

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის  
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების  
ფაკულტეტის „მოდელირებისა და მართვის  
საინჟინრო-სამეცნიერო ცენტრი“

თამაზ ოზგაძე, არჩილ ფრანგიშვილი, ოთარ კემულარია,

მარიამ რაშოიანი

ვარიაციული მეთოდები

თბილისი

2019

უაკ 517.958

წიგნში განხილულია უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ამოცანების ამოხსნის ვარიაციული მეთოდები. ამისათვის მოცემულია ყველა ის მათემატიკური ცნება და აპარატი, რაც საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ რთული არაწრფივი ამოცანები. გადმოცემულია მათემატიკური ლოგიკისა და სიმრავლეთა თეორიის ის ნაწილები, რაც საშუალებას იძლევა, ავაგოთ რთული გეომეტრიის არის საზღვრის ანალიზური გამოსახულება - RO ფუნქცია. გადმოცემულია ფუნქციონალური ანალიზის ის საკითხები, რაც საფუძვლად უდევს ვარიაციულ მეთოდებს.

შესწავლილია ვარიაციული ამოცანების კლასიკური ამოცანები და მათი ამოხსნის როგორც ანალიზური, ასევე, მიახლოებითი მეთოდები. ძირითადი აქცენტი გადატანილია ამოცანების ამოხსნის ტექნიკაზე. განხილულია ჰილბერტის სივრცეში არაწრფივი ოპერატორული განტოლებების მიახლოებითი განზოგადებული ამონახსნის პოვნის ვარიაციული მეთოდები. მოცემულია კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის მაგალითები Mathcad-ის ბაზაზე.

წიგნი განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ბაკალავრიატის, მაგისტრატურის და დოქტორანტურის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტი. პროფესორი თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2019

ISBN 978-9942-8-0957-6

©

ყველა საავტორო უფლება დაცულია. ამ წიგნის ნებისმიერი ნაწილის (ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) გამოყენება არცერთი ფორმით და საშუალებით (ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება, გამომცემლის წერილობითი ნებართვის გარეშე. საავტორო უფლების დარღვევა ისჯება კანონით.

## წინასიტყვაობა

შემოთავაზებული წიგნის სხვადასხვა ნაწილებს, პროფესორი თამაზ ობგამე, წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში და ამჟამად, კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

წიგნში ფართოდ გამოიყენება **Mathcad**-ის გამოყენებითი პროგრამების პაკეტი. ასევე, სხვა შესაბამისი ინფორმაციული ტექნოლოგიები. წიგნის ყოველი თავის ბოლოს, მოყვანილია ლიტერატურის სია და დამოუკიდებლად შესასრულებელი ამოცანები.

წიგნი შედგება 5 თავისაგან. **პირველ თავში**, განხილულია მათემატიკური ლოგიკისა და სიმრავლეთა თეორიის ელემენტები, რელაციური სისტემები და გეომეტრიული კოდირების რვაჩოვ-ობგამის მეთოდი. რიცხვითი სიმრავლეების აგების **გრასმანის ალგორითმი**, მოყვანილია ჰიპერკომპლექსური რიცხვების აგების **კელის ალგორითმი**, **კვატერნიონები**, **ოქტავები** და **კლიფორდის რიცხვები**, შედარებათა თეორია და რიცხვთა თეორიის ზოგიერთი ამოუხსნელი ამოცანა. მოცემულია არაწრფივი ალგებრული განტოლების ამოხსნის იტერაციული მეთოდი, შესაბამისი ცდომილებათა ანალიზით. განხილულია წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის იტერაციული მეთოდები და ცუდად განპირობებული სისტემების ანალიზი.

**მეორე თავში** მოცემულია ფუნქციონალური სივრცეების აგების ალგებრული და ტოპოლოგიური ტექნიკა. განხილულია **მეტრიკული სივრცე**, **ლინეალი**, **უნიტარული**, **ჰილბერტისა** და **ბანახის** სივრცეები. მოყვანილია **სობოლევის სივრცის** აგების ტექნიკა. შესწავლილია მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანის ამოხსნის მეთოდები. სილვესტრის კრიტერიუმი დიფერენციალური კვადრატული ფორმებისათვის. მოყვანილია მრავალი ცვლადის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანის ამოხსნის მეთოდები. განხილულია ცუდად განპირობებული წრფივ განტოლებათა სისტემისა და არაწრფივ განტოლებათა

სისტემის ამოხსნის ამოცანის დაყვანის გზები მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ამოცანაზე. შესწავლილია წრფივი და არაწრფივი დაპროგრამების კლასიკური ამოცანები. განხილულია გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტების მონაცემების სტატისტიკურად დამუშავების მეთოდები სხვადასხვა ფუნქციონალურ სივრცეში. მოყვანილია შესაბამისი ამოცანების რიცხვითი რეალიზაციები, რაც ნათელს ხდის მათი გამოყენების საზღვრებს.

**მესამე თავი** მოიცავს კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანებს. გადმოცემულია ფუნქციონალის პირველი და მეორე ვარიაციის პოვნის ტექნიკა, ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით, ეილერის განტოლებების კერძო შემთხვევები, ეილერის განტოლების კანონიკური სახე, ფუნქციონალებისა და მათი შესაბამისი ექსტრემალების განტოლებათა ცხრილი, ვარიაციული ამოცანების მოძრავი საზღვრებით. შესწავლილია ფუნქციონალების პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები, ლაგრანჟის ამოცანა, მაიერის ამოცანა და ბოლცას ამოცანა. განხილულია ლეჟანდრისა და იაკობის თეორემები. განხილულია ჰამილტონური სისტემების კვლევის ვარიაციული მეთოდები და დინამიკური განტოლებების ანალიზი. განხილულია ტენზორის ცნება. ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები.

**მეოთხე თავში** განხილულია ოპერატორები და ფუნქციონალები ჰილბერტის სივრცეში. ბანახის თეორემა მკუმშავი ოპერატორის შესახებ სრულ მეტრიკულ სივრცეში. განხილულია სიმეტრიული, დადებითი და დადებითად განსაზღვრული წრფივი ოპერატორები. მოყვანილია გრინის ფორმულა მრავალი ცვლადის ფუნქციის ნაწილობითი ინტეგრების შესახებ. შესწავლილია ფუნქციონალები, როგორც ოპერატორის კერძო შემთხვევა. მოყვანილია რისის თეორემა.

**მეხუთე თავში** დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ვარიაციული მეთოდები, განხილულია თეორემა კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის შესახებ. შემოყვანილია ოპერატორული განტოლების განზოგადებული ამონახსნის ცნება. ამოხსნილია დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის მართკუთხა არეში. ოპერატორული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად, განხილულია **რიტცის, გალიორკინ-პეტროვის და რვაჩოვ-ობგამის** ვარიაციული მეთოდები. მოყვანილია ბაზისის შერჩევის გზები. გადმოცემულია ვარიაციული მეთოდების გამოყენებით, პრაქტიკული საინჟინრო ამოცანების

გადაწყვეტის ტექნიკა არაწრფივი ოპერატორული განტოლებების შემთხვევაში.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ საქართველოში ჩატარებული განათლების რეფორმის შედეგად, ისე გამარტივდა მათემატიკის ზოგადი კურსის პროგრამა და იმდენად შემცირდა საათების რაოდენობა, რომ ჩვენ იძულებული ვიყავით დაგვემატებინა უმაღლესი მათემატიკის რიგი საკითხების განხილვა, რათა შეგვემზადებინა სტუდენტები უფრო რთული, სპეციალური საკითხებისთვის.

ავტორები მადლობას უხდებიან მთავარ სპეციალისტს ვერა ქორთიევას, ასევე, მაგისტრანტს თ.ცერცვაძეს ტექსტის რედაქტირებისა და აკრეფისათვის.

# I თავი. მათემატიკის დამატებითი საკითხები

## 1.1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგეხსენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ გამონათქვამებს უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

**მაგალითად:**  $p$  – „სოკრატე ადამიანია“;

$q$  – „ადამიანი მოკვდავია“;

$r$  – „სოკრატე მოკვდავია“.

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ ბინარული და უნარული ოპერაციებით.

**განსაზღვრება:** უნარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე(გამონათქვამზე). უნა - ლათინურად ერთს ნიშნავს.

**განსაზღვრება:** ბინარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე(გამონათქვამზე). ბი - ლათინურად ორს ნიშნავს.

**განსაზღვრება:** ორი  $p$  და  $q$  გამონათქვამის დიზიუნქცია („ $\vee$ ” - ან) ეწოდება ისეთ  $p \vee q$  გამონათქვამს ( $p$  ან  $q$ ), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან  $p$  ან  $q$  (ერთ-ერთი მაინც).

**არისტოტელეს მოდელები[1-3]** (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში ), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი (**true**) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი (**false**) გამონათქვამისა კი, უდრის 0-ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის (ცხრილი 1):

ცხრილი 1

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

განსაზღვრება: ორი  $p$  და  $q$  გამონათქვამის კონიუნქცია (“ $\wedge$ ” – და) ეწოდება ისეთ  $p$  და  $q$  გამონათქვამს ( $p$  და  $q$ ), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია  $p$  და  $q$  (ორივე ერთდროულად).

კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი(ცხრილი 2)

ცხრილი 2

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

განსაზღვრება: ორ  $p$  და  $q$  გამონათქვამს ექვივალენტური ( $\equiv$ ) ეწოდებათ (ჩაწერენ  $p \equiv q$ ) თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები მათში შემავალი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი ორი ბინარული ოპერაციის („ $\vee$ ” და “ $\wedge$ ”) თვისებები.

ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად (ცხრილი 3).

ცხრილი 3

გამონათქვამების თვისებები	თვისების დასახელება	შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის	ემთხვევიან(+) თუ, არ ემთხვევიან(-) თვისებები
$p \vee q \equiv q \vee p$	კომუტაციურობის თვისება	$a+b=b+a$	+
$p \wedge q \equiv q \wedge p$		$a \cdot b = b \cdot a$	+
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	ასოციურობის თვისება	$(a+b)+c=a+(b+c)$	+
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		$(a \cdot b)c = a \cdot (b \cdot c)$	+
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	დისტრიბუციულობის თვისება	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	+
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$		$(a \cdot b) + c \neq (a + c) \cdot (b + c)$	-
$p \vee p \equiv p$	იდემპოტენტობის თვისება	$a+a \neq a$	-
$p \wedge p \equiv p$		$a \cdot a \neq a$	-

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან შედარებით. რაც იმის მომასწავებელია, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართებაში (ალგებრის თვალსაზრისით) უფრო სხვა სტრუქტურული სისტემაა **ბულის ალგებრასთან** შედარებით.

ეხლა, განვიხილოთ უარყოფის **უნარული** ოპერაცია, რომელიც განისაზღვრება გამონათქვამებზე:

**განსაზღვრება:**  $p$  გამონათქვამის უარყოფა (“ $\neg$ ”-არა) ეწოდება ისეთ  $p$  გამონათქვამს(არა  $p$ ), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა  $p$  მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა  $p$  ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე (ცხრილი 4) :

ცხრილი 4

<b><math>p</math></b>	<b><math>\neg p</math></b>
1	0
0	1

ამრიგად, გამონათქვამთა ალგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია ( $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\neg$ ). ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს მთელ გამონათქვამთა ალგებრას. ანალოგიურ, ალგებრულ სისტემებს **ბულის ალგებრებს** უწოდებენ.

ყველა **სხვა ოპერაცია** გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას: “თუ  $p$ , მაშინ  $q$ ”. ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად :  $p \Rightarrow q$  ( $p$  – დან გამომდინარეობს  $q$ ). “ $\Rightarrow$ ” - სიმბოლოს **იმპლიკაციას** უწოდებენ.

იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებები, საჭიროა გამოვყოთ ის **ძირითადი კანონები**, რომლებსაც ჩვენ **აზროვნების კანონებს** ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალიზაცია გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას (ცხრილი 5) :

ცხრილი 5

<b>კანონის ფორმალური ჩაწერა</b>	<b>კანონის დასახელება</b>
$p \vee (\neg p) \equiv 1$	გამორიცხული მესამის კანონი



$p \wedge (\neg p) \equiv 0$	წინააღმდეგობის კანონი
$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p; p \wedge 0 \equiv 0$	შთანთქმის კანონები
$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$	კონტრაპოზიციის კანონი
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r)$	სილოგიზმის კანონი
$\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge \neg q$	დე მორგანის კანონები
$\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$	
$\neg (\neg p) \equiv p$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	ექვივალენტობა

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა: სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალიზაცია გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

**მაგალითად:** ვთქვათ, გვაქვს წინადადება - “თუ, დიდია ტენიანობა და მაღალია ტემპერატურა, მაშინ ჩვენ, თავს ვერ ვგრძნობთ კარგად”. მოვახდინოთ მისი ფორმალიზაცია. ამისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

“დიდია ტენიანობა” – აღვნიშნოთ **P** ასოთი ;

“მაღალია ტემპერატურა” – აღვნიშნოთ **Q** ასოთი ;

“თავს ვგრძნობთ კარგად ” – აღვნიშნოთ **C** ასოთი ;

მაშინ, შემოთავაზებული წინადადება შეიძლება ფორმალურად ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg C). \quad (1.1)$$

ასეთნაირად აგებულ ფორმალურ გამოსახულებებს **ბულის ფორმულებს** უწოდებენ.

**განსაზღვრება:** ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც აიგებიან ელემენტარულ ატომებზე - საწყის გამონათქვამებზე, ბულის ალგებრის სამი ოპერაციისა, იმპლიკაციის ცნებისა და ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით **ბულის ფორმულები** ეწოდებათ.

**მაგალითად:**  $P \wedge$  ; და  $\Rightarrow (\neg C)$  - არ არიან ბულის ფორმულები.

**განსაზღვრება:** ბულის ფორმულებს **ექვივალენტური** ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

**მაგალითად:** განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები მართლაც ექვივალენტური არიან.

განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების  $(p, q)$  ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 6) და ვაჩვენოთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \quad (1.2)$$

**დამტკიცება :**

ცხრილი 6

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. ანუ, ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური რ.დ.გ.

**განსაზღვრება:** ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების (გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – **ტავტოლოგია** ეწოდება.

**მაგალითად:**

1)  $G \equiv p \vee (\neg p)$  – ტავტოლოგიაა, გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

2) განვიხილოთ ფორმულა:  $H \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$ . მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად, საჭიროა, ან შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი, ან გავამარტივოთ ის აზროვნების ზემოთ მოყვანილი კანონების მიხედვით. ჩვენ, ამ მაგალითში, ვირჩევთ ბულის ფუნქციის გამარტივების გზას :

$$\begin{aligned} H &\equiv (((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \vee Q) \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q) \equiv \\ &\equiv (0 \vee (Q \wedge P)) \Rightarrow Q \equiv ((Q \wedge P) \Rightarrow Q) \equiv (\neg(Q \wedge P)) \vee Q \equiv (\neg Q) \vee (\neg P) \vee Q \equiv \\ &\equiv 1 \vee (\neg P) \equiv 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა.

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ ფორმულა **წინააღმდეგობრივია** (არაა სწორი), თუ ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების(მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

**მაგალითად:**  $G \equiv p \wedge (\neg p)$  ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

**სავარჯიშო:** აჩვენეთ, რომ ფორმულა

$$H \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \wedge (\neg Q)) - \text{წინააღმდეგობრივია.} \quad (1.4)$$

**განსაზღვრება:** ატომს ან ატომის უარყოფას **ლიტერა** ეწოდება.

**მაგალითად :**  $Q; \neg P$  - ლიტერებია.  $P \Rightarrow Q$  - არაა ლიტერა.

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ ფორმულა ;

$$F \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n ; \quad (1.5)$$

წარმოადგენილია **კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული  $F_i$  წარმოადგენს **დიზიუნქტიურ ლიტერას** ანუ კონიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა, შეიცავს ლიტერების დიზიუნქციათა კონიუნქციას. **მაგალითად:**

$$F \equiv (P \vee (\neg Q)) \wedge (\neg P \vee Q). \quad (1.6)$$

**ანალოგიურად, განიხილავენ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ცნებას.**

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n \quad (1.7)$$

წარმოადგენილია **დიზიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული  $F_i$  წარმოადგენს კონიუნქტიურ ლიტერას ანუ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა შეიცავს ლიტერების კონიუნქციათა დიზიუნქციას.

**მაგალითად :**  $F \equiv (P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q). \quad (1.8)$

**თეორემა :** ვთქვათ მოცემულია ფორმულები  $F_1; F_2; \dots F_n$  და ფორმულა  $G$ . ფორმულა  $G$  გამომდინარეობს  $F_1; F_2; \dots F_n$  ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა  $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow G$  ტავტოლოგიაა.

**თეორემა :** ვთქვათ მოცემულია ფორმულები  $F_1; F_2; \dots F_n$  და ფორმულა  $G$ . ფორმულა  $G$  გამომდინარეობს  $F_1; F_2; \dots F_n$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ,

როცა ფორმულა  $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \wedge (\neg G)$  წინააღმდეგობრივი ფორმულაა.

## P.S.

- 1) წარმოდგენილი თეორია, წარმოადგენს არა მარტო სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას **რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის შესახებ**, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით [4];
- 2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს **სამნიშნა ლოგიკაც**. აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია [3].
- 3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n-ნიშნა ლოგიკაც**. რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში [5].
- 4) შემუშავებულია **არამკაფიო ლოგიკაც** [6]. აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანაში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია.
- 5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, **ინტუიციონისტურ ლოგიკას**, რომლის ფუძემდებლებიც არიან ბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი [7]. ინტუიციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

## 1.2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურად. სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

**მაგალითად:**

A – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;

N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

M – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი **გეორგ კანტორი**[8]. სიმრავლის ცნებას ზუსტი განსაზღვრება არ აქვს, თუმცა, ის მოიცემა ინტუიციურად გ.კანტორის მიერ შემდეგი ფორმით:

**მინიშნება:** სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

**განსაზღვრება:** ორ სიმრავლეს ეწოდებათ ტოლი თუ, ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად:  $A=B$ .

შემოვიღოთ დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.

**განსაზღვრება:** ორი A და B სიმრავლის **გაერთიანება** (“ $\cup$ ” - გაერთიანება) ეწოდება ისეთ  $A \cup B$  სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A ან B სიმრავლეს(ერთ-ერთს მაინც).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \vee e \in B\}. \quad (1.9)$$

ჩანაწერი  $e \in A$  - წაიკითხება ასე “ e ეკუთვნის(როგორც ელემენტი) A სიმრავლეს”.

**P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განსაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.**

**განსაზღვრება:** ორი A და B სიმრავლის **თანაკვეთა** (“ $\cap$ ” - თანაკვეთა) ეწოდება ისეთ  $A \cap B$  სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A-საც და B - საც (ერთდროულად).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cap B = \{e \mid e \in A \wedge e \in B\}. \quad (1.10)$$

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდან ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განსაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ეხლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

**განსაზღვრება:** ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს ცარიელი სიმრავლე ( $\emptyset$ ) ეწოდება.

P.S.

1. ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში. **განსაზღვრება:** ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს მოცემული თვისების ყველა სხვა სიმრავლეს უნივერსალური (E) სიმრავლე ეწოდება.

2. უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

3. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას.

სიმრავლე, რომელიც თავის თავს შეიცავს ელემენტის სახით, ცოცხალი სისტემების სივრცეში მოხვედრისას, ფრაქტალად გარდაიქმნება, რადგან სხვადასხვა მასშტაბში აქვს, ერთიდაიგივე, ერთმანეთში უსასრულოდ ჩალაგებული განუსაზღვრელი სტრუქტურა.

ამდენად, ასეთი ტიპის წარმონაქმნები არ უნდა ჩავთვალოთ კლასიკურ სიმრავლედ ანუ უნივერსალური სიმრავლისათვის ასეთი წინააღმდეგობრივი სტრუქტურის მოთხოვნა არაა მართლზომიერი.

ის ფაქტი რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი ანუ ჩართულია მასში როგორც ქვესიმრავლე, ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \subseteq B.$$

ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდეც მას.

იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხებულია, ამბობენ რომ, A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი და ჩაწერენ  $A \subset B$ .

ეხლა განვიხილოთ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე

განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა (ცხრილი 7).

ცხრილი 7

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთისა თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A \cup B = B \cup A$	კომუტაციურობა	$p \vee q \equiv q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ასოციურობა	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$		$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$A \cup A = A$	იდემპოტენტობა	$p \vee p \equiv p$
$A \cap A = A$		$p \wedge p \equiv p$
$A \cup E = E; A \cup \emptyset = A;$ $A \cap E = A; A \cap \emptyset = \emptyset$	შთანთქმის კანონები	$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p; p \wedge 0 \equiv 0$

ეხლა, შემოვიღოთ გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას **სიმრავლის დამატება** ეძახიან.

**განსაზღვრება:** მოცემული  $A$  სიმრავლის **დამატება**  $E$  უნივერსუმამდე ეწოდება ისეთ  $A^c$  სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის  $E$ -ს და არ ეკუთვნის  $A$ -ს.

ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$A^c = \{e \mid e \in E \wedge e \notin A\}. \quad (1.11)$$

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (1.12)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (1.13)$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგნაირად:

$$(A^c)^c = A. \quad (1.14)$$

**P.S.** როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაობისა, ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან.

**განსაზღვრება:** ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ **ჰომომორფული** თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.

ასე რომ, ცხადია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა ჰომომორფულია სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.

### 1.2.1. სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი. მიმართება. ფუნქცია. ფუნქციონალი და ოპერატორი

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს  $A$  სიმრავლე. მაშინ ამ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს აღნიშნავენ  $A \times A = A^2$  სიმბოლოთი.

**განსაზღვრება:** ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთი  $(a;b)$  დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის  $A$ -ს, ხოლო მეორე  $B$ -ს. სიმბოლოების საშუალებით ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$$A \times B = \{(a;b) | a \in A \wedge b \in B\}. \quad (1.15)$$

ეს განმარტება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ მიმართებისა და ფუნქციის ცნება.

**განსაზღვრება:** ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ  $R$  ქვესიმრავლეს მიმართება ეწოდება. ე.ი. თუ  $R$  მიმართებაა, მაშინ

$$R \subset A \times B. \quad (1.16)$$

**მაგალითი :** თუ,  $A$  – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა (წრფის წერტილების სიმრავლე), მაშინ  $A^2$  – დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს და ნებისმიერი მონაკვეთი ამ სიბრტყეზე, ან ნებისმიერი წერტილთა ქვესიმრავლე, იქნება მიმართება განსაზღვრული  $A$  სიმრავლეზე.

**განსაზღვრება:** ისეთ მიმართებას, რომლის დროსაც  $a$ -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება  $b$ -ს ერთადერთი მნიშვნელობა ფუნქცია ეწოდება.

ე.ი. ფუნქცია ისეთი ასახვაა  $f:A \rightarrow B$ , რომლისთვისაც  $A$  სიმრავლის ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეესაბამება  $B$  სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი. სხვანაირად რომ ვთქვათ,  $f$  ფუნქციას მოეთხოვება ცალსახობა.

**P.S.**

არსებობს სამი ტიპის გადასახვა: სურექცია, ინექცია და ბიექცია. სურექციის დროს გადასახვაში მონაწილეობენ  $A$  და  $B$  სიმრავლეების



ყველა ელემენტი; ინექციის დროს  $A$  სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაშია  $B$  სიმრავლის რაღაც ნაწილთან; ხოლო ბიექციის დროს, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა  $A$  და  $B$  სიმრავლეებს შორის. ასე, რომ ბიექცია არის, ერთდროულად ინექცია და სურექცია.

**განსაზღვრება:** თუ, გვაქვს ისეთი ასახვა  $f:A \rightarrow B$ , რომ  $A$  და  $B$  რაიმე აბსტრაქტული სიმრავლეებია (ფუნქციები, ადამიანები არჩეული გარკვეული ნიშნით, ქალაქები, ნირონები . . .), მაშინ  $f$  ასახვას ოპერატორს უწოდებენ.

**განსაზღვრება:** ფუნქციებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება.

**მაგალითი:**  $C^\infty(G)$  - თავის ნებისმიერი რიგის წარმოებულთან ერთად უწყვეტი, ფუნქციებისაგან შემდგარი სიმრავლეა.

$L_2$  - კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებისაგან შედგენილი ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა.

რაც შეეხება ოპერატორის ცნებას, ჩვენ ვიცით, წარმოებულის ოპერატორი  $\frac{d}{dx}:L_2 \rightarrow L_2$ ; სადაც  $L_2$  ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა; ასევე, ვიცით ინტეგრების ოპერატორი; კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ოპერატორი და .ა.შ.

**განსაზღვრება:** თუ, გვაქვს ისეთი ასახვა  $f:A \rightarrow B$ , რომ  $A$  რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა, ხოლო  $B$  რაიმე რიცხვითი სიმრავლე, მაშინ  $f$  ასახვას ფუნქციონალს უწოდებენ.

ეს ფუნქციონალი პრაქტიკაში გამოიყენება შემდეგი ფორმით:

$$K(f) = \int_0^1 f(x)dx. \quad (1.17)$$

**მაგალითი:**  $\int_0^1 dx:L_2 \rightarrow R$  ფუნქციონალი ნებისმიერ ფუნქციას,  $L_2$  - ფუნქციონალური სივრციდან ასახავს ნამდვილ რიცხვთა  $R$  სიმრავლეში ანუ ნებისმიერ ფუნქციას შეუსაბამებს, მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობას ამ ფუნქციიდან.

**განსაზღვრება:** თუ, მოცემული გვაქვს  $A$  სიმრავლე და მასზე განსაზღვრულია  $R$  მიმართება, მაშინ  $\langle A; R \rangle$  წყვილს რელაციური სისტემა ეწოდება.

მაგალითი: თუ,  $A$  გამონათქვამთა ბულის ალგებრაა, ხოლო  $R$  მასში განსაზღვრული რაიმე მიმართება, მაშინ  $\langle A; R \rangle$  იქნება რელაციური სისტემა. ასევე, თუ,  $B$  სიმრავლეთა ბულის ალგებრაა და  $S$  მასზე განსაზღვრებული რაიმე მიმართება, მაშინ  $\langle B; S \rangle$  რელაციური სისტემაა.

**განსაზღვრება:** ორი  $\langle A; R \rangle$  და  $\langle B; S \rangle$  რელაციურ სისტემას ეწოდებათ **იზომორფული** თუ, არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა ასახვა  $f: A \rightarrow B$ , რომ ნებისმიერი  $(\forall) x, y \in A$  ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xRy \equiv f(x)Sf(y). \quad (1.18)$$

იზომორფული რელაციური სისტემებისათვის, თუ რაიმე თვისებას აქვს ადგილი  $\langle A; R \rangle$ -ში, მაშინ აქვს ადგილი  $\langle B; S \rangle$ -შიც. მაშასადამე, **იზომორფული სისტემები ალგებრულად იდენტურია(ერთნაირია).**

**P.S.** ჰომომორფიზმი, იზომორფიზმისაგან განსხვავებით, არ ითხოვს შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას. ხოლო, თუ ჰომომორფიზმის მოთხოვნას დავუმატებთ შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას მივიღებთ იზომორფიზმს. რელაციური სისტემები ფართოდ გამოიყენება ინფორმაციის გეომეტრიული კოდირების თეორიაში [9-17] (**RO-ფუნქციის მეთოდი**).

### 1.2.2. ფრაქტალი, როგორც სიმრავლე

$A$  სიმრავლე მოიცემა თავისი ელემენტების საშუალებით  $A = \cup_{i \in I} A_i$ , სადაც  $A_i$  მოცემული  $A$  სიმრავლის  $i$ -ური ელემენტია, ხოლო  $I$  ინდექსთა სიმრავლეა.

სიმრავლის თითოეული  $A_i$  ელემენტი, ის უმცირესი “აგურ თაგანია”, რომლისგანაც  $A$  სიმრავლე შედგება. თუ, გვინდა  $A_i$  ელემენტის შიგნით შევიდეთ, მაშინ მას უნდა შევხედოთ, როგორც “დამოუკიდებელ” ახალ სიმრავლეს. ეს მოგვცემს საშუალებას “დავინახოთ” მისი შემადგენელი  $(A_i)_j$  ელემენტები. თუ გვინდა შევიდეთ უფრო ღრმად ანუ შევისწავლოთ  $((A_i)_j)_k$  სიმრავლე, მაშინ  $(A_i)_j$  ელემენტებს უნდა შევხედოთ როგორც დამოუკიდებელ სიმრავლეებს და ა.შ.

ცხადია, რომ  $A_i$  არის  $A$  სიმრავლისათვის წერტილი, ხოლო  $(A_i)_j$  არის  $A_i$  სიმრავლის წერტილი და ა.შ. ანუ შეგვიძლია შემოვიღოთ ცნება:

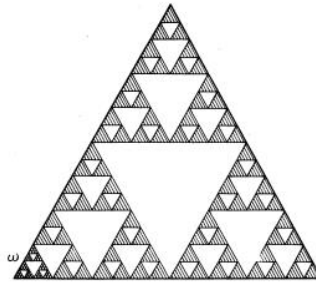
განსაზღვრება:  $A$  სიმრავლის ყოველ  $A_i$  ელემენტს, მისი წერტილი ეწოდება.

თუ,  $A$  სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა (ანუ გვაქვს მასში მანძილის ცნება), მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ  $A$  სიმრავლის დიამეტრი არაა ნაკლები, მისი  $A_i$  წერტილების დიამეტრებზე ანუ

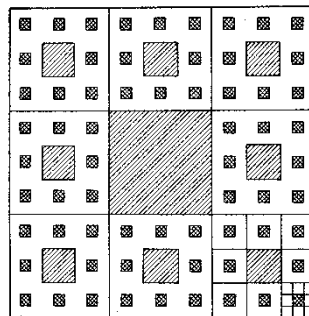
$$\text{diam}A \geq \text{diam}(\max_i(A_i)).$$

განსაზღვრება: თუ,  $A, A_i, (A_i)_j \dots$  ერთნაირი გეომეტრიული სტრუქტურის სიმრავლეებია, მაშინ  $A$  სიმრავლეს ფრაქტალი ეწოდება.

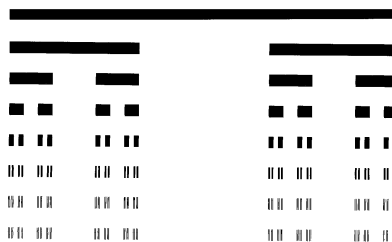
ფრაქტალებს ახასიათებს სხვადასხვა მასშტაბში განმეორებადი გეომეტრიული სტრუქტურა. მაგალითად, ცნობილი კლასიკური, ფრაქტალური სიმრავლეებია: სერპინსკის სამკუთხედი (ნახ.1.1); სერპინსკის კვადრატული ხალიჩა (ნახ.1.2); კანტორის სიმრავლე (ნახ.1.3).



ნახ. 1.1. სერპინსკის სამკუთხედი



ნახ. 1.2. სერპინსკის კადრატული ხალიჩა



ნახ. 1.3. კანტორის სიმრავლე

ასევე, ფრაქტალია ტყეში ყოველი ხე, რომლის თითოეულ ტოტს აქვს ერთნაირი გეომეტრიული სტრუქტურა, თუმცა, რაც უფრო ზემოთ კენწეროსკენაა ტოტი, მისი ზომები უფრო მცირე მასშტაბისაა.

ფრაქტალური ფორმა აქვს ცოცხალი ორგანიზმების შინაგანი ორგანოების ქსოვილს (ფილტვს, ღვიძლს, გულსა და სისხლძარღვებს) თუმცა თითოეული მათგანის ფრაქტალური სტრუქტურა ინდივიდუალურია, ამდენად, ცოცხალი სისტემები მულტიფრაქტალური სტრუქტურის მატარებლები არიან.

### 1.2.3. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები

თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორია არის ხელოვნური ინტელექტის შემუშავების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა კომპიუტერის საშუალებით დავადგინოთ, რომ მოცემული მრავალრიცხოვანი ინფორმაციიდან შესაძლებელია, თუ არა, გავაკეთოთ გარკვეული დასკვნა. მაშინ, როცა ჩვენი ამოცანა ფორმალიზებულია ბულის ფორმულების მეშვეობით, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა წარმოადგენს თუ არა მოცემული ფორმულა სხვა აგებულ ფორმულათა სიმრავლის ლოგიკურ შედეგს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ, აქციების კურსი ეცემა, თუ მათი საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება. დავუშვათ, ასევე, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურად გრძნობს თავს, როცა აქციების კურსი ეცემა. ვთქვათ, ცნობილი გახდა, რომ საწყისი საპროცენტო განაკვეთები იზრდება. მაშინ, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

იმისათვის, რომ გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა ავტომატურად, მოვახდინოთ მოცემული ამოცანის ფორმალიზაცია.

P – აქციების საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება;

S – აქციების ფასი ეცემა;

U – ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

მაშინ, ამ ამოცანის ფორმალიზაციას აქვს სახე:

$$P \Rightarrow S; \tag{1.19}$$

$$S \Rightarrow U; \tag{1.20}$$

$$P; \tag{1.21}$$

$$U. \tag{1.22}$$

ვაჩვენოთ, რომ (1.22) ჭეშმარიტია, როგორც კი ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულა:  $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$ . ჯერ, ეს ფორმულა გარდავქმნათ კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმამდე:

$$\begin{aligned} ((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P) &\equiv ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \wedge P \equiv (P \wedge ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ &\equiv (((P \wedge (\neg P)) \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv ((0 \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ &\equiv (P \wedge S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv (P \wedge S \wedge (\neg S)) \vee (P \wedge S \wedge U) \equiv P \wedge S \wedge U. \end{aligned} \quad (1.23)$$

ასე, რომ თუ,  $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$  ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ  $P \wedge S \wedge U$  ფორმულაც ჭეშმარიტია. რადგან ფორმულა  $P \wedge S \wedge U$  ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია P, S და U გამონათქვამები ერთდროულად, ცხადია, რომ მაშინ ჭეშმარიტია U გამონათქვამიც. რაც, იმას ნიშნავს რომ, ფორმულა U არის (1.19), (1.20) და (1.21) ფორმულების შედეგი.

**P.S.** ანალოგიურად ხდება სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ფორმალიზაცია და მათი ავტომატური ამოხსნა კომპიუტერის მეშვეობით, რისთვისაც შემუშავებულია გილმორის, დევისის, რობინსონის, ჩენის, კოვალსკის და ერბრანის ალგორითმები[4].

#### 1.2.4. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგადის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდი

ჩვენს მიერ ადრე განხილულ გამონათქვამებს ჰქონდათ ფიქსირებული სახე: “სოკრატე ადამიანია”, “სოკრეტე მოკვდავია” და.ა.შ. პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ გამონათქვამ-ფუნქციებს: “x რაციონალური რიცხვია”, “y კეთილი ადამიანია”. . . .  
**განსაზღვრება:** ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს პრედიკატებს უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა რვაჩოვმა შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც R – ფუნქციის მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად[9]. მოგვიანებით, R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგადის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე [10-11], რაც საშუალებას იძლევა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბდეს R - ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადდეს მრავლადბმული შემთხვევებისათვის. ეხლა გადავიდეთ, თვით RO – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის

მეშვეობით ბულის ალგებრების კატეგორიაში (ბულის ალგებრების კატეგორია არის ბულის ალგებრების სიმრავლე, მათ შორის არსებულ გადასხვებთან (მორფიზმებთან) ერთად):

$$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_r, \quad (1.24)$$

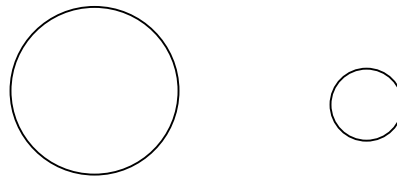
სადაც  $L_1$  - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

$L_2$  - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

$L_r$  - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა,

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

ეს ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული მრავლადბმული წირის განტოლება მაშინ, როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები, რომელი ფუნქციებითაა მოცემული (ნახ.1.4)



ნახ.1.4. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული. (1.24) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ  $L_1$  სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ საყრდენ სიმრავლეებს ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (1.25)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \geq 0\}, \quad (1.26)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (1.27)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \geq 0\}. \quad (1.28)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \quad (1.29)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე” რაც ამ შემთხვევაში, საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად

გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით  $L_2$ -ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით  $L_2$ -ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (1.30)$$

სადაც :

$P_1$  – არის გამონათქვამი  $x_1 \geq 0$ ,

$P_2$  – არის გამონათქვამი  $x_2 \geq 0$ ,

$P_3$  – არის გამონათქვამი  $x_3 \geq 0$ ,

$P_4$  – არის გამონათქვამი  $x_4 \geq 0$ ,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$

$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \quad (1.31)$$

$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2.$$

ეხლა, გადავიდეთ  $L_r$  – ში რვაჩოვის ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (1.32)$$

მივიღებთ  $R$  – ფუნქციას :

$$\begin{aligned} R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \\ + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \end{aligned} \quad (1.33)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (1.31) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია თ.ობგადის ჰომომორფიზმი[10] სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_{ro}, \quad (1.34)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (1.35)$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი”  $\Leftrightarrow$  “უდრის ნულს”;

“მცდარი”  $\Leftrightarrow$  “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \quad (1.36)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (1.37)$$

მაშინ

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 ; \quad (1.38)$$

ე.ი.

$$P = P_1 \vee P_2 ; \quad (1.39)$$

სადაც

$$P_1 - \text{არის გამონათქვამი } (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad (1.40)$$

$$P_2 - \text{არის გამონათქვამი } (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0 ;$$

ე.ი

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2].$$

როგორც ვხედავთ, თ.ობგამის[10] ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით. ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად გამარტივდა R – ფუნქციის ანალიზური სახეც [12-17]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს, ხშირად, რვაჩოვ-ობგამის RO – მეთოდს ეძახიან.

**P.S. სალაპარაკო ენა – ცოცხალი სისტემაა**, მას ახასიათებს ევოლუცია, რაც გამოიხატება ახალი სიტყვებით შევსებასა და გრამატიკის დახვეწაში. ეს სისტემა ღია სისტემაა, რადგან მასზე მოქმედებას ახდენენ სხვა ენები. მაგრამ ცოცხალი სისტემებისათვის დამახასიათებელია **თვითმყოფადობის დაცვის მექანიზმებიც (იმუნური სისტემა)**, რაც ირთვება მაშინ, როდესაც გარედან ცდილობენ მის დარღვევა – დაზიანებას(ასე მოხდა როცა გარედან ცდილობდნენ ქართული ენის სახელმწიფო სტატუსის შეცვლას). ეს იყო ერთერთი მთავარი მიზეზთაგანი, რამაც გამოიწვია ეროვნული მოძრაობის აღმავლობის დაჩქარება და ხელისუფლების ბიფურკაციულად – სტიქიურად, შეცვლაც.



## ამოცანები

### ვარიანტი 1

1. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით.
2. განსაზღვრეთ ბინარული ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup A^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee (\neg q)) \wedge q \equiv ?$
5. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით?
6. რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან სურექცია და ბიექცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 2

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების მეშვეობით.
2. ჩამოწერეთ შთანთქმის კანონები სიმრავლეებისათვის.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cap B) \cup (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \wedge 1) \vee (p \wedge (\neg p)) \equiv ?$
5. გაქვთ 3 ლიტრიანი და 5 ლიტრიანი ქილები. როგორ ჩავასხათ მათი მეშვეობით დოქში 4 ლიტრი ღვინო ?
6. რა განსხვავებაა მიმართებასა და ფუნქციას შორის ? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 3

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

2. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup A^c) \cap (B \cap B^c) \cap (A \cup B \cup C)^c = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $((p \vee (\neg p)) \wedge (q \wedge (\neg q))) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv ?$
5. რომელიღაც თვეში 3 კვირა დღე დაემთხვა ლუწ რიცხვს. რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვში?
6. რა განსხვავებაა ოპერატორსა და ფუნქციონალს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

#### ვარიანტი 4

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
2. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup B \cup C) \cap A^c \cap (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge (\neg r))) \equiv ?$
5. ტურნირში მონაწილეობდა 7 მოჭადრაკე. სულ რამდენი პარტია გადამამდებოდა?
6. რა განსხვავებაა ფუნქციასა და ფუნქციონალს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

#### ვარიანტი 5

1. განსაზღვრეთ დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციები.
2. განსაზღვრეთ ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup \emptyset) \cap (A \cap A) \cap (A \cup A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee 0) \wedge (p \wedge p) \wedge ((p \vee (\neg p))) \equiv ?$

5. 1983 წელს იყო 53 შაბათი დღე. კვირის რა დღე იყო 1 იანვარი ამ წელს?
6. რა განსხვავებაა რელაციური სისტემების ჰომომორფიზმსა და იზომორფიზმს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილის მეშვეობით.
2. განსაზღვრეთ მოცემული სიმრავლის დამატებით სიმრავლის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup B) \cup (A \cup A^c) \cup (B \cap B^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(\neg q) \wedge ((q \vee (q \vee 0)) \wedge ((p \vee (\neg p))) \equiv ?$
5. ოცი ქალაქიდან თითოეული შეერთებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია?
6. რა კავშირია სურექციას, ინექციასა და ბიექციას შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### ვარიანტი 7

1. განსაზღვრეთ იმპლიკაციისა და ეკვივალენციის მიმართებები.
2. ჩამოაყალიბეთ მიმართების, ფუნქციის, ოპერატორისა და ფუნქციონალის ცნებები და აჩვენეთ ფუნქციისა და ფუნქციონალის განმასხვავებელი ნიშნები.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cap E) \cup (B \cap \emptyset) \cup (A^c \cap B) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(p \vee p) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (p \vee 1) \wedge (p \vee 0)) \equiv ?$
5. 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?
6. რა განსხვავებაა კონიუნქტიურ და დიზიუნქტიურ ლიტერებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

## ვარიანტი 8

1. რელაციური სისტემების იზომორფიზმის ცნება. იზომორფულია თუ ჰომომორფული გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა?
2. განსაზღვრეთ ფუნქციონალის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $(A \cup B^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:  
 $((p \wedge p \wedge ((q \vee (\neg q)))) \vee ((q \wedge (\neg q))) \equiv ?$
5. მოიტანეს 5 ჩემოდანი და 5 გასაღები. არ ვიცით, რომელი გასაღები აღებს ამა თუ იმ ჩემოდანს. ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ცდაა საჭირო რომ, ყველა ჩემოდანს მოვარგოთ თავისი გასაღები?
6. რა განსხვავებაა ბულის ფორმულის დიზიუნქტიურ და კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

### 1.3. რიცხვითი სიმრავლეები და ალგებრული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები

ადამიანი, ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში, დადგა სიმრავლეთა რაოდენობრივი შედარების აუცილებლობის წინაშე. ამგვარად, წარმოიშვა **ნატურალური რიცხვის** ცნება.

**განსაზღვრება:** თვლის პროცესში წარმოშობილ რიცხვებს, **ნატურ-რალური** რიცხვები ეწოდებათ.

ნატურალური რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება  $\mathbb{N}$  ასოთი.

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}. \quad (1.41)$$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. იმისათვის, რომ შეადარონ უსასრულო სიმრავლეების ელემენტთა რაოდენობა, შემოაქვთ **სიმრავლის სიმძლავრის** ცნება.

**განსაზღვრება:** თუ, ორი უსასრულო სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა(ბიექცია), მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს **ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ**.

**განსაზღვრება:** ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს თვლადი უსასრულობა ეწოდება.

**P.S.** ცხადია, რომ ყველა სიმრავლე, რომლის ელემენტების გადანომრვაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით, აგრეთვე თვლადი იქნება.

ნატურალური რიცხვები არსებობს ორი სახის: **მარტივი და შედგენილი რიცხვები.**

**განსაზღვრება:** ერთისაგან განსხვავებულ რიცხვს მარტივი ეწოდება, თუ ის იყოფა მხოლოდ ერთზე და თავის თავზე. ხოლო, ერთზე მეტ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არაა მარტივი შედგენილი ეწოდება.

**მაგალითი: მარტივი რიცხვებია**

$$P=\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; \dots\}.$$

**შედგენილი რიცხვებია**

$$N \setminus P\{1\}=\{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; \dots\}.$$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, დღემდე, ბევრი ამოუხსნელი ამოცანაა დაგროვილი; რომელთა ჩამოყალიბება ელემენტარულია, მაგრამ ამოხსნა ჯერჯერობით ვერ ხერხდება. ეს პრობლემები, ძირითადად ეხება მარტივ რიცხვთა განაწილების კანონს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობაში. ჩამოვყალიბოთ ზოგიერთი ასეთი ამოცანა(პრობლემა):

1.ვიცით ლუწი რიცხვების ზოგადი ფორმულა:  $n = 2k$ ; ასევე, ვიცით კენტი რიცხვების ზოგადი ფორმულა:  $n = 2k + 1$ . ეს ფორმულები გვაძლევენ შესაბამისად, ყველა ლუწ და კენტ რიცხვებს, როცა  $k$  ცვლადი გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. საჭიროა, ვიპოვოთ ანალოგიური ფორმულა მარტივი რიცხვებისათვის.

2.ცნობილია ეილერის მრავალწევრი:  $f(x) = x^2 + x + 41$ , რომელიც იძლევა

მარტივ რიცხვებს, თუ  $x = 0; 1; 2; \dots; 39$ . უცნობია, არსებობენ, თუ არა ისეთი ნატურალური  $m > 41$  რიცხვები, რომ  $f(x) = x^2 + x + m$  მრავალწევრი იძლეოდეს მარტივ რიცხვებს, როცა  $x = 0; 1; 2; \dots; m - 2$ .

3.უცნობია, უსასრულოა თუ არა  $n^2 + 1$  სახის მარტივი რიცხვების სიმრავლე.

4.უცნობია, უსასრულოა თუ არა ისეთი მარტივი რიცხვების სიმრავლე, რომელთა შორის სხვაობა 2-ის ტოლია(ჰოლდბახის პრობლემა).

5. უცნობია, შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი ლუწი რიცხვის წარმოდგენა ორი მარტივი რიცხვის სხვაობის სახით.

ზემოთ მოყვანილი პრობლემები, ძირითადად, დაკავშირებული არიან მარტივი რიცხვების ზოგადი ფორმულის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან. ამ პრობლემის ამოხსნის გზაზე საგრძნობ წინსვლას იძლევა **ობგადის თეორემა**.

**ობგადის თეორემა (1972წ):** მარტივი რიცხვების სიმრავლის ზოგად ფორმულას, არ შეიძლება ქონდეს  $f(x) = ax^2 + bx + c$  კვადრატული ფუნქციის სახე.

**დამტკიცება:** განვიხილოთ  $f(x) = ax^2 + bx + c$  კვადრატული ფუნქციის სასრული სხვაობები:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b;$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = 2a(x+1) + a + b - 2ax - a - b = 2a;$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+1) - \Delta^2 f(x) = 0.$$

ცხადია, რომ უფრო მაღალი რიგის  $k \geq 3$  სასრული სხვაობები კვადრატული ფუნქციიდან, აგრეთვე იქნებიან ნულის ტოლნი. (ადვილად შემოწმდება, რომ ანალოგიური თვისებები აქვთ საზოგადოდ  $n$  ხარისხის მრავალწევრს ფუნქციებს (პოლინომებს), რომელთათვისაც შესაბამისად ყველა  $k \geq n + 1$  ხარისხის სასრული სხვაობები იქნებიან ნულის ტოლი).

ეხლა, განვიხილოთ მარტივი რიცხვების მიმდევრობა და მათი შესაბამისი სასრული სხვაობები მესამე რიგამდე ჩათვლით. თუ, მესამე რიგიდან დაწყებული ყველა სასრული სხვაობა არ აღმოჩნდა ნულის ტოლი, მაშინ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიძლება მოიცემოდეს კვადრატული ფუნქციით და ჩვენი თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და შესაბამისი სასრული სხვაობები:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
	1	2	2	4	2	4	2	4	6
		1	0	2	-2	2	-2	2	2
			-1	2	-4	4	-4	4	0

როგორც ვხედავთ მესამე რიგის სასრული სხვაობა(მეოთხე სტრიქონი) არაა მხოლოდ ნულებისაგან შემდგარი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მარტივი რიცხვის ზოგად ფორმულას არ შეიძლება, რომ ჰქონდეს კვადრატული ფუნქციის სახე რ.დ.გ.

**P.S. თეორემის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ეს თეორემა ადვილად ზოგადდება ნებისმიერი სასრული ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციისათვის. ზემოთმოყვანილი დანარჩენი პრობლემების ამოხსნა ავტორისათვის არაა ცნობილი და ამდენად, ახალგაზრდებს შეუძლიათ გამოსცადონ ძალები მათ ამოსახსნელად.**

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ყოველთვის შეიძლება ორი რიცხვის შეკრება. ასე, რომ ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ისევ ნატურალური რიცხვი იქნება. ამ ფაქტს მათემატიკაში ჩამოაყალიბებენ ასე: “ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე ჩაკეტილია შეკრების ოპერაციის მიმართ”. მაგრამ, ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობა, საზოგადოდ არაა ნატურალური რიცხვი.

**მაგალითი:**  $5 - 7 \notin \mathbb{N}$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, შეუძლებელია  $x + 7 = 5$  განტოლების ამოხსნა. ამიტომ, საჭირო გახდა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოვება მთელ რიცხვთა სიმრავლემდე.

**განსაზღვრება:** ნატურალური რიცხვების, მათი მოპირდაპირე რიცხვების და ნულის გაერთიანებას **მთელ** რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება  $\mathbb{Z}$  ასოთი. ფორმალურად, ეს განსაზღვრება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}_- \cup \{0\}. \quad (1.42)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}. \quad (1.43)$$

ამ სიმრავლეში განტოლება  $x + 7 = 5$ , უკვე ამოხსნადია და

$$x = 5 - 7 \Leftrightarrow x = -2; \quad (1.44)$$

მაგრამ, წრფივი განტოლება, საზოგადოდ, არაა ამოხსნადი.

**მაგალითი:**  $2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ . (1.45)

ამიტომ, საჭიროა რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოვება **რაციონალურ** რიცხვთა სიმრავლემდე.

განსაზღვრება:  $\frac{a}{b}$  სახის რიცხვების სიმრავლეს, სადაც  $a \in Z \wedge b \in N$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება  $Q$  ასოთი.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z \wedge b \in N \right\}. \quad (1.46)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$Q \subset Z \subset N. \quad (1.47)$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, შეგვიძლია ამოვხსნათ წრფივი განტოლებები, თუმცა, არც ეს სიმრავლე აღმოჩნდა საკმარისი ალგებრული განტოლებების ამოსახსნელად. ასე შემოვიდა მათემატიკაში **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე**. ხოლო მოგვიანებით, **ჰიპერკომპლექსური და კლიფორდის რიცხვების** ცნებები. ამ რიცხვითი სიმრავლეების აგება მოითხოვს ფაქიზი მათემატიკური ცნებების ცოდნას და ჩვენი ამოცანებისათვის იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ ჩვენ ჩავუღრმავდებით თანდათანობით.

### 1.3.1. ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი

**ნუმეროლოგიის ელემენტები.** ნატურალური რიცხვის ცნებას ფართოდ იყენებს მეცნიერების ყველა დარგი. ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, როდესაც მეცნიერება და რელიგია ერთად შეისწავლებოდა, როგორც საერთო სიბრძნის ნაწილები, მეცნიერები სწავლობდნენ ამა, თუ იმ მოვლენის რიცხვით მახასიათებლებს: ზომავდნენ სამეურნეო სავარგულების ფართს, მანძილებს, ჭურჭლის მოცულობას და ა.შ. ზოგიერთ შემთხვევაში, ისეთი მეცნიერებიც კი, როგორც იყო **პითაგორა** სწავლობდნენ რიცხვთა მაგიას. მათ სჯეროდათ, რომ ადამიანის მთელი ცხოვრება და ხასიათი განპირობებულია არა მარტო ვარსკვლავთა და პლანეტების განლაგებით (ასტროლოგია), არამედ იმ რიცხვითი მახასიათებლებით, რაც დაკავშირებულია მოცემული ადამიანის დაბადების თარიღთან (ნუმეროლოგია)[18-19]. ნუმეროლოგიით იყო გატაცებული ისააკ ნიუტონიც.

მაგალითისათვის, თუ, ადამიანი დაიბადა 1976 წლის 19 ნოემბერს, მაშინ მისი პერსონალური რიცხვი იქნება დაბადების რიცხვის ციფრების



ჯამი  $1+9=10$  ანუ  $1+0=1$ . ხოლო დაბადების თარიღის პერსონალური რიცხვი რომ მივიღოთ, უნდა შევკრიბოთ მისი შესაბამისი თვის ნომრის ციფრებიც ნომბერი=11 ე.ი.  $1+1=2$ , გარდა ამ რიცხვებისა უნდა შევკრიბოთ დაბადების წლის ციფრებიც ე.ი.  $1+9+7+6=23$  ამ რიცხვის ციფრების ჯამია  $2+3=5$ , საბოლოოდ, უნდა შევკრიბოთ დაბადების რიცხვის, თვის და წლის ციფრები ერთად 19.11.1976. მაშინ მივიღებთ  $(1+9)+(1+1)+(1+9+7+6)=10+2+23=35$  თუ, ამ რიცხვის ციფრებსაც შევკრიბავთ, მივიღებთ  $3+5=8$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ პიროვნებისათვის დამახასიათებელია რიცხვი 8-ის უპირატესი გავლენა. ეს ნიშნავს იმას, რომ განხილული პიროვნება უმეტესწილად, არის წარმატებული ყველა წამოწყებაში, ამასთან ერთად, მასზე მოქმედებს დაბადების რიცხვის(19) ციფრების ჯამი 1, რაც მიგვანიშნებს მისი პატრონის ლიდერულ თვისებებზე.

საზოგადოდ, ადამიანი განიცდის როგორც თავისი რიცხვების, ასევე, ცხოვრების ადგილისა და მოცემული თარიღის გავლენასაც. განიხილავენ პერსონალური წლის 9 მიმდევრობით საფეხურს, ათვლილს დაბადებიდან:

- I წელი – შესაძლებლობათა წელია;
- II წელი – წონასწორობის წელია;
- III წელი – შემოქმედებითი აქტივობის წელია;
- IV წელი – მშენებლობის წელია;
- V წელი – კომუნიკაბელობის წელია;
- VI წელი – დავალებათა შესრულების წელია;
- VII წელი – განხორციელებების წელია;
- VIII წელი – კარმის წელია;
- IX წელი – ციკლის დასრულების წელია.

**P.S. ყოველი 9 წლის შემდეგ, ციკლი იწყებს განმეორებას.**

ასევე, განიხილავენ დაბადების თვეთა გავლენას:

- იანვარი – გმირული;
- თებერვალი – წონასწორობა;
- მარტი – სიხარული;
- აპრილი – პასუხისმგებლობა;
- მაისი – ცხოვრების ენერჯია;

იენისი – შემსრულებლობა, მორჩილება და მზრუნველობა;

იელისი – სინთეზურობა;

აგვისტო – ლიდერობა;

სექტემბერი – რწმენა;

ოქტომბერი – სიბრძნე;

ნოემბერი - შთაგონებული;

დეკემბერი – დასრულებულობა.

**პითაგორას სისტემაში, ყოველ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ხასიათი:**

**რიცხვი 1** - შეესაბამება ეგოცენტრულ ლიდერს;

**რიცხვი 2** – მგრძნობიარე, კომუნიკაბელური, უყვარს კუთხეების მომრგვალება;

**რიცხვი 3** – მხიარული, ცდილობს მიიღოს სიამოვნება ფიზიკური შრომიდან, უყვარს ხელებით მუშაობა;

**რიცხვი 4** – იწვევს დაუდეგარ ხასიათს, რომელიც პერიოდულად, ცდილობს თავი დააღწიოს მონოტონურობას;

**რიცხვი 5** – იწვევს ნათელ გონებას და კომუნიკაბელობისაკენ მიდრეკილებას. ამ რიცხვის ხალხს ახასიათებთ მაგნეტიზმი და ჰიპნოზის უნარი, რომელიც იზიდავს მათკენ ხალხს.

**რიცხვი 6** – იძლევა თანაგრძნობის მწვავე გრძნობას. უყვარს წესრიგი, სამართლიანობისაკენ სწრაფვა. უყვარს კოლექტიური შრომა. არად დაგიდევს სხვის აზრს, თუ ისინი ეწინააღმდეგებიან მის საკუთარ ინტერესებს.

**რიცხვი 7** – იწვევს განვითარებულ ინტუიციას. უყვარს მარტოობა. არის პუნქტუალური და აკურატული. ხშირად მოსდის შემაშფოთებელი აზრები და ეძებს პრობლემებს იქაც, სადაც ისინი არ არიან.

**რიცხვი 8** – იძლევა მომთმენ, დინჯ ხასიათს და აღწევს წარმატებებს ყველა საქმეში. წარმატებული ადამიანია. თქვენი გარშემომყოფნი გრძნობენ თქვენს განსაკუთრებულობას და რესპექტაბელობას, ცდილობენ მოგექცენ მოწიწებით.

**რიცხვი 9** – იწვევს ცოდნისაკენ და ფილოსოფიური აზროვნებისაკენ სწრაფვას. ადვილად პატიობთ სხვებს ცოდვებს. ვერ იტანთ ხეპრე ადამიანებს.

ასევე, მნიშვნელოვანია შესაბამისობა ასოებსა და რიცხვებს შორის (ინფორმაციის კოდირების ერთ-ერთი პირველი ისტორიული მაგალითი):

1	ა	კ	ტ	ძ
2	ბ	ლ	უ	წ
3	გ	მ	ფ	ჭ
4	დ	ნ	ქ	ხ
5	ე	ო	რ	ჯ
6	ვ	პ	ყ	ჰ
7	ზ	შ	შ	
8	თ	რ	ჩ	
9	ი	ს	ც	

ამ შესაბამისობის გამოყენების მაგალითისათვის განვიხილოთ სახელები:

იესო ქრისტე= ი+ე+ს+ო+ქ+რ+ი+ს+ტ+ე=9+5+9+5+4+8+9+9+1+5=64,

ციფრთა ჯამი=6+4=10; საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში;

ალაჰი=ა+ლ+ა+ჰ+ი=1+2+1+6+9=19, ციფრთა ჯამი= 1+9=10; ანუ საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში.

იეღვო =ი+ე+ღ+ო+ვ+ო=9+5+5+5+6+5=35, ციფრთა ჯამი= 3+5=8;

ემმაკი=ე+მ+მ+ა+კ+ი=5+7+3+1+1+9=26, ციფრთა ჯამი= 2+6=8;

სატანა=ს+ა+ტ+ა+ნ+ა=9+1+1+1+4+1=17, ციფრთა ჯამი= 1+7=8;

რაც შეესაბამება ამქვეყნიურ წარმატებებს სიამოვნებათა სფეროში, იმქვეყნიური სამუდამო ტანჯვის სანაცვლოდ.

კრიშნა=კ+რ+ი+შ+ნ+ა=1+8+9+7+4+1=30 ანუ 3+0=3, რაც სეესაბამება ღმერთის მსახურს მორჩილებით.

ნათელა=ნ+ა+თ+ე+ლ+ა=4+1+8+5+2+1=21, ციფრთა ჯამი= 2+1=3;

ილია=ი+ლ+ი+ა=9+2+9+1=21, ციფრთა ჯამი= 2+1=3;

ნათელა=ილია=3=სწრაფვა ღმერთისაკენ მორჩილებით.

ბიზანტია=ბ+ი+ზ+ა+ნ+ტ+ი+ა=2+9+7+1+4+1+9+1=34, ციფრთა ჯამი= 3+4=7;

რომი=8+5+3+9=25, ციფრთა ჯამი= 2+5=7;

ბაბილონი=ბ+ა+ბ+ი+ლ+ო+ნ+ი=2+1+2+9+2+5+4+9=34, ციფრთა ჯამი= 3+4=7;

ისრაელი=9+9+8+1+5+2+9=27+16=43; ციფრთა ჯამი= 3+4=7;

ციფრი 7 შეესაბამება ღმერთთან მეზობლად, დაუდეგარ ქვეყნებს, რომლებიც ადრე თუ, მალე ქრებიან რუკიდან.

ღმერთი=ღ+მ+ე+რ+თ+ი=5+3+5+8+8+9=38, ციფრთა ჯამი= 3+8=11 ანუ 1+1=2;

ოსანა=5+9+1+4+1=20 რაც იმას ნიშნავს, რომ 2 ღმერთის რიცხვია.  
 აფხაზეთი=ა+ფ+ბ+ა+ზ+ე+თ+ი=1+3+4+1+7+5+8+9=38, ციფრთა ჯამი 3+8=11  
 ანუ 1+1=2, რაც იმას ნიშნავს, რომ აფხაზეთი ღმერთის მფარველობის  
 ქვეშაა. ერაყი=5+8+1+6+9=29; ციფრთა ჯამი 2+9=11 ანუ 1+1=2. რაც იმას  
 ნიშნავს, რომ ერაყი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა. რუსეთი  
 რ+უ+ს+ე+თ+ი=8+2+9+5+8+9=41 ანუ 4+1=5; ძლიერი ქვეყანაა, ახასიათებს  
 კომუნიკაბელობა და მაგნეტიზმი, რომელიც იზიდავს სხვადასხვა ჯურის  
 ხალხს თავისაკენ. ებრაელი=ე+ბ+რ+ა+ე+ლ+ი =5+2+8+1+5+2+9=32; ანუ  
 3+2=5; ებრაელებისათვის მეტად ხელსაყრელი ქვეყანაა რუსეთი.

P.S. ცხადია, რომ დაინტერესებულმა მკითხველმა, ზემოთ მოყვანილი  
 პითაგორისეული რიცხვთა მაგიის უფრო დეტალურად გასაცნობად,  
 უნდა მიმართოს დამატებით ლიტერატურას[18-19].

---

### 1.3.1.1. რიცხვთა თეორიის ელემენტები

ამ გამოყენებათა გამო, ძველად, ხელისუფალთა ფართო მხარდაჭე-  
 რით სარგებლობდნენ ბრძენნი (მეცნიერებისა და ფილოსოფიის  
 მსახურნი). სწორედ, ამან მისცა ანტიკურ ხანაში ბიძგი მეცნიერებისა და  
 მათ შორის, რიცხვთა თეორიის განვითარებას. მოგვიანებით, დირიხლეს,  
 გაუსისა და ეილერის ფუნდამენტალურმა შრომებმა, ახალი იმპულსი  
 მისცა რიცხვთა თეორიის განვითარებას. გაუსის მიერ შემუშავებულ იქნა  
 შედარებათა თეორია[20-24] განუსაზღვრელი განტოლებების ამოსახ-  
 სნელად  $\mathbb{N}$  - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. მოგვიანებით, ამ  
 თეორიამ დიდი გამოყენება პოვა კრიპტოგრაფიაში[25-26] (ინფორმაციის  
 დაცვა და გაშიფრვა); ასევე, მონაცემთა ციფრული დამუშავების  
 თეორიაში[27] (ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა). ამიტომ, ჩვენ უფრო  
 დეტალურად შევისწავლით გაუსის შედარებათა თეორიას.

**განსაზღვრება:** ორ  $a$  და  $b$  რიცხვს ურთიერთმარტივი ეწოდებათ თუ, მათი  
 უდიდესი საერთო გამყოფი  $(a;b)=1$

**მაგალითი:** 2 და 3 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, რადგან  $(2;3)=1$ .

3 და 5 ; 7 და 9 ; 9 და 11 დ.ა.შ.

**თეორემა :** თუ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ორი  $a$  და  $b > 0$  მთელი  
 რიცხვები, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი მთელი  $q$  და  $r$   
 რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r \leq b - 1. \quad (1.48)$$

$r$  - რიცხვს უწოდებენ  $a$ -რიცხვის  $b$ -ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს.

მაგალითი:  $a=185$  ;  $b=12$ ; მაშინ  $185=12 \cdot 15+5$  ანუ  $q=15$  და  $r=5$ .

ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად იყენებენ ევკლიდეს ალგორითმს, რომელიც ემყარება (1.48) წარმოდგენას. მართლაც, ვთქვათ  $a$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია და  $b$  ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი, მაშინ თეორემის თანახმად, ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0; & 0 < r_0 < b; \\ b &= r_0q_1 + r_1; & 0 < r_1 < r_0; \\ r_0 &= r_1q_2 + r_2; & 0 < r_2 < r_1; \\ &\dots & \dots & \dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n; & 0 < r_n < r_{n-1}; \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

რიცხვები  $r_0, r_1, r_2, \dots$  ადგენენ მკაცრად კლებად არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობას; მაგრამ ყოველი ასეთი მიმდევრობა სასრულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი  $a$  და  $b > 0$  წყვილისათვის მიმდევრობითი გაყოფის პროცესი (ევკლიდეს ალგორითმი) სასრულია ე.ი. სასრულია (1.49) ტოლობათა რიცხვი. პროცესი წყდება იმ საფეხურზე, რომელზედაც გაყოფა შესრულდება უნაშთოდ ანუ როცა  $r_{n+1} = 0$ . ამგვარად,  $r_n$  არის უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი-უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, რომ

$$(a; b) = (b; r_0) = (r_0; r_1) = \dots = (r_{n-1}; r_n) = r_n. \quad (1.50)$$

მაგალითი: ვიპოვოთ  $d=(664 ; 480)$ ;  $a=664$  ;  $b=480$ . მაშინ, ევკლიდეს ალგორითმის თანახმად გვექნება :

$$\begin{aligned} 664 &= 480 \cdot 1 + 184 ; \\ 480 &= 184 \cdot 2 + 112 ; \\ 184 &= 112 \cdot 1 + 72 ; \\ 112 &= 72 \cdot 1 + 40 ; \\ 72 &= 40 \cdot 1 + 32 ; \\ 40 &= 32 \cdot 1 + 8 ; \\ 32 &= 8 \cdot 4. \end{aligned}$$

ე.ი.  $d=(664 ; 480)=8$ .

არითმეტიკის ძირითადი თეორემა: ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით(თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად ანუ თუ  $n$  ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$n = p_1 p_2 \dots p_n . \quad (1.51)$$

ამ ნამრავლში ზოგიერთი თანამამრავლი შეიძლება რამდენიმეჯერ მეორდებოდეს, ამიტომ თუ, გამოვიყენებთ განმეორებათა რიცხვის ხარისხის მაჩვენებლებს, მივიღებთ (1.51) გაშლის კანონიკურ წარმოდგენას

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} . \quad (1.52)$$

ამ (1.52) ჩანაწერიდან ნათლად ჩანს, რომ  $n$  რიცხვის განსხვავებულ გამყოფთა რაოდენობა იქნება:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) . \quad (1.53)$$

P.S. ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის მათ ნამრავლს გაყოფილს მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განისაზღვრება რიგი არითმეტიკული ფუნქციებისა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ეილერის  $\varphi(n)$  ფუნქციას, რომელიც უდრის 1-დან  $n$ -მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც ურთიერთ-მარტივი არიან  $n$ -ის მიმართ.

მაგალითი:  $\varphi(1) = 1$ ;  $\varphi(2) = 1$ ;  $\varphi(3) = 2$ ;  $\varphi(4) = 2$ ;  $\varphi(5) = 4$ ;  $\varphi(6) = 2$ .

ვთქვათ,  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$  მოცემული რიცხვის კანონიკური დაშლაა, მაშინ

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right) . \quad (1.54)$$

თუ  $p$  მარტივი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} . \quad (1.55)$$

კერძო შემთხვევაში,

$$\varphi(p) = p - 1 . \quad (1.56)$$

მაგალითი:  $\varphi(60) = 60 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$ ;

$$\varphi(81) = 81 - 27 = 54;$$

$$\varphi(5) = 5 - 1 = 4.$$

### 1.3.1.2. შედარებათა თეორიის ელემენტები

განვიხილოთ მთელი რიცხვები მოცემულ  $m$  ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას, მიღებული ნაშთების თვალსაზრისით. ამ  $m$  რიცხვს მოდულს უწოდებენ. ყოველ ნატურალურ რიცხვს,  $m$  რიცხვზე გაყოფისას შეესაბამება ნაშთის გარკვეული მნიშვნელობა  $(0;1;2;3;\dots m-1)$  ნაშთთა სრული სისტემიდან. სხვანაირად, რომ ვთქვათ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა  $m-1$  კლასად. თითოეულ კლასში მოთავსებული არიან ურთიერთსადარი რიცხვები  $m$  მოდულით. თუ, განვიხილება შედარებათა თეორია უფრო ფართო რიცხვით სიმრავლეში, კერძოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ განვიხილავენ აბსოლუტურად უმცირეს ნაშთთა სრულ სისტემას:  $-\frac{m-2}{2}; -\frac{m-4}{2}; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; \frac{m}{2}$ ; როცა  $m$  ლუწია;

$$-\frac{m-1}{2}; -\frac{m-3}{2}; \dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots; \frac{m-1}{2}; \text{ როცა } m \text{ კენტია.}$$

**განსაზღვრება:** ორ მთელ  $a$  და  $b > 0$  რიცხვს ეწოდებათ ურთიერთსადარი მოდულით  $m$ , თუ  $m$  – ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან.

შედარების დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$a \equiv b \pmod{m}. \quad (1.57)$$

(1.57) იკითხება ასე:  $a$  სადარია  $b$  – სი მოდულით  $m$ .

თუ  $a$  სადარია  $b$ – სი ანუ  $m$ – ზე გაყოფისას ისინი ერთნაირ ნაშთებს იძლევიან, მაშინ მათი სხვაობა  $(a-b)$  უნაშთოდ იყოფა  $m$ -ზე.

**მაგალითი:**  $25 \equiv 15 \pmod{10}$ , რადგან  $25$  და  $15$ ,  $10$ -ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან  $5$ -ს ასევე ცხადია, რომ  $25-15=10$  და იყოფა  $10$ -ზე (შედარების მოდულზე).

**შედარებათა თვისებები :**

1. ერთნაირმოდულიანი შედარებები შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}; a_2 \equiv b_2 \pmod{m}; \dots a_n \equiv b_n) \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i \pmod{m} \right). \quad (1.58)$$

2. შედარებანი ერთნაირი მოდულით, შეიძლება წევრ-წევრად გადავამრავლოთ:

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}; a_2 \equiv b_2 \pmod{m}; \dots a_n \equiv b_n) \Rightarrow \left( \prod_{i=1}^n a_i \equiv \prod_{i=1}^n b_i \pmod{m} \right). \quad (1.59)$$

3. შედარების ორივე მხარე და მოდული შეიძლება ერთდროულად გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე ანუ

$$(a_1 \equiv b_1 \pmod{m}) \Rightarrow (a_1 n \equiv b_1 n \pmod{mn}). \quad (1.60)$$

4. თუ, შედარებას ადგილი აქვს რამდენიმე მოდულით, მაშინ ამ შედარებას ადგილი ექნება ახალი მოდულითაც, რომელიც მოცემული მოდულების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია.

$$(a \equiv b \pmod{m_1} \wedge a \equiv b \pmod{m_2}) \Rightarrow (a \equiv b \pmod{[m_1; m_2]}). \quad (1.61)$$

5. შედარების ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს, მათ ისეთ საერთო გამყოფზე, რომელიც მოდულთან ურთიერთმარტივია.

$$(an \equiv bn \pmod{m} \wedge (m; n) = 1) \Rightarrow (a \equiv b \pmod{m}). \quad (1.62)$$

**ეილერის თეორემა:** თუ  $m$  ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და  $(a; m) = 1$ , მაშინ

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \quad (1.63)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა  $m = p$  მარტივი რიცხვია და  $(a; p) = 1$ ,  $\varphi(p) = p - 1$ , მიიღება **ფერმას მცირე თეორემა** :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad (1.64)$$

**განვიხილოთ ერთუცნობიანი შედარებების ამოხსნის მაგალითები.**

1)  $x^3 + x^2 - 3x + 1 \equiv 0 \pmod{5}$

ეს შედარება მესამე ხარისხისაა. 5-ის მოდულით ნაშთთა სრული სისტემიდან: (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4) ამ შედარებას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 1. ე.ი. მას აქვს ერთი ფესვი. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება  $x \equiv 1 \pmod{5}$ .

2)  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{4}$

შედარება კვადრატულია. ნაშთთა სრული სისტემიდან 4-ის მოდულით: (0 ; 1 ; 2 ; 3), მას არცერთი რიცხვი არ აკმაყოფილებს. ე.ი. მას ამონახსნი არა აქვს.

3)  $12x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{6}$

ეს შედარებაც კვადრატულია, რადგან უფროსი კოეფიციენტი კუბთან მოდულზე იყოფა უნაშთოდ, ანუ  $12 \equiv 0 \pmod{6}$ . ასე, რომ იგი შემდეგი შედარების ექვივალენტურია:  $3x^2 - 2x + 3 \equiv 0 \pmod{6}$ . ნაშთთა სრული სისტემიდან 6-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5) მას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 3, ე.ი. მისი ერთადერთი ფესვი იქნება  $x \equiv 3 \pmod{6}$ .

4)  $x^5 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$



ნაშთთა სრული სისტემიდან 7-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5;6) ამ შედარებას აკმაყოფილებს ორი რიცხვი 2 და 4; ამიტომ გვექნება ორი ამონახსნი:

$$x \equiv 2(\text{mod } 7); \quad x \equiv 4(\text{mod } 7).$$

**განსაზღვრება:** ორ მრავალწევრს ეწოდება ურთიერთმისადაარი მოდულით  $m$ , თუ მათი სათანადო კოეფიციენტები ურთიერთსადაარია  $m$  -ის მოდულით ანუ

$$f(x) \equiv g(x)(\text{mod } m). \quad (1.65)$$

**P.S.**

1. შედარებათა თეორიითა და მათი ინფორმატიკაში გამოყენებებით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიმართოს სათანადო ლიტერატურას [20-27].

2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებთან მიმართებაში ქმნის ალგებრულ სისტემას, რომელსაც მათემატიკაში კომუტაციურ, უნიტარულ რგოლს უწოდებენ [28-29].

### 1.3.2. რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიური აგება

რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში, მთელ რიცხვთა სიმრავლისაგან განსხვავებით, არსებობს მოცემული რიცხვის შებრუნებული რიცხვი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამიტომ, მათემატიკოსები ალგებრულ სისტემას, რომელსაც ქმნის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, მასში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ ველს [28-29] უწოდებენ. ალგებრის (ალგებრულ ოპერაციებთან მიმართებაში) თვალსაზრისით არ არის სხვაობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის. ასე, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ალგებრული სისტემის თვალსაზრისით ქმნის ველს. თუმცა, ამ ორ სიმრავლეს შორის აშკარა სხვაობაა ტოპოლოგიის [28-29] თვალსაზრისით. ტოპოლოგიის ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ ზღვარისა და უწყვეტი ფუნქციის ცნებები, რაც ესოდენ მნიშვნელოვანია პროცესების მათემატიკური მოდელირებისათვის.

**განსაზღვრება:** მოცემულ  $Q$  სიმრავლეს, მისი ყოველი  $x$  ელემენტის შემცველ ღია  $B(x)$  სიმრავლეებთან (ტოპოლოგიის ბაზა) ერთად ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიის ბაზას წარმოადგენს მისი ყველა ღია ინტერვალების  $B(x)$  სიმრავლე. ამასთან ერთად, რადგან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, მისი ტოპოლოგიის ბაზაც თვლადია.

განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობის ცნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

**განსაზღვრება:** ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გადასახვას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რაციონალურ რიცხვთა  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  მიმდევრობა ეწოდება.

**განსაზღვრება:** რაციონალურ რიცხვთა  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  მიმდევრობას ეწოდება კოშის (ფუნდამენტალური მიმდევრობა) თუ,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} |q_m - q_n| = 0. \quad (1.66)$$

**თეორემა:** თუ, რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა კრებადია რაციონალური რიცხვისაკენ, მაშინ ის კოშის მიმდევრობას წარმოადგენს.

მაგრამ, თუ კოშის მიმდევრობაა მისი ზღვარი საზოგადოდ შეიძლება არც არსებობდეს (თუ ზღვართი წერტილი არაა რაციონალური რიცხვი).

**განსაზღვრება:**  $x_0 \in \mathcal{Q}$  წერტილს ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ზღვართი წერტილი, თუ ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე (ინტერვალი), შეიცავს რაციონალურ რიცხვს.

**თეორემა:**  $x_0 \in \mathcal{Q}$  წერტილი წარმოადგენს ზღვართი წერტილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს  $\mathcal{Q}$  რაციონალურ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა  $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$  რომელიც კრებადია  $x_0$  რიცხვისაკენ  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x_0$ .

თუ, შევადგენთ რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობას ისეთნაირად, რომ ყოველი შემდეგი წევრი წარმოადგენდეს  $\sqrt{2}$ -ის უკეთეს მიახლოვებას, მაშინ მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა კოშის მიმდევრობას, რომელიც კრებადია არარაციონალური  $\sqrt{2}$  რიცხვისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიცავს თავისი ზღვართი წერტილების მთლიან სიმრავლეს. თუმცა, ის შეიცავს რაციონალურ რიცხვებს და თითოეული რაციონალური რიცხვი ზღვართი წერტილია.

**განსაზღვრება:**  $\mathbb{Q}$  რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანებას მისი ზღვარითი წერტილების  $\partial Q$  სიმრავლესთან  $\mathbb{Q}$  რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის  $\bar{Q}$  ჩაკეტვა ეწოდება.

$$\bar{Q} = Q \cup \partial Q. \quad (1.67)$$

**განსაზღვრება:** რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის  $\bar{Q}$  ჩაკეტვას **ნამდვილ რიცხვთა  $\mathbb{R}$  სიმრავლე** ეწოდება.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოადგენს ზღვარით წერტილს და მაშასადამე, შეგვიძლია ავაგოთ მისკენ კრებადი მიმდევრობა.

**განსაზღვრება:** სიმრავლეს **სრული** ეწოდება, თუ ნებისმიერი კომის მიმდევრობა კრებადია ამ სიმრავლეში.

**მაგალითი:** რაციონალურ რიცხვთა  $Q$  სიმრავლე არაა სრული, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე სრულია (რადგან ის შეიცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს).

**განსაზღვრება:**  $A$  სიმრავლეს ეწოდება **მკვრივი  $B$  სიმრავლეში**, თუ  $B$  სიმრავლის ნებისმიერი  $x_0$  ელემენტისათვის, მოიძებნება  $A$  სიმრავლის ელემენტების ისეთი მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება ამ  $x_0$  ელემენტისაკენ.

**მაგალითი:** რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა მკვრივი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში (დაასაბუთეთ რატომ?).

**განსაზღვრება (ინტუიციური):** სიმრავლეს **მეტრიკულ სივრცეს** უწოდებენ, თუ, მასში განსაზღვრულია ორ ელემენტს შორის მანძილის ცნება.

**მაგალითი:** მანძილი ორ რაციონალურ რიცხვს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(q_1; q_2) = |q_2 - q_1|. \quad (1.68)$$

ფორმულა (1.68)-ის გათვალისწინებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა. თუ, გავიხსენებთ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის მანძილის ცნებას, რომელიც (1.68) ფორმულის ანალოგიურია, მივიღებთ რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს მეტრიკული სივრცეა.

**განსაზღვრება:** მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ არსებობს არაუმეტეს ვიდრე თვლადაი, მასში მკვრივი ქვესიმრავლე.

**მაგალითი:** ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სეპარაბელურია, რადგან მასში, არსებობს მასში ყველგან მკვრივი თვლადი, რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

**P.S.** სეპარაბელობის თვისება საშუალებას იძლევა მეტრიკული სივრცის ელემენტებს მივუახლოვდეთ თვლადი სიმრავლის ელემენტების მიმდევრობით. ეს თვისება ფართოდ გამოიყენება ვარიაციულ რიცხვით მეთოდებში.

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, უკვე, საკმარისია საინჟინრო პრაქტიკაში გამოყენებული ალგებრული განტოლებებისა და განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად.

### 1.3.3 კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრფის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა-ბიექცია; რაც საშუალებას იძლევა, წრფესთან დაკავშირებული გეომეტრიული ამოცანები ჩავწერთ ნამდვილი რიცხვების მეშვეობით და ამოვხსნათ ალგებრული მეთოდების საშუალებით. მაგრამ, წრფეების გარდა გეომეტრიაში არსებობენ სიბრტყეებიც (ორგანზომილებიანი სივრცე). **ისმის კითხვა:** ვიცით, რომ ერთგანზომილებიან სივრცეს - წრფეს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, არსებობენ თუ არა სიბრტყის შესაბამისი “ბრტყელი რიცხვები”?

ამ კითხვაზე პასუხი არის დადებითი: დიახ არსებობენ, თან ასეთი რიცხვითი სიმრავლეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

სიბრტყის ყოველ  $P$  წერტილს შეესაბამება ორი რიცხვი (მისი კოორდინატები)  $P(x;y)$ . ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ “ბრტყელი რიცხვები”. ვთქვათ, გვაქვს რიცხვები  $A = (\alpha; \beta)$ ;  $B = (\gamma; \delta)$ . იმისათვის, რომ აზრი ქონდეს ახალი რიცხვების შემოღებას, უნდა გვქონდეს შესაბამისი ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები. ამის შემდეგ, შეგვეძლება დავახასიათოთ შესაბამისი ალგებრული სისტემა. ამიტომ, შემოვიღოთ ოპერაციები “ბრტყელ რიცხვებზე”.

$$A + B = (\alpha; \beta) + (\gamma; \delta) = (\alpha + \beta; \gamma + \delta) ; \tag{1.69}$$

$$A \cdot B = (\alpha; \beta) \cdot (\gamma; \delta) = (\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \delta; \alpha \cdot \delta + \beta \gamma) ; \tag{1.70}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(\alpha; \beta)}{(\gamma; \delta)} = \left( \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \delta}{\gamma^2 + \delta^2}, \frac{\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta}{\gamma^2 + \delta^2} \right). \quad (1.71)$$

თუ, შემოვიღებთ ნულისა და ერთის შესაბამის ბრტყელ რიცხვებს,

$$\begin{aligned} 0 &= (0; 0); \\ 1 &= (1; 0). \end{aligned} \quad (1.72)$$

მივიღებთ ალგებრულ სისტემას, რომლის ოპერაციებიც ძირითადად აკმაყოფილებენ იგივე თვისებებს, რასაც ოპერაციები ნამდვილ რიცხვებზე (წრფივ რიცხვებზე), თუმცა, არის განსხვავებებიც. კერძოდ, თუ "ბრტყელ რიცხვებს" ჩავწერთ ალგებრული ფორმით

$A = \alpha + i \cdot \beta$ , სადაც  $i = (0; 1)$ ;  $\alpha = (\alpha; 0)$ . მაშინ გვექნება

$$i^2 = i \cdot i = -1. \quad (1.73)$$

ასეთი ტოლობა შეუძლებელია ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში. ასე, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ახალი ტიპის ალგებრულ სისტემასთან რომელსაც  $\mathbb{C}$  - კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს [30] უწოდებენ.  $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ .

### 1.3.3.1. კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები

**განსაზღვრება:**  $z = a + ib$  კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება სიბრტყეზე ამ რიცხვის გამომსახველი წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილს  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე ; ხოლო ორი გვერდის სხვაობა ნაკლებია მესამე გვერდზე :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|. \quad (1.74)$$

**განსაზღვრება:**  $z = a + ib$  კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება  $\bar{z} = a - ib$  კომპლექსურ რიცხვს.

ცხადია, რომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$|\bar{z}| = |z|; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \quad (1.75)$$

**განსაზღვრება:**  $z = a + ib$  კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება  $\operatorname{Re} z = a$  რიცხვს, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება  $\operatorname{Im} z = b$  რიცხვს.

კომპლექსური რიცხვი იგივე სიბრტყის წერტილია. სიბრტყის წერტილები კი, შეგვიძლია გამოვსახოთ, როგორც დეკარტის კოორდინატებში (შეესაბამება კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ჩაწერის ფორმა  $z = x + iy$ ), ასევე, პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში. ამ შემთხვევაში წერტილი ხასიათდება  $|z|$  მოდულით (მანძილით კოორდინატთა სათავემდე) და კუთხით აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ , რომელიც აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით  $2\pi k$  სიზუსტით და რომელსაც კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი  $\arg z$  ეწოდება.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k; \quad (1.76)$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k; \quad (1.77)$$

$$k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (1.78)$$

შედეგად, კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$z = a + ib = |z|(\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z)). \quad (1.79)$$

თუ, გავიხსენებთ ეილერის ფორმულას

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi; \quad (1.80)$$

მაშინ, კომპლექსური რიცხვის (1.79) ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გადავალთ მის მაჩვენებლიან ფორმაზე;

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z}. \quad (1.81)$$

**მაგალითი:**  $z = 1 + i \cdot 1$  კომპლექსური რიცხვი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით.

ამოხსნა:  $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ;  $\arg z = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$  აქედან გამომდინარე,

ტრიგონომეტრიულ ფორმას ექნება სახე:

$z = \sqrt{2} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ; ხოლო შესაბამის მაჩვენებლიან (1.81) ფორმას,

მივიღებთ  $z = \sqrt{2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$  სახით.

### 1.3.3.2. ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \cdot \sin(\arg z_1 + \arg z_2)). \quad (1.82)$$

ამ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \arg z) + i \cdot \sin(n \cdot \arg z)); \quad (1.83)$$

ამ ფორმულიდან გვაქვს:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right). \quad (1.84)$$

სადაც  $k = 0; 1; 2; \dots; n-1$ .

აქედან ნათლად ჩანს, რომ კომპლექსური რიცხვიდან  $n$ -ური ხარისხის ფესვს აქვს  $n$  მნიშვნელობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ  $n$  ხარისხის მრავალწევრს აქვს  $n$  ფესვი.

განვიხილოთ ორწევრა განტოლებები:

1)  $x^2 = -1$  ამ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს. ეხლა ვნახოთ მისი ამონახსნები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x = \sqrt{-1} = \sqrt{\cos \pi + i \cdot \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi + 2\pi k}{2}$$

$k = 0; 1$  ანუ გვაქვს ორი ამონახსნი:

$$x_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2}.$$

2)  $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$  ფესქვემა გამოსახულება გადავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით და მერე ვისარგებლოთ (1.84) ფორმულით.

$$x = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[3]{2} \cdot \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} \right).$$

$k = 0; 1; 2$ . მაშასადამე, გვაქვს სამი ამონახსნი:

$$x_1 = \sqrt[3]{2}; \quad x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$x_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

**P.S.** კომპლექსურ რიცხვებს ფართო გამოყენება აქვს ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვის ამოცანების შესწავლისას და სიგნალების ფილტრაციის საქმეში [30-31]. ასევე, დიდია მათი გამოყენების არეალი უწყვეტ ტანთა მექანიკის ბრტყელი ამოცანების შესწავლის საქმეში [32-33]. არსებობენ კომპლექსური რიცხვებისაგან განსხვავებული სხვა ბრტყელი რიცხვებიც. კონკრეტულად, **დუალური და ორმაგი რიცხვები**, მაგრამ ამ რიცხვებისათვის გაყოფის ოპერაცია არაა ყოველთვის შესაძლებელი (აქ არაა ლაპარაკი ნულზე გაყოფაზე), ამიტომ პრაქტიკაში “ბრტყელი რიცხვებიდან”, ჯერჯერობით, ფართო გამოყენება აქვთ, ძირითადად, კომპლექსურ რიცხვებს და კვატერნიონებს.

### 1.3.4. რიცხვითი სისტემების აგება გრასმან-კლიფორდის პროცედურით

კომპლექსურ რიცხვთა სისტემა არაა დალაგებული, ანუ არაა მათთვის, საზოგადოდ, განმარტებული მეტობა-ნაკლებობის მიმართება. კომპლექსურმა რიცხვებმა დიდი გამოყენება პოვა ფიზიკასა და ტექნიკაში, მექანიკასა და მათემატიკაში. სწორედ ამიტომ, გაგრძელდა ახალი ტიპის განზოგადებული, რიცხვითი სისტემების ძიება და შესწავლა [36-40], იმ პირობით რომ, მათ ქონოდათ ნამდვილი და კომპლექსური რიცხვების ძირითადი თვისებები. ასე წარმოიქმნა **ორმაგი და დუალური რიცხვითი სისტემები, კვატერნიონები, ოქტავეები, კლიფორდის რიცხვები, გრასმანის სისტემები და ა.შ.**

განვიხილოთ ახალი, განზოგადებული რიცხვითი სისტემების აგების გრასმან-კლიფორდის პროცედურა.

ვთქვათ  $a, b$  - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. განვიხილოთ

$$z = a + bi, \tag{1.85}$$

სახის რიცხვების სიმრავლე, სადაც  $i$  - რაღაც სიმბოლოა (ობიექტი), რომელიც ნამდვილ რიცხვებზე გამრავლებისას, აკმაყოფილებს კომუტაციურობის პირობას ანუ  $bi = ib \forall b \in \mathbb{R}$  და ადგილი აქვს ტოლობას  $i^2 = -1 \vee i^2 = 1 \vee i^2 = 0$  ანუ

$$i^2 = \varepsilon, \tag{1.86}$$

სადაც  $\varepsilon$  იღებს მნიშვნელობებს -1, ან 1 ან 0.  $a, b$  - რიცხვებს ეწოდებათ რთული  $z$  რიცხვის კომპონენტები, ხოლო  $i$  - ს უწოდებენ წარმოსახვით ერთეულს. ასე, რომ გრასმან-კლიფორდის პროცედურის პირველი ბიჯის



შემდეგ, ხდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაორმაგება: ერთი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ადგენს  $a$  კომპონენტს, ხოლო მეორე ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე  $b$  - კომპონენტს.

**განსაზღვრება:** (1.85) სახის რიცხვებს ეწოდებათ **კომპლექსური რიცხვები** თუ,  $i^2 = -1$ , ეწოდებათ **ორმაგი რიცხვები** თუ,  $i^2 = 1$  და ეწოდებათ **დუალური რიცხვები** თუ,  $i^2 = 0$ .

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე, **კომპლექსური, ორმაგი და დუალური** რიცხვების ნამრავლი შესაბამისად, განისაზღვრება უბრალო არითმეტიკული ფორმულებით (1.86) პირობის გათვალისწინებით

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac - bd + (ad + bc) \cdot i, \quad (1.87)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bd + (ad + bc) \cdot i, \quad (1.88)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + (ad + bc) \cdot i. \quad (1.89)$$

ყველა შემთხვევაში, გამრავლების ოპერაცია კომუტაციურიცაა და ასოციატიურიც. ხოლო, ორმაგი და დუალური რიცხვები არიან სისტემები **გაყოფის გარეშე**, რადგან მათთვის გაყოფის ოპერაცია ყოველთვის არაა შესაძლებელი (ორმაგი რიცხვები არ იყოფა  $z = a \pm ai$  რიცხვებზე, ხოლო დუალური რიცხვები არ იყოფა  $z = ai$  რიცხვებზე).

გამოვიკვლიოთ რომელი  $z_1 \neq 0$  და  $z_2 \neq 0$  რიცხვებისათვის აქვს ადგილი ტოლობას

$$z_1 \cdot z_2 = 0. \quad (1.90)$$

ასეთ რიცხვებს **ნულის გამყოფები** ეწოდებათ. **კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ნულის გამყოფები არ გვაქვს**, რადგან

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0. \quad (1.91)$$

**ორმაგ რიცხვთა სიმრავლეში**

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = a + ai \vee z_2 = a - ai. \quad (1.92)$$

ყველა ასეთი სახის რიცხვები როცა  $a \neq 0$ , ნულის გამყოფებია. **დუალურ რიცხვთა სიმრავლეში ნულის გამყოფებია** აი რიცხვები, რომლებისთვისაც  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , რადგან

$$ai \cdot bi = abi^2 = 0, \quad (1.93)$$

ნებისმიერი ნამდვილი  $a, b$  რიცხვებისთვის.

**გადავიდეთ გრასმან-კლიფორდის პროცედურის მეორე ნაბიჯზე.** ვთქვათ,  $z_1$  და  $z_2$ , (1.85) სახის რაიმე რიცხვებია, სადაც წარმოსახვითი  $i$  ერთეული აკმაყოფილებენ (1.86) პირობას. შემოვიღოთ რაიმე მეორე  $j$  სიმბოლო (ობიექტი), რომელისთვისაც

$$j^2 = \delta, \tag{1.94}$$

სადაც  $\delta$  იღებს მნიშვნელობებს  $-1$ , ან  $1$  ან  $0$ . ამასთანავე,  $j$  სიმბოლოს ნამრავლი ნამდვილ რიცხვებზე არის კომუტაციური, ხოლო  $i$  წარმოსახვით ერთეულზე მარჯვენა ნამრავლი ანტიკომუტაციურია ( $ji = -ij$ )), ან კომუტაციურია ( $ji = ij$ ), ან გადაგვარებულია ( $ji = 0$ ) ანუ

$$ji = \alpha ij, \tag{1.95}$$

სადაც  $\alpha$  იღებს მნიშვნელობებს  $-1$ , ან  $1$  ან  $0$ . განვიხილოთ

$$u = z_1 + z_2j, \tag{1.96}$$

სახის რიცხვების სიმრავლე. რადგან  $z_1 = a + bi$ ,  $z_2 = c + di$ ,

$$u = a + bi + cj + dij. \tag{1.97}$$

ამ ფორმულაში  $ij$  ნამრავლი წარმოადგენს ობიექტს ახალი თვისებებით. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $ij = k$ . მაშინ მივიღებთ რომ

$$u = a + bi + cj + dk. \tag{1.98}$$

$u$  ობიექტისათვის  $i, j, k$  სიმბოლოებს წარმოსახვით ერთეულებს უწოდებენ. მათ ნამრავლებს აქვთ სახე იხ. ცხრილი 8.

ცხრილი 8

	$i$	$j$	$k$
$i$	$\varepsilon$	$k$	$\varepsilon j$
$j$	$\alpha k$	$\delta$	$\alpha \delta i$
$k$	$\alpha \varepsilon j$	$\delta i$	$\alpha \varepsilon \delta$

### 1.3.4.1. კვატერნიონები

უფრო დეტალურად განვიხილოთ (1.98) ტიპის რიცხვები. როცა  $\varepsilon = \delta = \alpha = -1$ , ანუ  $i^2 = j^2 = -1$  და  $ji = -ij$ , მაშინ წარმოსახვითი  $i, j, k$  ერთეულები მრავლდებიან ერთმანეთზე წესით, რომელიც მოცემულია ცხრილით 9.

ცხრილი 9

	$i$	$j$	$k$
$i$	$-1$	$k$	$-j$
$j$	$-k$	$-1$	$i$
$k$	$j$	$-i$	$-1$

ასეთ  $u = a + bi + cj + dk$  რიცხვებს, კვატერნიონებს უწოდებენ. ეს რიცხვები პირველად განიხილა ჰამილტონმა.

ნებისმიერი კვატერნიონისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$u\tilde{u} = \tilde{u}u = \|u\|^2, \quad \widetilde{u_1 u_2} = \widetilde{u_2} \widetilde{u_1}, \quad \|u_1 u_2\| = \|u_1\| \cdot \|u_2\|, \quad (1.99)$$

სადაც  $\tilde{u} = a - bi - cj - dk$  არის  $u = a + bi + cj + dk$  კვატერნიონის შუღლებული კვატერნიონი, ხოლო  $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$  არის კვატერნიონის ნორმა. კვატერნიონების  $H$  სიმრავლე არის სისტემა გაყოფით. კვატერნიონების სიმრავლეს აქვს კომპლექსური რიცხვების მრავალი თვისება. კვატერნიონების გამრავლებას შეესაბამება სამგანზომილებიანი და ოთხგანზომილებიანი სივრცეების პარალელური გადატანა, ბრუნვა და მსგავსების გარდაქმნა, ცენტრალური და ღერძული სიმეტრია.

**P.S.** კვატერნიონები საშუალებას იძლევა გავამარტივოთ მყარი სხეულის მოძრაობის განტოლებები. როგორც ვიცით, მყარი სხეულის მოძრაობა სამგანზომილებიან სივრცეში შედგება სიმძიმის ცენტრის გადატანითი მოძრაობისგან აბსოლუტური კოორდინატთა სისტემის მიმართ და ბრუნვითი მოძრაობისაგან სიმძიმის ცენტრში განლაგებული თანამდევითი კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამ შემთხვევაში, სიმძიმის ცენტრის გადატანით მოძრაობას აღწერენ  $a$  ვექტორით, ხოლო მისი ბრუნვითი მოძრაობა თანამდევითი კოორდინატთა სისტემის ღერძების მიმართ, აღიწერება კვატერნიონის წარმოსახვითი  $bi + cj + dk$  ნაწილით. ასე, რომ  $u = a + bi + cj + dk$  კვატერნიონის მნიშვნელობები დროის სხვადასხვა მომენტში, აღწერს მყარი სხეულის დინამიკას.

#### 1.3.4.2. პაულის რიცხვები

თუ, გავაგრძელებთ ზემოთმოყვანილ გრასმან-კლიფორდის პროცედურას მათემატიკური ინდუქციის პრინციპით, მაშინ  $n$ -ურ ბიჯზე მივიღებთ

$$w = v_1 + v_2 l, \quad (1.100)$$

სახის რიცხვებს, სადაც  $v_1, v_2$  არის გრასმან-კლიფორდის პროცედურით  $(n - 1)$  ბიჯზე აგებული რიცხვები, ხოლო  $l$  ახალი სიმბოლოა, რომელსაც წარმოსახვითი ერთეულებისნაირი თვისებები აქვს. მაშინ ცხადია, რომ  $w$  რიცხვებს ექნებათ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_m i_m, \quad (1.101)$$

სადაც  $m = 2^n - 1$ , ხოლო  $a_0, a_1, \dots, a_m$  ნამდვილი რიცხვებია;  $i_1, i_2, \dots, i_m$  წარმოსახვითი ერთეულებია, რომლებიც გამრავლებისას კომუტირებენ ნამდვილ რიცხვებთან, ხოლო, ერთმანეთზე ნამრავლებისათვის ადგილი აქვს ფორმულებს

$$i_p^2 = \varepsilon_p, \quad i_q i_p = \alpha_{pq} i_p i_q, \quad p < q, \quad p, q = 1, 2, \dots, n, \quad (1.102)$$

სადაც  $\varepsilon_p, \alpha_{pq}$  იღებს მნიშვნელობებს -1, ან 1 ან 0.

თუ,  $n = 1$  და  $\varepsilon_1 = -1$  მაშინ (1.100),( 1.101) კომპლექსური რიცხვებია; თუ,  $n = 1$  და  $\varepsilon_1 = 1$  მაშინ (1.100),( 1.101) ორმაგი რიცხვებია; თუ,  $n = 1$  და  $\varepsilon_1 = 0$  მაშინ (1.100),( 1.101) დუალური რიცხვებია; თუ,  $n = 2$  და  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \alpha_{12} = -1$ , მაშინ (1.100),( 1.101) კვატერნიონებია; თუ, (1.102) ნამრავლში ყველა  $\alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (1.100),( 1.101) კლიფორდის რიცხვებია; თუ, ყველა  $\varepsilon_p = 0, \alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (1.100),( 1.101) გრასმანის რიცხვებია; თუ,  $n = 3$  და ყველა  $\varepsilon_p = 1, \alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (1.100),( 1.101) პაულის რიცხვებია; თუ,  $n = 4$  და  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1, \alpha_{pq} = -1$ , მაშინ (1.100),( 1.101) დირაკის რიცხვებია.

პაულის რიცხვებს აქვთ სახე:

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_{12} + a_5 i_{13} + a_6 i_{23} + a_7 i_{123}, \quad (1.103)$$

სადაც

$$i_{12} = i_1 i_2, \quad i_{13} = i_1 i_3, \quad i_{23} = i_2 i_3, \quad i_{123} = i_1 i_2 i_3.$$

ამის გარდა,

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1, \quad i_2 i_1 = -i_1 i_2, \quad i_3 i_1 = -i_1 i_3, \quad i_3 i_2 = -i_2 i_3. \quad (1.104)$$

**P.S.** პაულის რიცხვების ნამრავლი ასოციატიურია, მაგრამ არაა კომუტაციური. ასეთივე თვისება აქვთ კლიფორდის რიცხვებს, გარდა კომპლექსური რიცხვებისა.

### 1.3.4.3 ჰიპერკომპლექსური რიცხვები

ყველა, ზემოთგანხილული რიცხვები ჰიპერკომპლექსურ რიცხვებს მიეკუთვნებიან. ასე ეძახიან მათემატიკურ ობიექტებს, რომლებსაც აქვთ სახე

$$w = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n, \quad (1.105)$$

სადაც  $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო  $i_k, k = 1, 2, \dots, n$  წარმოსახვითი ერთეულებია, რომლებიც კომუტირებენ ნამდვილ

რიცხვებთან ნამრავლში. ასეთი რიცხვებისათვის ტოლობა და ჯამი ისევე განიმარტება, როგორც ვექტორებისათვის, ხოლო მათი ერთმანეთზე ნამრავლები განისაზღვრება, წარმოსახვითი ერთეულების გამრავლების დადგენილ წესზე დამოკიდებულებით

$$i_p i_q = \alpha_{pq0} + \alpha_{pq1} i_1 + \alpha_{pq2} i_2 + \dots + \alpha_{pqn} i_n, \quad (1.106)$$

სადაც  $\alpha_{pq} \in \mathbb{R}$ ;  $p, q = 1, 2, \dots, n$ .

(1.105) სახის რიცხვების სიმრავლეს, მათზე ზემოთ განსაზღვრული შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებით და მათი ტოლობის ცნებით,  $n + 1$  რანგის ჰიპერკომპლექსური რიცხვითი სისტემა ეწოდება.

### 1.3.5. კელი-დიქსონის პროცედურა

ვთქვათ,  $U$  არის (1.105) სახის ჰიპერკომპლექსური სისტემა რაიმე გარკვეული (1.106) ტიპის გამრავლების წესით. განვიხილოთ  $U^{(2)}$  ტიპის რიცხვითი სისტემა

$$u = u_1 + u_2 e, \quad (1.107)$$

სადაც  $u_1, u_2 \in U$ , ხოლო  $e$  ახალი სიმბოლოა, რომელიც ნამრავლებში კომუტირებს ნამდვილ რიცხვებთან. განვსაზღვროთ ტოლობა, აგრეთვე, შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები  $U^{(2)}$  ტიპის რიცხვებისათვის შემდეგი წესით:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 e = v_1 + v_2 e &\Leftrightarrow u_1 = v_1 \wedge u_2 = v_2; \\ (u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) &= u_1 + v_1 + (u_2 + v_2) e; \\ (u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) &= u_1 v_1 - \tilde{v}_2 u_2 + (v_2 u_1 + u_2 \tilde{v}_1) e; \end{aligned} \quad (1.108)$$

სადაც  $\tilde{u} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \dots - a_n i_n$ .

**განსაზღვრება:**  $2(n + 1)$  რანგის  $U^{(2)}$  ჰიპერკომპლექსურ სისტემას გაორმაგებული  $U$  სისტემა ეწოდება, ხოლო თვით  $U^{(2)}$  სისტემის აგების პროცედურას – კელი-დიქსონის გაორმაგების პროცედურა. ეს პროცედურა განსხვავდება გრასმან-კლიფორდის პროცედურისაგან გამრავლების (1.108) წესით. ამას გარდა, საწყის  $U$  სისტემას შეიძლება ქონდეს ნებისმიერი რანგი (განზომილება) და გამრავლების ნებისმიერი (1.106) ტიპის წესი.

### 1.3.5.1 ოქტავები

ა) განვიხილოთ, კლასიკური რიცხვითი სიმრავლეებიდან კელი-დიქსონის პროცედურის შედეგად მიღებული სისტემები.

ბ) თუ,  $U = \mathbb{R}$ , მაშინ  $U^{(2)}$  არის კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე  $\mathbb{C}$ , ანუ  $U^{(2)} = \mathbb{C}$ ;

გ) თუ,  $U = \mathbb{C}$ , მაშინ  $U^{(2)} = H$  კვატერნიონების რიცხვითი სისტემა;

დ) თუ,  $U = H$ , მაშინ  $U^{(2)}$  არის

$$w = u_1 + u_2 e = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k + (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) e =$$

$$= \sum_{k=0}^7 a_k i_k, \quad (1.109)$$

სახის რიცხვითი სისტემა, სადაც  $u_1, u_2 \in H$  კვატერნიონებია,  $a_k \in \mathbb{R}$ , ასევე,  $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = k, i_4 = e, i_5 = ie, i_6 = je, i_7 = ke$

წარმოსახვითი ერთეულებია, რომელთა ყველა შესაძლო ნამრავლები (1.108) წესების თანახმად მოცემულია ცხრილში 10

ცხრილი 10

	$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	$i_5$	$i_6$	$i_7$
$i_1$	-1	$i_3$	$-i_2$	$i_5$	$-i_4$	$-i_7$	$i_6$
$i_2$	$-i_3$	-1	$i_1$	$i_6$	$i_7$	$-i_4$	$-i_5$
$i_3$	$i_2$	$-i_1$	-1	$i_7$	$-i_6$	$i_5$	$-i_4$
$i_4$	$-i_5$	$-i_6$	$-i_7$	-1	$i_1$	$i_2$	$i_3$
$i_5$	$i_4$	$-i_7$	$i_6$	$-i_1$	-1	$-i_3$	$i_2$
$i_6$	$i_7$	$i_4$	$-i_5$	$-i_2$	$i_3$	-1	$-i_1$
$i_7$	$-i_6$	$i_5$	$i_4$	$-i_3$	$-i_2$	$i_1$	-1

**განსაზღვრება:** (1.109) სახის რიცხვებს, წარმოსახვითი ერთეულების გამრავლების ცხრილში მოყვანილი წესით, **ოქტავები** ეწოდებათ.

ოქტავების ნამრავლი, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური და ასოციაციური.

### 1.3.6. ზოგიერთი რიცხვითი სისტემის მატრიცული წარმოდგენა

ა) ჰიპერკომპლექსური რიცხვების პრაქტიკული გამოყენებისას, ხშირად, მიზანშეწონილია მათი მატრიცული წარმოდგენა.

ბ) განვიხილოთ  $z = a + bi$  კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე. ჩავწეროთ ისინი  $z = ai_0 + bi_1$  სახით, სადაც  $i_0 = 1$  და  $i_1 = i$ . გავითვალისწინოთ ამ სიმბოლოების ალგებრული თვისებები:

$$i_0^2 = i_0, \quad i_0 i_1 = i_1 i_0, \quad i_1^2 = -i_0, \quad ai_0 = i_0 a, \quad ai_1 = i_1 a, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (1.110)$$

ამ,  $i_0$  და  $i_1$  ობიექტების ნაცვლად, განვიხილოთ შესაბამისი კვადრატული მატრიცები

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.111)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს მატრიცები აკმაყოფილებენ (1.110) პირობებს. მაგალითად,

$$i_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i_0. \quad (1.112)$$

(1.111) მატრიცული შესაბამისობებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ  $z = ai_0 + bi_1$  კომპლექსურ რიცხვს შეესაბამება მატრიცა

$$z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (1.113)$$

გ) ამ შესაბამისობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კომპლექსურ რიცხვებსა და (1.113) ტიპის მატრიცებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა, რომლის დროსაც, კომპლექსური რიცხვების ჯამსა და ნამრავლს შეესაბამება (1.113) სახის შესაბამისი მატრიცების ჯამი და ნამრავლი. ასეთ შესაბამისობას ორ სიმრავლეს შორის, იზომორფიზმი ეწოდება.

დ)  $u = a + bi + cj + dk = ai_0 + bi_1 + ci_2 + di_3$  კვატერნიონებისათვის გვაქვს შესაბამისობა

$$e) i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

სადაც  $i \in \mathbb{C}$ . ამ შესაბამისობის გათვალისწინებით, კვატერნიონების მატრიცულ წარმოდგენას აქვს სახე:

$$u = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\tilde{z}_2 & \tilde{z}_1 \end{pmatrix}, \quad (1.114)$$

ამრიგად, კვატერნიონებსა და (1.114) სახის კომპლექსურ რიცხვებს შორის არსებობს იზომორფიზმი.

ვ) ჰაულის რიცხვების მატრიცული წარმოდგენისათვის,  $i_0$  ობიექტისა და მთავარი წარმოსახვითი ერთეულებისათვის იყენებენ წარმოდგენებს

$$i_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ხოლო სხვა წარმოსახვითი ერთეულების მატრიცული წარმოდგენებისათვის უნდა გამოვიყენოთ  $i_{12} = i_1 i_2$ ,  $i_{13} = i_1 i_3$ ,  $i_{23} = i_2 i_3$ ,  $i_{123} = i_1 i_2 i_3$ . ფორმულები

ზ) კლიფორდის რიცხვების წარმოდგენა ხდება ოთხი მატრიცული კომპონენტით:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

აქ, ადგილი აქვს ნორმირების თანადობებს  $\gamma_i^2 = +1$ . კლიფორდის რიცხვების მეშვეობით იგება სპეციალური სპინორული ოპერატორები [34-35], რომელთაც ფართო გამოყენება აქვთ თეორიულ ფიზიკაში.

### 1.3.7. არაწრფივი განტოლების ამოხსნა ნიუტონის ალგორითმით

განტოლებების ამოსახსნელად, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს, რომლებსაც ზოგჯერ პიკარის თანდათანობითი მიახლოების მეთოდებსაც უწოდებენ. ამ ტიპის მეთოდების არსის შესაცნობად, განვიხილოთ არაწრფივი განტოლება

$$f(x) = 0. \tag{1.115}$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად, მას გადაწერენ შესაბამისი იტერაციული ფორმულის სახით

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{1.116}$$

აირჩევენ ფესვის საწყის მიახლოებას

$$x = x_0, \tag{1.117}$$

ამის შემდეგ, (1.116) ფორმულების მეშვეობით პოულობენ შემდგომ მიახლოებებს

$$x_1 = \varphi(x_0), \quad x_2 = \varphi(x_1), \quad x_3 = \varphi(x_2), \quad \dots \tag{1.118}$$



როგორ ვხედავთ, აღწერილი იტერაციული პროცედურა ყოველ  $x_{n+1}$  ეტაპზე, იყენებს წინა  $x_n$  ერთი ბიჯის მნიშვნელობას. ასეთი (1.116) ტიპის იტერაციულ ფორმულებს, ერთბიჯიან იტერაციულ ფორმულებს უწოდებენ. არსებობენ ორბიჯიანი, სამბიჯიანი და ა.შ. იტერაციული ფორმულებიც

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}) - \text{ორბიჯიანი ფორმულა};$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) - \text{სამბიჯიანი ფორმულა და ა.შ.}$$

(1.116) იტერაციული ფორმულის აგების შემდეგ, ისმის კითხვები:

ა)რამდენი  $n$  მიახლოება უნდა ავიღოთ ანუ იტერაციული პროცესი როდის უნდა გავაჩეროთ, რომ მიღებული მიახლოება იყოს წინასწარ მოთხოვნილ ფარგლებში ?

ბ)კრებადია თუ არა (1.116) იტერაციული პროცესი (1.115) განტოლების ფესვისაკენ?

ამ კითხვებს პასუხობენ შემდეგნაირად:

ა)წინასწარ ირჩევენ გამოთვლის დასაშვებ  $\varepsilon$  ცდომილებას და იტერაციულ პროცესს აჩერებენ, როგორც კი გამოთვლის აბსოლუტური ცდომილება დააკმაყოფილებს პირობას  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ;

ბ)იტერაციული (1.116) პროცესის კრებადობისათვის, მისი აგებისას, უნდა გავითვალისწინოთ ბანახის თეორემა კუმშვადი ასახვების შესახებ, ანუ კრებადობის საკმარისი პირობა.

**განსაზღვრება:** ვთქვათ  $M$  მეტრიკული სივრცეა  $\rho$  მეტრიკით,  $A: M \rightarrow M$  ოპერატორს ეწოდება **მკუმშავი** თუ, არსებობს ისეთი  $\alpha \in [0; 1]$ , რომ  $M$  სივრცის ნებისმიერი ორი  $x$  და  $y$  ელემენტებისათვის, ადგილი აქვს უტოლობას  $\rho(Ax; Ay) \leq \alpha \rho(x; y)$ .

**ბანახის თეორემა.** თუ,  $A$  არის მკუმშავი ოპერატორი სრულ  $M$  მეტრიკულ სივრცეში, მაშინ  $x = Ax$  განტოლებას აქვს ერთი და მხოლოდ ერთი  $\xi$  ამონახსნი, რომელიც შეიძლება მივიღოთ როგორც ამ სივრცის  $u_n$  ელემენტების მიმდევრობის ზღვარი  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \xi$ , სადაც  $u_{n+1} = Au_n$  ხოლო საწყისი  $u_0 \in M$  მიახლოება შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერად.

აქვე, შეგვიძლია შევადგინოთ ერთბიჯიანი კუმშვადი იტერაციული ფორმულების აგების წესიც. ამისათვის განვიხილოთ (1.116) ფორმულა და გამოვიყენოთ ლაგრანჟის ფორმულა სასრული ნაზრდების შესახებ, მაშინ მივიღებთ

$$x_{n+1} - x_{m+1} = \varphi(x_n) - \varphi(x_m) = \varphi'(\tau_k)(x_n - x_m), \quad (1.117)$$

აქედან ცხადია, რომ ბანახის თეორემიდან გამომდინარე, კუმშვადობის  $|x_{n+1} - x_m| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = |\varphi'(\tau_k)(x_n - x_m)| \leq \alpha|x_n - x_m|$  პირობა შესრულდება თუ,  $\max|\varphi'(\tau_k)| < 1$ .

ეხლა, განვიხილოთ ნიუტონის იტერაციული ფორმულა. ნიუტონის იტერაციული ფორმულისათვის უნდა ავირჩიოთ ფესვის მნიშვნელობის საწყისი მიახლოება, ამისათვის იყენებენ ვაიერშტრასის თეორემას.

ვაიერშტრასის თეორემა: თუ,  $[a; b]$  შუალედის ბოლოებზე  $f(x)$  უწყვეტ ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშნის მნიშვნელობები ანუ  $f(a)f(b) < 0$ , მაშინ ამ შუალედში არსებობს ისეთი  $\xi$  წერტილი რომ  $f(\xi) = 0$ .

მაშასადამე, საწყისი  $x_0$  მიახლოება უნდა ავირჩიოთ  $[a; b]$  შუალედში, რომლის ბოლოებზეც სრულდება  $f(a)f(b) < 0$  პირობა. ცხადია, რომ რაც უფრო მოკლე იქნება  $[a; b]$  შუალედი, მით უფრო ცოტა იტერაციები დაგვჭირდება ფესვის საპოვნელად. მიახლოების შესაფასებლად ვირჩევთ ანგარიშის დასაშვებ  $\varepsilon$  ცდომილებას.

(1.115) განტოლების ამოსახსნელად  $f(x)$  ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის მწკრივად საწყისი  $x_0$  მიახლოების მიდამოში

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots = 0, \quad (1.118)$$

თუ, ტეილორის (1.118) ფორმულაში უგულებელვყოფთ კვადრატულ და უფრო მაღალი რიგის წევრებს, მივიღებთ ფესვის შემდგომი მიახლოების საპოვნელ ფორმულას

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0, \quad (1.119)$$

აქედან ცხადია, რომ

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (1.120)$$

ფესვის შემდგომი მიახლოებების საპოვნელად, ანალოგიური პროცედურის გავლით მივიღებთ

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad (1.121)$$

და საზოგადოდ, გვექნება ნიუტონის იტერაციული ფორმულა

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (1.122)$$

იტერაციული პროცესი გრძელდება, ვიდრე არ შესრულდება პირობა  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ .

P.S. ნიუტონის იტერაციული ფორმულა პრაქტიკულად კარგად მუშაობს, მხოლოდ მაშინ, როცა საწყისი მიახლოება ახლოსაა ზუსტ ამონახსნთან. ამიტომ, უმეტესწილად, იყენებენ იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდს ან მონტე-კარლოს, ფესვის ალბათური ძებნის მეთოდს.

### 1.3.7.1. არაწრფივი განტოლების ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით

მიუხედავად იმისა, რომ არსებობს არაწრფივი ალგებრული განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის, კლასიკური მეთოდების დიდი სიმრავლე, პრაქტიკაში, უფრო ხშირად იყენებენ იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდს. ის თავის თავში მოიცავს კლასიკური მეთოდების დადებით თვისებებს და საშუალებას იძლევა, ინდივიდუალურად მივუდგეთ ყოველ არაწრფივ განტოლებას და ავაგოთ შესაბამისი კრებადი იტერაციული ფორმულა.

განვიხილოთ, იაკობის იტერაციული ფორმულის აგების ალგორითმი.

ვთქვათ, ამოსახსნელი გვაქვს არაწრფივი ალგებრული განტოლება

$$f(x) = 0. \quad (1.123)$$

ა) განტოლების ორივე მხარეს ვამრავლებთ რაღაც  $\lambda$  რიცხვზე, რომლის მნიშვნელობასაც მოგვიანებით ავარჩევთ იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობიდან, მივიღებთ

$$\lambda f(x) = 0. \quad (1.124)$$

ბ) მიღებული (1.124) განტოლების ორივე მხარეს ვუმატებთ  $x$ -ს და მარცხენა მხარეს ავლნიშნავთ  $\varphi(x)$ -ით, მაშინ გვექნება

$$\varphi(x) = x + \lambda f(x) = x. \quad (1.125)$$

გ) ვაგებთ შესაბამის (1.116) იტერაციულ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n). \quad (1.126)$$

დაგვრჩა მხოლოდ  $\lambda$  მამრავლის მნიშვნელობის პოვნა (1.126) იტერაციული პროცესის კრებადობის  $\max |\varphi'(\tau_k)| < 1$  პირობიდან.

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\varphi'(x) = 1 + \lambda f'(x) \text{ ანუ კრებადობის პირობა მიიღებს სახეს} \quad (1.127)$$

$$\max_{x \in [a; b]} |1 + \lambda f'(x)| < 1.$$

პრაქტიკაში იყენებენ უფრო მარტივ პირობას

$$|1 + \lambda f'(x_0)| < 1. \quad (1.128)$$

ამ პირობიდან პოულობენ  $\lambda$  მამრავლის  $\lambda_0$  მნიშვნელობას, რაც საბოლოოდ, გვაძლევს იაკობის კრებად იტერაციულ ფორმულას

$$x_{n+1} = x_n + \lambda_0 f(x_n). \quad (1.129)$$

იტერაციული პროცესის გაჩერების პირობაა

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (1.130)$$

ამ შემთხვევაში, აბსოლუტური ცდომილებაა

$$\Delta(\xi) = \varepsilon, \quad (1.131)$$

ხოლო, ფარდობითი ცდომილებაა

$$\delta(\xi) = \frac{\Delta(\xi)}{|x_n|}. \quad (1.132)$$

მაგალითი. ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ განტოლება

$$2x - \lg x = 7, \quad (1.133)$$

$\varepsilon = 10^{-4}$  სიზუსტით.

ამოხსნა:

გადავწეროთ (1.133) განტოლება ზოგადი (1.131) ფორმით

$$f(x) = 7 + \lg x - 2x = 0. \quad (1.134)$$

ეხლა, გამოვიყენოთ მისთვის ზემოთმოყვანილი პროცედურა და ავაგოთ იაკობის, შესაბამისი იტერაციული ფორმულა

$$ა) \lambda f(x) = \lambda(7 + \lg x - 2x) = 0; \quad (1.135)$$

$$ბ) \varphi(x) = x + \lambda f(x) = x$$

$$გ) x = x + \lambda(7 + \lg x - 2x) = \varphi(x). \quad (1.136)$$

$$დ) x_{n+1} = x_n + \lambda(7 + \lg x_n - 2x_n), \quad (1.137)$$

გვაქვს ამოცანა:  $\lambda$  მამრავლისათვის ვიპოვოთ ისეთი  $\lambda_0$  მნიშვნელობა, რომლისთვისაც დაკმაყოფილდება იტერაციული ფორ-მულის კრებადობის პირობა  $|1 + \lambda f'(x_0)| < 1$ , რომელსაც ჩვენს შემთხვევაში აქვს სახე

$$\left|1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{x_0 \ln 10}\right| < 1. \quad (1.138)$$

საწყისი მიახლოების საპოვნელად ვიყენებთ ვაიერშტრასის თეორემას.

$$f(1) = 7 + \lg 1 - 2 \cdot 1 = 5 > 0$$

$$f(10) = 7 + \lg 10 - 2 \cdot 10 = -12 < 0$$

ე.ი.  $x_0 \in [1; 10]$ . საწყის მიახლოებად ავირჩიოთ  $x_0 = 4$ . მაშინ კრებადობის (1.138) პირობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$|\varphi'(4)| = \left| 1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{4 \ln 10} \right| < 1. \quad (1.139)$$

ამ პირობას აკმაყოფილებს, მაგალითად  $\lambda = 0.5$ , ეს მნიშვნელობა ცხადია, რომ არაა ერთადერთი. მივიღეთ იაკობის იტერაციული ფორმულა მოცემული (1.133) განტოლებისათვის.

$$x_{n+1} = x_n + 0.5(7 + \lg x_n - 2x_n) \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_{n+1} = 0.5(7 + \lg x_n). \quad (1.140)$$

$$x_0 = 4. \quad (1.141)$$

ამ იტერაციული ფორმულებით გათვლა გვაძლევს, რომ

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5(7 + \lg 4) \approx 3.801 \\ x_2 &= 0.5(7 + \lg 3.801) \approx 3.7899 \\ x_3 &= 0.5(7 + \lg 3.7899) \approx 3.7893 \\ x_4 &= 0.5(7 + \lg 3.7893) \approx 3.7893 \end{aligned}$$

$|x_4 - x_3| < 0.0001$ , რაც იმას ნიშნავს რომ მოცემული განტოლება ამოხსნილია მოთხოვნილი  $10^{-4}$  სიზუსტით და მისი ფესვია 3.7893 ფარდობითი ცდომილება იქნება

$$\delta(\xi) = \frac{\Delta(\xi)}{|x_n|} = \frac{0.0001}{3.7893} \approx 0.00003 \quad (1.142)$$

რაც სავსებით მისაღებია მოცემული ამოცანისათვის.

### 1.3.8. ორ და სამ ცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნა მატრიცული ხერხით Mathcad-ის ბაზაზე

ორ და სამცვლადიან, წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოხსნისთვის, გამოიყენება არსებული პროგრამული პაკეტები რომლებიც ეყრდნობიან გაუსის მეთოდს, ესენია: Mathcad, Matlab, Mathematica და ა.შ. ჩვენ სიმარტივისათვის, გამოვიყენებთ Mathcad პაკეტს.

ვთქვათ, ამოხსნისთვის მესამე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემა

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

გადავწერთ მას მატრიცული ფორმით:

$$A \cdot X = B, \quad (*)$$

სადაც,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

მაშინ, მატრიცული (\*) განტოლების ამონახსნს ექნება სახე  
 $X = A^{-1} \cdot B$ .

განვიხილოთ მაგალითი

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 20, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 24, \\ 8x_1 + 9x_2 + 5x_3 &= 41. \end{aligned}$$

შავადგინოთ შესაბამისი Mathcad პროგრამა

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 41 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში, Mathcad პროგრამა საკმაოდ მარტივია და ემთხვევა ამოცანის მატრიცულ ამოხსნას. ცხადია, რომ მაღალი რიგის ( $n \geq 10^4$ ) სისტემების ასეთნაირად ამოხსნა, საკმაოდ მოუხერხებელია, მითუმეტეს, როდესაც სისტემის მატრიცის დეტერმინანტი ახლოსაა ნულთან (სისტემა ცუდადაა განპირობებული).

### 1.3.8.1. მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით

მაღალი რიგის ( $n \geq 3$ ) წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნელად, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს.

იმისათვის, რომ შევისწავლოთ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ალგორითმების კრებადობა, ცდომილება და გამოთვლების მდგრადობა, იყენებენ ვექტორისა და მატრიცის ნორმის ცნებას, რომლებიც ვექტორის სიგრძის ცნების განზოგადებას წარმოადგენენ.

წრფივი  $\mathbb{R}^n$  ვექტორული სივრცის  $f \in \mathbb{R}^n$  ელემენტის ნორმა ეწოდება  $\|f\|$  რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

- 1)  $\|f\| \geq 0$ ;  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ;
- 2)  $\|\alpha f\| = \alpha \|f\|$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = const$ ;
- 3)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ვექტორისათვის, როგორც წესი, განიხილავენ ორი ტიპის ნორმას

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|, \quad (1.143)$$

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (1.144)$$

კვადრატული  $A = (a_{ij})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, n}$  მატრიცის ნორმა განისაზღვრება  $\mathbf{x}$  და  $A\mathbf{x}$  ვექტორების ნორმების საშუალებით:

$$\|A\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (1.145)$$

დამტკიცებულია, რომ

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (1.146)$$

$$\|A\|_2 \leq \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (1.147)$$

ამასთან თუ, მატრიცა სიმეტრიულია ანუ  $A = A^T$ , მაშინ

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|, \text{ და } \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}, \quad (1.148)$$

სადაც,  $\lambda_i(A)$  მოცემული  $A$  მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია ანუ  $\det(A - \lambda E) = 0$  მახასიათებელი განტოლების ფესვებია.

**განვიხილოთ ნორმის გამოთვლის მაგალითები Mathcad –ის ბაზაზე.**

ა)  $\mathbf{x}$  ვექტორის პირველი და მეორე ნორმა:

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \max(\mathbf{x}) = 10 \quad \sqrt{\sum_{i=0}^3 (x_i)^2} = 11.619$$

ბ) ეხლა განვიხილოთ, მოცემული არასიმეტრიული  $A$  მატრიცის პირველი ნორმა და მეორე ნორმის შეფასება ზემოდან:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} := 0..2 \quad \mathbf{v}_j := \sum_{i=0}^2 \left| \left[ (A^T)^{\langle j \rangle} \right]_i \right| \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \max(\mathbf{v}) = 11$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 (A_{i,j})^2} = 9.381$$

მატრიცის ნორმების გამოთვლა უფრო მარტივია, თუ გამოვიყენებთ Mathcad –ის სტანდარტულ პროგრამებს

$$\text{norm1}(A) = 11 \quad \text{norm2}(A) = 8.847$$

განვიხილოთ ნორმის თვისებები:

$$\text{ა) } \|A + B\| = \|A\| + \|B\|; \|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|;$$

$$\text{ბ) } \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

რიცხვითი ალგორითმების რეალიზაციისას გარდაუვალია ცდომილებები, რომელთა შეფასებაც ხდება ცდომილების  $\rho$  ვექტორის ნორმის საშუალებით. ცდომილებები გამოწვეულია საწყისი მონაცემების ცდომილების ვექტორით, რომლის ნორმას ავლნიშნავთ  $\rho_1$ , თვით მეთოდის ცდომილებებით, რომლის ვექტორის ნორმას ავლნიშნავთ  $\rho_2$  და კომპიუტერში რიცხვების დამრგვალების ცდომილების ვექტორით ნორმით  $\rho_3$ . ჯამური  $\rho$  ცდომილება ფასდება უტოლობით

$$\rho \leq \rho_1 + \rho_2 + \rho_3. \quad (1.149)$$

როგორც წესი, თვლიან რომ მეთოდის ცდომილება 10-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს საწყისი მონაცემების ცდომილებაზე. თავის მხრივ, დამრგვალების ცდომილება 10-ჯერ ნაკლები უნდა იყოს მეთოდის ცდომილებაზე.

ცვლადთა გამორიცხვის გაუსის მეთოდი ზუსტი მეთოდია, მას არა აქვს მეთოდის ცდომილება, თუმცა, საწყისი მონაცემების ან დამრგვალების მცირე ცდომილებასაც შეუძლია ამოხსნის შედეგში მოგვცეს მნიშვნელოვანი ცდომილება.

წრფივ განტოლებათა  $Ax = b$  სისტემის  $x$  ამონახსნის ცდომილების შესაფასებლად მარჯვენა  $B$  მხარეზე დამოკიდებულებით, განიხილავენ სისტემის ამონახსნის ფარდობითი ცდომილების შეფარდებას მარჯვენა მხარეების ფარდობით ცდომილებებთან

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\|r\|}{\|x\|}}{\frac{\|\eta\|}{\|b\|}} &= \frac{\|r\| \cdot \|b\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} = \frac{\|Ax\| \cdot \|A^{-1}\eta\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|x\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\eta\|}{\|x\| \cdot \|\eta\|} = \\ &= \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \nu(A), \end{aligned} \quad (1.150)$$

სადაც  $r$  ამონახსნის აბოლუტური ცდომილებაა,  $\eta$  - მარჯვენა მხარეების აბოლუტური ცდომილება.



$\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$  რიცხვს  $A$  მატრიცის განპირობებულობის რიცხვს უწოდებენ. მატრიცის განპირობებულობის რიცხვი, ახასიათებს სისტემის მარჯვენა მხარეებში ცდომილების გავლენით, ამონახსნის ცდომილების ზრდის სისწრაფეს. თუ, განპირობებულობის რიცხვი გაცილებით მეტია ერთზე, მაშინ სისტემას ცუდად განპირობებული ეწოდება და მისი ამხსნისას ცდომილება დიდია.

**სიმეტრიული მატრიცებისათვის**

$$\nu(A) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)|} \geq 1. \quad (1.151)$$

**განვიხილოთ მაგალითი Mathcad –ის ბაზაზე.**

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0.5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{\max(\text{eigenvals}(A))}{\min(\text{eigenvals}(A))} = 3.588$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში, მატრიცის განპირობებულობის რიცხვია 3.588.

ზუსტი მეთოდების გამოყენება წრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად, მაღალი რიგის ( $n \geq 10^4$ ) შემთხვევაში არაა მიზანშეწონილი, რადგან ოპერაციათა რიცხვი სწრაფად მატულობს განზომილებასთან ერთად და მაშასადამე მატულობს ანგარიშის ცდომილებაც.

თუ, სისტემის მატრიცა სამდიაგონალაა, მაშინ იყენებენ თომასის გაშვების მეთოდს, რაც ფაქტიურად, გაუსის მეთოდია, თუმცა, ოპერაციათა რიცხვი მცირდება, რადგან ნულოვან დიაგონალებთან არ ხდება ოპერაციები, რაც ამცირებს ოპერაციათა საერთო რაოდენობას და მაშასადამე ცდომილებას.

სასრულსხვაობათა მეთოდის გამოყენებას წრფივი, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად, მივყავართ მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის აუცილებლობასთან. ასეთ შემთხვევაში, უმეტესწილად, იყენებენ იტერაციულ მეთოდებს, რომელთაც საზოგადოდ აქვთ სახე

$$B \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{\tau_{n-1}} + Ax_{n-1} = b, \quad n \in N, \quad (1.152)$$

სადაც  $\tau_{n-1}$  იტერაციის პარამეტრია. თუ,  $B = E$ , მაშინ იტერაციულ მეთოდს

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{\tau_{n-1}} + Ax_{n-1} = b, \quad n \in N, \quad (1.153)$$

ეწოდება ცხადი იტერაციული სქემა და ამონახსნი მოიცემა სქემით

$$x_n = x_{n-1} - \tau_{n-1}(Ax_{n-1} - b), \quad n \in N. \quad (1.154)$$

თუ,  $B \neq E$  მაშინ იტერაციულ სქემას ეწოდება არაცხადი და ის მოიცემა ფორმულით

$$Bx_n = Bx_{n-1} - \tau_{n-1}(Ax_{n-1} - b), \quad n \in N. \quad (1.155)$$

არაცხადი იტერაციული სქემის შემთხვევაში, იტერაციის ყოველ ახალ ბიჯზე, უნდა ამოიხსნას განტოლებათა სისტემა (1.155).

იაკობის მარტივი იტერაციის სქემას წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის აქვს სახე

$$x_{n+1} = x_n - \tau(Ax_n - b) = (E - \tau A)x_n + \tau b = Dx_n + C, \quad (1.156)$$

$$DD = E - \tau A, \quad C = \tau b, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.157)$$

თეორემა: თუ,  $\|D\| < 1$  მაშინ წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი და (1.156) იტერაციული პროცესი კრებადია სისტემის ამონახსნისაკენ გეომეტრიული პროგრესიის სისწრაფით.

იტერაციული პროცესით მიღებული ამონახსნის, ზუსტ ამონახსნთან აბსოლუტური ცდომილება ფასდება უტოლობით

$$\|x^* - x_n\| \leq \frac{\|D\|}{1 - \|D\|} \|x_n - x_{n-1}\|. \quad (1.158)$$

ეს უტოლობა საშუალებას გვაძლევს გავაჩეროთ იტერაციული პროცესი მაშინ, როცა მიღწეულია ამონახსნის შესაბამისი სიზუსტე.

განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი **Mathcad** –ის ბაზაზე

$$\underline{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \tau := 0.4 \quad \underline{N} := 15 \quad \underline{x}^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D := A^0 - \tau \cdot A$$

$$\text{norm2}(D) = 1.231 \quad n := 0..N \quad \underline{x}^{(n+1)} := D \cdot \underline{x}^{(n)} + \underline{c} \quad \Delta x_n := \left| \underline{x}^{(n+1)} - \underline{x}^{(n)} \right|$$

$$\Delta x_N = 9.19 \times 10^{-3} \quad \text{მიახლოებითი ამონახსნი: } \underline{x}^{(N+1)} = \begin{pmatrix} 2.241 \\ -1.24 \\ 10.214 \end{pmatrix}$$

$$\text{ზუსტი ამონახსნი: } A^{-1} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.25 \\ 10.25 \end{pmatrix}$$

აბსოლუტური ცდომილების დინამიკა იტერაციების მიხედვით.

### 1.3.9. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით

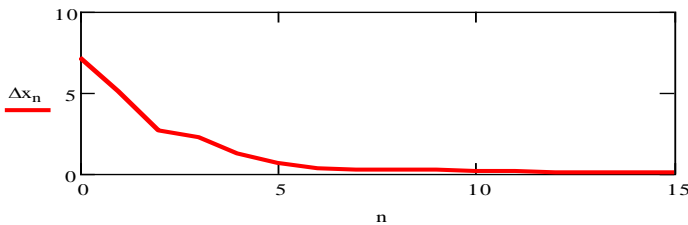
თუ, გვინდა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}, \quad (1.159)$$

იტერაციული მეთოდით, მაშინ ისეთნაირადვე ვიქცევით, როგორც სკალარულ შემთხვევაში. (1.159) სისტემა შეგვიძლია გადავწეროთ ვექტორული ფორმით, თუ შემოვიღებთ შესაბამის აღნიშვნებს

$$\begin{cases} F(x) = 0 \\ F^T = (f_1, f_2, \dots, f_n) \\ x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.160)$$

შესაბამის იტერაციულ სქემას ექნება სახე:



$$x_{n+1} = x_n + \tau F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.161)$$

თუ, იტერაციული პროცესის წარმომქმნელი  $\varphi(x) = x + \tau F(x)$  ფუნქცია, აკმაყოფილებს ბანახის თეორემის პირობებს, მაშინ (1.161) პროცესი კრებადია (1.159) არაწრფივი განტოლების ამონახსნისაკენ.

განვიხილოთ, არაწრფივ განტოლებათა სისტემის იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით ამოხსნის მაგალითი.

ვთქვათ, გვინდა ამოვხსნათ არაწრფივ განტოლებათა სისტემა  $F(x) = 0$ . შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა **Mathcad** – ის ბაზაზე

ამოსახსნელი სისტემის მარცხენა მხარის ვექტორ-ფუნქცია.

$$F(x) := \begin{bmatrix} (x_0)^2 + x_1 - 1 \\ e^{-x_1} - x_1 \end{bmatrix}$$

იტერაციის პარამეტრი:  $\tau := 1$

იტერაციათა რიცხვი:  $N := 15$

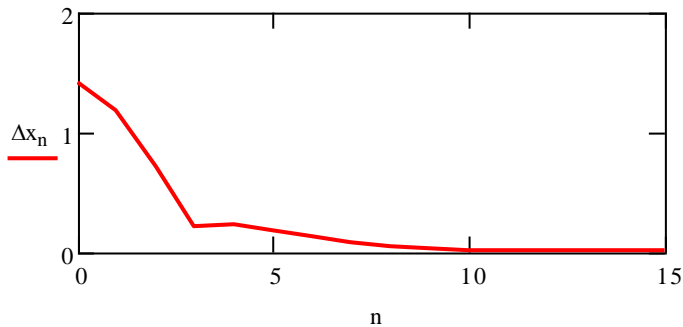
უცნობების საწყისი მიახლოებები:  $x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

იაკობის მარტივი იტერაციის სქემა:  $n := 0..N$   $x^{(n+1)} := x^{(n)} + \tau \cdot F(x^{(n)})$

ცდომილებების დინამიკა იტერაციების ნომრის მიხედვით:

$$\Delta x_n := |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$$

ცდომილების დინამიკის გრაფიკული სურათი:



მიახლოებითი ამონახსნი მეთხუთმეტე იტერაციაზე:

მიახლოებითი ამონახსნი:

$$x^{(N+1)} = \begin{pmatrix} -0.658 \\ 0.567 \end{pmatrix}$$

$F(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა  $F(x^{(N+1)})$ :

$$F(x^{(N+1)}) = \begin{pmatrix} -4.699 \times 10^{-4} \\ 1.182 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

როგორც ვხედავთ, აბსოლუტური ცდომილებაა  $\varepsilon \approx 10^{-4}$ .

### 1.3.9.1. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიუტონის მეთოდით

განვიხილოთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემის.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1.162)$$

ამოხსნის ნიუტონის ალგორითმი. აქაც უნდა ვისარგებლოთ (1.160) ვექტორული აღნიშვნებით. ანუ გვაქვს განტოლებათა სისტემა  $F(x) = 0$ . განვიხილოთ, ამ ვექტორ-ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულე-ბისაგან შედგენილი მატრიცა (იაკობის მატრიცა):

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.163)$$

მაშინ, ნიუტონის იტერაციული სქემა არაწრფივ განტოლებათა სისტემისათვის, ჩაიწერება ვექტორული ფორმით:

$$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} \cdot F(x_n). \quad (1.164)$$

თუ, სისტემის იაკობის მატრიცა არაა გადაგვარებული  $|F'(x)| \neq 0$  და საწყისი პირობები “საკმაოდ ახლოსაა ამონახსნთან”, მაშინ ნიუტონის იტერაციული პროცესი კრებადია. თუმცა, ნიუტონის სქემით, არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა არაპრაქტიკულია, თეორიულად ის მრავალი ახალი იდეის მომცემია.

## ამოცანები

### ვარიანტი 1

1. რაში მდგომარეობს ევკლიდეს ალგორითმის არსი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში (რისი პოვნის საშუალებას იძლევა)?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 120; 180?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 3x^2 + x \equiv 0 \pmod{2}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^5 = 1$ ;
6. სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (რატომ)?

### ვარიანტი 2

1. ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით იპოვეთ ?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 12; 18?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 3x^2 + x \equiv 0 \pmod{5}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^5 = i$ ;
6. სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (რატომ)?

### ვარიანტი 3

1. რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადასა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 150; 18?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{2}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^6 = 64$ ;
6. როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

## ვარიანტი 4

- 1.რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადასა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 125; 8?
- 3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა  $\varphi(n)$  და როგორია მისი ანალიზური სახე?
- 4.ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^3 = 8$ ;
- 6.როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

## ვარიანტი 5

- 1.ჩაწერეთ  $z = 3 + 4i$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 56?
- 3.იპოვეთ  $w = \frac{2+3i}{4i}$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
- 4.ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^4 = -1$ ;
6. მოიყვანეთ სეპარაბელური სივრცის განსაზღვრება?

## ვარიანტი 6

- 1.ჩაწერეთ  $z = (3 + 4i)(2 - 3i)$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
- 2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 250; 560?
- 3.იპოვეთ  $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
- 4.ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{3}$ ;
- 5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^4 = -16$ ;
6. მოიყვანეთ კვატერნიონების განსაზღვრება?

## ვარიანტი 7

1. ჩაწერეთ  $z = (3+4i)^{107}$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 50; 60?
3. იპოვეთ  $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{200}$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:  $5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{8}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^4 = -16i$ ;
6. მოიყვანეთ კლიფორდის რიცხვების განსაზღვრება?

## ვარიანტი 8

1. ჩაწერეთ  $z = (1+i)(1-i)$  კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 60?
3. იპოვეთ  $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$  კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:  $x^3 + 7x + 3 \equiv 0 \pmod{2}$ ;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:  $x^4 = -i$ ;
6. მოიყვანეთ სრული მეტრიკული სივრცის განსაზღვრება?

### ლიტერატურა

1. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970.
2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Princeton, 1963.
3. Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965.
4. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983.
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука, Москва, 1986.
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, [McGraw-Hill, Inc.](#), New York. 1995.



7. Heyting A. *Intuitionism An introduction*, Amsterdam, 1956.
8. Kantor G. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, *J.Reine Angew. Math.*, 73 1951.
9. Рвачёв В.Л. *Теория R-функций и некоторые её приложения*, Киев, Наукова думка, 1982.
10. Обгадзе Т.А. *Элементы математического моделирования*, Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн.инст, учеб.пос., Тбилиси, 1989.
11. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. *Вычислительная физика*, Мин.общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ, учеб.пос., Владимир, 1999.
12. Пескова М.В. *Применение метода регулярных источников ОГ для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами*, Тезисы докладов Воронежского симпозиума “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках” Воронеж, 20-27 января 2000.
13. Аракелян С.М., Папонов В.С., Дроган Ю.Е., Пигарина А.А., Прокошев В.Г., Обгадзе Т.А. *Исследование гидродинамической устойчивости течения смеси топливо-газ в нагнетательных трубопроводах дизеля*, Материалы международного Школа семинара “Нелинейные задачи гидродинамической теории устойчивости и турбулентность “ 12-20 февраля , Москва, 2000.
14. Obgadze T.A., Barinov V.V., Fedotova O.I. *Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems*, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
15. Obgadze T.A., Prokoshev V.G., Parfionov S.D. *Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material*, Edited by M. Geiger , A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3<sup>rd</sup> LANE, Erlangen, August 28-31, 2001.
16. Обгадзе Т.А. , Прангишвили А.И., Цвераидзе З.Н., Матиашвили И.Г. *Математическое моделирование лавинообразных потоков и расчет определяющих параметров на основе обратной вариационной постановки Купрадзе – Бреббия*, *Международный научный журнал. Проблемы прикладной механики*, Тбилиси, № 4(21), 2005.
17. Обгадзе Т.А., Прангишвили, А.И. Цвераидзе, З.Н., Матиашвили И.Г. *Математическое моделирование грязевых селевых потоков*, *Международный научный журнал, Проблемы прикладной механики*. Тбилиси, № 4(21), 2005.
18. Дьюси С. *Нумерология: числа и судьбы*, пер. с англ., Москва, 1999.

19. Ключников. Священная наука чисел, Москва, 2000.
20. Лежен Дирихле П.Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., Санкт-Петербург, 1863.
21. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел, пер. с англ., Москва, 1965.
22. Виноградов И.М. Основы теории чисел, Москва, 1972.
23. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел, Москва, 1970.
24. კობახიძე ზ. რიცხვთა თეორია, თბილისი, 1961.
25. Rivest R.L. Kryptographi/Handbook of Theoretical computer Science Vol. A. Algorithms and Cmplexity/J. van Leuwn, ed. Amsterdam: Elsevier, Cambridge, Mass.:The MIT Press., 1990.
26. Успенский В.А. Как теория чисел помогает в шифровальном деле, соросовский образовательный журнал, №6, 1996.
27. Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., Москва, 1983.
28. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974.
29. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971.
30. Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика, учеб. пос., Омск, 2002.
31. Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques, Washington, USA, 2002 .
32. Muskhelishvili N. Praktische lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. – ZAMM, 13, 1933.
33. Маделунг Э. Математический аппарат физики, пер. с англ., Москва, 1961.
34. Кантор И.Л., Садовников А.С. Гиперкомплексные числа, М.: Наука, 1973.
35. Brackx F., Delanghe R., Sommen F. Clifford Analysis, Boston; Melbourne; Pitnam, 1982.

## II თავი. ფუნქციონალური სივრცეები და ოპტიმიზაციის მეთოდები

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ახასიათებთ გარკვეული საერთო თვისება, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში ფუნქციონალურ სიმრავლეებში [1-7]. ასევე, უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ჩვენ ვეძებთ დიფერენციალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა, როგორც კლასიკურ, ასევე, განზოგადებულ ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლეების) შესწავლა უწყვეტ ტანთა მექანიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა; რაც შეეხება ოპტიმიზაციის ამოცანებს და ვარიაციულ აღრიცხვას, ჩვენ ძირითადად, საქმე გვაქვს ფუნქციონალების ექსტრემალური ტრექტორიების პოვნასთან ანუ ისეთი ფუნქციების ძიებასთან, რომელთათვისაც მოცემული ფუნქციონალი იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია გავიხსენოთ ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი ძირითადი ცნება, რასაც ეძღვნება წიგნის მეორე თავი.

**განსაზღვრება:** ფუნქციებისგან შემდგარი  $M$  სიმრავლის  $J$  ასახვას  $J: M \rightarrow \mathbb{R}$  ნამდვილ რიცხვთა  $\mathbb{R}$  სიმრავლეში **ფუნქციონალი** ეწოდება.

ფუნქციონალის განსაზღვრის  $M$  არეში შემავალ ფუნქციებს **დასაშვებ ფუნქციებს** უწოდებენ.

**მაგალითად:**  $M = C^1[a; b]$  სიმრავლეზე განსაზღვრული ინტეგრალი  $J[f] = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ , რომელიც წარმოადგენს  $y = f(x)$  ფუნქციით  $[a; b]$  სეგმენტზე მოცემული წირის სიგრძეს, **ფუნქციონალს** წარმოადგენს;

### 2.1. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

**განსაზღვრება:**  $G$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა  $L$  სიმრავლეს ეწოდება **ლინეალი** (წრფივიანი), თუ  $u_1(x)$  და  $u_2(x)$  ფუნქციებთან ერთად, ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ  $a_1 u_1(x) + a_2 u_2(x)$  ფუნქციას).

**მაგალითები:**

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრული უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, ცხადია რომ  $L$  იქნება **ლინეალი**.

2. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 5$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ  $u(x) = 3$  და  $a = 2$ , მივიღებთ  $au(x) = 6 > 5$ .

**P.S.** თუ  $L$  არის ლინეალი, მაშინ  $n$  ფუნქციებთან  $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$  ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც  $\sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$ , სადაც  $a_i \in R$  ნამდვილი რიცხვებია.

თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავადგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალზე განსაზღვრულ  $J[f]$  ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი, თუ ლინეალის ნებისმიერი ორი  $f$  და  $g$  ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$J[\alpha_1 f + \alpha_2 g] = \alpha_1 J[f] + \alpha_2 J[g]$ , სადაც  $\alpha_1$  და  $\alpha_2$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

**მაგალითად:**  $J[f] = \int_a^b f(x) dx$  წრფივი ფუნქციონალია, ხოლო ფუნქციონალი  $J[f] = \int_a^b f^2(x) dx$  – არაა წრფივი.

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალის ორი  $u(x)$  და  $v(x)$  ფუნქციების სკალარული ნამრავლი  $(u; v)$  შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით:

$$(u; v) = \int_G u(x)v(x) dx. \quad (2.1)$$

ასე, რომ ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

**მაგალითი :**  $u(x) = x; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u; v) = \int_G u(x)v(x) dx = \int_0^5 x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{25}{2}.$$

(2.1) სკალარული ნამრავლის თვისებები უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან გამომდინარეობენ:

$$(u; v) = (v; u); \quad (2.2)$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2; v) = a_1 (u_1; v) + a_2 (u_2; v); \quad (2.3)$$

$$(u; u) \geq 0; \quad (2.4)$$

$$(u; u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad \forall x \in G. \quad (2.5)$$

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალის  $u(x)$  ფუნქციის ნორმა  $\|u(x)\|$  ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u;u)} = \sqrt{\int_G u^2(x) dx}. \quad (2.6)$$

ახლა შემოვიღოთ მანძილის ცნება ლინეალის ორ ფუნქციას შორის, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში **მეტრიკას** უწოდებენ:

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალის ორ  $u(x)$  და  $v(x)$  ფუნქციას შორის **მანძილი** (ანუ **მეტრიკა**) ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2 dx}. \quad (2.7)$$

**მაგალითი:**  $u(x) = x$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ , მაშინ

$$\|u(x)\| = \sqrt{\int_0^5 x^2 dx} = \sqrt{\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^5} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2 dx} = \sqrt{\int_0^5 (x-1)^2 dx} = \sqrt{\frac{64+1}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}.$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძეერთად თვისებებს, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს **მეტრიკა** (მანძილი):

$$\rho(u;v) \geq 0; \quad (2.8)$$

$$\rho(u;v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x); \quad (2.9)$$

$$\rho(u;v) = \rho(v;u); \quad (2.10)$$

$$\rho(u;v) + \rho(v;u) \geq \rho(u;u). \quad (2.11)$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ **მეტრიკას**.

გარდა (2.7) **მეტრიკისა**, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ, განიხილავენ **მეტრიკის სხვა სახეებსაც**. მათი განსაზღვრისათვის, ჯერ განვიხილოთ ორი ფუნქციის **სიახლოვის** ცნება:

ვიტყვიტ რომ,  $[a; b]$  სეგმენტზე განსაზღვრულ ორ  $y = u(x)$  და  $y = v(x)$  ფუნქციას აქვთ **ნულ-რიგის სიახლოვე**, თუ მათი სხვაობის მოდული  $|u(x) - v(x)|$  არის საკმაოდ მცირე.

გეომეტრიულად, ეს იმას ნიშნავს რომ, მათი ორდინატები მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, როცა  $x \in [a; b]$ .

ვიტყვიტ რომ,  $[a; b]$  სეგმენტზე განსაზღვრულ ორ  $y = u(x)$  და  $y = v(x)$  ფუნქციას აქვთ **პირველი რიგის სიახლოვე**, თუ მათი სხვაობისა და

პირველი რიგის წარმოებულთა სხვაობის მოდულები:  $|u(x) - v(x)|$  და  $|u(x)' - v(x)'|$  არიან საკმაოდ მცირე.

გეომეტრიულად, ეს იმას ნიშნავს რომ, როგორც მათი ორდინატები, ასევე, მხების მიმართულებებიც შესაბამის წერტილებში, მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, როცა  $x \in [a; b]$ .

ვიტყვი რომ,  $[a; b]$  სეგმენტზე განსაზღვრულ ორ  $y = u(x)$  და  $y = v(x)$  ფუნქციას აქვთ  $k$ -რიგის სიახლოვე, თუ მათი სხვაობისა და  $k$  რიგამდე ჩათვლით წარმოებულთა სხვაობების მოდულები:  $|u(x) - v(x)|, |u(x)' - v(x)'|, \dots, |u(x)^{(k)} - v(x)^{(k)}|$  არიან საკმაოდ მცირე.

სიახლოვის ცნებიდან ადვილად გადავალთ შესაბამისი მეტრიკის ცნებაზე. ორ  $y = u(x)$  და  $y = v(x)$  ფუნქციას შორის  $[a; b]$  სეგმენტზე მანძილი ანუ მეტრიკა ეწოდება რიცხვს:

$$\rho_c(u; v) = \max_{x \in G} |u(x) - v(x)|. \quad (2.12)$$

ამ რიცხვს ჩებიშევის მეტრიკას უწოდებენ. ზოგჯერ მას  $C_0[a; b]$  –ს მეტრიკასაც ეძახიან.

მაგალითი: ვიპოვოთ მანძილი  $y = x$  და  $y = x^2$  ფუნქციებს შორის, ჩებიშევის მეტრიკით  $[0; 1]$  სეგმენტზე.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად ამ ორ ფუნქციას შორის მანძილი იქნება  $\rho_c(u; v) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x - x^2|$ . ცხადია, რომ თუ განვიხილავთ მოდულის შიგნით მდგარ  $y = x - x^2$  ფუნქციას, მივიღებთ რომ  $y' = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0.5$  ე.ი.  $\rho_c(u; v) = 0.25$ .

განსაზღვრება:  $[a; b]$  სეგმენტზე განსაზღვრული, უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციების სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული ნორმით

$\|f\|_{C_0} = \max_{x \in [a; b]} |f(x)|$ , ადგენს  $C_0[a; b]$  ფუნქციონალურ ბანახის სივრცეს.

ხოლო, თუ ფუნქციის ნორმად მივიღებთ  $\|f\|_{C^1} = \max_{x \in [a; b]} \{|f(x)| + |f'(x)|\}$  თანადობას, მაშინ მივიღებთ შესაბამის  $C^1[a; b]$  ბანახის ფუნქციონალურ სივრცეს.

არსებობს უფრო მეტი სიახლოვის ცნებაზე დამყარებული მეტრიკაც: ორ  $y = u(x)$  და  $y = v(x)$  ფუნქციას შორის  $[a; b]$  სეგმენტზე,  $k$  –რიგის მანძილი ანუ მეტრიკა ეწოდება  $|u(x) - v(x)|, |u(x)' - v(x)'|, \dots, |u(x)^{(k)} - v(x)^{(k)}|$  რიცხვების მაქსიმუმებს შორის უდიდესს:  $\rho_{C^k}(u; v) =$

$\max_{0 \leq i \leq k} \max_{a \leq x \leq b} |u^{(i)}(x) - v^{(i)}(x)|$ . ამ ტიპის მეტრიკას დიდი გამოყენება აქვს კლასიკურ ვარიაციულ აღრიცხვაში.

**P.S.** მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (2.8)-(2.11) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (2.12) მეტრიკა (2.7) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციონალებისათვის უფრო ინტიუციურად ზუსტია, მას იშვიათად იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე სხვადასხვა ტიპის წყვეტილ ფუნქციებთან, რომლებისთვისაც ჩებიშევის მეტრიკის გამოყენება არაპრაქტიკულია. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის ძირითადად, გამოვიყენებთ (2.7) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ, ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით  $(u; v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$ , სადაც  $\overline{v(x)}$  არის  $v(x)$  ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.

## 2.2. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

**განსაზღვრება:**  $G$  არეზე განსაზღვრულ  $u(x)$  ფუნქციას კვადრატით ინტეგრებადი ეწოდება, თუ ლებეგის ინტეგრალები

$$\int_G u(x)dx; \quad \int_G u^2(x)dx; \quad (2.13)$$

ერთდროულად არსებობენ (არიან კრებადი). კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ უნქციათა სიმრავლე.

**P.S.** თუ,  $\int_G u^2(x)dx = 0$ , მაშინ  $u(x) = 0$  თითქმის ყველგან (გარდა ისეთი

წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს). ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ ორი ფუნქცია ერთმანეთისგან განსხვავდება არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები ერთმანეთს თითქმის ყველგან.

**განსაზღვრება:**  $L$  ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (2.6) ნორმით და (2.7) მეტრიკით, ჰილბერტისწინა (უნიტარული)  $S_2$  სივრცე ეწოდება.

$G$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს აღნიშნავენ  $C(G)$  სიმბოლოთი; ხოლო, თუ ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულზე უწყვეტია, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს (სიმრავლეს) აღნიშნავენ  $C^\infty(G)$  სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება  $s_2$  ფუნქციონალურ სივრცეში.

**განსაზღვრება:** ვიტყვით, რომ  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია  $u(x)$  ფუნქციისაკენ, თუ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n; u) = 0. \quad (2.14)$$

ანუ თუ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} = 0. \quad (2.15)$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რასაც ადგილი აქვს რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

**განსაზღვრება:**  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ფუნქციათა მიმდევრობას კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \rho(u_m; u_n) = 0$ .

**განსაზღვრება:** ვიტყვით, რომ  $u(x)$  წარმოადგენს  $S_2$  უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილს, თუ  $u(x)$  ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება  $S_2$  სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

**თეორემა:**  $u(x)$  ფუნქცია არის  $S_2$  უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების (ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  რომელიც კრებადია  $u(x)$  ფუნქციისაკენ.

**P.S.** ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში,  $S_2$  უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.



განსაზღვრება:  $S_2$  უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვართი წერტილების სიმრავლესთან, ამ სივრცის ჩაკეტვა ეწოდება. ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2} = S_2 \cup \partial S_2. \quad (2.16)$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა (უნიტარული) სივრცის  $\overline{S_2}$  ჩაკეტვას, ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცე ეწოდება.

განსაზღვრება: წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ, ბანახის სივრცე ეწოდება.

**P.S.**

ა) ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცე სრულია ანუ მასში ყველა კომის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების (ფუნქციების) სიმრავლე მკვრივია  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ, ჰილბერტის სივრცე სეპარაბელურია, ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მივუახლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოვებით ანალიზში.  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცე არის ბანახის სივრცე. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების (ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

ბ) უნდა აღინიშნოს, რომ ჰილბერტის სივრცე  $L_2(G)$ , ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე (რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდებულო რომ გვექონდეს სკალარული ნამრავლი).

განსაზღვრება: ფუნქციათა სისტემას  $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$  ეწოდება წრფივად დამოკიდებული, თუ ამ სისტემის ერთი უნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ,

ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას უწოდებენ.

**მაგალითი:** ფუნქციათა სისტემა  $u_1 = \sin^2 xy; u_2 = \cos^2 xy; u_3 = 4$  წრფივად დამოკიდებულია, რადგან  $u_3 = 4u_1 + 4u_2$ .

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი, უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი.

**თეორემა:** ფუნქციათა სისტემა  $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$  წრფივად დამოუკიდებელია ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან ანუ

$$D(u_1; u_2; \dots; u_k) = \begin{vmatrix} (u_1; u_1) & (u_1; u_2) & \dots & (u_1; u_k) \\ (u_2; u_1) & (u_2; u_2) & \dots & (u_2; u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k; u_1) & (u_k; u_2) & \dots & (u_k; u_k) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.17)$$

**მაგალითი:** ფუნქციათა სისტემა  $u_1 = \sin x; u_2 = \cos x; u_3 = 1$  წრფივად დამოუკიდებელია  $L_2[0; \pi]$  სივრცეში, რადგან

$$(u_1; u_1) = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}; \quad (u_1; u_2) = \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0; \quad (u_1; u_3) = 2; \quad (u_2; u_2) = \pi.$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \pi \end{vmatrix} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \neq 0.$$

**განსაზღვრება:** წრფივად დამოუკიდებელ  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ფუნქციათა სისტემას ეწოდება სრული  $L_2(G)$  სივრცეში, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო  $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$  წრფივი კომბინაციებით მიღებული  $\psi(x)$  ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია  $L_2(G)$  სივრცეში.

**განსაზღვრება:** ამბობენ, რომ  $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა, წარმოადგენს შაუდერის ბაზისს  $L_2(G)$  სივრცეში, თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ  $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$  სახით.

მაგალითი:  $L_2(G)$  ფუნქციონალურ სივრცეში, შაუდერის მრავალწევ-  
რა ბაზისია:  $1; x; y; x^2; xy; y^2; \dots$  როცა  $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ .

ასევე,  $L_2(0, 2\pi)$  სივრცეში, არსებობს ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა  
ბაზისი:  $1; \sin x \cdot \cos y; \sin 2x \cdot \cos y; \sin x \cdot \cos 2y; \sin 2x \cdot \cos 2y; \dots$  ცნობილია, რომ  $L_2(\mathbb{R})$   
სივრცეში შეიძლება აიგოს ვეივლეტ ფუნქციებისაგან შემდგარი  
ბაზისებიც.

P.S. მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული  
პრობლემაა, რადგან ჯერ-სერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ  
არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა  
სიჩქარეს. ამ პრობლემის გადაჭრის გზაზე მიღწეულია გარკვეული  
წარმატება რვაჩოვ-ობგადის RO ფუნქციის მეთოდში, სადაც ერთგვაროვანი  
სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების ზოგადი ალგორითმია  
შემუშავებული, რამაც საშუალება მოგვცა ამოგვეხსნა ჰიდროდინამიკის  
სტაციონალური ამოცანები.

### 2.3. ანალოგია $n$ განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ  
ანალოგიები  $n$  განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

#	$\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია $\bar{x}(x_1; x_2; \dots; x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\bar{x}; \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x); g(x)) = \int_G f(x) g(x) dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $ \bar{x}  = \sqrt{(\bar{x}; \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\ f(x)\  = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int_G f^2(x) dx}$
4.	მანძილი ორ წერტილს შორის	მეტრიკა

	$ \bar{x} - \bar{y}  = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}; \bar{x} - \bar{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$\begin{aligned} \rho(f(x); g(x)) &= \ f(x) - g(x)\  = \\ &= \sqrt{(f(x) - g(x); f(x) - g(x))} = \\ &= \sqrt{\int_G (f(x) - g(x))^2 dx} \end{aligned}$
5.	<p>თუ, <math>\{e_i\}_{i=1}^n</math> წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა <math>\mathbb{R}^n</math>-ში, მაშინ ნებისმიერი <math>\bar{x}</math> ელემენტი (ვექტორი) ამ სივრციდან წარმოიდგინება სახით:</p> $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$	<p>თუ, <math>\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty</math> შაუდერის ბაზისია <math>L_2(G)</math> სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი <math>f(x)</math> ელემენტი (ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით:</p> $f(x) = \sum_{i=1}^\infty a_i u_i(x)$

## 2.4. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის  $L_2(G)$  ფუნქციონალური სივრცე. ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით:

$$(u; v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u' v' dx ; \quad (2.18)$$

და გავიმეორებთ  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს  $W_2^1(G)$ .

ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით:

$$(u; v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u' v' dx + \int_G u'' v'' dx ; \quad (2.19)$$

მაშინ, მივიღებთ  $W_2^2(G)$  სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.

ასევე აიგება, სობოლევის  $W_2^k(G)$  ფუნქციონალური სივრცეც, შესაბამისი სკალარული (2.20) ნამრავლის შემოღებით :

$$(u; v) = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)} v^{(i)} dx. \quad (2.20)$$

**P. S.** როგორც ვხედავთ, სობოლევის ფუნქციონალური სივრცეები იგება, შესაბამისი  $C^k[a; b]$  ფუნქციონალური სივრცეების იდეოლოგიიდან გამომდინარე.

## 2.5. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ყველაზე უფრო „კარგი“ ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს  $P_n(x)$ , სადაც არგუმენტი, საზოგადოდ,  $m$ -განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი.  $P_n(x) \in C^\infty(R^m)$  მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა  $C^k(R^m)$  ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე (ნაწილი). უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის (ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცის ნაწილი. ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი, თავის მხრივ ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის  $W_2^k(G)$  სივრცეში, თუ  $k \geq 1$ .

## ამოცანები

### ვარიანტი 1

- ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 8$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
- $u(x) = x; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
- გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
- წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
- რა განსხვავებაა უნიტარულ, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 2

- ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 9$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
- $u(x) = x^2; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
- გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
- გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
- წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^2; v(x) = 1; G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
- რა განსხვავებაა სობოლევის, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 3

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 6$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^3$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^3$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

### ვარიანტი 4

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 66$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^4$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^4$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

## ვარიანტი 5

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 88$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^5$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^5$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

## ვარიანტი 6

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 1$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^8$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^8$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$  ?
6. რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?



## ვარიანტი 7

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 10$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^6$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^{16}$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა განსხვავებაა ბანახისა და სობოლევის სივრცეებს შორის?

## ვარიანტი 8

1. ვთქვათ,  $L$  არის ჩაკეტილ  $\bar{G}$  არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას  $|u(x)| \leq 11$ . მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2.  $u(x) = x^{13}$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი  $W_2^0(G)$ -ის აზრით.
3. გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები  $L_2(G)$  სივრცისათვის.
4. გამოთვალეთ,  $\rho(u(x); v(x))$  წინა ამოცანის პირობებში.
5. წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:  
 $u(x) = x^{13}$ ;  $v(x) = 1$ ;  $G = \{x | 0 \leq x \leq 5\}$ ?
6. რა არის გრამის დეტერმინანტი და რა ინფორმაციას იძლევა მისი მნიშვნელობა?

## ლიტერატურა

- 1.Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике, пер. с англ., Мир, М.,1985.
- 2.Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М, 1974.
- 3.Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971.
- 4.Шварц Л. Анализ,. Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, М., 1972.
- 5.Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, М., 1971.
- 6.Рудин У. Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, М., 1966.
- 7.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი, რხევითი პროცესები, IV ტომი, სტუ, თ., 2010.
- 8.ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, სტუ, თ.,2016.

## 2.6. ოპტიმიზაციის მეთოდები

ცივილიზაციის განვითარების მთელი ისტორიის განმავლობაში აქტუალობას არ კარგავს იმ ამოცანების განხილვა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ გარკვეულ სიდიდეთა უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. დღეს ამ ამოცანების განხილვა განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს, რადგან დღის წესრიგში დგება: ბუნებრივი რესურსების, ადამიანური რესურსების, მატერიალური და ფინანსური რესურსების ეფექტურად გამოყენების ამოცანები; ასევე, მნიშვნელოვანია ოპტიმალური აეროდინამიკური ფორმის დადგენა უპილოტო საფრენი აპარატებისათვის, წყალქვეშა ხომალდებისათვის და კონსტრუქციათა ოპტიმალური პროექტირებისათვის. ყოველივე ამას, მივყავართ საუკეთესო გადაწყვეტილების, ან როგორც ამბობენ, ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების აუცილებლობამდე. მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის ამოცანები დაისვა და ამოიხსნა ჯერ კიდევ მე-17 საუკუნეში. ამ ტიპის ამოცანების გადაწყვეტაზე მუშაობდნენ ისეთი ცნობილი მეცნიერები, როგორც იყო პიერ ფერმა, ისააკ ნიუტონი,

ლაიბნიცი, დანიელ ბერნული, იაკობ ბერნული, ლაგრანჟი, ლეონარდ ეილერი, ანრი პუანკარე, ფონ ნეიმანი, კანტოროვიჩი, პონტრიაგინი, რეზო გამყრელიძე, მიშჩენკო, ბოლტიანსკი და სხვა.

აქედან გამომდინარე, თანამედროვე ინჟინრისთვის, ოპტიმიზაციის მეთოდების შესწავლა მეტად მნიშვნელოვანია და აუცილებელი.

### 2.6.1. უპირობო ექსტრემუმი $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის

ვთქვათ მოცემულია  $f(x)$  ფუნქცია  $\mathbb{R}^n$  სივრცის რაიმე  $G$  არეში ანუ მისი ყოველი წერტილი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n).$$

**განსაზღვრება.** ვიტყვი რომ, მოცემული  $f(x)$  ფუნქცია  $G$  სიმრავლის რაიმე  $x_0$  წერტილში ( $x_0 \in G$ ) აღწევს თავის უდიდეს (ან შესაბამისად, უმცირეს) მნიშვნელობას, თუ  $G$  სიმრავლის ნებისმიერი სხვა  $x$  წერტილისათვის, ადგილი აქვს უტოლობას:  $f(x) \leq f(x_0)$  (ან შესაბამისად  $f(x) \geq f(x_0)$ ).

**ვაიერშტრასის თეორემა:** შემოსაზღვრულ, ჩაკეტილ სიმრავლეზე (კომპაქტზე) განსაზღვრული უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქცია, ამ სიმრავლეზე აღწევს თავის უდიდეს (ან შესაბამისად, უმცირეს) მნიშვნელობას.

**განსაზღვრება:** ვთქვათ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $\mathbb{R}^n$  სივრცის რაიმე  $G$  არეში ანუ  $G \subset \mathbb{R}^n$ . მაშინ  $x_0 \in G$  წერტილს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის მკაცრი მაქსიმუმის (შესაბამისად, მკაცრი მინიმუმის) წერტილი, თუ ადგილი აქვს უტოლობას  $f(x) < f(x_0)$  (ან შესაბამისად,  $f(x) > f(x_0)$ ) ნებისმიერი  $x \in G \cap \Omega(x_0)$  წერტილისათვის, სადაც  $\Omega(x_0)$  არის  $x_0$  წერტილის რაიმე მიდამო.

თუ ამ განსაზღვრებაში მკაცრ უტოლობებს, შევცვლით არამკაცრი უტოლობებით  $f(x) \leq f(x_0)$  ან შესაბამისად  $f(x) \geq f(x_0)$  მაშინ  $x_0 \in G$  წერტილს უწოდებენ უბრალოდ მაქსიმუმს ან შესაბამისად მინიმუმის წერტილს.

**განსაზღვრება:** ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ექსტრემუმის წერტილებს უწოდებენ.

ფერმას თეორემა (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა): ვთქვათ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ექსტრემუმის  $x_0 \in G$  წერტილის რაიმე  $\Omega(x_0)$  მიდამოში, მაშინ თუ ამ წერტილში არსებობენ კერძო წარმოებულები  $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x=x_0} = 0$  ისინი ყველა ნულის ტოლია.

P.S.

1) თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია ექსტრემუმის წერტილში, მაშინ მისი დიფერენციალი  $df = 0$  ნულის ტოლია. მართლაც,  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  და რადგან  $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x=x_0} = 0$  ცხადია, რომ  $df = 0$ .

2) თუ გავაფართოებთ განსახილველი ფუნქციების კლასს და განვიხილავთ ( $f(x) \in L_2(G)$ ) ჰილბერტის სივრცის ფუნქციებს, სადაც ფუნქციას შეიძლება ქონდეს ნულ ზომის წყვეტის წერტილების სიმრავლე, მაშინ ფერმას თეორემა შეიძლება განზოგადდეს შემდეგნაირად: თუ  $x_0$  არის  $f(x) \in L_2(G)$  ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ ამ წერტილში ყველა კერძო წარმოებული  $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x=x_0}$  ან ნულის ტოლია ან არ არსებობს.

განსაზღვრება: იმ წერტილებს სადაც ადგილი აქვს ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს (ფერმას თეორემა) კრიტიკული წერტილები ეწოდება; ხოლო იმ წერტილებს, სადაც  $df = 0$  სტაციონარულ წერტილებს უწოდებენ.

P.S. ის რომ  $x_0$  წერტილი კრიტიკული წერტილია, ჯერ არ ნიშნავს იმას, რომ ის ექსტრემუმის წერტილია.

### 2.6.1.1. სილვესტრის კრიტერიუმი კვადრატული ფორმებისათვის

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ სიმეტრიულ ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) კვადრატულ ფორმას  $A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ  $A(x) > 0, \forall x \neq 0$  და ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა  $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$ .

ასევე, კვადრატულ ფორმას ეწოდება უარყოფითად განსაზღვრული, თუ  $A(x) < 0, \forall x \neq 0$  და ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ როცა  $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$ .

დადებითად განსაზღვრულ და უარყოფითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს უწოდებენ, რადგან, ისინი ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშანს ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და იღებენ ნულოვან მნიშვნელობას, მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა ცვლადი ნულოვანია.

არსებობენ განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმებიც, რომლებიც იცვლიან ნიშანს ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

მაგალითად,  $A(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$  დადებითად განსაზღვრული კვადრატული ფორმაა.  $B(x) = -x_1^2 - 3x_2^2$  უარყოფითად განსაზღვრული ფორმაა, მაგრამ  $C(x) = (x_1 + x_2)^2$  განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმაა, რადგან ის ნულოვან მნიშვნელობას იღებს არა მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე ცვლადი ნულის ტოლია, არამედ სხვა შემთხვევებშიც, კერძოდ, როცა  $x_1 = -x_2$ .

იმისათვის რომ შევძლოთ დადგენა, მოცემული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული, უარყოფითადაა განსაზღვრული, თუ განუსაზღვრელია, უნდა გავიხსენოთ სილვესტრის კრიტერიუმი:

**თეორემა:** იმისათვის რომ, სიმეტრიული კვადრატული ფორმა:  $A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  იყოს დადებითად განსაზღვრული აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.21)$$

ხოლო, იმისათვის რომ, სიმეტრიული კვადრატული ფორმა  $A(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  იყოს უარყოფითად განსაზღვრული აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0. \quad (2.22)$$

2.6.1.2. მკაცრი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები  $\mathbb{R}^n$   
სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის

**თეორემა:** ვთქვათ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  სტაციონარული წერტილის რაიმე  $\Omega(x_0)$  მიდამოში და უწყვეტია თავის მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით, თუ ამ წერტილში მეორე რიგის კვადრატული დიფერენციალური ფორმა:

$$A(dx) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \quad (2.23)$$

არის დადებითად განსაზღვრული, მაშინ  $x_0$  მინიმუმის წერტილია, ხოლო თუ უარყოფითადაა განსაზღვრული მაშინ  $x_0$  მაქსიმუმის წერტილია.

ცხადია, რომ  $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ .

**მაგალითები:**

1. ვთქვათ გვაქვს ორი ცვლადის ფუნქცია  $y = f(x_1, x_2)$ . თუ  $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$  სტაციონარული წერტილია, მაშინ ამ წერტილში ადგილი აქვს სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases}; \quad (2.24)$$

სილვესტრის კრიტერიუმიდან გამომდინარე, გვექნება რომ, თუ ამ წერტილში ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.25)$$

ანუ ჩვენ შემთხვევაში,

$$f''_{x_1 x_1} > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.26)$$

მაშინ  $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$  მინიმუმის წერტილია, ხოლო თუ გვაქვს პირობები:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.27)$$

ანუ ჩვენ შემთხვევაში,

$$f''_{x_1 x_1} < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{x_1 x_1} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_1 x_2} & f''_{x_2 x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad (2.28)$$

მაშინ  $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$  მაქსიმუმის წერტილია.

P.S. აღსანიშნავია, რომ თუ  $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} < 0$ , მაშინ ამ წერტილში ექსტრემუმი არ გვაქვს, ხოლო, თუ  $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 0$ , მაშინ ეს წერტილი საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას, რადგან ამ შემთხვევაში, შეიძლება იყოს ექსტრემუმი და შეიძლება არც იყოს.

1. იპოვეთ სამი ცვლადის ფუნქციის:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \text{ ექსტრემუმები.}$$

**ამოხსნა:** ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები. ამისათვის ვერმას თეორემიდან გამომდინარე, შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

სისტემის ამონახსნია წერტილი  $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1)$ . ამ სტაციონარული წერტილის გამოსაკვლევად, შევადგინოთ შესაბამისი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა (2.23).

$$\begin{aligned} a_{11} = f''_{xx} = 2, a_{12} = f''_{xy} = -1, a_{13} = f''_{xz} = 0, \\ a_{21} = f''_{yx} = -1, a_{22} = f''_{yy} = 2, a_{23} = f''_{yz} = 0, \\ a_{31} = f''_{zx} = 0, a_{32} = f''_{zy} = 0, a_{33} = f''_{zz} = 2. \end{aligned}$$

შევამოწმოთ სილვესტრის კრიტერიუმის პირობები ამ სტაციონარული წერტილისათვის:

$$a_{11} = f''_{xx} = 2 > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0. \quad (2.30)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1)$  სტაციონარული წერტილი არის მინიმუმის წერტილი და  $f_{min} = f(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1) = -\frac{4}{3}$ .

### 2.6.1.3. გრადიენტული სწრაფი დაშვების მეთოდი

როგორც ვხედავთ, თუ  $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 0$  მაშინ ეს წერტილი

საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას, რადგან ამ შემთხვევაში შეიძლება იყოს ექსტრემუმი და შეიძლება არც იყოს.

ასეთი შემთხვევებისათვის, აგრეთვე, ისეთი ამოცანების ამოხსნისას, როცა სტაციონარული წერტილის ანალიზურად პოვნა შეუძლებელია, იყენებენ სხვადასხვა მიახლოებით (რიცხვით) მეთოდს, რომლებიც შედარებით ნაკლებადაა დასაბუთებული, თუმცა, იძლევა რეალურ შედეგს. ასეთი მიახლოებითი მეთოდების რიგს ეკთვნიან **სწრაფი დაშვების გრადიენტული მეთოდებიც**.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ . განვიხილოთ რაიმე  $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \bar{G}$  წერტილი (საწყისი მიახლოება) და ამ წერტილში გამოვითვალოთ მოცემული ფუნქციის გრადიენტი:

$$\text{grad } f(\bar{x}^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\bar{x}^{(0)})}{\partial x_i} \bar{e}_i, \quad (2.31)$$

სადაც  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  – რაიმე ორთონორმირებული ბაზისია  $\mathbb{R}^n$  სივრცეში.

თუ  $\text{grad } f(\bar{x}^{(0)}) \neq 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h_1 \cdot (\text{grad } f(\bar{x}^{(0)}), \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad (2.32)$$

სადაც  $0 < h_1 < 1$ , ხოლო  $\bar{x}^{(1)}$  – პირველი მიახლოებაა მინიმუმის წერტილთან.

თუ  $\text{grad } f(\bar{x}^{(1)}) \neq 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} - h_2 \cdot (\text{grad } f(\bar{x}^{(1)}), \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad h_2 > 0, \quad (2.33)$$

და საზოგადოდ, თუ  $\text{grad } f(\bar{x}^{(m-1)}) \neq 0$ , მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(m)} = x_k^{(m-1)} - h_m \cdot (\text{grad } f(\bar{x}^{(m-1)}), \bar{e}_k), \quad k = \overline{1, n}; \quad h_m > 0. \quad (2.34)$$

სადაც  $h_m$  მუდმივებს  $0 < h_m < 1$  ვირჩევთ  $\{f(\bar{x}^{(m)})\}_{m=0}^{\infty}$  იტერაციული პროცესის კრებადობის პირობიდან, სადაც  $\bar{x}^{(m)}(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$  მოცემული  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმის წერტილის  $m$ -ური მიახლოებაა. მაშინ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{grad } f(\bar{x}^{(m)}) \rightarrow 0, \quad (2.35)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ზღვარით წერტილში  $f(x)$  ფუნქცია აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას.



ამ ფორმულებში  $m$  აღნიშნავს იტერაციათა რიცხვს. იტერაცია ჩერდება მაშინ, როცა მიიღწევა წინასწარ არჩეული ცდომილების ზღვრული  $\varepsilon$  მნიშვნელობა ანუ როცა ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\max_{i=1, n} |x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon. \quad (2.36)$$

**მაგალითები:**

1. იპოვეთ  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , სადაც  $f(x) = x^2$ .

**ამოხსნა:** ავირჩიოთ მინიმუმის წერტილის საწყისი მიახლოება  $x^{(0)} = 1$ . მაშინ (2.11) მიიღებს სახეს:

$$\text{grad } f(x^{(0)}) = 2x^{(0)}i = 2i \neq 0.$$

აქედან გამომდინარე (2.12) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h_1 \cdot 2x^{(0)} = 1 - 2h, \quad k = 1,$$

სადაც  $0 < h_1 = h < 1$ . რადგან  $\text{grad } f(\overline{x^{(1)}}) \neq 0$  თუ  $h \neq \frac{1}{2}$ , გვექნება რომ

$$x^{(2)} = x^{(1)} - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ რომ

$$x^{(m)} = (1 - 2h)^m.$$

ცხადია, რომ  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - 2h)^m = 0$ , თუ  $h \neq \frac{1}{2}$ , ხოლო თუ  $h = \frac{1}{2}$

მაშინ  $x^{(1)} = 0$  და მივირებთ ნულოვანი ელემენტებისგან შემდგარ მიმდევრობას, რომლის ზღვარიც კვლავ ნულია, რომელიც მაშასადამე სტაციონარულ წერტილს წარმოადგენს. ამ წერტილში მიიღწევა  $f(x)$  ფუნქციის მინიმუმი და  $\min_{x \in G} f(x) = 0$ .

2. იპოვეთ  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , სადაც  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

**ამოხსნა:** ავირჩიოთ მინიმუმის წერტილის საწყისი მიახლოება:

$x^{(0)} = (1, 1)$  ანუ  $x^{(0)} = 1$  და  $y^{(0)} = 1$ . მაშინ (2.11) მიიღებს სახეს:

$$\text{grad } f(x^{(0)}) = 2x^{(0)}i + 2y^{(0)}j = 2i + 2j \neq 0,$$

აქედან გამომდინარე (2.12) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - 2x^{(0)}h = 1 - 2h,$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} - 2y^{(0)}h = 1 - 2h, \quad \text{სადაც } 0 < h_1 = h_2 = h < 1. \quad \text{რადგან}$$

$$\text{grad } f(\overline{x^{(1)}}) = 2(1 - 2h)i + 2(1 - 2h)j \neq 0 \text{ თუ, } h \neq \frac{1}{2}, \text{ გვექნება რომ}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2,$$

$$y^{(2)} = y^{(1)} - 2h(1 - 2h) = (1 - 2h)^2.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებს, მივიღებთ რომ

$$x^{(m)} = (1 - 2h)^m,$$

$$y^{(m)} = (1 - 2h)^m.$$

მაშინ  $\lim_{m \rightarrow \infty} (x^{(m)}, y^{(m)}) = \lim_{m \rightarrow \infty} ((1 - 2h)^m, (1 - 2h)^m) = (0, 0)$ , თუ  $h \neq \frac{1}{2}$ , ხოლო თუ  $h = \frac{1}{2}$  მაშინ  $(x^{(1)}, y^{(1)}) = (0, 0)$  და მივიღებთ ნულოვანი ელემენტებისგან შემდგარ მიმდევრობას, რომლის ზღვარიც კვლავ ნულია და მაშასადამე სტაციონარულ წერტილს წარმოადგენს. ამ წერტილში მიიღწევა  $f(x, y)$  ფუნქციის მინიმუმი და  $\min_{x \in G} f(x, y) = 0$ .

## 2.6.2. მონტე-კარლოს მეთოდი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმიზაციისათვის შემუშავებულია რიცხვითი მეთოდების დიდი სიმრავლე, რომელთა უმრავლესობაც დაკავშირებულია ფუნქციის გრადიენტის პოვნასთან. ამ მეთოდების გამოყენების ფარგლები შემოსაზღვრულია და სიზუსტეც, ხშირად, არაა დამაკმაყოფილებელი.

ამასთან, უფრო უნივერსალურია და ზუსტიც თუ მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის საპოვნელად გამოვიყენებთ მონტე-კარლოს მეთოდს.

ამ მეთოდის არსი დაკავშირებულია ფუნქციის განსაზღვრის არის შემთხვევითი წესით დაყოფაზე სიმპლექსებად და სიმპლექსის თითოეულ საკვანძო წერტილში, ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლასთან. ამის შემდეგ, ხდება ფუნქციათა გამოთვლილი მნიშვნელობების თანმიმდევრული შედარება და იმ წერტილის შერჩევა, სადაც ფუნქცია იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამ მეთოდის სიზუსტე, დამოკიდებულია არჩეული საკვანძო წერტილების რაოდენობაზე და რაც მეტია შემთხვევით არჩეული წერტილების რაოდენობა, მით მეტია სიზუსტეც. თუმცა, დიდი რაოდენობის წერტილები ზრდიან გამოთვლების მოცულობას და მაშასადამე, ადიდებენ გამოთვლების რაოდენობის დროს.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმი. ამ ამოცანის **მონტე-კარლოს მეთოდით** ამოხსნისათვის ვირჩევთ მინიმუმის წერტილის საძიებელ სიმპლექსს:

$$a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}. \quad (2.37)$$

ა) საძიებელ სიმპლექსში შემთხვევით ვირჩევთ კვანძის წერტილებს ანუ ვირჩევთ  $x_i^{(m)}$  ცვლადების მნიშვნელობებს:

$$x_i^{(m)} = a_i + (b_i - a_i)random,$$

სადაც  $i = \overline{1, n}$ , ხოლო  $m$ -არჩეულ წერტილთა რიცხვია.

*random* - ოპერატორია, რომელიც გვაძლევს შემთხვევით რიცხვს  $[0; 1]$  შუალედიდან;

ბ) ვადარებთ  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციის მნიშვნელობებს სიმპლექსის სხვადასხვა წერტილში. თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$z^{(m)} \leq z^{(m+1)}, \text{ მაშინ } z_{min} = z^{(m)}, \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში კი}$$

$$z_{min} = z^{(m+1)};$$

გ) სიმპლექსის შემთხვევაში საკვანძო წერტილების შერჩევა ხორციელდება სასურველი  $\varepsilon$  სიზუსტის მიღწევამდე. პრაქტიკულად მიზანშეწონილია, რომ საკვანძო წერტილების  $m$  რაოდენობა აკმაყოფილებდეს პირობას:  $m \geq \frac{(b-a)^n}{\varepsilon}$ , სადაც  $a = \inf(a_i)$  და  $b = \sup(b_i)$ .

**P.S.** მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებისას უნდა გვახსოვდეს, რომ მინიმუმის ძებნისას, ჩვენ ვეძებთ არა ლოკალურ, არამედ გლობალურ მინიმუმს (უმცირეს მნიშვნელობას) არჩეულ შუალედში.

### 2.6.3. უპირობო ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

იპოვეთ  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , ამ ამოცანის ამოსახსნელად Mathcad-ის ბაზაზე, შევადგინოთ პროგრამა.

თუ მოცემულია რომ:

1.  $f(x, y) = x^2 + 5y^2 + 2x + 10y + 25$ ;

2.  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 5)^2 + 10x^2 + 5$ ;

3.  $f(x, y) = (x^2 + 1)^2 + y^2 + 5$ ;

4.  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + 2x^2 + 2y^2}$ ;

5.  $f(x, y) = x^2 e^{-x^2} + y^2 + 9$ .

**ამოხსნა:**

1.

ORIGIN:= 1  
AAAAAAAAAAAA

$$f(x,y) := x^2 + 5y^2 + 2x + 10y + 25$$

$$x := 0 \quad y := 0$$

Given

$$s := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$s = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x := s_1 \quad y := s_2$$

$$f(x,y) = 19$$

2.

ORIGIN:= 1  
AAAAAAAAAAAA

$$f(x,y) := (x-1)^2 + (y-5)^2 + 10x^2 + 5$$

$$y := 0 \quad x := 0$$

Given

$$s := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$s = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y := s_2 \quad x := s_1$$

$$f(x,y) = 5.909$$

3.

ORIGIN:= 1  
AAAAAAAAAAAA

$$f(x,y) := (x^2 + 1)^2 + y^2 + 5$$

$$y := 0 \quad x := 0$$

Given

$$s := \text{Minimize}(f, x, y)$$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x := s_1 \quad y := s_2$$

$$f(x,y) = 6$$

4.

ORIGIN:= 1  
AAAAAAAAAAAA

$$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2}{1 + 2x^2 + 2y^2}$$

$$x := 0 \quad y := 0$$

Given

$s_x := \text{Minimize}(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y := s_2, x := s_1$$

$$f(x, y) = 0$$

5.

ORIGIN:= 1

$$f(x, y) := x^2 \cdot e^{-x^2} + y^2 + 9$$

$$y := C, x := 0$$

Given

$s_x := \text{Minimize}(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x := s_1, y := s_2$$

$$f(x, y) = 9$$

## 2.7. პირობითი ექსტრემუმი $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვს განტოლების ფორმა (ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი)

**ამოცანის დასმა:**

ვთქვათ, მოცემულია მრავალი ცვლადის ფუნქცია  $z = f(x)$ , სადაც  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . გვაქვს ამ ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , დამატებითი განტოლებების ფორმის შემოფარგვლის პირობებით:

$$\varphi_i(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.38)$$

**ამოცანის ამოხსნა:**

ამ ამოცანის ამოსახსნელად იყენებენ ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდს. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

აგებენ ახალ მიზნის ფუნქციას (ლაგრანჟის ფუნქციას)

შემდეგნაირად:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x), \quad (2.39)$$

სადაც  $\lambda_i$ -ლაგრანჟის ახალი უცნობი მამრავლების. ამის შემდეგ, (2.39) ფუნქციას იკვლევენ უპირობო ექსტრემუმზე. ამისათვის, ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, კრიტიკული წერტილების საპოვნელად, ადგენენ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, & i = \overline{1, n} \\ \varphi_i(x) = 0, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2.40)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან პოულობენ კრიტიკულ წერტილებს:  $\lambda_i$  და  $x_i^0$ . ამ წერტილების გამოსაკვლევად, იყენებენ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას, ისევე, როგორც უპირობო ექსტრემუმის ამოცანის შემთხვევაში. ამას გარდა დამატებით, კრიტიკულ წერტილებში უნდა განვიხილოთ შემოფარგვლის პირობებიც. შედეგად, გამოსაკვლევად მივიღებთ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას:

$$d^2z = \sum_{i,j=1}^{n-m} b_{ij} dx_i dx_j. \quad (2.41)$$

**მაგალითი:** იპოვეთ  $z = xy$  ფუნქციის მინიმუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა  $y - x = 0$ .

**ამოხსნა:** შევადგინოთ ამ ამოცანის შესაბამისი ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(x, \lambda) = xy + \lambda(y - x).$$

ფერმას თეორემიდან მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემია ამონახსნია (კრიტიკული წერტილი):  $x = -\lambda = -y = 0$ . კრიტიკული წერტილის გამოსაკვლევად, შევადგინოთ დიფერენციალური კვადრატული ფორმა:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 = 2 dx dy,$$

მაგრამ  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x = 0 \Rightarrow dy = dx$ , ამიტომ კვადრატული დიფერენციალური ფორმა მიიღებს სახეს:

$$d^2L = 2(dx)^2 > 0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $(0; 0)$  კრიტიკული წერტილი,  $y - x = 0$  შემოფარგვლის პირობაში, არის  $z = xy$  ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

### 2.7.1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის ამოცანა, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ უტოლობების ფორმა

**ამოცანის დასმა:**

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . გვაქვს ამ ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , დამატებითი უტოლობების ფორმის შემოფარგვლის პირობებით:

$$\varphi_i(x) < 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.42)$$

**ამოცანის ამოხსნა:**

ეს ამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ მინიმიზაციის ამოცანაზე განტოლებების ტიპის შემოფარგვლის პირობით. ამისათვის საკმარისია დამატებითი  $\tau_i^2$  ცვლადების შემოღება:

$$\varphi_i(x) + \tau_i^2 = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.43)$$

ასეთ შემთხვევაში, მივიღებთ ამოცანას: ვიპოვოთ  $\min_{x \in G} f(x, \tau^2)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_i(x) + \tau_i^2 = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  შემოფარგვლის პირობებში, რომლის ამოხსნასაც ვაწარმოებთ ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით.

### 2.7.2. პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

განვიხილოთ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნის მაგალითები Mathcad-ის ბაზაზე.

იპოვეთ  $\min_{x \in G} f(x)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , თუ გვაქვს შემოფარგვლის პირობები  $\varphi_i(x) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  სადაც :

1.  $f(x, y) = xy$  და  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  ;
2.  $f(x, y) = x^2 + y^2$  და  $\varphi(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$  ;
3.  $f(x, y, z) = xyz$  და  $\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0$ ,  
 $\varphi_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0$  ;
4.  $f(x, y) = e^{-xy}$  და  $x + y - 9 = 0$  ;
5.  $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$  და  $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

**ამოხსნა :**

1.

```

ORIGIN:= 1
*****
f(x,y) := x*y
x := 0      y := C
Given
x2 + y2 - 1 = C
s := Minimize(f,x,y)
s = (0.707)
    (0.707)
x := s1 y := s2
f(x,y) = 0.5

```

## 2.

```

ORIGIN:= 1
*****
f(x,y) := x2 + y2
x := 0      x := 0
Given
x/2 + y/3 - 1 = 0
s := Minimize(f,x,y)
s = (1.385)
    (0.922)
y := s2 x := s1
f(x,y) = 2.769

```

## 3.

```

ORIGIN:= 1
*****
f(x,y,z) := x*y*z
y := C      x := 0      z := 0
Given
x + y + z - 5 = 0      x*y + y*z + x*z - 8 = 0
s := Minimize(f,x,y,z)
s = (2.002)
    (1.998)
    (1)
x := s1 y := s2      z := s3
f(x,y,z) = 4

```

## 4.

```

ORIGIN:= 1
*****
f(x,y) := e-x*y

```



$x := 0 \quad y := C$   
 Given  
 $x + y - 9 = C$   
 $s := \text{Minimize}(f, x, y)$   
 $\underline{y} := s_2 \quad \underline{x} := s_1$   
 $f(x, y) = 0$

## 5.

$\text{ORIGIN} := 1$   
 $f(x, y) := 6 - 4x - 3y$   
 $y := C \quad x := 0$   
 Given  
 $x^2 + y^2 - 1 = C$   
 $s := \text{Minimize}(f, x, y)$   
 $s = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$   
 $\underline{x} := s_1 \quad \underline{y} := s_2$   
 $f(x, y) = 1$

## 2.8. წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანის დაყვანა მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე

განვიხილოთ, ცუდად განპირობებული წრფივ განტოლებათა სისტემა ანუ სისტემა რომლის მთავარ დეტერმინანტში ძირითადი-არანულოვანი წევრები, განლაგებულია არა მთავარი დიაგონალის მახლობლობაში და მაშასადამე, მისი მნიშვნელობა ნულთან ახლოსაა. მაშინ სტანდარტული ნიუტონის ან მონაკვეთის შუაზე გაყოფის მეთოდი არაა ეფექტური და იყენებენ იაკობის ან ზეიდელის იტერაციულ მეთოდებს. ჩვენ გთავაზობთ უნივერსალურ მიდგომას, როცა წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანა იცვლება შესაბამისი, მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანით, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

მართლაც, განვიხილოთ წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

სადაც  $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  და  $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  ნამდვილი რიცხვებისაგან შემდგარი მატრიცებია.

ამ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად, შევადგინოთ შესაბამისი, სპეციალური ტიპის მრავალი ცვლადის  $I(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქცია:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i)^2. \quad (2.45)$$

ცხადია, რომ  $I(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , ამასთან ერთად, კვადრატების ჯამი მინიმალურ მნიშვნელობას მიიღებს მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული შესაკრები ნულის ტოლია ანუ ამ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი იქნება (2.44) სისტემის ამონახსნიც და პირიქითაც, თუ ვიცით (2.44) სისტემის ზუსტი ამონახსნი, მაშინ ამ წერტილში (2.45) ფუნქციის მნიშვნელობა იქნება ნულის ტოლი ანუ მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ

**თეორემა.** (2.44) სისტემის ამონახსნის პოვნის ამოცანა, ექვივალენტურია (2.45) სპეციალური ტიპის ფუნქციის, მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანისა.

**მაგალითი.** იმისათვის რომ ეს თეორემა ადვილად გასაგები იყოს, ჩავწეროთ ეს მიდგომა მეორე რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემისათვის.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2.46)$$

მაშინ, შესაბამის სპეციალური ტიპის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$I(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2)^2. \quad (2.47)$$

(2.47) ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა 0 და ის მიიღწევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $(x_1, x_2)$  წარმოადგენს (2.46) სისტემის ამონახსნს.

### 2.8.1. არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანის დაყვანა მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე

წრფივ განტოლებათა სისტემის ანალოგიურად, ვმოქმედებთ არაწრფივ განტოლებათა სისტემის შემთხვევაშიც. მართლაც, ვთქვათ გვაქვს არაწრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.48)$$

მაშინ, ვადგენთ შესაბამის სპეციალური ტიპის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2. \quad (2.49)$$

ცხადია, რომ (2.49) მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა იმ წერტილებში, სადაც თითოეული შესაკრები ნულის ტოლია ანუ როცა  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  წერტილი აკმაყოფილებს (2.48) არაწრფივ განტოლებათა სისტემას.

ამრიგად, ადგილი აქვს თეორემას: (2.48) არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანა, ექვივალენტურია (2.49) მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანისა.

მაგალითი. იმისათვის რომ ეს თეორემა ადვილად გასაგები იყოს, ჩავწეროთ ეს მიდგომა მეორე რიგის არაწრფივ განტოლებათა სისტემისათვის.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს არაწრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

მაშინ, შესაბამის სპეციალური ტიპის მრავალი ცვლადის ფუნქციას, ექნება შემდეგი სახე:

$$I(x_1, x_2) = [f_1(x_1, x_2)]^2 + [f_2(x_1, x_2)]^2. \quad (2.51)$$

(2.51) ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა 0 და ის მიიღწევა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $(x_1, x_2)$  წარმოადგენს (2.50) სისტემის ამონახსნს.

## 2.9. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

საინჟინრო პრაქტიკის ბევრ დარგში წამოიჭრება ამონახსნის ოპტიმიზაციის თავისებური ამოცანა, რომლისთვისაც დამახასიათებელია შემდეგი თვისებები:

ა) ეფექტურობის მაჩვენებელი  $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$  წარმოადგენს ამონახსნის ელემენტების წრფივ ფუნქციას;

ბ) შესაძლო ამონახსნებზე გავრცელებულ შეზღუდვის პირობებს აქვს წრფივი განტოლებების ან უტოლობების სახე.

ასეთ ამოცანებს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანები.

**ამოცანა:** მეცხოველეობის ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შეიძლება შედგეს სამი პროდუქტისაგან - თივა, სილოსი და კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

პროდუქტები	საკვები ნივთიერებები		
	ცილა (გ/კგ)	კალციუმი (გ/კგ)	ვიტამინები
თივა	$\alpha_{11} = 50$	$\alpha_{21} = 10$	$\alpha_{31} = 2$
სილოსი	$\alpha_{12} = 70$	$\alpha_{22} = 6$	$\alpha_{32} = 3$
კონცენტრატები	$\alpha_{13} = 180$	$\alpha_{23} = 3$	$\alpha_{33} = 1$

ცილისა და კალციუმის მოხმარების დღე-ღამური ნორმები ერთ სულ ძროხაზე გადაანგარიშებით შეადგენს არანაკლებ 2000გ და 210გ შესაბამისად. ვიტამინების მოხმარება მკაცრად დოზირებულია და უნდა შეადგენდეს 87მგ-ს დღე-ღამეში.

შევადგინოთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ ერთი კგ თივის ღირებულება 150 ერთეულია, სილოსისა - 200 ერთეული და კონცენტრატისა - 600 ერთეული.

**ამოხსნა:** მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზაცია ანუ შევადგინოთ შესატყვისი მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, კვების რაციონის ოპტიმალური რაოდენობაა:

თივისა -  $X_1$ კგ, სილოსისა -  $X_2$ კგ და კონცენტრატისა -  $X_3$ კგ. მაშინ მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება დღე-ღამეში) იქნება:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = 150 \cdot X_1 + 200 \cdot X_2 + 600 \cdot X_3. \quad (2.52)$$

ამოცანის პირობებში საჭიროა ამ ფუნქციის მინიმიზირება.

მოვახდინოთ შეზღუდვათა ფორმალიზება: დღე-ღამეში ცილის რაოდენობა  $\geq 2000$ გ, კალციუმისა  $\geq 210$ გ, ხოლო ვიტამინები ზუსტად არის 87მგ:

$$\begin{cases} 50 \cdot X_1 + 70 \cdot X_2 + 180 \cdot X_3 \geq 2000 \\ 10 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \geq 210 \\ 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3 = 87 \\ X_1 > 0, X_2 > 0, X_3 > 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

მიზნის ფუნქცია:

$$f(x_1, x_2, x_3) := 150 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 600 \cdot x_3,$$

ცვლადების საწყისი მნიშვნელობების არჩევა:

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

$$x_3 := 1,$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი Mathcad-ში:

Given

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 1$$

$$x_3 \geq 1$$

$$50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 180 \cdot x_3 \geq 2000$$

$$10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 210$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 87$$

$$R := \text{Minimize}(f, x_1, x_2, x_3)$$

მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 24.778 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობაა:

$$f(R_0, R_1, R_2) = 6430.556$$

### 2.9.1. სატრანსპორტო გადაზიდვების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, რაღაც პროდუქტი (ქვანახშირი, აგური, ბენზინი,...) ინახება  $m$  საწყობში და გამოიყენება  $n$  პუნქტში (ქარხნებში, მშენებლობაზე, მაღაზიებში, ბენზინგასამართ სადგურებში, ...).

$a_i$  არის პროდუქტის მარაგი  $i$ -ურ საწყობში ( $a_i > 0$ );

$b_j$  განაცხადები საქონელზე მოხმარების  $j$ -ურ პუნქტში;  $c_{ij}$   $i$ -ური საწყობიდან მოხმარების  $j$ -ურ პუნქტში ერთეულოვანი რაოდენობის პროდუქტის გადაზიდვის ღირებულება,  $c_{ij} > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

ამასთან ითვლება, რომ ამოცანა დაბალანსებულია, ე.ი. ჯამური მარაგები ტოლია ჯამური მოთხოვნილებისა.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (2.54)$$

უნდა ავირჩიოთ გადაზიდვების ისეთი სტრატეგია, რომ სრულად დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილებები, ამასთან გადაზიდვების ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური.

**ამოხსნა:** ვთქვათ,  $x_{ij}$  საქონლის რაოდენობაა, რომელიც გადაიზიდება  $i$ -ური პუნქტიდან მოხმარების  $j$ -ურ პუნქტში, მაშინ მიზნის ფუნქციას (გადაზიდვების ჯამური ხარჯები) აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min . \quad (2.55)$$

გარდა ამისა, უნდა დავაკმაყოფილოთ ყველა განაცხადი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j , (j = 1, n) . \quad (2.56)$$

რადგან გასახარჯია საწყობების მთელი მარაგი, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i , (i = \overline{1, m}) . \quad (2.57)$$

ცხადია, რომ

$$X_{ij} \geq 0 . \quad (2.58)$$

ამრიგად, ვღებულობთ წრფივი დაპროგრამების (2.55)-(2.58) ამოცანას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

**განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:**

**ამოცანა:** რეგიონში არის ორი ცემენტის ქარხანა და მათი პროდუქციის მომხმარებელი სამი ბინათმშენებლობის კომბინატი. ცხრილში მოცემულია ცემენტის წარმოების დღე-ღამური მოცულობები, კომბინატების დღე-ღამური მოთხოვნილებები და თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე ერთი ტონა ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება.

შევადგინოთ ცემენტის გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა სატრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის მიზნით.

ქარხნები	ცემენტის წარმოება ტ/დღე-ღამე	1ტ ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება		
		კომბ.1	კომბ. 2	კომბ. 3
I ქარხანა	a <sub>1</sub> =40	c <sub>11</sub> =10	c <sub>12</sub> =15	c <sub>13</sub> =25
II ქარხანა	a <sub>2</sub> =60	c <sub>21</sub> =20	c <sub>22</sub> =30	c <sub>23</sub> =30
	ცემენტის მოხმარება ტ/დღე-ღამე	b <sub>1</sub> =50	b <sub>2</sub> =20	b <sub>3</sub> =30

**ამოხსნა:** ამოცანის ამოსახსნელად ვადგენთ მათემატიკურ მოდელს.

ვთქვათ,  $X_{ij}$  -ცემენტის რაოდენობაა ( $i = \overline{1,2}$ ) ორი ქარხნიდან გადაზიდული ( $j = \overline{1,3}$ ) სამ ბინათსამშენებლო კომბინატში. მაშინ, მიზნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(X) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min$$

გვაქვს შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$\sum_{i=1}^2 X_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,3})$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,2})$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:



ინდექსაცია იწყება  $i=1$ -დან

ORIGIN:= 1

გადაზიდვის ფასების მატრიცა

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

ორ ქარხანაში ცემენტის საწყისი მარაგი

$$A := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

სამი ბინათსამშენებლო კომბინატის მოთხოვნა

$$B := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების მიზნის ფუნქცია:

$$L(X) := \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები:

$$i := 1..2$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი:

Given

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^2 X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^3 X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq C$$

$$R := \text{Minimize}(L, X)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი:

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების ოპტიმალური ფასი:

$$L(R) = 2000$$

### 2.9.2. რესურსების ოპტიმალური განაწილების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს გარკვეული რესურსები (ნედლეული, სამუშაო ძალა, დანადგარები):

$$R_1, R_2, \dots, R_m \tag{2.59}$$

შესაბამისი რაოდენობებით

$$b_1, b_2, \dots, b_m \tag{2.60}$$

ამ რესურსებით შეიძლება ვაწარმოოთ საქონელი:

$$T_1, T_2, \dots, T_n \quad (2.61)$$

$T_j$  საქონლის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა  $R_i$  რესურსის  $a_{ij}$ , ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) ერთეული.  $R_i$  რესურსის თითოეული ერთეული ღირს  $d_i$  ლარი.  $T_j$  საქონლის თითოეული ერთეულის რეალიზაცია შესაძლოა  $C_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) ლარად.

საქონლის თითოეული სახეობის წარმოებული ერთეულების რაოდენობა შემოფარგლულია მოთხოვნით. ცნობილია, რომ ბაზარი ვერ შთანთქმავს  $T_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) საქონლის  $K_j$  ერთეულზე მეტ რაოდენობას.

**ისმის კითხვა:** რომელი საქონელი და რა რაოდენობით უნდა იქნეს წარმოებული იმისათვის, რომ მოხდეს მაქსიმალური მოგების რეალიზება?

**ამოხსნა:** ამოცანის პირობები გავწეროთ წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური მოდელის სახით.

მოთხოვნის პირობები აწესებს შეზღუდვებს:

$$X_i \leq K_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.62)$$

გარდა ამისა, რესურსები მოიხმარება არაუმეტეს იმ რაოდენობისა, ვიდრე გვაქვს საწყობში; ამიტომ ლებულობენ შეზღუდვებს:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}). \quad (2.63)$$

შევადგინოთ მოგების მიზნის ფუნქცია.  $T_j$  სახის საქონლის ერთეული რაოდენობის  $s_j$ -თვის ღირებულება უდრის

$$s_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.64)$$

$T_j$  საქონლის, ერთი ერთეულის რეალიზებით მიღებული სუფთა  $q_j$  მოგება ტოლია მის გასაყიდ  $c_j$  ფასსა და  $s_j$  თვითღირებულობას შორის სხვაობისა:

$$q_j = c_j - s_j . \quad (2.65)$$

ყველა საქონლის რეალიზაციით მიღებული საერთო სუფთა მოგება იქნება:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n q_j x_j = \sum_{j=1}^n (c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} d_i) \cdot x_j \rightarrow \max . \quad (2.66)$$

### განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

**ამოცანა:** სართავი ფაბრიკა წარტის ორი სახეობის საწარმოებლად იყენებს სამი ტიპის ნედლეულს - სუფთა შალს, კაპრონს და აკრილს.

ცხრილში ნაჩვენებია ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, მისი საერთო რაოდენობა, რომელიც ფაბრიკამ წლის განმავლობაში უნდა გამოიყენოს და თითოეული სახის წარტის ერთი ტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

ნედლეულის ტიპი	1 ტ ნართზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები		ნედლეულის რაოდენობა (ტ)
	სახეობა 1	სახეობა 2	
შალი	$\alpha_{11} = 0.5$	$\alpha_{12} = 0.2$	$b_1 = 600$
კაპრონი	$a_{21} = 0.1$	$a_{22} = 0.6$	$b_2 = 620$
აკრილი	$a_{31} = 0.4$	$a_{32} = 0.2$	$b_3 = 500$
1 ტ წარტის რეალიზაციით მიღებული მოგება	$q_1 = 1100$	$q_2 = 900$	

შევადგინოთ ნართის წარმოების ოპტიმალური წლიური გეგმა, მოგების მაქსიმიზაციისათვის.

**ამოხსნა:** ჩამოვყალიბოთ ამოცანა მათემატიკის ენაზე. ვთქვათ,

$x_1$  – პირველი სახის ნართის რაოდენობაა და

$x_2$  – მეორე სახის ნართის რაოდენობა.

მაშინ შეზღუდვებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X_1 + 0.2 \cdot X_2 \leq 600 \\ 0.1 \cdot X_1 + 0.6 \cdot X_2 \leq 620 \\ 0.4 \cdot X_1 + 0.2 \cdot X_2 \leq 500 \end{cases}$$

მიზნის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$L(X_1, X_2) = 1100 \cdot X_1 + 900 \cdot X_2 \rightarrow \max$$

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

ამოცანის მიზნის ფუნქციაა:

$$f(x_1, x_2) := 1100 \cdot x_1 + 900 \cdot x_2$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები:

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი

Given

$$x_1 \geq C$$

$$x_2 \geq C$$

$$0.5 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 \leq 600$$

$$0.1 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 \leq 620$$

$$0.4 \cdot x_1 + 0.24 \cdot x_2 \leq 500$$

$$R := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

მაქსიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 1199.664 \\ 0.839 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნია:

$$f(R_0, R_1) = 1320385.9$$

## 2.10. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

იპოვეთ მინიმუმის (მაქსიმუმის) წერტილი და მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა არაწრფივი ფუნქციისათვის:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.67)$$

როცა შეზღუდვების ერთი ნაწილი მოცემულია ტოლობების სახით:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad (2.68)$$

ხოლო მეორე ნაწილი - უტოლობების სახით:

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.69)$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

ამოცანა: ვიპოვოთ არაწრფივი  $f(x_1, x_2)$  ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 - (x_1)^2 + x_2$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**ამოხსნა:**

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

მიზნის ფუნქციაა:

$$f(x_1, x_2) := 6 \cdot x_1 + x_2 - x_1^2$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x_1 := 1$$

$$x_2 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x_1 \geq 0$$

$$4 \geq x_2 \geq 0$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 15$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 24$$

$$R := \text{Maximize}(f, x_1, x_2)$$

მაქსიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი:

$$f(R_0, R_1) = 13$$

### 2.10.1. არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნის კონკრეტული მაგალითი. მაშასადამე, გვაქვს არაწრფივი მიზნის ფუნქცია და შემოფარგვლის პირობები, რომელთაგან ზოგი ტოლობის ფორმისაა და ზოგიც - უტოლობისა.

**ამოცანა:** იპოვეთ  $\min f(x)$ , თუ  $f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$  და შეზღუდვის პირობებს აქვთ სახე:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 + 3x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 x_3^2 - x_1 x_2 > 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

**ამოხსნა:**

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

```

ORIGIN:= 1
f(x) := (x1)2 + 3·(x2)2 + 2·(x3)2 + (x4)2
x :=  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
Given
x1 + (x2)2 + 3·x2 < 0
x1 + x2 + x4 = 5
x1·(x3)2 - x1·x2 > 0
s.. := Minimize(f, x)

```



$$s = \begin{pmatrix} 1.286 \\ -0.518 \\ 0 \\ 4.232 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} := s$$

$$f(\mathbf{x}) = 20.371$$

როგორც ვხედავთ, **Mathcad** პროგრამის მათემატიკური უზრუნველყოფა, საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ოპტიმიზაციის საკმაოდ რთული ამოცანებიც.

## 2.11. მრავალკრიტერიუმიანი ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

პრაქტიკაში, ხშირად, გვხვდება ისეთი ექსტრემალური ამოცანებიც, როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი მიზნის ფუნქციები ანუ გვაქვს რამოდენიმე კრიტერიუმი, რომელთაგან ზოგი მოითხოვს მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას, ზოგიც - მაქსიმიზაციას. ასეთი ამოცანების ამოსახსნელად, შინაარსიდან გამომდინარე არსებობს რამდენიმე მიდგომა: 1) როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, ერთნაირი აზრის (*min* ან *max*) რამდენიმე მიზნის ფუნქციაა, ვიყენებთ საჯარიმო, წონითი ფუნქციების მეთოდს ანუ შესაბამისად, გვაქვს მინიმიზაციის მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა ან მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა; 2) როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს სხვადასხვა აზრის (*min* და *max*) რამდენიმე მიზნის ფუნქცია, ვიყენებთ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციის აგების მეთოდს.

### 2.11.1. მრავალკრიტერიუმიანი მაქსიმიზაციისა და მინიმიზაციის ამოცანები

განვიხილოთ მრავალკრიტერიუმიანი მაქსიმიზაციის ამოცანა:

იპოვეთ:  $\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  და  $\max g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  თუ შეზღუდვების ერთი ნაწილი მოცემულია განტოლებებით:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (2.71)$$

ხოლო შეზღუდვების მეორე ნაწილი მოცემა უტოლობებით:

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.72)$$

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად გვაქვს **ორი ძირითადი მეთოდი**:

1) ვადგენთ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.73)$$

ცხადია, რომ ჯამი მიაღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას მაშინ, როცა თითოეული შესაკრები მიაღწევს მაქსიმუმს. მაშასადამე, ჩვენი მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანა შეგვიძლია დავიყვანოთ ცნობილ, ზოგად არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე:

$$\max I(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.74)$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (2.75)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.76)$$

2) არსებობს სხვა მიდგომაც, როცა გვაქვს რამოდენიმე ერთი აზრის (*max* ან *min*) მიზნის  $\min f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქცია, ადგენენ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i \alpha_i \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.77)$$

სადაც  $\sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i > 0$ . ეს კოეფიციენტები შეირჩევა ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე: ის კოეფიციენტი იქნება უფრო მეტი სიდიდის, რომლის შესაბამისი  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციის მინიმუმიზაცია უფრო მნიშვნელოვანია. ამ შემთხვევაში, ამოცანა დაისმის შემდეგნაირად:

$$\min I(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.78)$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (2.79)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.80)$$

## 2.11.2. მრავალკრიტერიუმიანი, ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნა

განვიხილოთ მრავალკრიტერიუმიანი ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნის მეთოდი.

**მოცემულია ამოცანა:** იპოვეთ ისეთი  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  წერტილი, რომლისთვისაც, ჰილბერტის სივრცის წინასწარ მოცემული ორი  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  და  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციიდან, ერთი აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას  $\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ხოლო მეორე მინიმალურს  $\min g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . ამასთანავე, ეს წერტილები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემოფარგვლის (შეზღუდვების) პირობებს:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (2.81)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.82)$$

ამ ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად, ვადგენთ სპეციალური ტიპის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.83)$$

ცხადია, რომ სხვაობა აღწევს მაქსიმუმს, როცა საკლებია მაქსიმალური და მაკლებია მინიმალური. მაშასადამე, ჩვენი ამოცანა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

$$\max I(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.84)$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (2.85)$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq 0, j = \overline{1, m}. \quad (2.86)$$

## 2.12. დინამიკური დაპროგრამება

განვიხილოთ უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანა:

$$\min_{(t, x)} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.87)$$

დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი საშუალებას იძლევა  $n + 1$  ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაციის ამოცანა დავიყვანოთ  $n$  ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაციის ამოცანამდე, თუ შესაძლებელია საწყისი ფუნქციის განცალკევადი წარმოდგენა:

$$f(t, x) = f_1(t, f_2(x)). \quad (2.88)$$

ასეთ შემთხვევაში (2.88) ამოცანა დაიყვანება (2.89) ამოცანაზე:

$$\min_{(t, x)} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_t f_1 \left( t, \min_x f_2(x) \right). \quad (2.89)$$

**ისმის კითხვა:** როდისაა შესაძლებელი (2.88) ამოცანის შეცვლა (2.89) ამოცანით?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მიტტენის თეორემა: **თუ არსებობს**

$f(t, x)$  ფუნქციის ისეთი განცალგებადი (2.88) წარმოდგენა, რომ  $f_1$  ფუნქცია არაა მონოტონურად კლებადი თავისი მეორე ვექტორული  $x$  ცვლადის მიმართ, მაშინ

$$\text{Opt}_{(t,x)} f(t, x) = \text{Opt}_t \left( f_1 \left( t, \text{Opt}_x (f_2(x)) \right) \right). \quad (2.90)$$

$\text{Opt}_{(t,x)}$  – ოპტიუმის ქვეშ იგულისხმება მაქსიმუმიც და მინიმუმიც ანუ (2.89)

ფორმულა ძალაშია, როგორც მაქსიმიზაციის, ასევე, მინიმიზაციის ამოცანებისათვის.

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს შეზღუდვები სივრცულ  $x$  ცვლადებზე ანუ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა, რომელიც გვეუბნება რომ  $x \in \Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ , მაშინ (2.90) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\text{Opt}_{(t,x)} f(t, x) = \text{Opt}_t \left( f_1 \left( t, \text{Opt}_{x \in \Omega_n} (f_2(x)) \right) \right). \quad (2.91)$$

### 2.13. გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება. წრფივი და არაწრფივი რეგრესია. ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი, საშუალებას გვაძლევს ოპტიმალურად მივუახლოვდეთ ექსპერიმენტების შედეგად მიღებულ წერტილებს და ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც „საუკეთესო“ იქნება ყველა სხვა წირთან შედარებით წინასწარ არცეულ ფუნქციათა კლასში. ფუნქციათა კლასის შერჩევა ხდება ექსპერიმენტული წერტილების სიბრტყეზე დატანის სურათიდან გამომდინარე. თუ, ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული წერტილები თავს იყრის გარკვეული წრფის მახლობლობაში, მაშინ საძიებელ ფუნქციათა კლასი იქნება წრფივი  $y = a \cdot x + b$  ფუნქციათა სიმრავლე და მაშინ, მისი პოვნის მეთოდს წრფივ რეგრესიას უწოდებენ; ხოლო, თუ საძიებელ  $f(x)$  ფუნქციათა კლასი არაწრფივია, მაშინ მისი პოვნის მეთოდს არაწრფივ რეგრესიას უწოდებენ.

განვიხილოთ წრფივი რეგრესიის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი დეტალურად.

**ამოცანა.** ვთქვათ გვაქვს რაიმე სიდიდის გაზომვის ექსპერიმენტული შედეგები მოცემული ცხრილით:

X	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	..	X <sub>n</sub>
y	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	..	y <sub>n</sub>

სადიებელი გვაქვს ანალიზური დამოკიდებულება  $y = f(x) = ax + b$

**ამოხსნა:** ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ყოველი  $(x_i, y_i)$  ექსპერიმენტული წერტილისათვის განიხილავენ  $r_i$  გადახრას თეორიულ (წრფივი ფუნქციის)  $f(x_i) = ax_i + b$  მნიშვნელობასა და შესაბამის ექსპერიმენტულ  $y_i$  მნიშვნელობას შორის:

$$r_i = ax_i + b - y_i. \quad (2.92)$$

გაუსის კრიტერიუმის თანახმად, საუკეთესოდ ითვლება ის  $f(x) = ax + b$  მიახლოება, რომლის დროსაც გადახრების კვადრატების ჯამი იქნება უმცირესი ანუ ვეძებთ  $a$  და  $b$  კოეფიციენტების ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც მინიმალურია შემდეგი ჯამი:

$$G(a, b) = \sum_{i=1}^n r_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2. \quad (2.93)$$

როგორც ვხედავთ წრფივი რეგრესიის ამოცანა დაიყვანება მრავალი ცვლადის  $G(a, b)$  ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე.

როგორც ვიცით, ურუცნობიანი ფუნქციის მინიმუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა ფერმას თეორემა. აქედან გამომდინარე, ექსტრემუმის წერტილის საპოვნელად, გვექნება შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

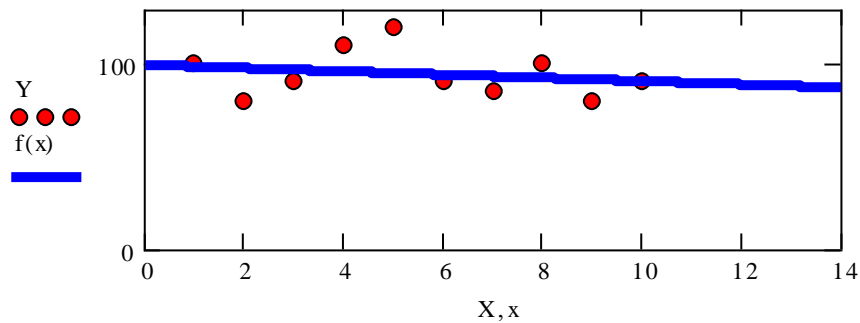
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_1^2}{\partial a} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial G_1^2}{\partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.94)$$

სისტემა (2.94) ადვილიად გარდაიქმნება წრფივ განტოლებათა შემდეგ სისტემად:

$$\left\{ \begin{aligned} a \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n X_i &= \sum_{i=1}^n X_i y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^n X_i + b \cdot n &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \right. \quad (2.95)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი გვაძლევს მინიმუმის წერტილს  $(a_{\min}, b_{\min})$  და მაშასადამე, ერთობლიობაში საუკეთესო  $f(x) = ax + b$  მიახლოებას ექსპერიმენტების შედეგად მიღებულ ცხრილთან.

გრაფიკულად, გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

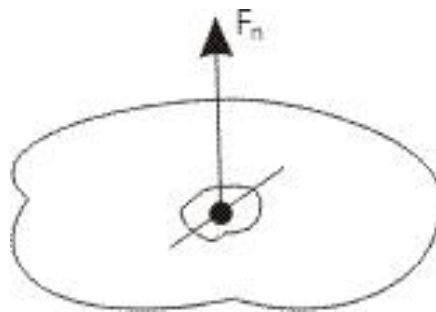


უწყვეტი წრფე იძლევა ერთობლიობაში, ექსპერიმენტების წერტილების საუკეთესო მიახლოებას.

### 2.13.1. დამოკიდებულება ძელის გაჭიმვისას ძაბვებსა და მცირე დეფორმაციებს შორის (ჰუკის კანონი)

**განსაზღვრება:** მექანიკური ძაბვა  $\sigma$  არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის  $\vec{n}$  ნორმალის მიმართულებით  $S$  ფართის ერთეულზე მოქმედი  $F_n$  ძალის სიდიდით.

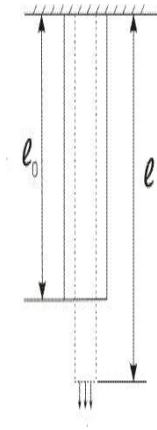
$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \tag{2.96}$$



ნახ. 2.1. მექანიკური ძაბვა

განსაზღვრება: ძელის ფარდობით  $\varepsilon$  წაგრძელებას დეფორმაციას უწოდებენ. ძელის გაჭიმვის დეფორმაცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (2.97)$$



ნახ. 2.2. ძელის დეფორმაცია

როგორც ვიცით, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ( $\varepsilon \ll 1$ ) დრეკადი სხულების უმრავლესობა ემორჩილება ჰუკის წრფივ კანონს, რომელსაც აქვს შემდეგი ფორმა.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.98)$$

სადაც  $E$  იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან დეფორმაციას ანუ საწყისი სიგრძის გაორმაგებას:

$$\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0. \quad (2.99)$$

ჰუკის კანონს, ზოგჯერ წერენ დეტალურადაც, შემდეგი ფორმით:

$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (2.100)$$

ეხლა, წრფივი რეგრესიის მეთოდიდან გამომდინარე, დავადგინოთ ჰუკის კანონის სახე მოცემული მასალისათვის, თუ მოცემული გვაქვს

მაბევსა და დეფორმაციებს შორის კავშირის დადგენისათვის ჩატარებული ექსპერიმენტების შედეგები ცხრილი 2.1.

ცხრილი 2.1

$\sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$\varepsilon$	0.0	0.001	0.0015	0.002	0.003	0.0036	0.004	0.005	0.0057	0.007

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad-ზე** და დავადგინოთ  $\sigma = f(\varepsilon)$  კავშირი, წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ ვექტორთა  $f$  ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, საძიებელ სიდიდეებს შორის ანალიზური დამოკიდებულებისათვის ცხრილი 2.1-დან გამომდინარე ისე, რომ ვექტორთა ეს დამოკიდებულება წრფივ  $\sigma = f(\varepsilon) = a\varepsilon + b$  ფუნქციათა შორის.

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0.0015 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.0036 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.0057 \\ 0.007 \end{pmatrix} \quad \sigma := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

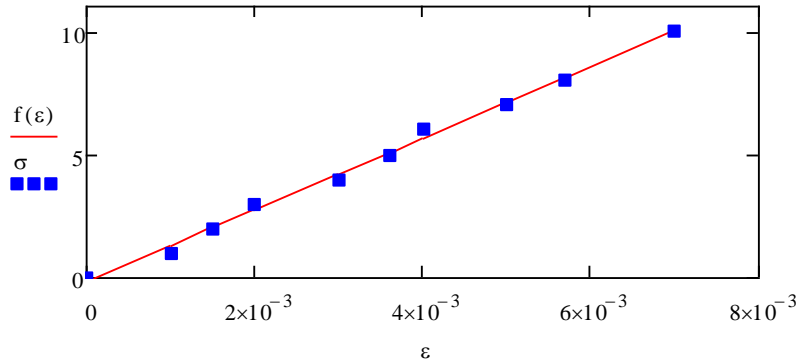
$$b := \text{intercept}(\varepsilon, \sigma)$$

$$b = -0.138$$

$$a := \text{slope}(\varepsilon, \sigma) \quad a = 1444.374$$

$$f(\varepsilon) := a \cdot \varepsilon + b$$





ნახ. 2.3. ჰუკის კანონი ექსპერიმენტში გამოკვლეული მასალისათვის. უწყვეტი წირი შეესაბამება თეორიულ მრუდს, ხოლო დისკრეტულად გაზნეული წერტილები - ექსპერიმენტების შედეგებს

ამ გათვლებიდან გამომდინარე, ჰუკის კანონს ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma = 1444.4\varepsilon - 0.1. \quad (2.101)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ 0.1 მცირე სიდიდეა ძაბვის სხვა მნიშვნელობებთან შედარებით, მაშინ შეგვიძლია მოცემული სიზუსტის ფარგლებში ის უგულებელვყოთ და მივიღოთ ჰუკის კანონი  $\sigma = 1444.4\varepsilon$  სახით. მაშინ ჩვენი მონაცემებიდან გამომდინარე, გვექნება რომ იუნგის მოდული იმ მასალისათვის, რომლისგანაცაა დამზადებული ექსპერიმენტში განხილული ძელი უდრის  $E = 1444.45/\text{მ}^2$ .

ეხლა, ექსპერიმენტის მონაცემებიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ იუნგის მოდულის მნიშვნელობა  $\frac{\sigma}{\varepsilon}$  სტატისტიკური მეთოდით. ცხრილი 2.1-დან გამომდინარე გვექნება შემდეგი ცხრილი 2.2:

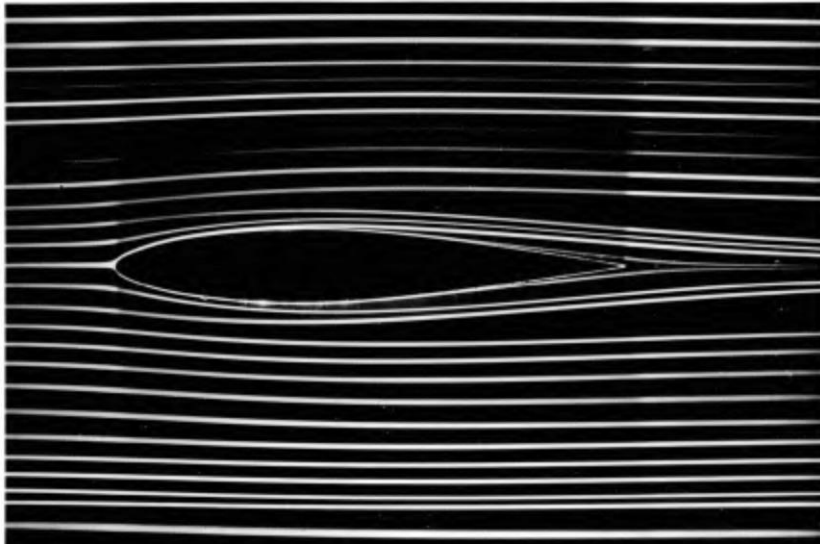
ცხრილი 2.2

$\sigma$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
$\varepsilon$	0.0	0.001	0.0015	0.002	0.003	0.0036	0.004	0.005	0.0057	0.007
$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	-	1000	1333.3	1500	1333.3	1388.9	1500	1400	1403.5	1428.6

ვპოულობთ იუნგის მოდულის საშუალო მნიშვნელობას და საშუალო კვადრატულ გადახრას, რაც საშუალებას გვაძლევს ჩავწეროთ, რომ  $E = 1228.8 \pm 431\text{ნ}/\text{მ}^2$ . ასე რომ, წრფივი რეგრესიით მიღებული მნიშვნელობა  $E = 1444.4\text{ნ}/\text{მ}^2$  ეკუთვნის სტატისტიკური მეთოდით მიღებულ შუალედს  $(1228.8 - 431; 1228 + 431)$  ანუ  $1444.4 \in (797; 1659)$ .

### 2.13.2. სიჩქარის ეპიურის აგება ნიუტონური სითხეებისათვის

დრეკადობის ჰუკის კანონის ანალოგიურად, ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს წრფივი დამოკიდებულება სითხის სიჩქარესა და საყრდენი კედლიდან მანძილს შორის. ბლანტი, ნიუტონური სითხეები (წყალი, ნავთი, ზეთი, ბენზინი, . . .) კედელს ეკვრიან სიბლანტის გამო და რაც უფრო შორდებიან კედელს, მით უფრო იზრდება ლამინარული (ფენები არ ერევა ერთმანეთს ნახ. 2.4) ნაკადის სასაზღვრო ფენის მოძრაობის სიჩქარეც ნახ. 2.5.



ნახ. 2.4. ფრთის პროფილის ლამინარული გარსდენის სურათი



ნახ. 2.5. სიჩქარეთა ველის ეპიურა ფირფიტის სასაზღვრო ფენში

როგორც ნახ. 2.5-დან ჩანს, კედლის (ფირფიტის) მახლობლობაში (ლამინარულ სასაზღვრო ფენში) სიჩქარე წრფივად იზრდება, ხოლო როცა გასცდება სასაზღვრო ფენის ეპიურა ხდება თითქმის ვერტიკალური ანუ სიჩქარე მუდმივ რეჟიმზე გადის და სითხის სიბლანტის გავლენა თითქმის ქრება.

ვთქვათ, გავზომეთ  $v$  სიჩქარეები ექსპერიმენტულად, ფირფიტადან  $y$  დაშორების მიხედვით, ერთ კვეტში და გვაქვს ცხრილი 2.3.

ცხრილი 2.3

$v$	0	0.01	0.018	0.020	0.023	0.026	0.05	0.045	0.05
$y$	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.008	0.009	0.01

შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე და დავადგინოთ  $v = f(y)$  კავშირი, წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ ვეძებოთ  $f$  ფუნქციის საუკეთესო მიახლოება, საძიებელ სიდიდეებს შორის ანალიზური დამოკიდებულებისათვის ცხრილი 2.3-დან გამომდინარე ისე, რომ ვეძებოთ ეს დამოკიდებულება წრფივ  $v = f(y) = ay + b$  ფუნქციათა შორის.

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.001 \\ 0.002 \\ 0.003 \\ 0.004 \\ 0.005 \\ 0.008 \\ 0.009 \\ 0.01 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0.018 \\ 0.020 \\ 0.023 \\ 0.026 \\ 0.05 \\ 0.045 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$a := \text{slope}(y, v)$$

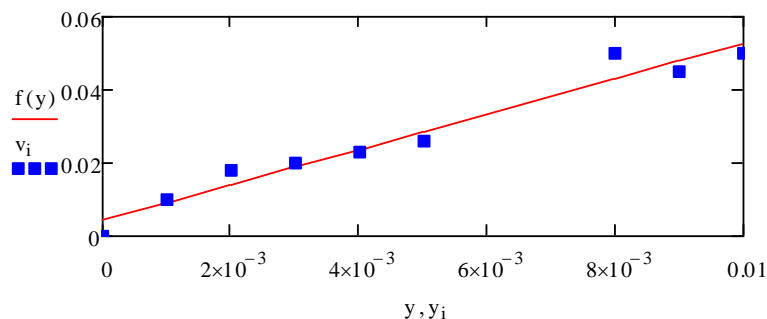
$$a = 4.843$$

$$b := \text{intercept}(y, v)$$

$$b = 0.004$$

$$f(y) := a \cdot y + b$$

$$i := 0..8$$



ნახ. 2.6. ნიუტონური სითხის სიჩქარეთა ეპიურა ფირფიტის სასაზღვრო ფენში. უწყვეტი წირი შეესაბამება თეორიულ მრუდს, ხოლო დისკრეტულად გაბნეული წერტილები - ექსპერიმენტების შედეგებს

ამრიგად, მივიღეთ სითხის კედლის სიახლოვეს მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა წრფივი რეგრესიის მეთოდით ანუ გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება:  $v = 4.8y + 0.004$ . ამ შემთხვევაშიც 0.004 გაცილებით ნაკლებია სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობაზე. ამიტომ შეგვიძლია ის უგულებელვყოთ, მითუმეტეს, რომ სითხის სიჩქარე ნულია ფირფიტის გასწვრივ ანუ როცა  $y = 0$ . მაშინ გვექნება დამოკიდებულება  $v = 4.8y$ .

### ამოცანები

1. იპოვეთ  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$  ფუნქციის ექსტრემუმები ანალიზურად;
2. იპოვეთ  $f(x, y) = x^2y^2(6 - x - y)$  ფუნქციის ექსტრემუმები ანალიზურად;
3. იპოვეთ  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$  ფუნქციის მაქსიმ-უმები და მინიმუმები;
4. იპოვეთ  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$  ფუნქციის მინიმუმი გრადიენტული დაშვების მეთოდით;
5. იპოვეთ  $f(x, y, z) = xyz$  ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით, თუ შემოფარგვლის პირობებს აქვთ სახე: 
$$\begin{cases} \varphi_1 = x + y - z - 3 = 0 \\ \varphi_2 = x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

6. იპოვეთ  $g(x, y) = x^2 + y^2$  ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა:  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ . ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და Mathcad პროგრამის გამოყენებით. გაანალიზეთ შედეგები;
7. იპოვეთ  $g(x, y) = 6 - 4x - 3y$  ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა:  $x^2 + y^2 = 1$ . ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და Mathcad პროგრამის გამოყენებით. გაანალიზეთ შედეგები;
8. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი მოცემული  $A(1;0)$  წერტილიდან  $4x^2 + 9y^2 = 36$  ელიფსამდე;
9. იპოვეთ მანძილი  $y = x^2$  პარაბოლასა და  $x - y = 5$  წრფეს შორის;
10. იპოვეთ  $x^2 + y^2 = R^2$  წრეში უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდები;
11. იპოვეთ იმ ცილინდრის უდიდესი სრული ზედაპირის ფართობი, რომელიც ჩახაზულია  $R$  რადიუსიან ბირთვში;
12. იპოვეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამონახსნი Mathcad პროგრამის გამოყენებით:

ა)  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$ , შემოფარგვლის პირობები: 
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

ბ)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$ , შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

გ)  $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$ , შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40; \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25 \end{cases}$$

13. ვთქვათ მცირე საწარმოს საამქრომ უნდა დაამზადოს სამი ტიპის 100 ნაკეთობა. თითოეული ნაკეთობა უნდა დამზადდეს არანაკლებ 20 ცალისა. ნაკეთობაზე მიდის შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ მეტალი, როცა მისი საერთო მარაგი 340 კგ-ა, აგრეთვე 4.75, 11 და 2 კგ პლასტმასია 700 კგ საერთო მოცულობით. თითოეული ტიპის  $X1$ ,  $X2$  და  $X3$  რამდენი ნაკეთობა უნდა დამზადდეს, რომ მივიღოთ გაოშვების მაქსიმალური

მოცულობა ფულად გამოსახულებაში, თუ ნაკეთობის ფასები კალკულაციის მიხედვით შეადგენს 4, 3 და 2 ლარს;

14. სამი სახეობის  $A, B$  და  $C$  ნაკეთობის საწარმებლად გამოიყენება  $T1, T2, T3$  ტიპის ნედლეული. ამასთან  $T1$  და  $T3$  ნედლეულის შესყიდვები შეზღუდულია მომწოდებლების შესაძლებლობებით. ცხრილში მოცემულია ნედლეულის ხარჯვის, ნედლეულსა და ნაკეთობაზე ფასების ნორმები და ნედლეულის შესყიდვის შეზღუდვები.

15.

ნედლეულის ტიპი	1კგ ნედლეულის ფასი (ლარი)	ერთ ნაკეთობაზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები (კგ)			ნედლეულის შეძენის შეზღუდვები (კგ)
		A	B	C	
$T_1$	$d_1=2$	$a_{11}=1$	$a_{12}=3$	$a_{13}=a$	$b_1=3000$
$T_2$	$d_2=1$	$a_{21}=4$	$a_{22}=1$	$a_{23}=3$	-
$T_3$	$d_3=b$	$a_{31}=6$	$a_{32}=5$	$a_{33}=2$	$b_3=3320$
ერთი ნაკეთობის ფასი (ლარი)		$c_1=6b+12$	$c_2=5b+22$	$c_3=c$	

განსაზღვრეთ მოგების მაქსიმიზაციის მიზნით პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური გეგმა. შეადგინეთ ზოგადი სახის მათემატიკური მოდელი.

განიხილეთ  $(a, b, c)$  პარამეტრების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევები:

a	b	c
2	1	17

2	2	19
2	3	21

16. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები:

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$

$$10x_1 - x_2 \leq 8 \quad ;$$

$$-18x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

17. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0.$$

18. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2,$$

თუ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \quad ; \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

19. იპოვეთ  $f_{\max}$ , თუ

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases};$$

20. იპოვეთ  $f_{\min}$ , თუ

$$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \geq 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \geq 0 \end{cases};$$

21. იპოვეთ  $f_{\min}$ , თუ

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2;$$

$$x_1 + x_2 - 5 = 0$$

22. იპოვეთ  $f_{\min}$ , თუ

$$f(x) = (x_1 - 1) \cdot (x_1 - 2) \cdot (x_1 - 3) + x_3$$

$$\begin{cases} x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \geq 0 \\ 5 - x_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases};$$

23. იპოვეთ  $f_{\max}$ , თუ

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \geq 0, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0;$$

24. იპოვეთ  $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$  ფუნქციის ექსტრემუმები;

25. იპოვეთ  $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow exstr$ , თუ  $3x_1 + 4x_2 = 1$ ;

26. იპოვეთ  $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow exstr$ , თუ

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1;$$

27.  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow min$ , თუ  $2x_1 - x_2 + x_3 \leq 5$ ,  $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ .

ამოხსენით ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით და Mathcad პროგრამით.

შედეგები შეადარეთ;

28.  $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow min$ , თუ  $x_1 - x_2 - x_3 + 1 \leq 0$ ,  $-x_1 - 3x_2 + 3 \leq 0$ .

ამოხსენით ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით და Mathcad პროგრამით.

შედეგები შეადარეთ;

29.  $x_1 - x_2^2 \rightarrow exstr$ ,  $\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \end{cases};$



$$30. \quad x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \rightarrow \min, \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ 4x_1^2 + x_2^2 \geq 4 \end{cases}$$

## ლიტერატურა

1. **Anrew F.Sigel.** Practical Buisness Statistics, Boston Burr Ridged, WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000.
2. **L.G.Mitten.** Composition Prinsiples for Synthesis of Optimal Multistage Processes, Operations Research 12,1964.
3. **Т.Пу.** Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., М., 2002.
4. **В.В. Лебедев.** Математическое моделирование социально-экономических процессов, М., 1997.
5. **О.Н. Салманов.** Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003.
6. **L.G.Mitten, A.R.Warburton.** Implicit Enumeration Procedrures, Working Paper 251, Faculty of commerce and Business Administration, Univercity of British Columbia, Vancouver, Canada, 1973.
7. **Gilbert A.Cherrhill.** Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996.
8. **В. Дьяконов.** Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
9. **Т.А. Обгадзе.** Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, М., 2002.
10. **Т.А.Обгадзе, В.Г. Прокошев.** Вычислительная физика, Министерство образования РФ, ВлГУ, Владимир, 1999.
11. **Christopher Dougherty.** Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992.

12. В. Дьяконов. Matlab, учебный курс универсальная интегрированная система компьютерной математики, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
13. Т.А. Обгадзе, З.Н.Цвераидзе. Математические модели в экономике; 20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 Professional, ГТУ, Т., 2006.
14. თამაზ ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), I ტომი, სტუ, თბილისი, 2006.
15. Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, пер. с англ., М., 1971.
16. А.Я. Яглом, И.М. Яглом. Вероятность и информация, М., 1973.
17. Ю.В. Прохоров. Ю.А. Розанов. Теория вероятностей, СМБ, М., 1973.
18. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, учеб. пос., М., 1975.
19. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. Теория вероятностей, учеб. пос., задачи и упражнения, М., 1973.
20. Т.А. Обгадзе. Математическая модель Лоренца в экономике производства, ГЭНЖ, компьютерные науки и телекоммуникации, №4(11), 2006.
21. Н.Н.Моисеев, Ю.П.Иванилов. Методы оптимизации, Наука, М., 1978.
22. Ф.П.Васильев. Численные методы решения экстремальных задач, Наука, М., 1988.
23. Э.Полак. Численные методы оптимизации. Евиный подход, Мир, М., 1974.
24. М.Атане, П.Фалб. Оптимальное управление, Машиностроение, М., 1968.
25. Э.П.Сейдж, Ч.С.Уайт. Оптимальное управление системами, Мир, М., 1982.
26. М.Мину. Математическое программирование. Теория и алгоритмы, пер. с франц., наука, М., 1990.

### III თავი. ვარიაციული აღრიცხვა

ვარიაციული აღრიცხვა შეისწავლის ფუნქციონალების მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის მეთოდებს. იმ ამოცანებს, რომელშიც მოითხოვება ფუნქციონალის გამოკვლევა, მაქსიმუმზე ან მინიმუმზე ვარიაციული ამოცანები ეწოდებათ.

ფიზიკისა და მექანიკის ამოცანათა უმრავლესობა დაიყვანება შესაბამისი ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანაზე. ასეთი ფორმულირების შემთხვევაში, ამ კანონებს ფიზიკის ან მექანიკის ვარიაციულ პრინციპებს უწოდებენ. ვარიაციულ პრინციპებს მიეკუთვნება: უმცირესი ქმედების პრინციპი, ენერჯის შენახვის კანონი, იმპულსის შენახვის კანონი, მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი, ველის სხვადასხვა კლასიკური და რელატივისტური თეორიის ვარიაციული პრინციპი, ფერმას ოპტიკური პრინციპი, კასტილიანოს ვარიაციული პრინციპი დრეკადობის თეორიაში და ა.შ.

#### 3.1. ვარიაციული აღრიცხვის კლასიკური ამოცანები

ვარიაციული აღრიცხვის განვითარება დაიწყო 1696 წლიდან გენიალური ლეონარდ ეილერის და იოჰან ბერნულის მოღვაწეობის შედეგად. მოგვიანებით ის ჩამოყალიბდა დამოუკიდებელ მათემატიკურ დისციპლინად, საკუთარი კვლევის მეთოდებით.

იმისათვის, რომ ვიქონიოთ წარმოდგენა ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანებზე, განვიხილოთ რამდენიმე კლასიკური ამოცანა.

##### 3.1.1. გეოდეზიური წირები სიბრტყეზე

დავიწყოთ უმარტივესი ამოცანით: რას წარმოადგენს ბრტყელი, უმოკლესი სიგრძის მქონე წირი, რომელიც სიბრტყის რომელიმე ორ წერტილს აერთებს?

ამ ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისათვის, ვაფიქსირებთ რაიმე, ორ  $A(x_1; y_1)$  და  $B(x_2; y_2)$  წერტილს  $XOY$  სიბრტყეზე. დავუშვათ, რომ  $x_1 < x_2$  და ვიხილავთ ამ ორი წერტილის შემაერთებელ გლუვ

$y = f(x)$  წირს  $x \in [x_1; x_2]$ , რომლისთვისაც  $y_1 = f(x_1)$  და  $y_2 = f(x_2)$ .

ასეთ შემთხვევაში, ამ ორი წერტილის შემაერთებელი წირის სიგრძე როგორც მათემატიკური ანალიზიდან ვიცით, გამოითვლება ფორმულით:

$$I(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3.1)$$

ამ ამოცანაში, საპოვნელია ისეთი  $y = f(x)$  ფუნქცია, რომლისთვისაც (3.1) ფუნქციონალი მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

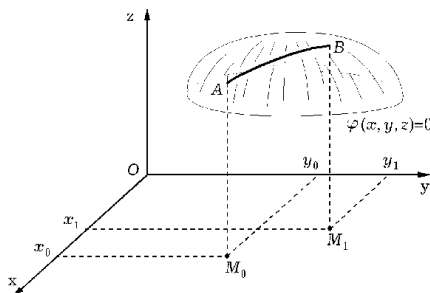
ცხადია, რომ ევკლიდურ სივრცეში ასეთი წირი იქნება ამ ორი წერტილის შემაერთებელი წრფის მონაკვეთი.

### 3.1.2. გეოდეზიური წირები ნებისმიერ ზედაპირზე

ვთქვათ, გვაქვს ნებისმიერი ორი წერტილი რაიმე ზედაპირზე, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad (3.2)$$

ვიპოვოთ ამ ზედაპირზე მდებარე და მოცემულ ორ  $A$  და  $B$  წერტილზე გამავალი, უმცირესი სიგრძის მქონე  $AB$  წირი (ნახ. 3.1.)



ნახ. 3.1. გეოდეზიური წირის პოვნის სქემა

ასეთ წირებს, მოცემული ზედაპირის გეოდეზიური წირები ეწოდება. მაგალითად, სიბრტყეზე გეოდეზიური წირია წრფე, სფეროს ზედაპირზე გეოდეზიური წირია ცენტრზე გამავალი დიდი კვეთის რკალი, რომელიც ამ ორ წერტილზე გადის.

ამ ამოცანის ფორმალიზაციისათვის, დავუშვათ რომ (3.2) ფუნქცია არის გლუვი და საძიებელი წირი, შეგვიძლია ჩავწეროთ განტოლებებით:  $y = y(x)$  და  $z = z(x)$  როცა  $x \in [a; b]$ . მაშინ საძიებელი წირის სიგრძე იქნება:

$$L[y(x); z(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx. \quad (3.3)$$

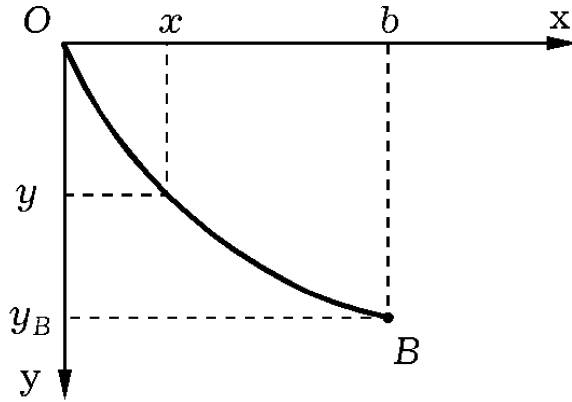
ამოცანა დაიყვანება  $x \in [a; b]$  შუალედში იმ ორი გლუვი  $y = y(x)$  და  $z = z(x)$  ფუნქციის პოვნაზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებებს:

$$F(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad (3.4)$$

და ანიჭებენ (3.3) ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას.

### 3.1.3. ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ

მოცემულია ვერტიკალურ სიბრტყეში, ერთ ვერტიკალზე არა მდებარე ორი  $O$  და  $B$  წერტილი. მოცემულ სიბრტყეში იპოვეთ ამ წერტილების შემაერთებელი ისეთი  $OB$  წირი, რომელზეც სიმძიმის გავლენით მოძრაობისას, მატერიალურ წერტილს დაჭირდება უმცირესი დრო  $O$  წერტილიდან  $B$  წერტილში მოსახვედრად (ნახ. 3.2.)



ნახ. 3.2. ბრახისტოხრონას ამოცანის სქემა

იგივე ამოცანა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: როგორ დავაპროექტოთ სახლის სახურავი, რომ წვიმის წვეთები სახურავიდან ჩამოცურდნენ უმცირეს დროში?

დავუშვათ, რომ მატერიალური წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია და უგულვებელვყოთ ხახუნის ძალა. დროის იმ მომენტისათვის, როცა  $OXY$  სიბრტყეში მოძრავი სხეულის კოორდინატა  $OY$  ღერძზე იქნება  $y$ , სხეული დაკარგავს  $mgy$  სიდიდის პოტენციალურ ენერგიას (სადაც  $m$  მასაა,  $g$  თავისუფალი ვარდნის აჩქარება). შესაბამისად, მიიღებს კინეტიკურ ენერგიას, რომლის სიდიდეც იქნება:  $\frac{mv^2}{2}$  სადაც  $v$  წერტილის სიჩქარეა. მაშინ, მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე, გვექნება განტოლება:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy, \tag{3.5}$$

მივიღებთ რომ:

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{3.6}$$

ჩავთვალოთ, რომ საძიებელი წირის განტოლებაა  $y = y(x)$ , სადაც  $y(x)$  მოცემულ  $[a; b]$  შუალედზე განსაზღვრული, გლუვი წირია, მაშინ მივიღებთ რომ

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{dt}, \quad (3.7)$$

სადაც  $ds$  წირის რკალის სიგრძის დიფერენციალია, ხოლო  $t$  - დრო. თუ გავითვალისწინებთ (3.6) ტოლობას, მაშინ გვექნება

$$\sqrt{2gy}dt = \sqrt{1+(y')^2}dx, \quad (3.8)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ:

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (3.9)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $O$  წერტილიდან სიმძიმის ძალის გავლენით  $B$  წერტილამდე დაშვებას დაჭირდება დრო:

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}. \quad (3.10)$$

საწყისი და საბოლოო წერტილების კოორდინატები გვაძლევს სასაზღვრო პირობებს:

$$y(0) = 0, \quad y(b) = y_B. \quad (3.11)$$

მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ (3.11) სასაზღვრო პირობების დამაკმაყოფილებელი, ისეთი გლუვი  $y(x)$  ფუნქცია, რომლისთვისაც

$t \rightarrow \min$ .

ეს ამოცანა ამოხსნეს იაკობ ბერნულმა, ლოპიტალმა და ისააკ ნიუტონმა.

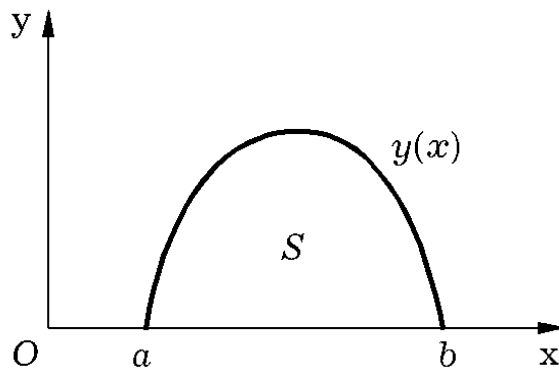
### 3.1.4. დიდონის იზოპერიმეტრული ამოცანა

ჩვენ წელთა აღრიცხვამდე IX საუკუნეში, ფინიკიელმა დედოფალმა დიდონმა, რომელიც თანმხლებ პირებთან ერთად გაურბოდა ქ.ტირის წარჩინებულებს, მიმართა აფრიკის ჩრდილოეთით მდებარე ხმელთაშუა ზღვის ნაპირებს. აქ მან გადაწყვიტა საბოლოოდ დასახლება.

დიდონმა ადგილობრივ მმართველს მიმართა თხოვნით, მიეცათ მისთვის დასასახლებლად მიწის ნაკვეთი, რომელსაც შემოფარგლავდა მისი ხარის ტყავისაგან დამზადებული ქამარი. გულუბცვრილო მმართველი დათანხმდა. დიდონმა, ამის შემდეგ, ქამარი დაჭრა წვრილ ზოლებად და გადააბა ერთმანეთს. ამ ქამრით მან მიიზომა სანაპიროს საკმაოდ დიდი ტერიტორია და აქ დააარსა ქალაქი კართაგენი.

ამოცანა, რომელიც გამოიყენა დიდონმა, შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ მოცემული  $L$  სიგრძის ისეთი წირი, რომელიც სიბრტყეზე შემოფარგლავს უდიდესი სიდიდის ფართობს.

მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზება. ჩავთვალოთ რომ ზღვის ნაპირი სწორი ხაზია (წრფე).  $OXY$  მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა მოვგეზოთ ისე, რომ  $OX$  ღერძი დაემთხვეს ზღვის ნაპირს. ჩავთვალოთ, რომ ზღვის სანაპიროს დიდონის ნაწილია  $[a; b]$  მონაკვეთი, ხოლო მრუდწირული ნაწილი არის გლუვი  $y = y(x)$  წირი (ნახ. 3.3.)



ნახ. 3.3. დიდონის ამოცანის სქემა

ცხადია, რომ

$$y(a) = y(b). \quad (3.12)$$

საზღვრის მრუდწირული ნაწილის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (3.13)$$



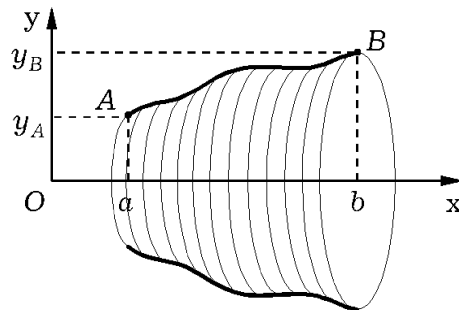
ხოლო მიწის შემოსაზღვრული ნაწილის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_a^b y(x) dx. \quad (3.14)$$

ამრიგად, გვაქვს ამოცანა: იპოვეთ ისეთი გლუვი  $y(x)$  ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (3.12) და (3.13) პირობებს ( $L$  ფიქსირებული რიცხვია) და (3.14) ინტეგრალს ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

ასეთი ტიპის ამოცანებს ორიგინალურად ხსნიდნენ ჯერ კიდევ არისტოტელე და არქიმედი. მათ იზოპერიმეტრულ ამოცანებს უწოდებენ.

### 3.1.5. ამოცანა ბრუნვის ზედაპირის მინიმუმის შესახებ



ნახ. 3.4. ამოცანა ბრუნვითი ზედაპირის შესახებ

ვთქვათ, გვინდა  $XOY$  სიბრტყეში, ერთმანეთთან ისეთი წირით შევაერთოთ ორი  $A(a; y_A)$  და  $B(b; y_B)$  წერტილი, რომ მიღებული წირის  $OX$  ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური (ნახ. 3.4.).

დავუშვათ, რომ საძიებელი  $y = y(x)$  ფუნქცია არის გლუვი  $[a; b]$  მონაკვეთზე. მაშინ გვექნება ამოცანა:

იპოვეთ ისეთი გლუვი  $[a; b]$  მონაკვეთზე ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$y(a) = y_A, \quad y(b) = y_B, \quad (3.15)$$

და

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min. \quad (3.16)$$

ამ ამოცანის განზოგადებას წარმოადგენს პლატოს პრობლემა, რომელიც ასე ჩამოყალიბდება:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ჩაკეტილი ჟორდანის წირი. იპოვეთ, ამ წირზე გამავალი ისეთი გლუვი ზედაპირი, რომლის მოცემული წირით შემოსაზღვრული ზედაპირის ფართობიც მინიმალურია.

ჩვენ შევისწავლით, სხვადასხვა ტიპის ფუნქციონალების მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის მეთოდებს. მათ შორის, განიხილება შემდეგი ტიპის ფუნქციონალები, რომლებიც მოიცავს ყველა მოყვანილი კლასიკური ამოცანის ამოხსნის მეთოდს:

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (3.17)$$

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \quad (3.18)$$

$$\int_a^b F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)) dx, \quad (3.19)$$

$$\iint F(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) dx dy. \quad (3.20)$$

### 3.2. ფუნქციონალის ვარიაცია

განვიხილოთ ფუნქციონალის მაგალითი:

$J[y] = \int_0^1 [y(x)]^2 dx$  და გამოვითვალოთ მისი ცვლილება  $\Delta J$  ანუ ვარიაცია, არგუმენტის ანუ  $y(x)$  ფუნქციის მცირე  $\delta y$  ცვლილებისას (ფუნქციის ვარიაცია):

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_0^1 (y + \delta y)^2 dx - \int_0^1 [y]^2 dx, \quad (3.21)$$

ამ ფორმულის გამარტივება გვაძლევს ფორმულას:

$$\Delta J = \int_0^1 (2y\delta y + (\delta y)^2) dx = 2 \int_0^1 y\delta y dx + \int_0^1 (\delta y)^2 dx. \quad (3.22)$$

(3.22) ფორმულა შედგება ორი ნაწილისაგან: პირველი წრფივი ნაწილია  $y(x)$  ფუნქციის  $\delta y$  ვარიაციის მიმართ და მას ფუნქციონალის  $\delta J$  პირველი ვარიაცია ეწოდება, ხოლო მეორე შესაკრები, არაწრფივია  $\delta y$  ვარიაციის მიმართ და მამასადამე უფრო მცირეა (როცა  $\delta y$  მცირეა) წრფივ ნაწილთან შედარებით ანუ განხილული ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია იქნება:

$$\delta J = 2 \int_0^1 y\delta y dx. \quad (3.23)$$

ცხადია, რომ

$$\Delta J \approx \delta J. \quad (3.24)$$

საზოგადოდ, თუ  $y(x)$  ფუნქციის მახლობელი ფუნქციებისათვის  $J[y]$  ფუნქციონალი იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას, მაშინ  $\Delta J[y] \leq 0$  მაქსიმუმის შემთხვევაში და  $\Delta J[y] \geq 0$  მინიმუმის შემთხვევაში.

ფუნქციონალს, ფუნქციის მსგავსად, შეიძლება ქონდეს რამდენიმე მინიმუმი ან მაქსიმუმი. ორივე შემთხვევაში  $\Delta J$  ფუნქციონალი არ იცვლის ნიშანს. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\delta J = 0. \quad (3.25)$$

მართლაც (3.24) თანადობიდან გვაქვს რომ  $\Delta J$  და  $\delta J$  ერთნაირი ნიშნის სიდიდეებია. თუმცა, (3.23) ტოლობიდან გვაქვს, რომ, ფუნქციის  $\delta y$  ვარიაციას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნიშანი, მაშასადამე ფუნქციონალის  $\delta J$  ვარიაციაც შეიცვლის ნიშანს, რაც ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ  $\Delta J$  არ იცვლის ნიშანს.

მაშასადამე (3.25) პირობა, წარმოადგენს ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

(3.25) პირობას, ფუნქციონალის სტაციონარულობის პირობასაც უწოდებენ. მრავალ ამოცანაში მნიშვნელოვანია, არა მარტო ექსტრემუმების პოვნა, არამედ, ფუნქციონალის სტაციონარული მნიშვნელობებიც.

**P.S.** (ლაგრანჟის მექანიკური ინტერპრეტაცია) თუ ფუნქციონალი შეესაბამება მექანიკური სისტემის პოტენციალურ ენერგიას, მაშინ მისი სტაციონარული მნიშვნელობები გვაძლევს სისტემის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობებს, ხოლო თუ გვაქვს პოტენციალური ენერგიის ფუნქციონალის მინიმუმი, მაშინ წონასწორობის მდგომარეობა მდგრადია.

ეხლა, განვიხილოთ უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y) dx, \quad (3.26)$$

სადაც  $y = y(x)$ .

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ  $J[y]$  ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა გამოვითვალოთ  $\Delta J$ :

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b F(x, y + \delta y) dx - \int_a^b F(x, y) dx. \quad (3.27)$$

თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებისათვის, მივიღებთ რომ:

$$\Delta J = \int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx + \int_a^b F''_{yy}(x, y) \frac{(\delta y)^2}{2!} dx + \dots \quad (3.28)$$

როგორც ვხედავთ,  $J[y]$  ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია ანუ  $\Delta J$  ნაზრდის წრფივი ნაწილი ტოლია:

$$\delta J = \int_a^b F'_y(x, y) \delta y dx = 0. \quad (3.29)$$

აქედან გამომდინარე, რადგან  $\delta y$  ფუნქციის ნებისმიერი ნაზრდია, მივიღებთ რომ პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა (ლაგრანჟის თეორემა) გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F'_y(x, y) = 0. \quad (3.30)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის სრული ანალოგიაა.

### 3.2.1. ანალოგია ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის

ვარიაციული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები ანუ ფუნქციონალების ექსტრემუმზე გამოკვლევის მეთოდები, მეტად წააგავს ფუნქციის მაქსიმუმზე და მინიმუმზე გამოკვლევის მეთოდებს. ამიტომ მიზანშეწონილია უფრო დეტალურად განვიხილოთ ეს ანალოგია.

<p>1. <math>z = f(x)</math> ფუნქცია განიმარტება, როგორც ისეთი <math>f</math> ასახვა, რომელიც მოცემული <math>X</math> სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს <math>Z</math> სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს. <math>f: X \rightarrow Z</math></p>	<p>1. <math>J[y]</math> ფუნქციონალი განიმარტება, როგორც ისეთი <math>J</math> ასახვა, რომელიც მოცემული <math>M</math> ფუნქციონალური სიმრავლის ყოველ <math>y(x)</math> ფუნქციას შეუსაბამებს რაიმე ნამდვილ რიცხვს: <math>J: M \rightarrow \mathbb{R}</math>.</p>
<p>2. მოცემული <math>f(x)</math> ფუნქციის <math>x</math> არგუმენტის ნაზრდი <math>\Delta x</math> ეწოდება სხვაობას მის რომელიმე ორ მნიშვნელობას შორის: <math>\Delta x = x - x_1</math>. თუ <math>x</math> დამოუკიდებელი ცვლადია,</p>	<p>2. მოცემული <math>J[y]</math> ფუნქციონალის <math>y(x)</math> არგუმენტის ნაზრდი ანუ <math>\delta y</math> ვარიაცია ეწოდება <math>M</math> ფუნქციონალური სივრცის რომელიმე ორ</p>

<p>მაშინ მისი დიფერენციალი ემთხვევა არგუმენტის ნაზრდს: <math>dx = \Delta x</math></p>	<p>ფუნქციას შორის სხვაობას: <math>\delta y = y - y_1</math></p>
<p>3. <math>f(x)</math> ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი, თუ <math>x</math> არგუმენტის მცირე ცვლილებას, შეესაბამება <math>f(x)</math> ფუნქციის მცირე ცვლილება.</p>	<p>3. <math>J[y]</math> ფუნქციონალს ეწოდება უწყვეტი, თუ <math>y(x)</math> ფუნქციის მცირე <math>\delta y</math> ცვლილებას, შეესაბამება <math>J[y]</math> ფუნქციონალის <math>\Delta J</math> მცირე ცვლილება.</p>
<p>4. <math>f(x)</math> ფუნქციას ეწოდება წრფივი, თუ <math>f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)</math>, სადაც <math>\alpha</math> და <math>\beta</math> ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ერთი ცვლადის წრფივი ფუნქციის მაგალითია: <math>f(x) = kx</math>.</p>	<p>4. <math>J[y]</math> ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი, თუ ადგილი აქვს ტოლობას:  <math>J[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha J[y_1] + \beta J[y_2]</math>,  სადაც <math>\alpha</math> და <math>\beta</math> ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.  წრფივი ფუნქციონალის მაგალითია: <math>J[y] = \int_a^b (p(x)y + q(x)y') dx</math>.</p>
<p>5. თუ <math>f(x)</math> ფუნქციის ნაზრდი: <math>\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)</math> შეგვიძლია წარმოვადგინოთ  <math>\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x</math> სახით, სადაც <math>A(x)</math> არაა დამოკიდებული <math>\Delta x</math>-ზე და <math>\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(x, \Delta x) = 0</math>, მაშინ ფუნქციას უწოდებენ დიფერენცირებადს, და ფუნქციის ნაზრდის წარმოდგენის წრფივ ნაწილს - ფუნქციის დიფერენციალს:  <math>\Delta f = A(x)\Delta x</math>, აქედან, თუ გავყოფთ <math>\Delta x</math>-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა <math>\Delta x \rightarrow 0</math>, მივიღებთ, რომ <math>A(x) = f'(x)</math> და მაშასადამე ფუნქციის დიფერენციალია:  <math>dy = f'(x)dx</math>.</p>	<p>5. თუ <math>J[y]</math> ფუნქციონალის ნაზრდი: <math>\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y]</math> შესაძლებელია, რომ წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:  <math>\Delta J = L(y(x), \delta y) + \beta(y(x), \delta y) \max \delta y </math>,  სადაც <math>L(y(x), \delta y)</math> წრფივი ფუნქციონალია <math>\delta y</math> ვარიაციის მიმართ, ხოლო <math>\lim_{\max \delta y  \rightarrow 0} \beta(y(x), \delta y) = 0</math>, მაშინ, ფუნქციონალის ნაზრდის წრფივ ნაწილს <math>\delta y</math> არგუმენტის (ფუნქციის ვარიაციის მიმართ), ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია ეწოდება და აღინიშნება <math>\delta J_1[y, \delta y]</math> სიმბოლოთი. მას ფრეშეს ძლიერ დიფერენციალს უწოდებენ.</p>
<p>6. მოცემული <math>f(x)</math> ფუნქციის დიფერენციალი შეგვიძლია განვმარ-</p>	<p>6. <math>J[y]</math> ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია შეგვიძლია განვსაზღვროთ სხვანაირადაც:</p>

<p>ტოთ სხვანაირადაც, მაგალითად ტოლობით:</p> $df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) _{\alpha=0}$	$\delta J[y, \delta y] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] _{\alpha=0}$ <p>მას გატოს სუსტი დიფერენციალი ეწოდება.</p>
<p><b>თეორემა:</b> თუ <math>J[y]</math> ფუნქციონალი დიფერენცირებადია <math>y</math> წერტილში, მაშინ მისთვის გატოს დიფერენციალიც არსებობს და ის ემთხვევა ფრემს დიფერენციალს.</p>	
<p>7. თუ დიფერენცირებადი <math>f(x)</math> ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს განსაზღვრის არის რაიმე <math>x = x_0</math> წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის ფრემს დიფერენციალი აუცილებლად ნულის ტოლია: <math>df = 0</math>.</p>	<p>7. თუ <math>J[y]</math> ფუნქციონალს გააჩნია ვარიაცია და ფუნქციონალი, მისი განსაზღვრის არის რაიმე <math>y = y_0</math> ფუნქციაზე აღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს, მაშინ ამ წერტილში მისი გატოს დიფერენციალი აუცილებლად ნულის ტოლია: <math>\delta J[y, \delta y] = 0</math>.</p>

ვაჩვენოთ, რომ დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის, დიფერენციალის ორივე 5. და 6. განსაზღვრება ეკვივალენტურია. მართლაც,

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)|_{\alpha=0} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}, \quad (3.31)$$

სადაც

$$u = x + \alpha \Delta x, \text{ მაშინ } \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\alpha=0} = f'(x) \text{ და } \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \Delta x, \quad (3.32)$$

მაშინ, ცხადია რომ  $df = f'(x)\Delta x$ , რაც ემთხვევა დიფერენციალის ცნობილ ფორმულას:  $df = f'(x)dx$ .

**განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, ფუნქციონალის ნაზრდისა და ვარიაციის საპოვნელად:**

**მაგალითი 1:** იპოვეთ  $J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$  ფუნქციონალის  $\Delta J$  ნაზრდი და  $\delta J$  ვარიაცია.

**ამოხსნა:** ა)  $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x) + \delta y]dx - \int_a^b y(x)dx$ , ცხადია, რომ მაშინ  $\Delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$ , რაც წარმოადგენს ფუნქციონალის

წრფივ ნაწილს, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ფუნქციონალის ნაზრდი ემთხვევა ფრემეს დიფერენციალს ანუ ფუნქციონალის  $\delta J$  ვარიაციას:

$$\delta J = \int_a^b \delta y(x) dx.$$

ბ) ამოვხსნათ ეს ამოცანა მეორე მეთოდით ანუ ვიპოვოთ გატოს დიფერენციალი:

$$\delta J[y, \delta y] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y] dx \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \delta y dx.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე მეთოდი ერთნაირ შედეგს იძლევა.

**მაგალითი 2:** იპოვეთ  $J[y(x)] = \int_a^b y^2(x) dx$  ფუნქციონალის  $\Delta J$  ნაზრდი და  $\delta J$  ვარიაცია.

**ამოხსნა:** ა)  $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x) + \delta y]^2 dx - \int_a^b y(x) dx$ , ცხადია, რომ მაშინ  $\Delta J = 2 \int_a^b y(x) \delta y(x) dx + \int_a^b (\delta y(x))^2 dx$ . ამ ნაზრდის წრფივი ნაწილი  $\delta y(x)$ -ის მიმართ, წარმოადგენს ფრემეს დიფერენციალს, რომელიც ამ შემთხვევაში, მოცემული ფუნქციონალის პირველ ვარიაციასაც წარმოადგენს ანუ  $\delta J = 2 \int_a^b y(x) \delta y(x) dx$ .

ბ) ეხლა, ვიპოვოთ ფუნქციონალის ვარიაცია ამ ფუნქციის გატოს დიფერენციალის მეშვეობით:

$$\delta J[y, \delta y] = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y] \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b [y(x) + \alpha \delta y]^2 dx \right|_{\alpha=0},$$
 ცხადია რომ

$\delta J[y, \delta y] = 2 \int_a^b y(x) \delta y dx$ , რაც ემთხვევა ფრემეს დიფერენციალსაც. ეს ბუნებრივია, რადგან ორივე მაგალითში განხილული ფუნქციონალი დიფერენცირებადია.

**მაგალითი 3:** იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx$  ფუნქციონალის  $\Delta J$  ნაზრდი და პირველი  $\delta J$  ვარიაცია.

**ამოხსნა:**

$$a) \Delta J = J[y + \delta y] - J[y] = \int_a^b [L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y')] dx.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის ფორმულით:

$$L(x, y + \delta y, y' + \delta y') - L(x, y, y') = \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + R(x, y, y', \delta y, \delta y'),$$

სადაც  $R(x, y, y', \delta y, \delta y')$  ტეილორის ფორმულის ნაშთია. თუ, ამ გაშლას შევიტანთ ფუნქციონალის ნაზრდის ფორმულაში, მივიღებთ, რომ

$\Delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \int_a^b R(x, y, y', \delta y, \delta y') dx$ . ცხადია, რომ ამ წარმოდგენის წრფივი ნაწილი იქნება პირველი ვარიაცია ანუ ფრემეს დიფერენციალი:  $\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx$ .

ბ) ეხლა, გამოვითვალოთ პირველი ვარიაცია გატოს დიფერენციალის ფორმულიდან გამომდინარე:

$\delta J[y, \delta y, \delta y'] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y'] \Big|_{\alpha=0}$ . ცხადია რომ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y'] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx$$

$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha}$ , სადაც  $u = y(x) + \alpha \delta y$  და  $v = y' + \alpha \delta y'$ . მაშინ  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u = y(x)$  და  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} v = y'$  ე.ი.

$$\delta J = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც ორივე მიდგომა ერთნაირად ეფექტურია.

ამ ზოგადი ფორმულიდან გამომდინარე, ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანები:

**მაგალითი 4.** იპოვეთ  $J[y] = \int_{-1}^1 (y' e^y + x y^2) dx$  ფუნქციონალის პირველ ვარიაცია.

**ამოხსნა:** წინა ამოცანის ფორმულიდან გამომდინარე, რადგან ამ შემთხვევაში,  $L(x, y(x), y'(x)) = y' e^y + x y^2$  გვექნება, რომ

$$\delta J = \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{-1}^1 [(y' e^y + 2xy) \delta y + e^y \delta y'] dx.$$

**მაგალითი 5.** იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$  ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია.

**ამოხსნა:** პირველი ვარიაციის საპოვნელად, გამოვიყენოთ გატოს დიფერენციალის ფორმულა:

$\delta J = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y', \dots, y^{(n)} + \alpha \delta y^{(n)}] \Big|_{\alpha=0}$ . ცხადია, რომ მაშინ ამოცანა 3-ის ანალოგიურად გვექნება ფორმულა:

$$\delta J = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) dx.$$



### 3.2.2. ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია

ბანახის სივრცის რომელიმე ორ ფუნქციაზე დამოკიდებულ  $J[x(t), y(t)]$  ფუნქციონალს ეწოდება **ორად წრფივი**, თუ ადგილი აქვს თანადობებს:

$$J[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t), y(t)] = \alpha_1 J[x_1(t), y(t)] + \alpha_2 J[x_2(t), y(t)],$$

$$J[x(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 J[x(t), y_1(t)] + \alpha_2 J[x(t), y_2(t)].$$

ორად წრფივ ფუნქციონალში, თუ დავუშვებთ რომ  $y = x$ , მაშინ მიღებულ  $J[x, x]$  ფუნქციონალს **კვადრატული ფუნქციონალი** ეწოდება.

სასრულ განზომილებიან სივრცეში განსაზღვრულ ორად წრფივ ფუნქციონალს **ორად წრფივი ფორმა** ეწოდება.

$J[x, x]$  კვადრატულ ფუნქციონალს ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ  $J[x, x] > 0$  ნებისმიერი არანულოვანი  $x(t)$  ფუნქციისათვის.

**მაგალითები:**

1)  $J[x(t), y(t)] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$  ფუნქციონალი, სადაც  $A(t)$  ცნობილი უწყვეტი ფუნქციაა, წარმოადგენს ორად წრფივ ფუნქციას, ხოლო

2)  $J[x(t), x(t)] = \int_a^b A(t)x^2(t)dt$  კვადრატული ფუნქციონალია  $C_0[a, b]$  სივრცეში და თუ დამატებით  $A(t) > 0$  ნებისმიერი  $t \in [a, b]$  ცვლადისათვის, მაშინ ეს კვადრატული ფუნქციონალი იქნება დადებითად განსაზღვრული;

3)  $J[x, x] = \int_a^b [A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)]dt$  არის გლუვი ფუნქციების  $C^1[a, b]$  სივრცეში განსაზღვრული კვადრატული ფუნქციონალი.

**განსაზღვრება:** ვთქვათ  $J[y]$  ბანახის სივრცეში განსაზღვრული ფუნქციონალია. ვიტყვით, რომ ფუნქციონალს აქვს **მეორე ვარიაცია**, თუ მისი ნაზრდი  $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y]$ , ტეილორის ფორმულით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta J = \delta y \cdot \delta J[y] + \frac{(\delta y)^2}{2!} \cdot \delta^2 J[y] + \frac{(\delta y)^3}{3!} \cdot \delta^3 J[y] + \dots \text{ ანუ}$$

$$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2} L_2[\delta y] + \beta \|\delta y\|. \quad (3.33)$$

სადაც  $\delta J = L_1[\delta y]$  პირველი ვარიაციაა, ხოლო  $\delta^2 J = L_2[\delta y]$  მეორე ვარიაცია და  $\lim_{\|\delta y\| \rightarrow 0} \beta = 0$ .

**მაგალითი:** მოცემულია ფუნქციონალი  $J[y] = \int_0^1 (xy^2 + (y')^3) dx$ , რომელიც განსაზღვრულია  $C^1[0; 1]$  ( $y(x)$  ფუნქცია უწყვეტია, პირველი რიგის წარმოებულთან ერთად) სივრცეში. ვიპოვოთ მისი **ნაზრდი**, **პირველი ვარიაცია** და **მეორე ვარიაცია**.

**ამოხსნა:** განვიხილოთ ფუნქციონალის ნაზრდი:

$$\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y] = \int_0^1 [x(y + \delta y)^2 + (y' + \delta y')^3 - xy^2 - (y')^3] dx, \quad \Delta J = 2 \int_0^1 (xy\delta y + 3(y')^2 \delta y) dx + \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx + \int_0^1 (\delta y')^3 dx$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციონალის პირველი ვარიაციაა:

$$\delta J = 2 \int_0^1 (xy\delta y + 3(y')^2 \delta y) dx,$$

ხოლო მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J = 2 \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2] dx.$$

მოცემული  $J[y]$  ფუნქციონალის მეორე ვარიაციის საპოვნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ **გატოს მეორე დიფერენციალის** ცნებაც. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha \delta y]$ , მაშინ ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 \Phi(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.34)$$

### 3.3. ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით

განვიხილოთ ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა:

შეისწავლეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციონალი:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (3.35)$$

რომელიც განსაზღვრულია ისეთ  $y(x) \in C^1[a; b]$  ფუნქციონალურ სიმრავლეში, რომლის ელემენტებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (3.36)$$

როგორც უკვე ვიცით: ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა ანუ ჩვენ შემთხვევაში გვექნება:

$$\delta J = \delta J[y, \delta y, \delta y'] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y']|_{\alpha=0} = 0. \text{ ცხადია რომ}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y'] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') = \frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \text{ სადაც } u = y(x) + \alpha \delta y \text{ და } v = y' + \alpha \delta y'. \text{ მაშინ } \lim_{\alpha \rightarrow 0} u = y(x) \text{ და } \lim_{\alpha \rightarrow 0} v = y' \text{ ე.ი.}$$

$$\delta J = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial \alpha} L(x, y(x) + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y') dx = \int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx.$$

მივიღეთ, რომ ამ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0. \quad (3.37)$$

ამ პირობიდან შესაძლებელია გადავიდეთ შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებაზე, თუმცა, ამ ამოცანის გადასაწყვეტად დაგვჭირდება ორი დამხმარე თეორემა ანუ ლემა:

**1. ლაგრანჟის ლემა:** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a; b]$  სეგმენტზე და ნებისმიერი  $\eta(x) \in C^\infty[a; b]$  ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  პირობებს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = 0, \quad (3.38)$$

მაშინ  $f(x) \equiv 0$ .

**დამტკიცება:** დავუშვათ, რომ რომელიღაც  $x_0 \in [a; b]$  წერტილში  $f(x_0) \neq 0$ . ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ  $f(x_0) > 0$ , მაშინ ამ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, მოიძებნება მისი შემცველი ისეთი  $[c; d] \subset [a; b]$ , რომ ამ შუალედში  $f(x) > 0$ . ადგილი შესამოწმებელია რომ

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

ფუნქცია წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე ჩათვლით, ამიტომ

$$\eta(x) = \varphi(x - c) \varphi(d - x), \quad (3.40)$$

ფუნქცია, აგრეთვე წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე ჩათვლით და ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ  $(c; d)$  ინტერვალში. მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x) \eta(x) dx = \int_c^d f(x) \eta(x) dx > 0, \quad (3.41)$$

რადგან ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უწყვეტია და დადებითი. ე.ი. იმის დაშვება რომ  $f(x)$  ფუნქცია არ უდრის ნულს რომელიმე წერტილში, არღვევს ლემის დაშვების პირობებს, რაც იმას ნიშნავს რომ თუ, ადგილი აქვს ლემის პირობებს, მაშინ  $f(x) \equiv 0$  რ.დ.გ.

**P.S.** ლაგრანჟის დამტკიცებული ლემა ადვილად ზოგადდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებზეც. მაგალითად, ორი ცვლადის  $f(x,y)$  ფუნქციის შემთხვევაში: თუ  $f(x,y)$  უწყვეტია შემოსაზღვრულ  $G \in \mathbb{R}^2$  სიმრავლეში და ნებისმიერი  $\eta(x,y) \in C^\infty(G)$  ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია  $\bar{G}$  ჩაკეტილ სიმრავლეზე და ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს, ამ არის  $\partial \bar{G}$  საზღვარზე, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\iint f(x,y) \eta(x,y) dx dy = 0, \quad (3.42)$$

მაშინ  $f(x,y) \equiv 0$  ამ  $\bar{G}$  სიმრავლეზე.

ეს თეორემა ანალოგიურად მტკიცდება, მხოლოდ საცდელ ფუნქციად უნდა განვიხილოთ  $\varphi(r^2 - x^2 - y^2)$  ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია  $r^2 = x^2 + y^2$  წრის გარეთ.

**2.დიუბუა-რაიმონის ლემა:** ვთქვათ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები უწყვეტია  $[a; b]$  შუალედში და ნებისმიერი  $\eta(x) \in C^\infty[a; b]$  ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  პირობებს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b (f(x)\eta'(x) + g(x)\eta(x)) dx = 0, \quad (3.43)$$

მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია  $[a; b]$  შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f'(x) - g(x) = 0. \quad (3.44)$$

ამ თეორემის დამტკიცება საკმაოდ შრომატევადია. მითუმეტეს, რომ ჩვენი ამოცანაა ვისწავლოთ ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანების ამოხსნა და არა რთული თეორემების დამტკიცება. ამიტომ გადავიდეთ აღნიშნული თეორემის გამოყენებაზე.

ჩვენ უკვე გვქონდა ვარიაციულ აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა (3.37):

$$\int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0. \quad (3.44)$$

ამ ტოლობისათვის გამოვიყენოთ დიუბუა-რაიმონის თეორემა.

ტოლობა (3.44) ძალაშია ნებისმიერი დასაშვები  $\delta y = \eta(x)$  ვარიაციისათვის, სადაც  $\delta y \in C^1[a; b]$  და  $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ . ამ შემთხვევაში,  $f(x) = \frac{\partial L}{\partial y'}$  და  $g(x) = \frac{\partial L}{\partial y}$ . მაშასადამე, დიუბუა-რაიმონის თეორემის ძალით, გვექნება ტოლობა:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (3.45)$$

ამ ტოლობას ეილერის განტოლება ეწოდება (ეს განტოლება პირველად გამოქვეყნდა 1744 წელს). ამ განტოლების გლუვ ამონახსნებს (3.35) ფუნქციონალის ექსტრემალეები ეწოდება.

ამრიგად, ფუნქციონალის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ მის ექსტრემალებს შორის.

ფუნქციის სრული წარმოებულის ფორმულის გამოყენებით, განტოლება (3.45) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0, \quad (3.46)$$

მეორე რიგის დიფერენციალური (3.46) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ მუდმივზე, რომელთა შესარჩევად უნდა გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები:

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (3.47)$$

**თუმცა ამ ამოცანას ყოველთვის როდი აქვს ამონახსნი.**

**P.S.** აქ ისეთივე სიტუაცია გვაქვს, როგორც ერთი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმების პოვნისას, როცა ექსტრემუმის წერტილებს ვეძებთ მის სტაციონარულ წერტილებს შორის.

### 3.3.1. ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

**ამოცანა 1.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^2 ((y')^2 - 2xy) dx, \quad (3.48)$$

თუ  $y(1) = 0$  და  $y(2) = -1$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = (y')^2 - 2xy$  ამიტომ, ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $y'' + x = 0$ . ამ განტოლების **ზოგადი ამონახსნია:**  $y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$ . მუდმივებს ვპოულობთ შესაბამისი სასაზღვრო პირობებიდან:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{6} \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$y = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}.$$

**განვიხილოთ ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა Mathcad პროგრამის ბაზაზე.**

ამისათვის (3.48) ფორმულაში შემავალ ინტეგრალში, საძიებელი  $y$  ფუნქცია წარმოვადგინოთ მრავალწევრის სახით ანუ ვეძებოთ შემდეგი სახით:  $y = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ , მაშინ  $J[y]$  ფუნქციონალი გადაიქცევა მრავალი ცვლადის  $J(\alpha)$  ფუნქციად ანუ გვექნება შემდეგი სახის მიახლოების ფუნქცია:

$$J(\alpha) = \int_1^2 \left( \left( \sum_{i=1}^n i \alpha_i x^{i-1} \right)^2 - 2x \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \right) dx$$

მაშინ, შესაბამის **Mathcad** პროგრამას ექნება სახე:

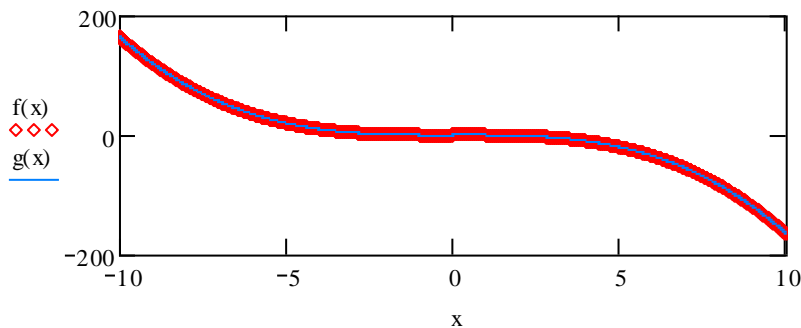
```

n := 3
J(α) := ∫12 [ [ ∑i=1n (i·αi·xi-1) ]2 - 2·x·∑i=0n (αi·xi) ] dx
j := 0..3
αj := 1
Given
∑i=0n (αi·1i) = 0 ∑i=0n (αi·2i) = -1
S := Minimize(J, α)
S = ( 0
      0.167
      0
      -0.167 )
α := S

```

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0 \\ -0.167 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^n (\alpha_i x^i) g(x) := \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$$



როგორც ვხედავთ, მიახლოებითი ამონახსნი კრგად უახლოვდება ზუსტ ამონახსნს.

ანალოგიურად ამოიხსნება ვარიაციული აღრიცხვის ყველა უმარტივესი ამოცანა.

**ამოცანა 2.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2) dx, \quad (3.49)$$

თუ  $y(0) = 0$  და  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = (y')^2 - y^2$  ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $y'' + y = 0$ . ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ:  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 1$ . მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება:

$$y = \sin x.$$

**ამოცანა 3.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 12xy) dx, \quad (3.50)$$

თუ  $y(0) = 0$  და  $y(1) = 1$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = (y')^2 + 12xy$  ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $y'' - 6x = 0$ . ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:  $y = x^3 + C_1x + C_2$ . თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ:  $C_1 = 0, C_2 = 0$ . მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება:  $y = x^3$ .

**ამოცანა 3.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^3 (3x - y)y dx, \quad (3.51)$$

თუ  $y(1) = 1$  და  $y(3) = 4.5$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = (3x - y)y$ , ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $3x - 2y = 0$ . აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ  $y = 1.5x$ . რადგან ეს ამონახსნი არ აკმაყოფილებს  $y(1) = 1$  სასაზღვრო პირობას, ამ ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.

**ამოცანა 4.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^{2\pi} ((y')^2 - y^2) dx, \quad (3.52)$$

თუ  $y(0) = 1$  და  $y(2\pi) = 1$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = (y')^2 - y^2$ , ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $y'' + y = 0$ . ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ:  $y = \cos x + C \sin x$ , სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია. მაშასადამე, ამ ვარიაციულ ამოცანას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.

**ამოცანა 5.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^2 ((y')^2 + 2yy' + y^2) dx, \quad (3.53)$$

თუ  $y(1) = 1$  და  $y(2) = 0$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = (y')^2 + 2yy' + y^2$ , ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $y'' - y = 0$ . მისი ზოგადი ამონახსნია:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ . მუდმივი კოეფიციენტების საპოვნელად ვისარგებლოთ



სასაზღვრო პირობებით, მაშინ გვექნება სისტემა: 
$$\begin{cases} C_1 e + \frac{C_2}{e} = 1 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{e^3}{1-e^4} \\ C_2 = \frac{e}{1-e^4} \end{cases}; \text{ მაშასადამე გვექნება ამონახსნი: } y = -\frac{e^3}{1-e^4} e^x + \frac{e}{1-e^4} e^{-x}.$$

**P.S.** უმეტეს წილად, ეილერის განტოლება გვადლევს ზუსტ პასუხს ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესახებ. თუ, ფუნქციონალის შინაარსიდან გამომდინარეობს რომ, ამოცანას აქვს ამონახსნი და ეილერის განტოლებას აქვს ერთადერთი ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს, მაშინ ეს ექსტრემალი იქნება ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანის ამონახსნი.

**ამოცანა 6.** რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^2 (x(y')^3 - 3y(y')^2) dx, \quad (3.54)$$

თუ  $y(0) = 4$  და  $y(2) = 6$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში,  $L(x, y, y') = x(y')^3 - 3y(y')^2$ , ამიტომ ეილერის  $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$  განტოლებას ექნება სახე:  $y''(xy' - y) = 0$ . ეს დიფერენციალური განტოლება გვადლევს ორ განტოლებას:  $y'' = 0$  და  $xy' - y = 0$ . პირველი მათგანის ზოგადი ამონახსნია:  $y = C_1 x + C_2$ , ხოლო მეორესი -  $y = Cx$ . მეორე ამონახსნი არის პირველის ქვესიმრავლე, ამიტომ მოცემული ამოცანის ყველა ექსტრემალი მოიცემა მხოლოდ პირველი ზოგადი  $y = C_1 x + C_2$  ამონახსნით. მუდმივებს ვპოულობთ სასაზღვრო პირობებიდან.

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 4 \\ C_1 \cdot 2 + C_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

მაშასადამე, მოცემული ამოცანის ამონახსნი იქნება  $y = x + 4$  ფუნქცია.

თუ  $y(x)$  ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია და  $L''_{y'y'} \neq 0$ , მაშინ ეილერის განტოლებისათვის კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო, თუ  $L''_{y'y'} = 0$  (ინტეგრანტი გადაგვარებულია), მაშინ ეილერის განტოლება ან პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, ან ალგებრული განტოლება.

**დაისმის კითხვა:** რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს  $L(x, y, y')$  ფუნქცია, რომ  $y(x)$  ამონახსნი იყოს ორჯერ დიფერენცირებადი?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა:

ვთქვათ  $y(x)$  არის ეილერის განტოლების ამონახსნი. თუ  $L(x, y, y')$  ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით, მაშინ  $XOY$  სიბრტყის ყველა წერტილში სადაც  $L''_{y'y'} \neq 0$ , ექსტრემალი  $y(x)$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადია.

ეილერის განტოლება იშვიათად იხსნება კვადრატურებში, რადგან არსებობს ისეთი ინტეგრალები, რომლებიც არ გამოისახება ელემენტარული ფუნქციებით. ასეთ შემთხვევაში, იყენებენ მიახლოებით მეთოდებს.

### 3.3.2. ეილერის განტოლების კერძო შემთხვევები

თუ მოცემული გვაქვს ფუნქციონალი:  $J[y] = \int_a^b L(\cdot) dx$  მაშინ, ინტეგრალქვეშა  $L(\cdot)$  ფუნქციას ინტეგრანტს უწოდებენ.

განვიხილოთ ეილერის განტოლების სხვადასხვა ტიპები, ინტეგრანტის სახის მიხედვით.

1. ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული  $y'$  წარმოებულზე. ასეთ შემთხვევაში  $J[y] = \int_a^b L(x, y) dx$ , მაშინ  $\frac{\partial L}{\partial y'} \equiv 0$ . აქედან გამომდინარე, ეილერის განტოლებას ექნება სახე:  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$  ანუ ალგებრული განტოლებაა  $y(x)$  ფუნქციის მიმართ. მიღებული ექსტრემალები შეიძლება არც კი აკმაყოფილებდნენ სასაზღვრო პირობებს.

მაგალითი: იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b y^3 dx$  ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ  $y(a) = y_1$  და  $y(b) = y_2$ .

ამოხსნა: ეილერის განტოლებას აქვს სახე:  $3y^2 = 0$ . ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი  $y \equiv 0$  ამონახსნი. აქედან გამომდინარე, თუ სასაზღვრო პირობებიდან, ერთი მაინც  $y_1$  და  $y_2$  რიცხვებიდან, განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.

2. ინტეგრანტი წრფივადაა დამოკიდებული  $y'$  წარმოებულზე. ამ ტიპის ფუნქციონალებისათვის  $J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$  ინტეგრანტს აქვს სახე:

$$L(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y)y'. \quad (3.55)$$

მაშინ ცხადია, რომ  $L''_{y'y'} \equiv 0$ . ნათელია, რომ ეს შემთხვევა მოიცავს პირველ შემთხვევასაც. ასეთ ფუნქციონალებს, გადაგვარებულს უწოდებენ. მაშინ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:

$$Q'_x + Q'_y y' - P'_y - Q'_y y' = 0 \text{ ანუ } Q'_x - P'_y = 0. \quad (3.56)$$

ეს განტოლება, როგორც წინა შემთხვევაში, ალგებრულია. ამიტომ, მისმა ამონახსნმა შეიძლება ვერ დააკმაყოფილოს სასაზღვრო პირობები და ასეთ შემთხვევაში, ვარიაციულ ამოცანას არ ექნება ამონახსნი.

**P.S.** თუ  $P dx + Q dy$  წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, მაშინ ეილერის  $Q'_x - P'_y = 0$  განტოლება იგივეობას წარმოადგენს და მაშასადამე, ნებისმიერი  $y(x) \in C^1[a; b]$  ფუნქცია იქნება მისი ამონახსნი ანუ ექსტრემალი.

3. ინტეგრანტი დამოკიდებულია მხოლოდ  $y'$  წარმოებულზე. ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალს აქვს სახე:  $J[y] = \int_a^b L(y') dx$ , მაშინ ცნობილი  $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$  ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს:  $y'' = 0$ . მის ზოგად ამონახსნს აქვს წრფივი ფუნქციის სახე ნებისმიერი ორი მუდმივით:  $y = C_1 x + C_2$ .

**მაგალითი:** იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b (y' - (y')^3) dx$  ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ  $y(a) = y_1$  და  $y(b) = y_2$ .

**ამოხსნა:** ეილერის განტოლებას აქვს სახე:  $y'' = 0$ . მის ზოგად ამონახსნს აქვს წრფივი ფუნქციის სახე ნებისმიერი ორი მუდმივით:

$y = C_1 x + C_2$ . ამ მუდმივების განსაზღვრა წარმოებს სასაზღვრო პირობებიდან და გვექნება ექსტრემალი:

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{b - a} (x - a) + y_1.$$

განვიხილოთ მეორე მაგალითი:

იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}, \quad (3.57)$$

თუ  $y(a) = A$  და  $y(b) = B$ .

**ამოხსნა:** ეს ფუნქციონალი განსაზღვრავს წირის სიგრძეს  $(a; A)$  და  $(b; B)$  წერტილებს შორის. გეომეტრიულად ესაა ამოცანა ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილის პოვნაზე. ეილერის განტოლებას აქვს სახე:  $y'' = 0$ , ზოგადი ამონახსნია:  $y = C_1x + C_2$ . სასაზღვრო პირობებიდან ვპოულობთ ექსტრემალს (წრფის მონაკვეთს) ამ წერტილებს შორის:

$$y = \frac{B-A}{b-a}(x - a) + A.$$

**4. ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული  $y$  ფუნქციაზე.** ამ შემთხვევაში ინტეგრანტს აქვს სახე:  $L(x, y')$ , ხოლო ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს:  $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$  ანუ

$$y''(x)L''_{y'y'} + L''_{xy'} = 0. \quad (3.58)$$

ეს შემთხვევა, თავის თავში მოიცავს წინა შემთხვევას.

**მაგალითი:** იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b ((y')^2 + 2xy')dx$  ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ  $y(a) = y_1$  და  $y(b) = y_2$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $L(x, y') = (y')^2 + 2xy'$ . შესაბამისად, ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს:  $y'' + 1 = 0$  ანუ  $y = -\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$ . ნებისმიერი  $C_1$  და  $C_2$  მუდმივები, ცალსახად განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან ყველა შემთხვევაში.

**5. ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული  $x$  არგუმენტზე.** ასეთ შემთხვევაში, ინტეგრანტს აქვს სახე:  $L(y, y')$ , ხოლო ეილერის განტოლება, ამ შემთხვევაში, გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} - L'_y = 0. \quad (3.59)$$

თუ გავამრავლებთ ამ განტოლებას  $y'$  წარმოებულზე, მივიღებთ რომ (3.57) შეგვიძლია გადავწეროთ (3.59) ფორმით ანუ

$$\frac{d}{dx}(y'L'_{y'} - L) = 0,$$

მაშინ მივიღებთ, რომ შეგვიძლია ვიპოვოთ პირველი ინტეგრალი:

$$y'L'_{y'} - L = C_1. \quad (3.60)$$

**მაგალითი:** იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b ((y')^2 + yy')dx$  ფუნქციონალის ექსტრემალები.

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $L(y, y') = (y')^2 + yy'$ . შესაბამისად, ეილერის (3.57) განტოლება მიიღებს სახეს:

$2y'' + y' - y' = 0$  ანუ  $y'' = 0$ . მაშინ ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია ორ მუდმივზე:  $y = C_1x + C_2$ .

**მაგალითი:** იოჰან ბერნულის ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ.

იპოვეთ  $J[y] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min$ , თუ  $y(0) = 0$  და  $y(b) = y_B$ .

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $L(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$ , მაშინ ეილერის  $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} - L'_y = 0$  განტოლების პირველი ინტეგრალი  $y'L'_{y'} - L = C_1$  მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C_1. \quad (3.61)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C_1. \quad (3.62)$$

თუ (3.62) ტოლობას ავიყვანთ კვადრატში და მამრავლს  $2g$  შევიყვანოთ მუდმივში, მივიღებთ რომ

$$y(1 + (y')^2) = C, \quad (3.63)$$

სადაც  $C = \frac{1}{2gC_1^2}$ .

ამრიგად, მივიღეთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება არაცხადად მოცემული წარმოებულობით. ამ განტოლების ამოხსნა ხელსაყრელია პარამეტრის შემოყვანის გზით.

დავუშვათ, რომ  $y' = \frac{dy}{dx} = \cot \beta$ , მაშინ  $1 + (y')^2 = \frac{1}{(\sin \beta)^2}$  ანუ (3.63)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$y = \frac{C}{1+(y')^2} = C(\sin \beta)^2 = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\beta). \quad (3.64)$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C \sin \beta \cos \beta d\beta}{\cot \beta} = 2C(\sin \beta)^2 d\beta = C(1 - \cos 2\beta) d\beta. \quad (3.65)$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$x = C \left( \beta - \frac{\sin 2\beta}{2} \right) + C_0. \quad (3.66)$$

გადავწეროთ ეს ფორმულა შემდეგი სახით:

$$x = \frac{C}{2}(2\beta - \sin 2\beta) + C_0, \quad (3.67)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$2\beta = t, \quad (3.68)$$

და გავითვალისწინებთ, რომ  $y = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C_0 = 0$ , პირობას. მივიღებთ, რომ

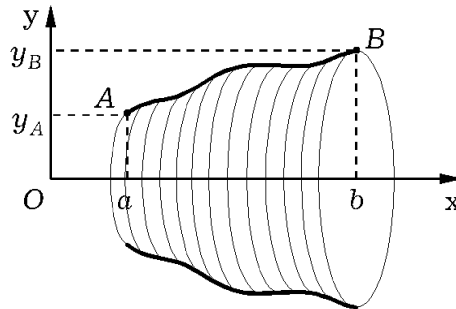
$$x = \frac{c}{2}(t - \sin t), \quad (3.69)$$

$$y = \frac{c}{2}(1 - \cos t). \quad (3.70)$$

ამრიგად,  $XOY$  სიბრტყეში მივიღეთ ციკლოიდის პარამეტრული განტოლება, რომელსაც აღწერს  $\frac{c}{2}$  რადიუსის მქონე წრეწირი  $XOY$  სიბრტყეში გორვისას, ისე რომ, ციკლოიდა გადის  $y(b) = y_B$  წერტილზე.

**მაგალითი:** ამოცანა მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირის პოვნის შესახებ. იპოვეთ  $[a; b]$  მონაკვეთზე განსაზღვრული ისეთი გლუვი ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$y(a) = y_A, \quad y(b) = y_B. \quad (3.71)$$



ნახ. 3.4. მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირი

და ამ ფუნქციის გრაფიკის  $OX$  ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი არის მინიმალური.

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min. \quad (3.72)$$

**ამოხსნა:** როგორც ვხედავთ, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება (ინტეგრანტი)  $L(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$  სახისაა. მაშასადამე, მას აქვს პირველი ინტეგრალი:  $y'L'_{y'} - L = C_1$ , რომელიც ჩვენი ამოცანის პირობებში მიიღებს სახეს:

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1+(y')^2} = C_1. \quad (3.73)$$

თუ გავამარტივებთ ამ ინტეგრალს, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C. \quad (3.74)$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$y' = \sinh t \Rightarrow y = C \cosh t. \quad (3.75)$$

მაშინ

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C \sinh t dt}{\sinh t} = C dt \Rightarrow x = Ct + C_0. \quad (3.76)$$

მაშასადამე, საძიებელი მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირი მიიღება იმ წირის ბრუნვით აბსცისთა ღერძის გარშემო, რომლის პარამეტრული განტოლებაა:

$$\begin{cases} x = Ct + C_0 \\ y = C \cosh t \end{cases} \quad (3.77)$$

თუ ამ პარამეტრული განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ  $t$  პარამეტრს, მაშინ მივიღებთ საძიებელი წირის – ექსტრემალის განტოლებას:

$$y = C \cosh \frac{x-C_0}{C}. \quad (3.78)$$

ასეთ წირებს **კატენოიდებს** უწოდებენ. უცნობი მუდმივები განისაზღვრებიან სასაზღვრო  $y(a) = y_A$ ,  $y(b) = y_B$  პირობებიდან. სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე, ამოცანას შეიძლება ქონდეს ერთი, ორი ან საერთოდ არ ქონდეს ამონახსნი.

### 3.3.3 რამდენიმე, ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი

განვიხილოთ ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია  $x$  ცვლადის ორ სხვადასხვა  $y_1$  და  $y_2$  ფუნქციაზე:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx, \quad (3.79)$$

სადაც  $L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$  ხუთი ცვლადის ორჯერ, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა.  $y_1, y_2$  ფუნქციათა განსაზღვრის არეა  $C^1[a; b]$  ფუნქციონალური სიმრავლის, ისეთი ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:  $y_1(a) = y_{11}$ ,  $y_1(b) = y_{12}$ ,  $y_2(a) = y_{21}$ ,  $y_2(b) = y_{22}$ .

რადგან  $y_1, y_2$  ფუნქციები სეგმენტის ბოლოებზე იღებენ ფიქსირებულ მნიშვნელობებს, მივიღებთ რომ  $\delta y_1$  და  $\delta y_2$  დასაშვები ვარიაციები არიან  $C^1[a; b]$  კლასის ფუნქციები და აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:  $\delta y_1(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(a) = \delta y_2(b) = 0$ .

ფუნქციათა ნებისმიერი  $\delta y_1$  და  $\delta y_2$  ვარიაციებისათვის განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = J[y_1 + \alpha_1 \delta y_1, y_2 + \alpha_2 \delta y_2]. \quad (3.80)$$

ცხადია, რომ თუ  $y_1, y_2$  ფუნქციებისათვის  $J[y_1, y_2]$  ფუნქციონალი აღწევს თავის ექსტრემუმს, მაშინ  $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$  ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი  $(0; 0)$  წერტილში. ამ ფუნქციისათვის ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, ადგილი აქვს ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0. \quad (3.81)$$

თუ გამოვიყენებთ ლაიბნიცის ფორმულას განსაზღვრული ინტეგრალის პარამეტრით გაწარმოების შესახებ, მაშინ (3.81) პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b (L'_{y_1} \delta y_1 + L'_{y'_1} \delta y'_1) dx = 0, \quad (3.82)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b (L'_2 \delta y_2 + L'_{y'_2} \delta y'_2) dx = 0. \quad (3.83)$$

დიუბუა-რაიმონის თეორემიდან გამომდინარე (3.82),(3.83) ფორმულები შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_1} - L'_{y_1} = 0, \quad (3.84)$$

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_2} - L'_{y_2} = 0. \quad (3.85)$$

**P.S.** ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი (3.84),(3.85) პირობები, შეიძლება განზოგადდეს ერთი ცვლადის  $n$  რაოდენობის ფუნქციებზე დამოკიდებული ფუნქციონალისთვის.

მართლაც, თუ მოცემული გვაქვს  $n$  რაოდენობის ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx, \quad (3.86)$$

სადაც  $L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა და  $J[y_1, \dots, y_n]$  აღწევს ექსტრემუმს  $y_1, \dots, y_n \in C^1[a; b]$  ფუნქციათა სისტემაზე, მაშინ ფუნქციათა ეს სისტემა, აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_i} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.87)$$

ამ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი გლუვი ამონახსნი  $J$  ფუნქციონალის ექსტრემალს წარმოადგენს. (3.87) განტოლებათა სისტემას ეილერის განტოლებები ეწოდებათ.



მაგალითი: იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2) dx, \quad (3.88)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში,

$$L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2.$$

შესაბამის ეილერის განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} L'_{y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ \frac{d}{dx} L'_{y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}; \quad (3.89)$$

ანუ

$$\begin{cases} y_1''(x)L''_{y_1'y_1'} + y_1'(x)L''_{y_1y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ y_2''(x)L''_{y_2'y_2'} + y_2'(x)L''_{y_2y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}; \quad (3.90)$$

ჩვენი ამოცანისათვის, ეს სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} 2y_1'' + 2y_2 - 4y_1 = 0 \\ -2y_2'' + 2y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2'' - 2y_2'' + y_2 = 0 \\ y_1 = y_2'' \end{cases}. \quad (3.91)$$

(3.91) სისტემის პირველი ტოლობა, ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებაა მუდმივი კოეფიციენტებით. ამიტომ მისი ამონახსნი იქნება:

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}, \quad (3.92)$$

თუ ჩავსვამთ (3.92) ამონახსნს (3.91) სისტემის მეორე განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 (2e^x + x e^x) + C_3 e^{-x} + C_4 (x e^{-x} - 2e^{-x}), \quad (3.93)$$

ანუ

$$y_1 = e^x (C_1 + 2C_2) + e^{-x} (C_3 - 2C_4) + x (C_2 e^x + C_4 e^{-x}). \quad (3.94)$$

### 3.3.4. უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალი მაღალი რიგის წარმოებულებით

ვთქვათ  $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია  $n + 2$ -ჯერ. განვიხილოთ  $y(x) \in C^1[a; b]$  სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციონალი:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx, \quad (3.95)$$

რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$y(a) = y_{10}, y'(a) = y_{11}, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{1, n-1}; \quad (3.96)$$

$$y(b) = y_{20}, y'(b) = y_{21}, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_{2, n-1}. \quad (3.97)$$

ასეთ შემთხვევაში,  $y$  ფუნქციისთვის დასაშვები ვარიაცია შეიძლება იყოს ნებისმიერი  $\delta y \in C^1[a; b]$  ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$\delta y(a) = 0, \delta y'(a) = 0, \dots, \delta y^{(n-1)}(a) = 0; \quad (3.98)$$

$$\delta y(b) = 0, \delta y'(b) = 0, \dots, \delta y^{(n-1)}(b) = 0. \quad (3.99)$$

ვთქვათ,  $y(x)$  ფუნქცია ანიჭებს ექსტრემუმს  $J[y]$  ფუნქციონალს. თუ ავირჩევთ ნებისმიერ დასაშვებ  $\delta y$  ვარიაციას და განვიხილავთ ფუნქციას:

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha \delta y] = \int_a^b L(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}) dx$$

მივიღებთ რომ  $\varphi(\alpha)$  ფუნქციასაც აქვს ექსტრემუმი  $\alpha = 0$  წერტილში, რადგან ის დიფერენცირებადია ამ წერტილში, გვექნება ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა:  $\varphi'(0) = 0$  ანუ

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha \delta y] = 0, \quad (3.100)$$

ცხადია, რომ

$$\varphi'(0) = \int_a^b (L'_{y'} \delta y + L'_{y''} \delta y' + \dots + L'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx = 0. \quad (3.101)$$

დავუშვათ, რომ  $y(x) \in C^{2n}[a; b]$ , მაშინ თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს ((3.102) განტოლებაში ერთხელ, (3.103) განტოლებაში ორჯერ და ა.შ.) და სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$\int_a^b L'_{y'} \delta y' dx = - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} L'_{y'} \right) \delta y dx, \quad (3.102)$$

$$\int_a^b L'_{y''} \delta y'' dx = \int_a^b \left( \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} \right) \delta y dx, \quad (3.103)$$

...

$$\int_a^b L'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = (-1)^n \int_a^b \left( \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} \right) \delta y dx. \quad (3.104)$$

თუ ამ ტოლობებს შევიტანთ (3.101) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^b \left( L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} \right) \delta y dx = 0. \quad (3.105)$$

ეს განტოლება ძალაშია ნებისმიერი, უსასრულოდ დიფერენცირებადი  $\delta y$  ფუნქციისათვის, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობებს იღებს  $[a; b]$  სეგმენტის ბოლოებზე. მაშინ, **ლაგრანჟის თეორემის თანახმად**, ექსტრემალეების საპოვნელად, გვექნება **ეილერ-პუასონის განტოლება**:

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} = 0. \quad (3.106)$$

ამ განტოლების  $2n$ -ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად ამონახსნებს,  $J[y]$  ფუნქციონალის ექსტრემალეები ეწოდებათ.

**P.S.** ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალი აღწევს ექსტრემუმს ექსტრემალეებზე.

**მაგალითი:** იპოვეთ  $J[y] = \int_a^b ((y''')^2 + y^2 - 2yx^3) dx$  ფუნქციონალის ექსტრემალეები.

**ამოხსნა:** ჩავწეროთ  $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = (y''')^2 + y^2 - 2yx^3$  ფუნქციიდან გამომდინარე, მოცემული  $J[y]$  ფუნქციონალისათვის ეილერ-პუასონის განტოლება:

$$-2y^{IV} + 2y - 2x^3 = 0. \quad (3.107)$$

ეს არის მუდმივ კოეფიციენტებიანი, არაერთგვაროვანი, წრფივი დიფერენციალური განტოლება სპეციალური სახის მარჯვენა ნაწილით. მის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(x) = x^3 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left( C_3 e^{\frac{x}{2}} + C_4 e^{-\frac{x}{2}} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \left( C_5 e^{\frac{x}{2}} + C_6 e^{-\frac{x}{2}} \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x. \quad (3.108)$$

### 3.3.5. მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალები

ა) განვიხილოთ ორი ცვლადის  $z(x, y)$  ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[z] = \iint L(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy, \quad (3.109)$$

ვთქვათ,  $z(x, y) \in M \subset C^2(\bar{G})$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, განსაზღვრული  $G \subset \mathbb{R}^2$  არეზე. გამოვიკვლიოთ (3.109) ფუნქციონალი ექსტრემუმებზე, თუ ორჯერადი ინტეგრება ხდება

$D \subset \bar{D} \subset G$  არეზე, ხოლო  $L(x, y, z, z'_x, z'_y)$  ინტეგრანტი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა თავისი არგუმენტების მიმართ. ამ ფუნქციონალის განსაზღვრის არედ განვიხილოთ  $M$  ფუნქციონალური სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან შემგარი ქვესიმრავლე, რომლებიც მოცემული  $D$  არის საზღვარზე იღებენ ცნობილ  $\varphi(x, y)$  მნიშვნელოებს ანუ

$$z(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y). \quad (3.110)$$

ამ შემთხვევაში, ფუნქციის დასაშვები ვარიაციები იქნებიან, ისეთი  $\delta z(x, y) \in C^2(G)$  ფუნქციები, რომლებიც  $D$  არის  $\partial D$  საზღვარზე იღებენ ნულის ტოლ მნიშვნელობებს.

როგორც ვიცით, ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა მისი პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა:

$$\delta J[z] = 0. \quad (3.111)$$

ჩვენ შემთხვევაში, გვექნება რომ:

$$\delta J[z] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[z + \alpha \delta z] \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (3.112)$$

ეს ფუნქციონალი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\delta J[z] = \iint (L'_z \delta z + L'_p \delta p + L'_q \delta q) dx dy = 0, \quad (3.113)$$

სადაც

$$p = z'_x \text{ და } q = z'_y. \quad (3.114)$$

ცხადია, რომ თუ გამოვიყენებთ ნამრავლის წარმოებულის გამოსათვლელ ფორმულას, მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial x} (L'_p \delta z) = \frac{\partial L'_p}{\partial x} \delta z + L'_p \delta p, \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (L'_q \delta z) = \frac{\partial L'_q}{\partial y} \delta z + L'_q \delta q. \quad (3.116)$$

ამ ფორმულებიდან გამოვსახოთ და გარდავქმნათ (3.113) ფორმულის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ბოლო ორი წევრი შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \iint (L'_p \delta p + L'_q \delta q) dx dy &= \iint \left( \frac{\partial}{\partial x} (L'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y} (L'_q \delta z) \right) dx dy - \\ &- \iint \left( \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy. \end{aligned} \quad (3.117)$$

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას:

$$\oint (P dx + Q dy) = \iint \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.118)$$

სადაც მარცხენა წირითი ინტეგრალი ვრცელდება  $\partial D$  საზღვარზე, ხოლო მარჯვენა ორჯერადი ინტეგრალი კი  $D$  არეზე; მაშინ

$$\iint \left( \frac{\partial}{\partial x} (L'_p \delta z) + \frac{\partial}{\partial y} (L'_q \delta z) \right) dx dy = \oint \delta z (L'_p dy - L'_q dx) = 0, \quad (3.119)$$

რადგან  $\delta z|_{\partial D} \equiv 0$ . ცხადია, რომ აქ  $Q = L'_p \delta z$  და  $P = -L'_q \delta z$ . მივიღებთ, რომ

$$\iint (L'_p \delta p + L'_q \delta q) dx dy = - \iint \left( \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy. \quad (3.120)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი (3.113) პირობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\iint \left( L'_z - \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right) \delta z dx dy = 0. \quad (3.121)$$

რადგან (3.121) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება (ინტეგრანტი)  $\left( L'_z - \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} \right)$  უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო  $\delta z$  ვარიაცია ნებისმიერი, უწყვეტი და საზღვარზე ნულოვანი ფუნქციაა, ლაგრანჟის ლემის საფუძველზე მივიღებთ რომ, ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა ჩაიწერება შემდეგი განტოლების სახით:

$$\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} - L'_z = 0. \quad (3.122)$$

(3.122) განტოლებას, ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება ეწოდება. ამ განტოლების ნებისმიერი გლუვი ამონახსნი ექსტრემალს წარმოადგენს.

**მაგალითი:** ჩავწეროთ ეილერ-ოსტოგრადასკის განტოლება დირიხლეს ფუნქციონალისათვის:

$$J[z] = \frac{1}{2} \iint \left( (z'_x)^2 + (z'_y)^2 \right) dx dy. \quad (3.123)$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $L(x, y, z, z'_x, z'_y) = p^2 + q^2$ . მაშინ მივიღებთ, რომ  $L'_p = 2p = 2z'_x$ , ხოლო  $L'_q = 2q = 2z'_y$ , ასევე,  $L'_z = 0$  ე.ი. ეილერ-ოსტოგრადასკის განტოლება ამ შემთხვევისათვის, მიიღებს ლაპლასის განტოლების სახეს:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \quad (3.124)$$

ლაპლასის განტოლებას მოკლედ ასეც წერენ:  $\Delta z = 0$ .

მაშასადამე, დირიხლეს ფუნქციონალისათვის ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქცია ექსტრემალი იქნება.

**მაგალითი:** ჩავწეროთ ეილერ-ოსტოგრადასკის განტოლება პუასონის ფუნქციონალისთვის:

$$J[z] = \frac{1}{2} \iint \left( (z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 2zf(x, y) \right) dx dy. \quad (3.125)$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $L(x, y, z, z'_x, z'_y) = p^2 + q^2 + 2zf(x, y)$ . მაშინ  $L'_p = 2p = 2z'_x$ ,  $L'_q = 2q = 2z'_y$ ,  $L'_z = f(x, y)$ . მაშინ ეილერ-ოსტოგრადასკის განტოლებას ექნება პუასონის განტოლების სახე:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (3.126)$$

პუასონის განტოლებას, ზოგჯერ მოკლედაც წერენ შემდეგნაირად:  $\Delta z = f$ .

მასასადამე, პუასონის ფუნქციონალისათვის, ექსტრემალები აკმაყოფილებენ პუასონის განტოლებას.

**მაგალითი:** განვიხილოთ პლატოს ვარიაციული ამოცანა: ვიპოვოთ ის ზედაპირი, რომელიც გავლებულია მოცემულ  $C$  შეკრულ ჟორდანის წირზე და აქვს მინიმალური ფართობი. ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანაზე:

$$J[z] = \iint \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (3.127)$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $L(x, y, z, z'_x, z'_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ , შესაბამისად,  $L'_p = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ,  $L'_q = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$  და  $L'_z = 0$ . მაშასადამე, ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) = 0. \quad (3.128)$$

ანუ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) = 0. \quad (3.139)$$

ასე, რომ საშუალო სიმრუდე ყველა წერტილში ნულის ტოლი უნდა იყოს. ამ პირობას აკმაყოფილებს მოცემულ  $C$  კონტურზე გადაჭიმული საპნის ბუშტი.

ბ) თუ მოცემული გვაქვს მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[z] = \iiint \dots \int L(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_1, \dots, p_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \rightarrow extr. \quad (3.130)$$

სადაც  $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  და  $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , მაშინ მისი ექსტრემალები-სათვის ანალოგიურად, ჩაიწერება ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} L'_{p_i} - L'_z = 0. \quad (3.140)$$

**მაგალითი:** განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[u] = \iiint \left( (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 \right) dx dy dz \rightarrow extr. \quad (3.141)$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში:

$L(x, y, z, u, p_1, p_1, p_3) = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ , სადაც  $p_1 = u'_x$ ,  $p_2 = u'_y$  და  $p_3 = u'_z$ . მაშინ  $L'_{p_1} = 2p_1 = 2u'_x$ ,  $L'_{p_2} = 2p_2 = 2u'_y$ ,  $L'_{p_3} = 2p_3 = 2u'_z$ ,  $L'_z = 0$ . მაშინ მივიღებთ, რომ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial x} L'_{p_1} + \frac{\partial}{\partial y} L'_{p_2} + \frac{\partial}{\partial z} L'_z = 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში, გვექნება ლაპლასის სამგანზომილებიანი განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.142)$$

აქაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ მოკლე ჩანაწერი:  $\Delta u = 0$ .

მაშასადამე, (3.141) ფუნქციონალის ექსტრემალი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქცია.

გ) თუ ინტეგრანტი დამოკიდებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციის მაღალი რიგის კერძო წარმოებულებზე, მაშინ ექსტრემალისათვის გვექნება ეილერ-პუასონის ფორმულის ანალოგიური ფორმულა. კერძოდ, განვიხილოთ ორი ცვლადის  $z(x, y)$  ფუნქცია თავისი კერძო წარმოებულებით მეორე რიგამდე ჩათვლით ანუ განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[z] = \iint L \left( x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy \rightarrow exstr. \quad (3.143)$$

მაშინ ექსტრემალისათვის მიიღება განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial x} L'_p + \frac{\partial}{\partial y} L'_q + \frac{\partial^2}{\partial x^2} L'_r + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L'_s + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L'_t - L'_z = 0. \quad (3.144)$$

სადაც  $p = z_x$ ,  $q = z_y$ ,  $r = z_{xx}$ ,  $s = z_{xy}$ ,  $t = z_{yy}$ .

მაგალითი. განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[z] = \iint \left( \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy \rightarrow exstr. \quad (3.145)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში,  $L = \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$  ანუ

$L = r^2 + t^2 + 2s^2$ . მაშინ  $L'_p = 0$ ,  $L'_q = 0$ ,  $L'_r = 2r = 2z_{xx}$ ,

$L'_s = 4s = 4z_{xy}$ ,  $L'_t = 2t = 2z_{yy}$ ,  $L'_z = 0$ . მაშასადამე, მივიღებთ ექსტრემალის განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0. \quad (3.146)$$

ამ განტოლებას ბიჰარმონიული განტოლება ეწოდება.

ამ განტოლებას, ზოგჯერ, მოკლედაც ჩაწერენ ხოლმე:  $\Delta \Delta z = 0$ .

### 3.3.6. ეილერის განტოლების კანონიკური სახე

განვიხილოთ  $J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$  ფუნქციონალი, სადაც  $L$  ინტეგრანტი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ჩვენ შეგვიძლია ეს ფუნქციონალი გადავწეროთ ვექტორების გამოყენებით შემდეგნაირად:

$$J[\mathbf{y}] = \int_a^b L(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad (3.147)$$

სადაც  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ . როგორც უკვე ვიცით, (3.147) სახის ფუნქციონალის ექსტრემალეებისათვის ადგილი აქვს ილერის განტოლებებს:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_i} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.148)$$

ეს არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემა. ეს სისტემა შეგვიძლია დავიყვანოთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, თუ შემოვიღებთ სათანადო აღნიშვნებს:

$$y'_i = z_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.149)$$

მაშინ  $L'_{y'_i} = L'_{z_i}$  და ეილერის (3.148) განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = z_i, & i = \overline{1, n} \\ \frac{d}{dx} L'_{z_i} - L'_{y_i} = 0, & i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.150)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა არაა ნორმალური სისტემა, ამიტომ მისი რიცხვითი რეალიზაცია არაა ხელსაყრელი, თუმცა, შეგვიძლია ისე გარდავქმნათ ანალიზურად, რომ მრავალი ამოცანის ამოხსნა იქნება შესაძლებელი. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$L'_{y'_i} = L'_{z_i} \equiv p_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.151)$$

ინტეგრანტის, მეორე რიგის კერძო წარმოებულებისგან შემდგარი მატრიცის (ჰესის მატრიცა) დეტერმინანტი თუ განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე,

$L'_{y'_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n}$  განტოლებებიდან შეგვიძლია ძველი  $y'_i$  ცვლადები გამოვსახოთ ახალი ცვლადებით ანუ

$$y'_i = h_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{p}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.152)$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$H(x, \mathbf{y}, \mathbf{p}) = -L(x, \mathbf{y}, \mathbf{h}(x, \mathbf{y}, \mathbf{p})) + \sum_{i=1}^n h_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{p}) p_i. \quad (3.153)$$



ამ ფუნქციას, მოცემული (3.147) ფუნქციონალის ჰამილტონის ფუნქციას უწოდებენ, ხოლო  $x, y, p$  ცვლადებს, მოცემული ფუნქციონალის კანონიკურ ცვლადებს.

ჰამილტონის ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$dH = -dL + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i \text{ ანუ}$$

$$dH = -L'_x dx - \sum_{i=1}^n L'_{y_i} dy_i - \sum_{i=1}^n L'_{y'_i} dy'_i + \sum_{i=1}^n p_i dy'_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i, \quad (3.154)$$

რადგან აღნიშვნის თანახმად  $L'_{y'_i} = p_i, i = \overline{1, n}$ , ფორმულა (3.154)-ის მარჯვენა მხარის მესამე და მეოთხე წევრი ერთმანეთს აბათილებს, შესაბამიად, მივიღებთ რომ

$$dH = -L'_x dx - \sum_{i=1}^n L'_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n y'_i dp_i. \quad (3.155)$$

თუ ჰამილტონის ფუნქციას წარმოვადგენთ სტანდარტული ფორმით, მივიღებთ რომ

$$dH = H_x dx + \sum_{i=1}^n H_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^n H_{p_i} dp_i. \quad (3.156)$$

(3.155) და (3.156)-დან გამომდინარეობს რომ

$$H_x = -L'_x, \quad H_{y_i} = -L'_{y_i}, \quad H_{p_i} = y'_i. \quad (3.157)$$

მაშასადამე,  $L'_{y_i} = -H_{y_i}, y'_i = H_{p_i}, L'_{z_i} = p_i$ , ტოლობების გათვალისწინებით, ეილერის (3.150) განტოლებები გადაიწერება კანონიკურ ცვლადებში:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1, n}, \\ \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.158)$$

როგორც ვიცით, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი ეწოდება ისეთ ფუნქციას, რომელიც ამ სისტემის ნებისმიერი ინტეგრალური წირის გასწვრივ მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს.

იმისათვის, რომ მოცემული გლუვი ფუნქცია იყოს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული მოცემული დიფერენციალური განტოლებიდან გამომდინარე, იყოს ნულოვანი.

ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის, შესაძლებელია ვიპოვოთ (3.158) სისტემის პირველი ინტეგრალი და მაშასადამე (3.150) სისტემისაც.

მაგალითი: ვთქვათ ინტეგრანტს აქვს სახე:  $L(y, y')$  ანუ ცხადი სახით არ შეიცავს  $x$  ცვლადს. მაშინ შესაბამისი ჰამილტონის ფუნქციაც არ შეიცავს  $x$  ცვლადს, ცხადი სახით ანუ  $\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0$ . ე.ი. გვექნება, რომ

$$\frac{dH}{dx} = \sum_{i=1}^n H'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n H'_{p_i} \frac{dp_i}{dx}, \quad (3.159)$$

შევიტანოთ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში  $H'_{y_i}$  და  $H'_{p_i}$  ფუნქციების მნიშვნელობები (3.158) განტოლებიდან, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dH}{dx} = - \sum_{i=1}^n \frac{dp_i}{dx} \frac{dy_i}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{dy_i}{dx} \frac{dp_i}{dx} = 0. \quad (3.160)$$

ამრიგად, თუ ინტეგრანტი არაა ცხადად დამოკიდებული  $x$  ცვლადზე, მაშინ ნებისმიერი ექსტრემალის გასწვრივ, ჰამილტონის ფუნქცია მუდმივია, რაც იმას ნიშნავს რომ თუ ინტეგრანტი არაა ცხადად დამოკიდებული  $x$  ცვლადზე, მაშინ ჰამილტონის ფუნქცია ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალია.

P.S. კანონიკურ ცვლადებში ჩაწერილი ეილერის (3.158) განტოლებიდან გამომდინარეობს იგივეობა:  $\frac{dH}{dx} = \frac{\partial H}{\partial x}$ .

მაგალითი. ახლა დავსვათ ასეთი საკითხი: ვიპოვოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული  $F(y, p)$  ფუნქცია, რომ ის იყოს (3.158) სისტემის პირველი ინტეგრალი?

ამოხსნა: ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული:

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^n \left( F'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + F'_{p_i} \frac{dp_i}{dx} \right), \quad (3.161)$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.158) განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^n \left( F'_{y_i} \frac{dy_i}{dx} + F'_{p_i} \frac{dp_i}{dx} \right) = \sum_{i=1}^n (F'_{y_i} H'_{p_i} - F'_{p_i} H'_{y_i}). \quad (3.162)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგარ გამოსახულებას, პუასონის  $[F, H]$  ფრჩხილებს უწოდებენ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dF}{dx} = [F, H]. \quad (3.163)$$

მაშასადამე, მოცემული  $F(y, p)$  ფუნქცია არის ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $F$  და  $H$  ფუნქციების პუასონის ფრჩხილი  $[F, H] = 0$  ნულის ტოლია.

მაგალითი. მოცემული ფუნქციონალისათვის:

$$J[y_1, y_2] = \int_0^\pi (2y_1 y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2) dx,$$

შეადგინეთ ეილერის კანონიკური განტოლებები.

ამოხსნა: ჩვენ შემთხვევაში

$L(x, y, y') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2$ , თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:  $L'_{y_1'} = p_1$ ,  $L'_{y_2'} = p_2$ . მაშინ მივიღებთ, რომ  $2y_1' = p_1$ ,  $-2y_2' = p_2$ . ამ

შემთხვევაში, დეტერმინანტი:  $\begin{vmatrix} L''_{y_1'y_1'} & L''_{y_1'y_2'} \\ L''_{y_2'y_1'} & L''_{y_2'y_2'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ . თუ

მიღებულ განტოლებებს ამოვხსნით  $y_1'$  და  $y_2'$  წარმოებულების მიმართ, მივიღებთ რომ  $y_1' = \frac{p_1}{2}$  და  $y_2' = -\frac{p_2}{2}$ . მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციონალის შესაბამისი ჰამილტონიანი:

$$H = \left(-L + y_1'L'_{y_1'} + y_2'L'_{y_2'}\right)\Big|_{y_1'=\frac{p_1}{2}, y_2'=-\frac{p_2}{2}} = 2y_1^2 - 2y_1y_2 + \frac{p_1^2}{4} - \frac{p_2^2}{4}.$$

შესაბამისად, ეილერის კანონიკურ განტოლებებს ექნებათ სახე:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{p_1}{2}, & \frac{dy_2}{dx} = -\frac{p_2}{2} \\ \frac{dp_1}{dx} = -4y_1 + 2y_2, & \frac{dp_2}{dx} = 2y_1 \end{cases}.$$

### 3.3.7. ფუნქციონალებისა და მათი შესაბამისი ექსტრემალების განტოლებათა ცხრილი

	ფუნქციონალის სახე	ექსტრემალების დიფერენციალური განტოლებები
1	$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y'} - L'_y = 0$ ეილერის განტოლება
1.2	$J[y] = \int_a^b L(x, y) dx$	$L'_y = 0$
1.3	$J[y] = \int_a^b (P(x, y) + Q(x, y)y') dx$	$Q'_x - P'_y = 0$
1.4	$J[y] = \int_a^b L(y') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y'} = 0$
1.5	$J[y] = \int_a^b L(x, y') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y'} = 0$
1.6	$J[y] = \int_a^b L(y, y') dx$	$y'L'_{y'} - L = C_1$

2	$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$	$\begin{cases} \frac{d}{dx} L'_{y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ \frac{d}{dx} L'_{y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}$
3	$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$	$\frac{d}{dx} L'_{y_i'} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}$
4	$J[y] = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$	$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} = 0$ ეილერ-პუასონის განტოლება
5	$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y, z, z'_x, z'_y) dx dy$	$\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y} - L'_z = 0, p = z'_x, q = z'_y.$ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება
5.1	$J[u] = \iiint ((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2) dx dy dz$	$\Delta u = 0$ ლაპლასის განტოლება
5.2	$J[z] = \frac{1}{2} \iint ((z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 2zf(x, y)) dx dy$	$\Delta z = f(x, y)$ პუასონის განტოლება
5.3	$J[z] = \iint \left( \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) dx dy$	$\Delta \Delta z = 0$ ბიჰარმონიული განტოლება
6	$J[\mathbf{y}] = \int_a^b L(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx$	$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dx} = - \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot i = \overline{1, n}, p_i = L'_{y_i} \end{cases}$ ეილერის კანონიკური განტოლებები

### 3.4. ვარიაციული ამოცანები მოძრავი საზღვრებით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით, სადაც დასაშვები ფუნქციები განსაზღვრული იყო ფიქსირებულ  $[a; b]$  მონაკვეთზე და გრაფიკის ბოლო  $A(a, y_A)$  და  $B(b, y_B)$  წერტილები იყო ფიქსირებული.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, ზოგჯერ, საჭიროა ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნა ისეთ პირობებში, როცა დასაშვები ფუნქციები განსაზღვრულია სხვადასხვა შუალედში და შუალედის ბოლოებზე მათი მნიშვნელობა წინასწარ არაა ცნობილი. ასეთ ამოცანებს, მოძრავ საზღვრებიან ვარიაციულ ამოცანებს უწოდებენ.

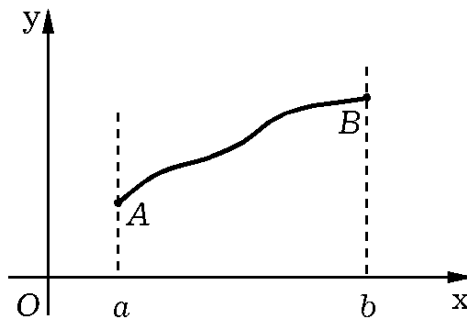
### 3.4.1. ვარიაციული ამოცანა, ექსტრემალის ფუნქციის გრაფიკის ორ ერთმანეთის პარალელურ ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებით

განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad (3.164)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესახებ, სადაც ფუნქციონალის განსაზღვრის არეა  $C^1[a; b]$  კლასის ფუნქციების სიმრავლე (ფუნქციონალური სივრცე). განსხვავება ადრე განხილულ ამოცანებთან ისაა, რომ ამჯერად, დასაშვები ფუნქციებისათვის არ გვაქვს მოცემული სასაზღვრო პირობები.

გეომეტრიული თვალსაზრისით, ამოცანა მდგომარეობს ისეთი ფუნქციის პოვნაში, რომელიც (3.164) ფუნქციონალს ანიჭებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას და რომლის გრაფიკის ბოლოებიც, კვეთს  $x = a$  და  $x = b$  ვერტიკალურ წრფეებს. ასეთ ამოცანას ჩვენ ვუწოდებთ ვარიაციულ ამოცანას ექსტრემალის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებით (ნახ. 3.5.).



ნახ. 3.5. ვარიაციული ამოცანა წირის მოძრავი ბოლოებით

ჩავთვალოთ, რომ ფუნქციონალის ინტეგრანტი, ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში, დასაშვები ფუნქცია, შეიძლება იყოს  $C^1[a; b]$  ფუნქციონალური სივრცის ნებისმიერი ელემენტი. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b (L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y') dx. \quad (3.165)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობიდან გამომდინარე, როგორც ვიცით, ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b (L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y') dx = 0. \quad (3.166)$$

მაშინ დიუბუა-რაიმონის ლემიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ ექსტრემალეები აკმაოფილებენ ეილერის განტოლებას:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'} - L'_y = 0. \quad (3.167)$$

განტოლება (3.166) საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ დამატებითი პირობები, რომელთაც აუცილებლად, უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციონალის ექსტრემალი.

თუ  $J[y]$  ფუნქციონალი არაა გადაგვარებული ანუ  $L''_{y'y'} \neq 0$ , მაშინ მისი  $y$  ექსტრემალი არის ორჯერ, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია. ე.ი. შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი (3.166) განტოლებისათვის და მივიღებთ:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left( L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} \right) \delta y dx + L'_{y'} \delta y \Big|_a^b \quad (3.168)$$

ანუ გვექნება ფორმულა:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left( L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} \right) \delta y dx + L'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - L'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a). \quad (3.169)$$

თუ  $y(x)$  ექსტრემალია, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას და მაშასადამე, (3.169) ფორმულაში ინტეგრალი ნულის ტოლია. აქედან მივიღებთ, რომ

$$L'_{y'} \Big|_{x=b} \delta y(b) - L'_{y'} \Big|_{x=a} \delta y(a) = 0. \quad (3.170)$$

მოცემულ ამოცანაში, რადგან  $\delta y(a)$  და  $\delta y(b)$  სიდიდეებს შეუძლიათ ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება, ცხადია რომ (3.170) განტოლება გვაძლევს დამატებით აუცილებელ პირობებს იმისათვის, რომ  $y(x)$  ფუნქცია იყოს მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალი. ამ პირობებს აქვთ სახე:

$$L'_{y'} \Big|_{x=b} = 0, \quad L'_{y'} \Big|_{x=a} = 0. \quad (3.171)$$

(3.171) პირობებს, **ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს** უწოდებენ.

ა) ამრიგად, ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად, ჯერ უნდა ამოვხსნათ ეილერის განტოლება და ვიპოვოთ ექსტრემალები, ხოლო შემდეგ, მათგან უნდა ამოვირჩიოთ ის ექსტრემალები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს.

ბ) მოცემული (3.164) ტიპის ფუნქციონალისთვის შეგვიძლია დავსვათ შერეული ტიპის ამოცანაც ანუ მაგალითად, მოცემულია საძიებელი ფუნქციის გრაფიკის მარცხენა ბოლოს კოორდინატები  $A(a; y_A)$  ხოლო მარჯვენა ბოლო თავისუფლად მოძრაობს  $x = b$  ვერტიკალურ წრფეზე. მაშინ გვაქვს ერთი პირობა, რომელიც ავიწროებს დასაშვებ ფუნქციათა სიმრავლეს. დასაშვები ვარიანტია უნდა აკმაყოფილებდეს  $\delta y(a) = 0$

პირობას, რადგან ყველა დასაშვები ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ერთი და იგივე პირობას:  $y(a) = y_A$ .

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (3.170) პირობიდან მივიღებთ, რომ:

$$y(a) = y_A, \quad L'_{y'}|_{x=b} = 0. \quad (3.172)$$

**მაგალითი.** იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალეები:

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((y')^2 - y^2 + 4y \cos x) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 0. \quad (3.173)$$

**ამოხსნა:** მოცემული ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას აქვს სახე:  $y'' + y = 2 \cos x$ . ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x.$$

რადგან  $y(0) = 0$ , მივიღებთ რომ  $C_1 = 0$ . მეორე მუდმივის საპოვნელად, უნდა გამოვიყენოთ  $L'_{y'}|_{x=b} = 0$  პირობა, რომელსაც მოცემული ამოცანის პირობებში, აქვს სახე:  $2y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$  ანუ  $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$  მაშინ  $C_2 = -1 - \frac{\pi}{4}$ . მივიღეთ, რომ ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს ექსტრემალი:  $y = (x - 1 - \frac{\pi}{4}) \sin x$ .

### 3.4.2. ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა ნებისმიერ ორ წირზე მოძრავი საზღვრებით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ვარიაციული ამოცანა, ნებისმიერ ორ ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი საზღვრებით. ახლა, განვაზოგადოთ ეს ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა გრაფიკის ბოლოები გადაადგილდებიან არა მხოლოდ ვერტიკალურ წრფეებზე, არამედ ნებისმიერ ორ გლუვ წირზე.

**ამოცანა.** ვიპოვოთ

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx, \quad (3.174)$$

ფუნქციონალის ექსტრემალეები, თუ  $L$  ფუნქციონალი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა,  $a$  და  $b$ ,  $y(x)$  ფუნქციის გრაფიკის ბოლოების უცნობი აბსცისებია, ხოლო ორდინატები კი, შესაბამისად  $y(a)$  და  $y(b)$ . ამასთან ერთად, ცნობილია რომ  $y(x)$  ფუნქციის ბოლოები განლაგებულია შესაბამისად,  $y = \varphi(x)$  და  $y = \psi(x)$  წირებზე ანუ

$y(a) = \varphi(a)$  და  $y(b) = \psi(b)$ .

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად იყენებენ

**თეორემა:** თუ  $y(x)$  არის (3.174) ფუნქციონალის ექსტრემალი, რომელიც  $y = \varphi(x)$  წირის  $(a, \varphi(a))$  წერტილს აერთებს  $y = \psi(x)$  წირის  $(b, \psi(b))$  წერტილთან, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას:

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} = 0, \quad (3.175)$$

და ტრანსვერსალობის პირობებს:

$$\begin{cases} L + (\varphi' - y')L'_{y'} \Big|_{x=a} = 0 \\ L + (\psi' - y')L'_{y'} \Big|_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (3.176)$$

ამრიგად, მოძრავ საზღვრებიანი ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა:

1) ამოვხსნათ ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის განტოლება და ვიპოვოთ ორ ნებისმიერ ცვლადზე დამოკიდებული  $y = f(x, C_1, C_2)$  ექსტრემალების სიმრავლე;

2) ტრანსვერსალობის პირობიდან გამომდინარე და (3.177) ტოლობების გათვალისწინებით, ვიპოვოთ ნებისმიერი  $a, b, C_1, C_2$  ცვლადები.

$$\begin{cases} f(a, C_1, C_2) = \varphi(a) \\ f(b, C_1, C_2) = \psi(a) \end{cases} \quad (3.177)$$

**მაგალითი.** იპოვეთ მანძილი  $y = x^2$  პარაბოლასა და  $y = x - 5$  წრფეს შორის.

**ამოხსნა:** თუ განვიხილავთ მანძილს, ორ გადაკვეთის წერტილს შორის საძებნ  $y(x)$  წირზე, რომელიც კვეთს მოცემულ პარაბოლასა და წრფეს, შესაბამისად, წერტილებში  $(a, a^2)$  და  $(b, b - 5)$ , მივიღებთ, რომ საძებნი წირი მინიმუმს უნდა ანიჭებდეს ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში  $\varphi(x) = x^2$  და  $\psi(x) = x - 5$ .

ამ შემთხვევაში, ეილერის განტოლება იქნება:  $y'' = 0$  ანუ ზოგად

ამონახსნს აქვს სახე:  $y = C_1 x + C_2$ . მაშინ,  $(L + (\varphi' - y')L'_{y'}) \Big|_{x=a} = 0$   
 $(L + (\psi' - y')L'_{y'}) \Big|_{x=b} = 0$

ტრანსვერსალობის პირობებს აქვთ სახე:



$$\left[ \sqrt{1 + y'^2} + (2x - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=a} = 0$$

$$\left[ \sqrt{1 + y'^2} + (1 - y') \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right]_{x=a} = 0$$

სადაც  $y' = C_1$ , ხოლო (3.177) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$\begin{cases} C_1 a + C_2 = a^2 \\ C_1 b + C_2 = b - 5 \end{cases}$ . მაშინ გვაქვს ოთხი განტოლება ოთხი უცნობით:

$(a, b, C_1, C_2)$ . ამ სისტემის ამონახსნი იქნება:  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = \frac{3}{4}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{23}{8}$ .

მაშინ, ექსტრემალის განტოლება იქნება:  $y = -x + \frac{3}{4}$ . ე.ი. მანძილი ამ წირებს შორის იქნება:

$$l = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = \sqrt{2} x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

### 3.5. ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები

ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანებში, ვეძებდით სხვადასხვა სახის ფუნქციონალის ექსტრემუმებს, გარკვეული ტიპის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, თუმცა, მრავალი პრაქტიკული ამოცანა დაიყვანება ისეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანაზე, როცა დასაკმაყოფილებელია გარკვეული ტიპის დამატებითი პირობები. მაგალითად, დიდონის ამოცანის განხილვისას, საქმე გვქონდა ისეთი ფუნქციონალის მინიმიზაციის ამოცანასთან, რომელსაც უნდა ქონოდა მოცემული სიგრძის პერიმეტრი. ასეთ ამოცანებს, იზოპერიმეტრულ ამოცანებს უწოდებენ.

განვიხილოთ, სხვადასხვა ტიპის ვარიაციული ამოცანა შემოფარგვლის (ზმის) პირობების მიხედვით. ასეთ ამოცანებს, ფუნქცი-

ონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ეწოდება, ხოლო ფუნქციონალს მიზნის ფუნქციონალი.

### 3.5.1. ლაგრანჟის ამოცანა

ვთქვათ, გვაქვს ამოცანა: ვიპოვოთ (3.178) ფუნქციონალის ექსტრემუმები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.179) სასაზღვრო და (3.180) ბმის პირობებს, სადაც  $f$  და  $g_j$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (3.178)$$

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \quad (3.179)$$

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (k < n), \quad x \in [a, b]. \quad (3.180)$$

(3.178),(3.179),(3.180) ამოცანას ლაგრანჟის ამოცანას უწოდებენ.

თუ  $g_j$  ბმის ფუნქციები არ არიან დამოკიდებული  $y'$  ფუნქციაზე, მაშინ ასეთ ბმებს მექანიკაში ჰოლონომურ ბმებს უწოდებენ, ხოლო ვარიაციულ აღრიცხვაში ფაზურ შემოფარგვლის პირობებს.

ჩამოვაცალიბოთ ლაგრანჟის (3.178),(3.179),(3.180) ამოცანის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. ვთქვათ,  $g_j$  ფუნქციების  $y'$  ცვლადების მიმართ იაკობის მატრიცის რანგი მაქსიმალურია და უდრის  $k$ -ს. მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\left| \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_k)}{\partial(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y'_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y'_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y'_1} & \frac{\partial g_k}{\partial y'_2} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y'_k} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.181)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია  $y'$  ცვლადები ამოვხსნათ  $g_j$  დიფერენციალური (ან ალგებრული) განტოლებებიდან.

**თეორემა:** თუ  $y^*(x) = (y_1^*(x), \dots, y_n^*(x)) \in C^1[a, b, \mathbb{R}^n]$  არის (3.178), (3.179),(3.180) ამოცანის ამონახსნი და ადგილი აქვს (3.181) პირობას, მაშინ  $y^*(x)$  წარმოადგენს სპეციალური სახის

$$J^*[y] = \int_a^b f^* dx, \quad (3.182)$$

ფუნქციონალის ექსტრემალს, სადაც

$$f^* = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j, \quad (3.183)$$

$f^*$  ფუნქციას, მოცემული ამოცანის ლაგრანჟიანი ეწოდება, ხოლო  $\lambda_j$  კოეფიციენტებს ლაგრანჟის მამრავლები.

ამ თეორემიდან გამომდინარე,  $n + k$  ცვლადების საპოვნელად გვაქვს ამდენივე განტოლება. ესაა ეილერის  $n$  განტოლება:

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y_j} - (f^*)'_{y_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.184)$$

და  $k$  ბმის პირობები:

$$g_j(x, y, y') = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (k < n), \quad x \in [a, b]. \quad (3.185)$$

**მაგალითი.** იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ორ  $A(1; -1; 0)$  და  $B(2; 1; -1)$  წერტილს შორის  $15x - 7y + z - 22 = 0$  ზედაპირზე.

**ამოხსნა:** როგორც ცნობილია, ორ  $A(x_1, y_1, z_1)$  და  $B(x_2, y_2, z_2)$  წერტილს შორის მანძილი  $\varphi(x, y, z) = 0$  ზედაპირზე, გამოითვლება ფორმულით:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx. \quad (3.186)$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში:  $x_1 = 1, x_2 = 2,$

$\varphi(x, y, z) = 15x - 7y + z - 22.$  შევადგინოთ ლაგრანჟიანი:

$$f^* = \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22).$$

მაშინ გვექნება სპეციალური სახის ფუნქციონალი:

$$J^*[y, z] = \int_1^2 [\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)] dx, \quad (3.187)$$

ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებებს აქვს სახე:

$$\lambda(x) \cdot (-7) - \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0, \quad (3.188)$$

$$\lambda(x) \cdot 1 - \frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0. \quad (3.189)$$

(3.188), (3.189) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ბმის განტოლება:  $15x - 7y + z - 22 = 0$

და სასაზღვრო პირობები:

$$y(1) = -1, y(2) = 1, z(1) = 0, z(2) = -1. \quad (3.190)$$

გავამრავლოთ (3.189) განტოლება 7-ზე და დავუმატოთ (3.188) განტოლებას. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dx} \frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = 0 \text{ ანუ } \frac{y' + 7z'}{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}} = C_1. \quad (3.191)$$

ბმის განტოლების გაწარმოებით, მივიღებთ:

$z' = 7y' - 15.$  თუ ამ მნიშვნელობას, შევიტანთ (3.191) პირველ ინტეგრალში, მივიღებთ:

$y(x) = C_1x + C_2$ . სასაზღვრო (3.190) პირობებიდან ვპოულობთ მუდმივებს  $C_1 = 2$  და  $C_2 = -3$ . მაშასადამე,  $y(x) = 2x - 3$ , მაშინ  $z(x) = 1 - x$  და  $\lambda(x) = 0$ . მაშასადამე, საძიებელი მანძილი იქნება:

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx = \sqrt{6}.$$

**მაგალითი.** იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [(y_1'(x))^2 + 2y_1(x)y_2(x) + (y_2'(x))^2], \quad (3.192)$$

ექსტრემალი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:  $y_1(0) = 1$ ,  $y_2(0) = 1$ ,  $y_1(1) = e$ ,  $y_2(1) = \frac{1}{e}$ ,  $y_1 - y_2 - e^x + e^{-x} = 0$ .

**ამოხსნა:** რადგან  $f = (y_1'(x))^2 + 2y_1(x)y_2(x) + (y_2'(x))^2$  და  $g = y_1 - y_2 - e^x + e^{-x}$ , ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:

$$f^* = f + \lambda g = (y_1'(x))^2 + 2y_1(x)y_2(x) + (y_2'(x))^2 + \lambda(x)(y_1 - y_2 - e^x + e^{-x}).$$

ახლა შევადგინოთ შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებები:

$$(f^*)'_{y_1} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_1'} = 2y_2 + \lambda(x) - 2y_1'' = 0,$$

$$(f^*)'_{y_2} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_2'} = 2y_1 - \lambda(x) - 2y_2'' = 0.$$

ვიპოვოთ სისტემის ზოგადი ამონახსნი და  $\lambda(x)$ .

სისტემას მივუერთოთ ბმის განტოლებაც:

$y_1 - y_2 - e^x + e^{-x} = 0$ . მაშინ ეილერის განტოლებების შეკრება მოგვცემს, რომ  $y_1 + y_2 - (y_1'' + y_2'') = 0$ . მაშინ  $y_1 + y_2 = C_1e^x + C_2e^{-x}$ , ასევე ბმის პირობიდან გვაქვს, რომ  $y_1 - y_2 = e^x - e^{-x}$ .

მაშასადამე, ექსტრემალებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$y_1(x) = \frac{C_1+1}{2}e^x + \frac{C_2-1}{2}e^{-x}, \quad y_2(x) = \frac{C_1-1}{2}e^x + \frac{C_2+1}{2}e^{-x}.$$

$$\text{ხოლო } \lambda(x) = 2y_1(x) - 2y_2''(x).$$

**მაგალითი.** იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალეები:

$$J[y_1, y_2] = \int_0^1 [(y_1(x))^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2] dx,$$

თუ  $y_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 0$ ,  $y_1(1) = e + e^{-1}$ ,  $y_2(1) = 2e - e^{-1}$  და გვაქვს დიფერენციალური ბმის განტოლება:  $y_1' - y_2 = 0$ .

**ამოხსნა:** ა) შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია.

რადგან  $f = (y_1(x))^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2$  და  $g = y_1' - y_2$ , გვექნება ლაგრანჟის ფუნქცია:  $f^* = f + \lambda g$ , რომელიც ჩვენი ამოცანის პირობებში იქნება:

$$f^* = (y_1(x))^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2 + \lambda(x)(y_1' - y_2).$$

ბ) ეილერისა და ზმის განტოლებები:

$$(f^*)'_{y_1} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_1'} = 2y_1(x) - 4y_1'' - \lambda'(x) = 0,$$

$$(f^*)'_{y_2} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_2'} = -\lambda(x) - 2y_2'' = 0,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

გ) ვიპოვოთ მიღებული სისტემის ზოგადი ამონახსნი. დავიწყოთ მესამე განტოლებიდან,  $y_1' = y_2$ , მაშინ  $y_2'' = y_1'''$ ,  $\lambda = -2y_2'' = -2y_1'''$ , ე.ი.  $\lambda' = -2y_1^{(4)}$  და მივიღებთ განტოლებას:

$y_1^{(4)} - 2y_1'' + y_1 = 0$ . მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, ე.ი. ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$$y_1 = (C_1 + C_2x)e^x + (C_3 + C_4x)e^{-x}. \text{ მაშინ, რადგან } y_2 = y_1',$$

$$y_2 = (C_1 + C_2x + C_2)e^x + (C_4 - C_3 + C_4x)e^{-x}.$$

გ) სასაზღვრო პირობებიდან ვპოულობთ, რომ

$$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 1 \text{ და } C_4 = 0.$$

ამრიგად, მივიღეთ ექსტრემალები:

$$y_1(x) = xe^x + e^{-x} \text{ და } y_2(x) = (x+1)e^x - e^{-x}.$$

$$\text{შესაბამისად, } \lambda(x) = -2(x+3)e^x + 2e^{-x}.$$

### 3.5.2. მაიერის ამოცანა

განვიხილოთ მიზნის ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა ზმის განტოლებებს აქვთ ინტეგრალური განტოლებების სახე.

მაშასადამე, გვაქვს მიზნის ფუნქციონალი:

$$J[\mathbf{y}] = \int_a^b f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (3.193)$$

სასაზღვრო პირობები:

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_1, \mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_2. \quad (3.194)$$

ზმის ინტეგრალური პირობები:

$$L_i = \int_a^b h_i(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.195)$$

იგულისხმება რომ  $f, h_i$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია და (3.194) სასაზღვრო პირობები არ ეწინააღმდეგება ზმის

პირობებს. (3.195) სახის ბმებს ინტეგრალურ (იზოპერიმეტრულ) ბმებს უწოდებენ.

**P.S.** იზოპერიმეტრული ამოცანები წარმოიშვა კლასიკური გეომეტრიული ამოცანის განზოგადების შედეგად, როცა ეძებდნენ მოცემული პერიმეტრის მქონე ბრტყელ ფიგურებს შორის, უდიდესი ფართობის მქონე ფიგურას.

იზოპერიმეტრული ამოცანები, შეგვიძლია დავიყვანოთ ლაგრანჟის ამოცანაზე, თუ შემოვიღებთ ახალ ფუნქციებს:

$$\psi_i(x) = \int_a^x h_i(x, y, y') dx, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.196)$$

მაშინ (3.195) ინტეგრალური ბმის პირობების ნაცვლად, გვექნება დიფერენციალური განტოლებების ფორმით ჩაწერილი ბმები:

$$\psi'_i(x) = h_i(x, y, y'), \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.197)$$

ამასთან ერთად, გვექნება დამატებითი სასაზღვრო პირობები:

$$\psi_i(a) = 0, \quad \psi_i(b) = L_i, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.198)$$

მაშასადამე, იზოპერიმეტრული ამოცანის ამოსახსნელად,

1. უნდა შევადგინოთ შესაბამისი სპეციალური სახის ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$f^*(x, y, y', \psi, \psi') = f(x, y, y') + \sum_{j=1}^s \lambda_j (h_j(x, y, y') - \psi'_j(x)), \quad j = \overline{1, s}. \quad (3.199)$$

2. უნდა შევადგინოთ შესაბამისი ეილერის განტოლებები:

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{y'_j} - (f^*)'_{y_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.200)$$

$$\frac{d}{dx} (f^*)'_{\psi'_j} - (f^*)'_{\psi_j} = 0, \quad j = \overline{1, s}. \quad (3.201)$$

რადგან (3.199)-დან გამომდინარე,

$$(f^*)'_{\psi_j} = 0 \quad \text{და} \quad (f^*)'_{\psi'_j} = -\lambda_j(x),$$

ცხადია, რომ (3.201)-ის მეორე განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dx} \lambda_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, s}. \quad (3.202)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $\lambda_j(x)$  მუდმივი რიცხვებია. ე.ი. საკმარისია განვიხილოთ ეილერის (3.200) განტოლება.

3. ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნის მუდმივები უნდა განვსაზღვროთ, (3.198) და (3.194) სასაზღვრო პირობებიდან.

**თეორემა:** თუ  $y(x)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს (3.194),(3.195) პირობებს და ექსტრემუმს ანიჭებს (3.193) ფუნქციონალს, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის (3.200) განტოლებებს ლაგრანჟის  $F^*$  ფუნქციისათვის, სადაც  $F^* = f + \sum_{j=1}^s \lambda_j (h_j(x, y, y'))$ ,  $j = \overline{1, s}$ .

**მაგალითი.** იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალი, თუ  $J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = 6$  და გვაქვს ინტეგრალური ბმის პირობა:  $\int_0^1 y(x) dx = 3$ .

**ამოხსნა:** ჩვენი ამოცანის პირობებში:  $f = (y')^2$ ,  $h_j = y(x)$ ,  $s = 1$ . შესაბამისად,  $F^* = (y')^2 + \lambda y(x)$ .

1. შევადგინოთ ეილერის განტოლებები:  $(F^*)'_y = \lambda$ ,  $(F^*)'_{y'} = 2y'$  და  $\frac{d}{dx} (F^*)'_{y'} = 2y''$ . მაშინ  $(F^*)'_y - \frac{d}{dx} (F^*)'_{y'} = \lambda - 2y'' = 0$ .

ე.ი.  $y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1x + C_2$ .

2. ინტეგრალური ბმის პირობიდან, მივიღებთ, რომ

$$\int_0^1 y(x) dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 \left( \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1x + C_2 \right) dx = 3 \Rightarrow \Rightarrow \left( \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3 \right).$$

3. განვსაზღვროთ  $C_1, C_2, \lambda$  მუდმივები, სასაზღვრო და ბმის პირობებიდან:

$$y(0) = C_2 = 1, y(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6, \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3.$$

ამ სისტემის ამონახსნია:  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 1$  და  $\lambda = 12$ .

მაშასადამე, საძიებელი ექსტრემალი იქნება:

$$y(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

**მაგალითი.** განვიხილოთ დიდონის ამოცანა, რომელიც იზოპერიმეტრულ ამოცანას წარმოადგენს.

$$J[y] = \int_{-a}^a y dx \rightarrow \max, y(-a) = y(a) = 0,$$

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx, L > 2a.$$

**ამოხსნა:** შევადგინოთ სპეციალური სახის ფუნქციონალი:

$J^*[y] = \int_{-a}^a (y + \lambda \sqrt{1 + (y')^2}) dx$  და ჩავწერთ შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლებას:  $\lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right) - 1 = 0$ . ცხადია, რომ გვაქვს პირველი ინტეგრალი:  $\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - x = C_1$  ანუ  $\frac{\lambda^2 (y')^2}{1+(y')^2} = (x + C_1)^2$ . ამ განტოლებიდან ამოვხსნათ  $y'$ :

$y' = \pm \frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x+C_1)^2}}$ . განტოლებას განცალკეადი ცვლადებით აქვს ამონახსნი:

$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2} + C_2$ , აქედან გამომდინარე, გვექნება რომ  $(x + C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2$ . სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ, რომ  $C_1 = 0$  და  $\lambda^2 = C_2^2 + a^2$ . მაშასადამე, წირის განტოლებას ექნება სახე:  $x^2 + (y - C_2)^2 = C_2^2 + a^2$ . წრეწირის წირის სიგრძე უშუალოდ შეგვიძლია გამოვითვალოთ და მივიღებთ ფორმულას:  $2\sqrt{C_2^2 + a^2} \arcsin \frac{a}{\sqrt{C_2^2 + a^2}} = L$ ,

რომელიც  $t = \frac{L}{2\sqrt{C_2^2 + a^2}}$  აღნიშვნით  $t \in (0, \frac{\pi}{2}]$  მიიყვანება ტრანსცენდენტულ

განტოლებამდე:  $L \sin t = 2at$ . ამ ამოცანის ამონახსნი  $(0, \frac{\pi}{2}]$  შუალედში, მოგვცემს  $C_2$  მუდმივის პოვნის საშუალებას როცა  $L \leq \pi a$ .

თუ ლაგრანჟის ამოცანაში ინტეგრალურ (3.193) მიზნის ფუნქციას, შევცვლით ტერმინალური მიზნის ფუნქციით:

$$T[y] = T(y(a), y(b)), \quad (3.203)$$

სადაც  $T(y_1, y_2)$  ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ მივიღებთ მაიერის ამოცანას.

### 3.5.3. ბოლცას ამოცანა

განვიხილოთ  $J[y]$  ლაგრანჟის ფუნქციონალისაგან განსხვავებული ფუნქციონალი:

$$B[y] = J[y] + T[y], \quad (3.204)$$

შესაბამისი სასაზღვრო და შემოფარგვლის პირობებით:

$$y(a) = y_1, y(b) = y_2. \quad (3.205)$$



$$g_j(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad (k < n), \quad x \in [a, b]. \quad (3.206)$$

შესაბამისი (3.204) ფუნქციონალი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$B[\mathbf{y}] = \int_a^b f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') dx + T(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)). \quad (3.207)$$

ამოცანას (3.205), (3.206), (3.207) ბოლცას ამოცანა ეწოდება, ხოლო (3.207) ფუნქციონალს ბოლცას ფუნქციონალი.

ბოლცას ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას აქვს სახე:

$$\delta B[\mathbf{y}] = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx + \frac{\partial T}{\partial y(a)} \delta a + \frac{\partial T}{\partial y(b)} \delta b = 0. \quad (3.208)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრი გარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y dx. \quad (3.209)$$

მაშინ მივიღებთ ფორმულას:

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right] \delta y dx + \delta a \left[ \frac{\partial T}{\partial y(a)} - \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a} \right] + \delta b \left[ \frac{\partial T}{\partial y(b)} + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b} \right] = 0. \quad (3.210)$$

რადგან  $y(x)$  ექსტრემალია, (3.210) ფორმულის პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშასადამე, ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\delta a \left[ \frac{\partial T}{\partial y(a)} - \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a} \right] + \delta b \left[ \frac{\partial T}{\partial y(b)} + \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b} \right] = 0. \quad (3.211)$$

(3.211) განტოლება განვიხილოთ ნებისმიერი  $\delta a \neq 0$  და  $\delta b = 0$  ვარიაციებისათვის. მაშინ გვექნება  $\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}$ .

ანალოგიურად, თუ  $\delta a = 0$  და  $\delta b \neq 0$ , მაშინ  $\frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b}$ .

მაშასადამე, გვაქვს

**თეორემა:** ფუნქცია, რომელიც ბოლცას ფუნქციონალს ანიჭებს ექსტრემუმს, აუცილებლად უნდა აკმაყოფილებდეს ეილერის განტოლებებს და ტრანსვერსალობის პირობებს:

$$\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}, \quad \frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b}. \quad (3.212)$$

**ამოცანა.** ამოხსენით ბოლცას ამოცანა ფიქსირებული მარცხენა საზღვრით:

$$B[y] = \int_0^1 (y')^2 dx + 5y^2(1) \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 1.$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $f = (y')^2$ , მაშასადამე ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება:  $y(x) = C_1 x + C_2$ .

$y(0) = 1$  სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ

$C_2 = 1$ . მარჯვენა საზღვარი მოძრაობს  $x = 1$  წრფეზე, მაშინ ტრანსვერსალობის პირობას ექნება სახე:

$$\left(f'_{y'} + \frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{x=1} = (2y' + 10y)|_{x=1} = 2y'(1) + 10y(1) = 0. \quad (3.213)$$

ვიპოვოთ  $C_1$  განტოლებიდან:  $2C_1 + 10C_1 + 10 = 0$  ანუ  $C_1 = -\frac{5}{6}$ .

მაშასადამე, მივიღებთ **ექსტრემალს**:  $y(x) = -\frac{5}{6}x + 1$ .

**ამოცანა.** ამოხსენით ბოლცას ამოცანა ფიქსირებული მარცხენა საზღვრით:

$$B[y_1, y_2] = \int_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2) dx + y_1(1) + y_2(1) \rightarrow \text{extr},$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0.$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში  $f = y_1' y_2' + y_1 y_2$ ,  $f'_{y_1} = y_2$ ,  $f'_{y_1'} = y_2'$ ,  $f'_{y_2} = y_1$ ,  $f'_{y_2'} = y_1'$ .  $\frac{d}{dx} f'_{y_1'} = y_2''$ ,  $\frac{d}{dx} f'_{y_2'} = y_1''$ . ეილერის განტოლებებს ექნებათ სახე:  $f'_{y_1} - \frac{d}{dx} f'_{y_1'} = y_2 - y_2'' = 0$ ,  $f'_{y_2} - \frac{d}{dx} f'_{y_2'} = y_1 - y_1'' = 0$ . ამ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad y_2 = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

ტერმინალურ წევრს აქვს სახე:  $T = y_1 + y_2$ . შესაბამისად, ტრანსვერსალობის პირობას აქვს სახე:

$$\left(f'_{y_1'} + \frac{\partial T}{\partial y_1}\right)\Big|_{x=1} = y_2'(1) + 1 = 0, \quad \left(f'_{y_2'} + \frac{\partial T}{\partial y_2}\right)\Big|_{x=1} = y_1'(1) + 1 = 0. \quad \text{სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ } C_1 + C_2 = 0 \text{ და } C_3 + C_4 = 0.$$

ე.ი.  $C_1 = -C_2$  და  $C_3 = -C_4$ . თუ გავითვალისწინებთ ტრანსვერსალობის პირობებს:  $y_2'(1) + 1 = 0$  და  $y_1'(1) + 1 = 0$ , მივიღებთ

რომ  $C_1 = -\frac{e}{e^2+1}$ ,  $C_2 = \frac{e}{e^2+1}$ ,  $C_3 = -\frac{e}{e^2+1}$ ,  $C_4 = \frac{e}{e^2+1}$ . შესაბამისად, მივიღეთ ექსტრემალები:  $y_1(x) = y_2(x) = -\frac{e}{e^2+1}e^x + \frac{e}{e^2+1}e^{-x}$ .

**ამოცანა.** იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$B[y] = \int_a^2 x^2(y')^2 dx - 2y(1) + y^2(2) \rightarrow exstr.$$

**ამოხსნა:** ამ შემთხვევაში, ლაგრანჟის ფუნქცია ემთხვევა ფუნქციონალის ინტეგრანტს:  $L = f = x^2(y')^2$ . ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას ექნება სახე:

$f'_y - \frac{d}{dx}f'_{y'} = 0$  ანუ  $\frac{d}{dx}f'_{y'} = \frac{d}{dx}(2x^2y') = 0$ . აქედან გამომდინარე,  $2x^2y' = C$ , მივიღებთ რომ  $y' = -\frac{C_1}{x^2}$ , მაშინ  $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2$ . ამ მუდმივების საპოვნელად, გამოვიყენებთ ტრანსვერსალობის პირობებს:

$$\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a} \quad \text{ანუ} \quad -2 = 2x^2y' \Big|_{x=1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=b} \quad \text{ანუ} \quad -2y \Big|_{x=2} = 2x^2y' \Big|_{x=2}$$

აქედან მივიღებთ, რომ ზოგადი ამონახსნის მუდმივებია  $C_1 = 1$  და  $C_2 = \frac{1}{2}$ . ე.ი. მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალს აქვს სახე:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}.$$

### 3.6. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები

ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა, რომ მისი პირველი ვარიაცია იყოს ნულის ტოლი. ეს ფაქტი არის მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის განზოგადება. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა, ემყარება მეორე რიგის დიფერენციალის ყოფაქცევას კრიტიკულ წერტილში. ანალოგიური სიტუაციაა ვარიაციულ აღრიცხ-

ვაშიც. განიხილება ფუნქციონალის მეორე ვარიაციის ცნება, რომელიც აზოგადებს მეორე რიგის დიფერენციალის ცნებას. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ემყარება მეორე ვარიაციის ყოფაქცევას საკვლევი ექსტრემალის გასწვრივ. ვარიაციულ აღრიცხვაში განასხვავებენ ძლიერი ექსტრემუმის ცნებას, რომლის დროსაც განიხილავენ უწყვეტ  $C[a; b]$  ფუნქციათა სიმრავლეს და სუსტი ექსტრემუმის ცნებას, რომელიც ემყარება უწყვეტად დიფერენცირებადი  $C^1[a; b]$  ფუნქციების სიმრავლეს.

### 3.6.1. სუსტი ექსტრემუმები

ისეთ  $f: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  გადასახვას, რომელიც  $E$  წრფივი სივრცის ნებისმიერ  $(x, y)$  წყვილს შეუსაბამებს  $f(x, y)$  რიცხვს, **ორადწრფივი ფორმა** ეწოდება, თუ ის წრფივია ორივე არგუმენტის მიმართ ანუ

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \quad (3.214)$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2). \quad (3.215)$$

ვარიაციულ აღრიცხვაში ორადწრფივ ფორმებს, **ორადწრფივი ფუნქციონალები** ეწოდება. თუ, ორადწრფივ  $J[y, z]$  ფუნქციონალში არგუმენტებს გავუტოლებთ, მივიღებთ  $G[y] = J[y, y]$  ფუნქციონალს, რომელსაც **კვადრატული ფუნქციონალი** ეწოდება.

კვადრატულ  $G[y]$  ფუნქციონალს ეწოდება **დადებითად განსაზღვრული**, თუ  $G[y] > 0$  ნებისმიერი  $y \neq 0$  ფუნქციისათვის და ეწოდება **არაუარყოფითად განსაზღვრული**, თუ  $G[y] \geq 0$  ნებისმიერი  $y \neq 0$  ფუნქციისათვის.

**მაგალითი.**  $C[a, b]$  წრფივ ფუნქციონალურ სივრცეში, ნებისმიერი უწყვეტი  $A(x)$  ფუნქციისათვის, ფუნქციონალი:

$$J[y, z] = \int_a^b A(x)y(x)z(x)dx$$

ორადწრფივია, ხოლო თუ  $y = z$ , მაშინ მივიღებთ კვადრატულ  $G[y] = J[y, y] = \int_a^b A(x)(y(x))^2 dx$  ფუნქციონალს.  $G[y]$  კვადრატული ფუნქციონალი არის დადებითად განსაზღვრული, თუ  $A(x) > 0$  ნებისმიერი არგუმენტისათვის  $x \in [a; b]$ .

ვიტყვი, რომ ნორმირებულ წრფივ სივრცეზე განსაზღვრული  $J[y]$  ფუნქციონალი ორჯერ დიფერენცირებადია  $y$  წერტილში, თუ ფუნქციონალის ნაზრდი:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y], \quad (3.216)$$

შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta J = \delta J[y, \delta y] + \delta^2 J[y, \delta y] + o(\|\delta y\|^2), \quad (3.217)$$

სადაც  $\delta^2 J[y, \delta y]$  არის კვადრატული ფუნქციონალი  $\delta y$  ვარიაციის მიმართ, ამ ფუნქციონალს  $y$  წერტილში განსაზღვრული  $J[y]$  ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია ეწოდება.  $o(\|\delta y\|^2)$  მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა  $\|\delta y\|^2$  სიდიდესთან შედარებით.

**თეორემა:** თუ  $J[y]$  ფუნქციონალი ორჯერ დიფერენცირებადია  $y$  წერტილში და აქვს მინიმუმი, მაშინ  $\delta^2 J[y, \delta y] \geq 0$ , ხოლო აქვს მაქსიმუმი თუ  $\delta^2 J[y, \delta y] \leq 0$  ნებისმიერი  $\delta y$  ვარიაციისათვის.

**P.S.** მეორე ვარიაციის არაუარყოფითად განსაზღვრულობა არის ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა.

ვიტყვი, რომ ნორმირებულ წრფივ სივრცეში განსაზღვრული  $G[y]$  კვადრატული ფორმა არის ძლიერად დადებითი, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი  $K > 0$ , რომ ნებისმიერი  $y$  ფუნქციისათვის ადგილი აქვს უტოლობას  $G[y] \geq K\|y\|^2$ .

**P.S.** სასრულ განზომილებიან შემთხვევაში, კვადრატული ფუნქციონალი წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას, ხოლო კვადრატული ფუნქციონალის ძლიერად დადებითობა, განაპირობებს დადებითად განსაზღვრულობას, თუმცა, უსასრულო განზომილებიან შემთხვევაში ეს ასე არაა.

**თეორემა:** თუ, წრფივ ნორმირებულ სივრცეში განსაზღვრული,  $y^*$  წერტილში ორჯერ დიფერენცირებადი  $J[y]$  ფუნქციონალისათვის, პირველი ვარიაცია  $\delta J = 0$ , ხოლო მეორე ვარიაცია  $\delta^2 J[y, \delta y]$  ძლიერად დადებითია, მაშინ  $y^*$  წერტილში  $J[y]$  ფუნქციონალს აქვს მინიმუმი.

### 3.6.2. ლეჟანდრისა და იაკობის თეორემები

**თეორემა:** ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანისათვის, თუ  $J[y]$  ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს  $y(x)$  ფუნქციაზე, მაშინ ადგილი აქვს ლეჟანდრის პირობას:

$$f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0. \quad (3.218)$$

ეს პირობა გამომდინარეობს ფუნქციონალის ნაზრდის (3.216) წარმოდგენიდან. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას ფუნქციონალის ნაზრდისათვის, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\Delta J = \int_a^b (f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y') dx + \frac{1}{2} \int_a^b (f''_{yy} (\delta y)^2 + 2f''_{yy'} \delta y \delta y' + f''_{y'y'} (\delta y')^2) dx + o(\|\delta y\|^2).$$

ეს წარმოდგენა გვიჩვენებს, რომ მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \frac{1}{2} \int_a^b (f''_{yy} (\delta y)^2 + 2f''_{yy'} \delta y \delta y' + f''_{y'y'} (\delta y')^2) dx. \quad (3.219)$$

თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს და სასაზღვრო პირობებს ფუნქციის  $\delta y$  ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ

$$2 \int_a^b f''_{yy'} \delta y \delta y' dx = \int_a^b f''_{yy'} d((\delta y)^2) = f''_{yy'} (\delta y)^2 \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} f''_{yy'} \right) (\delta y)^2 dx =$$

$$= - \int_a^b \left( \frac{d}{dx} f''_{yy'} \right) (\delta y)^2 dx.$$

მაშასადამე,

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx, \quad (3.220)$$

სადაც

$$Q = \frac{1}{2} \left( f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{yy'} \right), \quad P = \frac{1}{2} f''_{y'y'}.$$

(3.220) ფორმულაში, რადგან  $|\delta y| \leq \int_a^x |\delta y'| dt \leq \max_{[a;b]} |\delta y'| (b-a)$ , ცხადია,

რომ ინტეგრანტის მეორე წევრი არის საერთო მნიშვნელობაზე მთავარი გავლენის მომხდენი ანუ  $f''_{y'y'}$  ფუნქციის ნიშანი განაპირობებს მეორე ვარიაციის ნიშანს.

(3.220) ფუნქციონალისათვის შევადგინოთ ეილერის განტოლება, მაშინ მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{d}{dx} (Ph') - Qh = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \quad (3.221)$$

ამ განტოლებას აქვს ტრივიალური ამონახსნი:  $h(x) \equiv 0$ . თუმცა შესაძლებელია სხვა ამონახსნების არსებობაც.

თუ  $\tilde{x} \in (a; b]$  არის ისეთი წერტილი, რომ  $h(\tilde{x}) = 0$  და  $h(x) \neq 0$  არცერთი წერტილისათვის  $(a; \tilde{x})$  შუალედიდან, მაშინ  $\tilde{x}$  წერტილს  $a$  წერტილის შეუღლებული წერტილი ეწოდება.

განვიხილოთ ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (3.222)$$

სადაც  $f$  ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო  $y \in C^1[a; b]$ . პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა, გვაძლევს ექსტრემალების სიმრავლეს შემდგომი გამოკვლევისათვის, რომელიც ემყარება მეორე ვარიაციის გამოთვლას:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx. \quad (3.223)$$

$\delta^2 J[y, \delta y]$  კვადრატულ ფუნქციონალს წარმოადგენს. აქ

$$P = P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)),$$

$$Q = Q(x) = \frac{1}{2} \left( f''_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f''_{y'y}(x, y(x), y'(x)) \right). \quad (3.224)$$

(3.223) ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d}{dx} (P \delta y') - Q \delta y = 0. \quad (3.225)$$

ამ განტოლებას  $J[y]$  ფუნქციონალის იაკობის განტოლება ეწოდება. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას შემოაქვთ აღნიშვნა  $\delta y = h$  და შესაბამისად  $\delta y' = h'$ . მაშინ გვაქვს იაკობის განტოლება:

$$\frac{d}{dx} (P h') - Q h = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \quad (3.226)$$

$\tilde{x} \in [a, b]$  წერტილს ეწოდება  $a$  წერტილის შეუღლებული  $J[y]$  ფუნქციონალის აზრით, თუ ის შეუღლებულია  $\delta^2 J[y, \delta y]$  კვადრატულ ფუნქციონალის აზრით.

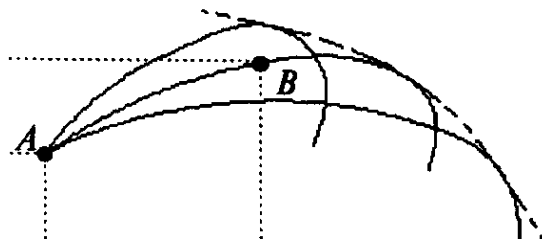
იაკობის განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ  $J[y]$  ფუნქციონალის  $f$  ინტეგრანტის გამოყენებითაც:

$$\left( f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y} \right) h(x) - \frac{d}{dx} (f''_{y'y} h') = 0. \quad (3.227)$$

**იაკობის პირობები:** იაკობის განტოლება ძალაშია ისეთი ექსტრემალისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ ეილერის განტოლებას  $J[y]$  ფუნქციონალისათვის, სასაზღვრო პირობებს და აქვთ არატრივიალური  $h(x) \neq 0$  ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$h(a) = 0 \wedge (h(x) \neq 0, x \in (a, b])$  პირობებს.

იაკობის განტოლების პირობები განსაზღვრავს  $y^*(x)$  ექსტრემალის ჩართვას ექსტრემალეების ცენტრალურ ველში. ექსტრემალეების ცენტრალური ველი ეწოდება ისეთი ექსტრემალეების სიმრავლეს რომლებიც იკვეთებიან მხოლოდ ცენტრში და სხვა წერტილებში არ იკვეთებიან (ნახ. 3.6.).



ნახ. 3.6. ექსტრემალეების ცენტრალური ველი

ექსტრემალეების ცენტრალური ველი აღიწერება შემდეგი განტოლებით  $y = y(x, C)$ . ამ ექსტრემალთა ოჯახის ექსტრემალის რაიმე წერტილში გავლებული მხების  $p(x, y)$  საკუთხო კოეფიციენტს, ველის დახრილობა ეწოდება შესაბამის წერტილში.

$E$  ფუნქციას ეწოდება ვაიერშტრასის ფუნქცია, თუ ის მოიცემა ტოლობით:

$$E(x, y, y', p) = f(x, y, y') - f(x, y, p) - (y' - p)f'_p(x, y, p). \quad (3.228)$$

**თეორემა (სუსტი მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები):**

$y^* \in C^1[a; b]$  ფუნქცია წარმოადგენს (3.222) ფუნქციონალის სუსტი ექსტრემუმის წერტილს, თუ ადგილი აქვს პირობებს:

- 1)  $y(x)$  ფუნქცია წარმოადგენს  $J[y]$  ფუნქციონალის ექსტრემალს ანუ ამ ფუნქციისათვის, პირველი ვარიაცია ნულის ტოლია;
- 2) იაკობის პირობებს;
- 3) ამ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ლეჟანდრის გამლიერებულ პირობას:  $P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x))|_{y=y^*} > 0, x \in (a, b)$ ;

ან

ვაიერშტრასის პირობას:  $E(x, y, y', p) \geq 0$  იმ  $(x, y)$  წარტილებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ექსტრემალის სიახლოვეში და რომელთათვისაც  $y'$  ახლოსაა  $p$  დახრილობასთან;



**P.S.** თუ ამ თეორემაში ადგილი აქვს  $E(x, y, y', p) \leq 0$  პირობას ვაიერშტრასის ფუნქციისათვის ან  $f''_{y'y'} < 0$  ლეჟანდრის გაძლიერებულ პირობას, მაშინ გვაქვს სუსტი მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

**თეორემა (ძლიერი მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები):**

$y^* \in C[a; b]$  ფუნქცია წარმოადგენს (3.222) ფუნქციონალის ძლიერი ექსტრემუმის წერტილს, თუ ადგილი აქვს პირობებს:

- 1)  $y(x)$  ფუნქცია წარმოადგენს  $J[y]$  ფუნქციონალის ექსტრემალს ანუ ამ ფუნქციისათვის, პირველი ვარიაცია ნულის ტოლია;
- 2) იაკობის პირობებს;
- 3) ამ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ლეჟანდრის პირობას:

$$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, x \in (a; b),$$

ნებისმიერი ექსტრემალისათვის;

ან

**ვაიერშტრასის პირობას:**  $E(x, y, y', p) \geq 0$  იმ  $(x, y)$  წერტილებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ექსტრემალის სიახლოვეში და რომელთათვისაც  $y'$  ნებისმიერია;

**P.S.** თუ ამ თეორემაში ადგილი აქვს  $E(x, y, y', p) \leq 0$  პირობას ვაიერშტრასის ფუნქციისათვის, ან  $f''_{y'y'} < 0$  ლეჟანდრის პირობას, მაშინ გვაქვს ძლიერი მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

**მაგალითი.** იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თუ

$$J[y] = \int_1^2 (y' + 2(y')^3) dx, y(1) = 2, y(2) = 6. \quad (3.229)$$

**ამოხსნა:** ა) ვიპოვოთ ამ ფუნქციონალის  $y^*$  ექსტრემალეები. ამისათვის ჩავწეროთ შესაბამისი ეილერის განტოლება, რადგან ინტეგრანტი

$f = y' + 2(y')^3$  არაა დამოკიდებული  $x, y$  ცვლადებზე, მისი ეილერის განტოლება იქნება:  $y'' = 0$  ანუ  $y = C_1 x + C_2$ .

ბ) სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$y(1) = C_1 + C_2 = 2,$$

$$y(2) = 2C_1 + C_2 = 6.$$

მაშასადამე,  $C_1 = 4$  და  $C_2 = -2$ . შესაბამისად, მივიღეთ ექსტრემალი

$$y^*(x) = 4x - 2.$$

შევამოწმოთ ძლიერი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

გ) იაკობის პირობები:

შევადგინოთ იაკობის (3.227) განტოლება:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y}\right) h(x) - \frac{d}{dx} (f''_{y'y'} h') = 0.$$

ჩვენი ფუნქციონალისათვის:

$$y' = 4, f''_{yy} = 0, f''_{y'y} = 0, f''_{y'y'}|_{y=y^*} = 12y'|_{y=y^*} = 48. \text{ მაშინ, იაკობის}$$

განტოლებას ექნება სახე:  $\frac{d}{dx} (48h') = 0$  ანუ  $h''(x) = 0 \Rightarrow h(x) = Ax + B$ . იმ პირობიდან, რომ  $h(a) = h(1) = 0$  გამომდინარეობს  $A + B = 0$  ანუ  $A = -B$ . მაშინ გვექნება, რომ  $h(x) = Ax + B \Rightarrow h(x) = A(x - 1)$ . არატრივიალური იქნება ეს ამონახსნი თუ  $A \neq 0$ . ტრივიალური იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა  $x = 1$ , ხოლო თუ  $x \in (1; 2]$  ის არაა ნული. მაშასადამე, **იაკობის პირობა სრულდება.**

დ) რადგან ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლეჟანდრის პირობა. ცხადია, რომ

$$f''_{y'y'} = 12y'. \text{ ეს ფუნქცია კი ნიშანცვლადია, ამიტომ შესასწავლი}$$

ფუნქციონალის ძლიერი მაქსიმუმის ან ძლიერი მინიმუმის საკითხი ღიაა.

**შევისწავლოთ ახლა სუსტი ექსტრემუმის არსებობის საკითხი:**

ა) იაკობის პირობები სრულდება;

ბ) გაძლიერებული ლეჟანდრის პირობა გვაძლევს, რომ

$$f''_{y'y'}|_{y=y^*} = 12y'|_{y^*(x)=4x-2} = 12 \cdot 4 = 48 > 0.$$

რაც იმის მანიშნებელია, რომ  $y^*(x) = 4x - 2$  ექსტრემალზე ჩვენი ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს:

$$\min J[y^*] = \int_1^2 (4 + 2 \cdot 4^3) dx = 132.$$

**მაგალითი.** იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თუ

$$J[y] = \int_0^1 (y^2 + (y')^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (3.230)$$

**ამოხსნა:** ამ ფუნქციონალის ინტეგრანტი  $f = y^2 + (y')^2$  არაა დამოკიდებული  $x$  ცვლადზე. მისთვის ეილერის განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$y^*(x) = \frac{e}{e^2-1} e^x + \frac{e}{1-e^2} e^{-x}.$$

შევამოწმოთ ძლიერი ექსტრემუმის პირობები:

ა) შევადგინოთ იაკობის განტოლება:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y}\right) h(x) - \frac{d}{dx} (f''_{y'y'} h') = 0.$$

ამისათვის გამოვთვალოთ შესაბამისი წარმოებულები:  $f''_{yy} = 2$ ,  $f''_{y'y} = 0$ ,  $f''_{y'y'} = 2$ . მაშინ იაკობის განტოლება მიიღებს სახეს;

$$2h - 2h'' = 0 \text{ ანუ } h'' - h = 0.$$

მაშასადამე,  $h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ . საწყისი პირობიდან  $h(0) = 0$  ე.ი.  $C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$  ანუ

$h(x) = C_1 e^x - C_1 e^{-x} = C_1 (e^x - e^{-x})$ . ცხადია, რომ თუ  $C_1 \neq 0$  მაშინ

$h(x) \neq 0, x \in (0; 1]$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობები სრულდება.

ბ) ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა  $y'$ -ის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია შევამოწმოთ ლეჟანდრის პირობა:  $f''_{y'y'} = 2 > 0$

ნებისმიერი  $y'$  ფუნქციისათვის, მაშასადამე  $y^*(x) = \frac{e}{e^2-1} e^x + \frac{e}{1-e^2} e^{-x}$  ექსტრემალი მოცემული ფუნქციონალის ძლიერი მინიმუმის და მაშასადამე სუსტი მინიმუმის წერტილიცაა.

**მაგალითი.** იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემუმი, თუ

$$J[y] = \int_{-1}^0 (12xy - (y')^2) dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (3.231)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, გვაქვს ინტეგრანტი:

$$f = 12xy - (y')^2.$$

ადვილი საპოვნელია შესაბამისი ეილერის განტოლების ამონახსნი:  $y^*(x) = -x^3$ . შევამოწმოთ ძლიერი ექსტრემუმი არსებობის პირობები:

ა) შევადგინოთ შესაბამისი იაკობის განტოლება:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y}\right) h(x) - \frac{d}{dx} (f''_{y'y'} h') = 0$$

ჩვენი ინტეგრანტისათვის:  $f''_{yy} = 0$ ,  $f''_{y'y} = 0$ ,  $f''_{y'y'} = -2$ . მაშასადამე,  $\frac{d}{dx} (2h') = 0 \Rightarrow h' = C_1 \Rightarrow h(x) = C_1 x + C_2$ . სასაზღვრო პირობიდან  $h(-1) = -C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_1$ . ე.ი.  $h(x) = C_1 (x + 1)$ . ცხადია, რომ თუ  $C_1 \neq 0$  მაშინ  $h(x) \neq 0, x \in (-1; 0]$ . რაც იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობები შესრულებულია.

ბ) ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა  $y'$ -ის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია შევამოწმოთ ლეჟანდრის პირობა:  $f''_{y'y'} = -2 < 0$  ნებისმიერი  $y'$  ფუნქციისათვის, მაშასადამე  $y^*(x) = -x^3$  ექსტრემალი

მლიერი მაქსიმუმის წერტილია მოცემული ფუნქციონალისათვის და  $\max J[y^*] = \int_{-1}^0 (-12x^4 - 9x^4) dx = -\frac{21}{5}$

### ამოცანები

1. იპოვეთ მანძილი  $y_1(x) = x^2$  და  $y_2(x) = x^3$  ფუნქციებს შორის:

ა)  $C[0; 1]$  ნორმით, ბ)  $C^1[0; 1]$  ნორმით.

2. იპოვეთ  $C^1[a; b]$  ბანახის სივრცეში განსაზღვრული ფუნქციონალების პირველი ვარიაცია:

ა)  $J[y] = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + y^2} dx$ ; ბ)  $J[y] = \int_{-1}^1 (y' e^y + xy^2) dx$ ;

გ)  $J[y] = \int_0^\pi y' \sin y dx$ ; დ)  $J[y] = \int_0^1 (xy + (y')^2) dx + y^2(0)$ .

3. იპოვეთ ფრეშეს და გატოს დიფერენციალი შემდეგი ფუნქციონალებისათვის:

ა)  $J[y] = \int_a^b (x + y) dx$ ; ბ)  $J[y] = \int_a^b (y^2 - (y')^2) dx$ ;

გ)  $J[y] = y^2(0) + \int_0^1 (2xy + 3(y')^2) dx$ ;

დ)  $J[y] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx$ .

3. იპოვეთ მოცემული ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალები:

ა)  $J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 12xy) dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ ;

ბ)  $J[y] = \int_\pi^{2\pi} (4(y')^2 - 7yy' - y^2) dx$ ,  $y(\pi) = 0$ ,  $y(2\pi) = 0$ ;

გ)  $J[y] = \int_0^1 (y')^2 e^{\cos y'} dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -4$ ;

დ)  $J[y] = \int_0^1 ((y')^2 - x^6 y' - 2xy) dx$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = -\frac{1}{6}$ ;

4. სიბრტყეზე მდებარე ორი  $(x_1, y_1)$  და  $(x_2, y_2)$  წერტილის შემაერთებელ წირებს შორის, ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც აბსცისათა ღერძის გარშემო ბრუნვისას, შემოწერს უმცირესი ფართობის ზედაპირს.

5. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი  $y'' = \varphi(x, y, y')$  სახის დიფერენციალური განტოლებისათვის, რომლის მარჯვენა მხარეც ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, შესაძლებელია ისეთი  $L(x, y, y')$  ფუნქციის პოვნა, რომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები, იქნებიან  $J[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx$  ფუნქციონალის ექსტრემალები.

6. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალების ექსტრემალები:

ა)  $J[y_1, y_2] = \int_1^3 (x(y'_1)^2 (y'_2)^2 + xy_1 y_2) dx$ ,  $y_1(1) = 1$ ,  $y_1(3) = \ln 3 + 1$ ,

$$y_2(1) = 0, y_2(3) = 0.$$

$$\text{ბ)} J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2y_1 - 4y_2^2 + (y_2')^2 - (y_1')^2) dx, y_1(0) = 0, y_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$y_2(0) = 0, y_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\text{გ)} J[y_1, y_2] = \int_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1) dx, y_1(0) = 1, y_1(1) = 1.5,$$

$$y_2(0) = 1, y_2(1) = 1.$$

$$\text{დ)} J[y_1, y_2] = \int_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx, y_1(0) = 1, y_1(3) = 7,$$

$$y_2(0) = -2, y_2(3) = 1.$$

7. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალების ყველა ექსტრემალი:

$$\text{ა)} J[y] = \int_0^1 (120xy - y'') dx, y(0) = 0, y(1) = 1, y'(0) = 0, y'(1) = 6;$$

$$\text{ბ)} J[y] = \int_0^b ((y')^2 + (y'')^2) dx, y(0) = 0, y(b) = 0, y'(0) = 0, y'(b) = 0;$$

$$\text{გ)} J[y] = \int_0^1 ((y''')^2 - (y'')^2) dx, y(0) = 0, y''(0) = 0, y'(0) = 1,$$

$$y'(1) = ch1, y(1) = y''(1) = sh1;$$

$$\text{დ)} J[y] = \int_0^1 (y''')^2 dx, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y(1) = 1, y'(1) = 4,$$

$$y''(1) = 12;$$

8. მოცემული ფუნქციონალებისათვის შეადგინეთ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება:

$$\text{ა)} J[z] = \iint \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \text{ სადაც ინტეგრება ხორციელდება ბრტყელ } D \subset \mathbb{R}^2 \text{ არეზე;}$$

$$\text{ბ)} J[u] = \iiint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2uf(x, y, z) \right] dx dy dz, \text{ სადაც ინტეგრება ხორციელდება სამგანზომილებიან } D \subset \mathbb{R}^3 \text{ არეზე.}$$

9. ვთქვათ მოცემული  $F(x, \mathbf{y}, \mathbf{p})$  და  $H(x, \mathbf{y}, \mathbf{p})$  ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს:  $F'_x \neq 0$  და  $H'_x \neq 0$ . დაამტკიცეთ, რომ თუ  $H(x, \mathbf{y}, \mathbf{p})$  რომელიმე ვარიაციული ამოცანის ჰამილტონიანია, მაშინ ეილერის განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ინტეგრალური წირისათვის ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + [F, H].$$

9. იპოვეთ მოძრავ საზღვრებიანი ფუნქციონალების ექსტრემალები:

$$\text{ა)} \int_0^b (y')^2 dx \rightarrow \text{extr}, y(0) = 0, y(b) + b + 1 = 0;$$

ბ) იპოვეთ უმოკლესი მანძილი  $y = x^2$  და  $y = x - 5$  ფუნქციის გრაფიკებს შორის სიბრტყეზე;

გ)  $J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow exstr$ , მარცხენა საზღვარი  $a$  მოძრაობს  $y = \varphi(x) = x^2$  პარაბოლაზე, ხოლო მარჯვენა  $b$  საზღვარი  $y = \psi(x) = x$  წრფეზე;

10. ამოხსენით პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ფუნქციონალებისათვის:

ა)  $J[y, z] = \int_0^1 y'z' dx, y(0) = y(1) = z(0) = 0, z(1) = 1, \int_0^1 xy dx = 0, \int_0^1 xz dx = 0;$

ბ)  $J[y, z] = \int_0^1 ((y')^2 + (z')^2) dx, y(0) = y(1) = z(0) = z(1) = 0, \int_0^1 yz dx = -2;$

გ)  $J[y] = \int_0^\pi y \sin x dx \rightarrow exstr, y(0) = 0, y(\pi) = \pi, \int_0^\pi (y')^2 dx = \frac{3\pi}{2}.$

11. გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქციონალები:

ა)  $J[y] = \int_0^a ((y')^2 + 2yy' - 16y^2) dx, y(0) = 0, y(a) = 0, a > 0;$

ბ)  $J[y] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y') dx, y(1) = 3, y(2) = 5;$

გ)  $J[y] = \int_0^1 ((y')^2 + y^2 + 2ye^{2x}) dx, y(0) = \frac{1}{3}, y(1) = \frac{1}{3}e^2;$

დ)  $J[y] = \int_0^1 (x^2 + \varepsilon(y')^2 + y^2) dx, y(0) = 0, y(1) = 1.$  გამოიკვლიეთ  $\varepsilon$  პარამეტრის მიხედვით.

## ლიტერატურა

1. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании, уч. пос., финансы и статистика, М., 1999,
2. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad, уч. пос., изд. „Лан“, СПб, 2008,
4. Пантелеев А.Б., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах, уч. пос., М, 2005,
5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление, Наука, М., 1973,
6. Эльсгольц Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, учебник МГУ им. М.В. Ломоносова, М., 1958,

7. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление, учебник для вузов, изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана, М., 2006,

8. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах, уч. пос., МАИ, М., 2000.

### 3.7. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები

სივრცეში, მატერიალური წერტილის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{r}$  რადიუს-ვექტორი, რომლის კოორდინატებიც ემთხვევა ამ წერტილის დეკარტულ კოორდინატებს  $\vec{r}(x, y, z)$ . ამას გარდა, მატერიალური წერტილის დინამიკის დასახასიათებლად გამოიყენება  $\vec{v} = \dot{r}(t)$  სიჩქარე და  $\vec{W} = \dot{r}(t)$  აჩქარება. თუ, მოცემული გვაქვს  $n$ -მატერიალური წერტილი, მაშინ მათი განლაგების დასახასიათებლად დაგვჭირდება  $n$  - ცალი რადიუს-ვექტორი და მაშასადამე,  $3n$  კოორდინატი.

**განსაზღვრება:** იმ პარამეტრების მინიმალურ რაოდენობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას - მისი თავისუფლების ხარისხი ეწოდება.

$n$  - მატერიალური წერტილის შემთხვევაში, სამგანზომილებიან სივრცეში სისტემის თავისუფლების ხარისხი  $3n$  - ის ტოლია.

**P.S.** ეს პარამეტრები არაა აუცილებელი, რომ წერტილთა დეკარტის კოორდინატები იყვნენ.

**განსაზღვრება:** ნებისმიერ  $q_1, q_2, \dots, q_n$  პარამეტრების ერთობლიობას, რომლებიც ცალსახად ახასიათებენ სისტემის განლაგებას,  $n$ - თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემის განზოგადებულ კოორდინატებს უწოდებენ, ხოლო მათი, დროით წარმოებულების ერთობლიობას:  $\dot{q}_i$ , განზოგადებულ სიჩქარეებს.

### 3.7.1. ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი

სისტემის მხოლოდ კონფიგურაციის ცოდნა, არაა საკმარისი იმის გასაგებად, თუ რა მდგომარეობა ექნება სისტემას დროის სხვა მომენტებში. როგორც ექსპერიმენტებით იქნა დადგენილი, მექანიკური სისტემის მდგომარეობის საპოვნელად დროის ნებისმიერ მომენტში, უნდა ვიცოდეთ სისტემის საწყისი კონფიგურაცია  $q_i(0)$  და შემადგენელი მატერიალური წერტილების საწყისი  $\dot{q}_i(0)$  სიჩქარეები. ამ ორი ძირითადი ფიზიკური პარამეტრის ცოდნა, კლასიკურ მექანიკაში, საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ  $\ddot{q}_i$  აჩქარებებიც დროის ნებისმიერ მომენტში.

თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i(t_1)$  მდგომარეობიდან  $q_i(t_2)$  მდგომარეობაში, მაშინ ჭეშმარიტი მოძრაობის საპოვნელად, უნდა ვისარგებლოთ ჰამილტონის უმცირესი ქმედების პრინციპით.

ეს პრინციპი მოითხოვს რომ, თუ, სისტემა გადაადგილდება  $q_i(t_1)$  მდგომარეობიდან, რომელიც დროის  $t_1$  მომენტში ეკავა, ახალ,  $q_i(t_2)$  მდგომარეობაში დროის  $t_2$  მომენტისათვის, მაშინ ინტეგრალს ამ დროის მომენტებს შორის მოცემული  $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$  ფუნქციიდან, რომელსაც ლაგრანჟიანს უწოდებენ, იყოს ექსტრემალური ანუ ნულს უნდა უდრიდეს ქმედების  $W$  ინტეგრალის პირველი ვარიაცია  $\delta W = 0$ .

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (3.232)$$

ეხლა, ჰამილტონის პრინციპზე დაყრდნობით გამოვიყვანოთ მოძრაობის განტოლება.

ზოგადობის შეუზღუდავად, განვიხილოთ ისეთი სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხიც ერთი ტოლია. ასე, რომ საპოვნელია  $q(t)$  ფუნქცია, რომელიც ექსტრემუმს მიაჩქებს  $W$  ქმედების ინტეგრალს ლაგრანჟიანიდან და სისტემას გადაიყვანს  $q(t_1)$  მდგომარეობიდან, რომელიც დროის  $t_1$  მომენტში ეკავა, ახალ,  $q(t_2)$  მდგომარეობაში დროის  $t_2$  მომენტისათვის.



ვთქვათ  $q(t)$  ჩვენი საძებნი ფუნქციაა. მივცეთ მას მცირე  $\delta q(t)$  ნაზრდი - ვარიაცია, მაშინ გვექნება ახალი  $q(t) + \delta q(t)$  ფუნქცია. რადგან ამ ფუნქციამ უნდა გაიაროს  $q(t_1)$  და  $q(t_2)$  წერტილებში, ცხადია რომ

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (3.233)$$

შესანიშნავია ის ფაქტი, რომ ჩვენ ვეძებთ გადაადგილების ვარიაციას და თვითონ გადაადგილება ჯერ არ ვიცით. ქმედების ინტეგრალის ექსტრემუმის საპოვნელად, მისი პირველი ვარიაცია ნულს უნდა გავუტოლოთ

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad (3.234)$$

თუ, პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას გავშლით ტეილორის ფორმულით და შევინარჩუნებთ, მხოლოდ წრფივ წევრებს, გვექნება

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0, \quad (3.235)$$

სადაც  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q)$ , ამ ფაქტის გათვალისწინებით და (3.235) ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (3.236)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.233) სასაზღვრო პირობებს გადაადგილების პირველი ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ (3.236) ფორმულაში პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშინ ცხადია, რომ მეორე ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაც უნდა ნულის ტოლი იყოს. ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის განტოლება ლაგრანჟის ფორმით

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.237)$$

$n$  თავისუფლების ხარისხის შემთხვევაში  $q_1, q_2, \dots, q_n$  ცვლადებისათვის, ცალცალკე უნდა შევადგინოთ განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციები  $q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \dots, q_n + \delta q_n$ . მაშინ, ანალოგიურ პროცედურას, მივყავართ ლაგრანჟის ცნობილ განტოლებებამდე

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.238)$$

თუ, მოცემული სისტემისათვის ცნობილია ლაგრანჟიანის სახე, მაშინ (3.238) განტოლებები წარმოადგენენ მოძრაობის განტოლებებს და ცნობილი საწყისი პირობების  $q_i(0); \dot{q}_i(0)$  შემთხვევაში ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის ევოლუციას.

ლ.ლანდაუსა და ე.ლიფშიცის წიგნში დასაბუთებულია, რომ თავისუფალი, არაურთიერთქმედი ნაწილაკებისათვის, ერთგვაროვან, იზოტროპულ სივრცეში, ლაგრანჟიანი პირდაპირპროპორციულია განზოგადებული სიჩქარეების კვადრატისა და თუ, პროპორციულობის კოეფიციენტად მასის ნახევარს ავიღებთ, მივიღებთ რომ ლაგრანჟიანი სისტემის კინეტიკური ენერჯის ტოლია

$$L = T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2}. \quad (3.239)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც მატერიალური ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ გარკვეული კანონით, რომელიც მოიცემა პოტენციალური ენერჯის  $V(q_1, q_2, \dots, q_n)$  ფუნქციით, როგორც ექსპერიმენტებმა აჩვენეს, ლაგრანჟიანს აქვს სახე

$$L = T - V = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.240)$$

პოტენციალური ენერჯის ფუნქცია ისეთია, რომ სისტემის თითოეულ ნაწილაკზე მოქმედი ძალა გამოითვლება ფორმულით

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (3.241)$$

როცა, პოტენციალური ენერგია არაა დამოკიდებული სიჩქარეებზე, (3.238) განტოლებებიდან, (3.240) და (3.241) ფორმულების გათვალისწინებით, მიიღება ნიუტონის დინამიკის ცნობილი განტოლებები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემისათვის

$$m_i \ddot{q}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (3.242)$$

### 3.7.2. ლაგრანჟიანის თვისებები

განვიხილოთ, ურთიერთქმედი ნაწილაკებისაგან შემდგარი სისტემის ლაგრანჟიანი. მისი სრული წარმომავალი იქნება

$$\frac{d}{dt} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.243)$$

ასე, რომ

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.244)$$

ა) ჩაკეტილი სისტემების შემთხვევაში ანუ როდესაც ნაწილაკები არ ურთიერთქმედებენ გარე ძალებთან, ლაგრანჟიანი არაა დამოკიდებული დროზე  $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$ . ამიტომ, ასეთი სისტემის ენერგია მუდმივი სიდიდეა (სისტემა კონსერვატულია)

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const}. \quad (3.245)$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.240) ტოლობას, მივიღებთ

$$E = T + V. \quad (3.246)$$

ბ) ანუ ჩაკეტილი სისტემის მთლიანი მექანიკური ენერგია, კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიის ჯამის ტოლია.

თუ, გავითვალისწინებთ ლაგრანჟიანის განსაზღვრებას, შეგვიძლია განვსაზღვროთ განზოგადებული ძალები ფორმულით

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (3.247)$$

ასევე, განისაზღვრება განზოგადებული იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.248)$$

რომელთათვისაც ტოლობა  $p_i = m_i \dot{q}_i$  სრულდება მხოლოდ დეკარტულ კოორდინატებში. ამ ორი განსაზღვრების შემდეგ, ლაგრანჟის განტოლება შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით

$$\dot{p}_i = F_i. \quad (3.249)$$

ცხადია რომ, თუ რომელიმე განზოგადებული  $q_k$  კოორდინატა, არ შედის ლაგრანჟიანში, მაშინ მისი შესაბამისი განზოგადებული ძალაც არ შედის (3.249) განტოლებათა სისტემაში და მაშასადამე, შესაბამისი იმპულსი  $p_k = const$ .

**განსაზღვრება:** იმ კოორდინატებს, რომლებიც არ შედიან ლაგრანჟიანში, ციკლურ კოორდინატებს უწოდებენ.

ცხადია, რომ ციკლური კოორდინატების არსებობა, გვიმარტივებს დინამიკის განტოლებების ამოხსნას. ზემოთ მოყვანილი, იმპულსის (3.248) განსაზღვრის გათვალისწინებით, მექანიკური სისტემის ენერჯიის (3.246) ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$E = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (3.250)$$

თუ, სისტემა ჩაკეტილია და სივრცე ერთგვაროვანია, მაშინ სისტემის შიგნით ნაწილაკებზე მოქმედი ძალების ჯამი ნულის ტოლია  $\sum_i F_i = 0$ . ამ კანონს ჩვენ ვიცნობთ ორი ძალისათვის ნიუტონის მესამე კანონის სახელწოდებით. ამ შემთხვევაში, (3.249) ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ რომ

$$\sum_i p_i = 0. \quad (3.251)$$

გ) ანუ ჩაკეტილი სისტემის იმპულსების ჯამი მუდმივი სიდიდეა.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, ჩაკეტილი სისტემისათვის, სივრცისა და დროის ერთგვაროვნების თვისებიდან გამომდინარეობს ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონები. ეს შედეგები არიან, უფრო ზოგადი ემა ნიოტერის თეორემის კერძო შემთხვევები, რომელიც ამბობს რომ ლაგრანჟიანის გარდაქმნის ყოველი ჯგუფისათვის, დამახასიათებელია ამ გარდაქმნასთან დაკავშირებული ინვარიანტები. სივრცის ტრანსლაციის ჯგუფები გვაძლევენ ენერჯისა და იმპულსის შენახვის კანონებს; ბრუნვითი მოძრაობის ინვარიანტები - იმპულსის მომენტის მუდმივობის კანონს . . .

### 3.7.3. განზოგადებული იმპულსის თვისებები

განზოგადებული კოორდინატები და სიჩქარეები ლაგრანჟის ფორმალიზმში, განიხილებიან როგორც დამოუკიდებელი ცვლადები. ამას გარდა, ჩვენ განვიხილეთ განზოგადებული იმპულსის ცნებაც. მისი ღრმა და არატრივიალური ხასიათი ნათლად ჩანს ჰამილტონური სისტემების ფაზური სივრცის გეომეტრიის განხილვისას.

იმპულსების კოვარიანტული ხასიათის ყველაზე უფრო ნათელი გამოვლინებაა, ის ფაქტი, რომ შესაძლებელია მათი წარმოდგენა, სკალარული ველის გრადიენტულ ველად. ამის დასამტკიცებლად, დავუბრუნდეთ ქმედების ინტეგრალს. მოცემული ექსტრემალური წირისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ლაგრანჟის განტოლებებს, განვიხილოთ ახალი ექსტრემალური ამოცანა. სხვადასხვა ექსტრემალელებისათვის, რომელთაც საერთო საწყისი წერტილი აქვთ. ბოლო წერტილს კი ვაძლევთ მცირე ვარიაციას და ვხსნით იგივე ვარიაციულ ამოცანას

$$\delta W = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0. \quad (3.252)$$

რადგან ვხსნით იგივე ამოცანას, ინტეგრალი ნულის ტოლია და (3.252) განტოლებაში გვრჩება მხოლოდ საზღვრის წერტილებში მნიშვნელობები. საწყისი წერტილი დაფიქსირებულია  $\delta q(t_1) = 0$ . აღვნიშნოთ  $\delta q(t_2)$ , როგორც  $\delta q$  და გავითვალისწინოთ, რომ  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ . მაშინ (3.252) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ  $\delta W = p \delta q$ , ან სხვანაირად,  $n$  თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემისათვის გვექნება

$$\delta W = \sum_i p_i \delta q_i, \quad (3.253)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (3.254)$$

მაშასადამე, იმპულსები წარმოადგენენ ქმედების სკალარული ველის გრადიენტს, მოცემული ექსტრემალის გასწვრივ, დროის მოცემულ მომენტში.

რაც შეეხება განზოგადებულ სიჩქარეებს, მათი ველი საზოგადოდ, არაა კოვარიანტული ანუ მათი წარმოდგენა გრადიენტულ ველად საზოგადოდ შეუძლებელია.

### 3.7.4. ჰამილტონის ფორმალიზმი

ჰამილტონის მექანიკაში, მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებისა და განზოგადებული  $p_i$  იმპულსების ცვლადებში. თუმცა, ფიზიკური შინაარსის მიხედვით ჰამილტონური ფორმალიზმი, არ განსხვავდება ლაგრანჟის ფორმალიზმისაგან, მაგრამ უფრო ესადაგება კვანტური მექანიკის, სტატისტიკური მექანიკისა და შემფოთებათა თეორიის გადმოცემის სილამაზეს. კერძოდ, ჰამილტონური ფაზური

სივრცის ცნება, გაცილებით ამარტივებს ჰამილტონური სისტემების ინტეგრებადობის საკითხის შესწავლასა და იმ ქაოსური რეჟიმების აღწერას, რომლებიც შეიძლება არსებობდეს არაინტეგრებად დეტერმინირებულ სისტემებში.

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება **ლეჟანდრის გარდაქმნით**

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3.255)$$

აქ,  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$  არიან  $n$  განზომილებიანი ვექტორები, ხოლო  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  სიდიდეს ჰამილტონიანი ეწოდება. როგორც ვიცით,

$$p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}, t), \quad (3.256)$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის თანახმად, (3.256) ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს  $\dot{q}_i$  გამოვსახოთ  $p_i$  ცვლადის საშუალებით, თუ,  $\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| \neq 0$ .

განვიხილოთ მაგალითი, თუ როგორ უნდა გადავიდეთ ლაგრანჟის ფორმალიზმიდან ჰამილტონის ფორმალიზმზე:

განვიხილოთ ლაგრანჟიანი

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{q}_i^2}{2} - V(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (3.257)$$

ვიპოვოთ შესაბამისი იმპულსები

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m_i \dot{q}_i. \quad (3.258)$$

შებრუნებული გარდაქმნა გვაძლევს

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}. \quad (3.258)$$

მაშასადამე, შესაბამის ჰამილტონიანს ექნება სახე

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right) - \left\{ \frac{1}{2} m_i \left( \frac{p_i}{m_i} \right)^2 - V(q_1, q_2, \dots, q_n) \right\}. \quad (3.259)$$

### 3.7.5. ჰამილტონის განტოლებები

ლაგრანჟის განტოლებები, მიიღებოდა სისტემის ლაგრანჟიანზე ჰამილტონის პრინციპის გამოყენებით. ეხლა ცხადია, რომ ჩვენ გვინდა მოძრაობის განტოლებები გამოვიყვანოთ ჰამილტონის ფორმალიზმის ფარგლებში. (3.259) ფორმულიდან გამომდინარე, ვიპოვოთ ჰამილტონის ფუნქციის სრული დიფერენციალი

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.260)$$

მარჯვენა მხარეში, პირველი და მესამე წევრი ერთმანეთს აბათილებს რადგან  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . ამას გარდა  $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ (3.260) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (3.261)$$

მაგრამ, რადგან

$$dH(p, q, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (3.262)$$

ცხადია, რომ (3.261), (3.262) განტოლებებიდან, შეგვიძლია ჩავწეროთ ჰამილტონის კანონიკური განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.263)$$

ამას გარდა, თუ სისტემის ლაგრანჟიანი და ჰამილტონიანი ცხადადაა დამოკიდებული დროზე, გვექნება დამატებით თანადობა

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.264)$$



**P.S.** ჰამილტონის კანონიკური (3.263) განტოლებათა სისტემა შედგება  $2n$  პირველი რიგის განტოლებისაგან, მაშინ როცა შესაბამისი ლაგრანჟის განტოლებათა სისტემა შედგებოდა  $n$  ცალი მეორე რიგის განტოლებისაგან.

ჰამილტონის (3.263) განტოლებებს, გააჩნიათ რიგი საინტერესო თვისებებისა. ჩვენ ჯერჯერობით განვიხილავთ ისეთ ჰამილტონიანებს, რომლებიც დროზე არა არიან ცხადად დამოკიდებული. ამ სისტემის კანონიკური ცვლადები  $p_i$  და  $q_i$ , რომელთა სერთო რაოდენობაა  $2n$ , ემნიან ფაზურ სივრცეს. დროის განმავლობაში  $\mathbf{p}(t)$  და  $\mathbf{q}(t)$  ცვლადები  $2n$  განზომილებიან ფაზურ სივრცეში შემოწერენ გარკვეულ არეს. ისმის კითხვა, თუ როგორია ეს არე და რა ზოგადი თვისებები შეიძლება ჰქონდეს მას.

ადვილი შესამჩნევია, რომ (3.263) განტოლებებიდან მიიღება ლიუვილის ცნობილი ფორმულა „უკუმშვადი სითხეებისათვის“, ამჯერად, სითხის როლს თამაშობს ფაზური სივრცის ნაკადის „ნაწილაკი“

$$\sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} = 0. \quad (3.265)$$

**P.S.** ასე, რომ ჰამილტონური სისტემის ფაზური ნაკადის ელემენტის მოცულობა არ იცვლება, თუმცა, გადაადგილებისას დეფორმირდება.

ჰამილტონის განტოლებები, იმდენად სიმეტრიულია  $\mathbf{p}(t)$  და  $\mathbf{q}(t)$  ცვლადების მიმართ, რომ ზოგჯერ მათ თვლიან თანაბარი უფლების მქონე დამოუკიდებელ ცვლადებად და განიხილავენ ახალ ცვლადს,  $2n$  კომპონენტით  $\mathbf{z} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ . ეს, საშუალებას იძლევა ახალი ჰამილტონიანისათვის  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = H(\mathbf{z})$ , ჰამილტონის განტოლება ჩაიწეროს მოკლედ

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J} \cdot \nabla H(\mathbf{z}), \quad (3.266)$$

სადაც  $\mathbf{J}$  სიმპლექტური მატრიცაა ზომებით  $2n \times 2n$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.267)$$

1 - ერთეულოვანი მატრიცაა.

### 3.7.6. პუასონის ფრჩხილები

ჰამილტონის განტოლებების ინტეგრებადობის ამოცანა, ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი საკითხია. თუ, სისტემის თავისუფლების ხარისხია ერთი და მაშასადამე, აღიწერება ორი კანონიკური ცვლადით  $(p, q)$ , მაშინ ის ინტეგრებადია. ასეთი შემთხვევები, ჩვენ უკვე განვიხილეთ კურსის მეორე ნაწილში. თავისუფლების ხარისხის რიცხვის მიუხედავად, სისტემის ამოხსნისას, ყველაზე მნიშვნელოვანია ინტეგრალების პოვნის პროცედურა. ჰამილტონის მიდგომას, მივყავართ, დინამიკური ცვლადების დროზე დამოკიდებულების, მოხდენილად პოვნამდე.

განვიხილოთ რაიმე ფუნქცია  $f = f(p, q, t)$ , ვიპოვოთ მისი სრული წარმოებული დროით

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{dH}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dH}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [H, f] + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.268)$$

სადაც  $[H, f]$  - პუასონის ფრჩხილებია  $H$  და  $f$  ფუნქციებისათვის. მჭიდრო კავშირი არსებობს კლასიკური მექანიკის პუასონის ფრჩხილებსა და კვანტური მექანიკის კომუტატორის ცნებებს შორის. მართლაც, პუასონის ფრჩხილები შეგვიძლია ჩავწეროთ ნებისმიერი ორი ფუნქციისათვის

$$[g, f] = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dg}{dp_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{dg}{dq_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \quad (3.269)$$

თუ, რომელიმე დინამიკური ცვლადი არაა დამოკიდებული დროზე, ანუ,  $f = f(p, q)$  მაშინ მისი პუასონის ფრჩხილები ნულის ტოლია და მაშასადამე, ის მუდმივი სიდიდეა, რაც ნათლად ჩანს (3.268) ფორმულიდან. ცხადია, რომ დროზე დამოუკიდებელი სისტემებისათვის, სისტემის ენერგია  $E = H$  მუდმივი სიდიდეა, რადგან ჰამილტონიანის თავის თავთან პუასონის ფრჩხილები ნულის ტოლია.

პუასონის ფრჩხილების განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ნებისმიერი სამი ფუნქციისათვის, შეგვიძლია ჩამოვაცალიბოთ რიგი თვისებებისა

$$[f, g] = -[g, f]; \quad (3.270)$$

$$[f + g, h] = [f, h] + [g, h]; \quad (3.271)$$

$$[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]; \quad (3.272)$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (3.273)$$

პუასონის ფრჩხილების (3.273) თვისებას იაკობის იგივეობას უწოდებენ. ეს თვისებები ნათელყოფს, რომ პუასონის ფრჩხილები შეესაბამება ლის ალგებრის ოპერაციის განმსაზღვრელ სტრუქტურას.

თუ,  $f, g$  მოძრაობის ინვარიანტული ფუნქციებია, მაშინ მათი პუასონის ფრჩხილებიც მუდმივი იქნება მოძრაობის მიმართ. მართლაც, თუ, განვიხილავთ პუასონის ფრჩხილების (3.273) თვისებას, მაშინ იქიდან რომ  $f, g$  ინვარიანტებია, გამოდის რომ  $[g, H] = 0$ ,  $[f, H] = 0$ , მაგრამ მაშინ  $[f, [g, H]] + [g, [H, f]] + [H, [f, g]] = 0$  იაკობის იგივეობიდან მივიღებთ, რომ  $[H, [f, g]] = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ  $[f, g]$  აგრეთვე ინვარიანტია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ორი ნაპოვნი ინტეგრალის პუასონის ფრჩხილები ისევ სისტემის ინტეგრალი იქნება. თუმცა, ინტეგრალების ასეთი მეთოდით ძებნა, არაა ეფექტური.

საზოგადოდ,  $n$  პირველი რიგის განტოლებათა სისტემის ბოლომდე ანალიზურად ამოსახსნელად, საჭიროა  $n - 1$  ინტეგრალის პოვნა. მაგრამ

ჰამილტონური სისტემების სიმპლექტიკური სტრუქტურის გამო  $2n$  პირველი რიგის ჰამილტონური სისტემებისათვის საკმარისია  $n$  ინტეგრალის პოვნა.

### 3.7.7. ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები

ჰამილტონური სისტემების ამოსახსნელად ეძებენ კანონიკურ გარდაქმნებს, ანუ ისეთ გარდაქმნებს, რომლებიც სისტემას ისე გაამარტივებს, რომ შევძლებთ მის ინტეგრებას. თუ, კანონიკური გარდაქმნა არაა დამოკიდებული დროზე, მაშინ ძველი ჰამილტონიანიდან ახალზე გადასვლა, ხორციელდება უბრალოდ ცვლადთა გარდაქმნით

$$H'(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)). \quad (3.274)$$

თუ, გამოვიყენებთ გარდაქმნის ფორმულებს

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (3.275)$$

$$\beta_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n), \quad (3.276)$$

სადაც  $\beta_i$  არიან ახალი კოორდინატები, შეუღლებულები  $\alpha_i$  ძველ იმპულსებთან. შესაბამისად, (3.274) განტოლებიდან მივიღებთ

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots, q_n\right) = H'(\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_n). \quad (3.277)$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილს, უნდა უყუროთ როგორც, ჰამილტონიანის მუდმივ მნიშვნელობას. მიღებულ პირველი რიგის კერძოწარმოებულის განტოლებაში, უცნობია  $W$  სიდიდე, ხოლო  $q_1, q_2, \dots, q_n$  დამოუკიდებელი ცვლადებია. ამ განტოლებას ეძახიან სტაციონარულ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას.

ასეთი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიცავს  $n$  ნებისმიერ მუდმივს, რომელთა როლშიც შეგვიძლია განვიხილოთ  $\alpha_i$  სიდიდეები.

ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ამოხსნა, ექვივალენტურია შესაბამისი ჰამილტონის განტოლებათა სისტემის ამოხსნისა. **სეპარაბელური სისტემების** გარდა, ასეთი განტოლებების ამოხსნა საკმაოდ რთულია, თუმცა, თუ, გავითვალისწინებთ (3.275) ფორმულებს, ფიქსირებული  $\alpha_i$  სიდიდეების შემთხვევაში, შეგვიძლია, საზოგადოდ შევხედოთ ამონახსნის სტრუქტურას. მართლაც

$$dW = \sum_i \frac{\partial W}{\partial q_i} dq_i = \sum_i p_i dq_i, \quad (3.278)$$

თუ, (3.278) ტოლობას ვაინტეგრებთ ფაზური ტრაექტორიის გასწვრივ, მივიღებთ წირით ინტეგრალს

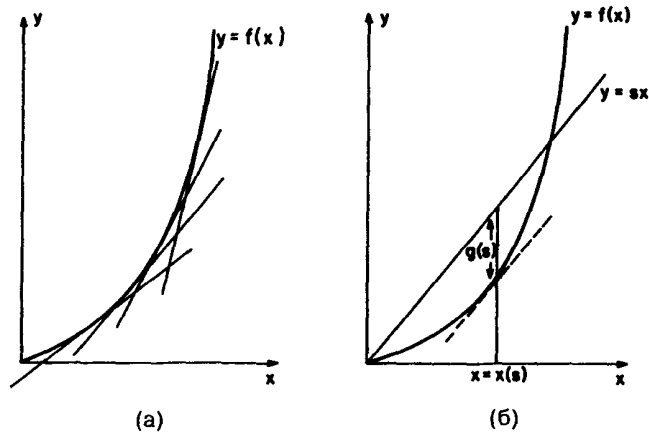
$$W = \int_{q_0}^q \sum_i p_i dq_i. \quad (3.279)$$

### 3.7.8. ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია

ლაგრანჟის  $(q_i; \dot{q}_i)$  ცვლადებიდან, ჰამილტონის  $(p_i; q_i)$  ცვლადებზე გადასვლა, ხორციელდება **ლეჟანდრის გარდაქმნით**. ამიტომ, საინტერესოა თვით ამ გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი და სტრუქტურა.

მრუდი წირი შეიძლება აღვწეროთ, როგორც წერტილების ერთობლიობით, ასევე, მხები სიბრტყეების ერთობლიობითაც. ლეჟანდრის გარდაქმნა კი კავშირს ამყარებს ამ ორ წარმოდგენას შორის. ამ საკითხში, გავყვეთ ვარნოლდის გადმოცემის ფორმას, ვინაიდან ის საუკეთესოა მეთოდური თვალსაზრისით.

განვიხილოთ  $y = f(x)$  ფუნქცია. დავუშვათ რომ, ის ამოზნექილია ან ჩაზნექილი. ამ ფუნქციის ლეჟანდრის გარდაქმნა, გვამლევს სხვა  $g(s)$  ფუნქციას ნახ. 3.6



ნახ. 3.6. a)  $y = f(x)$  ფუნქცია და მასთან დაკავშირებული მხეხები; ნ)ლეჟანდრის გარდაქმნის აგება  $g(s)$

ჩვენ ვხედავთ, რომ  $g(s)$  წარმოადგენს უდიდეს მანძილს ვერტიკალის გასწვრივ  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკსა და  $y = sx$  წრფეს შორის ანუ

$$g(s) = sx - f(x) = G(s, x(s)). \quad (3.280)$$

რადგან  $x(s)$  წერტილი განისაზღვრება მაქსიმუმის პირობებიდან,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = s - f'(x) = 0. \quad (3.281)$$

ე.ი. ახალი  $s$  ცვლადი წარმოადგენს  $f(x)$  ფუნქციის მხეხის დახრის კუთხეს  $s = f'(x)$ .

განვიხილოთ, მექანიკური ინტერპრეტაცია. ვთქვათ, გვაქვს ჰამილტონიანი  $y = H(p)$ . ზემოთ მოყვანილი ალგორითმით მივიღებთ, რომ ახალ  $L(s)$  ფუნქციას აქვს სახე

$$L(s) = sp - H(p). \quad (3.282)$$

ამ შემთხვევაში, ახალი ცვლადი  $s = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ , მაშინ ლეჟანდრის გარდაქმნა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით

$$L(\dot{q}) = \dot{q}p - H(p). \quad (3.283)$$

ეს მაგალითი არის, ჩვენს მიერ უკვე განხილული ფორმულების ნათელი ილუსტრაცია

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t); \quad (3.284)$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t). \quad (3.285)$$

### 3.7.9. კლასიკური მექანიკის გეომეტრია

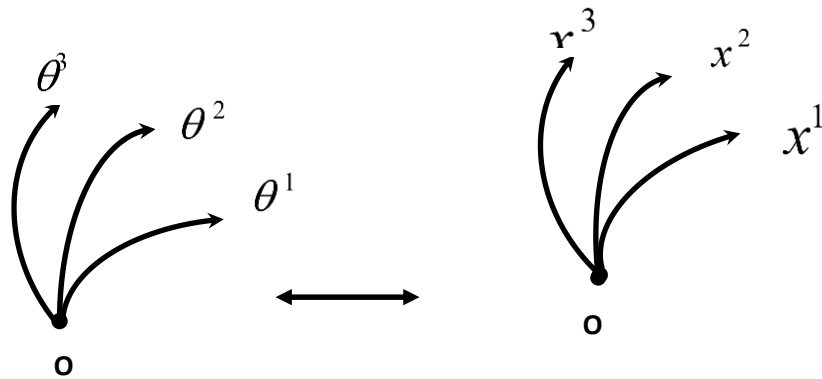
ტენზორულ ალგებრაში  $\vec{a}$  ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს

$$a_i \text{ და } a^i; \quad (3.286)$$

თუ, ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ  $a^i$ , მაშინ ის მიუთითებს კონტრავარიანტულ კომპონენტებზე ხოლო თუ,  $a_i$  - ქვემოთ, მაშინ კოვარიანტულ კომპონენტებზე.

ერთგანზომილებიან ტენზორს ვექტორს უწოდებენ. განვიხილოთ ვექტორის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების ცნებები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ერთი  $\theta^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემიდან, მეორე  $x^i$  კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები



ნახ. 3.7.  $\theta^i$  და  $x^i$  მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემები

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\}. \quad (3.287)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (3.288)$$

ჩავთვალოთ, რომ (3.288) გარდაქმნები არიან ჰომეომორფული P წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^i} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (3.289)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (3.287) შეგვიძლია ამოვხსნათ  $\theta^i$  კოორდინატების მიმართ

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3). \quad (3.290)$$



დავადგინოთ, თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები ლოკალურად. (3.288) ფორმულებიდან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^{21}} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (3.291)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით (3.291) გადაიწერება მოკლედ

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (3.292)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ. ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება.

**განსაზღვრება:** იმ ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება **ყრუ ინდექსი** ეწოდება. იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში გვხვდება ერთხელ, თავისუფალი ინდექსი ჰქვია.

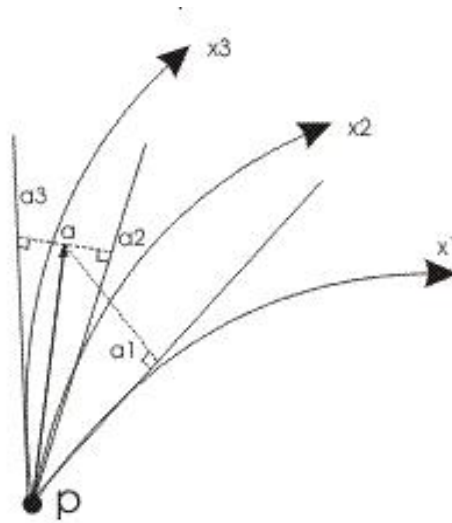
**განსაზღვრება:** ტენზორის თითოეულ წევრში, თავისუფალ ინდექსთა რაოდენობას **ტენზორის რანგი** ეწოდება.

**მაგალითად, ვექტორი** პირველი რანგის ტენზორია; **სკალარული ფუნქცია** ნულ რანგის ტენზორია . . .

**განსაზღვრება:** P-წერტილში განსაზღვრულ  $a^i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის **კონტრავარიანტული კომპონენტები**, თუ, კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების დიფერენციალები (3.292). ანუ,

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (3.293)$$

იმისათვის, რომ გავარკვიოთ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული შინაარსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა  $P$ -წერტილში ნახ.3.8, სადაც მოდებულია ეს ვექტორი



ნახ. 3.8.  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული  $x^i$  ღერძების მხებები  $P$  წერტილში. მაშინ  $\vec{a}$  ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ მის ორთოგონალურ პროექციებს შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხებების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებულია  $P$  წერტილში.

**განვიხილოთ ოპერატორი**

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (3.294)$$

ახალ  $y$  კოორდინატებზე გადასვლას მივყავართ ფორმულამდე

$$\xi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad (3.295)$$

სადაც

$$\bar{\xi}_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad (3.296)$$

როგორც ვხედავთ,  $\xi_i$  კომპონენტები გარდაიქმნებიან როგორც კონტრავარიანტული ტენზორის კომპონენტები.

ეხლა განვიხილოთ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება  $\varphi$  ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ მოცემული გვაქვს  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ . ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i}. \quad (3.297)$$

**განსაზღვრება:** P წერტილში განსაზღვრულ  $a_i$  სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან, როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტის კომპონენტები

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j. \quad (3.298)$$

როგორც ვნახეთ, განზოგადებული იმპულსები ქმედების გრადიენტებს წარმოადგენენ, ამიტომ ცხადია, რომ განზოგადებული იმპულსები კოვარიანტულ ვექტორს წარმოადგენენ.

**P.S.** ოპერატორი (3.294) წარმოადგენს მხები ვექტორის მაგალითს. მოცემულ  $x = X$  წერტილში, რომელიმე სკალარულ  $h = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ფუნქციაზე ამ ოპერატორის მოქმედების შედეგია ფუნქციის ზედაპირის მხები მოცემულ წერტილში

$$\xi h = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial h}{\partial x_i} I_{x=X}. \quad (3.299)$$

განვიხილოთ ეხლა, რაიმე წირი  $\varphi = \varphi(s)$ , რომელიც პარამეტრიზებულია  $s$  ცვლადით ისე, რომ გადის მოცემულ  $x = X$  წერტილზე როცა  $s = 0$ . თუ,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  ფუნქციის კოორდინატული წარმოდგენაა  $\varphi_i(s) = x_i$ , მაშინ ნებისმიერი სიდიდის წარმოებული  $\varphi(s)$ -ის გასწვრივ, მოცემულ  $x = X$  წერტილში განისაზღვრება მხები ვექტორით

$$\xi = \frac{d}{ds} I_{s=0} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} I_{x=X}, \quad (3.300)$$

სადაც

$$\xi_i = \frac{d\varphi_i}{ds} I_{s=0}. \quad (3.301)$$

ცხადია რომ, თუ  $\varphi(s)$  მოცემული  $q(t)$  სისტემის ტრაექტორიაა, სადაც  $s$  დროა, მაშინ  $\xi_i$  სხვა არაფერია, თუ არა  $\dot{q}_i(t)$  სიჩქარის კომპონენტები. აქედან გამომდინარეობს სიჩქარის ვექტორის კონტრავარიანტულობა.

მოცემულ  $x = X$  წერტილზე შეიძლება გაიაროს მრავალმა სხვადასხვა ტრაექტორიამ და ყოველივე მათგანს შეესაბამება თავისი მხები ვექტორი. ამ ვექტორების ერთობლიობა მოცემულ წერტილში ქმნის ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც მხები სივრცე ეწოდება. ამ სივრცეს აღნიშნავენ სიმბოლოურად  $TM_x$ , სადაც  $M$  მრავალსახეობაა ანუ სისტემის მიერ დაკავებული  $n$  განზომილებიანი სივრცე. მხები განფენის სივრცე აერთიანებს ყველა მხებ სივრცეს, მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის და მას აღნიშნავენ როგორც  $TM$ .

**P.S. 1.** ლაგრანჟის ფორმალიზმში სისტემის მდგომარეობა ხასიათდება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებითა და  $\dot{q}_i$  სიჩქარეებით. ამ დროს ნებისმიერ  $Q$  წერტილში, დროის ნებისმიერ მომენტში გვაქვს მხები ვექტორი

$$\xi = \sum_i \dot{q}_i(t) \frac{\partial}{\partial q_i} I_{q=Q}. \quad (3.302)$$

ასე, რომ სისტემის მდგომარეობა შეიძლება დავახასიათოთ წერტილის მეშვეობით მხები განფენის სივრცეში. ლაგრანჟიანი კი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მხები განფენის სივრცის გადასახვა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე ანუ

$$L: TM \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. ჰამილტონურ ფორმალიზმში მოძრაობა აღიწერება განზოგადებული  $q_i$  კოორდინატებითა და მათი შეუღლებული  $p_i$  იმპულსებით. შესაბამისი ფაზური სივრცე წარმოადგენს სიმპლექტიკურ სივრცეს და ხასიათდება რიგი თვისებებით. ჰამილტონური სისტემების განსაკუთრებული თვისებაა ჰამილტონური ნაკადის ზემოქმედებისას ფაზური მოცულობის შენარჩუნება.

### ამოცანები

1. ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ლაგრანჟის განტოლების გამოყვანა;
2. ჰამილტონის ფორმალიზმი და ჰამილტონის განტოლებების გამოყვანა;
3. პუასონის ფრჩხილების თვისებები;
4. ლაგრანჟიანისა და ჰამილტონიანის გეომეტრიული შინაარსი;
5. ლეჟანდრის გარდაქმნის გეომეტრიული აზრი.

### ლიტერატურა

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т. I, механика, Москва 1988
2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т. I, механика, пер. с англ. Москва 1975

3. Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001
4. Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963
5. Сихарулидзе Ю.Г. Балистика летательных аппаратов, Москва 1982
6. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва, 2000
7. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики, т.1,т.2,уч. пос., Москва, 1984
8. Олховский И.И. Курс Теоретическая механика для физиков, изд МГУ, 1974
9. Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977
- 10.Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978
- 11.Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва 1977
- 12.Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. пер. с англ. Москва 1975
13. თბაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდულები), ტ.1, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2006
- 14.Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, пер.с англ., Мир, Москва,1988
- 15.Косевич А.М.,Ковалёв А.С. Введение в нелинейную физическую механику,Наукова думка, Киев, 1989
- 16.Яковенко Г.Н.Лекции по теоретической механике устойчивость, колебания, гамильтонова механика, Москва, 2003 ([www.study.com.ru](http://www.study.com.ru))
- 17.Берже П.,Помо И.,Видаль К. Порядок в хаосе о детерминистском подходе к турбулентности, Пер. с франц. под ред. Данилова Ю.А.,Мир, Москва, 1991
- 18.Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,КараваевВ.А. Колебания и волны, учеб. пос., МГУ, Москва, 2001

#### IV თავი. ოპერატორები და ფუნქციონალები ჰილბერტის სივრცეში

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ოპერატორულ განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$Au = f, \quad (4.1)$$

სადაც  $A$  რაიმე ოპერატორია,  $f$  ფუნქციაა ჰილბერტის  $L_2(G)$  სივრციდან, ხოლო  $u$  - საძიებელი ფუნქცია.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ბრტყელი  $G$  არე, რომლის საზღვარია  $\partial G$ , მაშინ ჩაკეტილი  $\bar{G}$  სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:  $\bar{G} = G \cup \partial G$ . ამ ჩაკეტილ  $\bar{G}$  სიმრავლეში დავსვათ დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad u|_{\partial G} = 0, \quad (4.2)$$

სადაც  $\Delta$  ლაპლასის ოპერატორია,  $f(x, y) \in C(\bar{G})$ .

ამ ამოცანის კლასიკური ამონახსნის პოვნა ნიშნავს ისეთი უწყვეტი  $u(x, y) \in C(\bar{G})$  ფუნქციის პოვნას, რომელიც აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას ღია  $G$  სიმრავლეზე და უდრის ნულს მის  $\partial G$  საზღვარზე.

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს რომ  $f(x, y) \in C(\bar{G})$ , ცხადია განტოლების ამონახსნი უნდა ვეძებოთ  $C^2(\bar{G})$  ფუნქციათა კლასში ანუ საძიებელი ფუნქცია უნდა იყოს უწყვეტი თავის მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად და აკმაყოფილებდეს  $u|_{\partial G} = 0$  სასაზღვრო პირობას. ასეთი ფუნქციების სიმრავლე წარმოადგენს ლინეალს, მართლაც, ცხადია რომ ნებისმიერ ორ  $u_1, u_2$  ფუნქციასთან ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$  ფუნქციასაც. ამ ლინეალს აღვნიშნავთ  $M_1$  სიმბოლოთი.

ეხლა ჩვენი ამოცანა შეგვიძლია ჩამოვყალიბოთ უფრო მოკლედ: ვიპოვოთ

$$\Delta u = f, \quad (4.3)$$

განტოლების ამონახსნი  $M_1$  ლინეალზე. ამასთან დაკავშირებით ამბობენ, რომ  $M_1$  არის  $\Delta$  ოპერატორის განსაზღვრის არე.

ამ არის ელემენტებზე ჩვენ ვმოქმედებთ ლაპლასის  $\Delta$  ოპერატორით, რომელიც  $M_1$  ლინეალის ყოველ  $u \in M_1$  ელემენტს შეუსაბამებს  $v \in C(\bar{G})$  ფუნქციას, სადაც

$$v = \Delta u. \quad (4.4)$$

ასეთი  $v$  ფუნქციების სიმრავლეც ლინეალს წარმოადგენს, რადგან ლაპლასის ოპერატორი წრფივია. მას აღვნიშნავთ  $N$  სიმბოლოთი და ვუწოდებთ მოცემული ოპერატორის მნიშვნელობათა სიმრავლეს ანუ გვაქვს წრფივი ასახვა  $\Delta: M_1 \rightarrow N$ .

როგორც ვხედავთ, როცა ფიქსირებულია ოპერატორის განსაზღვრის არე, სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება ჩაიწეროს მოკლედ

$$Au = f, \quad (4.5)$$

სახით, რადგან სასაზღვრო პირობები გათვალისწინებულია ოპერატორის განსაზღვრის არის დაფიქსირებით.

**4.1. ოპერაციები ოპერატორებზე. შებრუნებული ოპერატორი. წრფივი ოპერატორის ცნება. ერთეულოვანი და ნულ ოპერატორი. ოპერატორის განსაზღვრის არე. შემოსაზღვრული ოპერატორი. უწყვეტი ოპერატორი**

**განსაზღვრება.** ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი  $M_1$  და  $M_2$  სიმრავლე. ვიტყვი, რომ  $M_1$  სიმრავლეზე განსაზღვრულია  $A: M_1 \rightarrow M_2$  ოპერატორი, თუ მოცემულია წესი, რომელიც  $\forall u \in M_1$  ელემენტს, შეუსაბამებს ერთადერთ  $v \in M_2$  ელემენტს. ასეთ შემთხვევაში წერენ, რომ  $v = Au$ .

$M_1$  სიმრავლეს  $A$  ოპერატორის განსაზღვრის არეს უწოდებენ, ხოლო შესაბამისი  $v = Au$  ფუნქციების  $N = R_A$  სიმრავლეს - მის მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

**განსაზღვრება.** თუ  $R_A = M_2$  მაშინ ამბობენ რომ გვაქვს ასახვა  $M_2$ -ზე ანუ სურექცია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, გვაქვს ასახვა  $M_2$ -ში.



**განსაზღვრება.** ვიტყვიტ რომ ორი  $A$  და  $B$  ოპერატორი ერთმანეთის ტოლია  $A = B$ , თუ მათი განსაზღვრის არეები ერთი და იგივე  $M$  სიმრავლეა და მათი შესაბამისი მნიშვნელობები ტოლია  $Au = Bu$  ნებისმიერი  $u \in M$  ფუნქციისათვის (ჰილბერტის  $L_2(G) = M_2$  სივრცის შემთხვევაში  $Au$  და  $Bu$ , ერთმანეთისგან შეიძლება განსხვავდებოდეს მხოლოდ ნულ ზომის სიმრავლეზე).

**განსაზღვრება.** ვთქვათ, მოცემულია ორი  $A$  და  $B$  ოპერატორი, რომელთა განსაზღვრის არეებია შესაბამისად  $D_A$  და  $D_B$ . თუ  $D_A \subset D_B$  ( $D_A \neq D_B$ ) და ნებისმიერი ფუნქციისათვის  $\forall u \in D_A$  ადგილი აქვს  $Au = Bu$  ტოლობას, მაშინ ამბობენ რომ  $B$  ოპერატორი არის  $A$  ოპერატორის გაფართოება.

**განსაზღვრება.** ორი  $A$  და  $B$  ოპერატორის ჯამი ეწოდება ისეთ  $A + B$  ოპერატორს, რომლისთვისაც

$$(A + B)u = Au + Bu, \quad (4.6)$$

ამასთან ერთად, ოპერატორების ჯამის განსაზღვრის არე მათი განსაზღვრის არეების თანაკვეთის ტოლია ანუ

$$D_{A+B} = D_A \cap D_B. \quad (4.7)$$

**განსაზღვრება.** ორი  $A$  და  $B$  ოპერატორის ნამრავლი ეწოდება ისეთ  $AB$  ოპერატორს, რომლისთვისაც

$$(AB)u = A(Bu), \quad (4.8)$$

ამასთან ერთად, ორი ოპერატორის ნამრავლის განსაზღვრის არე არის ისეთი ელემენტების სიმრავლე  $D_B$ -დან, რომელთათვისაც  $Bu \in D_A$ .

$$D_{AB} = \{u | u \in D_B \wedge Bu \in D_A\}. \quad (4.9)$$

საზოგადოდ,  $AB \neq BA$ . თუ  $AB = BA$ , მაშინ ამბობენ რომ ეს ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან.

**განსაზღვრება.**  $A$  ოპერატორს ეწოდება მარტივი (ან ინექცია) თავის განსაზღვრის  $D_A$  არეში, თუ ნებისმიერი ორი ერთმანეთისაგან განსხვავებული  $u_1$  და  $u_2$  ელემენტისათვის განსაზღვრის არიდან ( $u_1 \neq u_2$ ) ადგილი აქვს უტოლობას

$$Au_1 \neq Au_2 . \quad (4.10)$$

ცხადია, რომ თუ ოპერატორი მარტივია (ინექცია) და სურექციაა, მაშინ გვაქვს ბიექცია (ურთიერთცალსახა ასახვა).

**განსაზღვრება.** ვთქვათ  $A: M_1 \rightarrow M_2$  ოპერატორი არის მარტივი (ინექცია) და სურექცია, მაშინ არსებობს  $B: M_2 \rightarrow M_1$  ოპერატორი, რომელსაც  $A$ -ს შებრუნებულ ოპერატორს უწოდებენ და აღნიშნავენ  $B = A^{-1}$  სიმბოლოთი.

ცხადია რომ, თუ ნებისმიერი ფუნქციისათვის  $\forall u \in M_1 \Rightarrow v = Au$  და  $\forall v \in M_2 \Rightarrow u = Bv$ . მაშინ

$$A^{-1}Au = u, \quad AA^{-1}v = v. \quad (4.11)$$

**განსაზღვრება.**  $A$  ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ მისი განსაზღვრის  $D_A$  არე ლინეალია და ნებისმიერი  $u_i \in D_A, i = \overline{1, n}$  ფუნქციებისათვის და

$\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$  ნამდვილი რიცხვებისათვის, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$A(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Au_i. \quad (4.12)$$

**P.S.** წრფივი ოპერატორის თვისებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეც ლინეალია. ამასთან,  $D_A$  განსაზღვრის არის ნულოვანი ელემენტი აისახება მნიშვნელობათა  $R_A$  სიმრავლის ნულში. თუ წრფივ ოპერატორს აქვს შებრუნებული  $A^{-1}$  ოპერატორი, მაშინ ისიც წრფივი ოპერატორი  $R_A$  არეზე.

**თეორემა.** ვთქვათ  $A$  ოპერატორი არის წრფივი  $D_A$  ლინეალზე და  $R_A$  მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა. მაშინ შებრუნებული  $A^{-1}$  ოპერატორის არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს პირობა, თუ  $R_A$ -ში  $Au = 0$ , მაშინ  $D_A$ -ში  $u = 0$ .

**განსაზღვრება.**  $I$  ოპერატორს ეწოდება ერთეულოვანი ოპერატორი, თუ ნებისმიერ  $u \in D_I$  ელემენტს განსაზღვრის არიდან ის შეუსაბამებს იგივე  $u$  ელემენტს ანუ  $Iu = u$  ნებისმიერი  $u \in D_I$  ფუნქციისათვის განსაზღვრის არიდან.

**განსაზღვრება.**  $0$  ოპერატორს ეწოდება **ნულოვანი ოპერატორი**, თუ ნებისმიერ  $u \in D_0$  ელემენტს განსაზღვრის არიდან ის შეუსაბამებს ჰილბერტის  $H$  სივრცის ნულოვან ელემენტს ანუ  $0u=0$  ნებისმიერი  $u \in D_0$  ფუნქციისათვის განსაზღვრის არიდან.

**განსაზღვრება.**  $A$  ოპერატორს ეწოდება უწყვეტი  $u_0 \in A$  წერტილში, თუ ელემენტების ნებისმიერი მიმდევრობისათვის  $u_n \in D_A$  განსაზღვრის არიდან, რომელთათვისაც  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$ , ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = Au_0.$$

თუ ოპერატორი უწყვეტია განსაზღვრის არის ყველა წერტილში, მაშინ ამბობენ რომ ის უწყვეტია  $D_A$  სიმრავლეში.

უწყვეტი ოპერატორის ტრივიალური მაგალითია ერთეულოვანი ოპერატორი.

**განსაზღვრება.**  $A$  ოპერატორს ეწოდება შემოსაზღვრული  $D_A$  განსაზღვრის არეში, თუ მოიძებნება ისეთი არაუარყოფითი  $K \geq 0$  რიცხვი, რომ ნებისმიერი  $u \in D_A$  ელემენტისათვის გვექნება უტოლობა

$$\|Au\| \leq K|u|. \tag{4.13}$$

იმ უმცირეს  $K$  რიცხვს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს (4.13) უტოლობას,  $A$  ოპერატორის  $\|A\|$  ნორმა ეწოდება. ცხადია, რომ ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას:

$$\|Au\| \leq \|A\||u|. \tag{4.14}$$

#### 4.2. ბანახის თეორემა მკუმშავი ოპერატორის უძრავი წერტილის შესახებ სრულ მეტრიკულ სივრცეში

ვთქვათ  $P$  მეტრიკული სივრცეა  $\rho$  მეტრიკით.  $A$  ოპერატორს, რომელიც ამ სივრცეს ასახავს თავის თავში ეწოდება **მკუმშავი**, თუ არსებობს ისეთი რიცხვი  $\alpha \in (0; 1)$  ინტერვალში, რომ ნებისმიერი ორი  $x, y \in P$  ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y). \quad (4.15)$$

**თეორემა.**(ბანახის თეორემა უძრავი წერტილის შესახებ.) ვთქვათ  $A$  მკუმშავი ოპერატორია სრულ, მეტრიკულ  $P$  სივრცეში. მაშინ განტოლებას

$$x = Ax, \quad (4.16)$$

ამ სივრცეში აქვს ერთადერთი  $u$  ამონახსნი, რომლისთვისაც  $Au = u$ . ამ ელემენტის საპოვნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ერთბიჯიანი იტერაციული სქემა  $u_{n+1} = Au_n$  სადაც საწყისი მიახლოება შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერად.

ეს იტერაციული პროცესი კრებადია და  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ .

**თეორემა.** ვთქვათ  $A$  წრფივი ოპერატორია ჰილბერტის  $H$  სივრცეში. თუ ოპერატორი შემოსაზღვრულია  $D_A$  განსაზღვრის არეში, მაშინ ის უწყვეტია

### 4.3. სიმეტრიული, დადებითი და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორები. გრინის თეორემა მრავალი ცვლადის ფუნქციის ნაწილობითი ინტეგრების შესახებ

**განსაზღვრება.** ვთქვათ  $D_A$  არის ლინეალი, რომელიც მკვრივია ჰილბერტის  $H$  სივრცეში.  $D_A$  სივრცეში განსაზღვრულ წრფივ ოპერატორს ეწოდება სიმეტრიული, თუ ნებისმიერი ორი  $u$  და  $v$  ელემენტისათვის ადგილი აქვს ტოლობას  $(Au, v) = (u, Av)$ .

**მაგალითი.** ვთქვათ,  $D_A$  არის ისეთი  $u \in C^2[a, b]$  ფუნქციებისაგან შემდგარი ლინეალი, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$u(a) = u(b) = 0. \quad (4.17)$$

ეს ლინეალი მკვრივია  $L_2(a, b)$  სივრცეში. განსაზღვროთ ამ ლინეალზე ოპერატორი

$$Au = -u''. \quad (4.18)$$

დავამტკიცოთ, რომ  $A$  ოპერატორი სიმეტრიულია. მისი წრფივობა ცხადია. მაშასადამე, სიმეტრიულობის დასამტკიცებლად, უნდა ვაჩვენოთ რომ მისთვის ადგილი აქვს  $(Au, v) = (u, Av)$  ტოლობას. მართლაც,

$$(Au, v) = - \int_a^b u'' v dx = -[u'v]_a^b + \int_a^b u'v' dx = \int_a^b u'v' dx, \quad (4.19)$$

რადგან  $v \in D_A$  და მაშასადამე აკმაყოფილებს (4.17) პირობებს. თუ კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულას, მივიღებთ

$$\int_a^b u'v' dx = [uv']_a^b - \int_a^b uv'' dx = \int_a^b u(-v'') dx = (u, Av). \quad (4.20)$$

მაშასადამე,  $(Au, v) = (u, Av)$  რ.დ.გ.

**P.S.** ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ არ გვექნებოდა (4.17) პირობები, მაშინ  $Au = -u''$  ოპერატორი არ იქნებოდა სიმეტრიული.

**გრინის ფორმულა** (მრავალი ცვლადის ფუნქციის ნაწილობითი ინტეგრების შესახებ). ვთქვათ  $G$  არის ლიფშიცის  $\partial G$  საზღვრის მქონე არე, ხოლო  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  და  $g(x) = g(x_1, x_2, \dots, x_N)$  უწყვეტი ფუნქციებია თავისი პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად  $\bar{G}$  ჩაკეტილ სიმრავლეზე. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს:

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx \Big|_G = \int f g n_i ds \Big|_{\partial G} - \int f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx \Big|_G, \quad (4.21)$$

სადაც  $n_i$  საზღვრის გარე ნორმალის  $i$ -ური კოორდინატაა.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ჰილბერტის სივრცეში, განვიხილოთ ლინეალი  $D_A$ , რომელიც შედგება ისეთი  $u \in C^2(\bar{G})$  ფუნქციებისაგან რომლებიც აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$u|_{\partial G} = 0. \quad (4.22)$$

ასეთნაირად განსაზღვრული  $D_A$  სიმრავლე მკვრივია ჰილბერტის  $H$  სივრცეში. ამ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ლაპლასის ოპერატორი შემდეგნაირად:

$$Au = -\Delta u. \quad (4.23)$$

ვაჩვენოთ ამ ოპერატორის სიმეტრიულობა  $D_A$ -ზე. მისი წრფივობა ცხადია. ავიღოთ ნებისმიერი ორი ფუნქცია  $u$  და  $v$  განსაზღვრის არიდან და ვაჩვენოთ  $(Au, v) = (u, Av)$  ტოლობის სამართლიანობა.

მართლაც,

$$(Au, v) = -\int \Delta u \cdot v dx|_G = -\int \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) \cdot v dx|_G. \quad (4.24)$$

თუ (4.21) გრინის ფორმულაში დავუშვებთ, რომ  $f = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  და  $g = v$ , მივიღებთ რომ

$$-\int \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx|_G = -\int \frac{\partial u}{\partial x_i} v n_i ds|_{\partial G} + \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx|_G. \quad (4.25)$$

თუ ამ ფორმულებს მიმდევრობით ჩავწერთ  $i = \overline{1, N}$  ყველა მნიშვნელობისათვის და შევკრებთ, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$(Au, v) = -\int \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} v n_i ds|_{\partial G} + \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx|_G = \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx|_G, \quad (4.26)$$

რადგან  $v \in D_A$  და მაშასადამე აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს. სრულიად ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$(u, Av) = -\int \Delta v \cdot u dx|_G = \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx|_G. \quad (4.27)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $(Au, v) = (u, Av)$ . მაშასადამე,  $A$  ოპერატორი სიმეტრიულია  $D_A$  არეზე. რ.დ.გ.

**P.S.** ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ არ გვექნებოდა (4.22) სასაზღვრო პირობები, მაშინ  $Au = -\Delta u$  ოპერატორი არ იქნებოდა სიმეტრიული.

**განსაზღვრება.**  $D_A$  არეზე განსაზღვრულ  $A$  ოპერატორს ეწოდება **დადებითი**, თუ ის სიმეტრიულია და  $\forall u \in D_A$  ფუნქციისათვის ადგილი აქვს პირობებს:

$$(Au, u) \geq 0, \quad (4.28)$$

$$(Au, u) = 0 \Rightarrow u = 0. \quad (4.29)$$

ამის გარდა, თუ არსებობს ისეთი მუდმივი დადებითი რიცხვი  $C > 0$ , რომ  $\forall u \in D_A$  ადგილი აქვს უტოლობას

$$(Au, u) \geq C^2|u|^2, \quad (4.30)$$

მაშინ  $A$  ოპერატორს დადებითად განსაზღვრული ეწოდება.

#### 4.4. ფუნქციონალი, როგორც ოპერატორის კერძო შემთხვევა. წრფივი და უწყვეტი ფუნქციონალები. შემოსაზღვრული ფუნქციონალი

ოპერატორის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ფუნქციონალი.

**განსაზღვრება.**  $F$  ოპერატორს, რომელიც თავის განსაზღვრის  $D_F$  არეს ასახავს ნამდვილ  $\mathbb{R}$  რიცხვთა ან  $\mathbb{C}$  კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში, შესაბამისად, ნამდვილი ან კომპლექსური ფუნქციონალი ეწოდება.

$$F: D_F \rightarrow \mathbb{R} \text{ ან } F: D_F \rightarrow \mathbb{C}. \quad (4.31)$$

ჩვენ განვიხილავთ ნამდვილ ფუნქციონალებს ანუ  $F: D_F \rightarrow \mathbb{R}$  ასახვას.

ამ ასახვას, ზოგჯერ, ასე აღნიშნავენ  $F(u)$ .

**განსაზღვრება.** ნამდვილ  $F$  ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი  $D_F$  განსაზღვრის არეზე, თუ  $D_F$  ლინეალია და ნებისმიერი  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$  ნამდვილი რიცხვებისა და  $u_i \in D_F$ ,  $i = \overline{1, n}$  ელემენტებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$F(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F(u_i). \quad (4.32)$$

ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალის ნორმა მისი მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდე  $|F(u)(u)|$  იქნება.

**განსაზღვრება.**  $F$  ფუნქციონალს ეწოდება უწყვეტი  $u_0 \in D_F$  წერტილში, თუ ნებისმიერი  $u_n \in D_F$  მიმდევრობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0 \in H, \quad (4.33)$$

ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(u_0). \quad (4.34)$$

თუ  $F$  ფუნქციონალი უწყვეტია  $D_F$  არის ნებისმიერ წერტილში, მაშინ ამბობენ რომ ფუნქციონალი უწყვეტია  $D_F$  არეში.

**განსაზღვრება.**  $F$  ფუნქციონალს ეწოდება შემოსაზღვრული  $D_F$  არეში, თუ არსებობს ისეთი  $K$  რიცხვი, რომ განსაზღვრის არის ნებისმიერი  $u \in D_F$  ელემენტისთვის, ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას:

$$|F(u)| \leq K|u|. \quad (4.35)$$

$K$ -ს უმცირეს მნიშვნელობას, რომლისთვისაც (4.35) უტოლობა სრულდება  $F$  ფუნქციონალის  $\|F\|$  ნორმა ეწოდება.

**რისის თეორემა.** ჰილბერტის სივრცეში, ნებისმიერი წრფივი შემოსაზღვრული ფუნქციონალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$F(u) = (u, v), \quad (4.36)$$

სადაც  $v \in H$  და  $\|v\| = \|F\|$ .



## V თავი. დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ვარიაციული მეთოდები

კომპიუტერული ტექნიკის განვითარებამ დიდი სტიმული მისცა რთული, არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდების განვითარებას. მაგალითად, კონსტრუქციების დრეკად რეჟიმში მუშაობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება სასრული ელემენტის მეთოდი; გლობალური ატმოსფერული პროცესების შესასწავლად და ამინდის პროგნოზისათვის უპირატესობას ანიჭებენ ვარიაციულ მეთოდებს; რაც შეეხება ფრთისა და თვითმფრინავის ფუზელაჟის გარშემო დინების გათვლას, აქ ფართოდ გამოიყენება სასრულ სხვაობათა მეთოდი.

გარეგნულად, ეს მეთოდები ძლიერ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, თუმცა მათ ერთმანეთთან აქვთ მჭიდრო ურთიერთკავშირი. ეს ურთიერთკავშირი ხორციელდება გალიორკინის ან ცდომილების მინიმიზაციის მეთოდის ბაზაზე. აქედან შეიძლება ავაგოთ სასრულ ელემენტთა მეთოდი, სპექტრალური მეთოდი და სასრულ სხვაობათა მეთოდიც. ამ მეთოდების განვითარების ერთ-ერთ მაგალითს, წარმოადგენს რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდი.

აქედან გამომდინარე, ცხადია რომ ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს ვარიაციული რიცხვითი მეთოდების შესწავლასა და ათვისებას.

### 5.1. თეორემა კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის შესახებ

ვთქვათ  $D_A$  ლინეალი მკვრივია  $H$  ჰილბერტის სივრცეში.  $A$  ოპერატორს, რომელიც გადასახავს  $D_A$  ლინეალს  $H$  სივრცეში ეწოდება სიმეტრიული, თუ ის წრფივია  $D_A$ -ში ტოლობა  $(Au, v) = (u, Av)$  სრულდება ნებისმიერი  $u$  და  $v$  ფუნქციისათვის განსაზღვრის  $D_A$  არიდან.

$A$  ოპერატორს ეწოდება დადებითი  $D_A$ -ში, თუ ის სიმეტრიულია განსაზღვრის არე  $D_A$ -ში და ადგილი აქვს უტოლობას  $(Au, u) \geq 0$  და ტოლობას აქვს ადგილი მხოლოდ მაშინ, როცა  $u = 0$ .

**თეორემა.** თუ  $A$  დადებითი ოპერატორია  $D_A$ -ში, მაშინ  $Au = f$  ოპერატორულ განტოლებას, სადაც  $f \in H$ , აქვს არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა  $H$  ჰილბერტის სივრცეში.

**დამტკიცება.** ვთქვათ გვაქვს ორი ამონახსნი  $u_1 \in D_A$  და  $u_2 \in D_A$ , მაშინ  $H$  ჰილბერტის სივრცეში ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობებს:

$$Au_1 = f, \quad (5.1)$$

$$Au_2 = f. \quad (5.2)$$

(5.2) განტოლებას გამოვაკლოთ (5.1) განტოლება. რადგან  $A$  დადებითი ოპერატორია, ის წრფივია, მაშასადამე  $H$  ჰილბერტის სივრცეში გვაქვს ტოლობა

$$Au_2 - Au_1 = A(u_2 - u_1) = 0. \quad (5.3)$$

რადგან  $D_A$  ლინეალია  $u_2 - u_1 \in D_A$ . გავამრავლოთ (5.3) განტოლება სკალარულად  $u_2 - u_1$ -ზე, მაშინ გვექნება  $(A(u_2 - u_1), u_2 - u_1) = 0$  და  $A$  ოპერატორის დადებითობის პირობიდან გამომდინარე გვექნება ტოლობა

$$u_2 = u_1. \quad (5.4)$$

რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს.

**თეორემა (კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის შესახებ).** ვთქვათ  $A$  დადებითი ოპერატორია  $D_A$ -ში,  $f \in H$ . თუ  $u_0 \in D_A$  არის  $Au = f$  ოპერატორული განტოლების ამონახსნი, მაშინ კვადრატული ფუნქციონალი

$$Fu = (Au, u) - 2(f, u), \quad (5.5)$$

$u = u_0$  ფუნქციისათვის იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. მეორე მხრივ, თუ  $Fu$  ფუნქციონალი  $u = u_0$  ფუნქციისათვის იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, მაშინ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს  $Au = f$  ოპერატორულ განტოლებას.

მაშასადამე,  $A$  დადებითი ოპერატორის შემთხვევაში, სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა, დაიყვანება ფუნქციონალის ექსტრემალის პოვნის ვარიაციულ ამოცანამდე.

**P.S.** თეორემა კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის შესახებ უშვებს რომ არსებობს ოპერატორული განტოლების ამონახსნი და მაშინ ის ანიჭებს მინიმუმს შესაბამის კვადრატულ ფუნქციონალს ან უშვებს რომ, არსებობს კვადრატული ფუნქციონალის ექსტრემალი და მერე ამბობს, რომ ის ოპერატორული განტოლების ამონახსნიცაა. ამრიგად ეს თეორემა, საზოგადოდ, არ იძლევა ამონახსნის არსებობის გარანტიას.

ამ პრობლემის ამოსახსნელად, შემოაქვთ სკალარული ნამრავლის ახალი განმარტება, რომელიც დაკავშირებულია მოცემულ დადებით  $A$  ოპერატორთან შემდეგი სახით:

$$(u, v)_A = (Au, v). \quad (5.6)$$

სკალარული ნამრავლის (5.6) ფორმულიდან გამომდინარე, განისაზღვრება  $\|u\|_A$  ფუნქციის ნორმა და  $\rho_A(u, v)$  მეტრიკა შემდეგი ფორმულებით:

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}. \quad (5.7)$$

$$\rho_A(u, v) = \|u - v\|_A. \quad (5.8)$$

ცხადია რომ, მეტრიკა საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ჰილბერტისწინა  $S_A$  სივრცე, რომლის ჩაკეტვაც  $\bar{S}_A = H_A$  გვაძლევს შესაბამის  $H_A$  ჰილბერტის სივრცეს. ამ შემთხვევაში,  $Fu$  ფუნქციონალს აქვს შემდეგი სახე:

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u), \quad u \in H_A. \quad (5.9)$$

ეს ფუნქციონალი გაფართოვებულ  $H_A$  ჰილბერტის სივრცეში იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას და  $u_0$  ელემენტი რომელზეც გვაქვს მინიმუმი, ცალსახადაა დამოკიდებული  $f \in H$  ფუნქციაზე.

**განსაზღვრება.**  $u_0 \in H_A$  ელემენტს, რომელზედაც (5.9) ფუნქციონალი იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას,  $Au = f$  ოპერატორული განტოლების განზოგადებული ამონახსნი ეწოდება.

ზოგჯერ, შეიძლება  $u_0$  ექსტრემალი აღმოჩნდეს  $D_A$  სივრცის ელემენტი, მაშინ ის იქნება  $Au = f$  ოპერატორული განტოლების კლასიკური ამონახსნი.

### 5.1.1. ორთონორმირებული ბაზისის მეთოდი. დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის მართკუთხა არეში

**ძირითადი თეორემა.** ვთქვათ  $A$  არის დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი  $D_A$  ლინეალზე, რომელიც ყველგან მკვრივია სეპარაბელურ ჰილბერტის  $H$  სივრცეში,  $f \in H$  და  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$  ორთონორმირებული ბაზისია  $H_A$  სივრცეში. მაშინ  $Au = f$  ოპერატორული განტოლების განზოგადებული  $u_0 \in H_A$  ამონახსნი მოიძებნა შემდეგი მწკრივით

$$u_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i \varphi_i, \quad (5.10)$$

სადაც

$$\alpha_i = (f, \varphi_i). \quad (5.11)$$

ამრიგად, თუ  $H_A$  სივრცეში მოხერხდა ორთონორმირებული ბაზისის აგება, მაშინ ამოცანის ამოხსნა უბრალო გამოთვლებზე იქნება დამოკიდებული. მაგალითად, თუ  $H = L_2(G)$ , მაშინ განზოგადებული ამონახსნის (5.10) წარმოდგენაში, გამოსათვლელია მხოლოდ ფურიეს კოეფიციენტები (5.11), რომლებიც ამ შემთხვევაში გამოითვლება ინტეგრებით:

$$\alpha_i = \int f \varphi_i dx, \quad (5.12)$$

სადაც ინტეგრება ხდება  $G$  სიმრავლეზე.

**P.S.** ამ მეთოდით შეგვიძლია ამოვხსნათ, მხოლოდ უმარტივესი ამოცანები, რადგან ორთონორმირებული ბაზისის პოვნა მეტად რთული ამოცანაა რთული არეების შემთხვევაში.

**მაგალითი.** დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის  $G$  მართკუთხა არეში  $G = \{(x, y) | 0 < x < a \wedge 0 < y < b\}$ ;

$$-\Delta u = f, \quad G\text{-ში}, \quad (5.13)$$

$$u = 0, \quad \partial G\text{-ზე}. \quad (5.14)$$

ავირჩიოთ  $H = L_2(G)$ . საწყის ლინეალად ავირჩიოთ  $D_A = D_{-\Delta}$  ისეთი ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც უწყვეტი არიან მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით  $G$  ო  $\partial G$  სიმრავლეში და აკმაყოფილებენ

(5.14) პირობას.  $A = -\Delta$  ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია ამ ლინეალზე, შესაბამისად შეგვიძლია ავაგოთ მისი შესაბამისი ჰილბერტის  $H_A = H_{-\Delta}$ . ამ შემთხვევაში, ბაზისად ვირჩევთ ფუნქციათა შემდეგ სისტემას:

$$\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}, \quad (5.15)$$

ეს ფუნქციები აკმაყოფილებენ (5.14) სასაზღვრო პირობას. ამ ფუნქციებისაგან ავაგოთ ორთონორმირებული ბაზისი  $H_A = H_{-\Delta}$  სივრცეში. საბაზისო ფუნქციებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \psi_2 &= \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \psi_3 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ \psi_4 &= \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \psi_5 = \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \quad \psi_6 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \quad \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

როგორც ვიცით,

$$\int_0^a \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & \text{თუ } m \neq j \\ \frac{a}{2}, & \text{თუ } m = j \end{cases}. \quad (5.17)$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^b \sin \frac{j\pi y}{b} \sin \frac{m\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & \text{თუ } m \neq j \\ \frac{b}{2}, & \text{თუ } m = j \end{cases}. \quad (5.18)$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება რომ

$$\left( \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) = \int_0^a \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \cdot \int_0^b \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \begin{cases} \frac{ab}{4}, & \text{თუ } m = j \text{ და } n = k \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases} \quad (5.19)$$

ცხადია, რომ  $\psi_i \in D_{-\Delta}$  ე.ი.

$$(\psi_s, \psi_t)_{-\Delta} = \left( -\frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y^2}, \psi_t \right).$$

რადგან

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \right) = \frac{j^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b},$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \right) = \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b},$$

გვექნება რომ,

$$\begin{aligned} \left( \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right)_{-\Delta} &= \int_0^a \int_0^b \left( \frac{j^2 \pi^2}{a^2} + \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{ab}{4} \left( \frac{j^2 \pi^2}{a^2} + \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \right), & \text{თუ } m = j \text{ და } n = k. \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases} \quad (5.20)$$

შესაბამისად,  $\psi_i$  ფუნქციათა სისტემა ორთოგონალურია  $H_{-\Delta}$  სივრცეში, რადგან ნებისმიერი ორი სხვადასხვა ფუნქციისათვის ამ სისტემიდან, ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან  $j \neq m$  და ან  $k \neq n$ .

მაშასადამე, (5.20) ტოლობებიდან გამომდინარე გვექნება, რომ ფუნქციათა სისტემა

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)}} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right)}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ \varphi_4 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{9\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)}} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \varphi_5 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{4\pi^2}{b^2} \right)}} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}, \\ \varphi_6 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{9\pi^2}{b^2} \right)}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}, \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

ორთონორმირებულია  $H_{-\Delta}$  სივრცეში და მაშინ ჩვენი სისტემის ამონახსნი მოიცემა შემდეგი მწკრივით:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \quad (5.22)$$

სადაც

$$\alpha_1 = (f, \varphi_1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy, \quad (5.23)$$

$$\alpha_2 = (f, \varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{\frac{ab}{4} \left( \frac{4\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)}} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy, \dots \quad (5.24)$$

ასეთი სასაზღვრო ამოცანები, გვხვდება სხვადასხვა ხასიათის ორგანზომილებიანი სტაციონარული პროცესების მათემატიკურ მოდელეებში.

ეს შედეგი შეგვიძლია მივიღოთ (5.15) ბაზისის მიმართაც, მართლაც მაშინ ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (5.25)$$

სადაც

$$c_{mn} = \frac{1}{\frac{ab}{4} \left( \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right)} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.26)$$

ძირითადი თეორემიდან გამომდინარე, (5.25) მწკრივი კრებადია როგორც  $H_{-\Delta}$  ასევე  $L_2(G)$  სივრცეში ნებისმიერი  $f \in L_2(G)$  ფუნქციისათვის.

### 5.1.2. რიტცის მეთოდი

ორთონორმირებული ბაზისის აგება, უმრავლეს შემთხვევაში, მეტად შრომატევადი ამოცანაა. აქედან გამომდინარე, საინჟინრო გამოთვლებში, უფრო ხშირად, გამოიყენება რიტცის მეთოდი, რომელიც არ ითხოვს ბაზისის, მაინცა და მაინც ორთონორმირებულობას და კმაყოფილდება ორთოგონალურობის მოთხოვნით, თუმცა, კვლავ ეფუძნება თეორემას კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის შესახებ და ძირითად თეორემას.

ოპერატორული  $Au = f$  განტოლების განზოგადებული  $u_0$  ამონახსნის განმარტების თანახმად,  $u_0 \in H_A$  არის

$$Fu = (u, u)_A - 2(f, u) \quad (5.27)$$

ფუნქციონალის (მინიმუმის წერტილი) ექსტრემალი ანუ  $Fu_0 = \min_{u \in H_A} Fu$ .

ვირჩევთ ორთოგონალურ  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$  ბაზისს  $H_A$  სივრცეში და პრაქტიკული გამოთვლების ინტერესებიდან გამომდინარე, შემოვიფარგლებით ბაზისის სასრული რაოდენობის ელემენტებით ანუ ოპერატორული განტოლების ზოგად ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \quad (5.28)$$

სადაც  $\alpha_i$  საძებნი კოეფიციენტებია. ეს კოეფიციენტები განისაზღვრებიან

$$Fu_n \rightarrow \min, \quad (5.29)$$

ფუნქციონალის მინიმუმის პირობიდან. ძირითადი თეორემიდან გამომდინარე, (5.28) წარმოდგენა კრებადია ოპერატორული განტოლების განზოგადებული ამონახსნისაკენ.

ეხლა გადავიდეთ  $\alpha_i$  კოეფიციენტების ოპტიმალური მნიშვნელობების პოვნაზე. რიტცის მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ეს ამოცანა დავიყვანოთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანაზე. თუ  $A$  ოპერატორი წრფივია, გვექნება წრფივ განტოლებათა სისტემა.

მართლაც, შევიტანოთ (5.28) წარმოდგენა (5.27) ფუნქციონალში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned}
 Fu_n &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right)_A - 2 \left( f, \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i \right) = \\
 &= (\varphi_1, \varphi_1)_A \alpha_1^2 + (\varphi_1, \varphi_2)_A \alpha_1 \alpha_2 + \dots + (\varphi_1, \varphi_n)_A \alpha_1 \alpha_n + \\
 &\quad + (\varphi_2, \varphi_1)_A \alpha_2 \alpha_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A \alpha_2^2 + \dots + (\varphi_2, \varphi_n)_A \alpha_2 \alpha_n + \dots + \\
 &\quad + (\varphi_n, \varphi_1)_A \alpha_n \alpha_1 + (\varphi_n, \varphi_2)_A \alpha_n \alpha_2 + \dots + (\varphi_n, \varphi_n)_A \alpha_n^2 - \\
 &\quad - 2(f, \varphi_1) \alpha_1 - 2(f, \varphi_2) \alpha_2 - \dots - 2(f, \varphi_n) \alpha_n. \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

ცხადია, რომ (5.30) წარმოადგენს უკვე მრავალი ცვლადის ფუნქციას გაშლის  $\alpha_i$  კოეფიციენტების მიმართ. მაშასადამე, ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial Fu_n}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial Fu_n}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial Fu_n}{\partial \alpha_n} = 0. \tag{5.31}$$

მაშინ (5.30) ფუნქციის სახიდან გამომდინარე გვექნება, რომ გაშლის კოეფიციენტებს მოეთხოვებათ შემდეგ განტოლებათა სისტემის დაკმაყოფილება:

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1, \varphi_1)_A \alpha_1 + (\varphi_1, \varphi_2)_A \alpha_2 + \dots + (\varphi_1, \varphi_n)_A \alpha_n &= (f, \varphi_1), \\
 (\varphi_1, \varphi_2)_A \alpha_1 + (\varphi_2, \varphi_2)_A \alpha_2 + \dots + (\varphi_2, \varphi_n)_A \alpha_n &= (f, \varphi_2), \\
 &\dots \\
 (\varphi_1, \varphi_n)_A \alpha_1 + (\varphi_2, \varphi_n)_A \alpha_2 + \dots + (\varphi_n, \varphi_n)_A \alpha_n &= (f, \varphi_n). \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

რიტცის მეთოდი გამოიყენება წრფივი ოპერატორებისათვის, აქედან გამომდინარე, (5.32) განტოლებათა სისტემაც წრფივი იქნება. მისი დეტერმინანტი წარმოადგენს გრამის დეტერმინანტს ბაზისის ვექტორთა სისტემისათვის და მაშასადამე, განსხვავებულია ნულისაგან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . ეს საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ოპერატორული განტოლების განზოგადებული ამონახსნი (5.28).

## 5.2. გალიორკინ-პეტროვის მეთოდი

კომპიუტერული ტექნიკის განვითარებამ დიდი სტიმული მისცა რთული, არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდების განვითარებას. მაგალითად, კონსტრუქციების დრეკად რეჟიმში მუშაობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება სასრული ელემენტის მეთოდი;



გლობალური ატმოსფერული პროცესების შესასწავლად და ამინდის პროგნოზისათვის უპირატესობას ანიჭებენ სპექტრალურ მეთოდებს; რაც შეეხება ფრთისა და თვითმფრინავის ფუზელაჟის გარშემო დინების გათვლას, აქ ფართოდ გამოიყენება სასრულ სხვაობათა მეთოდი.

გარეგნულად, ეს მეთოდები ძლიერ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, თუმცა მათ ერთმანეთთან აქვთ მჭიდრო ურთიერთკავშირი. ეს ურთიერთკავშირი ხორციელდება გალიორკინის ან ცდომილების მინიმიზაციის მეთოდის ბაზაზე. აქედან შეიძლება ავაგოთ სასრულ ელემენტთა მეთოდი, სპექტრალური მეთოდი და სასრულ სხვაობათა მეთოდიც. ამ მეთოდების განვითარების ერთ-ერთ მაგალითს, წარმოადგენს რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდი [8-20].

გალიორკინის კლასიკური მეთოდის შესასწავლად, განვიხილოთ რაიმე ორგანზომილებიანი (ორ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციებით) წრფივი ამოცანა:

$$Lu = 0, \quad (5.33)$$

სადაც  $Lu = Au - f$ , ხოლო  $u(x, y)$  ფუნქცია განსაზღვრულია რაღაც  $G(x, y)$  არეზე და მის  $\partial G$  საზღვარზე აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს (დირიხლეს ამოცანა):

$$S(u) = 0. \quad (5.34)$$

გალიორკინის კლასიკურ მოდელში [8] აკეთებენ დაშვებას, რომ საძიებელი  $u$  ფუნქცია საკმაოდ ზუსტად განისაზღვრება  $u_\alpha$  მიახლოებით

$$u_\alpha = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(x, y), \quad (5.35)$$

სადაც  $\varphi_j(x, y)$  ცნობილი ანალიზური ფუნქციებია;  $u_0$  ფუნქცია შემოყვანილია სასაზღვრო პირობების დასაკმაყოფილებლად, ხოლო  $\alpha_j$  კოეფიციენტები უნდა ვიპოვოთ (5.33) განტოლებიდან.

ჩავსვათ (5.35) გამოსახულება (5.33) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ არანულოვან  $R$  ცდომილებას:

$$R(\alpha_1, \dots, \alpha_N, x, y) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N \alpha_j L(\varphi_j). \quad (5.36)$$

ფუნქციების შიგა (სკალარული) ნამრავლი განვსაზღვროთ  $L_2(G)$  წესით:

$$(f, g) = \iint f g dx dy, \quad (5.37)$$

სადაც ინტეგრება ხორციელდება მთელ  $G(x, y)$  არეზე.

გალიორკინის კლასიკურ მეთოდში უცნობი  $\alpha_j$  კოეფიციენტები განისაზღვრება განტოლებათა (5.38) სისტემის ამოხსნით:

$$(R, \varphi_k) = 0, \quad (5.38)$$

სადაც  $R$  განტოლების ცდომილებაა, ხოლო  $k = \overline{1, N}$ .

რადგან ამ ეტაპზე, ჩვენ ვხსნით წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, შესაბამისი (5.38) განტოლებათა სისტემაც იქნება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j (L(\varphi_j), \varphi_k) = -(L(u_0), \varphi_k). \quad (5.39)$$

თუ ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად მიღებულ  $\alpha_j$  კოეფიციენტებს შევიტანთ (5.35) გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ  $u_\alpha$  მიახლოებით განზოგადებულ ამონახსნს. წრფივი ოპერატორული განტოლებებისათვის, რიტცის მეთოდი და გალიორკინის კლასიკური მეთოდი ერთნაირ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე მიდის გაშლის კოეფიციენტების მიმართ. თუმცა, გალიორკინის მეთოდი საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ არაწრფივი ამოცანებიც.

**P.S.** თუ (5.38) განტოლებათა სისტემას ვაგებთ არა  $\varphi_k$  ბაზისური ფუნქციებით, არამედ სხვა რომელიმე  $\psi_k$  ორთოგონალური  $L_2(G)$  ჰილბერტის სივრცის სრული ბაზისის მეშვეობით, მაშინ ასეთ მეთოდს გალიორკინ-პეტროვის მეთოდი [7] ჰქვია.

განვიხილოთ გალიორკინის კლასიკური მეთოდის გამოყენების მაგალითები.

### 5.2.1. კოშის ამოცანის ამოხსნა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის გალიორკინის კლასიკური მეთოდით

გალიორკინის კლასიკური მეთოდის ინტერპრეტაციის ადვილად გასაგებად, განვიხილოთ მარტივი დიფერენციალური განტოლება [20]:

$$\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad (5.40)$$

სასაზღვრო პირობით:

$$y(0) = 1. \quad (5.41)$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ  $G[0; 1]$  შუალედში.

ცხადია, რომ ამ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:  $y = e^x$ , რაც ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ.

ავაგოთ ახლა, მიახლოებითი ამონახსნი გალიორკინის კლასიკური მეთოდით. ამისათვის ამოვირჩიოთ უმარტივესი ბაზისურ ფუნქციათა სისტემა:

$$\varphi_j(x) = x^j. \quad (5.42)$$

ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$y_\alpha = 1 + \sum_{j=1}^N \alpha_j x^j. \quad (5.43)$$

ცხადია რომ, ამ გამოსახულების პირველი წევრი არჩეულია სასაზღვრო (5.41) პირობის შესრულებისათვის. ადვილი მისახვედრია რომ, (5.43) წარმოდგენა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$y_\alpha = \sum_{j=0}^N \alpha_j x^j, \quad (5.44)$$

თუ ჩავთვლით რომ  $\alpha_0 = 1$ .

(5.43) გამოსახულება ჩავსვათ (5.40) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ  $R$  ცდომილებას შემდეგი სახით:

$$R(x) = -1 + \sum_{j=1}^N \alpha_j (jx^{j-1} - x^j). \quad (5.45)$$

გაშლის  $\alpha_j$  კოეფიციენტების საპოვნელად, მოცემული ამოცანისათვის ვადგენთ შესაბამის (5.38) განტოლებათა სისტემას:

$$(R(x), x^{k-1}) = 0, \quad (5.46)$$

სადაც  $k = \overline{1, N}$ .

ამ განტოლებათა სისტემას ჩავწერთ მატრიცულად:

$$M \cdot A = D, \quad (5.47)$$

სადაც

$$D_k = (1, x^{k-1}) = \int_0^1 1 \cdot x^{k-1} dx = \frac{1}{k}; \quad (5.48)$$

$$M_{kj} = (jx^{j-1} - x^j, x^{k-1}) = \int_0^1 (jx^{j+k-2} - x^{j+k-1}) dx = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}; \quad (5.49)$$

$$A_j = (\alpha_j). \quad (5.50)$$

ცხადია, რომ (5.47) მატრიცული განტოლების ამონახსნს ექნება სახე:

$$A = M^{-1} \cdot D. \quad (5.51)$$

ახლა შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ის გარემოში და დავთვალოთ (5.44) მიახლოებითი ამონახსნი გაშლის  $N=3$  მნიშვნელობისათვის, რათა ვნახოთ მიახლოებითი ამონახსნის აბსოლუტური ცდომილება  $y = e^x$  ზუსტ ამონახსნთან შედარებით.

ORIGIN:= 1

N:=3

j := 1..N

$$M_{k,j} := \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}$$

$$D_k := \frac{1}{k}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.667 & 0.75 \\ 0.167 & 0.417 & 0.55 \\ 0.083 & 0.3 & 0.433 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.333 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} := M^{-1} \cdot D$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.014 \\ 0.423 \\ 0.282 \end{pmatrix}$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ გაშლის კოეფიციენტები იმ შემთხვევაში, როცა  $N=3$ , მოიცემა  $A$  მატრიცით. შევაფასოთ აბსოლუტური ცდომილება  $G[0; 1]$  შუალედში.

$$i := 1..5$$

$$x_i := i \cdot 0.2$$

$$f(x) := e^x$$

$$y(x) := 1 + \sum_{i=1}^N (A_i \cdot x^i)$$

გაუსის  $L_2(G)$ -ს ნორმით თუ შევაფასებთ ცდომილებას, გვექნება, რომ

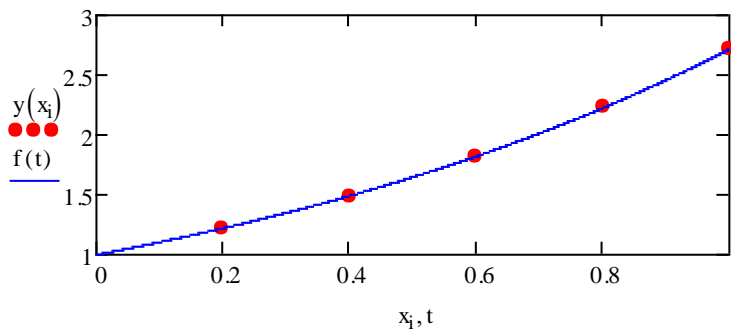
$$\delta G := \left[ \int_0^1 (f(x) - y(x))^2 dx \right]^{0.5} \quad \delta G = 5.556 \times 10^{-4}$$

ხოლო, თუ შევაფასებთ გაუსის დისკრეტული ნორმით, მივიღებთ აბსოლუტურ ცდომილებას:

$$\underline{\delta} := \left[ \sum_{i=1}^N (f(x_i) - y(x_i))^2 \right]^{0.5}$$

$$\delta = 1.067 \times 10^{-3}$$

გამოვსახოთ გრაფიკულად ზუსტი ამონახსნი  $f(x) = e^x$  (უწყვეტი წირი) და მიახლოებითი  $y(x)$  ამონახსნი წერტილებით.

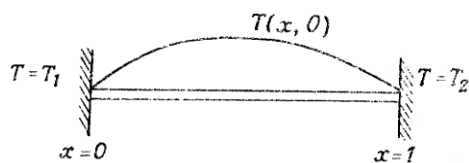


როგორც ვხედავთ, მიახლოებითი ამონახსნი (წერტილებით გამოსახული მნიშვნელობები) საკმაოდ დიდი სიზუსტით ემთხვევა ზუსტ (უწყვეტი წირი) ამონახსნს. რაც უფრო მეტ წევრებს ავიღებთ (5.44) გამლაში, მით უფრო ზუსტი იქნება მიახლოებითი ამონახსნი.

### 5.2.2. არასტაციონარული სითბოგამტარობის ამოცანის ამოხსნა გალიორკინის კლასიკური მეთოდით

გალიორკინის მეთოდი, საშუალებას გვაძლევს, კერძოწარმოებულ-ლიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ამოცანა, დავიყვანოთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე. ასეთი მიდგომა ხელსაყრელია, რადგან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ალგორითმები უკეთესადაა დამუშავებული, ვიდრე კერძოწარმოებულ-ლიანი განტოლებებისა.

განვიხილოთ სითბოგამტარობის ერთგანზომილებიანი ამოცანა. შესაბამისი სქემა მოცემულია ნახ. 5.1-ზე:



ნახ. 5.1. ბოლოებით ჩამაგრებული ძელის ტემპერატურის განაწილების ეპიურა

ძელის ბოლოებზე მოცემულია, რომ შესაბამისად, შენარჩუნებულია  $T_1$  და  $T_2$  ტემპერატურები, ხოლო საწყის  $t = 0$  მომენტში, ძელზე ტემპერატურა განაწილებულია კანონით:

$$T(x, 0) = T_1 + (\sin \pi x + x) \cdot (T_2 - T_1). \quad (5.52)$$

ტემპერატურის შემდგომი ცვლილება დროში, მოიცემა სითბოგამტარობის განტოლებით:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (5.53)$$

გადავიდეთ უგანზომილებო ცვლადებზე. უგანზომილებო ტემპერატურა იყოს

$$\vartheta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}. \quad (5.54)$$

უგანზომილებო დროის გამოსახვაში შევიტანოთ  $\alpha$  სითბოგამტარობის კოეფიციენტი. მაშინ მივიღებთ სითბოგამტარობის უგანზომილებო განტოლებას:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0, \quad (5.55)$$

საწყისი პირობით:

$$\vartheta(x, 0) = \sin \pi x + x \quad (5.56)$$

და სასაზღვრო პირობებით:

$$\vartheta(0, t) = 0 \text{ და } \vartheta(1, t) = 1. \quad (5.57)$$

(5.55), (5.56), (5.57) ამოცანის ამოსახსნელად ავირჩიოთ მიახლოებითი ამონახსნის ფორმა შემდეგნაირად:

$$\vartheta_\alpha(x, t) = \vartheta_0(x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \cdot \varphi_i(x), \quad (5.58)$$

სადაც  $\vartheta_0(x) = \sin \pi x + x$ ,  $\varphi_i(x) = x^i - x^{i+1}$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ  $\vartheta_0(x)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს საწყის (5.56) და სასაზღვრო (5.57) პირობებს,

ხოლო  $\varphi_i(x)$  ფუნქციები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს.

თუ (5.58) წარმოდგენას შევიტანთ (5.55) განტოლებაში, მივიღებთ ცდომილებას:

$$R = -\frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^N \left( \frac{d\alpha_i}{dt} \cdot \varphi_i - \frac{\alpha_i \partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} \right). \quad (5.59)$$

გალიორკინის პროცედურის გამოყენება ანუ განტოლებათა სისტემა:

$$(R, \varphi_i) = 0, \quad (5.60)$$

გვაძლევს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$M \cdot \dot{A} + B \cdot A + C = 0, \quad (5.61)$$

სადაც  $\dot{A}$  მატრიცის კომპონენტებია  $\frac{d\alpha_i}{dt}$ , ხოლო  $M$  მატრიცა მოიცემა ფორმულებით:

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j). \quad (5.62)$$

შესაბამისად,

$$B_{ij} = -\left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2}, \varphi_j \right); \quad C_i = -\left( \frac{\partial^2 \vartheta_0}{\partial x^2}, \varphi_i \right). \quad (5.63)$$

მატრიცული დიფერენციალური განტოლება (5.61) გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\dot{A} = -M^{-1}B \cdot A - M^{-1}C. \quad (5.64)$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე:

ORIGIN:= 1

N:= 11

i:= 1..N

j:= 1..N



$$M_{i,j} := \int_0^1 \left(\frac{i}{x} - x^{i+1}\right) \cdot \left(x^j - x^{j+1}\right) dx$$

$$M =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.033	0.017	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001
2	0.017	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
3	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
4	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
5	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0
6	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0
7	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0
8	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0
9	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0	0
10	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0	0	0
11	0.001	0.001	0	0	0	0	0	0	...

$$B_{i,j} := - \int_0^1 \left(\frac{i}{x} - x^{i+1}\right) \cdot \left[ j \cdot (j-1) \cdot x^{j-2} - (j+1) \cdot (j) \cdot x^{j-1} \right] dx$$

$$B =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.333	0.167	0.1	0.067	0.048	0.036	0.028	0.022	0.018
2	0.167	0.133	0.1	0.076	0.06	0.048	0.039	0.032	0.027
3	0.1	0.1	0.086	0.071	0.06	0.05	0.042	0.036	0.031
4	0.067	0.076	0.071	0.063	0.056	0.048	0.042	0.037	0.033
5	0.048	0.06	0.06	0.056	0.051	0.045	0.041	0.037	0.033
6	0.036	0.048	0.05	0.048	0.045	0.042	0.038	0.035	0.032
7	0.028	0.039	0.042	0.042	0.041	0.038	0.036	0.033	0.031
8	0.022	0.032	0.036	0.037	0.037	0.035	0.033	0.031	0.029
9	0.018	0.027	0.031	0.033	0.033	0.032	0.031	0.029	0.028
10	0.015	0.023	0.027	0.029	0.03	0.029	0.029	0.028	0.026
11	0.013	0.02	0.024	0.026	0.027	0.027	0.026	0.026	...

$$C_{i,j} := - \int_0^1 \left(-\pi^2 \cdot \sin(\pi \cdot x)\right) \cdot \left(\frac{i}{x} - x^{i+1}\right) dx$$

$$\underline{S}_{\text{xxx}} := -M^{-1} \cdot B \quad \underline{T}_{\text{xxx}} := -M^{-1} \cdot C$$

T =

	1
1	-30.825
2	-32.193
3	25.045
4	9.442
5	6.945
6	-12.764
7	2.578
8	0.656
9	-0.102
10	-0.234
11	0.026

C =

	1
1	1.273
2	0.637
3	0.362
4	0.224
5	0.148
6	0.103
7	0.074
8	0.055
9	0.042
10	0.033
11	0.026

	1	2	3	4
1	-179.936	135.088	-32.907	-51.908
2	5099.425	-3000.982	2098.83	2818.665
3	-69695.451	28909.185	-40787.925	-54384.914
4	536151.184	-139461.759	396692.894	528925.985
5	-2533470.844	305205.684	-2228269.114	-2971027.911
6	7698560.042	48171.672	7746734.104	10328980.395
7	-15323404.383	-1867631.301	-17191035.883	-22921382.074
8	19848900.32	4523382.941	24372283.055	32496377.711
9	-16104893.836	-5242838.438	-21347732.051	-28463643.18
10	7428438.607	3089526.816	10517965.381	14023954.035
11	-1485685.213	-742714.119	-2228399.318	...

p := 1..N

ic<sub>p</sub> := 0.1

$$D(t, A) := S \cdot A + T$$

$$Q := \text{Rkadapt}(ic, 0, 100, 200, D)$$

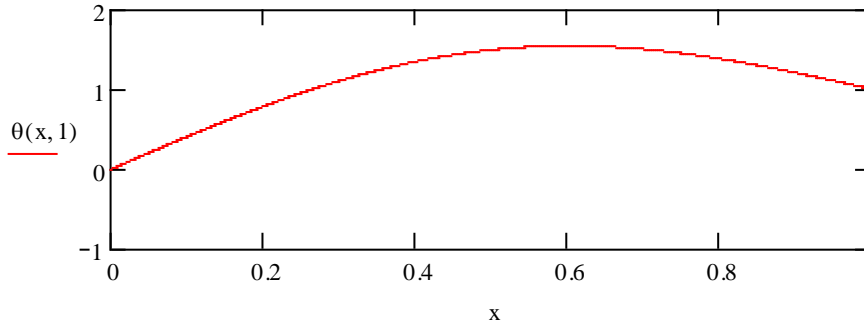
	1	2	3	4	5	6
1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.5	-3.117	-3.117	2.011	2.011	-0.522
3	1	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
4	1.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
5	2	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
6	2.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
7	3	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
8	3.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
9	4	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
10	4.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
11	5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
12	5.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
13	6	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
14	6.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
15	7	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
16	7.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	...

$$i_x := 0..last(Q^{(1)})$$

$$t := Q^{(1)}$$

$$k := 1..N \quad A_k := Q^{(k+1)}$$

$$\theta(x, t) := \sin(\pi \cdot x) + x + \sum_{k=1}^N \left[ (A_k)_t \cdot (x^k - x^{k+1}) \right]$$



როგორც მიღებული გრაფიკი გვიჩვენებს, გალიორკინის მეთოდი საკმაოდ კარგ შედეგს გვაძლევს, უკვე როცა  $N = 5 \div 11$ . დროის შემდეგი მომენტებისათვის გრაფიკი თანდათანობით წრფეს უახლოვდება და შესაბამისად, სიზუსტეც, კლებულობს გათვლის ცდომილებათა დაგროვების გამო, რაც მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული საბაზისო ფუნქციების არჩევაზე. მრუდი წირებისათვის, მრავალწევრა საბაზისო ფუნქციები საზღვარზე საგრძნობ ცდომილებას იძლევა. ასეთ შემთხვევაში, უმჯობესია, საბაზისო სისტემადა ავირჩიოთ ჩებიშევის ორთოგონალური სისტემა [11-12].

### 5.3. რვაჩოვ-ობგადის მეთოდი ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად მრავლადბმული არეების შემთხვევაში

ვარიაციული რიცხვითი მეთოდების გამოყენებისას, მთავარი სიძნელეა საბაზისო ფუნქციების შერჩევა. ბაზისის მოეთხოვება რომ ის იყოს: ა) სრული (რაც განაპირობებს ამონახსნის კრებადობას); ბ) წრფივად დამოუკიდებელი (რაც განაპირობებს ამონახსნის ერთადერთობას). ამასთან ერთად, ყველა ვარიაციული რიცხვითი მეთოდი მოითხოვს, რომ საბაზისო ფუნქციები აკმაყოფილებდნენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს. რვაჩოვ-ობგადის ვარიაციულ მეთოდში, ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება ხდება რვაჩოვ-ობგადის RO ფუნქციის საშუალებით, რომელიც ჩვენ უკვე ვიცით პირველი თავიდან.

გადავიდეთ RO მეთოდით კონკრეტული ამოცანის ამოხსნაზე.

**5.3.1. სწორხაზოვან კედლებიან არხში მოთავსებული, წრიული ცილინდრის, ბლანტი უკუმშავი სითხით სტაციონარული გარსდენის ამოცანის ამოხსნა RO-მეთოდით**

განვიხილოთ წრიული ცილინდრის სტაციონარული გარსდენის ამოცანა ბლანტი უკუმშავი სითხით. მაშინ, ამოცანის ფიზიკური ხასიათიდან გამომდინარე, გვექნება ორგანზომილებიანი ნავიე-სტოქსის (5.65)-(5.66) განტოლებათა სისტემა უკუმშავადობის (5.67) პირობით:

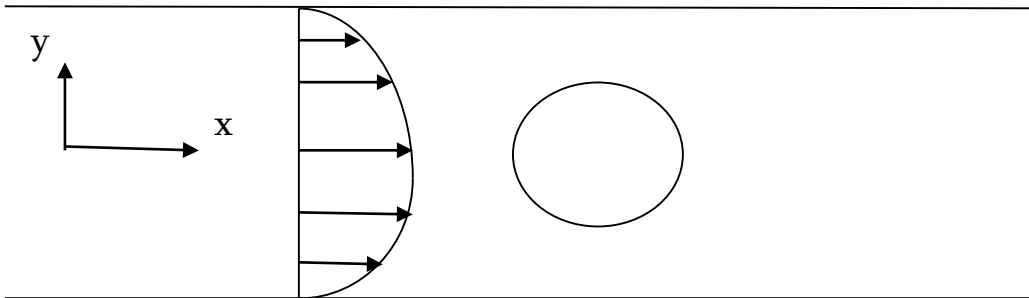
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.65)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.67)$$

სადაც  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია,  $p$  – წნევა,

$Re$  – რეინოლდსის უგანზომილებო რიცხვი.



ნახ. 5.2. სწორხაზოვან კედლებიან არხში მოთავსებული წრიული ცილინდრის გარსდენის სქემა

დიფერენციალურ განტოლებათა (5.65)-(5.67) სისტემას უნდა მივუერთოთ სასაზღვრო – მიკვრის პირობები:

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0, \quad u_{x^2+y^2=0.25} = 0. \quad (5.68)$$

ეს პირობები უზრუნველყოფს სითხის მიკვრას სწორხაზოვანი არხის  $y = \pm 1$  კედლებზე და  $x^2 + y^2 = 0.25$  საზღვრის მქონე ცილინდრის კედლებზე.

ამას გარდა, საჭიროა კინემატიკური პირობები:

$$u(-2, y) = 1 - y^2, \quad v(-2, y) = 0. \quad (5.69)$$

ამ ამოცანისათვის **RO** –ფუნქციას აქვს სახე:

$$RO(x, y) = (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25). \quad (5.70)$$

ცხადია, რომ  $RO(x, y)$  ფუნქცია საშუალებას იძლევა დავაკმაყოფილოთ (5.68) სასაზღვრო პირობები, თუ ამოცანის ამონახსნს მოვძებნით სახით:

$$u(x, y, \alpha) = RO(x, y) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij} (x+2)^i y^j, \quad (5.71)$$

$$v(x, y, \beta) = RO(x, y) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij} (x+2)^i y^j, \quad (5.72)$$

$$p(x, y, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \gamma_{ij} x^i y^j. \quad (5.73)$$

ცხადია რომ, (5.72) ფორმა ავტომატურად აკმაყოფილებს (5.69) კინემატიკურ პირობების მეორე  $v(-2, y) = 0$  განტოლებას. მაშასადამე,  $\alpha, \beta, \gamma$  კოეფიციენტები უნდა ვიპოვოთ  $u(-2, y) = 1 - y^2$  კინემატიკური პირობიდან და (5.65)-(5.67) განტოლებათა სისტემიდან.

შევადგინოთ ცდომილების  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  ფუნქცია. ამისათვის ჯერ გამოვითვალოთ საჭირო კერძო წარმოებულები:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, \alpha) &= (1 - y^2)(2x) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij} (x+2)^i y^j + \\ &+ (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i \alpha_{ij} (x+2)^{i-1} y^j, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x, y, \alpha) &= (1 - y^2)(2) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(x + 2)^i y^j + \\
&+ (1 - y^2)(4x) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i \alpha_{ij}(x + 2)^{i-1} y^j + \\
&+ (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N i(i - 1) \alpha_{ij}(x + 2)^{i-2} y^j, \quad (5.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y(x, y, \alpha) &= (-2y \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) + 2y(1 - y^2)) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(x + 2)^i y^j + \\
&+ (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j \alpha_{ij}(x + 2)^i y^{j-1}, \quad (5.76)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{yy}(x, y, \alpha) &= (-2x^2 - 12y^2 + 2.5) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(x + 2)^i y^j + \\
&+ 2(-2y \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) + 2y(1 - y^2)) \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j \alpha_{ij}(x + 2)^i y^{j-1} + \\
&+ (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N j(j - 1) \alpha_{ij}(x + 2)^i y^{j-2}, \quad (5.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_x(x, y, \beta) &= (1 - y^2)(2x) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij}(x + 2)^i y^j + \\
&+ (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i \beta_{ij}(x + 2)^{i-1} y^j, \quad (5.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{xx}(x, y, \beta) &= (1 - y^2)(2) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij}(x + 2)^i y^j + \\
&+ (1 - y^2)(4x) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i \beta_{ij}(x + 2)^{i-1} y^j + \\
&+ (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N i(i - 1) \beta_{ij}(x + 2)^{i-2} y^j, \quad (5.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vy(x, y, \beta) = & (-2y \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) + 2y(1 - y^2)) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij} (x + 2)^i y^j + \\
& + (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j \beta_{ij} (x + 2)^i y^{j-1}, \quad (5.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
vyy(x, y, \beta) = & (-2x^2 - 12y^2 + 2.5) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij} (x + 2)^i y^j + \\
& + 2(-2y \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) + 2y(1 - y^2)) \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j \beta_{ij} (x + 2)^i y^{j-1} + \\
& + (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25) \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N j(j-1) \beta_{ij} (x + 2)^i y^{j-2}, \quad (5.81)
\end{aligned}$$

$$px(x, y, \gamma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i \gamma_{ij} x^{i-1} y^j, \quad (5.82)$$

$$py(x, y, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j \gamma_{ij} x^i y^{j-1}. \quad (5.83)$$

მაშინ თითოეული განტოლებიდან გვექნება შესაბამისი ცდომილება:

$$\begin{aligned}
R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = & u(x, y, \alpha)ux(x, y, \alpha) + v(x, y, \beta)uy(x, y, \alpha) + px(x, y, \gamma) - \\
& - \frac{1}{Re} (uxx(x, y, \alpha) + uyy(x, y, \alpha)), \quad (5.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = & u(x, y, \alpha)v(x, y, \beta) + v(x, y, \beta)v(x, y, \beta) + py(x, y, \gamma) - \\
& - \frac{1}{Re} (vxx(x, y, \beta) + vyy(x, y, \beta)), \quad (5.85)
\end{aligned}$$

$$R3(x, y, \alpha, \beta) = ux(x, y, \alpha) + vy(x, y, \beta). \quad (5.86)$$

გვრჩება დასაკმაყოფილებელი ერთი კინემატიკური პირობა:

$$u(-2, y) = 1 - y^2. \quad (5.87)$$

რაც კიდევ ერთ ცდომილების ფუნქციას მოგვცემს:

$$R4(y, \alpha) = u(-2, y, \alpha) - 1 + y^2. \quad (5.88)$$



მაშინ ცდომილების შეწონილ  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  ფუნქციას ექნება სახე:

$$\begin{aligned}
 I(\alpha, \beta, \gamma) = & \tau_1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 [R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]^2 dx dy + \\
 & + \tau_2 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 [R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]^2 dx dy + \\
 & + \tau_3 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 [R3(x, y, \alpha, \beta)]^2 dx dy + \\
 & + \tau_4 \cdot \int_{-1}^1 [R4(y, \alpha)]^2 dy \rightarrow \min, \quad (5.89)
 \end{aligned}$$

სადაც  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$  წონის კოეფიციენტებია. ჩვენ შემთხვევაში, მათი მნიშვნელობებია შესაბამისად: 0.1; 0.1; 0.1; 0.7. მათი ჯამი, რა თქმა უნდა, ერთის ტოლია.

გაშლის  $\alpha, \beta, \gamma$  კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ  $L_2(G)$  ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს შესაბამის ცდომილების ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან.

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე:

$$\begin{aligned}
 N & := 2 & Re & := 10 \\
 u(x, y, \alpha) & := (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + \sum_{j=0}^N (\alpha_{0,j} \cdot y^j) \right] \\
 v(x, y, \beta) & := (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] \\
 p(x, y, \gamma) & := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\gamma_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)
 \end{aligned}$$

$$u_x(x, y, \alpha) := 2 \cdot x \cdot (1 - y^2) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [i \cdot \alpha_{i,j} \cdot (x+2)^{i-1} \cdot y^j]$$

$$u_{xx}(x, y, \alpha) := 2 \cdot (1 - y^2) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + 4 \cdot x \cdot (1 - y^2) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [i \cdot \alpha_{i,j} \cdot (x+2)^{i-1} \cdot y^j]$$

$$u_{xx}(x, y, \alpha) := u_{xx}(x, y, \alpha) + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N [i \cdot (i-1) \cdot (x+2)^{i-2} \cdot y^j]$$

$$u_y(x, y, \alpha) := (-2 \cdot y \cdot x^2 - 4 \cdot y^3 + 2.5y) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j]$$

$$u_y(x, y, \alpha) := u_y(x, y, \alpha) + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N [j \cdot \alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^{j-1}]$$

$$u_{yy}(x, y, \alpha) := (-2 \cdot x^2 - 12y^2 + 2.5) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j]$$

$$u_{yy}(x, y, \alpha) := u_{yy}(x, y, \alpha) + (-2 \cdot y \cdot x^2 - 4 \cdot y^3 + 2.5y) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N [j \cdot \alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^{j-1}]$$

$$u_{yy}(x, y, \alpha) := u_{yy}(x, y, \alpha) + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N [j \cdot (j-1) \cdot (x+2)^i \cdot y^{j-2}]$$

$$v_x(x, y, \beta) := 2 \cdot x \cdot (1 - y^2) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [i \cdot \beta_{i,j} \cdot (x+2)^{i-1} \cdot y^j]$$

$$v_{xx}(x, y, \beta) := 2 \cdot (1 - y^2) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + 4 \cdot x \cdot (1 - y^2) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [i \cdot \beta_{i,j} \cdot (x+2)^{i-1} \cdot y^j]$$

$$v_{xx}(x, y, \beta) := v_{xx}(x, y, \beta) + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N [i \cdot (i-1) \cdot \beta_{i,j} \cdot (x+2)^{i-2} \cdot y^j]$$

$$v_y(x, y, \beta) := (-2 \cdot y \cdot x^2 - 4 \cdot y^3 + 2.5y) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N [j \cdot \beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^{j-1}]$$

$$v_{yy}(x, y, \beta) := (-2 \cdot x^2 - 12y^2 + 2.5) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j]$$

$$\underline{v}_{yy}(x, y, \beta) := v_{yy}(x, y, \beta) + (-2 \cdot y \cdot x^2 - 4y^3 + 2.5y) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N [j \cdot \beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^{j-1}]$$

$$\underline{\underline{v}}_{yy}(x, y, \beta) := v_{yy}(x, y, \beta) + (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N [j \cdot (j-1) \cdot (x+2)^i \cdot y^{j-2}]$$

$$p_x(x, y, \gamma) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N (i \cdot \gamma_{i,j} \cdot x^{i-1} \cdot y^j)$$

$$p_y(x, y, \gamma) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N (j \cdot \gamma_{i,j} \cdot x^i \cdot y^{j-1})$$

$$R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) := u(x, y, \alpha) \cdot u_x(x, y, \alpha) + v(x, y, \beta) \cdot u_y(x, y, \alpha) + p_x(x, y, \gamma) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot (u_{xx}(x, y, \alpha) + u_{yy}(x, y, \alpha))$$

$$R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) := u(x, y, \alpha) \cdot v_x(x, y, \beta) + v(x, y, \beta) \cdot v_y(x, y, \beta) + p_y(x, y, \gamma) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot (v_{xx}(x, y, \alpha) + v_{yy}(x, y, \alpha))$$

$$R3(x, y, \alpha, \beta) := u_x(x, y, \alpha) + v_y(x, y, \beta)$$

$$R4(x, y, \alpha) := u(-2, y, \alpha) - 1 + y^2$$

$$\tau1 := 0.1 \quad \tau2 := 0.1 \quad \tau3 := 0.1 \quad \tau4 := 0.1$$

$$I1(\alpha, \beta, \gamma) := \tau1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma)^2 dx dy + \tau2 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma)^2 dx dy$$

$$I2(\alpha, \beta, \gamma) := \tau3 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 R3(x, y, \alpha, \beta)^2 dx dy + \tau4 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 R4(x, y, \alpha)^2 dx dy$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) := I1(\alpha, \beta, \gamma) + I2(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$i := 0..N$$

$$j := 0..N$$

$$\alpha_{i,j} := 0 \quad \beta_{i,j} := 0 \quad \gamma_{i,j} := 0$$

Given

$$S := \text{Minimize}(I, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.255 & -0.001 & -0.048 \\ 0.071 & 0 & 0.009 \\ -0.028 & 0.039 & -0.005 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.005 & 0.058 & -0.002 \\ -0.009 & -0.009 & -0.011 \\ 0.021 & -0.001 & -0.017 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0 & 0.039 & -0.011 \\ 0.005 & 0.082 & -0.016 \\ -0.046 & 0.04 & 0.016 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

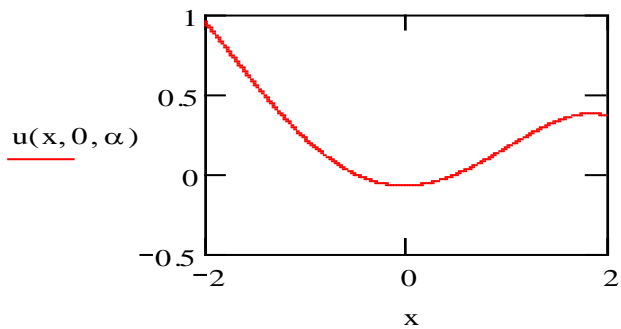
$$\alpha := S_0 \quad \beta := S_1 \quad \gamma := S_2$$

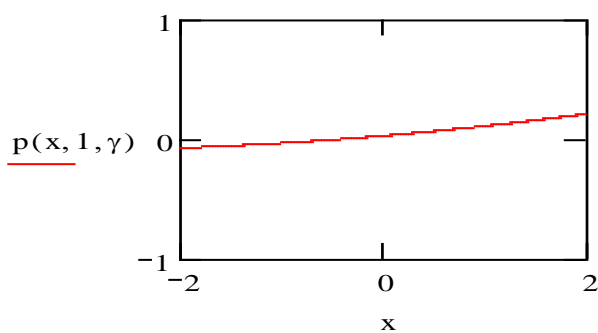
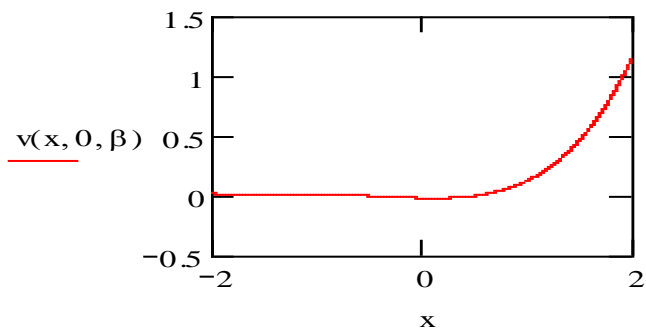
$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.13$$

$$u(x, y, \alpha) := (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j] + \sum_{j=0}^N (\alpha_{0,j} y^j) \right]$$

$$v(x, y, \beta) := (1 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 0.25) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} \cdot (x+2)^i \cdot y^j]$$

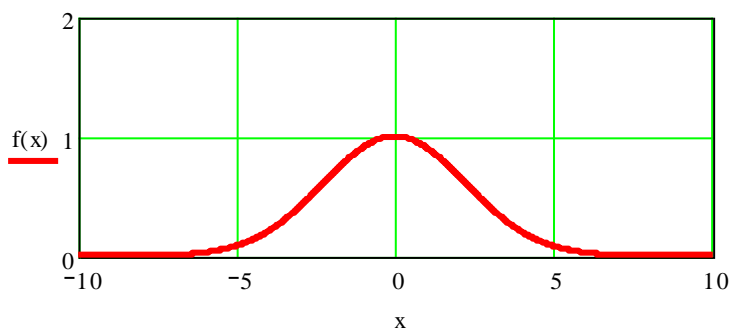
$$p(x, y, \gamma) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\gamma_{i,j} x^i y^j)$$





### 5.3.2. წყალქვეშა ბორცვის სტაციონარული გარსდენა ბლანტი, უკუმშავი სითხით

განვიხილოთ, წყალქვეშა ბორცვის გარსდენის ამოცანა ბლანტი, უკუმშავი სითხით. ბორცვის მოდელირებისათვის განვიხილოთ შემდეგი  $f(x) = e^{-x^2}$  ფუნქციის გრაფიკი ნახ. 5.3.



ნახ. 5.3. წყალქვეშა ბორცვის გარსდენის სქემა

ბლანტი, უკუმშავი სითხის სტაციონარული ნაკადი აღიწერება ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემითა და უკუმშავლობის პირობით:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (5.90)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5.91)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.92)$$

სადაც  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია,  $p$  – წნევა,  $Re$  – რეინოლდსის რიცხვი.

სასაზღვრო პირობები:

$$u_{f(x)=e^{-0.1x^2}} = v_{f(x)=e^{-0.1x^2}} = 0. \quad (5.93)$$

კინემატიკური პირობები:

$$u(-10, y, \alpha) = 1, \quad v(-10, y, \beta) = 0, \quad (5.94)$$

$$p(-10, 1, \gamma) > p(10, 1, \gamma). \quad (5.95)$$

$RO$  ფუნქციას აქვს სახე:

$$RO(x, y) = y - e^{-0.1x^2}. \quad (5.96)$$

ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$u(x, y, \alpha) = RO(x, y) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij} (x + 10)^i y^j, \quad (5.97)$$

$$v(x, y, \beta) = RO(x, y) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij} (x + 10)^i y^j, \quad (5.98)$$

$$p(x, y, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \gamma_{ij} x^i y^j. \quad (5.99)$$

ამ წარმოდგენაში ავტომატურადაა გათვალისწინებული (5.93) სასაზღვრო პირობები. დასაკმაყოფილებელია (5.90)-(5.92) განტოლებები და (5.94)-(5.95) კინემატიკური პირობები.

ჩავსვათ (5.97)-(5.99) წარმოდგენა (5.90)-(5.92) განტოლებებში და შევადგინოთ შესაბამისი ცდომილების ფუნქციები. ასევე, შევადგინოთ ცდომილებები (5.94)-(5.95) კინემატიკური პირობებიდან გამომდინარე. ამისათვის, ჯერ უნდა გამოვითვალოთ საჭირო წარმოებულები:

$$ux(x, y, \alpha) = 0.2xe^{-0.1x^2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$ux(x, y, \alpha) = ux(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i\alpha_{ij}(x+10)^{i-1} y^j.$$

$$u_{xx}(x, y, \alpha) = (0.2e^{-0.1x^2} - 0.04x^2 e^{-0.1x^2}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$u_{xx}(x, y, \alpha) = u_{xx}(x, y, \alpha) + 0.4xe^{-0.1x^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i\alpha_{ij}(x+10)^{i-1} y^j,$$

$$u_{xx}(x, y, \alpha) = u_{xx}(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N i(i-1)\alpha_{ij}(x+10)^{i-2} y^j$$

$$uy(x, y, \alpha) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$uy(x, y, \alpha) = uy(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-1}.$$

$$u_{yy}(x, y, \alpha) = 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j\alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-1},$$

$$u_{yy}(x, y, \alpha) = u_{yy}(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N \alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-2}.$$

$$vx(x, y, \beta) = 0.2xe^{-0.1x^2} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$vx(x, y, \beta) = vx(x, y, \beta) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i\beta_{ij}(x+10)^{i-1} y^j.$$

$$vxx(x, y, \beta) = (0.2e^{-0.1x^2} - 0.04x^2e^{-0.1x^2}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$vxx(x, y, \beta) = vxx(x, y, \beta) + 0.4xe^{-0.1x^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i\beta_{ij}(x+10)^{i-1} y^j,$$

$$vxx(x, y, \beta) = vxx(x, y, \beta) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N i(i-1)\beta_{ij}(x+10)^{i-2} y^j$$

$$vy(x, y, \beta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$vy(x, y, \beta) = vy(x, y, \beta) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-1}.$$

$$vyy(x, y, \beta) = 2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-1},$$

$$vyy(x, y, \beta) = vyy(x, y, \beta) + (y - e^{-0.1x^2}) \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N j(j-1)\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-2}$$

$$px(x, y, \gamma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N i\gamma_{ij}x^{i-1}y^j.$$

$$py(x, y, \gamma) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N j\gamma_{ij}x^i y^{j-1}.$$

მაშინ თითოეული განტოლებიდან გვექნება შესაბამისი ცდომილება:

$$R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = u(x, y, \alpha)ux(x, y, \alpha) + v(x, y, \beta)uy(x, y, \alpha) + px(x, y, \gamma) - \\ - \frac{1}{Re} (uxx(x, y, \alpha) + uyy(x, y, \alpha)), \quad (5.100)$$

$$R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = u(x, y, \alpha)vx(x, y, \beta) + v(x, y, \beta)vy(x, y, \beta) + py(x, y, \gamma) - \\ - \frac{1}{Re} (vxx(x, y, \beta) + vyy(x, y, \beta)), \quad (5.101)$$

$$R3(x, y, \alpha, \beta) = ux(x, y, \alpha) + vy(x, y, \beta). \quad (5.102)$$



კინემატიკური  $u(-10, y, \alpha) = 1$ ,  $v(-10, y, \beta) = 0$  პირობების დასაკმაყოფილებლად გვექნება ცდომილების ფუნქციები:

$$R4(y, \alpha) = u(-10, y, \alpha) - 1 \text{ და } R5(y, \beta) = v(-10, y, \beta).$$

მაშინ ცდომილების შეწონილ  $I(\alpha, \beta, \gamma)$  ფუნქციას ექნება სახე:

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta, \gamma) = & \tau_1 \cdot \int_0^{10} \int_{-10}^{10} [R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]^2 dx dy + \\ & + \tau_2 \cdot \int_0^{10} \int_{-10}^{10} [R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma)]^2 dx dy + \\ & + \tau_3 \cdot \int_0^{10} \int_{-10}^{10} [R3(x, y, \alpha, \beta)]^2 dx dy + \tau_4 \cdot \int_0^{10} R4(y, \alpha)^2 dy + \\ & + \tau_5 \cdot \int_0^{10} R5(y, \beta)^2 dy \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (5.103)$$

სადაც  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5$  წონის კოეფიციენტებია. ჩვენ შემთხვევაში, მათი მნიშვნელობებია 0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2. მათი ჯამი, რა თქმა უნდა ერთის ტოლია.

გაშლის  $\alpha, \beta, \gamma$  კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ  $L_2(G)$  ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან, შესაბამის ცდომილების ფუნქციასა და 0-ს შორის.

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე:

$$\underline{N} := 3 \quad \underline{Re} := 10$$

$$u(x, y, \alpha) := \left( y - e^{-0.1 \cdot x^2} \right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[ \alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^j \right]$$

$$v(x, y, \beta) := \left( y - e^{-0.1 \cdot x^2} \right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[ \beta_{i,j} (x+10)^i \cdot y^j \right]$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\gamma_{i,j} x^i \cdot y^j)$$

$$ux(x, y, \alpha) := 0.2x e^{-0.1 \cdot x^2} \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^j]$$

$$\underline{ux}(x, y, \alpha) := ux(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1 \cdot x^2}) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^{i-1} \cdot y^j \cdot i]$$

$$u_{xx}(x, y, \alpha) := (0.2e^{-0.1 \cdot x^2} - 0.04x^2 \cdot e^{-0.1 \cdot x^2}) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^j]$$

$$\underline{u_{xx}}(x, y, \alpha) := u_{xx}(x, y, \alpha) + 0.4x e^{-0.1 \cdot x^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^{i-1} \cdot y^j \cdot i]$$

$$\underline{\underline{u_{xx}}}(x, y, \alpha) := u_{xx}(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1 \cdot x^2}) \cdot \sum_{i=2}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^{i-2} \cdot y^j \cdot i \cdot (i-2)]$$

$$uy(x, y, \alpha) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^j] + (y - e^{-0.1 \cdot x^2}) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^{j-1} \cdot j]$$

$$u_{yy}(x, y, \alpha) := 2 \cdot \left[ \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^{j-1} \cdot j] \right]$$

$$\underline{u_{yy}}(x, y, \alpha) := u_{yy}(x, y, \alpha) + (y - e^{-0.1 \cdot x^2}) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N [\alpha_{i,j} (x+10)^i \cdot y^{j-2} \cdot j \cdot (j-2)]$$

$$vx(x, y, \beta) := 0.2x e^{-0.1 \cdot x^2} \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} (x+10)^i \cdot y^j]$$

$$\underline{vx}(x, y, \beta) := vx(x, y, \beta) + (y - e^{-0.1 \cdot x^2}) \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N [\beta_{i,j} (x+10)^{i-1} \cdot y^j \cdot i]$$

$$v_{xx}(x, y, \beta) := \left(0.2e^{-0.1 \cdot x^2} - 0.04x^2 \cdot e^{-0.1 \cdot x^2}\right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^j\right]$$

$$\underline{v_{xx}}(x, y, \beta) := v_{xx}(x, y, \beta) + 0.4x \cdot e^{-0.1 \cdot x^2} \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^{i-1} \cdot y^j \cdot i\right]$$

$$\underline{v_{xx}}(x, y, \beta) := v_{xx}(x, y, \beta) + \left(y - e^{-0.1 \cdot x^2}\right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^{j-2} \cdot j \cdot (j-2)\right]$$

$$v_{yy}(x, y, \beta) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^j\right] + \left(y - e^{-0.1 \cdot x^2}\right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^{j-1} \cdot j\right]$$

$$v_{yy}(x, y, \beta) := 2 \cdot \left[ \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^{j-1} \cdot j\right] \right]$$

$$\underline{v_{yy}}(x, y, \beta) := v_{yy}(x, y, \beta) + \left(y - e^{-0.1 \cdot x^2}\right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=2}^N \left[\beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^{j-2} \cdot j \cdot (j-2)\right]$$

$$p_x(x, y, \gamma) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N \left(\gamma_{i,j} \cdot x^{i-1} \cdot y^j \cdot i\right)$$

$$p_y(x, y, \gamma) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N \left(\gamma_{i,j} \cdot x^i \cdot y^{j-1} \cdot j\right)$$

$$R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) := u(x, y, \alpha) \cdot u_x(x, y, \alpha) + v(x, y, \beta) \cdot u_y(x, y, \alpha) + p_x(x, y, \gamma) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot (u_{xx}(x, y, \alpha) + u_{yy}(x, y, \alpha))$$

$$R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) := u(x, y, \alpha) \cdot v_x(x, y, \beta) + v(x, y, \beta) \cdot v_y(x, y, \beta) + p_y(x, y, \gamma) - \frac{1}{\text{Re}} \cdot (v_{xx}(x, y, \beta) + v_{yy}(x, y, \beta))$$

$$R3(x, y, \alpha, \beta) := u_x(x, y, \alpha) + v_y(x, y, \beta)$$

$$R4(y, \alpha) := u(-10, y, \alpha) - 1$$

$$R5(y, \beta) := v(-10, y, \beta)$$

$$\tau1 := 0.2 \quad \tau2 := 0.2 \quad \tau3 := 0.2 \quad \tau4 := 0.2 \quad \tau5 := 0.2$$

$$\mathbb{I1}(\alpha, \beta, \gamma) := \tau1 \cdot \int_0^{10} \int_{-10}^{10} \mathbb{R1}(x, y, \alpha, \beta, \gamma)^2 dx dy + \tau2 \cdot \int_0^{10} \int_{-10}^{10} \mathbb{R2}(x, y, \alpha, \beta, \gamma)^2 dx dy$$

$$\mathbb{I2}(\alpha, \beta) := \tau3 \cdot \int_0^{10} \int_{-10}^{10} \mathbb{R3}(x, y, \alpha, \beta)^2 dx dy + \tau4 \cdot \int_0^{10} \mathbb{R4}(y, \alpha)^2 dy + \tau5 \cdot \int_0^{10} \mathbb{R5}(y, \alpha)^2 dy$$

$$\mathbb{I}(\alpha, \beta, \gamma) := \mathbb{I1}(\alpha, \beta, \gamma) + \mathbb{I2}(\alpha, \beta)$$

$$i := 0..N \quad j := 0..N$$

$$\alpha_{i,j} := 1 \quad \beta_{i,j} := 0 \quad \gamma_{i,j} := 0.1$$

Given

$$p(-10, 1, \gamma) > p(10, 1, \gamma)$$

$$\underline{S} := \text{Minimize}(\mathbb{I}, \alpha, \beta, \gamma)$$

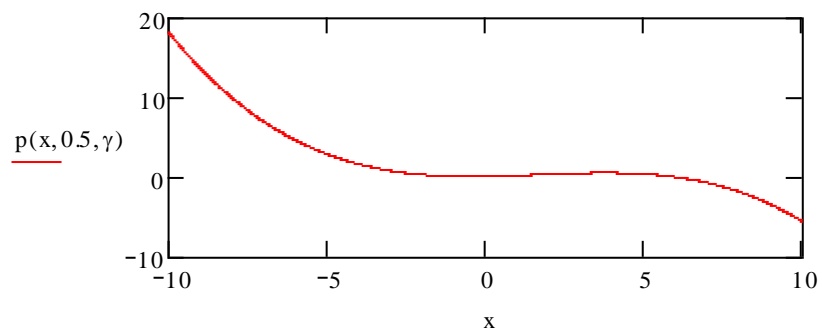
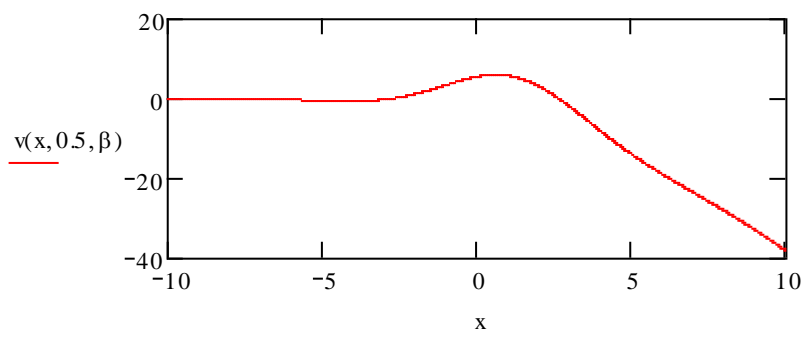
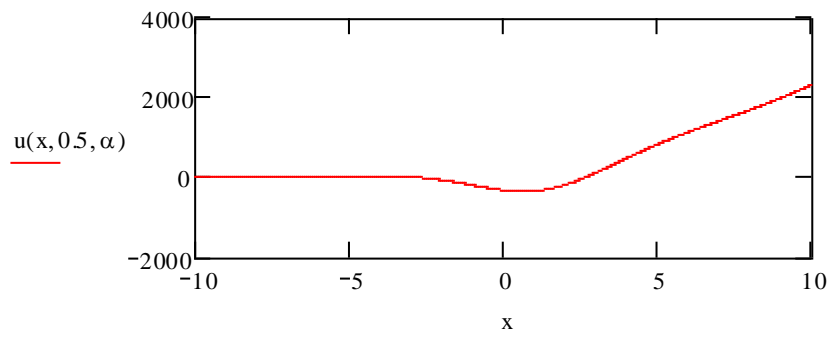
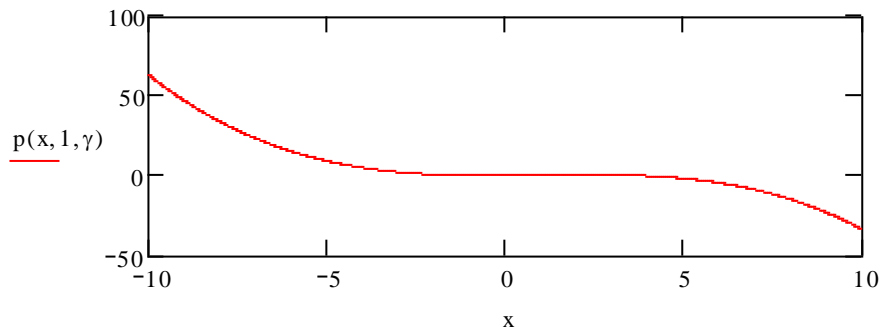
$$S = \left[ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.498 \\ 0.25 & 0.5 & 0.249 & 0.468 \\ 0.25 & 0.495 & 0.237 & -0.056 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -7.99 \times 10^{-7} & -9.292 \times 10^{-6} & -1.028 \times 10^{-4} & -1.105 \times 10^{-3} \\ -6.826 \times 10^{-6} & -9.444 \times 10^{-5} & -1.148 \times 10^{-3} & -0.013 \\ -1.738 \times 10^{-5} & -6.821 \times 10^{-4} & -0.011 & -0.14 \\ 1.21 \times 10^{-3} & 2.44 \times 10^{-3} & -0.05 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.05 \\ 0.025 & 0.049 & 0.025 & 0.049 \\ 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.05 \\ 5 \times 10^{-3} & -0.03 & 5 \times 10^{-3} & -0.03 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

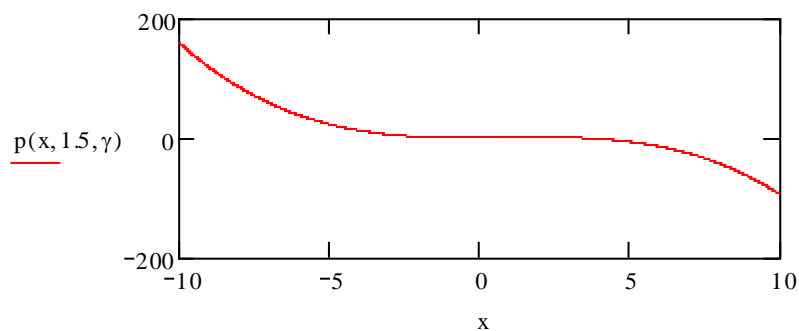
$$\underline{\alpha} := S_0 \quad \underline{\beta} := S_1 \quad \underline{\gamma} := S_2$$

$$\underline{u}(x, y, \alpha) := \left( y - e^{-0.1 \cdot x^2} \right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[ \alpha_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^j \right]$$

$$\underline{v}(x, y, \beta) := \left( y - e^{-0.1 \cdot x^2} \right) \cdot \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[ \beta_{i,j} \cdot (x+10)^i \cdot y^j \right]$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\gamma_{i,j} x^i y^j)$$





როგორც გათვლის შედეგები გვიჩვენებს,  $RO$ -მეთოდი კარგად ასახავს დინების ფიზიკურ სურათს, თუმცა რჩება არაერთი სიძნელე, რომელიც დაკავშირებულია მრავალი ცვლადის, ცდომილების ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან, როცა ცვლადთა რაოდენობა საკმაოდ დიდია.

### ლიტერატურა

1. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике, пер. с англ., Мир, Москва, 1985.
2. **Заманский М.** Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М., 1974.
3. **Пизо Ш., Заманский М.** Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971.
4. **Шварц Л.** Анализ, . Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, М., 1972.
5. **Карган А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, М., 1971.
6. **Рудин У.** Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, М., 1966.
7. **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы, Наука, М., 1981.
8. **Галёркин Б.Г.** Вестник инженеров, №19, Санкт-Петербург, 1915.

9. **Шарма Дж.Н., Сингх К.** Уравнения в частных производных для инженеров, пер. с англ., М., 2002.
10. **Франк А.М.** Дискретные модели несжимаемой жидкости, М., 2001.
11. **Чебышев П.Л.** Полное собрание сочинений, том 2, математический анализ, Москва-Ленинград, 1947,
12. **Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г.** Вычислительная физика, ВлГУ, Владимир, 1999,
13. **Пейре Р., Тейлор Томас Д.** Вычислительные методы в задачах механики жидкости, пер. с англ., Ленинград, 1986.
14. **Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения, пер. с англ., Мир, М., 1988.
15. **Рвачёв В.Л.** Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982.
16. **Обгадзе Т.А.** Применение методов R – функций и  $\Psi$  – преобразования для решения операторных уравнений, Сообщения АН ГССР, т.136, №1, 1989.
17. **Обгадзе Т.А.** Об одном методе решения задач теории обтекания тел вязкой жидкостью, Сборник науч. трудов ГПИ им. В.И. Ленина, сер. МСС, №6(262), Т., 1983.
18. **Обгадзе Т.А.** Элементы математического моделирования, Учебное пос., министерство высшего и среднего образования ГССР, ГПИ, 1989.
19. **Мироновский Л.А.** Моделирование разностных уравнений, учебное пос., Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 2004.
20. **Флетчер К.** Численные методы на основе метода Галёркина, пер. с англ., Мир, М., 1988.
21. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (უწყვეტი მათემატიკური მოდელეები), ტომი 1, სტუ, თ., 2006.

22. **ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა., ტრუსკინოვსკი ა.** ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები (ფრაქტალები), დამხმარე სახელმძღვანელო, ტომი 3, სტუ, თ., 2016.
23. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (მაგისტრანტე-ბისათვის), ტომი 3, სტუ, თ., 2008.
24. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (რხევითი პროცესები), ტომი 4, სტუ, თ., 2010.
25. **ობგაძე თ., ბიჩენოვი ნ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტომი 5, სტუ, თ., 2012.
26. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (დინამიკური პროცესები და ქაოსი), ტომი 6, სტუ, თ., 2013.
27. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, სტუ, თ., 2016.
28. **ობგაძე თ., თუშიშვილი ნ., მუხაშავერია ს., გურგენიძე ლ., ვარძიაშვილი ნ.** ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები, დამხმარე სახელმძღვანელო, ტომი 1, სტუ, თ., 2014.
29. **ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა.** ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები (დიფერენცირებად მრავალსახეობათა ლოკალური გეომეტრია), დამხმარე სახელმძღვანელო, ტომი 2, სტუ, თ., 2015.



შინაარსი

წინასიტყვაობა		ბგ.	
		3	
I თავი	მათემატიკის დამატებითი თავები	6	
	1.1	გამონათქვამთა ბულის ალგებრა	6
	1.2.	სიმრავლეთა ბულის ალგებრა	12
	1.2.1	სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი. მიმართება. ფუნქცია. ფუნქციონალი და ოპერატორი	16
	1.2.2	ფრაქტალი, როგორც სიმრავლე	18
	1.2.3	თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები	20
	1.2.4	პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგაძის გეომეტრიული კოდირების RO-მეთოდი	21
ამოცანები		25	
	1.3	რიცხვითი სიმრავლეები და ალგებრული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები	28
	1.3.1	ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი	32
	1.3.1.1	რიცხვთა თეორიის ელემენტები	36
	1.3.1.2	შედარებათა თეორიის ელემენტები	39
	1.3.2	რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიური აგება	41
	1.3.3	კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე	44
	1.3.3.1	კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები	45
	1.3.3.2	ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში	47
	1.3.4	რიცხვითი სისტემების აგება გრასმან-კლიფორდის პროცედურით	48
	1.3.4.1	კვატერნიონები	50
	1.3.4.2	პაულის რიცხვები	51

	1.3.4.3	ჰიპერკომპლექსური რიცხვები	52
	1.3.5	კელი-დიქსონის პროცედურა	53
	1.3.5.1	ოქტავეები	54
	1.3.6	ზოგიერთი რიცხვითი სისტემის მატრიცული წარმოდგენა	54
	1.3.7	არაწრფივი განტოლების ამოხსნა ნიუტონის ალგორითმით	56
	1.3.7.1	არაწრფივი განტოლების ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით	59
	1.3.8	ორ და სამ ცვლადიან წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა მატრიცული ხერხით Mathcad-ის ბაზაზე	61
	1.3.8.1	მაღალი რიგის წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციული მეთოდით	62
	1.3.9	არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იაკობის მარტივი იტერაციის მეთოდით	67
	1.3.9.1	არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა ნიუტონის მეთოდით	69
ამოცანები			70
ლიტერატურა			72
II თავი	ფუნქციონალური სივრცეები		75
	2.1	წრფივი ფუნქციონალური სივრცე	75
	2.2	ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე	79
	2.3	ანალოგია $n$ განზომილებიან ვექტორულ სივრცესა და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეს შორის	83
	2.4	სობოლევის $W_2^k$ ფუნქციონალური სივრცე	84
	2.5	დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის	85
ამოცანები			86
ლიტერატურა			90
	2.6	ოპტიმიზაციის მეთოდები	90

	2.6.1	უპირობო ექსტრემუმი $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის	91
	2.6.1.1	სილვესტრის კრიტერიუმი კვადრატული ფორმებისათვის	92
	2.6.1.2	მკაცრი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის	94
	2.6.1.3	გრადიენტული სწრაფი დაშვების მეთოდი	96
	2.6.2	მონტე-კარლოს მეთოდი	98
	2.6.3	უპირობო ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	99
	2.7	პირობითი ექსტრემუმი $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვს განტოლების ფორმა (ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი)	101
	2.7.1	მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის ამოცანა, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვს უტოლობების ფორმა	103
	2.8	წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანის დაყვანა მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე	105
	2.8.1	არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ამოცანის დაყვანა მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის პოვნის ამოცანაზე	106
	2.9	წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	107
	2.9.1	სატრანსპორტო გადაზიდვების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	110
	2.9.2	რესურსების ოპტიმალური განაწილების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	114
	2.10	არაწრფივ დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	118

	2.10.1	არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	120
	2.11	მრავალკრიტერიუმიანი ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები	121
	2.11.1	მრავალკროტერიუმიანი მაქსიმიზაციის და მინიმიზაციის ამოცანები	121
	2.11.2	მრავალკრიტერიუმიანი, ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნა	122
	2.12	დინამიკური დაპროგრამება	123
	2.13	გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი და ექსპერიმენტის მასალების დამუშავება. წრფივი რეგრესია. ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე	124
	2.13.1	დამოკიდებულება ძელის გაჭიმვისას ძაბვებსა და მცირე დეფორმაციებს შორის (ჰუკის კანონი)	126
	2.13.2	სიჩქარის ეპიურის აგება ნიუტონური სითხეებისათვის	130
ამოცანები			132
ლიტერატურა			137
III თავი	კლასიკური ვარიაციული აღრიცხვა		139
	3.1	ვარიაციული აღრიცხვის კლასიკური ამოცანის დასმა	139
	3.1.1	გეოდეზიური წირები სიბრტყეზე	139
	3.1.2	გეოდეზიური წირები ნებისმიერ ზედაპირზე	140
	3.1.3	ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ	141
	3.1.4	დიდონის იზოპერიმეტრული ამოცანა	143
	3.1.5	ამოცანა ბრუნვის ზედაპირის მინიმუმის შესახებ	145
	3.2	ფუნქციონალის ვარიაცია	146
	3.2.1	ანალოგია ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის	148

	3.2.2	ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია	153
	3.3	ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით	154
	3.3.1	ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანების ამოხსნის მაგალითები	157
	3.3.2	ეილერის განტოლების კერძო შემთხვევები	162
	3.3.3	რამდენიმე, ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი	167
	3.3.4	უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალი მაღალი რიგის წარმოებულებით	169
	3.3.5	მრავალი ცვლადის ფუნქციებზე დამოკიდებული ფუნქციონალი	171
	3.3.6	ეილერის განტოლებების კანონიკური სახე	176
	3.3.7	ფუნქციონალებისა და მათი შესაბამისი ექსტრემუმების განტოლებათა ცხრილი	179
	3.4	ვარიაციული ამოცანები მოძრავი საზღვრებით	180
	3.4.1	ვარიაციული ამოცანა, ექსტრემუმის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ (ვერტიკალურ) წრფეზე მოძრავი ბოლოებით	181
	3.4.2	ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა ნებისმიერ ორ წირზე მოძრავი საზღვრებით	183
	3.5	ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა	185
	3.5.1	ლაგრანჟის ამოცანა	186
	3.5.2	მაიერის ამოცანა	189
	3.5.3	ბოლცას ამოცანა	192
	3.6	ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები	195
	3.6.1	სუსტი ექსტრემუმები	196
	3.6.2	ლეჟანდრის და იაკობის თეორემები	198
ამოცანები			204

ლიტერატურა		206	
	3.7	ლაგრანჟის ფორმალიზმი და ჰამილტონური სისტემები	207
	3.7.1	ლაგრანჟის ფუნქცია და ჰამილტონის პრინციპი	208
	3.7.2	ლაგრანჟიანის თვისებები	211
	3.7.3	განზოგადებული იმპულსის თვისებები	213
	3.7.4	ჰამილტონის ფორმალიზმი	214
	3.7.5	ჰამილტონის განტოლებები	216
	3.7.6	პუასონის ფრჩხილები	218
	3.7.7	ჰამილტონ-იაკობის განტოლებები	220
	3.7.8	ლეჟანდრის გარდაქმნების გეომეტრია	221
	3.7.8	კლასიკური მექანიკის გეომეტრია	223
ამოცანა		229	
ლიტერატურა		229	
IV თავი	ოპერატორები და ფუნქციონალები ჰილბერტის სივრცეში		231
	4.1	ოპერაციები ოპერატორებზე. შებრუნე- ბული ოპერატორი. წრფივი ოპერატორის ცნება. ერთეულოვანი და ნულ ოპერატორი. ოპერატორის განსაზღვრის არე. შემოსაზ- ღვრული ოპერატორი. უწყვეტი ოპერატო- რი	232
	4.2	ბანახის თეორემა მკუმშავი ოპერატორის უძრავი წერტილის შესახებ სრულ მეტრიკულ სივრცეში	235
	4.3	სიმეტრიული, დადებითი და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორები. გრინის თეორემა მრავალი ცვლადის ფუნქციის ნაწილობითი ინტეგრების შესახებ	236
	4.4	ფუნქციონალი, როგორც ოპერატორის კერძო შემთხვევა. წრფივი და უწყვეტი ფუნქციონალები. შემოსაზღვრული ფუნქციონალი	239

V თავი	დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ვარიაციული მეთოდები	241
	5.1 თეორემა კვადრატული ფუნქციონალის მინიმუმის შესახებ	241
	5.1.1 ორთონორმირებული ბაზისის მეთოდი. დირიხლეს ამოცანა პუასონის განტოლებისათვის მართკუთხა არეში	244
	5.1.2 რიტცის მეთოდი	247
	5.2 გალიორკინ-პეტროვის მეთოდი	248
	5.2.1 კომის ამოცანის ამოხსნა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის გალიორკინის კლასიკური მეთოდით	251
	5.2.2 არასტაციონარული სითბოგამტარობის ამოცანის ამოხსნა გალიორკინის კლასიკური მეთოდით	254
	5.3 რვაჩევ-ობგაძის მეთოდი ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად მრავლადბმული არეების შემთხვევაში	260
	5.3.1 სწორხაზოვან კედლებიან არხში მოთავსებული, წრიული ცილინდრის, ბლანტი უკუმშავი სითხით სტაციონარული გარსდენის ამოცანის ამოხსნა RO-მეთოდით	261
	5.3.2 წყალქვეშა ბორცვის სტაციონარული გარსდენა ბლანტი, უკუმშავი სითხით	269
ლიტერატურა		278