საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ნინო რუსიაშვილი

აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი ყოფაქცევა ფაზურ სივრცეებში

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა"   შიფრი 0501

თბილისი

2017 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფ. გოგი ფანცულაია

პროფ. ალექსი კირთაძე

რეცენზენტები: --

დაცვა შედგება ---------- წლის ”------” ----------------, --------- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის

სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

კარგად არის ცნობილი, რომ ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომები არის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური საშუალება დინამიკური სისტემების (როგორც აბსტრაქტული სისტემების, ასევე მეტ-ნაკლებად კონკრეტული სისტემების, რომლებიც ბუნებრივად წარმოიშვებიან პრაქტიკაში) თანამედროვე თეორიის შესასწავლად. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს თეორია არის მნიშვნელოვანი თავისთავად, როგორც წმინდა მათემატიკის მიმართულება და, აგრეთვე, არის მეტად მნიშვნელოვანი მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებებით საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ბევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, ალბათობის თეორიისა და შემთხვევით პროცესთა თეორიიდან, ქაოსთა თეორიიდან, ერგოდული თეორიიდან და ა.შ. მეორეს მხრივ, დინამიკურ სისტემათა თეორიის თანამედროვე ხედვამ განაპირობა სხვადასხვა გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ ძირითად ბაზისურ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომებისათვის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ზემოთ მოყვანილი საკითხების კვლევისას, ჩვენ ავტომატურად გვჭირდება ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომების ისეთი შინაგანი თვისებების შესწავლა, როგორიცაა: მეტრიკული ტრანზიტულობა (ერგოდულობა), სუსტად მეტრიკული ტრანზიტულობა, ერთადერთობის თვისება, შტეინჰაუზის თვისება სისტემის მდგრადობის შესახებ, გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფებით აღჭურვილ სივრცეებში ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების შინაგანი თვისებები და ამ თვისებების ზოგიერთი გამოყენება.

ცნობილია აბსტრაქტული დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების არსებობა კონკრეტული საბაზისო სივრცეებისათვის (კრილოვ-ბოგოლუბოვის თეორემა ნებისმიერი არაცარიელი კომპაქტური

მეტრიკული სივრცისათვის, მარკოვ-კაკუტანის თეორემა ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცისათვის, ლებეგის კლასიკური დინამიკური სისტემა ევკლიდეს სივრცეებისათვის, ჰაარის დინამიკური სისტემა არაცარიელი ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფისათვის, ხარაზიშვილის დინამიკური სისტემა ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო მიმდევრობების სივრცეში და სხვ.). ბუნებრივად, საინტერესოა ანალოგიური საკითხის შესწავლა უსასრულო-განზომილებიანი სივრცეებისათვის. ასეთი სივრცეებისათვის არსებობს მდიდარი მეთოდოლოგია, რომელიც შეისწავლის დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების სხვადასხვა თვისებებს. უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემებისათვის სტანდარტული მეთოდების გამოყენება ვერ ხერხდებოდა იმ მიზეზის გამო, რომ აღნიშნულ სივრცეებში არ არსებობს ყველა პარალელური ძვრების მიმართ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემა. ამიტომ ბუნებრივი გახდა დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის პრობლემის გამოკვლევა უსასრულოგანზომილებიანი სივრცეებისათვის იმ პირობით, რომ ფაზური სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფის როლში განხილული ყოფილიყო ამ სივრცის გარკვეული ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფი (ქვესივრცე). ამ მიმართულებით ახალი საინტერესო შედეგები ეკუთვნით ი. გირსანოვს და ბ. მიტიაგინს, ა. სკოროხოდს, ჰ. შიმომურას, ტ. გილს, რ. ბეკერს, ი. იამასაკის, პ. ზაგჟევსკის, ა. ხარაზიშვილს, გ. ფანცულაიას, ა. კირთაძეს და სხვ.

ნაშრომის მიზანი.

ნაშრომის მიზანია σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემებისათვის შემდეგი საკითხების შესწავლა და გამოკვლევა:

(ა) აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობა უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში;

(ბ) დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე, რომლისთვისაც არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის დინამიკური ან კვაზიდინამიკური სისტემა, რომელიც ინვარიანტულია (შესაბამისად, კვაზიინვარიანტულია) საბაზისო სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

(გ) σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების ამოცანა;

(დ) აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების სიმრავლურ-თეორიულ ასპექტები.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები.

ნაშრომის კვლევის ობიექტებია აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ და სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში. აგრეთვე, σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელებადობის საკითხი. ამ საკითხების კვლევის პროცესში არსებითად გამოიყენება აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი, პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი, სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატური სისტემები, დესკრიფციული სიმრავლეთა თეორიის დებულებები, სხვადასხვა სივრცეებში გარდაქმნათა ჯგუფების სტრუქტურა.

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და სიახლე

ცნობილია, რომ თუ G არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, მაშინ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო ჰაარის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. დავუშვათ, რომ G არ არის ლოკალურად კომპაქტური. ცნობილია, რომ ასეთ შემთხვევაში არ არსებობს σ-სასრულო ბორელის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. თუ G არის არალოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ, აგრეთვე, არ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო მარცხენა (მარჯვენა) G-კვაზიინვარიანტული ბორელის ზომა G-ში. შევნიშნოთ, რომ თუ E არის ნებისმიერი სეპარაბელური ბანახის სივრცე, მაშინ E სივრცეში არსებობს ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია E-ს ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

ბუნებრივად დაისვა საკითხი იმის შესახებ, რომ დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე E რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: E სივრცეზე არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) E სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. ამ თვალსაზრისით მიღებულია შედეგი, რომლის მიხედვით სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცისათვის გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ეს სივრცე არის სეპარაბელური.

ცნობილია, რომ ნებისმიერ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში არსებობს ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია საბაზისო სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. ასევე ცნობილია, რომ დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული იმ აქსიომის მიღების

შემთხვევაში, როცა ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით, აბსოლუტურად კრებადი შაუდერის ბაზისით აღჭურვილი ბანახის სივრცის ბულეანზე არსებობს ისეთი ინვარიანტული ზომის მაგალითი, რომელიც სტანდარტულ მართკუთხედზე ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომლებშიც არსებობს შაუდერის ბაზისი, აგებულ იქნა ლებეგის ზომის ანალოგიური ზომა ყოველგვარი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე. ამ მიმართულებით განხილულია უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე, რომლისთვისაც ყოველთვის არსებობს მარკუშევიჩის ბაზისი. ასეთი სივრცეებისათვის აგებულ იქნა მთელი სივრცის ძვრების მიმართ ინვარიანტული ორდინალური და სტანდარტული ბორელის დინამიკური სისტემები. აქვე გამოკვლეულია ასეთი სისტემების განსაზღვრის არეები და დამტკიცებულია, რომ მათი განსაზღვრის არეებად შეიძლება შეირჩეს ისეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლე, რომელიც არ დაიფარება საბაზისო სივრცის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი ოჯახით.

დისერტაციის ერთ-ერთი ძირითადი საკითხია σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების ამოცანა. ნაშრომში შემოღებულია თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმის ცნება და წარმოდგენილია სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდისა და კოდაირა-კაკუტანის მეთოდის გარკვეული კომბინაცია. ამის შედეგად შესაძლებელი გახდა ნებისმიერი არათვლად ჯგუფისათვის განსაზღვრული σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელება.

დისერტაციაში განხილულია შემდეგი ამოცანები:

1) (უ. დარჯი). შესაძლებელია თუ არა, რომ G პოლონური ჯგუფი წარმოვიდგინოთ პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით;

2) (დ. ფრემლინი). ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ და λ^* -თი აღნიშნულია ლებეგის გარე ზომა.

$$(\lambda^*(X)=0 \Leftrightarrow \exists \text{ბორელის ალბათური ისეთი } \mu \text{ ზომა,}$$
$$\text{რომ } (\forall t)\big(t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mu(X+t)=0\big)$$

3) (პ. ერდოში). არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ ლებეგის აზრით ზომადი E სიმრავლე, რომლის ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

ამოცანა 1) ამოხსნილია უნიმოდალური ჯგუფებისათვის, ამოცანა 2) ამოხსნილია **(ZF&DC&AD)** სიმრავლეთა თეორიის მოდელში, ხოლო ამოცანა 3) კი - **(ZF&DC)** სიმრავლეთა თეორიაში.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა.

სადისერტაციო ნაშრომის შედგება ოთხი თავისაგან. II თავი შედგება ოთხი ქვეთავისაგან, IV თავი კი - ორი ქვეთავისაგან. ნაშრომი აგრეთვე მოიცავს შესავალს, ლიტერატურის მიმოხილვას, დასკვნას და გამოყენებულ ლიტერატურას, სულ 103 დასახელებას და წარმოადგენს 142 ნაბეჭდ გვერდს.

დისერტაციის შინაარსი

წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის პირველ თავში მოცემულია ის ძირითადი აღნიშვნები, ცნებები და წინადადებები სიმრავლეთა თეორიიდან და ზომის თეორიიდან, რომლებიც არსებითად გამოყენებულია დისერტაციის ძირითადი შედეგების მისაღებად. კერძოდ, ჩამოყალიბებულია სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატური სისტემები, ზომის თეორიისა და დესკრიფციული სიმრავლეთა თეორიის ნაშრომში გამოყენებული დებულებები.

დისერტაციის მეორე თავის 2.1 ქვეთავში მოყვანილია დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების კლასიკური განსაზღვრებები და

განხილულია შესაბამისი მაგალითები. ჩვენ განვიხილავთ ისეთ დინამიკურ (კვაზიდინამიკურ) სისტემებს, რომლებისთვისაც არსებობენ შესაბამისი ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომები. ამიტომ ხშირად დინამიკური სისტემის ქვეშ ვიგულისხმებთ ინვარიანტულ (შესაბამისად, კვაზიინვარიანტულ) ზომას მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. ამ კონტექსტში ბუნებრივია შემდეგი განსაზღვრა.

(E, G, S, μ) ოთხეულს, სადაც E ძირითადი ფაზური სივრცეა, G არის სივრცის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფი, S-არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ - კი G-ინვარიანტული (შესაბამისად, G-კვაზიინვარიანტული) ზომაა, ეწოდება აბსტრაქტული დინამიკური (შესაბამისად, კვაზიდინამიკური) სისტემა.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, შემდგომში, ზოგჯერ, ტექსტის სიმარტივისათვის, (E, G, S, μ) ოთხეულს ჩავანაცვლებთ ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომით.

ამავე ქვეთავში მოყვანილია აბსტრაქტული დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების ძირითადი თვისებები (ერთადერთობა, მეტრიკული ტრანზიტულობა და სხვ.) და განხილულია შესაბამისი მაგალითები.

მეორე თავის 2.2.ქვეთავში განხილულია აბსტრაქტული დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების არსებობის საკითხი სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში. კერძოდ, მაგალითების სახით ჩამოყალიბებულია კრილოვ-ბოგოლუბოვის, მარკოვ-კაკუტანის, ჰაარის, ლებეგის თეორემები აბსტრაქტული დინამიკური სისტემების არსებობის შესახებ. აქვე დახასიათებულია ნებისმიერი არათვლადი α სიმრავლისათვის დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი ყველა იმ ფუნქციების $\mathbf{R}^{\alpha}$ სივრცეში, რომლის განსაზღვრის არეა α და მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\mathbf{R}$, სადაც $\mathbf{R}$-ით აღნიშნულია ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $card(\alpha)=\omega$, სადაც ω აღნიშნავს პირველ უსასრულო კარდინალურ რიცხვს, დამტკიცებით

მოყვანილია σ-სასრული $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \chi\right)$ დინამიკური სისტემის აგება. ამ დინამიკური სისტემის არსებობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს σ-სასრული $\left(l_2, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(l_2), \chi\right)$ დინამიკური სისტემის არსებობაც, სადაც

$$l_2 = \left\{ x : x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \ \& \sum_{i \in \mathbf{N}} x_i^2 < +\infty \right\}.$$

დისერტაციის მეორე თავის 2.3. ქვეთავი ეძღვნება დინამიკური სისტემების არსებობას უსასრულოგანზომილებიან წრფივ პოლონურ სივრცეებს. ცნობილია, რომ თუ G არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, მაშინ არსებობს არანულოვანი σ-სასრული ჰაარის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

დავუშვათ, რომ G არ არის ლოკალურად კომპაქტური. როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში არ არსებობს σ-სასრული ბორელის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია (კვაზიინვარიანტულია) G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ თუ E არის ნებისმიერი სეპარაბელური ბანახის სივრცე, მაშინ E სივრცეში არსებობს ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია E-ს ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

ნაშრომში მიღებულია შემდეგი დებულება:

თეორემა 1. არსებობს არანულოვანი $\left(X, G, B(X), \mu\right)$ დინამიკური სისტემა, სადაც X არის უსასრულოგანზომილებიანი პოლონური წრფივი სივრცე, G არის X-ის მკვრივი წრფივი ქვესივრცე, $B(X)$ წარმოადგენს ბორელის σ-ალგებრას, ხოლო μ კი G-ინვარიანტული არანულოვანი σ-სასრული ზომაა X-ზე.

თეორემა 1-ის დასამტკიცებლად ვსარგებლობთ $\left(l_2, R^{(N)}, B(l_2), \chi\right)$ დინამიკურ სისტემით. μ ზომა X-ზე განისაზღვრება შემდეგი პირობით:

$$\mu(A) = \chi\left(T^{-1}\left(T(l_2) \cap A\right)\right), \quad \left(A \in \mathrm{B}(X)\right),$$

სადაც T არის ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია ლუზინ-სუსლინის თეორემით, ხოლო χ ზომის თვისებებიდან გამომდინარეობს μ ზომის თვისებები.

ბუნებრივად დაისვა საკითხი იმის შესახებ, რომ დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე E რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: E სივრცეზე არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) E სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. სადისერტაციო ნაშრომში მიღებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2. ვთქვათ, E არის სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. მაშინ E სივრცეზე არსებობს გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა E არის სეპარაბელური.

წარმოდგენილი ნაშრომის მეორე თავის ბოლო 2.4. ქვეთავი ეხება დინამიკური სისტემების არსებობის საკითხს უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომელიც აღჭურვილია აბსოლუტურად კრებადი მარკუშევიჩის ბაზისით. წინა ქვეთავში მოცემულია, რომ ნებისმიერ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში არსებობს ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია საბაზისო სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. ასევე ცნობილია, რომ დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული იმ აქსიომის მიღების შემთხვევაში, როცა ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით, აბსოლუტურად კრებადი შაუდერის ბაზისით აღჭურვილი ბანახის სივრცის ბულეანზე არსებობს ისეთი ინვარიანტული ზომის მაგალითი, რომელიც სტანდარტულ მართკუთხედზე ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომლებშიც

არსებობს შაუდერის ბაზისი, აგებულ იქნა ლებეგის ზომის ანალოგიური ზომა ყოველგვარი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე.

ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე. მარკუშევიჩის ბაზისი (M-ბაზისი) ეწოდება ისეთ მიმდევრობას, რომელიც არის ფუნდამენტური, მინიმალური და ტოტალურად ბიორთოგონალური. ცნობილია, რომ ყოველ უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე აღჭურვილია აბსოლუტურად კრებადი M-ბაზისით.

გ. ფანცულაიას მიერ შემოტანილ იქნა μ_α ორდინალური (O(α)LM) და ν_α სტანდართული (S(α)LM) ლებეგის ზომა $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში, სადაც $\alpha = \{n_k : k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

ახლა ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და $\left(x_k, x_k^*\right)$ არის აბსოლუტურად კრებადი M-ბაზისი. დავუშვათ, რომ

$$T : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

არის წრფივი ოპერატორი, განსაზღვრული $Tx = \left\{x_k^*\left(x\right) : k \in \mathbf{N}\right\}$ პირობით. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ T არის წრფივი, ინიექციური, უწყვეტი და ნებისმიერი k-სათვის

$$Tx_k = e_k,$$

სადაც $e_k = \left(0, 0, \cdots, 0, 1, \cdots\right)\left(k = 1, 2, \cdots\right)$.

ახლა ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და $\left(x_k, x_k^*\right)$ არის აბსოლუტურად კრებადი M-ბაზისი. მაშინ μ_α და ν_α ზომებისა და T ოპერატორის გამოყენებით მიღებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 3. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის X-ში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა ψ_α, რომელიც არის O(α)LM(X).

თეორემა 4. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის X-ში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა η_α, რომელიც არის $\mathbf{S}(\alpha)\mathrm{LM}(X)$.

Y-ს ეწოდება shy-სიმრავლე, თუ ის წარმოადგენს ბორელის ისეთი Y' სიმრავლის ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$\mu(Y'+x) = 0$$

ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის და რაიმე ისეთი ბორელის ალბათური μ ზომისათვის, რომ $\mu(K) = \mu(X)$, სადაც K კომპაქტია X სივრცეში.

ბორელის μ ზომას ეწოდება shy-სიმრავლის გენერატორი X სივრცეში თუ $\overline{\mu}(Y) = 0 \quad (Y \subset X)$ ტოლობის მართებულობიდან გამომდინარეობს, რომ Y არის shy-სიმრავლე X-ში, სადაც $\overline{\mu}$-თი აღნიშნულია μ ზომის გასრულება. მტკიცდება, რომ ყოველი კვაზისასრული ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა X სივრცეში არის shy-სიმრავლის გენერატორი ამავე სივრცეში. თუ გამოვიყენებთ ამავე ქვეთავში მიღებულ შედეგებს მივიღებთ, რომ η_α და ψ_α ზომები არიან shy-სიმრავლის გენერატორები X-ში ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის.

გამოკვლეულია უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში ორდინალური და სტანდარტული ზომების გარკვეული მატარებლებს. კერძოდ, მართებულია შემდეგი წინადადება:

თეორემა 5. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის სეპარაბელურ ბანახის X სივრცეში η_α (ან, ψ_α) ზომა არის shy-სიმრავლის გენერატორი და მისი მატარებელი შეიძლება შეირჩეს ისეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლე, რომელიც არ დაიფარება X სივრცის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი ოჯახით.

ამ წინადადებიდან კი უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი შედეგი:

შედეგი. ყოველი უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე წარმოიდგინება, როგორც shy-სიმრავლისა და პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანება.

სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავი მიძღვნილია σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელებადობის ამოცანისადმი. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეს საკითხი მნიშვნელოვანია არა მარტო დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების თეორიისათვის, არამედ თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა დარგებისთვისაც. ბუნებრივია არსებობს აბსტრაქტული σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების რამდენიმე მეთოდი (მერჩევსკის მეთოდი, კოდაირა-კაკუტანის მეთოდი, კაკუტანი-ოქსტობის მეთოდი, სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი). აქვე აღვნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილ მეთოდთაგან პირველი სამი არის წმინდა სიმრავლურ-თეორიული მეთოდი. სადისერტაციო ნაშრომში ჩვენ ვიყენებთ სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდს, რომელიც წმინდა ალგებრული ხასიათისაა. ამ მეთოდის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი, რომელიც პირველად გამოიყენა ა. ხარაზიშვილმა ლებეგის ზომის მკაცრი გაგრძელების პრობლემის ამოსახსნელად.

ამავე თავში მოყვანილია მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის ცნება და მისი როლი აბსტრაქტული σ-სასრულო დინამიკური სისტემის გაგრძელების ამოცანაში. მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის არსებობა არსებით როლს თამაშობს კოდაირა-კაკუტანის მეთოდში. ჩვენს მოვახდინეთ სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდისა და კოდაირა-კაკუტანის მეთოდის გარკვეული კომბინაცია და შემოვიღეთ თითქმის სიურექციული ასახვის ცნება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $\left(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1\right)$ და $\left(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2\right)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა და ვთქვათ, გადასახვა

$$f : G_1 \to G_2$$

არის ჰომომორფიზმი.

ვიტყვით, რომ f არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი, თუ f-ს გრაფიკი არის მსუქანი მსუქანი $\mu_1 \times \mu_2$ ნამრავლი ზომის მიმართ $G_1 \times G_2$-ში.

მესამე თავის ძირითადი შედეგებია.

თეორემა 6. ვთქვათ, მოცემულია $(G_1,\cdot)$ არათვლადი ჯგუფი და $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$ არათვლადი ალბათური დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,

$$f: G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ და $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

(ა) $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა წარმოადგენს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;

(ბ) f არის ზომადი $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემის მიმართ.

თეორემა 7. ვთქვათ, მოცემულია ორი σ-სასრულო $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ და $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$ დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,

$$f: G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(ა) $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა წარმოადგენს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;

(ბ) f არის ზომადი $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემის მიმართ.

დისერტაციის მეოთხე თავის 4.1. ქვეთავში მოცემულია უ. დარჯის ერთი ამოცანის გარკვეული ვერსიაზე. კერძოდ, დარჯის მიერ დასმული იქნა შემდეგი ამოცანა:

შესაძლებელია თუ არა, რომ G პოლონური ჯგუფი წარმოვიდგინოთ პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

ნაშრომში წარმოდგენილია ამ ამოცანის გარკვეული ვერსიის ამოხსნა. დისერტაციაში წარმოდგენილია დამტკიცების სხვა გზა უნიმოდალური არა კომპაქტური პოლონური ჯგუფების ოჯახებისათვის. კერძოდ, მიღებულია შემდეგი დებულება:

თეორემა 8. ვთქვათ, G_i $\left(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\right)$ არის პოლონური ჯგუფი და ვთქვათ, G_1 არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი. მაშინ $G = \prod_{i \in \mathbf{N}} G_i$ წარმოიდგინება არათანამკვეთი პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

ამავე თავში მოცემულია ორადულობის პრინციპი ჰაარის ნულზომის სიმრავლესა და პირველი კატეგორიის სიმრავლეებს შორის, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:

დავუშვათ, რომ P არის წინადადება, რომელიც ფორმულირებულია ჰაარის ნულზომადი, პირველი კატეგორიის სიმრავლეებისა და წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ცნებების ტერმინებში.

ვიტყვით, რომ ორადულობის პრინციპი ზომასა და კატეგორიას შორის არის ჭეშმარიტი P წინადადების მიმართ, თუ P ექვივალენტურია P^* წინადადების, რომელიც მიიღება P-გან ზომისა და კატეგორიის თვალსაზრისით მცირე სიმრავლეების ცნებების ურთიერთ ჩანაცვლებით.

მართებულია შემდეგი წინადადება:

ვთქვათ, P არის წინადადება , განსაზღვრული შემდეგნაირად:

„ყოველი ორი პოლონური G_1 და G_2 ჯგუფისათვის და ყოველი $Y \subset G_1$ ჰაარის ნულზომადი სიმრავლისათვის გვაქვს

$$(\forall X)\left(X \subset G_2 \Rightarrow Y \times X \text{ არის ჰაარის ნულზომადი } G_1 \times G_2 \text{ - ში}\right).“$$

მაშინ ორადულობის პრინციპი ჭეშმარიტია P წინადადების მიმართ.

დისერტაციის ბოლო 4.2ქვეთავში განხილულია დინამიკური სისტემები სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა მოდელებში. კერძოდ, განხილულია რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1 (დ. ფრემლინი). ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ და λ^* -თი აღნიშნულია ლებეგის გარე ზომა.

$\lambda^*(X) = 0 \Leftrightarrow \exists$ბორელის ალბათური ისეთი μ ზომა, რომ $(\forall t)(t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mu(X + t) = 0)$?

ამოცანა 3 (პ. ერდოში). არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ ლებეგის აზრით ზომადი E სიმრავლე, რომლის ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

დისერტაციაში მიღებულია შემდეგი დებულებები:

თეორემა 9. ამოცანა 1 დამოუკიდებელია **(ZF&DC)** თეორიაში.

(ZF&DC&AD) მოდელში ამოცანა1-სათვის მართებულია შემდეგი პასუხი:

$X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის $\lambda^*(X) = 0$ ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს ბორელის ალბათური ზომა μ ისეთი, რომ ყოველი $t \in \mathbf{R}$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu^*(X + t) = 0.$$

ამოცანა 2-ის შესახებ ერდოშმა გამოთქვა მოსაზრება, რომ ევკლიდური სიბრტყის შემთხვევისათვის უმცირესი ასეთი საუკეთესო მუდმივა არის

$$c_0 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

რიცხვი.

ჩვენს მიერ განხილულ იქნა ერდოშის პრობლემის გარკვეული ვარიანტი. კერძოდ:

არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს?

ე. ი. როგორ სახეს მიიღებს ერდოშის ამოცანა ლებეგის გარე ზომის შემთხვევაში.

ამოცანა 2-თან დაკავშირებით მართებულია შემდეგი წინადადებები:

თეორემა 10. არ არსებობს სასრული მუდმივა p ისეთი, რომ ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

შემდეგი წინადადება

„ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს“ დამოუკიდებელია (ZF)&(DC) თეორიასთან.

ნაშრომის აპრობაცია.

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იქნა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სემინარებზე. ამასთანავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო და ადგილობრივ კანფერენციებზე, რომელთა ნუსხა თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო სასწავლო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩატარდა თემატური სემინარები და კოლოქვიუმები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

მოხსენებები კონფერენციებზე

სადისერტაციო ნაშრომში მოყვანილი შედეგები მოხსენებული იყო შემდეგ საერთაშორისო მნიშვნელობის კონფერენციაზე:

1. თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის სემინარი. 27 თებერვალი 2013 წელი, თბილისი, საქართველო.
   მოხსენების სათაური:
   „უ.დარჯისა და დ.ფრემლინის ამოცანების შესახებ“
2. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ), ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის XXVII გაფართოებული სხდომები , 22-24 აპრილი 2013 წელი
   მოხსენების სათაური:
   “დარჯისა და ფრემლინის ამოცანების შესახებ ზოგიერთ სიმრავლურ-თეორიულ მოდელში”

3. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის IV საერთაშორისო კონფერენცია. თბილისი–ბათუმი 9–15 სექტემბერი, 2013 წელი.

   მოხსენების სათაური:

   „ერდოშის ამოცანის ერთი ვერსიის შესახებ“

4. ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ), ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის XXVIII გაფართოებული სხდომები , 22-24 აპრილი 2014 წელი

   მოხსენების სათაური:

   "სისტემების ზოგადი თეორიის ლოგიკური და სიმრავლურ – თეორიული საფუძვლები"

5. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირისა და საქართველოს მექანიკოსთა კავშირისVII ერთობლივისაერთაშორისო კონფერენცია. ბათუმი 5-9 სექტემბერი 2016 წელი.

   მოხსენების სათაური:

   „დინამიკური სისტემების არსებობის შესახებ პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში“

6. Workshop in Discrete MathematicsinApplied Mathematics, 31 October-1 November, 2016, Tbilisi

   I.Vekua Institute of Applied Mathematics of I. Javakhishvili Tbilisi State University

   მოხსენების სათაური:

   „ერდოშის ამოცანის შესახებ“

7. ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის XXXI გაფართოებული სხდომები , 19-21 აპრილი 2017 წელი

   მოხსენების სათაური:

   „ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების გაგრძელების ზოგიერთი მეთოდის შესახებ“.

გამოქვეყნებული შრომები

1. N. Rusiashvili, On an existence of invariant and quasi-invariant σ-finite Borel measures in complete metric topological vector spaces, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 5, no. 1, 2013, pp. 1-7.
2. G. Pantsulaia, N. Rusiashvili, On questions of U. Darji and D. Fremlin, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 5, no. 2, 2013, pp. 1-11.
3. Tepper G, Aleks Kirtadze, Gogi Pantsulaia and Nino Rusiashvili, On ordinary and standart "Lebesgue Measures" in separable Banach spaces, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 5, no. 3-4, 2013, pp. 1-20.
4. G. Pantsulaia, N. Rusiashvili, On a certain version of the Erdos problem, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 6, no. 1-2, 2013, pp. 1-6.
5. A. Kirtadze, G. Pantsulaia, N. Rusiashvili, On uniform distribution for invariant extensions of the linear Lebesgue measure. arXiv:submit/1483137/[math.CA]9 Mar2016

S U M M A R Y

Abstract Dynamical and Quasi-dynamical Systems and Their Behaviour in Phase Spaces

The present dissertation thesis deals with actual questions of the theory of dynamical and quasi-dynamical systems. The problems of extension, existence, and uniqueness property of the dynamical (quasidynamical) systems in the various phase spaces are studied and researched in the given work.

The invariant and the quasiinvariant measures are one of the important technical means for studying the dynamical systems (both the general systems and the more or less specific systems, which arise naturally in the practice) to study the modern theory. It should be noted that this theory is important itself, as a pure mathematical direction, and, essentially important as well, due to its numerous use in the natural sciences, for solving questions of the practical problems of the mathematical and theoretical physics, the probability theory, the random process theory, the game theory, the ergodic theory, etc. On the other hand, the contemporary vision of the theory of dynamical systems has conditioned the study of problem of existence and uniqueness of the invariant and quasiinvariant measures determined on the ground basic E space equipped by G group of various transformations. In the course of researching the above indicated issues, we need to study the properties of the invariant and quasiinvariant measures such as the inner properties of the invariant and quasiinvariant measures in the spaces equipped by various groups of transformations and, certain use of these properties.

Naturally, it is interesting to study the similar question for the infinite-dimensional spaces. In regards with such spaces, a rich methodology exists, which investigates different features of the dynamical and quasidynamical systems.

In case of the infinite-dimensional topological vector spaces application of the standard methods for the dynamical and quasi-dynamical systems was not possible by reason that in the above mentioned spaces there exists no system which could be dynamical (quasidynamical) to all translations. Therefore, it has become natural to investigate the problem of existence of the dynamical and quasidynamical systems in the infinite-dimensional spaces under a condition, that everywhere dence sub-group (sub-space) of such the space have to be considered in the role of the group of transformations of the phase space.

(a) The given dissertation thesis provdes the following theorems:

Let E be a complete metric topological vector space. Then there is at least one non-degenerate σ–finite Borel measure with is invariant with respect to some dence vector subspace of E if and only if E is separable.

(b) The present thesis deals with the question of existence of dynamic systems in the infinite-dimensional separable Banach spaces, which are equipped with the absolutely converging Markushevich basis. For such spaces, the following results are valid:

1) There exists the ordinary translation invariant Borel measure;

2) There exists the standard translation invariant Borel measure.

The thesis indicates on certain carriers of the ordinary and standard measures in the separable Banach space. Namely, that:

In the separable Banach space, the dynamical systems indicated in 1) and 2) are the generators of the shy-set and, such a set of the first category may be chosen for their carriers, which will not be covered by the countable family of the compact sets of the same space

(c) The dissertation thesis considers a certain version of one of the question of U. Darge, namely, it is approved, that:

For $i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ *and* G_i $\left(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\right)$ *be the Polish group and* G_1 *is a unimodal Polish group. Then product of groups decomposes into the disjoint union of a Haar null set and a meagre set.*

(d) In the present thesis a notion of the thick graph of function and its role in the problem of extension of the σ–finite dynamical systems is provided. Existence of the thick graph of function plays an essential role in the Kodaira-Kakutani method. We have combined to a certain degree the Kodaira-Kakutani and the surjective homomorphisms method and, introduced the notion of the almost surjective homomorphisms and, based on this notion, received, that:

Let G_1 *and* G_2 *be arbitrary uncountable groups and let the group* G_2 *equipped with a* G_2 *left-invariant (left* G_2 *-quasiinvariant) probability measure* μ_2 *and let* $f : G_1 \to G_2$ *be a almost surjective homomorphism. Then there exists two measures* μ_1 *and* μ_1' *such that: (1)* μ_1 *is a non-atomic* σ*-finite* G_1*-left invariant measure on* G_1*; (2)* μ_1' *extends* μ_1*; (3)* μ_1' *is a* G_1*-left invariant measure.*

(e) At the end, the thesis deals with the dynamical systems for various models of the set theory, namely, discusses the D. Flemlin problem in **(ZF&DC&AD)** model and P. Erdosh problem in the **(ZF)&(DC)** set theory.