვის, მაშინ მივიღებთ **ბაზისურ ვექტორულ ველებს**. თუ  $P$  წერტილის  $U$  მიდამოში მოცემულია  $\{x^i\}$  კოორდინატთა სისტემა, მაშინ  $U$  სიმრავლის ყოველ წერტილში განსაზღვრულია **საკოორდინატო ბაზისი**  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ , მაგრამ სულაც არაა სავალდებულო საკოორდინატო ბაზისში მუშაობა, ვექტორები შეიძლება განვიხილოთ ნებისმიერ  $\{\bar{e}_i\}$  ბაზისში. აქ  $i$  ინდექსი იხმარება ბაზისური ვექტორების ნუმერაციისათვის და ის არ ნიშნავს რაღაცის კომპონენტს.  $P$  წერტილში ნებისმიერი ვექტორი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V'^j \bar{e}_j. \quad (18.16)$$

$\{V^i\}$  რიცხვები  $\bar{V}$  ვექტორის კომპონენტებია  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  ბაზისის მიმართ, ხოლო  $\{V'^j\}$  რიცხვები იმავე ვექტორის კომპონენტებია  $\{\bar{e}_i\}$  ბაზისში. ეს კომპონენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია გარკვეული, ვექტორებისათვის დამახასიათებელი ფორმულებით, რის შესახებაც შემდეგ გვექნება საუბარი.

$\bar{V}$ ,  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  და  $\{\bar{e}_i\}$  ვექტორული ველებია, ხოლო  $\bar{V}$  ვექტორული ველის კომპონენტები:  $\{V^i\}$  და  $\{V'^j\}$   $M$  მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქციებია.

ჩვენ არაცხადად დაეუშვით, რომ  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია ნებისმიერი  $P$  წერტილის  $U$  მიდამოში, ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი იძლევიან 1-1 ასახვას  $P$  წერტილის რაღაც  $U$  მიდამოში,  $\mathbb{R}^n$ -ში შესაბამის  $V$  ღია სიმრავლეში.

განვიხილოთ რაიმე „კარგი“  $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$  კოორდინატთა სისტემა  $U$ -ზე. მაშინ  $\{(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$  სიმრავლიდან ასახვა  $U$ -ში შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (18.17)$$

ეს ფუნქცია ურთიერთცალსახაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი სტრიქონებისაგან (სვეტებისაგან) შემდგარი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. მაგრამ ეს ფუნქციები სწორედ  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  ვექტორების კომპონენტებია  $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$  კოორდინატთა სისტემაში, რადგან

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^n}, \quad (18.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y^n}, \quad (18.19)$$

..... ,

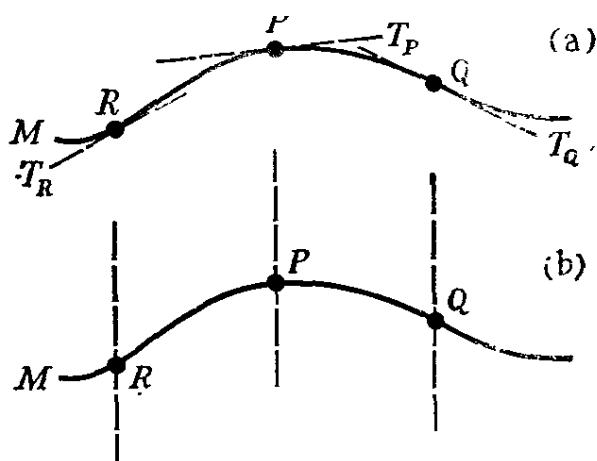
$$\frac{\partial}{\partial x^n} = \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^n}. \quad (18.20)$$

ამრიგად,  $U$  მიდამოში  $\{x^i\}$  კოორდინატთა სისტემა „კარგია“, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ  $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$  ვექტორები ქმნიან  $U$ -ს ყველა წერტილის შესაბამისი მხები სივრცის ბაზისს.

### 18.9. განფენილი სივრცე

თუ მოცემულ  $M$  მრავალსახეობას გავაერთიანებთ მისი ყველა მხები  $T_P$  სივრცის ერთობლიობასთან, ძალიან საინტერესო მრავალსახეობას მივიღებთ.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობა(მრუდი) და მისი მხები სივრცეები (ამ მრუდის მხებები, მის ყოველ წერტილში) ნახ. 18.10.



ნახ. 18.10. *a)* ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობა და მისი ზოგიერთი მხები სივრცე; *b)* იგივე, მაგრამ მხები სივრცეები დახაზულია ერთმანეთის პარალელური წრფეებით, რათა თავიდან ავიცილოთ მათი შემთხვევითი, უმნიშვნელო თანაკვეთა

*a)* ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობა და მისი ზოგიერთი მხები სივრცე ნახაზზე გამოსახულია მრუდით და მისი ზოგიერთი მხები წრფით. იგულისხმება, რომ მხებები ვრცელდება უსასრულოდ, რათა ვექტორის სივრცეს ნებისმიერ წერტილში შეეძლოს ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება. ყველაფერი ეს რომ დაგვეტანა ნახაზე, მაშინ ის მეტად გაურკვეველი იქნებოდა, ამიტომ უმჯობესია ყველაფერი გამოვსახოთ ისე, როგორც ეს გამოსახულია *b)* შემთხვევისთვის ნახ. 18.10, სადაც მხები

სივრცეები გამოსახულია ერთმანეთის პარალელური წრფეებით და მრუდს კვეთენ მხოლოდ იმ წერტილში რომელთანაც შესაბამისობაში არიან. სამწუხაროდ, ეს ნახაზი ვერ გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ მხები სივრცეები ეხებიან მოცემულ მრუდს, თუმცა ესაა ფასი, რასაც ვიხდით ნახაზის ნათლად წარმოსადგენად. ვერტიკალური  $T_P$  წრფის ყოველი წერტილი წარმოადგენს მოცემული სივრცის ვექტორს, რომელიც  $M$  მრავალსახეობას ეხება  $P$  წერტილში. ნახ. 18.10, *b*) გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ გამოსახული ორგანზომილებიანი მრავალსახეობის ყოველი წერტილი წარმოადგენს  $M$  მრავალსახეობის მხოლოდ ერთი რომელიმე მხები სივრცის წერტილს, მაგალითად,  $R$  წერტილი ეკუთვნის მხოლოდ  $T_R$  მხებ სივრცეს. ორგანზომილებიანი ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი ვექტორი,  $M$  მრავალსახეობის მხოლოდ ერთი წერტილისათვის.

ყოველივე ზემოთ თქმულს მიყვავართ ახალი  $TM$  მრავალსახეობის განსაზღვრებამდე, რომელიც შედგება მოცემული მრავალსახეობის ყოველ წერტილში გავლებული მხები ვექტორებისაგან, ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ეს ორგანზომილებიანი მრავალსახეობაა. ამ სივრცეს ეწოდება *განფენილი სივრცე* (სხვანაირად *განფენა*); მისი ფენებია  $T_P$  მხები სივრცეები  $M$  მრავალსახეობის ყოველი  $P$  წერტილისათვის. ტერმინი „ფენა“ შეესაბამება ნახ. 18.10 *b*) ნახაზზე ვერტიკალურ წრფეებს.

იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ  $TM$  მრავალსახეობის ორგანზომილებიანობაში, ავაგოთ მისი რაიმე ინტერვალის კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ, ერთგანზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობის კოორდინატია  $x$ ; ავაგოთ იმ მხები სივრცეების კოორდინატები, რომლებიც შეესაბამებიან  $M$  მრავალსახეობის იმ წერტილებს, რომლებიც მოთავსებული არიან  $x \in (a; b)$  ინტერვალში. ჩავთვალოთ, რომ  $x$  „კარგი“ კოორდინატია. მაშინ  $M$  მრავალსახეობის ყოველი  $P$  წერტილისათვის, შესაბამისი მხები  $\bar{V}$  ვექტორი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

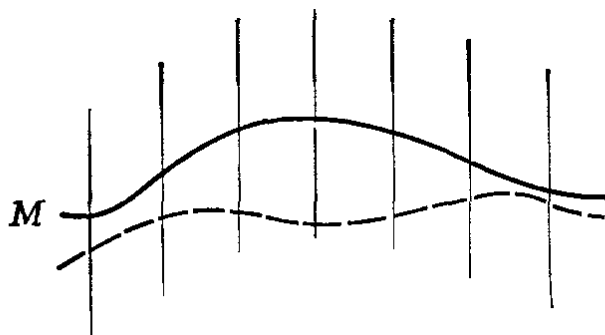
$$\bar{V} = y \frac{\partial}{\partial x}. \quad (18.21)$$

ასე რომ,  $y$  არის  $T_P$  მხეხი სივრცისთვის „კარგი“ კოორდინატი. რადგან თითოეული ფენა შეესაბამება  $x$ -ის ფიქსირებულ მნიშვნელობას,  $(x, y)$  კოორდინატები ცალსახად განსაზღვრავენ მხეხ  $y$  ვექტორს და იმ  $x$  წერტილს, რომელსაც ეს ვექტორი შეესაბამება. რადგან განფენილი სივრცის ყოველი წერტილი უნდა იყოს განხილული სახის რაიმე ღია სივრცეში, ამით დავამტკიცეთ, რომ  $TM$  ორგანზომილებიანი მრავალსახეობაა.

ცხადია, რომ ეს კონსტრუქცია ადვილად გადაიტანება მრავალგანზომილებიანი მრავალსახეობის მხეხი განფენილი სივრცისათვისაც.

ზემოთ განხილული ტიპის კოორდინატებს, სადაც  $T_P$ -ს კოორდინატები განისაზღვრება  $M$  მრავალსახეობის  $P$  წერტილის მიდამოში ვექტორის წარმოდგენით  $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}$  ბაზისის მიმართ,  $TM$ -ის ბუნებრივი კოორდინატები ეწოდება.

განვიხილოთ წყვეტილი მრუდი ნახ. 18.11. ეს წირი  $M$  მრავალსახეობის ყოველ წერტილში გვაძლევს რაღაც ვექტორს, ამიტომ ეს მრუდი ქმნის რაღაც ვექტორულ ველს  $M$ -ზე. ასეთ მრუდს განფენილი  $TM$  სივრცის კვეთა ეწოდება.



ნახ. 18.11. ერთგანზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობის (უწყვეტი წირი) ზემოთ განფენილი  $TM$  სივრცის კვეთა (წყვეტილი წირი)

ცხადია, რომ ასეთი წირის სივრცეზე ლაპარაკს აზრი არა აქვს. მაშასადამე, გვაქვს ისეთი მრავალსახეობის მაგალითი, რომლისთვისაც მეტრიკის შემოტანა არაა აუცილებელი.

ზოგად შემთხვევაში, განფენილი სივრცე შედგება *ბაზისაგან* (ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ეს იყო  $M$  წირი) და *ბაზის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრული ფენისაგან*.

თუ  $n$  ბაზა  $n$ -განზომილებიანია, ხოლო ყოველი ფენა  $m$ -განზომილებიანი, მაშინ განფენილი სივრცის განზომილებაა  $m + n$ .

ეს განსაკუთრებული ტიპის მრავალსახეობებია, რომლებიც იშლება ფენებად, ისე, რომ ერთი ფენის წერტილები ერთმანეთთანაა დაკავშირებული, ხოლო სხვადასხვა ფენის წერტილები - არა. ამ სიტუაციას მივყავართ  $\pi$  პროექციის ცნებამდე; ეს პროექცია ფენის ყოველ წერტილს ასახავს ბაზის იმ წერტილში, რომელზედაც მიბმულია ეს ფენა.

$\pi$  პროექციის ცნება ყველა მრავალსახეობაზე არ განისაზღვრება.

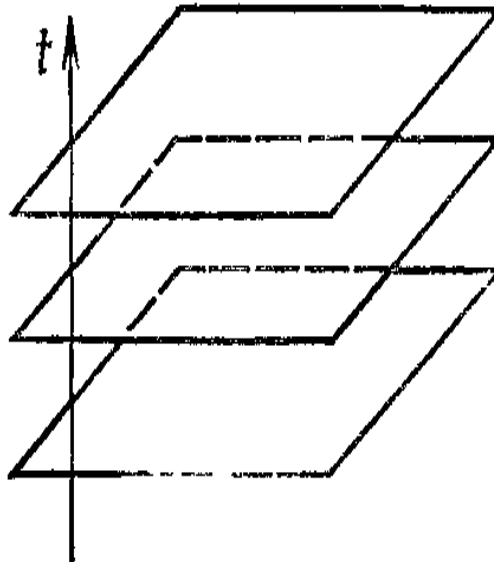
### 18.10. განფენილ სივრცის მაგალითები

1) ზემოთ განხილულ განფენილ  $TM$  სივრცეს, რომელიც შედგება მრავალსახეობისა და მისი მხები სივრცეებისაგან, **მხებ განფენას** (ზოგჯერ **მხებ კონას**) უწოდებენ. ეს არის აბსტრაქტული მრავალსახეობის მნიშვნელოვანი მაგალითი, რომელიც ხშირად გამოიყენება ცოცხალი სისტემებისათვის.  $n$  განზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობის შესაბამისი  $TM$  მხები განფენის განზომილებაა  $2n$ ;

2) მოგვიანებით, განვიხილავთ **ტენზორებს**. ყოველი ტიპის ტენზორს შეესაბამება განფენა გლუვი მრავალსახეობის ზემოთ;

3) არაა სავალდებულო, რომ ფენა მიბმული იყოს ბაზის გლუვ სტრუქტურასთან. განვიხილოთ ელემენტარული ნაწილაკების შიგა თავისუფლების ხარისხი, როგორცაა **იზოსპინი**. განფენა, რომლის ფენებიც იზოსპინური სივრცეებია, ხოლო ბაზა ფიზიკური დრო-სივრცე, შესაძლებლობას იძლევა აღვწეროთ, როგორც ნაწილაკის მდებარეობა  $(x, y, z, t)$  დრო-სივრცეში, ისე მისი შიგა მდგომარეობა (იზოსპინი);

4) ნიუტონისეული ფიზიკის თვალსაზრისით, დრო-სივრცეს აქვს განფენილი სივრცის სტრუქტურა. ნიუტონისა და გალილეისთვის დრო აბსოლუტურია ანუ ის ერთნაირად მიედინება ყველგან. ამიტომ, შეგვიძლია ავაგოთ განფენა, სადაც ბაზა იქნება  $\mathbb{R}^1$ -დრო, ხოლო ფენა -  $\mathbb{R}^3$  სივრცე ნახ. 18.12.



ნახ. 18. 12. ნიუტონის (გალილეის) დრო-სივრცის განფენის ბუნებრივი სტრუქტურა. სხვადასხვა ფენა შეესაბამება სხვადასხვა ფიქსირებულ მსოფლიო დროს(მომენტს)

სხვადასხვა ფენის წერტილებს (დროის სხვადასხვა მომენტს) შორის არ არსებობს არავითარი კავშირი, რადგან **სივრცე ნიუტონისეულ ფიზიკაში არა არის აბსოლუტური**: ერთმანეთის მიმართ სხვადასხვა სიჩქარით მოძრავ ორ დამკვირვებელს სრულიად განსხვავებული წარმოდგენა ექნებათ იმაზე, თუ სივრცის რომელი წერტილებია უძრავი. ამიტომ, ბუნებრივი განფენა ბაზით  $\mathbb{R}^3$  არ არსებობს, არსებობს განფენა მხოლოდ  $\mathbb{R}^1$  ბაზით. აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის ერთ-ერთი ეფექტი ისიც არის, რომ მან დაანგრია ნიუტონისეული განფენის სტრუქტურა და შეცვალა ის მეტრიკული სტრუქტურით, რომელსაც ჩვენ შემდეგ შევისწავლით.

### 18.11. განფენილი სივრცის სიღრმისეული ანალიზი

განფენილი სივრცის თეორიას გააჩნია ორი ერთმანეთთან დაკავშირებული ასპექტი, რომელთა განხილვაც აუცილებელია, რათა სათანადოდ გავერკვეთ განფენის ცნების მნიშვნელობაში. ეს ასპექტებია: მათი გლობალური თვისებები და მათ ასაგებად ჯგუფების გამოყენება.

რათა უკეთესად გავერკვეთ განფენილი სივრცის გლობალურ თვისებებში, შემოვიტანოთ ჯერ უფრო მარტივი, სივრცეების პირდაპირი ნამრავლის, ცნება. ნებისმიერ ორ  $M$  და  $N$  სივრცეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ მათი პირდაპირი (დეკარტეს) ნამრავლი  $M \times N$ , რომელიც შედგება ყველა შესაძლო  $(a, b)$  ისეთი დალაგებული წყვილისაგან, რომ  $a \in M$  და  $b \in N$ . მაგალითად,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ . თუ  $M$  და  $N$  მრავალსახეობებია, მაშინ  $M \times N$  აგრეთვე მრავალსახეობა იქნება:  $M$  მრავალსახეობის  $U$  ღია სიმრავლის  $\{x^i, i = 1, \dots, m\}$  და  $N$  მრავალსახეობის  $V$  ღია სიმრავლის  $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$  კოორდინატები, იძლევიან  $M \times N$  პირდაპირი ნამრავლის  $U \times V$  ღია სიმრავლის  $m + n$  კოორდინატს.

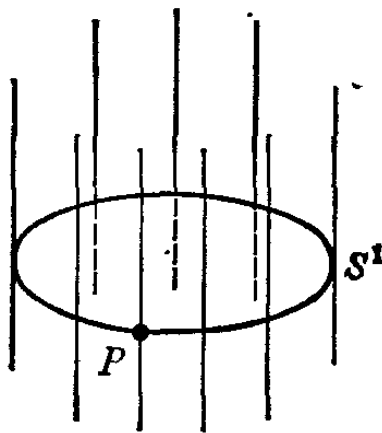
ზემოთ მოყვანილი განფენილი სივრცეების კონსტრუქციიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ისინი, ლოკალურად მაინც, წარმოიდგინებიან  $U \times F$  პირდაპირი ნამრავლის სახით, სადაც  $U$  არის  $B$  ბაზის ღია სიმრავლე, ხოლო  $F$  - ტიპური ფენა (ყველა ფენა ემთხვევა  $F$ -ს). სინამდვილეში, ეს თვისება განფენილი სივრცის განსაზღვრის მხოლოდ ნაწილია და მას განფენის ლოკალურ ტრივიალობას უწოდებენ (განფენა დაიყვანება პირდაპირ ნამრავლამდე, თუ შემოვიფარგლებით  $B$  ბაზის საკმარისად მცირე ღია სიმრავლით).

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი  $S^2$  სფეროს მხები განფენა  $TS^2$ . ეს განფენა რომ იყოს გლობალურად ტრივიალური, მაშინ უნდა არსებობდეს  $C^\infty$  ასახვა ანუ დიფეომორფიზმი:  $TS^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}^2$ , რადგან სფეროს ზედაპირისათვის  $\mathbb{R}^2$  წარმოადგენს ტიპურ ფენას (მხებ სიბრტყეს). განვიხილოთ  $(P, \bar{V})$  ტიპის წერტილების სიმრავლე  $S^2 \times \mathbb{R}^2$  პირდაპირი ნამრავლიდან, სადაც  $P \in S^2$  და  $\bar{V}$  რომელიღაც



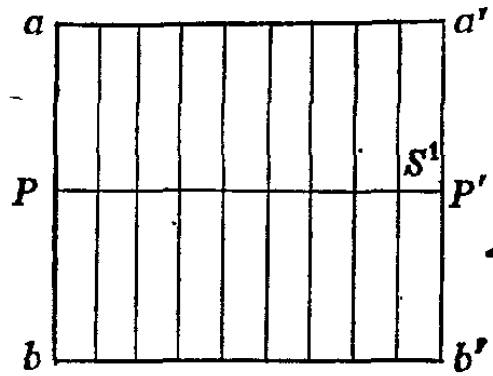
ფიქსირებული ვექტორია  $\mathbb{R}^2$  მხები სიბრტყიდან. მაშინ ამ სიმრავლის წინასახე მოგვცემდა არანულოვან კვეთას  $TS^2$  ანუ  $C^\infty$ -ვექტორულ ველს  $S^2$ -ზე, რომელიც არასოდეს არ ხდება ნული. მაგრამ  $S^2$ -ზე ასეთი ვექტორული ველი არ არსებობს უძრავი წერტილის შესახებ ცნობილი თეორემის თანახმად, რომელიც ამბობს, რომ ნებისმიერი 1-1 ასახვა(დიფეომორფიზმი) სფეროსი თავის თავზე  $S^2 \rightarrow S^2$  აუცილებლად იძლევა ერთ უძრავ წერტილს მაინც. ამიტომ  $TS^2$  არ არის მთლიანად(გლობალურად) ტრივიალური. ეს არის იმის მაგალითი, რომ განფენა არ არის გლობალურად ტრივიალური ბაზის  $S^2$  ტოპოლოგიის გამო.

- 2) მეორე მაგალითი გვიჩვენებს, რომ არატრივიალური განფენა შეიძლება აიგოს ისეთ ბაზაზეც, რომელიც უშვებს ტრივიალურ განფენასაც. განვიხილოთ  $TS^1$  მხები განფენა წრეწირისათვის.  $S^2$  სფეროსაგან განსხვავებით,  $S^1$  წრეწირი უშვებს უწყვეტ, ვექტორულ ველს, რომელიც არსად არ ხდება ნული და  $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}^1$  ნახ. 18.13.



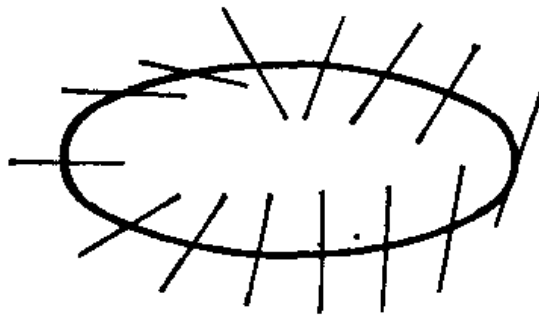
ნახ. 18.13.  $TS^1$  განფენა წრეწირისათვის

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ გავჭერით წრეწირი  $P$  წერტილში და გავშალეთ განფენა სიბრტყეზე ნახ. 18.14.



ნახ. 18.14. წრეწირის  $TS^1$  განფენა გაჭრილია ერთი ფენის გასწვრივ და გაშლილი სიბრტყეზე. ფენები უსასრულოდ გრძელდება ზემოთ და ქვემოთ

იმისათვის, რომ ნახ 18.14-დან დაუბრუნდეთ ნახ. 18.13, უნდა უბრალოდ გავაიგივოთ შესაბამისი წერტილები:  $a$  და  $a'$ ;  $P$  და  $P'$ ;  $b$  და  $b'$  და ა.შ., თუმცა შეგვიძლია განფენა „დავაწებოთ“ სხვანაირად და მივიღოთ მიობიუსის ლენტი: ამჯერად, ვაიგივებთ წერტილებს  $a$  და  $b'$ ;  $P$  და  $P'$ ;  $b$  და  $a'$  და ა.შ. ასეთი დაწებება ჩვენს ლენტს დაგრეს და ახლა ის უკვე გამოიყურება სხვანაირად ნახ. 18.15.



ნახ. 18.15. მიობიუსის ლენტის შესაბამისი ახალი განფენა, რომელიც განსხვავდება  $TS^1$  განფენისაგან, თუმცა მათ აქვთ ერთნაირი ბაზა და ფენა

მიობიუსის ლენტი არ წარმოიდგინება გლობალურად, პირდაპირი ნამრავლით, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის არატრივიალური განფენაა. არატრივიალური განფენის კონსტრუქციები გამოიყენება თანამედროვე ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში „ინსტანტონების“ განსასაზღვრავად.

მიობიუსის ლენტის მაგალითი გვასწავლის, რომ განფენის ცალსახად განსაზღვრისათვის, არაა საკმარისი ბაზა და ფენა. საჭიროა განფენის უფრო ზუსტი განმარტება და აქ გვეხმარება ჯგუფის ცნება.

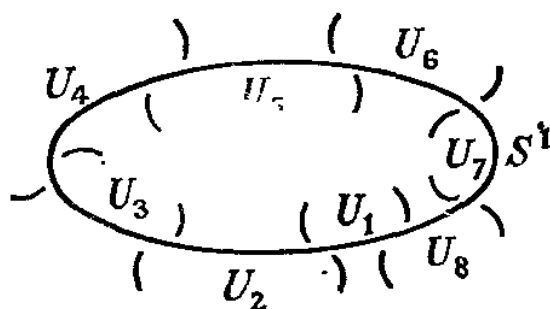
ზემოთ მოყვანილი  $S^1$ -ის ორი განფენის განსხვავება მდგომარეობს, ეგრეთწოდებული, განფენის სტრუქტურული ჯგუფის ცნებაში. იმისათვის, რომ კომპაქტურად განვსაზღვროთ განფენილი სივრცე, დაგვჭირდება ჰომეომორფიზმის ცნება; ეს არის ერთი სივრცის ორმხრივ უწყვეტი 1-1 ასახვა მეორე სივრცეზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჰომეომორფიზმი არის დიფეომორფიზმი დიფერენცირებადობის მოთხოვნის გარეშე.

ამრიგად, გვაქვს განფენილი სივრცის შემდეგი განსაზღვრება:  $E$  სივრცეს ეწოდება განფენილი, თუ მისთვის არსებობს:  $B$  მრავალსახეობა, რომელსაც ბაზას ვუწოდებთ, პროექცია  $\pi: E \rightarrow B$ , ტიპური  $F$  ფენა,  $F$  ფენის თავის თავზე ჰომეომორფიზმების  $G$  სტრუქტურული ჯგუფი და  $B$  მრავალსახეობის გადამფარავი ღია  $\{U_j\}$  სიმრავლეების ერთობლიობა, რომლებიც უნდა აკმაყოფილებდნენ მოთხოვნებს:

ა) ლოკალური განფენა ტრივიალურია ანუ თითოეული  $U_i$  სიმრავლის ზემოთ  $\pi^{-1}(U_i)$  განფენა უშვებს ჰომეომორფიზმს  $U_i \times F$  პირდაპირ ნამრავლზე. ამ ჰომეომორფიზმის კერძო შემთხვევაა თითოეული ფენის  $\pi^{-1}(x)$  ჰომეომორფიზმი, სადაც  $x$  არის  $B$  ბაზის ელემენტი  $F$  ფენზე, რომელსაც აღვნიშნავთ  $h_i(x)$  სიმბოლოთი, სადაც გამოყოფილია არა მარტო ის  $x$  ელემენტი რომელზედაც «კიდია» ფენა, არამედ ის  $i$  ინდექსიც, რომელიც გამოყოფს იმ ღია  $U_i$  სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს  $x$  ელემენტს;

ბ) თუ  $x$  წერტილი ეკუთვნის  $U_j$  და  $U_k$  ღია სიმრავლეების თანაკვეთას, მაშინ წარმოიქმნება  $F$  ფენის  $x$  წერტილის ორი  $h_j$  და  $h_k$  ჰომეომორფიზმი და რადგან ჰომეომორფიზმები შექცევადია, ასახვა  $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)$  არის  $F$  ფენის თავის თავზე ჰომეომორფიზმი. მოითხოვება, რომ ის ეკუთვნოდეს  $G$  სტრუქტურულ ჯგუფს.

ბოლო მოთხოვნა უკავშირდება განფენილი სივრცის გლობალურ სტრუქტურას. ამის შესამჩნევად, განვიხილოთ  $TS^1$  განფენა (რომლის უშუალო განზოგადებაა ნებისმიერი  $M$  მრავალსახეობის  $TM$  განფენა).  $TS^1$  განფენის ბაზაა  $B = S^1$ , ტიპური ფენაა  $F = \mathbb{R}^1$  და პროექციაა  $\pi: (x, \bar{v}) \mapsto x$ , სადაც  $x \in S^1$  და  $\bar{v}$  ვექტორია  $\bar{v} \in T_x$ . გადამფარავი ღია სიმრავლეების ერთობლიობად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ატლასი  $S^1$  სივრცეზე. ღია სიმრავლეთა ტიპური ერთობლიობა მოცემულია ნახ. 18.16.



ნახ. 18.16. ღია სიმრავლეთა ტიპური ერთობლიობა  $S^1$  სივრცეზე

ყოველ  $U_j$  ღია სიმრავლეს აქვს  $S^1$  სივრცის თავისი კოორდინატთა სისტემა ანუ პარამეტრიზაცია, რომელსაც აღვნიშნავთ  $\lambda_i$  სიმბოლოთი. ვექტორი  $\frac{d}{d\lambda_i}$  არის  $T_x$  სივრცის ბაზისი  $U_j$  სიმრავლის  $x$  წერტილისათვის, ასე რომ,  $T_x$  სივრცის ყოველი  $\bar{v}$  ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ  $\alpha_{(j)} \frac{d}{d\lambda_i}$  სახით. ვთქვათ,  $T_x \rightarrow \mathbb{R}$  ფენის ჰომომორფიზმს, რომელიც ფიგურირებს  $TS^1$  სივრცის განსაზღვრებაში აქვს  $h_{(j)}: \bar{v} \mapsto \alpha_{(j)}$  სახე. თუ  $x$  ეკუთვნის ორ სხვადასხვა  $U_j$  და  $U_k$  ღია სიმრავლეს, მაშინ არსებობს ორი სხვადასხვა ჰომომორფიზმი  $T_x \rightarrow \mathbb{R}$  და  $\lambda_j$  პარამეტრიზაცია არანაირად არ არის დამკიდებელი  $\lambda_k$  პარამეტრიზაციაზე, ამიტომ  $\alpha_{(j)}$  და  $\alpha_{(k)}$  კოორდინატებიც, ნებისმიერი, სხვადასხვა არანულოვანი რიცხვია.  $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x): F \rightarrow F$  ჰომომორფიზმი მოქმედებს შემდეგნაირად:  $\alpha_k \mapsto \alpha_j$  და, მაშასადამე, ნიშნავს  $r_{jk} = \frac{\alpha_{(j)}}{\alpha_{(k)}}$  რიცხვზე გამრავლებას. რადგან  $r_{jk}$  შეიძლება იყოს ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი,

სტრუქტურული ჯგუფის როლს აქ ასრულებს  $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$  ანუ ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ (ლის ჯგუფი). უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგადი  $n$ -განზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობის შემთხვევაში, განფენის სტრუქტურული  $TM$  ჯგუფი არის  $n \times n$  ზომის არაგადაგვარებული მატრიცების სიმრავლე, ამ ჯგუფს აღნიშნავენ  $GL(n, \mathbb{R})$  სიმბოლოთი.

ასე რომ,  $TS^1$  განვსაზღვრეთ. მაგრამ როგორ გამოიყურება ის? შესაძლებელია  $\lambda_j$  კოორდინატები ისე ავირჩიოთ, რომ ნებისმიერი ორი  $\lambda_j$  და  $\lambda_k$  მათგანისათვის ორივე იზრდებოდეს ერთი მიმართულებით,  $U_j$  და  $U_k$  ღია სიმრავლეების საერთო ნაწილისათვის (თანაკვეთისათვის). ასეთ შემთხვევაში ამბობენ რომ  $S^1$  ორიენტირებადია. კოორდინატთა მიდამოების ასეთი არჩევსას თანაკვეთის ყველა  $r_{jk}$  რიცხვი იქნება დადებითი და სტრუქტურული ჯგუფი დაიყვანება დადებითი ნამდვილი რიცხვებისაგან შემდგარ ჯგუფზე, შეკრების ოპერაციის მიმართ. უფრო მეტიც, შესაძლებელია მივადწიოთ  $\frac{d\lambda_j}{d\lambda_k} = 1$  ტოლობას ყოველი თანაკვეთილი მიდამოსთვის, მაშინ ჯგუფი დაიყვანება ერთადერთ 1 ელემენტამდე. ეს არის ტრივიალური სტრუქტურული ჯგუფი და შესაბამისი განფენაც არის ტრივიალური.

იმისათვის, რომ აღვწეროთ მიობიუსის ლენტის შესაბამისი განფენა, უნდა გამოვიყენოთ სხვა  $h_i(x)$  გადასახვა. თანაც, უნდა ვიყოთ ყურადღებით, რომ ეს განფენა არ აურიოთ მხებ განფენაში. უმარტივესია, გამოვიყენოთ  $\{U_j, j = 1, 2, \dots, 8\}$  მიდამოთა ერთობლიობა, რომელიც გამოსახულია ნახ. 2.16 და დავუშვათ, რომ  $r_{12} = 1, r_{23} = 1, \dots, r_{78} = 1$ , მაგრამ ახლა მიობიუსის ლენტის დაგრეხა გვაიძულებს, რომ დავუშვათ  $r_{81} = -1$ . ამჯერად, სტრუქტურული ჯგუფი შედგება ორი ელემენტისაგან  $\{1, -1\}$ , სადაც ჯგუფის ოპერაციაა გამრავლება.

მხებ  $TS^1$  განფენას აქვს თავისი საკუთარი სტრუქტურული ჯგუფი  $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ , რომელიც თითქმის ტიპური ფენაა. რეპერების განფენა ნებისმიერ მრავალსახეობაზე არის ისეთი განფენა, რომელსაც იგივე სტრუქტურული ჯგუფი აქვს, რაც მხებ სივრცეს, ხოლო მისი ფენა არის მხები სივრცის ყველა შესაძლო

ბაზისის სიმრავლე. თუ რეპერების განფენა  $S^1$  სივრცეზე, ჰომეომორფულია მისი სტრუქტურული ჯგუფისა, მაშინ ეს მართებული იქნება რეპერების ყოველი განფენისათვის. ასეთ განფენილ სივრცეს მთავარი განფენილი სივრცე ეწოდება.

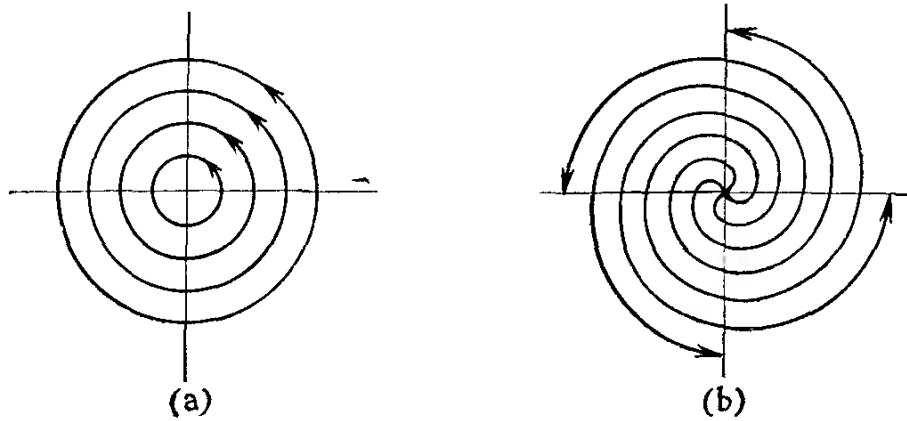
### 18.12. ვექტორული ველი და ინტეგრალური წირები

ვექტორული ველი არის წესი, რომელიც  $M$  მრავალსახეობის ყოველ წერტილს შეუსაბამებს ვექტორს. მრავალსახეობის ყოველ წერტილში გვაქვს შესაბამისი მხები სივრცე, ასე რომ, ვექტორული ველი ყოველი მხები სივრციდან „ირჩევს“ თითო ვექტორს. შემდეგ, ნებისმიერი წირის ყოველ წერტილში, განსაზღვრულია მხები ვექტორი და ისმის ბუნებრივი კითხვა: ხომ არ შეიძლება შებრუნებითაც, მოცემული ვექტორული ველისათვის ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც იწყება მოცემულ  $P$  წერტილში და მის ყოველ წერტილში გავლებული მხები ვექტორი ეკუთვნის მოცემულ ვექტორულ ველს? უწყვეტი  $C^1$  კლასის ვექტორული ველისათვის პასუხი დადებითია და ასეთ წირებს ინტეგრალურ წირებს უწოდებენ.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $V^i(P)$  მოცემული ვექტორული ველის კომპონენტებია. ნებისმიერ  $\{x^i\}$  კოორდინატთა სისტემაში გვქვია, რომ  $V^i(P) = v^i(x^j)$ . ის, რომ ეს ველი ეხება  $\lambda$  პარამეტრიზებულ წირს, გამოისახება განტოლებით

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x^j). \quad (18.22)$$

ამრიგად, მივიღეთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა  $x^i(\lambda)$  ცვლადების მიმართ; რომელსაც ზემოთ მოთხოვნილი დაშვების პირობებში, აქვს ერთადერთი ამონახსნი საწყისი  $P$  წერტილის რაღაც მიდამოში. ნახ. 18.17-ზე მოცემულია ვექტორული ველის ინტეგრალური წირების ორი მაგალითი.



ნახ. 18.17. ორი ვექტორული ველის ინტეგრალური წირების მაგალითი  $\mathbb{R}^2$  შემთხვევისთვის

უნდა აღინიშნოს, რომ სხვადასხვა ინტეგრალური წირი შეიძლება გადაიკვეთოს მხოლოდ ისეთ წერტილებში, სადაც  $V^i = 0$  ყველა  $i$ -სთვის (ამონახსენის ერთადერთობიდან გამომდინარე). ინტეგრალური წირები ავსებენ მთელ  $M$  მრავალსახეობას, რადგან მისი თითოეული  $P$  წერტილისათვის გვაქვს სხვადასხვა ინტეგრალური წირი. ჩვენი მაგალითების შემთხვევაში

$$a) V = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}; \quad (18.23)$$

$$b) V = \left(x + \frac{y}{r}\right) \frac{\partial}{\partial y} - \left(y - \frac{x}{r}\right) \frac{\partial}{\partial x}; \quad (18.24)$$

გვაქვს შესაბამისი ინტეგრალური წირები ნახ. 18.17.

მაგალითად, თუ გვაქვს სამგანზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობა, მაშინ მასზე განსაზღვრული ნებისმიერი ვექტორული ველი იძლევა ორგანზომილებიან ინტეგრალურ წირთა ერთობლიობას, რომელიც მთლიანად ფარავს  $M$  მრავალსახეობას, იმ წერტილების გამოკლებით, სადაც  $V^i = 0$ . ასეთ ინტეგრალურ წირთა სიმრავლეს კონგრუენციას უწოდებენ.

### 18.13. $\frac{d}{d\lambda}$ ოპერატორის ექსპონენტი

შემოვიტანოთ ცნება, რომელიც შემდგომი გამოთვლებისათვის გამოგვადგება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ანალიზური

მრავალსახეობა ( $C^\omega$  კლასის). ამასთან,  $\bar{Y} = \frac{d}{d\lambda}$  ვექტორული ველის ყოველი ინტეგრალური წირის წერტილების  $x^i(\lambda)$  კოორდინატები ანალიზური ფუნქციებია  $\lambda$  პარამეტრის მიმართ, მაშინ წერტილების კოორდინატები, რომლებიც შეესაბამება პარამეტრის  $\lambda_0$  და  $\lambda_0 + \varepsilon$  მნიშვნელობებს, დაკავშირებული არიან ტეილორის მწკრივის ფორმულით:

$$x^i(\lambda_0 + \varepsilon) = x^i(\lambda_0) + \varepsilon \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!} \varepsilon^2 \left( \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} \right) + \dots =$$

$$= \left( 1 + \varepsilon \frac{d}{d\lambda} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + \dots \right) x^i_{\lambda_0} = \exp \left[ \varepsilon \frac{d}{d\lambda} \right] x^i_{\lambda_0}, \quad (18.25)$$

სადაც ექსპონენტი არის დიფერენციალური ოპერატორი, თუ მას გამოვიყენებთ  $x^i(\lambda)$  ფუნქციების მიმართ და შემდეგ ჩავსვათ  $\lambda = \lambda_0$  მნიშვნელობას, მივიღებთ ტეილორის ფორმულას.

ამ ოპერატორს ეწოდება  $\varepsilon \frac{d}{d\lambda}$  - ოპერატორის ექსპონენტი.  $\varepsilon \frac{d}{d\lambda}$  არის უსასრულოდ მცირე გადაადგილება ინტეგრალურ წირზე, ხოლო მისი ექსპონენტი იძლევა უკვე სასრულ გადაადგილებას. ჩვენ თანაბრად გამოვიყენებთ აღნიშვნებს

$$\exp \left[ \varepsilon \frac{d}{d\lambda} \right] = e^{\varepsilon \frac{d}{d\lambda}} = e^{\varepsilon \bar{Y}}. \quad (18.26)$$

#### 18.14. ლის ფრჩხილები და არაკოორდინატული ბაზისი

თუ მოცემულია რომელიმე  $x^i$  კოორდინატთა სისტემა, მაშინ ხშირად მიზანშეწონილია ბაზისურ ვექტორულ ველად ავირჩიოთ  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ , თუმცა ბაზისად შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ველი: ადვილი მისახვედრია, რომ ყველა მათგანი არ წარმოიშობა რაღაც კოორდინატთა სისტემისაგან. საქმე ისაა, რომ  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  და  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  ოპერატორები კომუტირებენ ნებისმიერი  $i$  და  $j$ -სთვის, მაგრამ საზოგადოდ, სხვადასხვა ვექტორული ველი არ კომუტირებს ერთმანეთთან. თუ  $V = \frac{d}{d\lambda}$  და  $W = \frac{d}{d\mu}$ , მაშინ



$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu} \frac{d}{d\lambda} &= \sum_{i,j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} W^j \frac{\partial}{\partial x^j} - W^j \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \\
&= \sum_{i,j} V^i W^j \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + \sum_{i,j} V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \sum_{i,j} W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \\
&= \sum_{i,j} \left( V^i \frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{18.27}
\end{aligned}$$

ასე რომ,

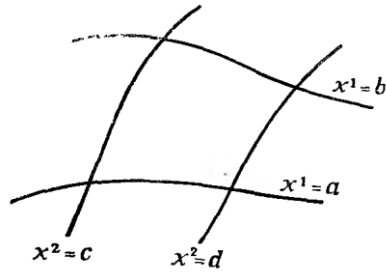
$$\left[ \frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu} \right] = \frac{d}{d\lambda} \frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu} \frac{d}{d\lambda}, \tag{18.28}$$

არის ვექტორული ველი, რომელიც, საზოგადოდ, არაა ნულოვანი. თუ  $\frac{d}{d\lambda}$  და  $\frac{d}{d\mu}$  რომელიღაც ბაზისის ელემენტებია, მაშინ მათი წარმოდგენა, როგორც რომელიღაც კოორდინატების წარმოებულებისა, შეუძლებელია.

ასე რომ, ესა არის არაკოორდინატული ბაზისი.

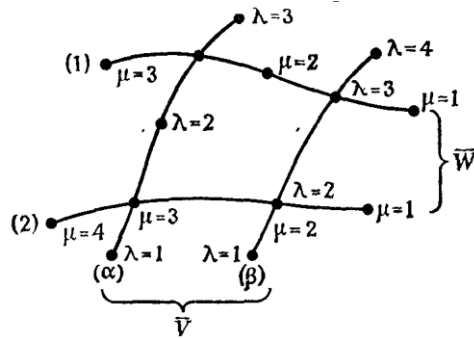
მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ კოორდინატულ და არაკოორდინატულ ბაზისებს შორის განსხვავება თავს იჩენს მხოლოდ მაშინ, თუ განვიხილავთ მრავალსახეობის რაღაც არეს და არა ერთ რომელიმე წერტილს. ის განისაზღვრება ვექტორების კომპონენტების წარმოებულებით და არა მხოლოდ მნიშვნელობებით მოცემულ წერტილში. ასე რომ, კოორდინატულ და არაკოორდინატულ ბაზისებს შორის განსხვავება თავს იჩენს მხოლოდ მაშინ, როცა საქმე გვაქვს მრავალსახეობის არეებთან და არა აქვს მნიშვნელობა იმ ამოცანებისათვის, როცა ვიხილავთ მხებ  $T_P$  სივრცეს, რომელიმე ერთ  $P$  წერტილში.

$\left[ \frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu} \right]$  კომუტატორს ეწოდება ლის ფრჩხილები  $\bar{V}$  და  $\bar{W}$  ველებისათვის. მოვიყვანოთ მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნახ. 18.18.



ნახ. 18.18. ტიპური საკოორდინატო ბადე ორგანზომილებიან მრავალსახეობაზე

უნდა შევნიშნოთ, რომ  $x^1$  მუდმივია  $x^2$  წირის გასწვრივ, ესენი ინტეგრალური წირებია, ამიტომ  $\frac{\partial}{\partial x^1}$  და  $\frac{\partial}{\partial x^2}$  ველები კომუტირებენ. თითოეული მათგანი წარმოადგენს დიფერენცირებას იმ კოორდინატის მიმართულებით, სადაც მეორე კოორდინატა მუდმივია. ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი ორი ვექტორული ველი  $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$  და  $\bar{W} = \frac{d}{d\mu}$ , რომელთა ინტეგრალური წირები მოცემულია ნახ.-ზე 18.19

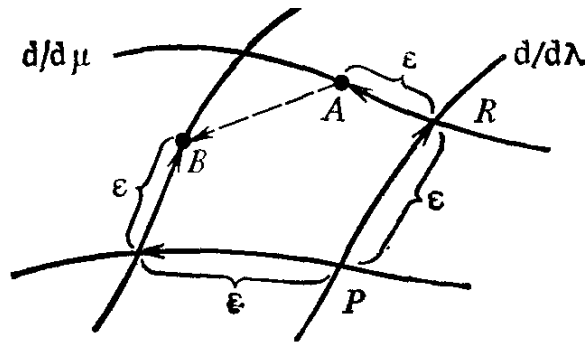


ნახ. 18.19. ორი ვექტორული ველის ტიპური ინტეგრალური წირები ორგანზომილებიან მრავალსახეობაზე

$W$  ველის ინტეგრალური წირი არაა მაინცდამაინც ის წირი სადაც  $\lambda$  მუდმივია და პირიქითაც. ამიტომ  $\frac{d}{d\lambda}$  და  $\frac{d}{d\mu}$  არ კომუტირებენ.  $\bar{V}$  და  $\bar{W}$  ველები გამოიყურებიან როგორც საკოორდინატო წირები, მაგრამ მათი პარამეტრიზაცია არაა ისეთი, როგორც საკოორდინატო სისტემაში. ის რომ ისინი გამოიყურებიან, როგორც საკოორდინატო წირები არის ორგანზომილებიანობის სპეციფიკა. სამგანზომილებიან შემთხვევა-

ში, შესაძლებელია, რომ წირი (1) კვეთდეს ( $\alpha$ ) და ( $\beta$ ) წირებს, ხოლო წირი (2) კვეთდეს მხოლოდ ( $\alpha$ ) წირს.

$[\bar{V}, \bar{W}]$  ვექტორს შეიძლება მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, ნახ.18.20.



ნახ. 18.20. ლის  $[\bar{V}, \bar{W}]$  ფრჩხილების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ლის ფრჩხილები გვიჩვენებს პარალელოგრამის ჩაკეტილობის ზომას, როცა პარალელოგრამის გვერდები შეესაბამებიან ტოლ ნაზრდებს  $\bar{V}$  და  $\bar{W}$  ვექტორული ველების ინტეგრალური წირების გასწვრივ.

დაამტკიცეთ, რომ  $C^2$  კლასის  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  და  $\bar{Z}$  ვექტორული ველებისათვის მართებულია იაკობის იგივეობა:

$$[[\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}] + [[\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}] + [[\bar{Z}, \bar{X}], \bar{Y}] = 0. \quad (18.29)$$

$M$  მრავალსახეობის  $U$  არეში ვექტორული ველების ლის ალგებრა არის ვექტორული ველების ნებისმიერი  $A$  ერთობლიობა, რომელიც არის ვექტორული სივრცე შეკრების მიმართ (ანუ ვექტორული ველების წრფივი კომბინაციაც მას ეკუთვნის) და ჩაკეტილი კომუტირების ოპერაციის მიმართ ( $A$  ერთობლიობის ნებისმიერი ორი ველის ლის ფრჩხილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს). ცხადია, რომ  $C^\infty$  კლასის ვექტორული ველების სიმრავლე  $U$  არეზე არის ლის ალგებრა.

### 18.15. როდისაა ბაზისი კოორდინატული

ვთქვათ,  $M$  მრავალსახეობაზე მოცემულია ორი  $\bar{A} = \frac{d}{d\lambda}$  და  $\bar{B} = \frac{d}{d\mu}$  ვექტორულ ველები; ამასთან, დაეუშვათ რომ ეს ვექტორული ველები წრფივად დამოუკიდებელი არიან  $U \subset M$  ღია სიმრავლის ყოველ წერტილში, ასე, რომ ისინი ქმნიან ვექტორული ველების ბაზისს  $U$  სიმრავლეში. ისმის კითხვა: რა შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ეს ბაზისი არის საკოორდინატო, ანუ,  $\lambda$  და  $\mu$  როდის არიან კოორდინატები  $U$  სიმრავლეში? ცხადია, რომ მაშინ ჩვენი ვექტორული ველები უნდა კომუტირებდნენ, ანუ,  $[\bar{A}, \bar{B}] = 0$ .

ეს წინადადება ზოგადდება  $n$ -განზომილებიან შემთხვევაზეც. თუ,  $n$  ცალი ვექტორული ველები  $\{\bar{Y}_{(j)}, j = 1, \dots, n\}$  არიან წრფივად დამოუკიდებელი  $n$ -განზომილებიან  $U \subset M$  მრავალსახეობაზე და კომუტირებენ ერთმანეთთან, მაშინ ისინი არიან საკოორდინატო ბაზისური ვექტორები  $\{\alpha_j\}$  საკოორდინატო სისტემაში, რომელთაც ნებისმიერ  $\{x^j\}$  კოორდინატებში ექნებათ სახე:

$$x^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \exp\left[\sum_j \alpha_j \bar{Y}_{(j)}\right] x^i_P, \quad (18.30)$$

სადაც  $P$  ცენტრი შეიძლება იყოს  $U$  სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი.

### 18.16. ფორმა – 1

დავუბრუნდეთ მრავალსახეობის  $P$  წერტილში გავლებული მხები ვექტორების  $T_P$  სივრცის შესწავლას. ტენზორების პირველ მაგალითად განვიხილოთ **ფორმა-1**, როგორც ვექტორებზე განსაზღვრული წრფივი ნამდვილი მნიშვნელობების მქონე ფუნქცია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფორმა-1  $\tilde{\omega}$  მრავალსახეობის  $P$  წერტილში მოდებულ  $\bar{V}$  ვექტორს შეუსაბამებს ნამდვილ  $\tilde{\omega}(\bar{V})$  რიცხვს. ასოს ზემოთ ტაღლა აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ საქმე გვაქვს ფორმა-1, რომელიც არის ვექტორის ფუნქცია. ვექტორებს

კი ავლნიშნავთ ზემოთ ხაზით. ამ ფუნქციის წრფივობა იმას ნიშნავს, რომ

$$\tilde{\omega}(a\bar{V} + b\bar{W}) = a\tilde{\omega}(\bar{V}) + b\tilde{\omega}(\bar{W}), \quad (18.31)$$

სადაც  $a$  და  $b$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ბუნებრივად განისაზღვრება ორი ფორმა-1-ის ჯამი და ნამრავლი ნამდვილ რიცხვზე.

$$(\tilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\bar{V}) = \tilde{\omega}(\bar{V}) + \tilde{\sigma}(\bar{V}), \quad (18.32)$$

$$(a\tilde{\omega})(\bar{V}) = a\tilde{\omega}(\bar{V}). \quad (18.33)$$

ამრიგად, მოცემულ წერტილში განსაზღვრული ფორმა-1-ების ერთობლიობა ქმნის ვექტორულ სივრცეს. ამ სივრცეს უწოდებენ  $T_P$  სივრცის **დუალურს (შეუღლებულს)** და აღნიშნავენ  $T_P^*$  სიმბოლოთი. ტერმინი ორადული იხმარება, რადგან შესაძლებელია ვექტორებიც განვიხილოთ, როგორც წრფივი ნამდვილმნიშვნელო-ბიანი ფუნქციები განსაზღვრული ფორმა-1-ების სიმრავლეზე. ამიტომ ხმარობენ ჩანაწერს

$$\tilde{\omega}(\bar{V}) \equiv \bar{V}(\tilde{\omega}) \equiv \langle \tilde{\omega}, \bar{V} \rangle. \quad (18.34)$$

ძველ წიგნებში ხმარობდნენ ვექტორებისთვის ტერმინს-კონტრავარიანტული პირველი რანგის ტენზორი, ხოლო, ფორმა-1-ს უწოდებდნენ პირველი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს.

### 18.17. ფორმა-1-ის მაგალითები

ფორმა-1-ებიდან ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება ფორმა-1 ფუნქციის გრადიენტი, რომელსაც ცალკე განვიხილავთ. ახლა განვიხილოთ უფრო მარტივი მაგალითები:

- 1) მატრიცულ ალგებრაში თუ, ვექტორად ჩავთვლით სვეტ-ვექტორს, მაშინ სტრიქონ-ვექტორი იქნება ფორმა-1. მართლაც, მათი ნამრავლი მოგვცემს ნამდვილ რიცხვს. მაგალითად, ორგანზომილებიან შემთხვევაში სტრიქონ-

ვექტორი  $(2, 5)$  შეგვიძლია ჩავთვალოთ ფუნქციად, რომელიც ნებისმიერ სვეტ-მატრიცას შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს:

$$(2, 5): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (2, 5) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 5y. \quad (18.35)$$

ადვილი შესამოწმებელია ამ ფუნქციის წრფივობაც.

- 2) კვანტურ მექანიკაში გამოიყენება ჰილბერტის სივრცე, სადაც სტრიქონ-ვექტორისა და სვეტ-ვექტორის როლს ასრულებენ კეტ-ვექტორები  $|\psi\rangle$  და ბრა-ვექტორები  $\langle\phi|$  (ფორმა-1), აღნიშვნები და ტერმინოლოგია ეკუთვნის დირაკს. ამ ვექტორების ნახვევი  $\langle\phi|\psi\rangle$  არის კომპლექსური რიცხვი. აქ კომპლექსურ რიცხვებზეა განზოგადებული ტენზორის ცნება, რაც მარტივად ხდება (საჭიროა მხოლოდ ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია შევცვალოთ კომპლექსურით).

### 18.18. დირაკის დელტა – ფუნქცია

კვანტურ მექანიკაში, ხშირად გვაქვს საქმე **ფუნქციონალურ სივრცეებთან** (ფუნქციებისაგან შემდგარ სიმრავლეებთან). განვიხილოთ,  $C[-1; 1] \subset \mathbb{R}^1$  ინტერვალზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე  $C^\infty$ -კლასიდან. ეს სიმრავლე წარმოადგენს ადიტიურ ჯგუფს (შეკრების ოპერაციის მიმართ) და ვექტორულ სივრცეს, ნამდვილ რიცხვთა ველს ზემოთ. ამ სივრცის **ორადულ სივრცეს** (ფორმა-1), **განზოგადებულ ფუნქციებს** უწოდებენ. განზოგადებული ფუნქციების ერთ-ერთი კერძო მაგალითია **დირაკის  $\delta(x)$  დელტა-ფუნქცია**, რომელიც განისაზღვრება, როგორც ფორმა-1, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობაც  $C^\infty$ -კლასიდან აღებულ ნებისმიერ  $f(x)$  ფუნქციაზე არის  $f(0)$ , ანუ,

$$\langle\delta(x), f(x)\rangle = f(0). \quad (18.36)$$

ნებისმიერი  $g(x)$  ფუნქციისათვის  $C[-1; 1] \subset \mathbb{R}^1$  სიმრავლიდან, შეგვიძლია ავაგოთ შესაბამისი ფორმა-1  $\tilde{g}(x)$ , რომლის მნიშვნელობაც  $f(x)$  ფუნქციაზე, იქნება

$$\langle\tilde{g}(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^1 g(x)f(x)dx. \quad (18.37)$$

ეს, მართლაც წრფივი ასახვაა, რომელიც  $f(x)$  ფუნქციას შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს. ეს ინტეგრალი ყოველთვის

არსებობს, რადგან  $g$  და  $f$  ფუნქციები არიან უწყვეტნი  $C[-1; 1]$  სიმრავლიდან. რადგან  $\delta(x)$  არის ფორმა-1, შეგვიძლია მასზე ვილაპარაკოთ როგორც ისეთ ფუნქციაზე, რომლისთვისაც მისი  $f(x)$  ფუნქციაზე ნამრავლიდან ინტეგრალი იძლევა ამ ფუნქციის მნიშვნელობას ნულოვან წერტილში, ანუ,

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = \int_{-1}^1 \delta(x)f(x)dx = f(0). \quad (18.38)$$

ჩვეულებრივი, მათემატიკური აზრით, რა თქმა უნდა  $\delta(x)$  არის ფუნქციონალი და არა ფუნქცია, რადგან ის ასახავს ფუნქციონალურ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

იმისათვის, რომ მათემატიკურად დაესაბუთებინათ დირაკის  $\delta(x)$  ფუნქციის განსაზღვრის სისწორე, შეიქმნა განზოგადებულ ფუნქციათა თეორია და მისი ავტორები არიან ლორან შვარცი(ბურბაკების ერთ-ერთი წევრი) და საბჭოთა მათემატიკური სკოლის ცნობილი წარმომადგენელი, აკადემიკოსი სობოლევო.

### 18.19. გრადიენტის ცნება და ფორმა – 1

**ფორმა-1-ის ველი** – ვექტორული ველის ანალოგიურად, არის წესი, რომელიც ყოველ წერტილში იძლევა შესაბამის ფორმა-1-ს.

(18.32) და (18.33) ფორმულებით მოცემული განსაზღვრებები გადაიტანება ველებზე: ამ შემთხვევაში,  $a$  არის  $M$  მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც არაა აუცილებლად მუდმივი რიცხვი. ფორმა-1-ის ველის დიფერენცირებადობა შეიძლება განისაზღვროს ვექტორული ველებისა და ფუნქციების დიფერენცირებადობის საშუალებით. ანუ,  $C^\infty$ -მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფორმა-1  $\tilde{\omega}$  შესაბამის  $\bar{V}$  ვექტორულ ველთან ერთად განსაზღვრავს  $\tilde{\omega}(\bar{V})$  ფუნქციას. თუ ეს ფუნქცია ეკუთვნის  $C^\infty$  კლასს, ნებისმიერი  $C^\infty$  კლასის  $\bar{V}$  ვექტორული ველისათვის, მაშინ  $\tilde{\omega}$  არის  $C^\infty$  კლასის ფორმა-1. როგორც ვექტორული ველების შემთხვევაში, აქაც წარმოიქმნება განფენილი სივრცე  $T^*M$ , რომელსაც კომსებ განფენას უწოდებენ; ამ განფენის ბაზაა  $M$ , ხოლო  $P$  წერტილის ზემოთა ფენაა  $T_P^*$ . შესაბამისი კვეთები  $T^*M$ -ში არიან ფორმა-1-ის ველები.

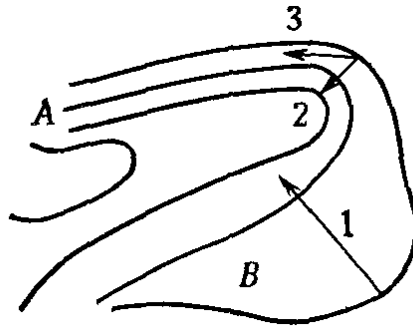
ყველაზე უფრო საინტერესო და სასარგებლო ფორმა-1 არის  $f$  ფუნქციის გრადიენტი, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ  $\tilde{d}f$  სიმბოლოთი. მიუხედავად იმისა, რომ მათემატიკური ანალიზის ელემენტარულ სახელმძღვანელოებში მას ვექტორს უწოდებენ, ის არის ფორმა-1. ასე, რომ  $\tilde{d}f$  გრადიენტი განისაზღვრება ფორმულით

$$\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) = \frac{df}{d\lambda}, \quad (18.39)$$

სადაც  $\frac{d}{d\lambda}$  ნებისმიერი მხევი ვექტორია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,  $f$  ფუნქციის გრადიენტი მრავალსახეობის რომელიმე  $P$  წერტილში, არის  $T_P^*$  ფენის ისეთი ელემენტი, რომლის მნიშვნელობაც  $\bar{V}$  ვექტორზე უდრის  $f$  ფუნქციის წარმოებულს  $\bar{V}$  ვექტორის მიმართულებით (ანუ იმ წირის გასწვრივ რომლის მხებიცაა  $\bar{V}$  ვექტორი). უნდა შევამოწმოთ, რომ ეს არის წრფივი ფუნქცია  $T_P^*$ -ზე. მართლაც,

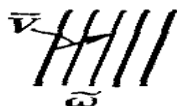
$$\tilde{d}f\left(a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu}\right) = \left(a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu}\right)f = a\frac{df}{d\lambda} + b\frac{df}{d\mu} = a\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\lambda}\right) + b\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\mu}\right). \quad (18.40)$$

გრადიენტის ცნება საშუალებას გვაძლევს თვალსაჩინო გავხადოთ ფორმა-1-ისა და ვექტორის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნახ. 2.21.



ნახ. 18.21. მთაგორიანი ადგილის ტოპოგრაფიული რუკა

ამ რუკაზე დონის წირები აღწერენ, ზღვის დონიდან თანაბარი სიმაღლის წერტილებს, ხოლო ისრები გვიჩვენებენ მთაზე ასვლის შესაძლო მიმართულებებს. ფორმა-1 ამ შემთხვევაში, აღიწერება მრავალსახეობაზე ერთით ნაკლები განზომილების პარალელური სიბრტყეების ოჯახით ნახ. 18.22, ხოლო  $\bar{V}$  ვექტორის მიერ გადაკვეთილი სიბრტყეების რაოდენობა მოიცემა  $\langle \bar{\omega}, \bar{V} \rangle$  ნახვევის მნიშვნელობით.





ნახ. 18.22. მხები ფორმა-1-ის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ამ ნახაზებიდან ჩანს, თუ, რა სხვაობაა ვექტორებსა და ფორმა-1 შორის. ჩვენ შეჩვეული ვართ რომ გრადიენტს, რომელიც ნახაზზე გამოსახულია ისრებით, და ერთეულ სიგრძეზე გადაკვეთს ყველაზე მეტ დონის წირს უწოდოთ ვექტორი, თუმცა, შეიძლება მრავალსახეობაზე არც გვექონდეს მეტრიკა. თუ, გვაქვს მეტრიკა, მაშინ გრადიენტი შეგვიძლია ჩავთვალოთ ვექტორად.

### 18.20. ბაზისური ფორმა – 1 და მისი კომპონენტები

$P$  - წერტილში განსაზღვრული ფორმა -1 -ებისაგან შედგენილ ვექტორულ  $T_P^*$  სივრცეში, ნებისმიერი  $n$  - ცალი წრფივად დამოუკიდებელი ფორმა -1 -ებისაგან შედგენილი სისტემა ქმნის ბაზისს. მაგრამ, თუ,  $P$  - წერტილში განსაზღვრული ვექტორების  $T_P$  სივრცეში, უკვე არჩეულია  $\{\bar{e}_i, i = \overline{1, n}\}$  ბაზისი, მაშინ  $T_P^*$  სივრცეში არსებობს პრივილეგირებული  $\{\bar{\omega}^i, i = \overline{1, n}\}$  ბაზისი, რომელსაც **ორადულ (ანუ, დუალურ) ბაზისს** უწოდებენ. განვსაზღვროთ ეს ბაზისი. თუ,  $\vec{V}$  არის  $P$  - წერტილში განსაზღვრული ნებისმიერი ვექტორი, მაშინ  $\bar{\omega}^i$  არის მისი  $i$  - ური კომპონენტი:

$$\bar{\omega}^i(\vec{V}) = V^i. \quad (18.41)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფუნქცია წრფივია  $T_P$  სივრცეში. კერძო შემთხვევაში, როცა  $\vec{V} = \bar{e}_j$  გვექნება ერთადერთი არანულოვანი  $j$  - ური კომპონენტი და

$$\bar{\omega}^i(\bar{e}_j) = \delta_j^i. \quad (18.42)$$

ნებისმიერი  $\bar{\omega}^i$  - ს საპოვნელად საჭიროა ყველა  $\{\bar{e}_j\}$  ვექტორის ცოდნა. ნებისმიერი  $\bar{e}_k$  ვექტორის შეცვლა, იწვევს ყველა  $\bar{\omega}^i$  ბაზისური ფორმა - 1-ის შეცვლას. ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ შესაბამისობა ბაზისსა და მის ორადულ ბაზისს შორის.

ვაჩვენოთ, რომ  $\{\tilde{\omega}^i, i = \overline{1, n}\}$  ფორმები - 1 არიან წრფივად დამოუკიდებელი. ამისათვის, განვიხილოთ ნებისმიერი  $\tilde{q}$  ფორმა - 1 -ის მოქმედება რაიმე  $\vec{V}$  ვექტორზე:

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \tilde{q}(\sum_j V^j \vec{e}_j) = \sum_j V^j \tilde{q}(\vec{e}_j) = \sum_j \tilde{\omega}^j(\vec{V}) \tilde{q}(\vec{e}_j). \quad (18.43)$$

ამ ფორმულაში

$$q_j = \tilde{q}(\vec{e}_j), \quad (18.44)$$

სიდიდეები წარმოადგენენ  $\tilde{q}$  ფორმა -1 -ის კომპონენტებს  $\{\vec{e}_j\}$  ბაზისის დუალურ ბაზისში. გადავწეროთ (18.44) თანადობა ფორმით

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \sum_j q_j \tilde{\omega}^j(\vec{V}). \quad (18.45)$$

$\vec{V}$  ვექტორის ნებისმიერობიდან, გამომდინარეობს, რომ

$$\tilde{q} = \sum_j q_j \tilde{\omega}^j. \quad (18.46)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\{\tilde{\omega}^j\}$  დუალური სისტემა ქმნის ბაზისს, რადგან მათი რაოდენობაა  $n$  და ნებისმიერი ფორმა - 1,  $\tilde{q}$  წარმოადგინება ამ სისტემის ელემენტების წრფივი კომბინაციის ფორმით. ყველაზე მთავარი კი ის არის, რომ უკვე გვაქვს ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ  $\tilde{q}(\vec{V})$  სიდიდეებს  $\tilde{q}$ -ს და  $\vec{V}$ -ს კომპონენტების საშუალებით :

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \sum_j q_j V^j. \quad (18.47)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეს არის  $\tilde{q}$ -ს და  $\vec{V}$ -ს ნახვევი.

ცხადია, რომ ეს მსჯელობა პირდაპირ გადაიტანება ფორმა-1-ის ველზეც.

## 18.21. ინდექსური აღნიშვნები

ჩვენ ინდექსებისათვის ვიყენებთ შემდეგ შეთანხმებას: ვექტორების კომპონენტები აღინიშნება ზედა ინდექსებით, მაგალითად  $V^i$ , ხოლო ფორმა-1-ის კომპონენტებისათვის ვიყენებთ

ქვედა ინდექსებს, მაგალითად  $\omega_j$ . საბაზისო ვექტორების ნომრებისათვის ვიყენებთ ქვედა ინდექსებს ( $\vec{e}_j$ ), ხოლო საბაზისო ფორმა-1-ებისათვის – ზედა ინდექსებს ( $\tilde{\omega}^j$ ). ამრიგად, საკოორდინატო ბაზისისათვის ფორმა-1-ები  $\tilde{d}x^i$  გადაინომრებიან ზედა ინდექსებით, ხოლო  $\frac{\partial}{\partial x^j}$  ვექტორები ითვლებიან, როგორც ქვედა ინდექსის მქონენი, რადგან ზედა ინდექსი აქვთ მნიშვნელში. ინდექსების ასეთნაირი განლაგება ძალზე მოსახერხებელია. მართლაც, განვიხილოთ **ნახვევი**

$$\tilde{\omega}(\vec{V}) = \sum_j V^j \omega_j, \quad (18.48)$$

რომელიც წარმოადგენს ორი სიდიდის ნამრავლთა ჯამს, რომელთაგან ერთს აქვს ზედა ინდექსი მეორეს კი – ქვედა ინდექსაცია. მივიღებთ აინშტაინის შეთანხმებას შეჯამების შესახებ: თუ, რომელიმე ფორმულაში ერთიდაიგივე ინდექსი გვხვდება ორჯერ, ერთხელ როგორც ქვედა და მეორედ როგორც ზედა, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება. მაგალითად, ფორმულებში

$$\tilde{\omega} = \omega_j \tilde{d}x^j, \quad \vec{V} = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \tilde{\omega}(\vec{V}) = V^j \omega_j, \quad (18.49)$$

იგულისხმება შეჯამება  $j$  – ინდექსით. აინშტაინის შეთანხმების გამოყენება გვიმარტივებს კომპონენტებზე გამოთვლების ჩატარებას. ახლა გადავიდეთ ვექტორული ალგებრიდან ტენზორულზე.

## 18.22. ტენზორი და ტენზორული ველი

ტენზორის ცნება, წარმოადგენს იმ სიდიდეების ბუნებრივ განზოგადებას, რომლებიც უკვე განვიხილეთ. მათი ალგებრა აგებულია მარტივად და აქვს დიდი პრაქტიკული გამოყენება. მთავარი სირთულე აქ არის ვიზუალიზაციის შეუძლებლობა, მათი დახატვა შეუძლებელია. ზემოთ განვიხილეთ ვექტორებისა და ფორმა-1-ის ცნება და მათი გეომეტრიული წარმოდგენები. აქ შესაძლებელია პირდაპირი განზოგადება, თუმცა, ნახაზები იმდენად გადატვირთული გამოდის მაღალი რანგის შემთხვევაში,

რომ გეომეტრიული ვიზუალიზაცია აზრს კარგავს. ასე რომ, უმჯობესია ტენზორებს ვუყუროთ, როგორც წრფივ ოპერატორებს, რომლებიც განსაზღვრულია ვექტორებსა და ფორმა-1-ის სიმრავლეებზე.

განვიხილოთ  $M$  მრავალსახეობის რაიმე  $P$  წერტილი. ამ წერტილში განსაზღვრული  $\binom{N}{N'}$  ტენზორი, განისაზღვრება როგორც პოლიწრფივი ფუნქციონალი (წრფივი ყველა არგუმენტის მიმართ), რომლის არგუმენტებს წარმოადგენენ  $N$  რაოდენობის ფორმა-1 და  $N'$  რაოდენობის ვექტორი, ხოლო მნიშვნელობები ნამდვილი რიცხვებია. მაგალითად, თუ  $F$  არის  $\binom{2}{2}$  ტიპის ტენზორი, მაშინ მისი მნიშვნელობები  $\tilde{\omega}$  და  $\tilde{\sigma}$  ფორმა-1-ზე და ორ  $\vec{V}$  და  $\vec{W}$  ვექტორზე, ჩაიწერება შემდეგი სახით  $F(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \vec{V}, \vec{W})$ . წრფივობის თვისება აქ იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი  $\alpha$  და  $\beta$  ნამდვილი რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა:

$$F(\alpha\tilde{\omega} + \beta\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \vec{V}, \vec{W}) = \alpha F(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}; \vec{V}, \vec{W}) + \beta F(\tilde{\lambda}, \tilde{\sigma}; \vec{V}, \vec{W}), \quad (18.50)$$

ანალოგიური თვისებები უნდა ჰქონდეს ტენზორს სხვა არგუმენტების მიმართაც.

როგორც ვექტორული და ფორმა-1-ების სივრცეების შემთხვევაში, ისე ტენზორული ველების შემთხვევაშიც,  $\binom{N}{N'}$  ტენზორი არის წესი, რომელიც მრავალსახეობის ნებისმიერ წერტილს შეუსაბამებს  $\binom{N}{N'}$  ტენზორს. ტენზორული ველისთვისაც მართებულია წრფივობის თვისება. ამ შემთხვევაში,  $\alpha$  და  $\beta$  მნიშვნელობები სხვადასხვა წერტილისათვის შეიძლება იყოს სხვადასხვა ანუ ისინი მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქციებია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორები წარმოადგენენ  $\binom{1}{0}$  ტიპის ტენზორებს ანუ ისინი ფორმა-1-ების სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორებია.

ანალოგიურად, ფორმა-1 არის  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ტიპის ტენზორი, ხოლო სკალარული ფუნქციები -  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ტიპის ტენზორი.

### 18.23. ტენზორის მაგალითები

განვიხილოთ ტენზორის მაგალითები.

1) თუ, სვეტ-ვექტორს ჩავთვლით ვექტორებად, ხოლო ვექტორ-სტრიქონს ფორმა-1-ებად, მაშინ მატრიცა გადაიქცევა  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ტენზორად, რადგანაც მატრიცის ნამრავლი ვექტორზე

არის ვექტორი, ხოლო თუ, მატრიცას მარცხნიდან გავამრავლებთ ვექტორზე და მარჯვნიდან ფორმა-1-ზე, მივიღებთ რიცხვს;

2) განვიხილოთ  $C[-1; 1]$  ფუნქციონალური სივრცე. წრფივ დიფერენციალურ ოპერატორს (მაგალითად,  $x^2 \frac{d}{dx}$ ) ამ სივრცის ფუნქცია(ვექტორი) გადაჰყავს სხვა ფუნქციაში(ვექტორში). რადგან ეს ასახვა წრფივი ოპერატორია, ის წარმოადგენს  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ტენზორს მოცემულ ფუნქციონალურ სივრცეში;

3) მესამე მაგალითია ძაბვის ტენზორი. თუ, დეფორმირებული სხეულის მოცულობაში ავირჩევთ რომელიღაც ფართეულს, მაშინ ძაბვის ტენზორი განსაზღვრავს ძაბვის ვექტორს(ძალას რომელიც მოქმედებს ერთეულ ფართეულზე მისი ერთი მხრიდან მეორე მხარეზე), რომელიც მოქმედებს ამ ფართეულზე. რადგან ფართეული არის ზედაპირი, ზედაპირი კი მოიცემა ფორმა-1-ებით, ძაბვის ტენზორი წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია ფორმა-1-ების სიმრავლეზე და მნიშვნელობათა სიმრავლეა ვექტორები. ასე, რომ ძაბვა არის  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ტიპის ტენზორი.

### 18.24. ტენზორის კომპონენტები და ტენზორული ნამრავლი

(2) ტიპის უმარტივესი ტენზორის ასაგებად, ვიღებთ ორ  $\vec{V}$  და  $\vec{W}$  ვექტორს და განვსაზღვრავთ ახალ  $\vec{V} \otimes \vec{W}$  ტენზორს, როგორც ისეთ წრფივ ოპერატორს, რომელიც ნებისმიერ ორ  $\vec{p}$  და  $\vec{q}$  ფორმა-1-ზე მოქმედებისას გვაძლევს  $\vec{V}(\vec{p})\vec{W}(\vec{q})$  ნამრავლს.

$\otimes$ -ოპერაციას ტენზორულ(გარე) ნამრავლს უწოდებენ. ორი  $\binom{M}{N}$  და  $\binom{M'}{N'}$  ტენზორის ტენზორული ნამრავლი იქნება  $\binom{M+M'}{N+N'}$  ტიპის ტენზორი.

ტენზორის კომპონენტები ეწოდება მის მნიშვნელობებს ბაზისურ ვექტორებსა და ფორმა-1-ებზე. მაგალითად, თუ, გვაქვს (3) ტიპის  $S$  ტენზორი, მაშინ მისი კომპონენტები  $\{\tilde{e}_i\}$  ბაზისის მიმართ იქნება

$$S_{lm}^{ijk} \equiv S(\tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}^j, \tilde{\omega}^k; \tilde{e}_l, \tilde{e}_m). \quad (18.51)$$

### 18.25. ნახვევის ოპერაცია

(1) ტიპის  $\vec{V} \otimes \tilde{\omega}$  ტენზორის კომპონენტებია  $V^i \omega_j$ . თუ შევაჯამებთ დიაგონალურ ( $i = j$ ) კომპონენტებს, მივიღებთ  $V^j \omega_j$  რიცხვს, რომელიც არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე, ეს არის  $\tilde{\omega}$ -ს მნიშვნელობა  $\vec{V}$ -ზე, რომელიც წარმოადგენს სკალარულ (0) ტენზორს. ამ ოპერაციას ნახვევის ოპერაცია ეწოდება.

ანალოგიურად, თუ, გვაქვს (2) ტიპის ტენზორის გარე ნამრავლი (2) ტიპის ტენზორზე, მაშინ მივიღებთ (3) ტიპის ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც შეგვიძლია ჩავწეროთ  $S_{jk}^i P^{lm}$  სახით. თუ, ამ ტენზორში, მაგალითად გავუტოლებთ ერთ ზედა  $l$  ინდექსს  $j$  ქვედა ინდექსს, რაც აინშტაინის შეთანხმების საფუძველზე ნიშნავს ამ ინდექსით შეჯამებას, მივიღებთ ნახვევის

ოპერაციას, რომელიც  $\binom{3}{2}$  ტიპის ტენზორიდან მოგვცემს  $\binom{2}{1}$  ტიპის ტენზორს  $S_{jk}^i P^{jm}$  კომპონენტებით.

უნდა აღინიშნოს, რომ ნახვევის ოპერაცია არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე.

### 18.26. ბაზისის ცვლილება

განვიხილოთ  $M$  მრავალსახეობის რაიმე  $P$  წერტილში განსაზღვრული ვექტორები და ტენზორები. ვთქვათ, გვაქვს  $\{\vec{e}_i\}$  ბაზისი ( $i = \overline{1, n}$ ) და გვინდა გადავიდეთ სხვა  $\{\vec{e}'_i\}$  ბაზისზე ( $i = \overline{1, n}$ ), მაშინ  $T_P$  გვექნება წრფივი გარდაქმნა  $\Lambda$ , რომელიც გვაძლევს საშუალებას გადავიდეთ ძველი ბაზისიდან ახალზე:

$$\vec{e}'_i = \Lambda_i^j \vec{e}_j. \quad (18.52)$$

ცხადია, რომ  $\Lambda_i^j$  მატრიცა არაგადაგვარებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში  $\vec{e}'_i$  ვექტორები არ იქნებოდნენ წრფივად დამოუკიდებელი. ამ მატრიცას გარდაქმნის მატრიცა ეწოდება და მას აქვს შებრუნებულიც.

ფორმა-1-ების ძველი ბაზისი, როგორც ვიცით, აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\tilde{\omega}^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i. \quad (18.53)$$

თუ, გავამრავლებთ (18.53) ტოლობას  $\Lambda_m^j$  მატრიცაზე და გამოვიყენებთ (18.52) თანაფარდობას, მაშინ გარდაქმნის წრფივობის თვისებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\tilde{\omega}^i(\vec{e}'_m) = \delta_j^i \Lambda_m^j = \Lambda_m^i. \quad (18.54)$$

საიდანაც ადვილად გამოიყვანება ფორმა-1-ების გარდაქმნის კანონი

$$\tilde{\omega}^i = \Lambda_m^i \tilde{\omega}^m, \quad (18.55)$$

რომელიც განსხვავდება საბაზისო ვექტორების გარდაქმნის (18.52) კანონისაგან. ზოგჯერ ტენზორების ზედა ინდექსებს კონტრავარიანტულს უწოდებენ, ხოლო ქვედა ინდექსებს – კოვარიანტულს. ასე რომ, ფორმა-1-ებს კოვარიანტულ ვექტორებსაც უწოდებენ.

ზოგჯერ ტენზორების განსაზღვრისათვის იყენებენ მათი გარდაქმნის ფორმულებს.

### 18.27. ტენზორული ოპერაციები კომპონენტებზე

ვთქვათ,  $T$  ტენზორს რომელიმე ბაზისში აქვს კომპონენტები  $\{T_j^i \dots\}$ , თუ ამ კომპონენტებს გავამრავლებთ რაიმე  $a$  ნამდვილ რიცხვზე, მივიღებთ  $\{aT_j^i \dots\}$ , რაც წარმოადგენს  $aT$  ტენზორის კომპონენტებს. აქედან ცხადია, რომ მუდმივი რიცხვის ტენზორზე ნამრავლი არ არის დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე. ასე რომ, აქ გვაქვს ასახვა:  $T \mapsto aT$ .

ანალოგიურად, ტენზორული ნამრავლის ოპერაცია არის ასახვა:  $A, B \mapsto A \otimes B$ , რომელსაც კომპონენტებით ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\{A_j^i \dots\}, \{B_m^k \dots\} \mapsto \{A_j^i \dots B_m^k \dots\}. \quad (18.56)$$

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ტენზორული ოპერაციები:

- 1) ერთნაირი ტიპის ტენზორების შესაბამისი კომპონენტების შეკრება(გამოკლება);
- 2) ნებისმიერი ტიპის ტენზორის ყველა კომპონენტის გამრავლება მოცემულ მუდმივ რიცხვზე(იძლევა იგივე ტიპის ტენზორს);
- 3) ორი ტენზორის კომპონენტების ნამრავლი იძლევა ახალ ტენზორს, რომლის ტიპიც თანამამრავლთა ტიპების ჯამის ტოლია;
- 4) ტენზორის ნახვევი რაიმე ორი ინდექსით, რომელთაგან ერთი ზედა ინდექსია, ხოლო მეორე – ქვედა, იძლევა ტენზორს რომლის რანგი ორით ნაკლებია საწყისი ტენზორის რანგზე.



განტოლებები, რომლებშიც ტენზორები ერთმანეთთან დაკავშირებულია მხოლოდ ამ ოპერაციებით, ტენზორულ განტოლებებია, ისინი არ არიან დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე.

### 18.28. ფუნქცია და სკალარი

სკალარი არის  $\binom{0}{0}$  ტიპის ტენზორი ანუ არიან მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც ინვარიანტულია ბაზისის არჩევის მიმართ. მაგალითად, ნახვევი  $V^i \omega_i$  სკალარია, რადგან მისი მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე.

### 18.29. მეტრიკული ტენზორი ვექტორულ სივრცეში

ვექტორულ სივრცეში ხშირად განიხილება ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ცნება. ეს არის წესი, რომელიც ორ ვექტორს შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს, ისე რომ, ეს ნამრავლი წრფივადაა დამოკიდებული თითოეულ ვექტორზე. ასე რომ, სკალარული ნამრავლი არის  $\binom{0}{2}$  ტიპის ტენზორი. ამ ტენზორს მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ და აღნიშნავენ  $g$  სიმბოლოთი. ასე რომ, განსაზღვრის თანახმად,

$$g(\vec{V}, \vec{U}) = g(\vec{U}, \vec{V}) \equiv \vec{U} \cdot \vec{V}. \quad (18.57)$$

პირველი ტოლობა მიუთითებს, რომ სკალარული ნამრავლი არაა დამოკიდებული თანამამრავლთა მიმდევრობაზე ანუ სკალარული ნამრავლი არის სიმეტრიული ტენზორი. მისი კომპონენტები  $\{g_{ij}\}$  ბაზისში არის

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j. \quad (18.58)$$

ეს კომპონენტები ქმნიან კვადრატულ  $n \times n$  მატრიცას. უნდა მოვითხოვოთ, რომ ეს მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული და, მაშასადამე, ჰქონდეს შებრუნებულიც. თუ ეს არის ერთეულოვანი მატრიცა ანუ

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad (18.59)$$

მაშინ მეტრიკულ  $g$  ტენზორს ევკლიდურს უწოდებენ, ხოლო შესაბამის ვექტორულ სივრცეს – ევკლიდურ სივრცეს.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მეტრიკულ ტენზორს არა აქვს ასე მარტივი სახე, ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი ახალი ბაზისი  $\{\vec{e}_{j'}\}$ , რომ ახალ კომპონენტებს ჰქონდეთ რაც შეიძლება მარტივი სახე

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^l g_{kl}. \quad (18.60)$$

განვიხილოთ ეს თანადობა, როგორც მატრიცული განტოლების კომპონენტები; მაშინ შეგვიძლია ის გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^k g_{kl} \Lambda_{j'}^l. \quad (18.61)$$

ჩავწეროთ ეს ტოლობა მატრიცული განტოლების სახით

$$g' = \Lambda^T g \Lambda, \quad (18.62)$$

სადაც  $\Lambda^T$  არის  $\Lambda = \Lambda_{i'}^k$  მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა.

ვაჩვენოთ, რომ თუ კარგად ავირჩევთ  $\Lambda$  მატრიცას, მაშინ  $g'$  მეტრიკული ტენზორი შეიძლება მაქსიმალურად მარტივი სახით ჩავწეროთ.

მართლაც, წარმოვადგინოთ  $\Lambda$  მატრიცა  $O$  – ორთოგონალური ( $O^T = O^{-1}$ ) და  $D$  – დიგონალური ( $D^T = D$ ) მატრიცების ნამრავლის სახით

$$\Lambda = O \cdot D. \quad (18.63)$$

როგორც მატრიცების თვისებებიდან ვიცით

$$\Lambda^T = (OD)^T = D^T O^T = DO^{-1} \quad (18.64)$$

და

$$g' = DO^{-1} g OD. \quad (18.65)$$

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი სიმეტრიული მატრიცა და, მაშასადამე,  $g$  მატრიცაც, მსგავსების შესაბამისი

ორთოგონალური მატრიცით გარდაქმნით, შეგვიძლია მივიყვანოთ  $g_d$  დიაგონალურ მატრიცულ სახეზე. ვთქვათ,  $O$  - სწორედ ასეთი ორთოგონალური მატრიცაა:

$$g_d = O^{-1}gO, \quad (18.66)$$

მაშინ (2.65) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$g' = Dg_dD. \quad (18.67)$$

თუ  $g_d = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$  და  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , მაშინ

$$g' = \text{diag}(g_1d_1^2, g_2d_2^2, \dots, g_nd_n^2). \quad (18.68)$$

დავუშვათ ახლა, რომ  $d_i = |g_i|^{-\frac{1}{2}}$ , მაშინ (18.68) დიაგონალური მატრიცის თითოეული წევრი უდრის  $+1$ -ს, ან  $-1$ -ს.

$g_d$  მატრიცის დიაგონალური  $\{g_i, i = \overline{1, n}\}$  ელემენტები წარმოადგენენ  $\mathbf{g}$  მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს და განისაზღვრებიან მიმდევრობის სიზუსტით. უფრო მეტიც, რადგან მატრიცა არაგადაგვარებულია, არც ერთი მათგანი არაა ნულოვანი.

ასე რომ, მეტრიკული ტენზორის შემცველი ნებისმიერი ექვტორული სივრცე მიიყვანება ისეთ ბაზისზე, რომ ამ ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ, მეტრიკულ ტენზორს აქვს კანონიკური სახე  $\text{diag}(-1, -1, \dots, -1, 1, 1, \dots, 1)$ . ამ მატრიცის დიაგონალური ელემენტების ჯამს სიგნატურას უწოდებენ.

თუ მეტრიკა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მის კანონიკურ წარმოდგენაში გვაქვს მხოლოდ  $+1$ -იანები და ასეთი სივრცე ევკლიდურია. თუ ყველა დიაგონალური ელემენტი არაა  $+1$ , მაშინ მეტრიკას ინდეფინიტურს უწოდებენ. ინდეფინიტური მეტრიკის მაგალითია მინკოვსკის მეტრიკა  $(-1, 1, 1, \dots, 1)$ . ასეთი მეტრიკა აქვს ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას ( $n = 4$ ).

ევკლიდურ სივრცეში კანონიკურ ბაზისებს დეკარტულს უწოდებენ. ასეთ ბაზისში მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები ემთხვევა კრონეკერის სიმბოლოს კომპონენტებს ანუ მოიცემა ერთეულოვანი მატრიცით. დეკარტული ბაზისიდან მეორე დეკარტულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა ორთოგონალურია.

ორი ორთოგონალური მატრიცის ნამრავლი ისევ ორთოგონალურია და, მაშასადამე, ორთოგონალური მატრიცების სიმრავლე ჯგუფია, რომელსაც  $O(n)$  ორთოგონალურ ჯგუფს უწოდებენ.

ანალოგიურად, ვექტორულ სივრცეში მინკოვსკის მეტრიკით აღსანიშნავია კანონიკური ბაზისი, რომელსაც ფსევდოევკლიდური (ლორენცის) ბაზისი ეწოდება. სადაც მეტრიკის კომპონენტებს აქვს შემდეგი სახე:

$$g_d = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1). \quad (18.69)$$

ერთი ფსევდოევკლიდური ბაზისიდან მეორეზე გადასვლის მატრიცა  $\Lambda_L$  აკმაყოფილებს თანადობას

$$g_d = \Lambda_L^T g_d \Lambda_L. \quad (18.70)$$

ასეთ გარდაქმნას ლორენცის გარდაქმნას უწოდებენ. ეს გარდაქმნებიც ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც ლორენცის  $L(n)$  ჯგუფს უწოდებენ და ზოგჯერ ასეც აღნიშნავენ:  $O(n-1, 1)$ .

მეტრიკული ტენზორის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი თვისება არის ის, რომ მათი საშუალებით მყარდება ურთიერთცალსახა კავშირი (ბიექცია) ვექტორებსა და ფორმა-1-ებს შორის.

ჩვენ დავუშვით, რომ  $g_{ij}$  მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული, ეს განაპირობებს მისი შებრუნებული  $g^{ij}$  მატრიცის არსებობას ანუ

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (18.71)$$

შესაბამისობა ვექტორებსა და ფორმა-1-ებს შორის მოიცემა შემდეგი ტოლობებით:

$$V_i = g_{ij} V^j \quad \text{და} \quad V^j = g^{jk} V_k. \quad (18.72)$$

შესაბამისად  $g^{ij}$  არის  $\binom{2}{0}$  ტიპის ტენზორი. მეტრიკული ტენზორი საშუალებას იძლევა ინდექსები ავწიოთ ან დავწიოთ.

მაგალითად,  $\binom{2}{0}$  ტიპის  $A^{jk}$  ტენზორი, შეიძლება გარდავქმნათ  $\binom{1}{1}$  ტიპის  $A_j^i$  ტენზორად ფორმულით:

$$A_j^i = g_{jk} A^{ik}. \quad (18.73)$$

ასევე, შეგვიძლია  $\binom{1}{1}$  ტიპის  $A_j^i$  ტენზორი გარდავქმნათ  $\binom{0}{2}$  ტიპის  $A_{ij}$  ტენზორად ფორმულით:

$$A_{ij} = g_{im} A_j^m = g_{im} g_{jk} A^{mk}. \quad (18.74)$$

აქედან კი შეგვიძლია დავუბრუნდეთ საწყის ტენზორს ფორმულით:

$$A^{ij} = g^{ik} g^{jm} A_{km}. \quad (18.75)$$

ამ ოპერაციას ინდექსების აწევ-დაწევის ოპერაციას უწოდებენ.

მეტრიკულ ვექტორულ სივრცეში არა აქვს მნიშვნელობა ტენზორი  $\binom{M}{N}$  ტიპის იქნება, თუ  $\binom{M-1}{N+1}$  ტიპის. აქ ყველაფერს განსაზღვრავს ტენზორის რანგი ანუ  $M + N$ .

ეკლიდურ სივრცეში  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $g^{ij} = \delta^{ij}$ ,  $V^i = V_j$ . ამიტომ ვექტორებსა და ფორმა-1-ებს შორის ეკლიდურ სივრცეში, ორთონორ-მირებული ბაზისის შემთხვევაში, არ არის განსხვავება, თუმცა ეკლიდურ სივრცეში არაორთონორმირებული ბაზისით ან ინდეფინიტური მეტრიკის შემთხვევაში ნებისმიერი ბაზისით, ფორმა-1-ი განსხვავდება ვექტორისაგან.

### 18.30. მეტრიკული ტენზორის ველი მრავალსახეობაზე

მეტრიკული  $g$  ტენზორული ველი  $M$  რავალსახეობაზე არის სიმეტრიული  $\binom{0}{2}$  ტიპის ტენზორული ველი, რომელიც შებრუნებადია ნებისმიერ წერტილში. მრავალსახეობის ნებისმიერ

$P$  წერტილში ის იძლევა მეტრიკას მხებ  $T_P$  სივრცეში, რომლისთვისაც სრულდება ყველა თვისება, რომლებზედაც წინა პარაგრაფში გვქონდა საუბარი, და კიდევ ბევრი სხვა.

$(0_2)$  ტიპის ტენზორული ველის გამოყოფა მრავალსახეობის მეტრიკისათვის ძალიან ამდიდრებს მრავალსახეობას და გარდაქმნის მას მეტად ხისტ სტრუქტურად. უკვე შესაძლებელი ხდება განვსაზღვროთ მასზე მანძილი და სიმრუდე. ეს მნიშვნელოვანია ფარდობითობის ზოგადი თეორიისათვის, თუმცა, შეიძლება აგვაცილოს დიფერენცირებადი მრავალსახეობების გეომეტრიის ისეთ მნიშვნელოვან ცნებებს, როგორცაა **ლის წარმოებული და კარტანის დიფერენციალური ფორმები**. ამიტომ, შევეცდებით მეტრიკული ტენზორი გამოვიყენოთ მხოლოდ იქ, სადაც ის აუცილებელია.

მეტრიკული ტენზორი დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით. ასე რომ, მას ვთვლით უწყვეტად. მისი კანონიკური ჩანაწერი უნდა იყოს ერთნაირი, რადგან ის განისაზღვრება მთელრიცხვა პარამეტრებით. ამიტომ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მეტრიკული ტენზორული ველის სიგნატურაზე. თუ ვიგულისხმებთ, რომ გარდაქმნის მატრიცა შეგვიძლია დამოუკიდებლად ამოვირჩიოთ ყველა წერტილში, მაშინ მივიღებთ გლობალურ კანონიკურ სახეს.

მეტრიკის მნიშვნელოვანი თვისებაა ის, რომ მისი მეშვეობით შეგვიძლია მრავალსახეობაზე შემოვიღოთ მანძილის ცნება. თუ  $\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$  არის მოცემული მრუდის მხები ვექტორი, მაშინ წირის გასწვრივ  $d\lambda$  გადაადგილებას შეესაბამება მანძილის კვადრატი

$$dl^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \vec{V}d\lambda \cdot \vec{V}d\lambda = \vec{V} \cdot \vec{V}(d\lambda)^2 = g(\vec{V}, \vec{V})d\lambda^2. \quad (18.76)$$

თუ, მეტრიკა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ  $g(\vec{V}, \vec{V}) > 0$  ნებისმიერი  $\vec{V} \neq 0$  მნიშვნელობისათვის. ამ შემთხვევაში  $dl^2 > 0$  და მრუდის სიგრძის ელემენტისათვის გვექნება გამოსახულება

$$dl = \left(g(\vec{V}, \vec{V})\right)^{1/2} d\lambda. \quad (18.77)$$

მაგრამ ინდეფინიტიური მეტრიკის შემთხვევაში, მრუდის სიგრძის ელემენტს უკვე აღარ ექნება განსაზღვრული ნიშანი. წირს შეიძლება ჰქონდეს როგორც დადებითი  $dl^2$  (სივრცის-მსგავსი წირი), ისე უარყოფითი (დროის-მსგავსი წირი). ასეთ შემთხვევაში, ნამდვილი რიცხვი

$$dl = (|g(\vec{V}, \vec{V})|)^{1/2} d\lambda, \quad (18.78)$$

შეგვიძლია ჩავთვალოთ საკუთრივ სიგრძედ სივრცის-მსგავსი წირებისათვის და საკუთრივ დროდ დროის-მსგავსი წირებისათვის. ეს სიდიდე ნულის ტოლია ნულოვანი წირებისათვის.

ინდეფინიტიურ მეტრიკასთან მუშაობისას ერთმანეთისაგან უნდა განვასხვავოთ ნულოვანი სიგრძის ვექტორი და ნულოვანი ვექტორი.

### 18.31. ფარდობითობის სპეციალური თეორია

ფიზიკისათვის ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან მრავალსახეობას წარმოადგენს ვექტორული სივრცე  $\mathbb{R}^4$ , რომელსაც აქვს მეტრიკა სიგნატურით  $+2$ , ესაა მინკოვსკის სივრცე. ფარდობითობის სპეციალური თეორიის სივრცე დრო.

როგორც ვიცით, არსებობს პრივილეგირებული კოორდინატთა სისტემები – ლორენცის ათვლის სისტემები, რომელთათვისაც თუ ორი მოვლენა დაშორებულია საკოორდინატო ინტერვალთა  $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , მაშინ

$$\Delta s^2 = -c(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (18.79)$$

სიდიდე არაა დამოკიდებული ლორენცის კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე (აქ  $c$  სინათლის სიჩქარეა). შევცვალოთ მასშტაბები კოორდინატთა სისტემისათვის ფორმულებით:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad (18.80)$$

მაშინ (18.79) გადაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \quad (18.81)$$

სადაც  $\eta_{\alpha\beta}$  დიაგონალური მატრიცაა და

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1). \quad (18.82)$$

$\Delta s^2$  არის  $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$  ვექტორის ფსევდონორმა. მას შეესაბამება სკალარული ნამრავლი

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \eta_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta. \quad (18.83)$$

ასე რომ, ფაქტობრივად  $\eta_{\alpha\beta}$  არის კანონიკური სახით ჩაწერილი მეტრიკული ტენზორი, ხოლო ლორენცის სისტემა არის შესაბამისი ორთონორმირებული ბაზისური სისტემა.

### თეორიული მასალის გამეორება

1. განსაზღვრეთ მრავალსახეობა;
2. დაახასიათეთ  $SO(3)$  მრავალსახეობა;
3. განსაზღვრეთ მხები  $T_P$  სივრცე სფეროსათვის;
4. განფენილი სივრცის განსაზღვრება;
5. მხები განფენილი სივრცეების მაგალითები. რუკა და ატლასი;
6. ლის ფრჩხილები და არასაკორდინატო ბაზისი;
7. ტენზორული ველის ცნება. ვექტორები და ფორმა-1;
8. მეტრიკული ტენზორი. ფსევდონორმა. სიგნატურა. ინდექსის აწევ-დაწევის ოპერაცია. ევკლიდური და მინკოვსკის სივრცეები. ლორენცის გარდაქმნა.

### ლიტერატურა

1. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. Пер. с англ., Мир, Москва, 1972
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Пер. с англ., Мир, Москва, 1979
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ., Мир, Москва, 1989



4. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972
5. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, том 1, механика, Пер. с англ., Наука, Москва, 1975
6. Ферми Э. Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ., Мир, Москва, 1968
7. Бёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
8. Бёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
9. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Пер. с англ., Мир, Москва, 1976
10. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ., Мир, Москва, 2002
11. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. Пер. с англ., Мир, Москва, 1985

## XIX თავი. ლის ალგებრები და ლის ჯგუფები

ჯგუფთა თეორიის გამოყენება დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად ჩამოყალიბდა როგორც ახალი მეცნიერული მიმართულება სოფუს ლის შრომებში და, თავდაპირველად, უწყვეტი ჯგუფების თეორიის სახელით იყო ცნობილი. პირველი ძირითადი ამოცანები, დიფერენციალური განტოლებების კვადრატურებში ამოსხნადობასთან დაკავშირებით, თვით ს. ლის შრომებში იქნა გადაწყვეტილი. მოგვიანებით, ლ.ოგსიანიკოვისა და ნ.იბრაგიმოვის შრომებში ლის თეორიის მეშვეობით, მიღწეულ იქნა მრავალი წარმატება მექანიკისა და მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ზუსტი ამონახსნების კლასების პოვნის საქმეში.

### 19.1. გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფი

განვიხილოთ გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფები ნამდვი-ლი პარამეტრით. ყოველი ასეთი ჯგუფი განისაზღვრება მისი პარამეტრის მიმართ ტეილორის მწკრივად გაშლის პირველი წევრით, ანუ, მისი მხები ვექტორული ველის სივრცით, რომელსაც ზოგჯერ ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორსაც უწოდებენ. ჯგუფის მაგივრად, მისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია.

განვიხილოთ  $T$  გარდაქმნა:

$$z' = f(z), \quad (19.1)$$

რომელსაც  $\mathbb{R}^n$  ევკლიდური სივრცის  $z = (z^1, \dots, z^n)$  წერტილი გადაჰყავს ახალ  $z' = (z'^1, \dots, z'^n) \in \mathbb{R}^n$  წერტილში ერთი და იმავე კოორ-დინატთა სისტემის მიმართ. ჩავთვალოთ, რომ (3.1) გარდაქმნა შექცევადია და მის შებრუნებულ გარდაქმნას, რომელსაც  $z'$  წერტილი გადაჰყავს კვლავ  $z$  წერტილში, აღვნიშნავთ  $T^{-1}$  სიმბოლოთი.  $T$  და  $T^{-1}$  გარდაქმნების მიმდევრობით შესრულებას, ნებისმიერი თანმიმდევრობით,

მიყვავართ იგივეურ  $I$  გარდაქმნამდე, რომელსაც ნებისმიერი წერტილი თავის თავში გადაჰყავს.

განვიხილოთ ახლა  $\{T_a\}$  ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ერთობლიობა:

$$z' = f(z, a), \quad (19.2)$$

სადაც  $a \in \mathbb{R}$  პარამეტრი უწყვეტად იცვლება რაღაც  $\Delta \subset \mathbb{R}$  შუალედში. ამ პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება კონკრეტული გარდაქმნა ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ოჯახიდან. ჩავთვალოთ, რომ როცა  $a = 0$  მისი შესაბამისი გარდაქმნა არის იგივეური გარდაქმნა  $T_0 = I$  და ნებისმიერი არანულოვანი  $a \neq 0$  მნიშვნელობისათვის, შესაბამისი  $T_a \neq I$  ნებისმიერი  $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$  მნიშვნელობისათვის ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერ  $T_a$  გარდაქმნასთან ერთად, გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ოჯახი შეიცავს მის შებრუნებულ  $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$  გარდაქმნასაც, სადაც  $a^{-1}$  აღნიშნავს პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომელიც  $\{T_a\}$ -ში შეესაბამება შებრუნებულ  $T_a^{-1}$  გარდაქმნას.

მაგალითად, თუ გვაქვს გაჭიმვის  $z' = az$  გარდაქმნა, მაშინ  $a = 1$  მნიშვნელობას შეესაბამება იგივეური გარდაქმნა. თუ გადავანაცვლებთ პარამეტრს, მივიღებთ გარდაქმნას

$$z' = z + az, \quad (19.3)$$

სადაც  $T_0 = I$ . ვიპოვოთ (19.3) გარდაქმნის შებრუნებულ გარდაქმნა, ამისათვის, შევუცვალოთ  $z'$  და  $z$  კოორდინატებს ადგილი და ამოვხსნათ მიღებული ტოლობა  $z'$ -ის მიმართ, მივიღებთ  $z' = \frac{z}{1+a}$  ანუ,  $T_a^{-1} = \frac{z}{1+a}$ . ახლა შევეცადოთ, ვიპოვოთ  $a$ -ს ის  $a^{-1}$  მნიშვნელობა, როცა (19.3) გარდაიქმნება  $T_a^{-1} = \frac{z}{1+a}$  ფორმულად ანუ

$$\frac{z}{1+a} = z + a^{-1}z. \quad (19.4)$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$a^{-1} = -\frac{a}{1+a}. \quad (19.5)$$

ასე რომ, ნებისმიერი  $a \in (-1, +\infty)$  მნიშვნელობისათვის არსებობს შესაბამისი შებრუნებული  $T_{a^{-1}}$  გარდაქმნა.

ახლა განვიხილოთ პარამეტრის რაიმე ორი სხვადასხვა  $a$  და  $b$  მნიშვნელობა მოცემული ინტერვალიდან და მიმდევრობით შევას-რულოთ მათი შესაბამისი (19.3) გარდაქმნები. პირველი გარდაქმნის შემდეგ  $z$  წერტილი გადავა  $z' = z + az$  წერტილში, რომელსაც მეორე გარდაქმნა გადაიყვანს  $z''$  წერტილში

$$z'' = z' + bz' = z + az + b(z + az) = z + (a + b + ab)z. \quad (19.6)$$

ასე რომ, (19.3) გარდაქმნის ორჯერ მიმდევრობით შესრულებას, მიყვართ ისევ იმავე ტიპის გარდაქმნამდე, პარამეტრის ახალი  $c = a + b + ab$  მნიშვნელობისათვის. სიმბოლურად ამ თვისებას წერენ  $T_b T_a = T_{a+b+ab}$  ფორმით და ამბობენ, რომ (19.3) გარდაქმნები ქმნიან ერთპარამეტრიან ჯგუფს.

საზოგადოდ (3.2) გარდაქმნის შემთხვევაში, ვიტყვით რომ ის ქმნის ერთპარამეტრიან ჯგუფს, თუ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების გარდა, მართებულია ტოლობა

$$T_b T_a = T_{\varphi(a,b)}, \quad (19.7)$$

სადაც  $\varphi(a,b)$  ფუნქციები დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით. ამ ჩანაწერის აზრი იგივეა, რაც წინა მაგალითში. რაც იმას ნიშნავს, რომ  $T_a$  და  $T_b$  გარდაქმნების მიმდევრობით შესრულების შედეგად მივიღებთ ახალ იმავე სახის გარდაქმნას ახალი  $c = \varphi(a,b)$  პარამეტრით.

ვთქვათ, (19.2) გარდაქმნის შემთხვევაში, სრულდება გარდაქმნათა ჯგუფის (19.7) თვისება და  $T_0 = I$  საწყისი პირობა. მაშინ

$$T_0 T_a = T_a, \quad T_b T_0 = T_b. \quad (19.8)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(a, 0) = a, \quad \varphi(0, b) = b. \quad (19.9)$$

მაგალითად, (19.3) გარდაქმნისათვის  $\varphi(a, b) = a + b + ab$  და (19.9) ფორმულების მართებულობა ადვილი შესამოწმებელია.

ერთპარამეტრიანი ჯგუფის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს წრფის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი, სადაც გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$x' = x + a. \quad (19.10)$$

$x$  წერტილის ორი მიმდევრობითი გადატანის შედეგი იქნება

$$x'' = x + a + b. \quad (19.11)$$

ამ შემთხვევაში,  $\varphi(a, b) = a + b$  და  $a^{-1} = -a$ .

ამრიგად, ერთპარამეტრიანი ჯგუფის თვისებები შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

- 1)  $T_0 = I$  ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა;
- 2)  $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$  შებრუნებული ელემენტის არსებობა;
- 3)  $T_c(T_b T_a) = (T_c T_b) T_a$
- 4) ჯგუფის ოპერაციის ასოციაციურობა. (19.12)

ჯგუფთა აბსტრაქტულ თეორიაში, ჯგუფის განსაზღვრისათვის ეს საში თვისებებია ძირითადი. ჩვენ კი პარამეტრის მიმართ უწყვეტობის თვისებაც გვჭირდება. ამიტომ გადავდივართ ლის თეორიის ელემენტების განხილვაზე.

## 19.2. ლის განტოლება

ვთქვათ,  $z' = f(z, a)$  გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს და ერთპარამეტრიანი ჯგუფის (3.7) თვისებას აქვს მარტივი სახე

$$T_b T_a = T_{a+b} \text{ ანუ } \varphi(a, b) = a + b. \quad (19.13)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, დავუშვათ, რომ

$$f(f(z, a), b) = f(z, a + b), \quad (19.14)$$

ასეთ შემთხვევაში ცხადია, რომ  $a^{-1} = -a$ . ასეთნაირად შესაძლებელია ადვილად ერთპარამეტრიანი ჯგუფი და

გამრავლების ნებისმიერ წესს შეგვიძლია მივცეთ (19.14) სახე ახალი პარამეტრიზაციის (ჯგუფის პარამეტრის არაგადაგვარებული გარდაქმნით) საშუალებით. ამ ჯგუფს აღვნიშნავთ  $G$  სიმბოლოთი.

გავშალოთ  $f(z, a)$  ფუნქცია ტეილორის მწკრივად,  $a$  პარამეტრის მიმართ,  $a = 0$  წერტილის მიდამოში. პირობის თანახმად  $T_0 = I$  და, მაშასადამე,  $f(z, 0) = z$ . ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\xi(z) = \frac{\partial f(z, a)}{\partial a} \Big|_{a=0}, \quad (19.15)$$

მაშინ (19.2) გარდაქმნა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$z' = z + \xi(z)a + o(a). \quad (19.16)$$

ღის თეორემა ამტკიცებს, რომ გაშლის ამ ორი წევრით შეგვიძლია ცალსახად განვსაზღვროთ  $f(z, a)$  ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (19.14) პირობას. ასევე ამბობენ, რომ  $G$  ჯგუფი ცალსახად განისაზღვრება მხები ვექტორული  $\xi$  ველით, რადგან (19.15) წარმოადგენს  $z$  წერტილში გავლებულ მხებ ვექტორს იმ წირის მიმართ, რომელიც აიწერება  $z'$  წერტილებით (19.2) გარდაქმნისას.

თეორემა: თუ  $f(z, a)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს  $f(f(z, a), b) = f(z, a + b)$  ტოლობას და აქვს  $z' = z + \xi(z)a + o(a)$  წარმოდგენა, მაშინ ის აკმაყოფილებს ღის განტოლებას საწყისი პირობით:

$$\frac{df}{da} = \xi(f), \quad f|_{a=0} = z. \quad (19.17)$$

პირიქითაც, ნებისმიერი გლუვი  $\xi(z)$  ვექტორული ველისათვის (19.17) კოშის ამონახსნი აკმაყოფილებს  $f(f(z, a), b) = f(z, a + b)$  პირობას.

დამტკიცება: ვთქვათ სრულდება  $f(f(z, a), b) = f(z, a + b)$  პირობა.  $a$  პარამეტრს მივცეთ  $\Delta a$  ნაზრდი, მაშინ გვექნება  $f(z, a + \Delta a) = f(f(z, a), \Delta a)$ . თუ ამ ტოლობაში მისი მწკრივად გაშლის შემდეგ გამოვყოფთ წრფივ ნაწილს  $\Delta a$ -ს მიმართ, მივიღებთ

$$f(z, a + \Delta a) = f(z, a) + \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + o(\Delta a),$$

$$f(f(z, a), \Delta a) = f(z, a) + \frac{\partial f}{\partial \Delta a} I_{a=0} \Delta a + o(\Delta a).$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\frac{\partial f(f(z,a), \Delta a)}{\partial \Delta a} I_{\Delta a=0} = \xi(f(z, a))$  და გავითვალისწინებთ (19.15) ტოლობას, მივიღებთ ლის განტოლებას  $\frac{\partial f(z,a)}{\partial a} = \xi(f(z, a))$ .

დავამტკიცოთ ახლა თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ,  $f(z, a)$  არის (19.17) ამოცანის ამონახსნი. დავაფიქსიროთ პარამეტრის მნიშვნელობა  $a = 0$  მნიშვნელობის მახლობლობაში და განვიხილოთ ორი ფუნქცია:

$$u(b) = f(z', b) = f(f(z, a), b) \quad \text{და} \quad v(b) = f(z, a + b). \quad \text{ლის განტოლები-დან გამომდინარე,}$$

$$\frac{du}{db} = \frac{df(z', b)}{db} = \xi(u), \quad u|_{b=0} = f(z, a),$$

$$\frac{dv}{db} = \frac{df(z, a+b)}{db} = \xi(v), \quad v|_{b=0} = f(z, a).$$

ასე რომ,  $u(b)$  და  $v(b)$  აკმაყოფილებენ ერთი და იმავე დიფერენციალურ განტოლებას ერთნაირი საწყისი პირობით, რადგან ასეთ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი გვექნება რომ  $u(b) = v(b)$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $f(f(z, a), b) = f(z, a + b)$ . რ.დ.გ.

**განვიხილოთ მაგალითები:**

1) გადატანათა ჯგუფს  $x' = x + a$  აქვს მხები ვექტორი  $\xi(x) = 1$ . მართებულია ლის განტოლება, რომელსაც ამ შემთხვევაში აქვს სახე  $\frac{dx'}{da} = 1$ ;

2) ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განვიხილოთ ვექტორული ველი  $\xi(x) = x$  და ამოვხსნათ შესაბამისი ლის განტოლება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:  $\frac{dx'}{da} = x'$ ,  $x'|_{a=0} = x$ . ეს

ამოცანა ადვილად იხსნება და გვაძლევს გაჭიმვების ჯგუფს  
 $x' = xe^a$  ;

**19.3. ინვარიანტები. ჯგუფის ინვინტიკუზიმალური ოპერატორი**

$F(z)$  ფუნქციას ეწოდება  $z' = f(z, a) = z + \xi(z)a + o(a)$  გარდაქმნათა ჯგუფის ინვარიანტი, თუ, ყველა დასაშვები  $z, a$  მნიშვნელობებისათვის მართებულია ტოლობა

$$F(f(z, a)) = F(z). \tag{19.18}$$

**თეორემა:**  $F(z)$  ფუნქცია ინვარიანტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0. \tag{19.19}$$

ინვარიანტობის ეს კრიტერიუმი წარმოადგენს პირველი რიგის კერძოწარმოებულის, წრფივ, ერთგვაროვან განტოლებას. ამიტომ, გარდაქმნათა ნებისმიერ ერთპარამეტრიან ჯგუფს  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში გააჩნია  $n - 1$  წრფივად დამოუკიდებელი ინვარიანტი, ისე, რომ ნებისმიერი სხვა ინვარიანტი ამ ბაზისური ინვარიანტების ფუნქციაა. ასეთ ბაზისურ ინვარიანტებად, შეგვიძლია ავირჩიოთ (3.19) განტოლების მახასიათებელი განტოლების

$$\frac{dz^1}{\xi^1(z)} = \frac{dz^2}{\xi^2(z)} = \dots = \frac{dz^n}{\xi^n(z)}, \tag{19.20}$$

პირველი ინტეგრალების მარცხენა მხარეები

$$J_i(z) = C_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{19.21}$$

**განვიხილოთ მაგალითები:**

გაჭიმვის ჯგუფისათვის  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში

$$x' = xe^a, \quad y' = ye^{2a}, \quad z' = ze^{-2a},$$

გვაქვს  $\xi = (x, 2y, -2z)$  მხევი ვექტორი, ამიტომ მის შესაბამის (19.19) განტოლებას აქვს ასეთი სახე:



$$x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} - 2z \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (19.22)$$

შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას კი - ასეთი:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-2z},$$

რომლის პირველი ინტეგრალია

$$\frac{y}{x^2} = C_1, \quad x^2 z = C_2.$$

ინვარიანტებს აქვს ასეთი სახე:  $J_1 = \frac{y}{x^2}$ ,  $J_2 = x^2 z$ .

ზოგად ინვარიანტს კი - ასეთი:  $F = F\left(\frac{y}{x^2}, x^2 z\right)$ .

თუ შემოვიტანთ დიფერენციალურ ოპერატორს

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (19.23)$$

მაშინ ინვარიანტობის კრიტერიუმი შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$XF = 0. \quad (19.24)$$

ამ  $X$  ოპერატორს გარდაქმნათა  $G$  ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი ეწოდება.

შემდგომ, გარდაქმნათა ჯგუფის მხები  $\vec{\xi}$  ვექტორის ნაცვლად, ძირითადად, გამოვიყენებთ ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს.

თუ მოცემულია ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი, მაშინ ჯგუფის გარდაქმნის კანონის საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ლის შესაბამისი განტოლება.

განვიხილოთ მაგალითები:

1) ვიპოვოთ ჯგუფი, რომლის ოპერატორია (ბრუნვის ჯგუფი):  $X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ . თუ შევადარებთ (19.23) ტოლობას, ადვილად ვიპოვიით, რომ საქმე გვაქვს  $\xi = (y; -x)$  მხებ ვექტორთან. ამიტომ ლის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$\frac{dx'}{da} = y'$ ,  $\frac{dy'}{da} = -x'$ , საიდანაც საწყისი პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ რომ გარდაქმნის ჯგუფი მოიცემა ფორმულებით

$$x' = x \cos a + y \sin a,$$

$$y' = y \cos a - x \sin a.$$

ინვარიანტი იქნება  $J = x^2 + y^2$ .

2) განვიხილოთ  $x$  ღერძის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი:

$$x' = x + a,$$

$$y' = y.$$

მაშინ ამ ჯგუფის ინვინტეზიმალური ოპერატორი იქნება:  $X = \frac{\partial}{\partial x}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = y$ .

3) განვიხილოთ  $y$  ღერძის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი:

$$y' = y + a,$$

$$x' = x.$$

მაშინ ამ ჯგუფის ინვინტეზიმალური ოპერატორი იქნება:  $X = \frac{\partial}{\partial y}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = x$ .

4) განვიხილოთ  $kx + ly = 0$  წრფის პარალელურად გადატანათა ჯგუფი:  $x' = x + la$ ,  $y' = y - ka$ . შესაბამისი ინვინტეზიმალური ოპერატორი იქნება:  $X = l \frac{\partial}{\partial x} - k \frac{\partial}{\partial y}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = kx + ly$ .

5) ლორენცის გარდაქმნათა ჯგუფისათვის:

$$x' = x \cosh a + y \sinh a,$$

$$y' = y \cosh a + x \sinh a.$$

შესაბამისი ინვინტეზიმალური ოპერატორი იქნება:

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \text{ ხოლო ინვარიანტი - } J = x^2 - y^2.$$

6) გალილეის გარდაქმნათა ჯგუფისათვის:

$$x' = x + ay,$$

$$y' = y,$$

ინვინტეზიმალური ოპერატორია:

$$X = y \frac{\partial}{\partial x}, \text{ ხოლო ინვარიანტი - } J = y.$$

7) ერთგვაროვანი გაჭიმვების ჯგუფისათვის გვაქვს გარდაქმნები:  $x' = xe^a$ ,  $y' = ye^a$ . შესაბამისი

ინვინტეზიმალური ოპერატორია:  $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ , ხოლო ინვარიანტი -  $J = \frac{x}{y}$ .

8) არაერთგვაროვანი გაჭიმვების ჯგუფისათვის:

$$x' = xe^a,$$

$$y' = ye^{ka}.$$

შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორია:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}.$$

$$\text{ხოლო ინვარიანტი} - J = \frac{x^k}{y}.$$

#### 19.4. გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფის ექსპონენციალური წარმოდგენა

ზოგჯერ ხელსაყრელია გარდაქმნის  $z' = f(z, a)$  ჯგუფისა და  $F(z') = F(F(f(z, a)))$  ინვარიანტის წარმოდგენა ჯგუფის  $a$  პარამეტრის ხარისხოვანი მწკრივის სახით. როგორც უკვე ვიცით, არსებობს გაშლა

$$z' = f(z, a) = z + \xi(z)a + o(a), \quad (19.25)$$

$$F(z') = F(z) + a\xi^i(z) \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + o(a). \quad (19.26)$$

ახლა ვიპოვოთ (19.26) გაშლის შემდგომი წევრები  $a$  პარამეტრის მიმართ. ჩანაწერის შემოკლების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები  $F(z) \equiv F$ ;  $F(z') \equiv F'$ ;  $X \equiv \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}$ ;  $X' \equiv \xi'^i(z') \frac{\partial}{\partial z'^i}$ .

მაშინ (19.26) ჩაიწერება ასე:

$$F' = F + aXF + o, \quad (19.26')$$

ხოლო ტოლობა  $\frac{dF(f(z,a))}{da} = \xi'^i(z') \frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}$ , გადაიწერება ასეთი ფორმით:

$$\frac{dF'}{da} = X'F'. \quad (19.27)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ (19.27) განტოლების მარჯვენა ნაწილი კვლავ წარმოადგენს  $z'$  ცვლადის ფუნქციას, კვლავ შეგვეძლება გამოვიყენოთ ეს ფორმულა და მივიღოთ შემდეგი ფორმულები

$$\frac{d^2 F'}{da^2} = \frac{d}{da}(X' F') = X'(X' F') = X'^2 F', \quad (19.28)$$

$$\frac{d^3 F'}{da^3} = X'^3 F', \dots \quad (19.29)$$

თუ ამ ფორმულებს შევიტანთ ტეილორის გაშლას:

$$F' = [F']_{a=0} + a \left[ \frac{dF'}{da} \right]_{a=0} + \frac{a^2}{2!} \left[ \frac{d^2 F'}{da^2} \right]_{a=0} + \dots, \quad (19.30)$$

მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას

$$F' = F + aXF + \frac{a^2}{2!} X^2 F + \dots, \quad (19.31)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$F(z') = \left( 1 + aX + \frac{(aX)^2}{2!} + \dots \right) F(z) \equiv e^{aX} F(z). \quad (19.32)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა  $F = z$ , ფორმულა (19.32)-ს აქვს შემდეგი სახე:

$$z' = e^{aX}(z). \quad (19.33)$$

ამ წარმოდგენას ერთპარამეტრიანი გარდაქმნების ჯგუფის ექსპონენციალურ წარმოდგენას უწოდებენ.

განვიხილოთ მაგალითები:

1) ვთქვათ, გვაქვს  $G$  გადატანათა ჯგუფი ნამდვილ რიცხვთა ღერძის გასწვრივ, მაშინ  $X = \frac{d}{dx}$  და (19.32) ფორმულა გვაძლევს  $F(x+a)$  ფუნქციის გაშლას ტეილორის მწკრივად  $x$  წერტილში

$$F(x+a) = F(x) + aF'(x) + \frac{a^2}{2!} F''(x) + \frac{a^3}{3!} F'''(x) + \dots \quad (19.34)$$

2) ვთქვათ,  $G$  არის წრფივი გაჭიმვის გარდაქმნების ჯგუფი, რომლის ინფინიტეზიმალური ოპერატორია  $X = x \frac{d}{dx}$ , მაშინ

$$X^2 = x \frac{d}{dx} \cdot x \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}, \quad (19.35)$$

$$X^3 = x \frac{d}{dx} \cdot \left( x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d}{dx} \right) = x \frac{d}{dx} + 3x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^3 \frac{d^3}{dx^3}, \dots \quad (19.36)$$

შესაბამის (19.32) გაშლას აქვს ასეთი სახე:

$$F(xe^a) = F(x) + axF'(x) + \frac{a^2}{2!}(xF'(x) + x^2F''(x)) + \frac{a^3}{3!}(xF'(x) + 3x^2F''(x) + x^3F'''(x)) + \dots \quad (19.37)$$

შემდგომ დაგვეჭირდება თეორემა:

გარდაქმნათა ნებისმიერი ერთპარამეტრიანი ლოკალური ჯგუფი  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში, შესაბამისი, არაგადაგვარებული  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$  გარდაქმნით მიიყვანება გადატანათა ჯგუფამდე  $\bar{z}^n$  ღერძის მიმართ.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულ  $G$  ჯგუფის შესაბამისი ოპერატორია

$$X = \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}. \quad (19.38)$$

მაშინ, რადგან  $\xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i} = \xi^i(z) \frac{\partial \bar{z}^j}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ , ცხადია ცვლადთა გარდაქმნა  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$ , (3.38) ოპერატორს მიიყვანს

$$\bar{X} = X(\bar{z}^i) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \quad (19.39)$$

სახემდე.

ავირჩიოთ მოცემული ჯგუფის ნებისმიერი  $n - 1$  რაოდენობის ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი ინვარიანტი:

$$J_1, J_2, \dots, J_{n-1}, \quad (19.40)$$

ახალ საკოორდინატო  $\bar{z}^i$  ცვლადებად, ხოლო  $\bar{z}^n$  ცვლადი განვსაზღვროთ განტოლებიდან

$$X(\bar{z}^n) = 1. \quad (19.41)$$

ეს ახალი ცვლადები

$$\bar{z}^i = J_i(z), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \bar{z}^n = \bar{z}^n(z), \quad (19.42)$$

ფუნქციონალურად დამოუკიდებელნი არიან და გვაძლევენ შესაბამის გარდაქმნას. მართლაც, ამ ცვლადებში ჩვენი ჯგუფის (19.38) ოპერატორი მიიღებს

სახეს  $\bar{X} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$ , რაც, როგორც უკვე ვიცით, შეესაბამება გადატანათა ჯგუფს  $\bar{z}^n$  ღერძის გასწვრივ. რ.დ.გ.

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ  $G$  არის გაჭიმვის ჯგუფისათვის  $\mathbb{R}^3$  სივრცეში

$$x' = xe^a, \quad y' = ye^{2a}, \quad z' = ze^{-2a}$$

გვაქვს  $\xi = (x, 2y, -2z)$  მხები ვექტორი, ამიტომ მის შესაბამის (19.19) განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + 2y \frac{\partial F}{\partial y} - 2z \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (19.43)$$

მის ოპერატორს კი – ასეთი:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} - 2z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (19.44)$$

შესაბამისი  $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$  გარდაქმნა:  $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ , სადაც ახალ ცვლადებად ვირჩევთ ინვარიანტებს:  $u = \frac{y}{x^2}$ ,  $v = x^2 z$ . ხოლო მესამე ცვლადის საპოვნელად უნდა გამოვიყენოთ (19.41) განტოლება, რომელსაც ამ შემთხვევაში (19.44) ოპერატორის გათვალისწინებით, აქვს შემდეგი სახე:

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + 2y \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial w}{\partial z} = 1. \quad (19.45)$$

ცხადია, რომ კერძო ამონახსნის საპოვნელად, ხესაყრელია  $w$  ჩავთვალოთ მხოლოდ  $x$  ცვლადის ფუნქციად. მაშინ (19.45) განტოლებიდან გვექნება, რომ  $x \frac{\partial w}{\partial x} = 1$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ  $w = \ln x$ . ასე რომ, ცვლადთა გარდაქმნა

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = x^2 z, \quad w = \ln x. \quad (19.46)$$

გვაძლევს ახალ ცვლადებში გადატანათა ჯგუფს

$$u' = u, \quad v' = v, \quad w' = w + a. \quad (19.47)$$

## 19.5. ინვარიანტული განტოლებები

განვიხილოთ  $(n - s)$ -განზომილებიანი  $M \subset \mathbb{R}^n$  ზედაპირი, განსაზღვრული განტოლებათა სისტემით

$$F_1(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0, \quad s \leq n. \quad (19.48)$$

ჩავთვალოთ, რომ ზედაპირის ასეთი მოცემა არის რეგულარული ანუ  $\left\| \frac{\partial F_k}{\partial z^i} \right\|_M$  ( $k = 1, \dots, s; i = 1, \dots, n$ ) მატრიცის რანგი არის  $s$ .

**$M$  ზედაპირს ეწოდება ინვარიანტული  $G$  გარდაქმნის**

$$z' = f(z, a) \equiv z + a\xi(z) + o(z), \quad (19.49)$$

ჯგუფის მიმართ, თუ, ამ გარდაქმნის შედეგად ზედაპირის ყოველი წერტილი ისევ ამ ზედაპირის წერტილში გადადის.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ  $z$  არის (19.48) სისტემის ამონახსნი, მაშინ  $z'$ -ც აგრეთვე ამონახსნია ანუ

$$F_k(z') = 0, \quad k = 1, \dots, s. \quad (19.50)$$

ამის გამო ამბობენ, რომ (19.48) განტოლებათა სისტემა ინვარიანტულია  $G$  ჯგუფის მიმართ, ანუ, ეს სისტემა უშვებს  $G$  ჯგუფს. თუ  $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}$  გარდაქმნის  $G$  ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორია მაშინ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

**თეორემა:** (19.48) განტოლებათა სისტემა ინვარიანტულია გარდაქმნის  $G$  ჯგუფის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$[XF_k]_M = 0, \quad k = 1, \dots, s. \quad (19.51)$$

გარდაქმნის ჯგუფის ბაზისური ინვარიანტების საშუალებით შესაძლებელია ყველა ინვარიანტული ზედაპირი აღვწეროთ. მართლაც, მართებულია თეორემა:

**$G$  ჯგუფის ინვარიანტული ზედაპირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:**

$$\Phi_k(J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)) = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (19.52)$$

სადაც  $J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)$  წარმოადგენს ჯგუფის ინვარიანტების ბაზისს, თუ შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორი არ ხდება ნული ზედაპირის წერტილებისათვის.

### 19.6. დიფერენციალური განტოლებების დასაშვები ჯგუფი

დასაშვები ჯგუფი შეესაბამება დიფერენციალური განტოლების სიმეტრიის თვისებებს. ის გამოიყენება დიფერენციალური განტოლების სრულად ინტეგრირებისათვის, ან მისი ამონახსნების გარკვეული კლასების საპოვნელად და თვისობრივი გამოკვლევი-სათვის.

#### 19.6.1. სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ჯგუფი

განვიხილოთ სითბოგამტარობის განტოლება

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{19.53}$$

ცხადია, რომ ამ განტოლების სახე არ იცვლება დროისა და სივრცის ცვლადთა გადატანის გარდაქმნით:

$$t' = t + a; \quad x' = x + a. \tag{19.54}$$

ასევე, განტოლების წრფივობისა და ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე, არ იცვლება განტოლების სახე უფრო ზოგადი გარდაქმნისას

$$u' = u + a\varphi(t, x), \quad \text{ან} \quad u' = ue^a, \tag{19.55}$$

სადაც  $\varphi(t, x)$  ნებისმიერი ცნობილი ამონახსნია (19.53) განტოლებისათვის.

ყოველ ისეთ გარდაქმნას, რომელიც არ ცვლის საწყისი დიფერენციალური განტოლების სახეს, დიფერენციალური განტოლების დასაშვებ გარდაქმნას უწოდებენ.

მაშასადამე, ჩვენ მიერ მოყვანილი ოთხი ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ჯგუფი დასაშვებია სითბოგამტარობის განტოლებისათვის.



უფრო ნაკლებად ცხადია, რომ სითბოგამტარობის განტოლებას აქვს აგრეთვე, ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა შემდეგი ჯგუფი:

$$t' = t, \quad x' = x + 2at, \quad u' = ue^{-(ax+a^2t)}. \quad (19.54)$$

ვაჩვენოთ სითბოგამტარობის განტოლების ინვარიანტულობა (19.54) გარდაქმნების მიმართ. ამისათვის, გამოვიყენოთ წარმოებულის გარდაქმნის ფორმულები ცვლადთა შესაბამისი გარდაქმნის დროს:

$$u'_{t'} = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}, \quad (19.55)$$

$$u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)}, \quad (19.56)$$

$$u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}. \quad (19.57)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u'_{t'} - u'_{x'x'} = (u_t - u_{xx})e^{-(ax+a^2t)}, \quad (19.58)$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ (19.54) გარდაქმნის შედეგად, განტოლება (19.53) გადადის იმავე სახის

$$u'_{t'} - u'_{x'x'} = 0, \quad (19.59)$$

განტოლებაში. ამ ფაქტის გამოყენებითი მნიშვნელობა ის არის, რომ თუ გვაქვს სითბოგამტარობის განტოლების რაიმე ამონახსნი

$$u = \varphi(t, x), \quad (19.60)$$

მაშინ

$$u = e^{-(ax+a^2t)}\varphi(t, x + 2at) \quad (19.61)$$

ფუნქციაც იქნება მისი სხვა ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრავს ამონახსნთა ერთპარამეტრიან ჯგუფს. როგორც ვხედავთ, გვაქვს გარდაქმნათა ხუთი სხვადასხვა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი. თითოეული მათგანი შეიცავს ამონახსნების უსასრულო რაოდენობას.

ჩნდება კითხვა: მიღებული ხუთი გარდაქმნა, რომლებიც გვაძლევენ დასაშვებ ჯგუფებს, ყველა შესაძლო გარდაქმნაა, თუ არსებობს სხვა გარდაქმნებიც? თუ არსებობს, როგორ ვიპოვოთ ისინი და როგორ დავამტკიცოთ, რომ ეს უკვე ყველა დასაშვები ჯგუფია?

ამ საკითხის გადასაწყვეტად კონსტრუქციული მიდგომა იქნება თეორემის 19.1-ის გამოყენება და დიფერენციალურ განტოლებათა ალგებრული ინტერპრეტაცია, სადაც დიფერენციალურ განტოლებებს განიხილავენ, როგორც ზედაპირებს გაფართოებულ სივრცეში.

სანამ ამ ზოგად ინტერპრეტაციას განვიხილავთ, ჯერ (19.54) გარდაქმნის მაგალითზე განვიხილოთ მიდგომის ძირითადი არსი, რაც საშუალებას მოგვცემს გავიგოთ ზოგადი ინტერპრეტაცია.

(19.54) - (19.57) გარდაქმნები აღგენენ ერთპარამეტრიან ჯგუფს  $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$  ცვლადების მიმართ  $\mathbb{R}^6$  სივრცეში. სითბოგამტარობის განტოლებას ამ შემთხვევაში, აქვს შემდეგი სახე:

$F_1(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0, s \leq n$ , სადაც  $s = 1$  და განსაზღვრავს ხუთგანზომილებიან ზედაპირს  $M \subset \mathbb{R}^6$ , რომელიც განტოლებათა წრფივობის გამო, წარმოადგენს ხუთგანზომილებიან ჰიპერსიბრტყეს. ამ (19.54) გარდაქმნების მიმართ სითბოგამტარობის განტოლების ინვარიანტულობა განაპირობებს ჰიპერსიბრტყის ინვარიანტობას (19.54) - (19.57) გარდაქმნების მიმართ. რადგან ეს გარდაქმნები აღგენენ ჯგუფს, სრულდება ინვარიანტობის ინფინიტეზიმალური (19.51) კრიტერიუმი. ამოვწეროთ ეს კრიტერიუმი ამ შემთხვევაში. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ (19.54) გარდაქმნისათვის შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.62)$$

ხოლო გაფართოებული (19.54) - (19.57) გარდაქმნების მიმართ შესაბამისი ოპერატორი ჩაიწერება ასე:

$$X_2 = X - (xu_t + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} - (xu_x + u) \frac{\partial}{\partial u_x} - (xu_{xx} + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (19.63)$$

ამ ფორმულაში ინდექსი 2 იმას ნიშნავს, რომ (3.63) ოპერატორი მიიღება (19.62) ოპერატორისაგან მისი გაფართოებით მეორე რიგის წარმოებულებად ჩათვლით.  $X_2$  ოპერატორი მოქმედებს

$z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$  ცვლადების ფუნქციებზე ისე, რომ ამ ცვლადებს განიხილავს, როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს, ამიტომ გვექნება, რომ

$$X_2(u_t - u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} (u_t - u_{xx}) - (xu_{xx} + 2u_x) \frac{\partial}{\partial u_{xx}} (u_t - u_{xx}) = -xut + 2ux + xuxx + 2ux = -xut - ux$$

(19.64)

აქედან გამომდინარეობს, რომ ინვარიანტობის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_2(u_t - u_{xx}) = 0. \tag{19.65}$$

თუ ამ კრიტერიუმს გავყვებით უკან (19.65)-დან (19.62) ოპერატორისაკენ, მივიღებთ ყველა დასაშვებ ჯგუფს.

### 19.6.2. წერტილოვანი გარდაქმნები და გაფართოების ფორმულები

შემდგომ  $z$  ვექტორის კომპონენტებისათვის გამოვიყენებთ ასეთ აღნიშვნებს:

$$x = \{x^i\}, u = \{u^\alpha\}, u_1 = \{u_i^\alpha\}, u_2 = \{u_{ij}^\alpha\}, \dots \tag{19.66}$$

სადაც  $i = \overline{1, n}$  ხოლო  $\alpha = \overline{1, m}$ . ეს ცვლადები ალგებრულად დამოუკიდებელია ერთმანეთისაგან, თუმცა დაკავშირებული არიან დიფერენციალური ტოლობებით

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \dots \tag{19.67}$$

სადაც

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots \tag{19.68}$$

$x^i$  დამოუკიდებელი ცვლადებია;  $u^\alpha$  - დიფერენციალური, ხოლო,  $u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha, \dots$  - დიფერენციალური ცვლადების პირველი რიგის, მეორე რიგის და ა.შ. წარმოებულებია.

დიფერენციალურ  $f = f(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p)$  ფუნქციაში შემავალი ცვლადების უმაღლესი რიგის წარმოებულის  $p$  რიგს, ამ ფუნქციის რიგი ეწოდება.

ყველა დიფერენციალური ფუნქციის სიმრავლეს აღვნიშნავთ  $\mathcal{A}$  სიმბოლოთი. ვთქვათ,  $F \in \mathcal{A}$  არის  $p$  რიგის დიფერენციალური ფუნქცია. მაშინ განტოლება

$$F(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0, \quad (19.69)$$

გამოსახავს ზედაპირს შესაბამის ფაზურ სივრცეში. ამ განტოლებას განვიხილავთ მის ყველა დიფერენციალურ შედეგთან ერთად

$$D_i F = 0, \quad D_i D_j F = 0, \quad \dots \quad (19.70)$$

და ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს დიფერენციალური მრავალსახეობა  $M$ .

ანალოგიურად განიმარტება დიფერენციალური მრავალსახეობა, რომელიც აიწერება არა ერთი განტოლებით, არამედ, განტოლებათა სისტემით. დასაშვებია ჯგუფის საპოვნელად, ჩვენ ვივიწყებთ ამონახსნის ცნებას და მანიპულაციებს ვახდენთ შესაბამის მრავალსახეობაზე. ამიტომ ამ სისტემას შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც უბრალოდ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას შესაბამის ფაზურ სივრცეში, სადაც ის შეესაბამება რაღაც ზედაპირს და, მაშასადამე, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ინვარიანტობის კრიტერიუმი.

ვთქვათ,  $z = (x, u)$  და ჩავწეროთ გარდაქმნის ფორმულები

$$x'^i = f^i(x, u, a), \quad f^i(x, u, 0) = x^i, \quad (19.71)$$

$$u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a), \quad \varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha. \quad (19.72)$$

ამ ფორმულებს, წერტილოვან გარდაქმნებს უწოდებენ.

ვთქვათ, ამ გარდაქმნებისათვის მართებულია ჯგუფის (19.14) ფორმულები, მაშინ (19.71) და (19.72) გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი  $G$  ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს ექნება შემდეგი სახე:

$$X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (19.73)$$

სადაც

$$\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a} |_{a=0}, \quad \eta^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a} |_{a=0}. \quad (19.74)$$

წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულებია:

$$D_i = D_i(f^j) D_j'. \quad (19.75)$$

სადაც შტრიხიანი ცვლადებისათვის მართებულია გარდაქმნის (19.67) ფორმულები

$$u_i'^\alpha = D_i'(u'^\alpha), \dots \quad (19.76)$$

ახლა გავაწარმოთ (19.72) ტოლობა და გამოვიყენოთ (19.75), (19.76) ტოლობები:

$$D_i(\varphi^\alpha) = D_i(f^j) D_j'(u'^\alpha) = u_j'^\alpha D_i(f^j). \quad (19.77)$$

ასე რომ, (19.71), (19.72) წერტილოვანი გარდაქმნებისათვის წარმოებულები გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$u_j'^\alpha D_i(f^j) = D_i(\varphi^\alpha) \quad (19.78)$$

ან, უფრო დეტალურად,

$$\left( \frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta} \right) u_j'^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}. \quad (19.79)$$

აქედან ვპოულობთ  $u_j'^\alpha$  ცვლადებს  $(x, u, u_1)$  არგუმენტებისა და  $a$  პარამეტრის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობებისათვის. მეორე რიგის წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულებს მივიღებთ (19.78) ფორმულების გაწარმოებით.

შემდეგ, დაგვჭირდება არა გარდაქმნების, არამედ ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოება.

ჩავწეროთ ამ ოპერატორის გაფართოება პირველი რიგის წარმობებულებად

$$X_1 = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}, \quad (19.80)$$

სადაც  $\zeta_i^\alpha = \frac{\partial u_i'^\alpha}{\partial a} | a = 0$  დამატებითი კოორდინატებია, რომლებიც უნდა ვიპოვოთ. თუ გავაწარმოებთ (19.78) ფორმულებს პარამეტრის მიმართ,  $a = 0$  პირობებში, მივიღებთ:

$$D_i(\eta^\alpha) = \zeta_j^\alpha D_i(x^j) + u_j^\alpha D_i(\xi^j) = \zeta_j^\alpha \delta_i^j + u_j^\alpha D_i(\xi^j). \quad (19.81)$$

აქედან მივიღებთ ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოების ფორმულას პირველ წარმობებულად

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i(\xi^j). \quad (19.82)$$

როგორც ამ ფორმულებიდან ჩანს, ინფინიტეზიმალური ოპერატორის (19.80) გაფართოების საპოვნელად საჭიროა მხოლოდ საწყისი  $X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$  ოპერატორის  $\xi^i$  და  $\eta^\alpha$  კოორდინატების ცოდნა.

ანალოგიურად, თუ გვინდა ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმობებულად

$$X_2 = X_1 + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}, \quad (19.83)$$

სადაც  $\zeta_{ij}^\alpha = \frac{\partial u_{ij}'^\alpha}{\partial a} | a = 0$ , მაშინ უნდა გავიმეოროთ წინა პროცედურა უკვე (19.83) ფორმულისათვის და მივიღებთ, რომ

$$\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k). \quad (19.84)$$

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ  $X = 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}$  ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმობებულად, ზემოთ მოყვანილი ფორმულების საშუალებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები -  $t = x^1$ ,  $x = x^2$ . მაშინ ამ ოპერატორი-სათვის გვექნება  $X\xi^1 = 0$ ,  $\xi^2 = 2t$ ,  $\eta = -xu$ . ამიტომ (19.82) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\zeta_1 = D_t(-xu) - u_x D_t(2t) = -xu_t - 2u_x,$$

$$\zeta_2 = D_x(-xu) - u_x D_x(2t) = -u - xu_x,$$

ხოლო (19.84) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\zeta_{22} = D_x(-u - xu_x) - u_{xx} D_x(2t) = -2u_x - xu_{xx}.$$

შესაბამისად მივიღებთ გაფართოებულ ოპერატორს მეორე რიგის წარმოებულამდე, სახით

$$X_2 = X + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

### 19.6.3. განმსაზღვრელი განტოლებები

დავუბრუნდეთ  $M$  დიფერენცირებად მრავალსახეობას, რომელიც წარმოიქმნება  $F_i(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{p_i}) = 0$ ,  $i = \overline{1, s}$  დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან. რადგან ამ განტოლებათა სისტემაში გვხვდება წარმოებულები  $p$  რიგამდე ჩათვლით, საჭიროა, რომ  $x'^i = f^i(x, u, a)$ ,  $f^i(x, u, 0) = x'$ ,

$u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a)$ ,  $\varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha$  გარდაქმნები გავაფართოოთ  $u_j'^\alpha D_i(f^j) = D_i(\varphi^\alpha)$  ფორმულების  $p$ -ჯერ დიფერენცირების საშუალებით და  $D_i = D_i(f^j)D_j'$  ფორმულის გამოყენებით. თუ, საწყისი გარდაქმნები წარმოადგენს ერთპარამეტრიან  $G$  ჯგუფს, მაშინ გაფართოების შედეგად მიღებულ ჯგუფს აღვნიშნავთ  $G_p$  სიმბოლოთი. ეს ჯგუფი მოქმედებს  $(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p)$  ცვლადების სივრცეში. ამ  $p$ -ჯერ გაფართოებული ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_p = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \dots + \zeta_{i_1 \dots i_p}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_p}^\alpha}. \quad (19.85)$$

ეს ოპერატორი მიღებულია  $X = \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$  ოპერატორის  $p$ -ჯერ გაფართოებით. მაღალი რიგის გაფართოების ფორმულა მსგავსია  $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\zeta^k)$  ფორმულისა, რომელიც გვექონდა მეორე რიგის წარმოებულამდე გაფართოების შემთხვევაში. საზოგადოდ, გვექნება

$$\zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha = D_{i_k}(\zeta_{i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha) - u_{j_{i_1} \dots i_{k-1}}^\alpha D_{i_k}(\zeta^j). \quad (19.86)$$

ვიტყვი, რომ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის

$$F_i(x, u, u_1, u_2, \dots, u_{p_i}) = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad (19.87)$$

დასაშვებია გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი

$$x'^i = f^i(x, u, a), \quad f^i(x, u, 0) = x^i, \quad u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a),$$

$$\varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha, \quad (19.88)$$

თუ ამ გარდაქმნებით წარმოქმნილი  $M$  მრავალსახეობა ინვარიანტულია გაფართოებული  $G_p$  ჯგუფის მიმართ. სრულდება ინვარიანტულობის კრიტერიუმი, რომელიც გვიადვილებს გარდაქმნათა დასაშვები ჯგუფის გამოთვლას.

**თეორემა(კრიტერიუმი).** დიფერენციალურ განტოლებათა (19.87) სისტემა უშვებს  $G$  ჯგუფს,  $X$  ინფინიტეზიმალური ოპერატორით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მართებულია განტოლებები:

$$X_p F_k = 0, \quad k = \overline{1, s}, \quad (19.89)$$

მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის.

ეს თეორემა, ღის თეორემასთან ერთად, საშუალებას გვაძლევს მოცემული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის დასაშვები, გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფის პონის ამოცანა, დავიყვანოთ (3.89) განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე, რის გამოც ამ განტოლებებს განმსაზღვრელ განტოლებებს უწოდებენ.



## 19.7. ლის ალგებრა

კამილ ჟორდანის ნორვეგიელმა მოწაფემ სოფუს ლიმ შეძლო განეზოგადებინა გალუას ალგებრულ განტოლებათა თეორია, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. მანვე შეისწავლა იმ გარდაქმნათა უწყვეტი ჯგუფები, რომელთა მიმართაც ინვარიანტულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

სოფუს ლიმ შეძლო ლის ალგებრის ბაზისის პონის ალგორითმის ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის დასაშვები ჯგუფი და, მაშასადამე, ყველა ის გარდაქმნა, რომლის მიმართაც ინვარიანტულია მოცემული დიფერენციალური განტოლება. ლის თეორია ლოკალურია ანუ მასში შეისწავლება გარდაქმნები, რომლებიც ახლოსაა იგივე გარდაქმნასთან. დასაშვები ჯგუფის პონის პროცესი ვითარდება დიფერენცირებადი  $M$  მრავალსახეობის  $TM$  მხებ სივრცეში და მხოლოდ ბოლო ეტაპზე ხდება დაშვება თვით მრავალსახეობაში, რომელსაც ქმნიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაში შემავალი ყველა ცვლადისა და მათი წარმოებულების ერთობლიობა, რომელიც გაფართოებულია მასში შემავალი უმაღლესი წარმოებულის რიგამდე ჩათვლით.

გამოთვლების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორები ქმნიან ლის ალგებრას ანუ სიმრავლეს, რომელშიც გვაქვს წრფივი ვექტორული სივრცის სტრუქტურას ერთი დამატებითი ოპერაციით, რომელსაც კომუტირებას უწოდებენ.

$A$  და  $B$  ოპერატორების კომუტირებას უწოდებენ ანტისიმეტრიულ  $[A, B] = -[B, A]$  ორადწრფივ ოპერაციას, რომლისთვისაც მართებულია იაკობის ტოლობა

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0, \quad (19.90)$$

კერძოდ,  $A$  და  $B$  ოპერატორების კომუტატორად შეგვიძლია განვიხილოთ მათი კომბინაცია:

$$[A, B] = AB - BA, \quad (19.91)$$

სადაც ოპერატორების ნამრავლი ნიშნავს მათ მიმდევრობით შესრულებას.

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ მართებულია (19.90) იაკობის ტოლობა. მართლაც,

$$\begin{aligned}
 [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + \\
 [C, AB - BA] &= [A, BC] - [A, CB] + [B, CA] - [B, AC] + [C, AB] - [C, BA] = \\
 ABC - BCA - ACB + CBA + BCA - CAB - BCA + ACB + CAB - ABC - \\
 CBA + BAC &= 0. \text{ რ.დ.გ.}
 \end{aligned}$$

### 19.7.1. გაფართოების კოორდინატული გადმოცემა

ვთქვათ, გვაქვს საწყისი  $q$  რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა  $m$  დამოუკიდებელი ცვლადით და  $k$  უცნობი ფუნქციით. ჩვენი ცვლადების  $M$  მრავალსახეობა განისაზღვრება  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$  კოორდინატების სივრცით, სადაც  $x_i, i = \overline{1, m}$  დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო  $u_j, j = \overline{1, k}$  - საძებნი ფუნქციები. რომელთათვისაც მართებულია განტოლებათა სისტემა  $L^q(x, u) = 0$ . ვეძებთ ისეთი გარდაქმნების ჯგუფს, რომლის მიმართაც ეს სისტემა ინვარიანტული იქნება ანუ სახეს არ იცვლის.

საძებნი გარდაქმნები ცვლადთა  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$  სივრცეში წარმოიქმნება შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორებით

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k \eta_j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad (19.92)$$

სადაც  $\xi_i(x, u)$  და  $\eta_j(x, u)$  (ჯერ-ჯერობით) უცნობი ფუნქციებია.

### 19.7.2. პირველი გაფართოება

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$p_i^j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (19.93)$$

ლის თეორიაში პირველი გაფართოების სივრცე ეწოდება

$$(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_j; p_i^j), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, k}, \quad (19.94)$$

ცვლადების სივრცეს.

ამ გაფართოების ცვლადების სივრცეში (19.92) ინფინიტეზიმალური ოპერატორის შესაბამის გარდაქმნების ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_1 = X + \sum_{i,j} \zeta_i^j(x, u, p) \frac{\partial}{\partial p_i^j}, \quad (19.95)$$

სადაც დამატებითი  $\zeta_i^j$  კოორდინატები განისაზღვრება გამოსახულებებიდან

$$\zeta_i^j = D_i(\eta_j) - \sum_{s,j} p_s^j D_i(\xi_s), \quad (19.96)$$

ხოლო  $x_i$  ცვლადით სრული წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულაა:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_t p_i^t \frac{\partial}{\partial u^t}. \quad (19.97)$$

### 19.7.3. მეორე გაფართოება

თუ  $L^q(x, u) = 0$  განტოლებაში შემავალი ფუნქციების წარმოებულის უმაღლესი  $q$  რიგი მეტია ერთზე, მაშინ ცვლადების სივრცე  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$ , შესაბამისად, უნდა გააფართოოთ  $q$ -ჯერ, რათა შევავსოთ ის საძებნი ფუნქციების წარმოებულებით  $q$  რიგამდე ჩათვლით.

ლის თეორიაში მეორე გაფართოების სივრცედ ითვლება  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l)$  ცვლადების სივრცე, სადაც

$$r_{si}^l = \frac{\partial^2 u^l}{\partial x_s \partial x_i}, \quad s, i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, k}. \quad (19.98)$$

მეორე გაფართოების  $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l)$  ცვლადების სივრცეში, შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X_2 = X_1 + \sum_{i,s} \sigma_{is}^l(x, u, p, r) \frac{\partial}{\partial r_{is}^l}, \quad (19.99)$$

ხოლო დამატებითი  $\sigma_{is}^l$  კოორდინატები განისაზღვრება განტოლებებით:

$$\sigma_{is}^l = \tilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l \tilde{D}_i(\xi_s), \quad (19.100)$$

სადაც

$$\tilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_q p_i^q \frac{\partial}{\partial u^q} + \sum_{i,s,l} r_{is}^l \frac{\partial}{\partial p_s^l}, \quad (19.101)$$

სრული დიფერენცირების ოპერატორია. ცხადია, რომ

$$\tilde{D}_i(\xi_s) \equiv D_i(\xi_s). \quad (19.102)$$

ამიტომ, ფორმულა (19.100) მიიღებს საბოლოოდ ასეთ სახეს:

$$\sigma_{is}^l = \tilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l D_i(\xi_s). \quad (19.103)$$

### 19.8. ლის მეთოდის გამოყენების მაგალითები

განვიხილოთ უმარტივესი მეორე რიგის განტოლება

$$u'' = 0. \quad (19.104)$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს  $(x, u)$  ცვლადთა სივრცე. შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (19.105)$$

**პირველი გაფართოება:** შემოგვაქვს აღნიშვნა პირველი რიგის წარმოებულისათვის

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (19.106)$$

პირველი გაფართოების ცვლადთა სივრცეა

$$(x, u, p). \quad (19.107)$$

$x$  ცვლადის მიმართ სრული წარმოებულის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}. \quad (19.108)$$

პირველი გაფართოების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X_1 = X + \zeta(x, u, p) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (19.109)$$

სადაც დამატებითი  $\zeta$  კოორდინატის საპონენელად გვაქვს ფორმულა

$$\zeta = D(\eta) - pD(\xi) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \frac{\partial \eta}{\partial u} - p \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u}. \quad (19.110)$$

რადგან  $\xi(x, u)$  და  $\eta(x, u)$  ცვლადები არ არის დამოკიდებული  $p$  ცვლადზე, (19.110) განტოლება  $p$  ცვლადის მიმართ მხოლოდ კვადრატულ ფუნქციას წარმოადგენს.

**მეორე გაფართოება:** შემოგვაქვს დამატებითი აღნიშვნა მეორე რიგის წარმოებულისათვის

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (19.111)$$

მეორე გაფართოების ცვლადთა სივრცეა

$$(x, u, p, r). \quad (19.112)$$

$x$  ცვლადის მიმართ სრული წარმოებულის ფორმულას, მეორე გაფართოების შემდეგ ექნება შემდეგი სახე:

$$\tilde{D} = D + r \frac{\partial}{\partial p}. \quad (19.113)$$

მეორე გაფართოების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X_2 = X_1 + \sigma \frac{\partial}{\partial r}, \quad (19.114)$$

სადაც დამატებითი  $\sigma$  კოორდინატის საპონენელად გვაქვს ფორმულა

$$\sigma = \tilde{D}(\zeta) - rD(\xi) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} + r \frac{\partial}{\partial p} \right) \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} \right] - r \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + p \frac{\partial \xi}{\partial u} \right). \quad (19.115)$$

ახლა უნდა ვიმოქმედოთ  $X_2$  ოპერატორით (19.104) განტოლების მარცხენა მხარეზე

$$X_2 r = 0 = \sigma_{r=0}. \quad (19.116)$$

რადგან  $X_1$  ოპერატორი არ შეიცავს წარმოებულს  $r$  ცვლადით, (19.116) ტოლობიდან გამომდინარე გვექნება

$$X_1 + \sigma \frac{\partial r}{\partial r} = \sigma_{r=0} = 0. \quad (19.117)$$

ანუ (19.115) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$[\tilde{D}(\zeta) - rD(\xi)]_{r=0} = 0 \quad (19.118)$$

ანუ

$$\tilde{D}(\zeta) = 0. \quad (19.119)$$

$$[\tilde{D}(\zeta)]_{r=0} = \left[ D + r \frac{\partial}{\partial p} \right]_{r=0} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.120)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} \right) \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x} + p \left( \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - p^2 \frac{\partial \xi}{\partial u} \right] = 0, \quad (19.121)$$

ანუ გამარტივებით მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} + p \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) + p^2 \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} \right) - p^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} - p^3 \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0. \quad (19.122)$$

ამ განტოლებაში  $\xi$  და  $\eta$  ცვლადები დამოკიდებულია მხოლოდ  $(x, u)$  ცვლადებზე, ამიტომ (19.122) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს იგივერად ნულის ტოლ კუბურ მრავალწევრს  $p$  ცვლადის მიმართ. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

$$p^3 \text{ ხარისხის კოეფიციენტი: } \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0; \quad (19.123)$$

$$p^2 \text{ ხარისხის კოეფიციენტი: } \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} = 0; \quad (19.124)$$

$$p^1 \quad \text{ხარისხის კოეფიციენტი: } 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0; \quad (19.125)$$

$$p^0 \quad \text{ხარისხის კოეფიციენტი: } \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (19.126)$$

(19.123) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\xi = A(x)u + B(x). \quad (19.127)$$

(19.126) განტოლებიდან მივირებთ, რომ

$$\eta = C(u)x + D(u). \quad (19.128)$$

(19.124) განტოლებიდან გვექნება

$$C''(u)x + D''(u) = 2A'(x). \quad (19.129)$$

(19.125) განტოლებიდან მივიღებთ

$$A'(x)u + B''(x) = 2C'(u). \quad (19.130)$$

გავაწარმოთ (19.129)  $u$  ცვლადით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$C'''(u)x + D'''(u) = 0. \quad (19.131)$$

გავაწარმოთ (19.130)  $x$  ცვლადით, მაშინ მივიღებთ

$$A'''(x)u + B'''(x) = 0. \quad (19.132)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$C'''(u) = 0, \quad D'''(u) = 0, \quad A'''(x) = 0, \quad B'''(x) = 0. \quad (19.133)$$

შესაბამისად, გვექნება, რომ

$$C(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2, \quad (19.134)$$

$$D(u) = d_0 + d_1 u + d_2 u^2, \quad (19.135)$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad (19.136)$$

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2. \quad (19.137)$$

თუ გავითვალისწინებთ (19.127)-(19.137) განტოლებებს, მივიღებთ, რომ

$$A(x) = a_0 + a_1x, \quad (19.138)$$

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2, \quad (19.139)$$

$$C(u) = c_0 + b_2u, \quad (19.140)$$

$$D(u) = d_0 + d_1u + a_1u^2, \quad (19.141)$$

სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერი მუდმივებია. შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.142)$$

$$\xi = (a_0 + a_1x)u + b_0 + b_1x + b_2x^2, \quad (19.143)$$

$$\eta = (c_0 + b_2u)x + d_0 + d_1u + a_1u^2. \quad (19.144)$$

თუ (19.142)-(19.144) ფორმულებში დავუშვებთ, რომ ერთი კოეფიციენტი უდრის 1, ხოლო დანარჩენები – 0-ს, მივიღებთ ლის ალგებრის ბაზისურ ოპერატორებს, რომელთაც უშვებს განტოლება (19.104). მართლაც, გვექნება, რომ

$$L_1 = xu \frac{\partial}{\partial x} + u^2 \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.145)$$

$$L_2 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + ux \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.146)$$

$$L_3 = u \frac{\partial}{\partial x}, \quad (19.147)$$

$$L_4 = x \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.148)$$

$$L_5 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad (19.149)$$

$$L_6 = u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.150)$$

$$L_7 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (19.151)$$

$$L_8 = \frac{\partial}{\partial u}. \quad (19.152)$$

ოპერატორების სიმრავლე, რომლისთვისაც (19.145)-(19.152) ბაზისია, წარმოადგენს წრფივ ვექტორულ სივრცეს. კომუტირების



ოპერაციის მიმართ ეს სივრცე ჩაკეტილია ანუ წარმოადგენს ლის ალგებრას.

ინფინიტეზიმალურ ოპერატორებს, საზოგადოდ, აქვთ ასეთი სახე:

$$X = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial u}. \quad (19.153)$$

თუ, გვაქვს გარდაქმნის კანონიკური ფორმულებით მოცემული ჯგუფი

$$x' = f(x, u, \alpha), \quad (19.154)$$

$$u' = \varphi(x, u, \beta). \quad (19.155)$$

მაშინ

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad B = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right|_{\beta=0}. \quad (19.156)$$

### 19.8.1. ბიურგერსის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა

განვიხილოთ ბიურგერსის განტოლება

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \quad (19.157)$$

თუ ცვლადებს გარდაექმნით სოპფი-კოულის ფორმულით

$$u = -2\delta \frac{\partial(\ln v)}{\partial x}, \quad (19.158)$$

მაშინ, ბიურგერსის განტოლება გარდაიქმნება სითბოგამტარობის განტოლებად

$$v_t = \delta v_{xx}. \quad (19.159)$$

ბიურგერსის განტოლების შესაბამისი ლის ალგებრის ბაზისია

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (19.160)$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (19.161)$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.162)$$

$$L_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.163)$$

$$L_5 = tx \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (x - tu) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (19.164)$$

ბიურგერსის განტოლების ლის ალგებრა ხუთგანზომილებიანი მრავალსახეობაა კომუტირების ოპერაციით. ხოლო სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა ექვსგანზომილებიანი მრავალსახეობაა. რაც იმას ნიშნავს, რომ ლის ეს ორი ალგებრა არ არის იზომორფული.

### 19.8.2. კორტევევა-დე-ფრიზის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა

განვიხილოთ კორტევევა-დე-ფრიზის განტოლება

$$u_t + uu_x = u_{xxx}. \quad (19.165)$$

ამ განტოლებისათვის არ არსებობს ხოპფი-კოულის გარდაქმნის ანალოგიური გარდაქმნა, რომელიც მას გარდაქმნიდა წრფივ სითბოგამტარობის განტოლებად.

კორტევევა-დე ფრიზის განტოლებით დასაშვები ლის ალგებრის ბაზისი ოთხგანზომილებიანია და შედგება შემდეგი ოპერატორებისაგან

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (19.166)$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (19.167)$$

$$L_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 3t \frac{\partial}{\partial t} - 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (19.168)$$

$$L_4 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}. \quad (19.169)$$

## ამოცანები და სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ რომ გარდაქმნა, რომელიც მოიცემა ფორმულით  $x' = x + a + a^2$ , ქმნის ჯგუფს. იპოვეთ შესაბამისი  $\varphi(a, b)$  და  $a^{-1}$ ;

2. გამოიკვლიეთ, ადგენენ თუ არა ჯგუფს  $x' = x + a$ ,  $y' = y + a^2$  გარდაქმნები  $(x, y)$  სიბრტყეზე;

3. ამოხსენით ლის განტოლებები  $\frac{dx'}{da} = y'$ ,  $\frac{dy'}{da} = -x'$  ბრუნვის გარდაქმნისთვის და იპოვეთ გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

4. იპოვეთ ლორენცის გარდაქმნების ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

5. იპოვეთ გალილეის გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

6. იპოვეთ ერთგვაროვანი გაჭიმვების გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

7. იპოვეთ  $kx + ly = 0$  წრფის პარალელურ გადატანათა გარდაქმნის ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი და ინვარიანტი;

8. იპოვეთ არაერთგვაროვანი გაჭიმვების გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

9. აჩვენეთ, რომ  $t' = t$ ,  $x' = x + 2at$ ,  $u' = ue^{-(ax+a^2t)}$ ,

$$u'_{t'} = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)},$$

$$u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)},$$

$u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}$  გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს, ექვსგანზომილებიან  $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$  ცვლადთა სივრცეში და იპოვეთ შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

10. შეამოწმეთ, რომ თუ  $u = \varphi(t, x)$  ფუნქცია არის სითბოგამტარობის განტოლების რაიმე ცნობილი ამონახსნი, მაშინ  $u = e^{-(ax+a^2t)}\varphi(t, x + 2at)$  ფუნქციაც აკმაყოფილებს სითბოგამტარობის  $u_t - u_{xx} = 0$  განტოლებას.

11. იპოვეთ,  $X_1 = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$  ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით  $X_2 = X_1 + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}$  სახით და აჩვენეთ, რომ  $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\zeta^k)$ .

12. გამოთვალეთ  $u'' + u = 0$  განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

13. გამოთვალეთ  $u_t + uu_x = u_{xx}$  ბიურგერსის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

14. გამოთვალეთ  $u_t + uu_x = u_{xxx}$  კორტევეგა-დე-ფრიზის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

### ლიტერატურა

1. Lie S. Vorleaugen uber continuierliche Gruppen, Leipzig : Teubner, 1893
2. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1962
3. Дородницын В.А., Еленин Г.Г. Симметрия в решениях уравнений математической физики, Москва, 1988
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике, Москва, 1983
5. Чеботарёв Н.Г. Теория групп Ли, Москва, 1940
6. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, пер. с англ., Мир, Москва, 1989

## XX თავი. დიფერენცირებადი მრავალსახეობის ლოკალური გეომეტრიის ელემენტები

დიფერენციალური გეომეტრიის ცოდნის გარეშე, შეუძლებელია ისეთი რთული ცოცხალი სისტემის შესწავლა, როგორცაა სამყარო, თავისი გეომეტრიული ფორმების მრავალფეროვნებითა და სწრაფად ცვალებადი, დინამიკური სტრუქტურით.

დიფერენციალური გეომეტრიის ძირითადი ინსტრუმენტია დიფერენცირებადი მრავალსახეობა. მრავალსახეობა შეიძლება განისაზღვროს, როგორც ლოკალურად ევკლიდური სივრცე.

გავიხსენოთ, რომ  $n$ -განზომილებიანი ევკლიდური  $\mathbb{R}^n$  სივრცე არის ყველა შესაძლო  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  წერტილის სიმრავლე, სადაც თითოეული  $x^i \in \mathbb{R}$  კოორდინატი ნამდვილი რიცხვია. ამ სიმრავლეში ჩვეულებისამებრ, განსაზღვრულია წერტილის ჩაკეტილი და ღია მიდამოების ცნებები.  $M$  მრავალსახეობა ლოკალურად ემთხვევა ევკლიდურ სივრცეს იმ აზრით, რომ მრავალსახეობა გადაფარულია ღია  $U_\alpha$  სიმრავლეებით (ანუ  $M = \cup_\alpha U_\alpha$ ) და თითოეულ ღია  $U_\alpha$  სიმრავლესთან დაკავშირებულია შესაბამისი ურთიერთცალსახა  $\varphi_\alpha$  ასახვა, რომელიც  $U_\alpha$  მიდამოს ყოველ  $p \in U_\alpha$  წერტილს გადაიყვანს  $\mathbb{R}^n$  სივრცის შესაბამისი ღია სიმრავლის  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  წერტილში. ვთქვათ, მრავალსახეობის ორი  $U_\alpha$  და  $V_\alpha$  მიდამო იკვეთება ისე, რომ  $U_\alpha \cap V_\alpha \neq \emptyset$  ხოლო,  $\varphi_\alpha; \psi_\alpha$  ის შესაბამისი ასახვებია, რომლებიც ამ მიდამოს წერტილებს ასახავს  $\mathbb{R}^n$  სივრცის შესაბამისი ღია სიმრავლეებზე, მაშინ  $\varphi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}$  ასახვა  $\psi_\alpha(p)$  წერტილს ( $p \in U_\alpha \cap V_\alpha$ ), რომლის კოორდინატებია  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  გადაიყვანს  $\varphi_\alpha(p)$  წერტილში, რომლის კოორდინატებია რაღაც  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ . განსაზღვრის თანახმად,  $M$  იქნება დიფერენცირებადი მრავალსახეობა, თუ  $x^i$  კოორდინატები გამოისახება როგორც  $\bar{x}^i$  კოორდინატების გლუვი ფუნქციები (ანუ ეს ფუნქციები უწყვეტია თავის ყველა რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად).

ორი მრავალსახეობის პირდაპირი  $M \times N$  ნამრავლი არის დიფერენცირებადი მრავალსახეობის სტრუქტურის მქონე, ისეთი დალაგებული  $(p, q)$  წყვილების სიმრავლე, სადაც  $p \in M$  და  $q \in N$ , ანუ, თუ  $U_\alpha$  და  $V_\beta$ , შესაბამისად,  $M$  და  $N$  მრავალსახეობების მიდამოებია, ხოლო  $\varphi_\alpha$  და  $\psi_\beta$  ამ მიდამოებთან დაკავშირებული ასახვები კოორდინატებით:

$$\varphi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \text{ და } \psi_\beta = (y^1, y^2, \dots, y^m), \text{ მაშინ ასახვა}$$

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^m) \text{ განსაზღვრავს } (m+n)\text{-განზომილებიან მრავალსახეობას.}$$

განვიხილოთ  $f: M \mapsto \mathbb{R}^1$  ასახვის შესაბამისი  $f$  ფუნქცია. დავეუშვათ, რომ ასახვათა კომპოზიცია  $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  რომელიც  $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  წერტილს შეუსაბამებს  $\mathbb{R}^1$  სიმრავლის წერტილს არის  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  კოორდინატების გლუვი ფუნქცია.  $M$  მრავალსახეობაზე განვსაზღვროთ  $\lambda$  გლუვი მრუდი შემდეგი ასახვით

$$\lambda: I(a < t < b) \in \mathbb{R}^1 \rightarrow \lambda(t) = p \in M, \quad (20.1)$$

სადაც  $(\varphi_\alpha \circ \lambda)(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)]$  და  $x^i(t)$  გლუვი ფუნქციებია.

$M$  მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $f \circ \lambda$  ფუნქცია  $\lambda$  მრუდზე, ხოლო  $\varphi_\alpha \circ \lambda$  ასახვა საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ფუნქციები

$$f(\lambda(t)) = f(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)), \quad (20.2)$$

სადაც  $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$  არის  $p = \lambda(t)$  წერტილის კოორდინატები  $\varphi_\alpha$  ასახვისას.

### 20.1. მხები ვექტორი (კონტრავარიანტული ვექტორი)

ზემოთ განხილულ  $\lambda(t)$  მრუდზე განსაზღვრული  $f(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$  ფუნქციისათვის განვიხილოთ წარმოებული

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\lambda(t)} \Big|_{t=t_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(\lambda(t_0 + \varepsilon)) - f(\lambda(t_0))] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial t} \Big|_{t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{\lambda(t_0)} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{t_0}, \quad (20.3)$$

სადაც ბოლო ტოლობაში იგულისხმება აინშტაინის შეთანხმება შეჯამებადობის შესახებ.

ცხადია, რომ თუ განვიხილავთ  $M$  მრავალსახეობის  $p$  წერტილზე გამავალ სხვადასხვა  $\lambda$  მრუდს, შეგვიძლია ავაგოთ  $p$  წერტილში წრფივი ვექტორული სივრცე, რომელიც შედგება კერძო წამოებულების ყველა შესაძლო წრფივი კომბინაციისაგან

$$\mathbf{X} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (20.4)$$

სადაც  $X^j$  არის  $n$  ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი ერთობლიობა. ეს მხები ვექტორები წარმოიქმნება იმ  $\lambda$  მრუდების განხილვისას, რომლებიც მოიცემიან ფუნქციებით

$$x^i(t) = x^i(p) + X^i t, \quad i = \overline{1, n}, \quad (20.5)$$

სადაც  $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ .

მხები ვექტორები  $\mathbf{p}$  წერტილში ქმნიან წრფივ ვექტორულ სივრცეს  $\mathbb{R}^1$  სიმრავლის ზემოთ, რომელიც მოჭიმულია კოორდინატულ წარმოებულებზე ანუ  $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$  ვექტორები ქმნიან ამ ვექტორული სივრცის ბაზისს.

მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(\alpha \mathbf{X} + \beta \mathbf{Y})f = \alpha(\mathbf{X}f) + \beta(\mathbf{Y}f), \quad (20.6)$$

ნებისმიერი  $\mathbf{X}$  და  $\mathbf{Y}$  ვექტორებისა,  $\alpha, \beta$  რიცხვებისა და ნებისმიერი  $f$  ფუნქციისათვის. ამასთან,  $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$  ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.

ადვილი მისახვედრია, რომ ნებისმიერ  $f$  გლუვ ფუნქციაზე  $\mathbf{X} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  ოპერატორის მოქმედება გვაძლევს ამ ფუნქციის მოცემული ვექტორის მიმართულებით წარმოებულს

$$Xf = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j} \quad (20.7)$$

ამ ფორმულაში ბოლო ინდექსის წინ მძიმე აღნიშნავს წარმოებულს შესაბამისი კოორდინატის მიხედვით. ეს წარმოებული აკმაყოფილებს ლაიბნიცის წესსაც

$$X(fg)|_{\lambda(t)} = (fXg + gXf)|_{\lambda(t)}. \quad (20.8)$$

$n$ -განზომილებიანი  $M$  მრავალსახეობის  $p$  წერტილში არსებული მხები ვექტორების სივრცე (სხვანაირად, კონტრავარიანტული ვექტორების სივრცე) წარმოადგენს  $n$ -განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს. ეს სივრცე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც  $p$  წერტილში არსებული ყველა შესაძლო მიმართულების სიმრავლე. მას  $p$  წერტილის მხებ სივრცეს უწოდებენ. მისთვის მიღებულია აღნიშვნა  $T_p(M)$  ან, უბრალოდ  $T_p$  როგორც ადრე გვქონდა.

ლოკალური კოორდინატული ბაზისის გარდა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი სხვა  $n$  წრფივად დამოუკიდებელი  $e_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$  ვექტორების სისტემა. მაშასადამე, უნდა არსებობდეს წრფივი გარდაქმნების შესაბამისი ფორმულებიც

$$e_\alpha = \Phi_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (20.9)$$

ამ გარდაქმნის დეტერმინანტი არ შეიძლება იყოს გადაგვარებული. მაშასადამე, უნდა არსებობდეს მისი შებრუნებული მატრიცაც, რაც საშუალებას მოგვცემს (20.9) ფორმულებიდან ამოვხსნათ  $\frac{\partial}{\partial x^k}$  ცვლადები

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \Phi_k^j e_j. \quad (20.10)$$

გადასვლის  $\Phi$  მატრიცა აკმაყოფილებს ფორმულებს:

$$\Phi_a^k \Phi_j^a = \delta_j^k, \quad \Phi_a^k \Phi_k^b = \delta_a^b. \quad (20.11)$$

თუ მოცემულია რაიმე  $e_j$  ბაზისი, მაშინ  $p$  წერტილში ნებისმიერი  $X$  მხები ვექტორი ამ ბაზისში შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ფორმულით



$$X = X^j e_j. \quad (20.12)$$

სადაც  $X^j$  სიდიდეებს ეწოდებათ  $X$  ვექტორის კომპონენტები ( $e_j$ ) ბაზისში.

## 20.2. ფორმა-1 (კოვექტორი ანუ კოვარიანტული ვექტორი)

მრავალსახეობის  $p$  წერტილში ფორმა-1, ანუ  $\omega$  (პირველი რიგის დიფერენციალური ფორმა) არის მხევი  $T_p$  სივრცის წრფივი ასახვა ნამდვილ რიცხვთა  $\mathbb{R}^1$  სიმრავლეზე

$$\omega: T_p \rightarrow \mathbb{R}^1. \quad (20.13)$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მრავალსახეობის  $p$  წერტილში ნებისმიერ  $X$  მხევი ვექტორს ფორმა-1 შეუსაბამებს ცალსახად განსაზღვრულ ნამდვილ  $\omega(X)$  რიცხვს, რომელიც აგრეთვე, შეიძლება ჩაიწეროს ფორმით

$$\omega(X) = \langle \omega, X \rangle. \quad (20.14)$$

ასახვის წრფივობა გამოისახება თანაფარდობით

$$\langle \omega, \alpha X + \beta Y \rangle = \alpha \langle \omega, X \rangle + \beta \langle \omega, Y \rangle, \quad (20.15)$$

სადაც  $X, Y$  ნებისმიერი მხევი ვექტორებია, ხოლო  $\alpha, \beta$  - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები.

ფორმა-1-ს ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება(20.16) და ფორმა-1-ების ჯამი(20.17) განისაზღვრება ტოლობებით

$$(\alpha \omega)(X) = \alpha \langle \omega, X \rangle. \quad (20.16)$$

$$(\omega + \pi)(X) = \langle \omega, X \rangle + \langle \pi, X \rangle. \quad (20.17)$$

თუ, ეს წესები შესრულებულია, მაშინ ფორმა-1-ები ქმნიან ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც აღნიშნავენ ზოგჯერ  $T_p^*$  სიმბოლოთი. ეს ვექტორული სივრცე  $p$  წერტილში განსაზღვრული მხევი სივრცის დუალური (შეუღლებული) სივრცეა. ამიტომ ფორმა-1-ებს კოვექტორებს, ან კოვარიანტულ ვექტორებს უწოდებენ.

ავიღოთ  $T_p^*$  (ფორმა-1-ების) ვექტორული სივრცის  $(e^i)$  ელემენტი და ვიმოქმედოთ  $p$  წერტილში რაიმე  $X$  მხე ვექტორზე, რომლისთვისაც გვაქვს  $X = X^i e_i$  წარმოდგენა. მაშინ ცხადია, რომ

$$e^i(X) = \langle e^i, X^j e_j \rangle = X^i \quad i = \overline{1, n}. \quad (20.18)$$

ამ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$e^i(e_j) = \langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i. \quad (20.19)$$

ნებისმიერი ფორმა-1  $\omega$  შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც  $(e^i)$  საბაზისო ფორმა-1-ების წრფივი კომბინაცია.

მართლაც,

$$\langle \omega, X \rangle = \langle \omega, X^j e_j \rangle = X^j \langle \omega, e_j \rangle. \quad (20.20)$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_i = \langle \omega, e_i \rangle = \omega(e_i), \quad (20.21)$$

იმ რიცხვებისათვის, რომლებსაც შეუსაბამებს ფორმა-1  $\omega$ ,  $p$  წერტილის  $T_p$  მხე სივრცის საბაზისო  $(e_i)$  ვექტორებს, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$\langle \omega, X \rangle = \omega_i X^i = \omega_i \langle e^i, X^j e_j \rangle = \langle \omega_i e^i, X \rangle. \quad (20.22)$$

რადგან ეს განტოლება ჭეშმარიტია ნებისმიერი  $X \in T_p$  მხე ვექტორისათვის, ცხადია, რომ (20.22) განტოლებიდან გამომდინარეობს ფორმულა

$$\omega = \omega_i e^i. \quad \text{რ.დ.გ.} \quad (20.23)$$

$(e_i)$  და  $(e^i)$  ( $T_p$  და  $T_p^*$  სივრცეების შესაბამისი) ერთმანეთის დუალური ბაზისებია.

$(e_i)$  და  $(e^i)$  დუალური ბაზისებისათვის ავირჩიოთ სხვა ბაზისები, რომლებიც საწყის ბაზისებთან დაკავშირებული იქნება არაგადაგვარებული გარდაქმნებით

$$e_{i'} = \Phi_{i'}^j e_j; \quad e^{j'} = \Phi_j^{j'} e^j, \quad (20.24)$$

მაშინ ახალი ბაზისებისაგან დუალურობის მოთხოვნა გვაძლევს ტოლობებს

$$\delta_{i'}^{j'} = \langle e^{j'}, e_{i'} \rangle = \Phi_j^{j'} \Phi_{i'}^k \langle e^j, e_k \rangle = \Phi_j^{j'} \Phi_{i'}^k \delta_k^j = \Phi_j^{j'} \Phi_{i'}^j. \quad (20.25)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს მატრიცები ურთიერთშებრუნებული უნდა იყოს. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ერთი  $(x^i)$  ლოკალურ კოორდინატთა სისტემის სხვა  $(x^{i'})$  ლოკალურ კოორდინატთა სისტემით შეცვლისას, შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცები მოიცემა ფორმულებით

$$\Phi_j^{j'} = \left( \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right)_p, \quad \Phi_{i'}^{i} = \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p. \quad (20.26)$$

მრავლსახეობაზე განსაზღვრული  $f$  ფუნქცია განსაზღვრავს ფორმა-1-ის  $df$ , რომელიც ნებისმიერ  $\mathbf{X} \in T_p$  ვექტორს შეუსაბამებს რიცხვს შემდეგი წესით:

$$df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}f. \quad (20.27)$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში

$$\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (20.28)$$

ამიტომ, განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$\langle df, \mathbf{X} \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i f_{,i}. \quad (20.29)$$

კერძო შემთხვევაში

$$\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_i^j. \quad (20.30)$$

ასე, რომ ფორმა-1  $(dx^j)$  ადგენს ლოკალურ კოორდინატთა ბაზისს კოვარიანტული ვექტორების სივრცეში, რომელიც დუალურია მხებ ვექტორთა სივრცის  $\partial_i = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$  საკოორდინატო ბაზისისა.  $(\partial_i)$  და  $\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$  ბაზისებს მხები და დუალური სივრცის კანონიკურ ბაზისებს უწოდებენ.

თუ, მოცემულია რომ

$$df = \alpha_i dx^i, \quad (20.31)$$

მაშინ

$$X^i f_{,i} = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \langle \alpha_j dx^j, X^i \partial_i \rangle = \alpha_j X^i \langle dx^j, \partial_i \rangle = \alpha_j X^i \delta_i^j = \alpha_i X^i \quad (20.32)$$

თანადობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha_i = f_{,i}; \quad df = f_{,i} dx^i. \quad (20.33)$$

ბოლო ფორმულა ემთხვევა ფუნქციის დიფერენციალის ცნობილ ფორმულას.

### 20.3. ტენზორები და ტენზორული ნამრავლი

განვიხილოთ  $M$  მრავალსახეობის  $p$  წერტილში  $r$  რაოდენობის დუალური  $T_p^*$  სივრცისა და  $s$  რაოდენობის  $T_p$  მხევი სივრცის პირდაპირი  $\Pi_r^s$  ნამრავლი

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_r \times \underbrace{T_p \times T_p \times \dots \times T_p}_s. \quad (20.34)$$

ანუ გვაქვს  $r$  ფორმა-1-ებისა და  $s$  მხევი ვექტორების დალაგებული ერთობლიობის სივრცე

$$(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s). \quad (20.35)$$

განვიხილოთ  $\Pi_r^s$  სივრცის პოლიწრფივი  $\mathbf{T}$  ასახვა ნამდვილ რიცხვთა  $\mathbb{R}^1$  სივრცეზე:

$$\mathbf{T}: \Pi_r^s \rightarrow \mathbb{R}^1. \quad (20.36)$$

ეს ასახვა  $r$  ფორმა-1-სა და  $s$  მხევი ვექტორს ცალსახად შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს

$$\mathbf{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \text{ნამდვილი რიცხვი}. \quad (20.37)$$

ამ ფუნქციის პოლიწრფივობა ნიშნავს მის წრფივობას თითოეული ცვლადის მიმართ.

ასეთნაირად განსაზღვრულ პოლიწრფივ ასახვას  $(r, s)$  ტენზორი ეწოდება. ამ ტიპის ტენზორების წრფივი კომბინაცია განისაზღვრება ფორმულით:

$$(\alpha T + \beta S)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \alpha T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \beta S(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s), \quad (20.38)$$

სადაც  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია,  $\omega^i \in T_p^*$  და  $X_j \in T_p$ , ( $i = \overline{1, r}$ ); ( $j = \overline{1, s}$ ).

(20.38) თვისებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ  $(r, s)$  ტენზორები ქმნიან  $n^{(r+s)}$ -განზომილებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეს. ასეთი ტიპის ტენზორების სივრცეს *ტენზორული ნამრავლების სივრცე* ეწოდება და მისთვის მიღებულია აღნიშვნები

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^*}_r \otimes \underbrace{T_p \otimes T_p \otimes \dots \otimes T_p}_s. \quad (20.39)$$

$(r, s)$  ტიპის ტენზორების ნამრავლების სივრცის ბაზისს შეადგენს  $n^{r+s}$  სპეციალური ასახვების ერთობლიობა, რომლებიც მოიცემა ფორმულით

$$e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\omega_{k_1}^1 e^{k_1}, \dots, \omega_{k_r}^r e^{k_r}, X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_s^{j_s} e_{j_s}) = \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}. \quad (20.40)$$

ცხადია, რომ ეს გარდაქმნები წრფივია ნებისმიერი არგუმენტის მიმართ და წარმოადგენს  $(r, s)$  ტიპის ტენზორებს. სხვანაირად ეს ასახვები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობებით:

$$e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(e^{k_1}, \dots, e^{k_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) = \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_s}^{j_s}. \quad (20.41)$$

პოლიწრფივობიდან გამომდინარე, ნებისმიერი  $(r, s)$  ტიპის ტენზორი შეიძლება წარმოვადგინოთ (20.41) ტიპის ასახვათა წრფივი კომბინაციის საშუალებით. მართლაც,

$$\begin{aligned}
T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= T(\omega_{i_1}^1 e^{i_1}, \dots, \omega_{i_r}^r e^{i_r}, X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_s^{j_s} e_{j_s}) = \\
&= \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s} T(e^{k_1}, \dots, e^{k_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}).
\end{aligned}
\tag{20.42}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$T(e^{k_1}, \dots, e^{k_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) = T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r}, \tag{20.43}$$

მაშინ მივიღებთ წარმოდგენას

$$T = T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} e_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}. \tag{20.44}$$

ცხადია, რომ (20.41) ასახვები წრფივად დამოუკიდებელია და, მაშასადამე, წარმოადგენენ  $(r, s)$  ტიპის ტენზორების ბაზისს. ბაზისური  $e_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s}$  ელემენტების რაოდენობა უდრის  $T_s^r$  სივრცის  $n^{r+s}$  განზომილებას.

(20.44) წარმოდგენაში  $T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r}$  სიდიდეებს  $T$  ტენზორის კომპონენტებს უწოდებენ.

ზოგად შემთხვევაში  $(r, s)$  ტიპის ტენზორების ბაზისი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ დუალური ბაზისების ტენზორული ნამრავლის სახით

$$e_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_s} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}. \tag{20.45}$$

ახლა განვიხილოთ ტენზორების ნახვევის ოპერაცია.

$T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r}$  - კომპონენტებიანი  $(r, s)$  ტიპის ტენზორის ნახვევის ოპერაცია  $i_p$  კონტრავარიანტული და  $j_q$  კოვარიანტული ინდექსებით არის  $(r-1, s-1)$  ტიპის ტენზორი. ერთნაირი ინდექსებით ხდება აჯამება, შესაბამისად, ტენზორის რიგი მცირდება ორი ერთეულით. ნახვევის ოპერაცია არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე.

(0, 2) ტიპის ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული, თუ

$$T(X, Y) = T(Y, X), \tag{20.46}$$

ხოლო - ანტისიმეტრიული, თუ

$$T(X, Y) = -T(Y, X), \quad (20.47)$$

ნებისმიერი  $X$  და  $Y$  ვექტორებისათვის მხები  $T_p$  სივრციდან. (20.46) და (20.47) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ კომპონენტები შესაბამისად უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობებს

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad T_{ij} = -T_{ji}. \quad (20.48)$$

ეს ცნებები ბუნებრივად ზოგადდება ნებისმიერი  $(r, s)$  ტიპის ტენზორისათვის.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. განსაზღვრებიდან გამომდინარე, დაამტკიცეთ ტოლობა

$$(\alpha X + \beta Y)f = \alpha(Xf) + \beta(Yf).$$

2. დაამტკიცეთ, რომ  $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$  ვექტორები ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას.

3. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი  $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  ოპერატორისათვის სრულდება ლაიბნიცის წესი  $X(fg)|_{\lambda(t)} = (fXg + gXf)|_{\lambda(t)}$ .

4. თუ  $e_a = \Phi_a^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  და  $\frac{\partial}{\partial x^k} = \Phi_k^j e_j$ , მაშინ დაამტკიცეთ, რომ

$$\Phi_a^k \Phi_j^a = \delta_j^k, \quad \Phi_a^k \Phi_k^b = \delta_a^b.$$

5. დაამტკიცეთ ფორმულა  $df = f_{,i} dx^i$ .

6. აჩვენეთ, რომ  $(r, s)$  ტიპის ტენზორების ნამრავლების სივრცის ბაზისს შეადგენს  $n^{r+s}$  სპეციალური ასახვების ერთობლიობა, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$\begin{aligned} e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) &= e_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}(\omega_{k_1}^1 e^{k_1}, \dots, \omega_{k_r}^r e^{k_r}, X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_s^{j_s} e_{j_s}) = \\ &= \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}. \end{aligned}$$

## ლიტერატურა

1. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевский курс физики, том 1, механика, Пер. с англ., Наука, Москва, 1975
3. Ферми Э. Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ., Мир, Москва, 1968
4. Бёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
5. Бёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Пер. с англ., Мир, Москва, 1976
7. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ., Мир, Москва, 2002
8. Чандрасекар С. Математическая теория чёрных дыр, часть 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1986



## XXI თავი. კარტანის დიფერენციალური ფორმები

განსაკუთრებულ განხილვას იმსახურებენ მთლიანად ანტისიმე-ტრიული ანუ  $(0, s)$  ტიპის კოვარიანტული ტენზორები, რომლებიც მთლიანად ანტისიმეტრიული არიან არგუმენტების ყოველი წყვილისათვის

$$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_s) = -T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_s), \quad (21.1)$$

ნებისმიერი  $i$  და  $j$  ინდექსებისა  $\forall X$  ვექტორისათვის.

მთლიანად ანტისიმეტრიული ტენზორი შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი  $(0, s)$  ტიპის კოვარიანტული ტენზორისაგან, თუ მასზე ვიმოქმედებთ ანტისიმეტრიზაციის  $A$  ოპერატორით, რომელიც განი-საზღვრება ტოლობით

$$AT(X_1, \dots, X_s) = \frac{1}{s!} \sum_{j_1, \dots, j_s} \text{sgn}(j_1, \dots, j_s) T(X_{j_1}, \dots, X_{j_s}), \quad (21.2)$$

სადაც შეჯამება ხდება ყველა  $s!$  გადანაცვლების მიხედვით  $s$  მთელი რიცხვიდან  $(1, \dots, s)$ , ხოლო  $\text{sgn}(j_1, \dots, j_s) = \pm 1$  იმის მიხედვით ლუწია, თუ კენტი  $(j_1, \dots, j_s)$  ჩასმა. (21.2) ტოლობა უნდა სრულდებოდეს  $(X_{j_1}, \dots, X_{j_s})$  ვექტორების ნებისმიერი ერთობლიობი-სათვის.

ცხადია, რომ თუ  $T$  სავსებით ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ  $AT = T$ . თუ  $s > n$  ( $n$  ვექტორული სივრცის განზომილებაა), მაშინ  $AT = 0$ .

მთლიანად ანტისიმეტრიულ  $(0, s)$  ტიპის ტენზორებს,  $s$ -ფორმას უწოდებენ.

რადგან ნებისმიერი ორი არგუმენტის თანხვედრისას  $s$  ფორმის მნიშვნელობა ნულის ტოლია, ამიტომ ამ ფორმების ვექტორული სივრცის განზომილებაა  $n! s! (n - s)!$ . ამ სივრცისათვის არსებობს სპეციალური  $\Lambda^s T_p^*$  აღნიშვნა.

ვთქვათ,  $T_{j_1 \dots j_s}$  არის  $(0, s)$  ტიპის ტენზორის კომპონენტები

$$e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}, \quad (21.3)$$

ბაზისში, მაშინ, თუ  $T_{j_1 \dots j_s}$  ტენზორი მთლიანად ანტისიმეტრიულია, შეგვიძლია მისი მნიშვნელოვანი  $n! s! (n - s)!$  კომპონენტი მივიღოთ, თუ ინდექსებს დავაღაგებთ მონოტონურად კლებადი მიმდევრობით.

$\Lambda^s T_p^*$  სივრცის ბაზისი შეგვიძლია მივიღოთ ანტისიმეტრიზაციის  $A$  ოპერატორის მოქმედებით საბაზისო ვექტორებზე

$$A(e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}). \quad (21.4)$$

ასეთნაირად მიღებული საბაზისო ელემენტები შეგვიძლია ჩავწეროთ  $e^j$  ფორმების გარე ნამრავლის სახით:

$$e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_s}. \quad (j_1 > j_2 > \dots > j_s). \quad (21.5)$$

საზოგადოდ,  $s$ -ფორმას აქვს წარმოდგენა

$$\Omega = \Omega_{j_1 \dots j_s} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_s}, \quad (21.6)$$

სადაც აჯამვა ხდება ინდექსების ყველა მონოტონურად კლებადი კომბინაციისათვის. ინდექსების წყვილის გადანაცვლება ეკვივალენტურია შესაბამისი ელემენტების გადანაცვლებისა გარე ნამრავლებში. ამიტომ გარე ნამრავლში ელემენტების გადაადგილება უნდა იწვევდეს ნიშნის ცვლას

$$e^j \wedge e^k = -e^k \wedge e^j. \quad (21.7)$$

$s$ -ფორმის წარმოდგენას საკოორდინატო ბაზისში აქვს შემდეგი სახე:

$$\Omega = \Omega_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}. \quad (21.8)$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს  $p$ -ფორმა  $\Omega^1$  და  $q$ -ფორმა  $\Omega^2$ . მაშინ მათი გარე ნამრავლი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულით

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = A(\Omega^1 \otimes \Omega^2). \quad (21.9)$$

$p$ -ფორმისა და  $q$ -ფორმის გარე ნამრავლი არის  $(p + q)$ -ფორმა. ამიტომ ის უნდა იყოს იგივეურად ნულის ტოლი, როცა  $p + q > n$ .

გარე ნამრავლი აკმყოფილებს ასოციაციურობისა და დისტრიბუციულობის კანონებს, თუმცა, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური.

### 21.1. გარე დიფერენცირება

გარე დიფერენცირების  $d$  ოპერაცია  $p$ -ფორმას აქცევს  $(p + 1)$ -ფორმად შემდეგი პირობების შესრულების შემთხვევაში:

ა) ნულ-ფორმაზე ანუ  $f$  ფუნქციაზე  $d$  ოპერატორით მოქმედებისას მივიღებთ  $df$  ფორმა-1-ს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით  $df(\mathbf{X}) = \langle df, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}f$ , ნებისმიერი  $\mathbf{X} \in T_0^1$ . კერძოდ, ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

ბ) თუ,  $\mathbf{A}_1$  და  $\mathbf{A}_2$  ორი  $p$ -ფორმაა, მაშინ

$$d(\alpha \mathbf{A}_1 + \beta \mathbf{A}_2) = \alpha d\mathbf{A}_1 + \beta d\mathbf{A}_2, \quad \forall (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1). \quad (21.10)$$

გ) თუ,  $\mathbf{A}$  არის  $p$ -ფორმა, ხოლო  $\mathbf{B}$  -  $q$ -ფორმა, მაშინ

$$d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + (-1)^p \mathbf{A} \wedge d\mathbf{B}. \quad (21.11)$$

დ) მართებულია პუანკარეს ლემა

$$d(d\mathbf{A}) = 0. \quad (21.12)$$

ნებისმიერი  $\mathbf{A}$ ,  $p$ -ფორმისათვის.

უნდა დავრწმუნდეთ, რომ  $d$  ოპერატორი კარგადაა განსაზღვრული ანუ უნდა შევამოწმოთ ზემოთ მოყვანილი პირობების შესრულება.

განვიხილოთ ნებისმიერი  $\mathbf{A}$ ,  $p$ -ფორმისათვის გარე წარმოებული

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d\left(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}\right) = dA_{j_1 \dots j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} = \\ &= \frac{\partial A_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}. \end{aligned} \quad (21.13)$$

$d\mathbf{A}$  ფორმა არაა დამოკიდებული ლოკალური საკოორდინატო ბაზისის არჩევაზე. მართლაც, რადგან

$$A_{j'_1 \dots j'_p} = A_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}}, \quad (21.14)$$

მივიღებთ, რომ

$$d\left(A_{j_1' \dots j_p'} dx^{j_1'} \wedge \dots \wedge dx^{j_p'}\right) = d\left(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}\right). \text{ რ.დ.გ.} \quad (21.15)$$

შევამოწმოთ (გ) პირობა

$$\begin{aligned} d(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= d\left(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \wedge B_{k_1 \dots k_q} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q}\right) = \\ &= \frac{\partial A_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \wedge B_{k_1 \dots k_q} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q} + \\ &+ A_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial B_{k_1 \dots k_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q} = d\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + \\ &+ (-1)^p A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \wedge \left(\frac{\partial B_{k_1 \dots k_q}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_q}\right) = d\mathbf{A} \wedge \\ &\mathbf{B} + (-1)^p \mathbf{A} \wedge d\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (21.16)$$

და ბოლოს, შევამოწმოთ ჰუნკარეს ლემის შესრულება. (დ) პირობა

$$\begin{aligned} d(d\mathbf{A}) &= d\left(\frac{\partial A_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}\right) = \frac{\partial^2 A_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^i \partial x^k} dx^i \wedge dx^k \wedge \\ &dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} \equiv 0. \end{aligned} \quad (21.17)$$

როგორც ვხედავთ, გარე დიფერენცირების  $d$  ოპერატორი განსაზღვრულია კორექტულად.

## 21.2. ლის ფრჩხილები და ლის წარმოებული

ნებისმიერი ორი  $\mathbf{X}$  და ვექტორული ველის ლის ფრჩხილები  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  განისაზღვრება ტოლობით

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f). \quad (21.18)$$

ორი მხევი ვექტორის ლის ფრჩხილი ისევ მხევი ვექტორი იქნება, რადგან

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](\alpha f + \beta g) = \alpha[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + \beta[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g. \quad (21.19)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}](fg) = g[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f + f[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]g. \quad (21.20)$$

(21.19) გვიჩვენებს, რომ ლის ფრჩხილი წრფივი ოპერატორია, ხოლო (21.20) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ლის ფრჩხილი რაღაც დიფერენცირების ოპერაციაა.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ლის ფრჩხილები აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას

$$[[X, Y]Z] + [[Y, Z]X] + [[Z, X]Y] = 0. \quad (21.21)$$

მხები ვექტორების ლის ფრჩხილი ისევე მხები ვექტორია და მისი კომპონენტები ლოკალურ საკოორდინატო სისტემაში შეგვიძლია მივიღოთ, თუ ლის ფრჩხილებით ვიმოქმედებთ  $x^j$  ფუნქციებზე

$$[X, Y]^j = (XY - YX)x^j = XY^j - YX^j = X^k Y^j_{,k} - Y^k X^j_{,k}. \quad (21.22)$$

ცხადია, რომ ლის ფრჩხილი  $[\partial_k, \partial_j] \equiv 0$ .

ლის ფრჩხილს  $[X, Y]$ , როგორც დიფერენცირების ოპერატორს, ეწოდება  $Y$  ვექტორის ლის წარმოებული  $X$  ვექტორის მიმართულებით.

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = -[Y, X] = -\mathcal{L}_Y X. \quad (21.23)$$

საზოგადოდ, ტენზორული  $T$  ველის ლის წარმოებული  $\mathcal{L}_X T$  არის იმავე ტიპის ტენზორი და ის აკმაყოფილებს პირობებს:

1. სკალარული  $f$  ველის ლის წარმოებული უდრის

$$\mathcal{L}_X f = Xf = df(X); \quad (21.24)$$

2. ვექტორული  $Y$  ველის ლის წარმოებული უდრის

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]; \quad (21.25)$$

3. ტენზორულ ველებზე ლის წარმოებულის მოქმედება არის წრფივი ოპერატორი, რომლის მოქმედების შედეგიც განისაზღვრება ლაიბნიცის წესით

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T. \quad (21.26)$$

ამრიგად,  $\omega$  ფორმა-1-ზე ლის ოპერატორის მოქმედების შედეგი განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathcal{L}_X \langle \omega \otimes Y \rangle = \langle \mathcal{L}_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_X Y \rangle. \quad (21.27)$$

ეს ფორმულა კომპონენტებით შეგვიძლია ჩავწეროთ (21.22) ფორმულის ანალოგიურად

$$(\mathcal{L}_X \omega)_j = \omega_{j,k} X^k + \omega_k X^k_{,j}. \quad (21.28)$$

ფორმა-1-ის გარე წარმოებულსა და ლის წარმოებულს შორის კავშირი მოიცემა ფორმულით:

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2}(X\langle \omega, Y \rangle - Y\langle \omega, X \rangle - \langle \omega, [X, Y] \rangle). \quad (21.29)$$

### 21.3. კოვარიანტული წარმოებული

ახლა განვიხილავთ ახალი ტიპის დიფერენცირების ოპერაციას, რომელიც განსხვავდება გარე დიფერენცირებისა და ლის დიფერენცირებისაგან იმით, რომ ამ ოპერაციის განსაზღვრა ითხოვს მრავალსახეობის განსაკუთრებულ სტრუქტურას. ეს დამატებითი სტრუქტურა არის მრავალსახეობის აფინური ბმა  $\nabla$ , რომელიც მოცემული  $M$  მრავალსახეობის ნებისმიერი  $X$  ვექტორული ველისათვის, გვაძლევს  $\nabla_X$  ოპერატორს. ეს ოპერატორი ნებისმიერ  $Y$  ვექტორულ ველს გადასახავს  $\nabla_X Y$  ვექტორულ ველში. აფინური ბმა უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1.  $\nabla_X Y$  ვექტორული ველი წრფივია  $X$  არგუმენტის მიმართ ანუ

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad (X, Y, Z \in T_0^1). \quad (21.30)$$

2.  $\nabla_X Y$  ვექტორული ველი წრფივია  $Y$  არგუმენტის მიმართ, ანუ,

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (X, Y, Z \in T_0^1). \quad (21.31)$$

3.  $\nabla_X f = Xf$ . (21.32)

$$4. \nabla_X (fY) = (\nabla_X f)Y + f\nabla_X Y. \quad (21.33)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (21.32) პირობიდან გამომდინარე, ლოკალურ საკოორდინატო  $\partial_k$  ბაზისში  $\nabla_{\partial_k}$  ოპერატორით რაიმე ფუნქციაზე ზემოქმედების შედეგი ემთხვევა ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულს  $x^k$  ცვლადით.

$\nabla_X$  ოპერატორით  $Y \in T_0^1$  ვექტორულ ველზე მოქმედებით, როცა ეს ოპერატორი აკმაყოფილებს (1)-(4) თვისებებს, მივიღებთ  $Y$  ვექტორული ველის კოვარიანტულ წარმოებულს  $\nabla Y$ , როგორც (1,1) ტიპის ტენზორულ ველს, რომელიც კონტრაგარიანტულ ვექტორულ  $X$  ველს ასახავს  $\nabla_X Y$  ველში ანუ

$$\nabla Y(X) = \langle \nabla Y, X \rangle = \nabla_X Y. \quad (21.34)$$

ამ აღნიშვნებით (21.33) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\nabla(fY) = df \otimes Y + f\nabla Y. \quad (21.35)$$

ზოგჯერ მიზანშეწონილია  $\nabla_X Y$  ჩავწეროთ არჩეულ ლოკალურ  $(e_i)$  და მის დუალურ  $(e^j)$  ბაზისში, რათა ვაჩვენოთ აფინური ბმის არსი. გამოვიყენოთ (1)-(4) თვისებები. მაშინ

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^j e_j) = (XY^j) e_j + Y^j \nabla_X e_j. \quad (21.36)$$

რადგან  $\nabla_X e_j$ , ფიქსირებული  $e_j$ -ს შემთხვევაში, არის (1,0) ტიპის ტენზორი, უნდა არსებობდეს წარმოდგენა

$$\nabla_X e_j = \omega_j^i(X) e_i, \quad (21.37)$$

სადაც  $\omega_j^i$  ფორმა-1-ებია, ამიტომ

$$\nabla_X Y = \nabla_X(Y^j e_j) = (XY^j) e_j + Y^j \omega_j^i(X) e_i. \quad (21.38)$$

მეორე მხრივ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$\nabla_X Y = (XY^j e_j) + Y^j \nabla_{X^k e_k} e_j = (XY^j) e_j + Y^j X^k \nabla_{e_k} e_j. \quad (21.39)$$

თუ გამოვიყენებთ (21.37) ტოლობას გვექნება

$$\nabla_X Y = (XY^j) e_j + Y^j X^k \omega_j^i(e_k) e_i. \quad (21.40)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\omega_j^i(e_k) \equiv \omega_{jk}^i. \quad (21.41)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ აფინური  $\nabla$  ბმის სტრუქტურის მოცემა ნიშნავს  $n^2$  რაოდენობის,  $\omega_{jk}^i$  ფორმა-1-ის მოცემას ან, რაც იგივეა,  $n^3$  რაოდენობის სკალარული  $\omega_{jk}^i$  ველის მოცემას.

გადავწეროთ (21.38) ტოლობა შემდეგნაირად:

$$\nabla_X Y = (XY^j + \omega_i^j(X) Y^i) e_j. \quad (21.42)$$

ამ ტოლობიდან ნათლად ჩანს კომპონენტები:

$$(\nabla_X Y)^j = XY^j + \omega_i^j(X) Y^i. \quad (21.43)$$

ლოკალურ საკოორდინატო  $(\partial_k, dX^i)$  ბაზისში ეს ტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$(\nabla_{\partial_k} Y)^j = \partial_k Y^j + Y^i \omega_{ik}^j = Y_{,k}^j + Y^i \omega_{ik}^j. \quad (21.44)$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში იყენებენ აღნიშვნებს

$$\Gamma_{ik}^j = \omega_{ik}^j. \quad (21.45)$$

კოვარიანტული წარმოებულის აღსანიშნავად იყენებენ წერტილ-მძიმეს (;), ხოლო წარმოებულისათვის, უბრალოდ, მძიმეს (.). ამ აღნიშვნებით გვექნება სტანდარტული ფორმულა:

$$Y_{;k}^j = Y_{,k}^j + Y^i \Gamma_{ik}^j. \quad (21.46)$$

ვექტორული ველების კოვარიანტული წარმოებულის ცნება, ზოგად შემთხვევაში, შეიძლება განზოგადებულ იქნეს ტენზორული ველებისათვისაც. ამიტომ, უნდა მოვითხოვოთ  $\nabla$

ოპერატორისათვის ლაიბნიცის წესის შესრულება ტენზორული ნამრავლზე მოქმედებისას ანუ

$$\nabla(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = \nabla \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes \nabla \mathbf{T}. \quad (21.47)$$

თუ  $\mathbf{\Omega}$  არის ფორმა-1, მაშინ ნებისმიერი  $\mathbf{Y}$  ვექტორული ველისათვის გვექნება ტოლობა

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{\Omega}(\mathbf{Y})) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega})_j(\mathbf{Y})^j + \mathbf{\Omega}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}), \quad (21.48)$$

თუ წარმოვადგენთ  $(\mathbf{e}_i)$  და  $(\mathbf{e}^j)$  ლოკალურ ბაზისებში, მაშინ მივიღებთ

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\Omega_j Y^j) = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega})_j Y^j + \Omega_j (\nabla_{\mathbf{X}} Y)^j. \quad (21.49)$$

აფინური ბმის მესამე მოთხოვნის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega})_j = \mathbf{X}\Omega_j - \Omega_i \omega_j^i(\mathbf{X}). \quad (21.50)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{\Omega} = [\mathbf{X}\Omega_j - \Omega_i \omega_j^i(\mathbf{X})] \mathbf{e}^j. \quad (21.51)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{e}^j$ , მივიღებთ, რომ

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{e}^j = -\omega_j^i(\mathbf{X}) \mathbf{e}^j. \quad (21.52)$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში (21.50) გადაიწერება ფორმით

$$\Omega_{j;k} = \Omega_{j,k} - \Omega_i \Gamma_{jk}^i. \quad (21.53)$$

თუ (21.50) და (21.53) ფორმულებს გამოვიყენებთ ფორმა-1  $df$ -ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$f_{;jk} = f_{,jk} - f_{,i} \Gamma_{jk}^i, \quad (21.54)$$

ხოლო ნებისმიერი ტენზორული ველისათვის გვექნება კოვარიანტული წარმოებული

$$S_{k;l}^{ij} = S_{k,l}^{ij} + S_k^{mj} \Gamma_{mi}^i + S_k^{im} \Gamma_{ml}^j - S_m^{ij} \Gamma_{kl}^m. \quad (21.55)$$



## 21.4. პარალელური გადატანა და გეოდეზიური წირები

ვთქვათ,  $Y$  არის კონტრავარიანტული ვექტორული ველი. განვიხილოთ მისი ცვლილება  $M$  მრავალსახეობის  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ. ვექტორული ველის ცვლილება  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ  $\delta Y$ , შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც  $Y$  ვექტორული ველის გადატანა  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ, რასაც იწვევს  $t \rightarrow t + \delta t$  პარამეტრის ცვლილება  $\lambda$  მრუდზე. ვექტორული ველის  $\delta Y$  ცვლილება ლოკალურ კოორდინატთა ( $x^k$ ) სისტემაში იქნება

$$(\delta Y)^j = Y^j_{,k} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t. \quad (21.56)$$

ეკლიდეს გეომეტრიაში, დეკარტეს კოორდინატთა სისტემაში,  $Y$  ვექტორი პარალელურად გადაიტანება  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ თუ  $\delta Y = 0$ . ზოგად შემთხვევაში, როცა გვაქვს დიფერენცირებადი მრავალსახეობა, არსებობს ანალოგიური განსაზღვრება.  $Y$  ვექტორი პარალელურად გადაიტანება  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ, თუ

$$(DY)^j = (\nabla_{\partial_k} Y)^j \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = Y^j_{;k} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = 0, \quad (21.57)$$

ანუ

$$(Y^j_{,k} + Y^i \Gamma^j_{ik}) \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t = 0. \quad (21.58)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, გადაიტანება  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ პარალელური გადატანისას,  $Y$  ვექტორის ცვლილება იქნება

$$(DY)^j = -Y^i \Gamma^j_{ik} \frac{dx^k(\lambda(t))}{dt} \delta t. \quad (21.59)$$

$M$  მრავალსახეობის  $\lambda$  მრუდს ეწოდება გეოდეზიური წირი, თუ მისი მხები ვექტორი პარალელური გადატანისას რჩება თავისი თავის პროპორციული.

გეოდეზიური წირის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \varphi(t) \frac{dx^j}{dt}, \quad (21.60)$$

სადაც  $\varphi(t)$  რაღაც ფუნქციაა. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ  $t$  პარამეტრის ნაცვლად  $\lambda$  მრუდის გასწვრივ შემოვიღებთ ახალ

$$s = \int_0^t dt'' \exp \left\{ \int_0^{t''} dt' \varphi(t') \right\} \quad (21.61)$$

პარამეტრს, მაშინ (5.60) მიიღებს უფრო მარტივ სახეს

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (21.62)$$

**s** პარამეტრს, რომლისთვისაც გეოდეზიური წირის განტოლება (21.62) სახისაა აფინური ეწოდება. უნდა აღინიშნოს, რომ აფინური პარამეტრი განსაზღვრულია ცალსახად, ათვლის სისტემის გადატანისა და მასშტაბური ფაქტორის სიზუსტით.

## 21.5. კარტანის ფორმები

თუ მრავალსახეობაში გვაქვს აფინური ბმა, მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ შემდეგი ორი ასახვა:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (21.63)$$

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}, \quad (21.64)$$

სადაც  $X$  და  $Y$  ორი კონტრავარიანტული ვექტორული ველია. ამ ორი ასახვიდან, პირველს ჰქვია გრეხვა, ხოლო მეორეს – სიმრუდე. ორივე ასახვა ანტისიმეტრიულია თავისი არგუმენტების მიმართ.

ა) განვიხილოთ გრეხვის ასახვა. ადვილი მისახვედრია, რომ  $T$  ასახვა წრფივია თავისი არგუმენტების მიმართ.

$$T(X + Y, Z) = T(X, Z) + T(Y, Z), \quad (21.65)$$

ასევე

$$T(fX, Y) = fT(X, Y). \quad (21.66)$$

(21.65) და (21.66) ტოლობები გვარწმუნებენ, რომ ასახვა

$$T: T_0^1 \times T_0^1 \rightarrow T_0^1, \quad (21.67)$$

არის პოლიწრფივი. შესაბამისად,  $T$  არის (1,2) ტიპის ტენზორული ველი.

თუ გამოვიყენებთ  $T_p^*$  და  $T_p$  სივრცეების დუალურ ბაზისებს, მაშინ ნებისმიერი ორი  $X$  და  $Y$  ვექტორული ველისათვის გვექნება

$$\frac{1}{2}T^j = de^j + \omega_i^j \wedge e^i = \Omega^j. \quad (21.68)$$

ამ თანადობას, კარტანის სტრუქტურის პირველ განტოლებას უწოდებენ, ხოლო  $\Omega^j$  სიდიდეებს – კარტანის ფორმებს. მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა, როცა გრესა ნულოვანია, ამ შემთხვევაში

$$de^j + \omega_i^j \wedge e^i = 0. \quad (21.69)$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში  $de^j = 0$ , რადგან  $e^j = dx^j$ . ამიტომ გრესისთვის გვექნება განტოლება

$$T^j = 2\Gamma_{ik}^j dx^k \wedge dx^i = (\Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j) dx^k \wedge dx^i. \quad (21.70)$$

ბ) ახლა განვიხილოთ სიმრუდის ასახვა. სიმრუდის განსაზღვრის თანახმად,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (21.71)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე წრფივია თითოეული არგუმენტის მიმართ, ამასთანავე,

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z, \quad (21.72)$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z. \quad (21.73)$$

ნებისმიერი  $f$  ფუნქციისათვის. შესაბამისად,

$$R: T_0^1 \times T_0^1 \times T_0^1 \rightarrow T_0^1, \quad (21.74)$$

გადასახვა არის პოლიწრფივი თავისი არგუმენტების მიმართ, ხოლო  $R$  - (1,3) ტიპის ტენზორი. ამ ტენზორს რიმანის ტენზორს უწოდებენ.

ნებისმიერი  $\omega$  ფორმა-1-ისათვის მართებულია ტოლობა

$$R(\omega, Z, X, Y) = R_{ikm}^j [e_j \otimes e^i \otimes (e^k \wedge e^m)](\omega, Z, X, Y). \quad (21.75)$$

რიმანის ტენზორისათვის გვაქვს წარმოდგენა

$$\frac{1}{2}R_{ikm}^j e^k \wedge e^m = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k.$$

თუ შემოვიღებთ ფორმა-2-ს

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j + \omega_k^j \wedge \omega_i^k, \quad (21.76)$$

მივიღებთ კარტანის სტრუქტურის მეორე განტოლებას

$$\frac{1}{2}R_{ikm}^j e^k \wedge e^m = \Omega_i^j. \quad (21.77)$$

თუ გამოვიყენებთ ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისს, გვექნება

$$\omega_i^j = \Gamma_{im}^j dx^m. \quad (21.78)$$

კარტანის სტრუქტურის მეორე განტოლება რიმანის ტენზორის ჩვეულებრივი განსაზღვრების ეკვივალენტურია.

$$R_{inm}^j = \Gamma_{im,n}^j - \Gamma_{in,m}^j + \Gamma_{kn}^j \Gamma_{im}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{in}^k. \quad (21.79)$$

## 21.6. რიმანისა და რიჩის ტენზორები

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = (Z_{;ki}^j - Z_{;ik}^j + T_{ik}^n Z_{;n}^j) X^i Y^k \mathbf{e}_j. \quad (21.80)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$Z_{;ki}^j - Z_{;ik}^j = -R_{lki}^j Z^l + T_{ki}^n Z_{;n}^j. \quad (21.81)$$

ამ ტოლობას რიჩის იგივეობას უწოდებენ და ნულოვანი გრესის პირობებში მას გამოიყენებენ რიმანის ტენზორის განსაზღვრისათვის.

განვიხილოთ განტოლება

$$f_{;ki} - f_{;ik} = T_{ki}^n f_{;n}. \quad (21.82)$$

აქამდე ვსწავლობდით  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ოპერატორის ზემოქმედებას კონტრავარიანტულ ვექტორებსა და სკალარულ ველებზე. ახლა განვიხილავთ ამ ოპერატორის ზემოქმედებას, ნებისმიერ ტენზორულ ველზე.

თუ გამოვიყენებთ ლაიბნიცის წესს ტენზორული ნამრავლების კოვარიანტული წარმოებულისათვის, მივიღებთ

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Q}. \quad (21.83)$$

ახლა ვიმოქმედოთ  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ოპერატორით  $\Omega$  ფორმა-1-ზე. თუ  $\mathbf{Z}$  ნებისმიერი კონტრავარიანტული ვექტორული ველია, მაშინ (21.83) ტოლობიდან გვექნება

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(\Omega_j Z^j) = [\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega]_j Z^j + \Omega_j [[\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z}]]^j. \quad (21.84)$$

მაგრამ  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ასახვა სკალარზე მოქმედებისას გვაძლევს ნულს, ამიტომ

$$[\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega]_j Z^j = -\Omega_j R_{ilk}^j Z^i X^l Y^k = -\Omega_i R_{jkl}^i Z^j X^k Y^l. \quad (21.85)$$

მაშინ

$$[\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\Omega]_j = -R_{jkl}^i \Omega_i X^k Y^l. \quad (21.86)$$

განვიხილოთ  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ასახვის მოქმედება (2, 0) ტიპის  $\mathbf{S}$  ტენზორზე, მივიღებთ

$$S_{;kl}^{ij} - S_{;lk}^{ij} = -R_{mkl}^i S^{mj} - R_{mkl}^j S^{im} + T_{kl}^n S_{;n}^{ij}. \quad (21.87)$$

ახლა განვიხილოთ  $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  ასახვის მოქმედება (0, 2) ტიპის ტენზორზე  $\mathbf{S}$ , მივიღებთ

$$S_{ij;kl} - S_{ij;lk} = R_{jkl}^m S_{im} + R_{ikl}^m S_{mj} + T_{kl}^n S_{ij;n}. \quad (21.88)$$

თუ განვიხილავთ რიმანის  $R_{inm}^j = \Gamma_{im,n}^j - \Gamma_{in,m}^j + \Gamma_{kn}^j \Gamma_{im}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{in}^k$  ტენზორზე ნახვევის ოპერაციას, როცა ერთმანეთს უტოლდება კონტრავარიანტული ინდექსი და მეორე (ან მესამე) კოვარიანტული ინდექსი, მაშინ მივიღებთ რიჩის ტენზორს (ან, შესაბამისად, მინუს რიჩის ტენზორს):

$$R_{ijm}^j = -R_{imj}^j = R_{im}. \quad (21.89)$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში რიჩის ტენზორის კომპონენტებია

$$R_{im} = \Gamma_{im,j}^j - \Gamma_{ij,m}^j + \Gamma_{kj}^j \Gamma_{im}^k - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ij}^k. \quad (21.90)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $T(X, Y)$  გრეხა ნულის ტოლია, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad (21.91)$$

რის გამოც სიმრუდის ტენზორი აკმაყოფილებს ორ მნიშვნელოვან იგივეობას:

$$R_{ikm}^j + R_{kmi}^j + R_{mik}^j = 0. \quad (21.92)$$

ამ იგივეობას ციკლურ იგივეობას უწოდებენ, ხოლო მეორე

$$R_{ipq;r}^j + R_{iqr;p}^j + R_{irp;q}^j = 0 \quad (21.93)$$

იგივეობას – ბიანკის იგივეობას.

## 21.7. მეტრიკა და მეტრიკული ბმა

მეტრიკული  $g$  ტენზორი ეწოდება  $(0, 2)$  ტიპის არაგადაგვარებული სიმეტრიულ ტენზორს, რაც იმას ნიშნავს, რომ

- 1)  $g: T_0^1 \times T_0^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;
- 2)  $g(X, Y) = g(Y, X), \forall X, Y \in T_0^1$ ;
- 3)  $(\forall Y \in T_0^1) g(X, Y) = 0 \Rightarrow X = 0$ .

ლოკალურ ბაზისში მეტრიკულ ტენზორს აქვს შემდეგი სახე:

$$g = g_{ij} e^i \otimes e^j, \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad (21.94)$$

ხოლო, თუ ლოკალური ბაზისი კოორდინატულია, მაშინ

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (21.95)$$

რადგან მეტრიკული ტენზორი არაგადაგვარებულია,  $g_{ij}$  მატრი-ცისათვის არსებობს შებრუნებული  $g^{ij}$  მატრიცა ( $g^{ij} g_{jk} = \delta^{ki}$  და მეტრიკული ტენზორის შებრუნებული ტენზორი დუალურ ბაზისში იქნება

$$g^{-1} = g^{ij} e_i \otimes e_j. \quad (21.96)$$

მეტრიკული ტენზორი გამოიყენება  $M$  მრავალსახეობაზე განსაზღვრული  $\lambda$  წირის  $\lambda(a)$  წერტილიდან  $\lambda(b)$  წერტილამდე  $L$  სიგრძის გამოსათვლელად

$$L = \int_a^b \left| g_{ij} \frac{dx^i(\lambda(t))}{dt} \frac{dx^j(\lambda(t))}{dt} \right|^{\frac{1}{2}} dt. \quad (21.97)$$

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე ვერენ, რომ

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (21.98)$$

მეტრიკულ ტენზორთან დაკავშირებულია მნიშვნელოვანი სიდიდე - სიგნატურა. სიგნატურა არის მრავალსახეობის რომელიმე წერტილში დიაგონალურ სახემდე მიყვანილი მეტრიკული ტენზორის დადებითი დიაგონალური ელემენტებისა და უარყოფითი ელემენტების რაოდენობებს შორის სხვაობა. მტკიცდება, რომ მრავალსახეობის ნებისმიერი სხვა წერტილისათვის სიგნატურა იგივე სიდიდეა. მეტრიკას ეწოდება ევკლიდური თუ მისი სიგნატურა რიცხობრივად უდრის მრავალსახეობის განზომილებას. მეტრიკას ეწოდება ლორენცული ან მინკოვსკის მეტრიკა, თუ, მისი სიგნატურაა  $\pm(n-2)$  სადაც  $n$  მრავალსახეობის განზომილებაა.

თუ მრავალსახეობაში გვაქვს მეტრიკული ტენზორი, მაშინ შესაძლებელია მასში შემოვიღოთ სიმეტრიული ბმა გრეხის გარეშე, რომელიც ცალსახად განისაზღვრება პირობით:

$$\nabla g = 0. \quad (21.99)$$

ლოკალურ კოორდინატთა ბაზისში ადვილად მივიღებთ, რომ

$$g_{ij,k} = g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l, \quad (21.100)$$

სადაც  $\Gamma$  სიმბოლოები სიმეტრიულია კოვარიანტული ინდექსების მიმართ, რადგან პირობის თანახმად გრეხა ნულის ტოლია, თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით ბმის კოეფიციენტების მიმართ, გვექნება

$$g_{il} \Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \quad (21.101)$$

ან

$$\Gamma_{jk}^l = \frac{1}{2} g^{ij} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right). \quad (21.102)$$

ამრიგად, მეტრიკული ტენზორის მოცემა ცალსახად განსაზღვრავს მრავალსახეობის ბმას. ეს ბმა არის რიმანის გეომეტრიის საფუძველი.

$\Gamma$ -სიმბოლოებს, რომლებიც მეტრიკული ტენზორით განისაზღვრება კრისტოფელის სიმბოლოებს უწოდებენ, ხოლო თვით ბმას - მეტრიკულ ბმას ან კრისტოფელის ბმას.

განვიხილოთ (21.99) პირობის ორი შედეგი: ერთია ის, რომ ორი  $\mathbf{X}$  და  $\mathbf{Y}$  კონტრავარიანტული ვექტორული ველის სკალარული ნამრავლი, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = g_{ij} X^i Y^j, \quad (5.103)$$

ინვარიანტულია  $\mathbf{X}$  და  $\mathbf{Y}$  ვექტორების მრავალსახეობის  $\lambda$  წირის გასწვრივ პარალელური გადატანის მიმართ. მეორეა ის, რომ გეოდეზიური წირის განტოლება შეიძლება მიღებულ იქნეს, როგორც ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანისათვის. მართლაც,

$$I = \int_a^b L ds, \quad L = g_{ij} \frac{dx^i(\lambda(s))}{ds} \frac{dx^j(\lambda(s))}{ds}, \quad (21.104)$$

სადაც  $\lambda$  წირი პარამეტრიზებულია რკალის  $s$  სიგრძის პარამეტრით  $\lambda$  წირის გასწვრივ. მაშინ გეოდეზიური წირის განტოლებას ექნება ასეთი სახე:

$$(u^j_{;k} + \Gamma^j_{ik} u^i) u^k = u^j_{;k} u^k = 0. \quad (21.105)$$

თუ პარამეტრი გეოდეზიური წირის გასწვრივ არ არის აფინური, მაშინ გეოდეზიური წირის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$u^j_{;k} u^k = \varphi u^j, \quad (21.106)$$

სადაც  $\varphi$  რაღაც სკალარული ფუნქციაა.

### ამოცანები და სავარჯიშოები

1. აჩვენეთ, რომ ლის ფრჩხილები აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]\mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]\mathbf{Y}] = 0.$$

2. აჩვენეთ, რომ, თუ  $T$  მთლიანად ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ  $AT = T$ . თუ  $s > n$  ( $n$  ვექტორული სივრცის განზომილებაა), მაშინ  $AT = 0$ .

3. აჩვენეთ, რომ გარე ნამრავლი, აკმყოფილებს ასოციაციურობისა და დისტრიბუციულობის კანონებს, თუმცა, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური.

4. დამტკიცეთ, რომ  $dA$  ფორმა არაა დამოკიდებული ლოკალური საკოორდინატო ბაზისის არჩევაზე.

5. ჩაწერეთ  $\omega$  ფორმა-1-ზე ლის ოპერატორის მოქმედების შედეგის ფორმულა და გადაწერეთ ლოკალური კოორდინატებით. რა სახე აქვს კომპონენტებს.

6. განსაზღვრეთ მრავალსახეობის აფინური ბმის არსი და ჩამოაყალიბეთ კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულის გამოთვლის წესი.

## ლიტერატურა

1. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972
2. H. Cartan. Calcul différentiel formes différentielles, Hermann Paris, 1967
3. Ферми Э. Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ., Мир, Москва, 1968
4. Бёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
5. Бёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ., Наука, Москва, 1978
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Пер. с англ., Мир, Москва, 1976



7. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ., Мир, Москва, 2002
8. Чандрасекар С. Математическая теория чёрных дыр, часть 1, пер. с англ., Мир, Москва, 1986

შინაარსი

წინასიტყვაობა		ბმ.
		4
შესავალი		5
I ნაწილი. ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები		8
თავი I	რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება მოდელირებაში	8
	1.1 ძირითადი ცნებები	8
	1.2 ბიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები	10
	1.3 ტრიმოლეკულური მათემატიკური მოდელები	11
	1.4 მიხაელის-მენტენის მათემატიკური მოდელი	12
	1.5 ლოტკა-ვოლტერას მათემატიკური მოდელი	12
	1.6 ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკური მოდელი	13
	1.7 პრიგოჟინ-ლეფვერის მათემატიკური მოდელი	14
	1.8 რეაქტორული სქემების გამოყენების ტექნიკა კოლმოგოროვის განტოლებების შესადგენად მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვებისათვის	15
ამოცანები და სავარჯიშოები		17
ლიტერატურა		19
II თავი	კლასიკური მექანიკის მათემატიკური მოდელები	20
	2.1 მატერიალური წერტილის ცნება და დინამიკის განტოლებები. n-სხეულის პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ლანჟევენის მათემატიკური მოდელი	20
	2.2 მყარი სხეულის დინამიკის მათემატიკური მოდელი	33
	2.3 საფრენი აპარატის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი	38
	2.4 განზოგადოებული კოორდინატები და ლაგრანჟის მათემატიკური მოდელი მათერიალურ წერტილთა სისტემის დინამიკის აღსაწერად. ჰამილტონის მოდელი. პუასონის ფრჩხილები	45

	2.5	გიროსკოპული სისტემების მათემატიკური მოდელირება	52
ამოცანები და საგარჯოშოები			52
ლიტერატურა			55
III თავი	რხევითი სისტემების მოდელირება		56
	3.1	არადემფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	62
	3.1.1	არადემფირებული, თავისუფალი მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	62
	3.1.2	არადემფირებული, თავისუფალი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	65
	3.1.3	არადემფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	67
	3.1.4	არადემფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელი)	69
ამოცანები და საგარჯოშოები			71
ლიტერატურა			71
	3.2	დემფირებული, თავისუფალი(საკუთრივი) რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	73
	3.2.1	დემფირებული, თავისუფალი(საკუთრივი)მექანიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	73
	3.2.2	დემფირებული, საკუთრივი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	77
	3.2.3	დემფირებული, საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	79
	3.2.4	დემფირებული, საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილი-ობგაძის მოდელის ბაზაზე	81
ამოცანები და საგარჯოშოები			83
ლიტერატურა			84
	3.3	იძულებითი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	85
	3.3.1	იძულებითი მექანიკური რხევითი	85

		პროცესების მოდელირება	
	3.3.2	იძულებითი ელექტრული რხევითი პროცესების მოდელირება	90
	3.3.3.	იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება	92
	3.3.4	იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება	93
ამოცანები და საგარჯიშოები			95
ლიტერატურა			95
	3.4	ბმული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	96
	3.4.1	ბმული მექანიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	97
	3.4.2	ბმული ელექტრული რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	100
	3.4.3	ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	101
	3.4.4	ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	102
ამოცანები და საგარჯიშოები			102
ლიტერატურა			103
	3.5	რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები	104
	3.5.1	ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი	104
	3.5.2	იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით	107
ამოცანები და საგარჯიშოები			108
ლიტერატურა			108
	3.6	არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	109
	3.6.1	არადემფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	110
	3.6.2	თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით	111
	3.6.3	დემფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება	112
	3.6.4	დემფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით	113

ამოცანები და საგარჯიშოები			114
ლიტერატურა			115
	3.7	ავტორხევითი სისტემები	116
	3.7.1	ზოგადი სქემები და სტრუქტურული თავისებურებები	116
	3.7.2	ვან-დერ-ვალის ავტოგენერატორის მათემატიკური მოდელი	117
	3.7.3	ავტორხევითი ჰიდროაეროდრეკადი სისტემები(ფლატერი და დიფერენცია)	119
	3.7.4	ქიმიური ავტორხევითი სისტემები(პრიგოჟინ-ლენვერის მოდელი)	125
ამოცანები და საგარჯიშოები			128
ლიტერატურა			128
	3.8	პარამეტრული რხევითი სისტემები	129
	3.8.1.	ფიზიკური ქანქარა საკიდი ღერძის პერიოდული გადაადგილებისას(განტოლება)	129
	3.8.2.	ელექტრული რხევითი სისტემა პერიოდული პარამეტრებით (მეისნერის განტოლება)	130
	3.8.3	პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში(მატიეს განტოლება)	131
ამოცანები და საგარჯიშოები			133
ლიტერატურა			133
	3.9	არაწრფივი იძულებითი რხევითი სისტემები	134
	3.9.1	ამოცანის ზოგადი დასმა	134
	3.9.2	ფრანგიშვილი-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი(დიუფინგის განტოლება)	135
	3.9.3	ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება, სხვადასხვა სახის პერიოდული გარე PR გამლიზიანებ-ლის მოქმედების შემთხვევაში	136
	3.10	ჩვეულებრივი სისტემების ანალიზური ამონახსნები და ელიფსური ფუნქციები	138
	3.10.1	წრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელის ინტეგრება	139

		კვადრატურებში	
	3.10.2	არაწრფივი ოსცილატორის თავისუფალი რხევების მოდელირება	142
	3.10.3	მეორე რიგის არაწრფივი სისტემები და ელიფსური ფუნქციები	144
	3.10.4	იაკობის ელიფსური ფუნქციები	146
ამოცანები და საგარჯიშოები			147
ლიტერატურა			148
	3.11	წრფივი სისტემების გამოკვლევა ფაზურ სივრცეში	149
	3.11.1	წრფივი დინამიკური სისტემების ფაზური ტრაექტორიების აგების ალგორითმი	149
	3.11.2	ფაზური ტრაექტორიები და ფაზური პორტრეტი	152
	3.11.3	კონსერვატული სისტემის ფაზური პორტრეტი	160
	3.11.4	არაწრფივი სისტემის მდგრადობის განმსაზღვრელი განსაკუთრებული წერტილების მდგრადობის გამოკვლევა	163
	3.11.4.1	უძრავი წერტილების კლასიფიკაცია	166
	3.11.4.2	უძრავი წერტილების ანალიზის მაგალითები	168
	3.11.4.3	ზღვართი ციკლები	173
ამოცანები და საგარჯიშოები			174
ლიტერატურა			175
	3.12	ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები	176
	3.12.1	ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი	177
	3.12.2	ლაგრანჟიანის თვისებები	180
	3.12.3	განზოგადოებული იმპულსის თვისებები	182
	3.12.4	ჰამილტონის ფორმალიზმი	184
	3.12.5	ჰამილტონის განტოლებები	185
	3.12.6	პუასონის ფრჩხილები	187
	3.12.7	ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები	189
	3.12.8	ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია	190
	3.12.9	კლასიკური მექანიკის გეომეტრია	192
ამოცანები და საგარჯიშოები			198
ლიტერატურა			198
	3.13	შეშფოთებათა თეორია და ჰამილტონური სისტემები	199

	3.13.1	შეშფოთებათა რეგულარული მწკრივები	200
	3.13.2	შეშფოთებათა სინგულარული მწკრივები	202
	3.13.3	დიფერენციალური განტოლებების რეგულარული შეშფოთებათა მწკრივები	203
ამოცანები და საგარჯიშოები			205
ლიტერატურა			205
	3.14	ქაოსი ჰამილტონურ სისტემებში	206
	3.14.1	კვეთის ზედაპირების მეთოდი ორი თავისუფლების ხარისხის მქონე ჰამილტონური სისტემებისათვის	207
	3.14.2	ჰენონ-ჰეილესის ჰამილტონიანი	208
	3.14.3	ბრტყელი ასახვები, რომლებიც ინახავენ ფართს	210
	3.14.4	კავშირი ფართის შემნახველ ასახვებსა და ჰამილტონურ სისტემებს შორის	213
	3.14.5	ტეილორ-ჩირიკოვის სტანდარტული ასახვა	214
	3.14.6	ლოკალური ქაოსის წარმოქმნის კრიტერიუმი(ლიაპუნოვის მაჩვენებლები)	216
	3.14.7	ჰამილტონური ქაოსი ჰიდროდინამიკურ სისტემებში	219
ამოცანები და საგარჯიშოები			220
ლიტერატურა			220
IV თავი	ეკონომიკის მათემატიკური მოდელები		222239
	4.1	მიკროეკონომიკის ძირითადი ცნებები. განურჩევლობის მრუდები. მოხმარებისა და მოთხოვნის თეორია	225
	4.2	რ.სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქცია და მოხმარებლის არჩევანის ამოცანა	239
	4.3	ფუნქციის ელასტიკურობა	244
	4.3.1	ელასტიკურობის ცნების გამოყენება ეკონომიკაში	250
	4.4	მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობა ფასის მიხედვით	253
	4.5	ამონაგების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით	256
	4.6	წარმოების თეორია. საწარმოო ფუნქცია	258
	4.6.1	საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები	260
	4.6.2	რამდენიმე რესურსის საწარმოო ფუნქციების სახეები	261
	4.7	ბაზრის მუშაობის ობობას ქსელისებრი	264

		მოდელი	
	4.8	ვალრასის თანმიმდევრული მიახლოების პროცესი ეროვნული-ეკონომიკის მოდელში	268
	4.9	წონასწორული ეკონომიკის მაკროეკონომიკური ანალიზი	272
	4.10	ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი	276
	4.11	ფონ ნეიმანის წონასწორული ეკონომიკური ზრდის დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელი	280
	4.12	ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში	284
	4.13	მონაცემთა კორელაციური ანალიზი. ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების კორელაცია. რეგრესიული ანალიზი	289
	4.14	ექსპორტ-იმპორტის ცნება. ექსპორტ-იმპორტს შორის არსებული უარყოფით საღდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის არსებული კორელაცია. დეტერმინაციის კოეფიციენტი	295
	4.15	კორელაცია საგარეო ვალების მოცულობასა და საქართველოს ბიუჯეტს შორის	301
	4.16	კორელაცია სამომხმარებლო კალათის მოცულობასა და ინფლაციის მაჩვენებელს შორის	304
	4.17	კავშირი კვების პროდუქტებზე ერთიან მოთხოვნასა, საშუალო ხელფასსა და საშუალო ფასს შორის. მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი	307
	4.18	კობ-დუგლასის წარმოებითი ფუნქცია Mathcad-ის ბაზაზე	312
	4.19	კორელაცია ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის საქართველოს მაგალითზე. ფილიპსის მრუდი	317
	4.20	განზოგადოებული წრფივი რეგრესია საქონლის ფასის პროგნოზირებისათვის	319
	4.21	არაწრფივი რეგრესია აქციის კურსის პროგნოზირებისათვის	321
	4.22	პოლინომური რეგრესია	325
	4.23	წრფივი დაპროგრამება	329



	4.24	საარსებო მინიმუმის დადგენა მოცემულ ქალაქში, მოცემულ რაიონში	332
	4.25	რესურსების ოპტიმალური განაწილება	339
	4.26	გადაზიდვების სატრანსპორტო ამოცანა	343
	4.27	არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა	348
	4.28	საინვესტიციო პროექტების შეფასების მეთოდები	352
	4.28.1	პროექტის რენტაბელობისა და რისკის გამოთვლა	352
	4.28.2	ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია	356
	4.28.3	საინვესტიციო პროექტის დღევანდელი სუფთა ღირებულების (NPV) დადგენა	360
	4.28.4	ინვესტიციების რენტაბელობის PI ინდექსის განსაზღვრა დისკონტირების გათვალისწინებით	361
	4.28.5	ინვესტიციების რენტაბელობის IRR ნორმის განსაზღვრა	362
	4.28.6	საინვესტიციო პროექტის დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრის მეთოდი	363
	4.28.7	ფინანსური ინსტრუმენტები	363
	4.29	წილადური რიგის მათემატიკური მოდელები ეკონომიკაში	365
	4.29.1	ელემენტარული ფუნქციების ჩვეულებრივი და წილადური რიგის წარმოებულების შედარებითი ანალიზი	366
	4.29.2	წილადური რიგის, დემპფირების ძალის ეკონომიკური რხევითი სისტემა	370
	4.29.3	წილადური რიგის ფინანსური სისტემის მათემატიკური მოდელი	373
ამოცანები და სავარჯიშოები			373
	4.30	დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი	374
	4.31	ეროვნული შემოსავლის დინამიკის სამუელსონ-ჰიქსის მოდელი	378
	4.32	ფერხიულსტის მოდელი ბანკში ანაბრების დინამიკისათვის	382
	4.33	ფრანგიშვილი-ობგაძის მათემატიკური მოდელი	389
	4.34	ეკონომიკური დინამიკის მატეის	394

		განტოლება	
	4.35	კურასაოს ეკონომიკურ-პოლიტიკური ბრძოლის მოდელი	397
ამოცანები და საგარჯიშოები			401
ლიტერატურა			402
II ნაწილი. განაწილებულპარამეტრიანი სისტემების მათემატიკური მოდელირება			406
V თავი	მრავალნაწილაკიანი სისტემების მათემატიკური მოდელირება		406
	5.1	ლიუვილის მათემატიკური მოდელი	406
	5.2	ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი	408
	5.3	ტენზორული აღრიცხვის მათემატიკური მოდელი	410
	5.4	სიმბოლური აღნიშვნები	418
	5.5	ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორი	421
	5.6	მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები. ჰამილტონ-კელის თეორემა	425
	5.7	ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები	430
	5.8	ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივთა მატრიცები დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით	435
	5.9	ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის	438
	5.10	ნოლის თეორემა. რეინერის დრეკადი მასალა. რეინერ-რივლინის სითხის რეოლოგიური განტოლება. მასალები მესხიერებით. განზომილებათა მეთოდი	440
ამოცანები და საგარჯიშოები			447
ლიტერატურა			448
VI თავი	დრეკადი(ელასტიური) მასალის ქცევის მათემატიკური მოდელი		450
	6.1	დრეკადობის(ელასტიურობის) თეორიის სტატიკური ამოცანები	450
	6.2	დინამიკის ამოცანების მათემატიკური მოდელირება	453
	6.3	წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის მათემატიკური მოდელი	455
ლიტერატურა			456

VII თავი	სითხეთა დინამიკის მატემატიკური მოდელები		457
	7.1	ნიუტონური და არანიუტონური სითხეების რეოლოგიური კანონები	457
	7.2	ნავიე-სტოქს-დიუგემის განტოლებები	459
	7.3	ნავიე-სტოქსის განტოლებები უკუმში სითხეებისათვის	460
	7.4	ნავიე-სტოქსის განტოლებები გაზებისათვის	461
	7.5	განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით	461
	7.6	ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის	463
	7.7	უწყვეტ გარემოში სითხოს განაწილების მათემატიკური მოდელირება (დიფუზიის განტოლება)	464
VIII თავი	მასალათა პლასტიკური მუშაობის მათემატიკური მოდელირება		468
	8.1	პლასტიკური დეფორმაცია	468
	8.2	პლასტიკური დეფორმაციების წარმოშობის კრიტერიუმები	471
ლიტერატურა			472
III ნაწილი. დინამიკური სისტემების კვლევის მეთოდები			474
IX თავი	ბულის ალგებრების კატეგორია		474
	9.1	გამონათქვამთა ბულის ალგებრა	474
	9.2	სიმრავლეთა ბულის ალგებრა	481
	9.2.1	ფრაქტალი, როგორც სიმრავლე	484
	9.3	რელაციური სისტემები	486
	9.4	თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები	489
	9.5	პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგაძის გეომეტრიული კოდირების RO მეთოდი	490
ამოცანები და საგარჯიშოები			493
ლიტერატურა			496
X თავი	რიცხვითი სიმრავლეები და ალგებრული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები		498
	10.1	ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენება	501
	10.1.1	რიცხვთა თეორიის ელემენტები	505
	10.1.2	შედარებათა თეორიის ელემენტები	508
	10.2	რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ	510

		რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიური აგება	
	10.2.1	არაწრფივი განტოლების ამოხსნა ნიუტონის ალგორითმით	513
	10.2.2	არაწრფივი განტოლების ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით	516
	10.2.3	ორ და სამცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მატრიცული ხერხით Mathcad-ის ბაზაზე	518
	10.2.4	მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით	519
	10.2.5	არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით	523
	10.2.6	არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიუტონის მეთოდით	525
	10.3	კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე	526
	10.3.1	კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები	527
	10.3.2	ორწევრა განტოლებების ამოხსნა	528
	10.4	რიცხვითი სისტემების აგება გრასმან-კლიფორდის პროცედურით	530
	10.4.1	კვატერნიონები	532
	10.4.2	პაულის რიცხვები	533
	10.4.3	ჰიპერკომპლექსური რიცხვები	534
	10.5	კელი-დიქსონის პროცედურა	534
	10.5.1	ოქტავეები	535
	10.6	ზოგიერთი რიცხვითი სისტემის მატრიცული წარმოდგენა	536
ამოცანები და საგარჯიშოები			537
ლიტერატურა			540
XI თავი	ფუნქციონალური სიმრავლეები		542
	11.1	წრფივი ფუნქციონალური სივრცე	542
	11.2	ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე	544
	11.3	ანალოგია $n$ განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	548
	11.4	სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე	549

	11.5	დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	549
ამოცანები და საგარჯიშოები			550
ლიტერატურა			553
XII თავი	გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალები		554
	12.1	ფრაქტალი და პოზიციური თვლის სისტემა	556
	12.1.1	პოზიციური სისტემების ხისმაგვარი სტრუქტურა	556
	12.1.2	ორობითი სისტემა	558
	12.1.3	სამობითი სისტემა	559
	12.1.4	სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა	561
	12.1.5	კანტორის ფრაქტალი	562
	12.2	ფრაქტალური სიმრავლეების განზომილების ექსპერიმენტული განსაზღვრა	564
	12.2.1	რიჩარდსონის ექსპერიმენტი	564
	12.2.2	ფრაქტალური განზომილების ცნება	566
	12.3	კოხის “დაფრაქტალებული” წირი	568
	12.3.1	კოხის დაფრაქტალებული კუნძული	570
	12.3.2	მინკოვსკის ფრაქტალი	572
	12.3.3	ფრაქტალური კუნძული	573
	12.3.4	მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული	575
	12.3.5	ფიორდების ფრაქტალური კუნძული	576
	12.3.6	ყინულოვანი ფრაქტალური კვადრატი	578
	12.3.7	ყინულოვანი ფრაქტალური სამკუთხედი	580
	12.3.8	გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალის აგების ალგორითმი	582
XIII თავი	სპირალები, ხეები და ვარსკვლავები		584
	13.1	სპირალები	584
	13.2	პითაგორას ფრაქტალური ხე	592
	13.2.1	პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე	595
	13.3	ვარსკვლავები	605
ლიტერატურა			608
XIV თავი	გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების გარდაქმნათა ანალიზი		610
	14.1	ინვარიანტული გარდაქმნა	610
	14.2	მობრუნება	611
	14.3	გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა	612
	14.4	მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა	612

		კომპოზიცია	
	14.5	სიმეტრიის გარდაქმნა	616
	14.6	გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალის დინამიკური სტრუქტურა	622
	14.7	მეტრიკული სივრცის აფინური გარდაქმნა	623
	14.8	მანძილი მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლეებს შორის	626
ლიტერატურა			627
XV თავი	დინამიკური ფრაქტალები		629
	15.1	დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალები	629
	15.2	ფრაქტალური ორბიტები და ჟულიას სიმრავლეები	639
	15.3	მანდელბროტის სიმრავლე	646
XVI თავი	გამოსახულების შეკუმშვა ვეივლეტებით		649
	16.1	ვეივლეტები და სიგნალების მათემატიკური მოდელირება	649
	16.2	ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა	654
	16.3	ვეივლეტისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები	656
	16.4	ვეივლეტ-ფუნქციების კერძო შემთხვევები	658
	16.5	ვეივლეტ-ანალიზი Mathcad-ის ბაზაზე	662
	16.6	ვეივლეტ-გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტვრა Mathcad-ის ბაზაზე	665
	16.7	შერეული ფრაქტალურ-ვეივლეტური კოდირება	671
	16.8	იტერირებად ფუნქციათა სისტემები	673
	16.8.1	ამოსახულების კოდირების მაგალითი	675
	16.8.2	IFS ფუნქციათა შისტემა ხაუსდორფის სივრცეში	676
	16.8.3	ამოსახულების კოდირება შავ-თეთრ ფერებში	677
	16.8.4	ლაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციათა სისტემა	678
	16.8.5	შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების აფინური ასახვა	679
	16.8.6	შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების კუმშვითი ასახვა	680
XVII თავი	ტოპოლოგიური მეთოდები		681
	17.1	$\mathbb{R}^n$ სივრცე და მისი ტოპოლოგია	681

	17.2	ასახვა	684
	17.3	ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია	687
	17.4	ჯგუფთა თეორია	689
	17.5	წრფივი ალგებრა	693
	17.6	კვადრატულ მატრიცთა ალგებრა	698
ლიტერატურა			703
XVIII თავი	დიფერენცირებადი მრავალსახეობა და ტენზორი		704
	18.1	მრავალსახეობის ცნება	704
	18.2	სფერო, როგორც მრავალსახეობა	708
	18.3	მრავალსახეობის სხვა მაგალითები	710
	18.4	მრავალსახეობის გლობალური თვისებები	711
	18.5	მრუდი	712
	18.6	მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქცია	713
	18.7	ვექტორი და ვექტორული ველი	715
	18.8	ბაზისური ვექტორები და ბაზისური ვექტორული ველები	718
	18.9	განფენილი სივრცე	720
	18.10	განფენილი სივრცის მაგალითები	723
	18.11	განფენილი სივრცის სიღრმისეული ანალიზი	725
	18.12	ვექტორული ველი და ინტეგრალური წირები	731
	18.13	$\frac{d}{d\lambda}$ ოპერატორის ექსპონენტა	732
	18.14	ლის ფრჩხილები და არაკოორდინატული ბაზისი	733
	18.15	როდისაა ბაზისი კოორდინატული	737
	18.16	ფორმა-1	737
	18.17	ფორმა-1-ის მაგალითები	738
	18.18	დირაკის დელტა-ფუნქცია	739
	18.19	გრადიენტის ცნება და ფორმა-1	740
	18.20	ბაზისური ფორმა-1 და მისი კომპონენტები	742
	18.21	ინდექსური აღნიშვნები	744
	18.22	ტენზორი და ტენზორული ველი	744
	18.23	ტენზორის მაგალითები	746
	18.24	ტენზორის კომპონენტები და ტენზორული ნამრავლი	747
	18.25	ნახვევის ოპერაცია	747
	18.26	ბაზისის ცვლილება	748

	18.27	ტენზორული ოპერაციები კომპონენტებზე	749
	18.28	ფუნქცია და სკალარი	750
	18.29	მეტრიკული ტენზორი ვექტორულ სივრცეში	750
	18.30	მეტრიკული ტენზორის ველი მრავალსახეობაზე	755
	18.31	ფარდობითობის სპეციალური თეორია	756
თეორიული მასალის გამეორება			757
ლიტერატურა			758
XIX თავი	ლის ალგებრები და ლის ჯგუფები		759
	19.1	გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფი	759
	19.2	ლის განტოლება	762
	19.3	ინვარიანტები. ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი	765
	19.4	გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფის ექსპონენციალური წარმოდგენა	768
	19.5	ინვარიანტული განტოლებები	772
	19.6	დიფერენციალური განტოლებების დასაშვები ჯგუფი	773
	19.6.1	სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ჯგუფი	773
	19.6.2	წერტილოვანი გარდაქმნები და გაფართოების ფორმულები	776
	19.6.3	განმსაზღვრელი განტოლებები	780
	19.7	ლის ალგებრა	782
	19.7.1	გაფართოების კოორდინატული გადმოცემა	783
	19.7.2	პირველი გაფართოება	784
	19.7.3	მეორე გაფართოება	784
	19.8	ლის მეთოდის გამოყენების მაგალითები	785
	19.8.1	ბიურგერსის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა	790
	19.8.2	კორტევევა-დე-ფრიზის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა	791
ამოცანები და სავარჯიშოები			792
ლიტერატურა			793
XX თავი	დიფერენცირებადი მრავალსახეობის ლოკალური გეომეტრიის ელემენტები		795
	20.1	მხები ვექტორი (კონტრავარიანტული ვექტორი)	796
	20.2	ფორმა-1 (კოვექტორი ანუ კოვარიანტული	799



		ვექტორები)	
	20.3	ტენზორები და ტენზორული ნამრავლი	802
ამოცანები და საგარჯიშოები			805
ლიტერატურა			806
XXI თავი	კარტანის დიფერენციალური ფორმები		807
	21.1	გარე დიფერენცირება	809
	21.2	ლის ფრჩხილები და ლის წარმოებული	810
	21.3	კოვარიანტული წარმოებული	812
	21.4	პარალელური გადატანა და გეოდეზიური წირები	815
	21.5	კარტანის ფორმები	816
	21.6	რიმანისა და რიჩის ტენზორები	818
	21.7	მეტრიკა და მეტრიკული ბმა	819
ამოცანები და საგარჯიშოები			821
ლიტერატურა			822