ნინო რუსიაშვილი

აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი ყოფაქცევა ფაზურ სივრცეებში

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2017 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფ. გოგი ფანცულაია
პროფ. ალექსი კირთაძე

რეცენზენტები: ---------------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის "------" ----------------, --------- საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ნინო რუსიაშვილის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი ყოფაქცევა ფაზურ სივრცეებში“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფესორი $\boxed{\text{გ.ფანცულაია}}$

ხელმძღვანელი: პროფესორი ა. კირთაძე

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2017

ავტორი: რუსიაშვილი ნინო

დასახელება: **აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი ყოფაქცევა ფაზურ სივრცეებში**

ფაკულტეტი : საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

რეზიუმე

წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომი ეხება დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების თეორიის აქტუალურ საკითხებს. ნაშრომში შესწავლილია და გამოკვლეულია დინამიური (კვაზიდინამიური) სისტემების გაგრძელების, არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში.

ნაშრომში განიხილება ისეთი დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები, რომლებისთვისაც არსებობენ შესაბამისი ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომები. ამიტომ ხშირად დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემის ქვეშ გულისხმობენ ინვარიანტულ (კვაზიინვარიანტულ) ზომას მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომები არის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური საშუალება დინამიკური სისტემების (როგორც აბსტრაქტული სისტემების, ასევე მეტ-ნაკლებად კონკრეტული სისტემების, რომლებიც ბუნებრივად წარმოიშვებიან პრაქტიკაში) თანამედროვე თეორიის შესასწავლად. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს თეორია არის მნიშვნელოვანი თავისთავად, როგორც წმინდა მათემატიკის მიმართულება და, აგრეთვე, არის მეტად მნიშვნელოვანი მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებებით საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ბევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, ალბათობის თეორიისა და შემთხვევით პროცესთა თეორიიდან, ქაოსთა თეორიიდან, ერგოდული თეორიიდან და ა.შ. მეორეს მხრივ, დინამიკურ სისტემათა თეორიის თანამედროვე ხედვამ განაპირობა სხვადასხვა გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ ძირითად ბაზისურ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომებისათვის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ზემოთ მოყვანილი საკითხების კვლევისას, ჩვენ გვჭირდება ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომების ისეთი თვისებების შესწავლა, როგორიცაა გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფებით აღჭურვილ სივრცეებში ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების შინაგანი თვისებები და ამ თვისებების ზოგიერთი გამოყენება.

დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების გაგრძელებადობის ამოცანა წარმოადგენს დინამიკურ და კვაზიდინამიკურ სისტემათა თეორიის მეტად მნიშვნელოვან საკითხს. ბუნებრივად მოითხოვება, რომ ამ სისტემების ასაგები გაგრძელებები განსაზღვრული იყოს ფაზური E სივრცის ქვესიმრავლეთა მაქსიმალურად ფართე კლასზე (მაგალითად, შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ გაგრძელებები იყოს არასეპარაბელური, ე.ი., მათი მეტრიკული სტრუქტურა იყოს არასეპარაბელური). ამავდროულად, შენარჩუნებული უნდა იყოს საწყისი (ორიგინალური) ინვარიანტული ან კვაზიინვარიანტული μ ზომის ძირითადი თვისებები ამ ზომის გაგრძელებათა აგების პროცესში.

დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის შესწავლა უკავშირდება ნ. კრილოვის და ნ. ბოგოლუბოვის (1936), ფონ ნეიმანის

(1935), შ. კაკუტანის (1943), ვ. სუდაკოვის (1959), ი. როზანოვის (1968), ჟ. ფელდმანის (1966), ხია დო ხინგის (1972), ა. სკოროხოდის (1975), შიმომურას (1975), ა. ხარაზიშვილის (1984, 2010), გ. ფანცულაიას (2007, 2011), ა. კირთაძის (2006, 2015) და სხვათა შრომებს.

ნ. კრილოვისა და ნ. ბოგოლუბოვის ფუნდამენტური თეორემის თანახმად ნებისმიერი არაცარიელი კომპაქტური მეტრიკული სივრცისათვის ყოველთვის არსებობს დინამიკური სისტემა ჰომეომორფიზმთა ერთპარამეტრიანი ჯგუფის შემთხვევაში. ცნობილია აგრეთვე, რომ დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები არსებობენ ლოკალურად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებში. კერძოდ, სასრულოგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეებში არსებობენ ყველა პარალელური ძვრების მიმართ დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი აღწერა არ წარმოადგენს რაიმე სირთულეს.

ბუნებრივად, საინტერესოა ანალოგიური საკითხის შესწავლა უსასრულოგანზომილებიანი სივრცეებისათვის. ასეთი სივრცეებისათვის არსებობს მდიდარი მეთოდოლოგია, რომელიც შეისწავლის დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების სხვადასხვა თვისებებს.

უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემებისათვის სტანდარტული მეთოდების გამოყენება ვერ ხერხდებოდა იმ მიზეზის გამო, რომ აღნიშნულ სივრცეებში არ არსებობს ყველა პარალელური ძვრების მიმართ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემა. ამიტომ ბუნებრივი გახდა დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის პრობლემის გამოკვლევა უსასრულოგანზომილებიანი სივრცეებისათვის იმ პირობით, რომ ფაზური სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფის როლში განხილული ყოფილიყო ამ სივრცის გარკვეული ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფი (ქვესივრცე).

(ა) ბუნებრივად დაისვა საკითხი იმის შესახებ, რომ დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე E რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: E სივრცეზე არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის კვაზიინვარიანტული ინვარიანტულია) E სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. სადისერტაციო ნაშრომში მიღებულია შემდეგი თეორემები:

ვთქვათ, E არის სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. მაშინ E სივრცეზე არსებობს გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა E არის სეპარაბელური.

(ბ) წარმოდგენილი ნაშრომში განხილულია დინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომელიც აღჭურვილია აბსოლუტურად კრებადი მარკუშევიჩის ბაზისით. ასეთი სივრცეებისათვის მიღებულია შემდეგი შედეგები.

არსებობს ორდინალური არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა.

არსებობს სტანდარტული არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა.

(გ) დისერტაციაში მოცემულია სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში ორდინალური და სტანდარტული ზომების გარკვეული მატარებლებს. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ:

სეპარაბელურ ბანახის X სივრცეში (დ) და (ე) მოყვანილი დინამიკური სისტემები არიან shy-სიმრავლის გენერატორები და მათი მატარებლებად შეიძლება შეირჩეს ისეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლე, რომელიც არ დაიფარება X სივრცის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი ოჯახით.

(დ) სადისერტაციო ნაშრომში მოცემულია აბსტრაქტული σ-სასრულო დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელებადობის ამოცანა. არსებობს აბსტრაქტული σ-სასრულო დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების რამდენიმე მეთოდი (მერჩევსკის მეთოდი, კოდაირა-კაკუტანის მეთოდი, კაკუტანი-ოქსტობის მეთოდი, სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი). აქვე აღვნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილ მეთოდთაგან პირველი სამი არის წმინდა სიმრავლურ-თეორიული მეთოდი. სადისერტაციო ნაშრომში ჩვენ ვიყენებთ სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდს, რომელიც წმინდა ალგებრული ხასიათისაა. ამ მეთოდის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი, რომელიც პირველად გამოიყენა ა. ხარაზიშვილმა ლებეგის ზომის მკაცრი გაგრძელების პრობლემის ამოსახსნელად.

მოყვანილია მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის ცნება და მისი როლი აბსტრაქტული σ-სასრულო დინამიკური სისტემის გაგრძელების ამოცანაში. მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის არსებობა არსებით როლს თამაშობს კოდაირა-კაკუტანის მეთოდში. ჩვენს მოვახდინეთ სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდისა და კოდაირა-კაკუტანის მეთოდის გარკვეული კომბინაცია და შემოღებულია თითქმის სიურექციული ასახვის ცნება. ამ ცნებაზე დაყრდნობით მიღებულია, რომ:

ვთქვათ, ორი არათვლადი σ-სასრულო დინამიკური სისტემის შესაბამისი ზომადი სივრცეებისათვის მოცემულია თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი. მაშინ არსებობს დინამიკური სისტემა, რომელიც არის ერთ-ერთი მოცემული დინამიკური სისტემის გაგრძელება. ამასთან, თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი იქნება ზომადი გაგრძელებული დინამიკური სისტემის მიმართ.

(ე) დისერტაციაში განხილულია უ. დარჯის ერთი ამოცანის გარკვეული ვერსია. კერძოდ, დამტკიცებულია, რომ:

თუ G_i $\left(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\right)$ არის პოლონური ჯგუფები და G_1 არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი, მაშინ მათი ნამრავლი წარმოიდგინება არათანამკვეთი პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

(ვ) დისერტაციის ბოლოს განხილულია დინამიკური სისტემები სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა მოდელებში. კერძოდ, განხილულია დ.

ფრემლინის ამოცანა (ZF&DC&AD) მოდელში, ხოლო პ. ერდოშის ამოცანა (ZF)&(DC) სიმრავლეთა თეორიაში.

Abstract

The present dissertation thesis deals with actual questions of the theory of dynamical and quasi-dynamical systems. The problems of extension, existence, and uniqueness property of the dynamical (quasidynamical) systems in the various phase spaces are studied and researched in the given work.

The invariant and the quasiinvariant measures are one of the important technical means for studying the dynamical systems (both the general systems and the more or less specific systems, which arise naturally in the practice) to study the modern theory. It should be noted that this theory is important itself, as a pure mathematical direction, and, essentially important as well, due to its numerous use in the natural sciences, for solving questions of the practical problems of the mathematical and theoretical physics, the probability theory, the random process theory, the game theory, the ergodic theory, etc. On the other hand, the contemporary vision of the theory of dynamical systems has conditioned the study of problem of existence and uniqueness of the invariant and quasiinvariant measures determined on the ground basic E space equipped by G group of various transformations. In the course of researching the above indicated issues, we need to study the properties of the invariant and quasiinvariant measures such as the inner properties of the invariant and quasiinvariant measures in the spaces equipped by various groups of transformations and, certain use of these properties.

Naturally, it is interesting to study the similar question for the infinite-dimensional spaces. In regards with such spaces, a rich methodology exists, which investigates different features of the dynamical and quasidynamical systems.

In case of the infinite-dimensional topological vector spaces application of the standard methods for the dynamical and quasi-dynamical systems was not possible by reason that in the above mentioned spaces there exists no system which could be dynamical (quasidynamical) to all translations. Therefore, it has become natural to investigate the problem of existence of the dynamical and quasidynamical systems in the infinite-dimensional spaces under a condition, that everywhere dence sub-group (sub-space) of such the space have to be considered in the role of the group of transformations of the phase space.

(a) The given dissertation thesis provdes the following theorems:

Let E be a complete metric topological vector space. Then there is at least one non-degenerate σ*–finite Borel measure with is invariant with respect to some dence vector subspace of E if and only if E is separable.*

(b) The present thesis deals with the question of existence of dynamic systems in the infinite-dimensional separable Banach spaces, which are equipped with the absolutely converging Markushevich basis. For such spaces, the following results are valid:

1) There exists the ordinary translation invariant Borel measure;

2) There exists the standard translation invariant Borel measure.

The thesis indicates on certain carriers of the ordinary and standard measures in the separable Banach space. Namely, that:

In the separable Banach space, the dynamical systems indicated in 1) and 2) are the generators of the shy-set and, such a set of the first category may be chosen for their carriers, which will not be covered by the countable family of the compact sets of the same space

(c) The dissertation thesis considers a certain version of one of the question of U. Darge, namely, it is approved, that:

For $i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ *and* G_i $(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\})$ *be the Polish group and* G_1 *is a unimodal Polish group. Then product of groups decomposes into the disjoint union of a Haar null set and a meagre set.*

(d) In the present thesis a notion of the thick graph of function and its role in the problem of extension of the σ–finite dynamical systems is provided. Existence of the thick graph of function plays an essential role in the Kodaira-Kakutani method. We have combined to a certain degree the Kodaira-Kakutani and the surjective homomorphisms method and, introduced the notion of the almost surjective homomorphisms and, based on this notion, received, that:

Let G_1 *and* G_2 *be arbitrary uncountable groups and let the group* G_2 *equipped with a* G_2 *left-invariant (left* G_2*-quasiinvariant) probability measure* μ_2 *and let* $f : G_1 \to G_2$ *be a almost surjective homomorphism. Then there exists two measures* μ_1 *and* μ_1' *such that: (1)* μ_1 *is a non-atomic* σ*-finite* G_1*-left invariant measure on* G_1*; (2)* μ_1' *extends* μ_1*; (3)* μ_1' *is a* G_1*-left invariant measure.*

(e) At the end, the thesis deals with the dynamical systems for various models of the set theory, namely, discusses the D. Flemlin problem in **(ZF&DC&AD)** model and P. Erdosh problem in the **(ZF)&(DC)** set theory.

შინაარსი

მადლიერება

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელს გოგი ფანცულაიას და პატივს მივაგებ მის ხსოვნას.

შესავალი

წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომი ეხება დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების თეორიის აქტუალურ საკითხებს. ნაშრომში შესწავლილია და გამოკვლეულია დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების გაგრძელების, არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში. დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობა უშუალოდ კავშირშია ჯგუფთა თეორიის ძირეულ საკითხებთან, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიასთან, დესკრიფციულ სიმრავლეთა თეორიასთან, სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატურ სისტემებთან, უსასრულო კომბინატორიკის ცნობილ დებულებებთან და სხვ. მაგალითად, დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების ერთადერთობა პირდაპირ კავშირშია ასეთი სისტემების მეტრიკული ტრანზიტულობის, ანუ დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების ერგოდულობის საკითხებთან (იხილეთ [1], [2], [3], [4]). ცნობილია, რომ ერგოდული თეორიის შექმნა განპირობებული იყო სტატისტიკური მექანიკის პრობლემური საკითხების განხილვის აუცილებლობით და შესაბამისი თვისებების შესასწავლად. მეორეს მხრივ, სიმრავლეთა ზომადობის ძირეული საკითხი უშუალოდ უკავშირდება უსასრულო თამაშთა თეორიის ფუნდამენტურ ცნებებს და მეთოდებს. მაგალითად, შტეინჰაუს-მიჩელსკის დეტერმინირების აქსიომას მომგებიანი სტრატეგიის არსებობის შესახებ (იხილეთ [5], [6]), ბანახ-მაზურის უსასრულო თამაშს ღერძზე (იხილეთ, [7]), ხოლო არაზომადი სიმრავლის არსებობა ასეთი სისტემების მიმართ დაკავშირებულია ამორჩევის აქსიომასთან (ან ამორჩევის აქსიომის არათვლად ფორმასთან).

კარგად არის ცნობილი, ლიუვილისა და პუანკარედან მოყოლებული, რომ ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომები არის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური საშუალება დინამიკური სისტემების (როგორც

აბსტრაქტული სისტემების, ასევე მეტ-ნაკლებად კონკრეტული სისტემების, რომლებიც ბუნებრივად წარმოიშვებიან პრაქტიკაში) თანამედროვე თეორიის შესასწავლად. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს თეორია არის მნიშვნელოვანი თავისთავად, როგორც წმინდა მათემატიკის მიმართულება და, აგრეთვე, არის არსებითი მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებებით საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ბევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, ალბათობის თეორიისა და შემთხვევით პროცესთა თეორიიდან, ქაოსთა თეორიიდან, ერგოდული თეორიიდან და ა.შ. მეორეს მხრივ, დინამიკურ სისტემათა თეორიის თანამედროვე ხედვამ განაპირობა სხვადასხვა გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ ძირითად ბაზისურ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომებისათვის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. ზემოთ მოყვანილი საკითხების კვლევისას, ჩვენ ავტომატურად გვჭირდება ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომების ისეთი შინაგანი თვისებების შესწავლა, როგორიცაა: მეტრიკული ტრანზიტულობა (ერგოდულობა), სუსტად მეტრიკული ტრანზიტულობა, ერთადერთობის თვისება, შტეინჰაუზის თვისება, გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფებით აღჭურვილ სივრცეებში ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების შინაგანი თვისებები და ამ თვისებების ზოგიერთი გამოყენება.

ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომების მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება (ერგოდულობა) მჭიდროდაა დაკავშირებული ინვარიანტული ზომების ერთადერთობის თვისებასთან. უნდა აღინიშნოს რომ ერთადერთობისა და მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისებები არიან ექვივალენტური დინამიკურ სისტემათა საკმარისად ფართე კლასისათვის.

ეს მნიშვნელოვანი დებულება წარმოადგენს მძლავრ ინსტრუმენტს დინამიკური სისტემების ერთადერთობის საკითხების კვლევისათვის. ამ ფაქტის დამტკიცებისას არსებითად გამოიყენება ს. ულამის ცნობილი დებულება უსასრულო კომბინატორიკიდან, რომლის თანახმად პირველი

არათვლადი კარდინალური რიცხვი ω_1 არაზომადია ფართე აზრით. აქვე შევნიშნოთ, რომ დინამიკური სისტემის ერთადერთობის თვისების დადგენა შესაძლებელია ფაზური სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფის სიმძლავრეების ტერმინებში და აგრეთვე წმინდა სიმრავლურ-თეორიულ ტერმინებში.

დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების გაგრძელებადობის ამოცანა წარმოადგენს დინამიკურ და კვაზიდინამიკურ სისტემათა თეორიის მეტად მნიშვნელოვან საკითხს. ბუნებრივად მოითხოვება, რომ ამ სისტემების ასაგები გაგრძელებები განსაზღვრული იყოს ფაზური E სივრცის ქვესიმრავლეთა მაქსიმალურად ფართე კლასზე (მაგალითად, შეიძლება მოვითხოვოთ, რომ გაგრძელებები იყოს არასეპარაბელური, ე.ი., მათი მეტრიკული სტრუქტურა იყოს არასეპარაბელური). ამავდროულად, შენარჩუნებული უნდა იყოს საწყისი (ორიგინალური) ინვარიანტული ან კვაზიინვარიანტული μ ზომის ძირითადი თვისებები ამ ზომის გაგრძელებათა აგების პროცესში. კერძოდ, შესაძლოა μ ზომის გაგრძელებებზე გადასვლისას მოითხოვებოდეს ინვარიანტულ ზომათა ისეთი ძირითადი თვისებების შენარჩუნება, როგორიცაა ერთადერთობა ან მეტრიკული ტრანზიტულობა. ამგვარად, დისერტაციის განსახილველ ძირითად საკითხებს შორის ერთ-ერთს წარმოადგენს შემდეგი ამოცანა:

გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ აბსტრაქტულ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) σ-სასრული μ ზომის გაგრძელებათა აგება μ ზომის ძირითადი თვისებების შენარჩუნებით.

დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის შესწავლა უკავშირდება ნ. კრილოვის და ნ. ბოგოლუბოვის (1936), ფონ ნეიმანის (1935), შ. კაკუტანის (1943), ვ. სუდაკოვის (1959), ი. როზანოვის (1968), ჟ. ფელდმანის (1966), ხია დო ხინგის (1972), ა. სკოროხოდის (1975), შიმომურას (1975), ა. ხარაზიშვილის (1984), გ. ფანცულაიას (1989), ა. კირთაძის (2006) და სხვათა შრომებს.

ნ. კრილოვისა და ნ. ბოგოლუბოვის ფუნდამენტური თეორემის თანახმად (იხილეთ [8], [9]) ნებისმიერი არაცარიელი კომპაქტური მეტრიკული სივრცისათვის ყოველთვის არსებობს დინამიკური სისტემა ჰომეომორფიზმთა ერთპარამეტრიანი ჯგუფის შემთხვევაში. ცნობილია აგრეთვე, რომ დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები არსებობენ ლოკალურად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებში (იხილეთ [10]). კერძოდ, სასრულოგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეებში არსებობენ ყველა პარალელური ძვრების მიმართ დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი აღწერა არ წარმოადგენს რაიმე სირთულეს.

ბუნებრივად, საინტერესოა ანალოგიური საკითხის შესწავლა უსასრულოგანზომილებიანი სივრცეებისათვის. ასეთი სივრცეებისათვის არსებობს მდიდარი მეთოდოლოგია, რომელიც შეისწავლის დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების სხვადასხვა თვისებებს (იხილეთ, მაგალითად, [11]- [19]).

უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემებისათვის სტანდარტული მეთოდების გამოყენება ვერ ხერხდებოდა იმ მიზეზის გამო, რომ აღნიშნულ სივრცეებში არ არსებობს ყველა პარალელური ძვრების მიმართ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემა. ამიტომ ბუნებრივი გახდა დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის პრობლემის გამოკვლევა უსასრულოგანზომილებიანი სივრცეებისათვის იმ პირობით, რომ ფაზური სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფის როლში განხილული ყოფილიყო ამ სივრცის გარკვეული ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფი (ქვესივრცე). ამ მიმართულებით საინტერესო შედეგები ეკუთვნით ი. გირსანოვს და ბ. მიტიაგინს [12], ა. სკოროხოდს [20], ჰ. შიმომურას [21], ა. ხარაზიშვილს [22], გ. ფანცულაიას [18], ა. კირთაძის [16] და ა.შ.

არ შეიძლება არ აღინიშნოს დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების გამოკვლევაში ჯგუფური სტრუქტურის მნიშვნელოვანი ფაქტორი. ამ თვალსაზრისით შევნიშნოთ, რომ კრილოვ-ბოგოლუბოვის თეორემის დამტკიცებაში არსებით როლს თამაშობს არა იმდენად ჰომეომორფიზმთა ჯგუფის ერთპარამეტრიანობა, არამედ ამ ჯგუფის კომუტატიურობა. უფრო მეტიც, თეორემა არის მართებული არაკომუტატიური ჯგუფების ისეთი ფართო კლასებისთვისაც, როგორიცაა ამოხსნადი ჯგუფები.

ახლა კი მოკლედ ჩამოვაყალიბოთ სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები. ნაშრომი შედგება შესავლისაგან, ოთხი თავისაგან და ექვსი პარაგრაფისაგან. ყოველ დებულებებისათვის, განსაზღვრებებისათვის და მაგალითებისათვის მიღებულია საერთო ნუმერაცია.

დისერტაციის პირველ თავში მოცემულია ის ძირითადი მათემატიკური სიმბოლოები, ცნებები და წინადადებები სიმრავლეთა თეორიიდან, რომლებიც არსებითად გამოყენებულია დისერტაციის ძირითადი შედეგების მისაღებად. კერძოდ, ჩამოყალიბებულია სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატური სისტემები და სხვადასხვა სივრცეებისათვის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი წინადადება (მაგალითად, ლუზინ-სუსლინის თეორემა და სხვ.).

დისერტაციის მეორე თავი მოიცავს ოთხ ქვეთავს.

2.1.-ქვეთავში მოყვანილია დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების კლასიკური განსაზღვრებები და განხილულია შესაბამისი მაგალითები. ჩვენ განვიხილავთ ისეთ დინამიკურ (კვაზიდინამიკურ) სისტემებს, რომლებისთვისაც არსებობენ შესაბამისი ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომები. ამიტომ ხშირად დინამიკური სისტემის ქვეშ გულისხმობენ ინვარიანტულ ზომას მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. ამ კონტექსტში ბუნებრივია შემდეგი განსაზღვრა.

$(E,\ G,\ S,\ \mu)$ ოთხეულს, სადაც E ძირითადი ფაზური სივრცეა, G არის სივრცის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფი, S-არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა

G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ - კი G-ინვარიანტული (G-კვაზიინვარიანტული) ზომაა ეწოდება აბსტრაქტული დინამიური (კვაზიდინამიკური) სისტემა, ანუ როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სივრცე ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომით.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, შემდგომში ხშირად, ტექსტის სიმარტივისათვის, (E, G, S, μ) აბსტრაქტული დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემას ჩავანაცვლებთ ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომით.

ამავე თავში მოყვანილია აბსტრაქტული დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების ისეთი ძირითადი თვისებები (ერთადერთობა, მეტრიკული ტრანზიტულობა) და განხილულია შესაბამისი მაგალითები.

2.2-ქვეთავში განხილულია აბსტრაქტული დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების არსებობის საკითხი სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში. კერძოდ, მაგალითების სახით ჩამოყალიბებულია კრილოვ-ბოგოლუბოვის, მარკოვ-კაკუტანის, ჰაარის, ლებეგის თეორემები აბსტრაქტული დინამიკური სისტემების არსებობის შესახებ. ამავე თავში დახასიათებულია ნებისმიერი არათვლადი α სიმრავლისათვის დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი ყველა იმ ფუნქციების $\mathbf{R}^{\alpha}$ სივრცეში, რომლის განსაზღვრის არეა α და მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\mathbf{R}$. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $card(\alpha)=\omega$, დამტკიცებით მოყვანილია σ-სასრულო $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\mathbf{R}^{(\mathbf{N})},B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}),\chi\right)$ დინამიკური სისტემის აგება, სადაც $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$-ით აღნიშნულია ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო ფინიტური მიმდევრობების სიმრავლე $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში. ე. ი.

$$R^{(N)}=\{x : x\in R^{N}\ \&\ Card\{i : i\in N\ \&\ x_i\neq 0\}<\omega\}.$$

ამ დინამიკური სისტემის არსებობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს σ-სასრულო $\left(l_2,\mathbf{R}^{(\mathbf{N})},B(l_2),\chi\right)$ დინამიკური სისტემის არსებობაც, სადაც

$$l_2 = \left\{ x : x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \; \& \sum_{i \in \mathbf{N}} x_i^2 < +\infty \right\}.$$

მოყვანილი დინამიკური სისტემის არსებობა მნიშვნელოვანია შემდგომი მასალის გადმოცემისათვის. მისი დამტკიცება ეკუთვნის ა. ხარაზიშვილს (იხილეთ, [50], [54]).

ნაშრომის 2.3 ქვეთავი ეძღვნება დინამიკური სისტემების არსებობას პოლონურ სივრცეებში. ცნობილია, რომ თუ G არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, მაშინ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო ჰაარის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

დავუშვათ, რომ G არ არის ლოკალურად კომპაქტური. როგორც ცნობილია, ასეთ შემთხვევაში არ არსებობს σ-სასრულო ბორელის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. ასევე ცნობილია, რომ თუ G არის არალოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ არ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო მარცხენა (მარჯვენა) G-კვაზიინვარიანტული ბორელის ზომა G-ში. აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ E არის ნებისმიერი სეპარაბელური ბანახის სივრცე, მაშინ E სივრცეში არსებობს ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია E-ს ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ (იხილეთ, [13]).

დისერტაციაში მიღებულია შემდეგი დებულება:

(ა) *არსებობს არანულოვანი* $\left(X, G, B(X), \mu\right)$ *დინამიკური სისტემა, სადაც* X *არის უსასრულოგანზომილებიანი პოლონური წრფივი სივრცე,* G *არის* X*-ის მკვრივი წრფივი ქვესივრცე,* $B(X)$ *წარმოადგენს ბორელის* σ*-ალგებრას, ხოლო* μ *კი* G*-ინვარიანტული არანულოვანი* σ*-სასრულო ზომაა* X *-ზე.*

ბუნებრივად დაისვა საკითხი იმის შესახებ, რომ დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე E რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: E

სივრცეზე არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) E სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. სადისერტაციო ნაშრომში მიღებულია შემდეგი თეორემები:

(ზ) *ვთქვათ, E არის სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. მაშინ E სივრცეზე არსებობს ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის სეპარაბელური.*

წარმოდგენილი ნაშრომის 2.4 ქვეთავი ეხება დინამიკური სისტემების არსებობის საკითხს უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომელიც აღჭურვილია აბსოლუტურად კრებადი მარკუშევიჩის ბაზისით. დისერტაციის ამავე თავის 2.3 ქვეთავში მოცემულია, რომ ნებისმიერ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში არსებობს ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია საბაზისო სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. ასევე ცნობილია, რომ დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული იმ აქსიომის მიღების შემთხვევაში, როცა ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით, აბსოლუტურად კრებადი შაუდერის ბაზისით აღჭურვილი ბანახის სივრცის ბულეანზე არსებობს ისეთი ინვარიანტული ზომის მაგალითი, რომელიც სტანდარტულ მართკუთხედზე ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომლებშიც არსებობს შაუდერის ბაზისი, აგებულ იქნა ლებეგის ზომის ანალოგიური ზომა ყოველგვარი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე.

ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე. მარკუშევიჩის ბაზისი (M-ბაზისი) ეწოდება ისეთ მიმდევრობას, რომელიც არის ფუნდამენტური, მინიმალური და ტოტალურად ბიორთოგონალური. ცნობილია, რომ ყოველ უსასრულოგანზომილებიანი

სეპარაბელური ბანახის სივრცე აღჭურვილია აბსოლუტურად კრებადი M -ბაზისით.

[23] და [24] შრომებში გ. ფანცულაიას მიერ შემოტანილ იქნა μ_α ორდინალური ($\mathrm{O}(\alpha)\mathrm{LM}$) და ν_α სტანდართული ($S(\alpha)\mathrm{LM}$) ლებეგის ზომა $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში, სადაც $\alpha = \{n_k : k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

ახლა ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და $\left(x_k, x_k^*\right)$ არის აბსოლუტურად კრებადი M -ბაზისი. დავუშვათ, რომ

$$T : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

არის წრფივი ოპერატორი, განსაზღვრული $Tx = \left\{x_k^*\left(x\right) : k \in \mathbf{N}\right\}$ პირობით. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ T არის წრფივი, ინიექციური, უწყვეტი და ნებისმიერი k -სათვის და

$$Tx_k = e_k,$$

სადაც $e_k = \left(0, 0, \cdots, 0, 1, \cdots\right) \left(k = 1, 2, \cdots\right)$.

ახლა ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და $\left(x_k, x_k^*\right)$ არის აბსოლუტურად კრებადი M -ბაზისი. მაშინ μ_α და ν_α ზომებისა და T ოპერატორის გამოყენებით მიღებულია შემდეგი თეორემები:

(გ) ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ -სათვის X -ში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა ψ_α, რომელიც არის $\mathrm{O}(\alpha)\mathrm{LM}(X)$.

(დ) ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ -სათვის X -ში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა η_α, რომელიც არის $\mathrm{S}(\alpha)\mathrm{LM}(X)$.

[25] სტატიაში შემოღებულია შემდეგი ცნება. Y -ს ეწოდება shy-სიმრავლე, თუ ის წარმოადგენს ბორელის ისეთი Y' სიმრავლის ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$\mu(Y'+x)=0$$

ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის და რაიმე ისეთი ბორელის ალბათური μ ზომისათვის, რომ $\mu(K)=\mu(X)$, სადაც K კომპაქტია X სივრცეში. shy-სიმრავლის დამატებას ეწოდება პრივალენსი.

ბორელის μ ზომას ეწოდება shy-სიმრავლის გენერატორი X სივრცეში თუ $\overline{\mu}(Y)=0 \quad (Y \subset X)$ ტოლობის მართებულობიდან გამომდინარეობს, რომ Y არის shy-სიმრავლე X-ში, სადაც $\overline{\mu}$-თი აღნიშნულია μ ზომის გასრულება. მტკიცდება, რომ ყოველი კვაზისასრული ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა X სივრცეში არის shy-სიმრავლის გენერატორი ამავე სივრცეში. თუ გამოვიყენებთ ამავე თავში მიღებულ შედეგებს მივიღებთ, რომ ν_α და ψ_α ზომები არიან shy-სიმრავლის გენერატორები X-ში ყოველი $\alpha=\{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის.

ამავე პარაგრაფში ჩვენ ვიხილავთ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში ორდინალური და სტანდარტული აბსტრაქტული დინამიკური სისტემების გარკვეული მატარებლებს. კერძოდ, მართებულია შემდეგი წინადადება:

(ე) ყოველი $\alpha=\{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის სეპარაბელურ ბანახის X სივრცეში η_α (ან, ψ_α) ზომა არის shy-სიმრავლის გენერატორი და მისი მატარებელი შეიძლება შეირჩეს ისეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლე, რომელიც არ დაიფარება X სივრცის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი ოჯახით.

ამ წინადადებიდან კი უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

(ვ) ყოველი უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე წარმოიდგინება, როგორც shy-სიმრავლისა და პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანება.

სადისერტაციო ნაშრომის მესამე თავი მიძღვნილია აბსტრაქტული σ-სასრულო დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების ამოცანისადმი. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეს საკითხი მნიშვნელოვანია არა მარტო დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების თეორიისათვის,

არამედ თანამედროვე მათემატიკის სხვადასხვა დარგებისთვისაც. ბუნებრივია არსებობს აბსტრაქტული σ-სასრულო დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების რამდენიმე მეთოდი (მარჩევსკის მეთოდი [26], კოდაირა-კაკუტანის მეთოდი [27], კაკუტანი-ოქსტობის მეთოდი [28], სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი [14]). აქვე აღვნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილ მეთოდთაგან პირველი სამი არის წმინდა სიმრავლურ-თეორიული მეთოდი. სადისერტაციო ნაშრომში ჩვენ ვიყენებთ სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდს, რომელიც წმინდა ალგებრული ხასიათისაა. ამ მეთოდის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი, რომელიც პირველად გამოიყენა ა.ხარაზიშვილმა ლებეგის ზომის მკაცრი გაგრძელების შესახებ ვ.სერპინსკის პრობლემის ამოსახსნელად. სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელი გახდა შემდეგი დებულების ჩამოყალიბება:

(ზ) ვთქვათ, მოცემულია σ-სასრულო $\left(G_2, dom(\mu), G_2, \mu\right)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა და ვთქვთ,

$$\varphi : G_1 \to G_2$$

არის სიურექციული ჰომომორფიზმი, სადაც $\left(G_1, \cdot\right)$ რაიმე არათვლადი ჯგუფია.

განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი ოჯახი

$$S = \left\{\varphi^{-1}\left(Y\right) : Y \in dom\left(\mu\right)\right\},$$

და განვსაზღვროთ ν ფუნქციონალი შემდეგი პირობით:

$$\nu\left(\varphi^{-1}\left(Y\right)\right) = \mu\left(Y\right),$$

სადაც $Y \in dom\left(\mu\right)$.

მაშინ ν ფუნქციონალი არის ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(1) *S არის G_1-ის ქვესიმრავლეთა G_1-ინვარიანტული σ-ალგებრა;*

(2) (G_1, S, G_1, ν) *არის არაატომური* σ*-სასრულო დინამიკური სისტემა* G_1*-ზე.*

ამავე თავში მოყვანილია მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის ცნება და მისი როლი σ-სასრულო აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების ამოცანაში. მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის არსებობა არსებით როლს თამაშობს კოდაირა-კაკუტანის მეთოდში. დისერტაციაში წარმოდგენილია სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდისა და კოდაირა-კაკუტანის მეთოდის გარკვეული კომბინაცია და შემოღებულია თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმის ცნება.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ და $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა და ვთქვათ, გადასახვა $f: G_1 \to G_2$ არის ჰომომორფიზმი. ვიტყვით, რომ f არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი, თუ f-ის გრაფიკი არის მსუქანი $\mu_1 \times \mu_2$ ნამრავლი ზომის მიმართ $G_1 \times G_2$-ში.

მესამე თავის ძირითადი შედეგებია.

(თ) *ვთქვათ, მოცემულია* $(G_1, \cdot)$ *არათვლადი ჯგუფი და* $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$ *არათვლადი ალბათური დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,*

$$f: G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ *და* $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ *დინამიკური სისტემები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:*

(1') $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ *დინამიკური სისტემა წარმოადგენს* $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ *დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;*

(2') f *არის ზომადი* $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ *დინამიკური სისტემის მიმართ.*

(ი) ვთქვათ, მოცემულია ორი σ-სასრული $\left(G_1, dom\left(\mu_1\right), G_1, \mu_1\right)$ და $\left(G_2, dom\left(\mu_2\right), G_2, \mu_2\right)$ დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,

$$f : G_1 \rightarrow G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს $\left(G_1, dom\left(\mu_1'\right), G_1, \mu_1'\right)$ დინამიკური სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(1”) $\left(G_1, dom\left(\mu_1'\right), G_1, \mu_1'\right)$ დინამიკური სისტემა წარმოადგენს $\left(G_1, dom\left(\mu_1\right), G_1, \mu_1\right)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;

(2”) f არის ზომადი $\left(G_1, dom\left(\mu_1'\right), G_1, \mu_1'\right)$ დინამიკური სისტემის მიმართ.

აქვე გვინდა ხასგასმით აღვნიშნოთ, რომ პირდაპირი ნამრავლებისა და სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდების გამოყენებით მიღებულია სადისერტაციო ნაშრომის სხვა ძირითადი შედეგები.

დისერტაციის მეოთხე შედგება ორი პარაგრაფისაგან.

4.1.-ქვეთავში მოცემულია უ. დარჯის ერთი ამოცანის გარკვეული ვერსიაზე. კერძოდ, დარჯის მიერ დასმული იქნა შემდეგი ამოცანა (იხილეთ, [29]):

შესაძლებელია თუ არა, რომ G პოლონური ჯგუფი წარმოვიდგინოთ პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

ნაშრომში წარმოდგენილია ამ ამოცანის გარკვეული ვერსიის ამოხსნა. [30] და [31] შრომებში ნაჩვენებია, რომ ყოველი ლაკალურად კომპაქტური არაკომპაქტური პოლონური ჯგუფების უსასრულო ნამრავლი წარმოიდგინება არათანამკვეთი ჰაარის ნულზომადი სიმრავლისა და პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანების სახით. ცხადია, რომ ეს შედეგი წარმოადგენს დარჯის ამოცანის ნაწილობრივ ამონახსნს. დისერტაციაში წარმოდგენილია დამტკიცების სხვა გზა უნიმოდალური არა კომპაქტური პოლონური ჯგუფების ოჯახებისათვის. კერძოდ, მიღებულია შემდეგი დებულება:

(ვ) ვთქვათ, G_i $\left(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\right)$ არის პოლონური ჯგუფი და ვთქვათ, G_1 არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი. მაშინ $G = \prod_{i \in \mathbf{N}} G_i$ წარმოიდგინება არათანამკვეთი პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

ამავე თავში მოცემულია ორადულობის პრინციპი ჰაარის ნულზომის სიმრავლესა და პირველი კატეგორიის სიმრავლეებს შორის, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:

დავუშვათ, რომ P არის წინადადება, რომელიც ფორმულირებულია ჰაარის ნულზომადი, პირველი კატეგორიის სიმრავლეებისა და წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ცნებების ტერმინებში. ვიტყვით, რომ ორადულობის პრინციპი ზომასა და კატეგორიას შორის არის ჭეშმარიტი P წინადადების მიმართ, თუ P ექვივალენტურია P^* წინადადების, რომელიც მიიღება P-გან ზომისა და კატეგორიის თვალსაზრისით მცირე სიმრავლეების ცნებების ურთიერთ ჩანაცვლებით.

მართებულია შემდეგი წინადადება:

ვთქვათ, P არის წინადადება, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

„ყოველი ორი პოლონური G_1 და G_2 ჯგუფისათვის და ყოველი $Y \subset G_1$ ჰაარის ნულზომადი სიმრავლისათვის გვაქვს

$$(\forall X)\left(X \subset G_2 \Rightarrow Y \times X \text{ არის ჰაარის ნულზომადი } G_1 \times G_2 \text{ - ში}\right).“$$

მაშინ ორადულობის პრინციპი ჭეშმარიტია P წინადადების მიმართ.

4.2.ქვეთავში განხილულია დინამიკური სისტემები სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა მოდელებში. კერძოდ, განხილულია შემდეგი ამოცანები:

ამოცანა 1 (დ. ფრემლინი). ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ და λ^* -თი აღნიშნულია ლებეგის გარე ზომა.

$\lambda^*\left(X\right) = 0 \Leftrightarrow \exists$ბორელის ალბათური ისეთი μ ზომა, რომ $\left(\forall t\right)\left(t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mu\left(X + t\right) = 0\right)$?

ამოცანა 2 (პ. ერდოში). არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ ლებეგის აზრით ზომადი E სიმრავლე, რომლის ზომა მეტია p-ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

დისერტაციაში მიღებულია შემდეგი დებულებები:

(ლ) ამოცანა 1 დამოუკიდებელია (ZF&DC) თეორიაში.

(ZF&DC&AD) *მოდელში ამოცანა1-სათვის მართებულია შემდეგი პასუხი:*

$X \subset \mathbf{R}$ *სიმრავლისათვის* $\lambda^*(X)=0$ *ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს ბორელის ალბათური ზომა* μ *ისეთი, რომ ყოველი* $t \in \mathbf{R}$ *რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას*

$$\mu^*(X+t)=0.$$

ჩვენს მიერ განხილულ იქნა ერდოშის პრობლემის გარკვეული ვარიანტი. კერძოდ:

არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს?

ე. ი. როგორ სახეს მიიღებს ერდოშის ამოცანა ლებეგის გარე ზომის შემთხვევაში.

ამოცანა 2-თან დაკავშირებით მართებულია შემდეგი წინადადებები:

(მ) არ არსებობს სასრული მუდმივა p ისეთი, რომ ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p-ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

(ნ) ევკლიდეს სიბრტყეზე არსებობს სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და არ შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

(ო) შემდეგი წინადადება

„ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს“

დამოუკიდებელია (ZF)&(DC) *თეორიასთან.*

წარმოდგენილი *(ა)-(ო)* თეორემები დამტკიცებებით მოცემულია სადისერტაციო ნაშრომის ავტორის მონაწილეობით [136]-[141] სამეცნიერო შრომებში.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

დინამიკური სისტემების თეორია არის მნიშვნელოვანი, როგორც წმინდა მათემატიკის მიმართულება და, აგრეთვე, არის არსებითი მისი მრავალრიცხოვანი გამოყენებებით საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში, ზევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, ალბათობის თეორიისა და შემთხვევით პროცესთა თეორიიდან, ქაოსთა თეორიიდან, ერგოდული თეორიიდან და ა.შ. აქედან გამომდინარე, დინამიკური სისტემების არსებობის და მისი თვისებები საკითხი შესწავლილია ბევრ მონოგრაფიასა და სამეცნიერო შრომაში. ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანთ რამდენიმე ცნობილ კლასიკურ მონიგრაფიას:

N. Kryloff et N. Bogoliuboff, La theorie generale de la mesure et son application a l'etude des systemes dynamiques de la mecanique non-lineavre. Ann. of Math., vol. 38, no. 1, 1937; N. Nemyckii, N. Stepanov, The quatitative theory of dynamical systems. Moscow-Leningrad, 1949 (in Russian); V.I. Arnold, Ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1975 (in Russian); G.D. Birkhoff, Dynamical Systems. 1927; D. Ornstein, Ergodic theory, randomness, and dynamical systems. Yala University Press, 1973.

მეორეს მხრივ, დინამიკურ სისტემათა თეორიის თანამედროვე ხედვამ განაპირობა სხვადასხვა გარდაქმნათა G ჯგუფით აღჭურვილ ძირითად ბაზისურ E სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომებისათვის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხების შესწავლა. არსებობისა და მისი თვისებების შესწავლა იხილეთ, მაგალითად:

J.Feldman, Nonexistence of quasi-invariant measures on in infinite-dimensional linear spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 142-146; T.L. Gill, W.W. Zachary, Lebesgue measure on a version of R^N, Real Analysis Exchange, Summer Symposium (2009), 42–49; A. Hulanicki, C. Ryll-Nardzewski, Invariant extensions of the Haar measure. Coll. Math., vol. 42, 1979; Y. Iamasaki, Invariant measures of the infinite-dimensional rotation group. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8, 1972; A. B. Kharazishvili, Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantic Press, Amsterdam-Paris, 2009; A.B. Kharazishvili, On invariant measures in the Hilbert space. Bull. of the Acad. of Sci., of the GSSR, vol. 114, no. 1, 1984 (in Russian); A.B. Kharazishvili, On the uniqueness of Lebesgue and Borel measures, Journal of Applied Analysis, vol. 3, no. 1, 1997; G.R. Pantsulaia, Invariant and quasiinvariant measures in infinite-dimensional topological vector spaces. Nova Science Publishers, INC., New York, 2007. 234 pp; G. R. Pantsulaia, Selected Topics of an Infinite-dimensional Classical Analysis, Nova Science Publishers, INC., New York, 2007. 234 pp; P. Zakrzewski, The uniqueness of Haar measure and set theory. Colloq. Math., vol. 74, no. 1, 1997; P. Zakrzewski, Extending isometrically invariant measures on R^n. Real Analysis Exchauge, 21, 2, 1995-1996.

დისერტაციის პირველი ნაწილი ეხება დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხებს წრფივ პოლონურ ტოპოლოგიურ სივრცეებში და აგრეთვე უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში. ამ თვალსაზრისით არსებობს საკმაოდ კარგი სამეცნიერო წყაროები. მაგალითად: P. Erdös, R. Mauldin, The nonexistence of certain invariant measures. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 59, 1976; T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plochko, The existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces, Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici, 50.2 (2014), pp. 401-419; A.B. Kharazishvili, Transformation Groups and Invariant Measures. World Scientific, 1998; A. Kirtadze, G.R. Pantsulaia. Relation between shy sets and Haar null-sets Banach space l^{∞}. Bull. Acad. Sci. of Georgia, vol. 172, no. 3, 2005; A.P. Kirtadze, G.R. Pantsulaia, Lebesgue nonmeasurable sets and the uniqueness of invariant measures in infnite-dimensional vector spaces, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 143 (2007).

დისერტაციაში მოცემულია ზემოთ მოყვანილი ლიტერატურაში მიღებული შედეგების შემდგომი განვითარება და ამ თვალსაზრისით მიღებულია ახალი შედეგები.

დისერტაციის მეორე ნაწილი ეხება დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების საკითხს. ამ ნაწილში გამოყენებულია გაგრძელების სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი. ამ მეთოდის შესახებ შეიძლება იხილოთ შემდეგ შრომებში: A. B. Kharazishvili, Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantic Press, Amsterdam-Paris, 2009; A. Kirtadze, On the method of direct products in the theory of quasi-invariant measures, Georgian Math. Journal, vol. 12, no. 1. 2005; ა. კირთაძე, დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების თეორიის ზოგიერთი ასპექტი, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2006, 270 გვ; G.R. Pantsulaia, On the existence of a quasi-invariant measure on a non-locally compact noncommutative topological group. Bull. Acad. Sci. GSSR, vol. 120, no. 1, 1985 (in Russian).

დისერტაციაში გადმოცემული მასალა წარმოადგენს ჩამოთვლილი ლიტერატურაში მოცემული მასალის შემდგომი საფეხური. კერძოდ, გამოყენებულია კოდაირასა და კაკუტანის მეთოდი და სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი. ახალი შედეგები არის ამ მეთოდების გარკვეული კომბინაცია და მიღებული დასკვნები არის ახალი სამეცნიერო შედეგები.

2. შედეგები და მათი განსჯა

თავი I

დამხმარე ცნებები და დებულებები სიმრავლეთა თეორიიდან

სანამ უშუალოდ გადავიდოდეთ ძირითადი შინაარსის გადმოცემაზე, შემოვიტანოთ ცნებები და აღნიშვნები, რომლებიც პირდაპირ კავშირშია მოცემულ ნაშრომთან და რომლებითაც სისტემატურად ვისარგებლებთ შემდგომში.

ლოგიკური სიმბოლოები: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ აღნიშნავენ შესაბამისად უარყოფას, დიზიუნქციას, კონიუნქციას, გამომდინარეობას და ექვივალენტურობას.

$\exists$ – არსებობის კვანტორი;

$\forall$ – ზოგადობის კვანტორი;

$\varnothing$ - ცარიელი სიმრავლე;

$P(X)$- X სიმრავლის ბულეანი;

$card(X)$ - სიმრავლის სიმძლავრე;

$dom(f)$ - f ფუნქციის განსაზღვრის არე;

$ran(f)$ - f ფუნქციის მნიშვნელობათა არე (სიმრავლე);

$\mathbf{N}$ – ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

Q – ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

$\mathbf{R}$ – ყველა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

$\mathbf{R}^n$ – n- განზომილებიანი $(n \in \mathbf{N})$ ევკლიდეს სივრცე (ხშირად ვისარგებლებთ ტერმინით: სასრულგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე);

D_n -ყველა იზომეტრიულ გარდაქმნათა ჯგუფი $\mathbf{R}^n$-ში;

π_n- ყველა პარალელური გადატანათა ჯგუფი $\mathbf{R}^n$-ში (ხშირად ვისარგებლებთ შემდეგი ტერმინებით: ტრანსლაციები ან პარალელური

ძვრები). კანონიკური იზომორფიზმის საშუალებით ხშირად π_n ჯგუფი გაიგივებულია თვით $\mathbf{R}^n$ სივრცესთან;

$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ან $\mathbf{R}^{\infty}$ - ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობების ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე;

λ_n - კლასიკური ლებეგის (სტანდარტული) ზომა $\mathbf{R}^n$ სივრცეში;

L_n - სივრცის ლებეგის აზრით ზომად ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი $\mathbf{R}^n$ სივრცეში;

b_n - კლასიკური ბორელის ზომა $\mathbf{R}^n$ სივრცეში;

$B(X)$ - X სივრცის ბორელის აზრით ზომად ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი;

ω სიმბოლოთი აღნიშნულია პირველი უსასრულო კარდინალური (ორდინალური) რიცხვი. ის აგრეთვე აღნიშნავს ყველა ნატურალურ

$$N = \{ 1,\ 2,\ \cdots \}$$

რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს. ხშირად, ω და $\mathbf{N}$ სიმრავლეებს პირობითად აიგივებენ ერთმანეთთან.

ω_1 –ით აღნიშნულია პირველი არათვლადი კარდინალური (ორდინალური) რიცხვი.

სხვადასხვა ორდინალურ რიცხვებს (ორდინალებს) ჩვენ აღვნიშნავთ შესაბამისად

$$\alpha,\ \beta,\ \xi,\ \zeta,\ \eta,\ \ldots$$

სიმბოლოებით.

$\boldsymbol{c}$ ასოთი შემდგომში ყოველთვის აღვნიშნავთ კონტინუუმის სიმძლავრეს, ე.ი. $\boldsymbol{c} = 2^{\omega}$.

ვთქვათ, E ძირითადი ბაზისური სიმრავლეა, ხოლო G არის E სიმრავლის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფი.

G ჯგუფი მოქმედებს ტრანზიტულად E სიმრავლეზე, თუ ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$(\forall x)(\forall y)(x \in E \,\&\, y \in E \Rightarrow (\exists g)(g \in G \,\&\, g(x) = y)).$$

G ჯგუფი მოქმედებს თავისუფლად E სიმრავლეზე, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall g)(g \in G \Rightarrow ((\exists x)(x \in E \,\&\, g(x) = x) \Rightarrow g = I_E)),$$

სადაც I_E სიმბოლოთი აღნიშნულია იგივური გარდაქმნა E სიმრავლისა თავის თავზე.

ადვილი დასანახია, რომ ბოლო დამოკიდებულება ექვივალენტურია შემდეგის:

$$(\forall g)(\forall h)(g \in G \,\&\, h \in G \Rightarrow ((\exists x)(x \in E \,\&\, g(x) = h(x)) \Rightarrow g = h)).$$

მაგალითი 1. ყველა პარალელურ გადატანათა π_n ჯგუფი $\mathbf{R}^n$ სივრცეში მოქმედებს ტრანზიტულად და თავისუფლად.

აბსტრაქტული E სივრცის ყოველ გარდაქმნათა G ჯგუფთან, ექვივალენტურობის შემდეგი დამოკიდებულებით

$$R\{x, y\} - x \in E \,\&\, y \in E \,\&\, ((\exists g)(g \in G \,\&\, g(x) = y)),$$

კანონიკურად ასოცირდება E სივრცის დაშლა ექვივალენტურობის კლასებად. ამ კლასებს ეწოდებათ G ჯგუფის ინტრანზიტულობის კლასები, ანუ G-ორბიტები.

თუ Z არის E სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ

$$G(Z) = \bigcup_{g \in G, z \in Z} \{g(z)\}.$$

თუ $Z = \{z\}$ $(z \in E)$, მაშინ ვწერთ $G(z)$ და $G(z)$-ს ეწოდება z წერტილის ორბიტა G ჯგუფის მიმართ.

მაგალითი 2. ჯგუფი G მოქმედებს ტრანზიტულად E სიმრავლეზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E სივრცის დაშლა ინტრანზიტულობის კლასებად იქნება ერთელემენტიანი, ანუ დაემთხვევა $\{E\}$-ს.

ახლა ვთქვათ, $\{(G_i, \cdot) : i \in I\}$ ჯგუფთა ნებისმიერი ოჯახია და ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის $(G_i, \cdot)$ ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტია e_i.

$\{(G_i, \cdot) : i \in I\}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ნამრავლი ეწოდება

$$G=\prod_{i\in I}G_i$$

ჯგუფის ისეთ ქვეჯგუფს, რომლის ყოველი $x=\{x_i:i\in I\}\in G$ ელემენტისთვის შესრულებულია პირობა

$$Card(\{i:i\in I\ \&\ x_i\neq e_i\})<\omega.$$

ცხადია, რომ თუ ინდექსთა I სიმრავლე სასრულია, მაშინ $\{(G_i,\cdot):\ i\in I\}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ნამრავლი დაემთხვევა G ჯგუფს, რომელსაც ჯგუფთა მითითებული ოჯახის სრული ნამრავლი ეწოდება.

ახლა კი მოვიყვანოთ რამდენიმე ძირითადი ცნება ზომის თეორიიდან (იხილეთ, მაგალითად, [7], [14], [16], [18], [19], [32]), რომლებიც დაგვჭირდება შემდგომში.

განსაზღვრა 1. ვიტყვით, რომ (E, S, μ) სამეული არის ზომიანი სივრცე, თუ S წარმოადგენს E ბაზისური სიმრავლის რაიმე σ-ალგებრას, ხოლო μ კი არის ზომა S-ზე.

ვთქვათ, მოცემულია (E, S, μ) ზომიანი სივრცე.

μ ზომას ეწოდება σ--სასრული, თუ არსებობს $\{X_i:i\in N\}$ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი E -დან ისეთი, რომ

$$(\forall i)(i\in N\Rightarrow X_i\in S),$$

$$\bigcup_{i\in N}X_i=E,$$

$$(\forall i)(i\in N\Rightarrow \mu(X_i)<+\infty).$$

μ ზომას ეწოდება სრული, თუ შესრულებულია პირობა

$$((\forall X)(X\in S\ \&\ \mu(X)=0))\Rightarrow((\forall Y)(Y\subset X\Rightarrow Y\in S)).$$

μ ზომის გასრულებას შემდგომში ყველგან აღვნიშნავთ $\overline{\mu}$ სიმბოლოთი, ხოლო $S'-$ით კი S σ-ალგებრის გასრულებას μ ზომის მიმართ ანუ $dom(\overline{\mu})$ -ს.

μ ზომას ეწოდება არაატომური, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall X)\big(X \in S \,\&\, \mu(X) > 0 \Rightarrow (\exists Y)(Y \subset X \,\&\, Y \in S \,\&\, 0 < \mu(Y) < \mu(X))\big).$$

μ ზომასთან კანონიკურად ასოცირდება გარე (μ^*) და (μ_*) შიგა ზომები, განსაზღვრული E ყველა ქვესიმრავლეთა $P(E)$ კლასზე (ბულეანზე), რომლებიც განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$\mu^*(X) = \inf\left\{\sum_{n\in N}\mu(Y_n) : \{Y_n : n \in N\} \subset S \,\&\, X \subset \bigcup_{n\in N} Y_n\right\},$$

$$\mu_*(X) = \sup\{\mu(Y) :\ Y \in S \,\&\, Y \subset X\}.$$

μ ზომას ეწოდება დიფუზიური, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall x)\big(x \in E \,\&\, \{x\} \in S \,\&\, \mu(x) = 0\big).$$

ვთქვათ, E არის ძირითადი ბაზისური სიმრავლე, G კი - ამ სიმრავლის გარდაქმნათა რომელიღაც ჯგუფი.

განსაზღვრა 2. E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე D კლასს ეწოდება G-ინვარიანტული, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall g)(\forall X)\big(g \in G \,\&\, X \in D \Rightarrow g(X) \in D\big).$$

განსაზღვრა 3. ვიტყვით, რომ (E, G, S, μ) ოთხეული არის ინვარიანტული ზომიანი სივრცე, თუ G წარმოადგენს E ბაზისური სივრცის გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფს, S არის E სიმრავლის რომელიღაც G-ინვარიანტული σ--ალგებრა, ხოლო μ კი – S -ზე განსაზღვრული G- ინვარიანტული ზომაა, ე.ი.

$$(\forall g)(\forall X)(g \in G \,\&\, X \in S \Rightarrow \mu(g(X)) = \mu(X)).$$

განსაზღვრა 4. ვიტყვით, რომ (E, G, S, μ) ოთხეული არის კვაზიინვარიანტული ზომიანი სივრცე, თუ G წარმოადგენს E ბაზისური სივრცის გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფს, S არის E სიმრავლის რომელიღაც G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ კი S -ზე განსაზღვრული G -კვაზიინვარიანტული ზომაა, ე.ი.

$$(\forall g)(\forall X)\big(g \in G \,\&\, X \in S \Rightarrow \big(\mu(X) = 0 \Leftrightarrow \mu\big(g(X)\big) = 0\big)\big).$$

ამ განსაზღვრებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ზომის კვაზიინვარიანტულობა არის უფრო სუსტი თვისება, ვიდრე მისი

ინვარიანტულობა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ზომის კვაზიინვარიანტულობის ცნება უფრო ფართოა, ვიდრე ზომის ინვარიანტულობის ცნება.

მაგალითი 3. ვთქვათ, Γ არის T_1 $\left(T_1 \subset R^2\right)$ წრეწირის დიფეომორფიზმების ჯგუფი, რომელიც შეიცავს T_1-ის იზომეტრიული გარდაქმნების არათვლად სიმრავლეს და Γ-ში არსებობს ერთი მაინც დიფეომორფიზმი, რომელიც არ ინარჩუნებს ლებეგის კლასიკურ λ ზომას T_1-ზე. მაშინ λ ზომა წარმოადგენს Γ-კვაზიინვარიანტულ ზომას და ამავე დროს არ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო Γ-ინვარიანტული ზომა, რომელიც განსაზღვრულია $dom(\lambda)$-ზე.

ხშირ შემთხვევაში (E,G,S,μ) ოთხეულის მაგივრად დავწერთ (E, G, $dom(\mu)$, μ) ოთხეულს ან (E, G, μ) სამეულს.

განსაზღვრა 5. ლოკალურად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ H ჯგუფზე ბორელის μ ზომას ეწოდება ჰაარის ზომა, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$(\forall U)$ (U არის ღია სიმრავლე H -ში $\Rightarrow \mu(U)>0$);

$(\forall g)(\forall Z)\big(g \in H \,\&\, Z \in \mathrm{B}(H) \Rightarrow \mu(Z) = \mu(g(A))\big)$;

$(\forall K)(K \subset H \,\&\, K$ არის კომპაქტი $\Rightarrow \mu(K) < +\infty)$.

ჰაარის ზომათა თეორია დაწვრილებით გადმოცემულია [10], [32] მონოგრაფიებში.

განსაზღვრა 6. ვთქვათ, E არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცე და μ მ არის ბორელის ზომა E--ზე. ვიტყვით, რომ μ არის რადონის ზომა, თუ ყოველი $X \in \mathrm{B}(E)$ სიმრავლისათვის გვაქვს

$$\mu(X) = \sup\left\{\mu(K):\ K \text{ არის კომპაქტი} \,\&\, K \subset X\right\}.$$

ვიტყვით, რომ ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური E სივრცე არის რადონის სივრცე, თუ ყოველი σ-სასრულო ბორელის ზომა E -ზე არის რადონის ზომა. ს. ულამის კლასიკური შედეგის თანახმად ყოველი

სრული სეპარაბელური მეტრიკული (ე.ი. პოლონური) სივრცე იმავდროულად არის რადონის სივრცე.

ვთქვათ, I არის ინდექსთა არაცარიელი სიმრავლე და დავუშვათ, რომ მოცემულია (E_i, S_i, μ_i) ალბათურ სივრცეთა ოჯახი.

ვთქვათ,

$$E = \prod_{i \in I} E_i$$

არის ბაზისურ სიმრავლეთა $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახის დეკარტული ნამრავლი. $X \subset E$ ქვესიმრავლეს ვუწოდოთ მართკუთხა სიმრავლე, თუ ის წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$X = \prod_{i \in I} X_i ,$$

სადაც

$$X_i \in S_i \quad (i \in I),$$

$$Card(\{i \in I : X_i \neq E_i\}) < \omega .$$

E სიმრავლის ყველა მართკუთხა X სიმრავლეთა ოჯახი აღვნიშნოთ K_0 სიმბოლოთი, ხოლო მართკუთხა სიმრავლეების ყველა სასრული გაერთიანებების ოჯახი კი K-თი. K ოჯახი არის ალგებრა E-ზე წარმოქმნილი K_0 – ით. კორექტულად განისაზღვრება ფუნქცია

$$\mu : K_0 \to R$$

შემდეგი ფორმულით:

$$\mu\left(\prod_{i \in I} X_i\right) = \prod_{i \in I} \mu_i (X_i).$$

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ μ ფუნქცია შეიძლება გაგრძელდეს K ალგებრაზე განსაზღვრულ σ-ადიტიურ ფუნქციამდე, თანაც ეს გაგრძელება იქნება ერთადერთი (იხილეთ, მაგალითად, [32]). ეს გაგრძელება აღვნიშნოთ კვლავ μ ასოთი. კარათეოდორის კლასიკური თეორემის თანახმად, μ ზომა ერთადერთი გზით შეიძლება გაგრძელდეს σ-ალგებრაზე. ეს უკანასკნელი σ-ალგებრა აღვნიშნოთ $\prod_{i \in I} S_i$ სიმბოლოთი, ხოლო გაგრძელებული ზომა

განსაზღვრული $\prod_{i\in I} S_i$ σ-ალგებრაზე აღვნიშნოთ $\prod_{i\in I}\mu_i$ –ით და ვუწოდოთ მას $\{\mu_i : i\in I\}$ ალბათურ ზომათა ოჯახის ნამრავლი. $(E_i,\ S_i,\ \mu_i)$ $(i\in I)$ სივრცეთა ნამრავლი არის შემდეგი ზომიანი სივრცე:

$$\left(\prod_{i\in I} E_i, \prod_{i\in I} S_i, \prod_{i\in I}\mu_i\right).$$

ნებისმიერი თანამედროვე მათემატიკური თეორია დაფუძნებულია სიმრავლეთა თეორიის ყველაზე პოპულარულ აქსიომათა სისტემაზე, როგორიცაა ცერმელო-ფრენკელის (**ZF**) სიმრავლეთა თეორია. მაგრამ შემდგომი განვითარებისათვის აუცილებელია ამორჩევის აქსიომის (**AC**) მიღება. ამორჩევის აქსიომის გარეშე შეუძლებელია განვითარდეს არა მარტო მათემატიკური ლოგიკა (სიმრავლეთა თეორია და მოდელების თეორია), არამედ მათემატიკის ისეთი თანამედროვე დარგებიც, როგორიცაა, ტოპოლოგია, ფუნქციონალური ანალიზი, ალგებრა, ზომის თეორია და ა.შ. ჩვენ ვისარგებლებთ ამორჩევის აქსიომის სხვადასხვა ეკვივალენტური ფორმებით, მაგალითად:

ა) ვთქვათ,

$$\mathsf{F} = \{A_i : i\in I\}$$

არის არაცარიელი დიზუნქტიური (ე. ი. წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეთა ოჯახი) სიმრავლეთა ოჯახი. მაშინ არსებობს ისეთი

$$B = \{x_i : i\in I\}$$

სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ერთადერთ x_i ელემენტს ყოველი $A_i\in\mathsf{F}$ სიმრავლიდან.

ბ) არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი F ოჯახისათვის არსებობს ისეთი ამორჩევის f ფუნქცია F -ზე, რომ ყოველი $X\in\mathsf{F}$ სიმრავლისათვის სრულდება პირობა

$$f(X)\in X.$$

მრავალი ფაქტორის გამო შეუძლებელია ამორჩევის აქსიომის მთლიანად უარყოფა. რომ შევინარჩუნოთ გარკვეული კარგი თვისებები, მაგალითად

ლებეგის ზომისათვის, საკმარისია, მივიღოთ ამორჩევის აქსიომის უფრო სუსტი ფორმა, მაგალითად, დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი (**DC**). ის მდგომარეობს შემდეგში:

ვთქვათ, V არის ბინარული დამოკიდებულება არაცარიელ X სიმრავლეზე ისეთი, რომ

$$(\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in X \ \& \ x\mathrm{V}y)) \ .$$

მაშინ არსებობს X სიმრავლის ელემენტების ისეთი $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ მიმდევრობა, რომ ნებისმიერი $n \in \mathbf{N}$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$x_n \mathrm{V} x_{n+1} \ .$$

(**DC**)-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულებები:

1) არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი თვლადი ოჯახისათვის არსებობს ამორჩევის ფუნქცია;

2) ყოველი უსასრულო სიმრავლე შეიცავს უსასრულო თვლად ქვესიმრავლეს.

თანამედროვე მათემატიკაში მიღებულია შემდეგი აღნიშვნა:

$$(ZF)\&(AC)=(ZFC).$$

და ბოლოს, არ შეიძლება არ აღინიშნოს ამორჩევის აქსიომის მჭიდრო კავშირზე ტიხონოვის კლასიკურ თეორემასთან, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში:

თეორემა 1. კვაზიკომპაქტური სივრცეთა ოჯახის ნებისმიერი ნამრავლი კვაზიკომპაქტურია.

ამ თეორემის დამტკიცებაში გამოიყენება ის ფაქტი, რომ არაცარიელ სიმრავლეთა ოჯახის ნებისმიერი დეკარტული ნამრავლი არაცარიელია, რაც თავის მხრივ წარმოადგენს ამორჩევის აქსიომის სხვაგვარ ჩამოყალიბებას. მეორე მხრივ, ჯ. კელიმ დაამტკიცა, რომ ტიხონოვის თეორემის მართებულობიდან გამომდინარეობს ამორჩევის აქსიომა. რაც იმას ნიშნავს, რომ (**ZF**) სიმრავლეთა თეორიაში ამორჩევის აქსიომა და ტიხონოვის თეორემა ექვივალენტურია.

კონტინუუმის ჰიპოთეზა (**CH**) ამტკიცებს, რომ

$$c = 2^{\omega} = \omega_1 .$$

შევნიშნოთ, რომ აქსიომათა (**ZFC**) სისტემაში შეუძლებელია დამტკიცდეს როგორც კონტინუუმის ჰიპოთეზა, ასევე მისი უარყოფა.

გარკვეულ სიმრავლურ-თეორიულ ინტერესს იწვევს დეტერმინირების აქსიომა (**AD**), რომელიც შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ფორმით (იხილეთ, [5], [6], [7]).

ვთქვათ, $A \subset \omega^{\omega}$ ნებისმიერი სიმრავლეა. A სიმრავლესთან ასოცირდება ორი მოთამაშის შემდეგი უსასრულო G_A თამაში: პირველი მოთამაშე იწყებს თამაშს $n_0 \in N$ რიცხვის ამორჩევით. შემდეგ მეორე მოთამაშე ირჩევს $n_1 \in N$ რიცხვს და ა.შ. თამაშის შედეგით მივიღებთ

$$\varphi : N \to N$$

ფუნქციას, განსაზღვრულს შემდეგი პირობით:

$$\varphi(i) = n_i$$

ნებისმიერი $i \in N$ -სთვის.

თუ $\varphi \in A$, მაშინ იგებს პირველი მოთამაშე, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი მეორე მოთამაშე. მოგების სტრატეგია ორივე მოთამაშისათვის განსაზღვრულია ცხადი სახით. A სიმრავლეს ეწოდება დეტერმინირებული, თუ უსასრულო თამაშში ერთ მოთამაშეს მაინც გააჩნია მოგების სტრატეგია. (**AD**) გულისხმობს, რომ ყოველი $A \subset \omega^{\omega}$ სიმრავლე არის დეტერმინირებული.

მართებულია შემდეგი დებულება:

თეორემა 3. თუ მივიღებთ დეტერმინირების აქსიომას, მაშინ ყველა ნამდვილ რიცხვთა **R** სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით.

დამტკიცება იხილეთ [6]-ში.

თეორემა 3-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება:

თეორემა 4. დეტერმინირების აქსიომა ეწინააღმდეგება ამორჩევის აქსიომას.

აქსიომათა შემდეგ სისტემას

$(\mathbf{ZF})\&(\mathbf{DC})\&$

(ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით)

ეწოდება სოლოვეის მოდელი.

ახლა კი მოვიყვანოთ რამდენიმე დამხმარე ცნება და დებულება, რომელიც უშუალოდ დაკავშირებულია დისერტაციის ძირითად შედეგებთან.

განსაზღვრა 7. პოლონური სივრცე ეწოდება ისეთ ტოპოლოგიურ სივრცეს, რომელიც ჰომეომორფულია სეპარაბელური სრული მეტრიკული სივრცის, ანუ პოლონური სივრცე ერთდროულად უშვებს სეპარაბელური და სრული მეტრიკის თავსებადობას. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, საბაზისო სიმრავლეზე უნდა განისაზღვროს ρ მეტრიკა ისე, რომ ტოპოლოგია, შეთანხმებული ρ მეტრიკასთან, დაემთხვეს E სიმრავლის გამოსავალ ტოპოლოგიას, თანაც მეტრიკა უნდა იყოს სეპარაბელური და სრული.

მაგალითი 4. ნებისმიერი არაუმეტეს თვლადი სიმრავლე დისკრეტული ტოპოლოგიით პოლონური სივრცეა. კერძოდ, ყველა ნატურალურ რიცხვთა $\mathbf{N}$ სიმრავლე არის პოლონური სივრცე დისკრეტული ტოპოლოგიით.

მაგალითი 5. ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ღერძი არის პოლონური სივრცე. ამ შემთხვევაში იგულისხმება კანონიკური ტოპოლოგია, წარმოქმნილი ღია ინტერვალებით და შემდეგი კანონიკური მეტრიკით

$$\rho(x,y)=|x-y| \quad (x,y\in\mathbf{R}).$$

მაგალითი 6. ჰილბერტის სივრცე l_2, $L^p(\mu)$ $(1\le p<\infty)$ სივრცე, სადაც μ არის σ-სასრულო ზომა, განსაზღვრული თვლადად წარმოქმნილ σ-ალგებრაზე, არიან პოლონური სივრცეები.

მოვიყვანოთ რამდენიმე დამხმარე დებულება პოლონური სივრცეებისათვის, რომლებიც დაგვჭირდება შემდგომი მასალის გადმოცემისათვის.

ვთქვათ, E პოლონური სივრცეა და $X\subset E$.

თეორემა 5. იმისათვის რომ X იყოს პოლონური სივრცე ინდუცირებული ტოპოლოგიით აუცილებელი და საკმარისია, რომ X წარმოადგენდეს G_δ ტიპის სიმრავლეს E-ში.

მაგალითი 7. ყველა რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე, როგორც ქვესივრცე ნამდვილ რიცხვთა ღერძის, არ არის პოლონური სივრცე, ვინაიდან Q არ არის G_δ ტიპის სიმრავლე.

თეორემა 6. მართებულია შემდეგი წინადადებები:

(ა) სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის გასრულება არის პოლონური სივრცე;

(ბ) პოლონური სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე ასევე პოლონური სივრცეა;

(გ) თუ $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ არის პოლონურ სივრცეთა რაიმე მიმდევრობა, მაშინ

$$X = \prod_{n \in \mathbf{N}} X_n$$

აგრეთვე პოლონური სივრცეა;

(დ) თუ $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ არის პოლონურ სივრცეთა რაიმე მიმდევრობა, მაშინ

$$X = \sum_{n \in N} X_n$$

აგრეთვე პოლონური სივრცეა.

მოყვანილი ცნებებისა და წინადადებების შესახებ იხილეთ, მაგალითად, [4]-[9], [40], [41].

განსაზღვრა 8. ჰაუსდორფის წრფივ E სივრცეში კვაზი-ბაზისი ეწოდება ისეთ $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობას E-დან, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ სიმრავლის წრფივი გარსი მკვრივია E-ში;

2) თუ $\{a_i : i \in \mathbf{N}\}$ არის ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} a_i x_i = 0,$$

მაშინ $a_i = 0$ ყოველი $i \in \mathbf{N}$ ნატურალური ინდექსისათვის.

კვაზი-ბაზისის ცნების შესახებ იხილეთ, [9], [41].

მოვიყვანოთ რამდენიმე თეორემა, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ შემდგომი ძირითადი მასალის გადმოცემისათვის.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7. ყოველი უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური სრული მეტრიზებადი არალოკალურად ამოზნექილი ჰაუსდორფის წრფივი სივრცე უშვებს კვაზი-ბაზისის არსებობას.

თეორემა 7-ის დამტკიცება მოცემულია [39] და [40] შრომებში.

თეორემა 8. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან პოლონურ არა ლოკალურად ამოზნექილ ჰაუსდორფის წრფივ სივრცეში არსებობს კვაზი-ბაზისი.

თეორემა 8-ის დამტკიცება მოცემულია [39] შრომაში.

სანამ გადავიდოდეთ ძირითადი შედეგების ჩამოყალიბებაზე ასევე დაგვჭირდება რამდენიმე განსაზღვრა და დამხმარე დებულება.

ლემა 1. ვთქვათ, X პოლონური სივრცეა. მაშინ არსებობს ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset \mathrm{B}$ და უწყვეტი ბიექცია

$$f : F \to X.$$

კერძოდ, თუ $X \neq \varnothing$, მაშინ არსებობს უწყვეტი სიურექცია

$$g : \mathrm{B} \to X$$

რომელიც აგრძელებს f-ს, სადაც $\mathrm{B} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ აღნიშნავს ბერის სივრცეს.

ლემა 2. ვთქვათ, F და H ორი არაცარიელი სიმრავლეა $V^{\mathbf{N}}$-დან, სადაც V არის ტოპოლოგიური სივრცე, აღჭურვილი დისკრეტული ტოპოლოგიით. მაშინ არსებობს უწყვეტი სიურექცია

$$f : F \to H$$

ისეთი, რომ $f(x) = x$, ყოველი $x \in F$-სათვის.

ლემა 1 და ლემა 2-ის დამტკიცება მოყვანილია [4], [40] წიგნებში.

ლემა 3 (ლუზინი-სუსლინი). ვთქვათ, X პოლონური სივრცეა და $A \subset X$ ბორელის სიმრავლეა. არსებობს ჩაკეტილი $F \subset \mathrm{B}$ სიმრავლე და უწყვეტი ბიექცია

$$f : F \to A.$$

კერძოდ, თუ $A \neq \varnothing$, მაშინ არსებობს უწყვეტი სიურექცია

$$g : B \to A$$

რომელიც აგრძელებს f -ს, სადაც, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, $\mathrm{B} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ აღნიშნავს ბერის სივრცეს.

ლემა 3-ის დამტკიცება იხილეთ, მაგალითად, [40]-ში.

თეორემა 9 (ლუზინი-სუსლინი). ვთქვათ, X და Y ორი პოლონური სივრცეა და

$$f : X \to Y$$

უწყვეტი გადასახვაა. თუ $A \subset X$ ბორელის სიმრავლეა და $f|A$ არის ინიექცია, მაშინ $f(A)$ არის ბორელის სიმრავლე.

თეორემა 9-ის დამტკიცება იხილეთ, მაგალითად, [4], [40] შრომებში.

თეორემა 8 და თეორემა 9-დან გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება.

თეორემა 10. თუ X არის უსასრულოგანზომილებიანი წრფივი პოლონური სივრცე, მაშინ არსებობს ერთადერთი უწყვეტი ოპერატორი

$$T : l_2 \to X$$

ისეთი, რომ $T(l_2)$ არის მკვრივი ბორელის სიმრავლე X -ში და T^{-1} წარმოადგენს ბორელისეულ გადასახვას.

თავი II

აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემები და მათი არსებობა სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში

2.1. დინამიკური სისტემები და მათი თვისებები

ერთპარამეტრიანი გარდაქმნათა ჯგუფები წარმოადგენენ კომუტატიური ჯგუფების კერძო შემთხვევას. ერთპარამეტრიანი გარდაქმნათა ჯგუფების დიდი მნიშვნელობა არსებითად განპირობებულია პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებთან დაკავშირებული შემდეგი გარემოებით.

ევკლიდურ $\mathbf{R}^n$ სივრცეში განვიხილოთ პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა ავტონომიური სისტემა:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x_n' &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

ეს სისტემა ავტონომიურია იმიტომ, რომ მის მარჯვენა მხარეში $t \in \mathbf{R}$ ცვლადი არ მონაწილეობს. ვექტორული სახით მოცემული სისტემა მოკლედ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$x' = f(x),$$

სადაც $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \cdots, f_n).$

ზემოთ მოყვანილ შემთხვევაში ამბობენ, რომ $\mathbf{R}^n$ სივრცეში (ანუ ფაზურ სივრცეში) მოცემულია f ვექტორული ველი. უფრო ზუსტად, სტაციონალური ვექტორული ველი. ამ სისტემის ამონახსნს კი ფაზური ტრაექტორიები ეწოდებათ. თუ f ვექტორული ველი ლიფშიცის პირობას აკმაყოფილებს, მაშინ ფაზური სივრცის ყოველ წერტილზე ზუსტად ერთი ტრაექტორია გაივლის. ტრაექტორიების წირების გამომსახველი სიმრავლე არ შეიცვლება, თუ f ვექტორულ ველს მისი ექვივალენტური

შემოსაზღვრული ველით შევცვლით. ამ შეცვლის შედეგად ყველა ფაზური ტრაექტორია მთელ რიცხვით ღერძზე იქნება განსაზღვრული (ეს ფიზიკური თვალსაზრისით ნიშნავს, რომ არც ერთი ტრაექტორია სასრულ დროში ვერ მიაღწევს უსასრულოდ დაშორებულ წერტილს). ყოველი ტრაექტორია $x(t,x_0)$ სახით შეგვიძლია ჩავწეროთ, სადაც t ნამდვილი ცვლადია, ხოლო x_0 ტრაექტორიის საწყისი წერტილია. ამგვარად, საწყისი წერტილის ნებისმიერობის გამო, ყოველი t-სათვის ვღებულობთ ფაზური სივრცის g_t გარდაქმნას განსაზღვრულს

$$g_t(x_0) = x(t,x_0)$$

ფორმულით.

აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობის მართებულობა

$$g_t \circ g_r = g_r \circ g_t = g_{t+r} \qquad (t \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}).$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ თავიდან მოცემული სისტემის გამოკვლევა შეიძლება მთლიანად შეიცვალოს გარდაქმნათა აგებული ერთპარამეტრიანი ჯგუფის შესწავლით. მართლაც, ამ ჯგუფის მეშვეობით ადვილად აღიდგინება f ვექტორულ ველი. გვაქვს,

$$f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{g_t(x) - x}{t}.$$

ავტონომიურ სისტემებს დინამიკურ სისტემებს უწოდებენ, თუმცა მას თანამედროვე მათემატიკაში უკვე გაცილებით ფართე შინაარსი აქვს.

ახლა მოვიყვანოთ დინამიკური სისტემების კლასიკური განსაზღვრა და მისი ძირითადი თვისებები.

ვთქვათ, მოცემულია (E, ρ) მეტრიკული სივრცე და ამ სივრცის გარდაქმნათა $\{ f(x,t) : x \in E, t \in \mathbf{R} \}$

ოჯახი. ე.ი.

$$(\forall x)(\forall t)(x \in E \,\&\, t \in \mathbf{R} \Rightarrow f(x,t) \in E).$$

დავუშვათ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. საწყისი პირობა:

$$(\forall x)(x \in E \Rightarrow f(x,0) = x).$$

2. უწყვეტობის პირობა x და t ცვლადების მიმართ:

თუ მოცემულია $\{x_n : n < \omega\}$ და $\{t_n : n < \omega\}$ კრებადი მიმდევრობები ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \lim_{n\to\infty} t_n = t_0,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, t_n) = f(x_0, t_0).$$

ადვილი დასანახია, რომ 2) თვისებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თვისება:

2′. ნებისმიერი $x \in E$ წერტილისთვის, ნებისმიერი $T>0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $\rho(x, y) < \delta$ და $|t| \le T$, სრულდება უტოლობა

$$\rho(f(x,t),\ f(y,t)) < \varepsilon .$$

ეს ნიშნავს, რომ თუ საწყისი წერტილები აღებულია ერთმანეთთან „ახლოს“, მაშინ რაგინდ დიდი $-T \le t \le T$ დროის შუალედში მანძილი ერთდროულად მოძრავ წერტილებს შორის ε-ზე ნაკლებია.

3. ჯგუფური თვისება:

$$(\forall x)(\forall t_1)(\forall t_2)(x \in E \,\&\, t_1 \in \mathbf{R} \,\&\, t_2 \in \mathbf{R} \Rightarrow f(f(x,t_1),t_2) = f(x,t_1+t_2)).$$

შევნიშნოთ, რომ არსებობს $f(x,t)\ (x \in E, t \in R)$ გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა. მართლაც, ასეთია $f(x,-t)$ გარდაქმნა, რადგან

$$f(f(x,-t),t) = f(x,0) = x.$$

პარამეტრის $t=0$ მნიშვნელობას შეესაბამება ჯგუფის იგივური გარდაქმნა.

განსაზღვრა 9. E სივრცის თავის თავში $\{f(x,t) : x \in E, t \in \mathbf{R}\} = \{f_t : t \in \mathbf{R}\}$ გარდაქმნათა ჯგუფს, რომელიც აკმაყოფილებს 1)–3) თვისებებს, ეწოდება დინამიკური სისტემა, $t \in \mathbf{R}$ პარამეტრს კი დრო. ე.ი. დინამიკური

სისტემები არის (E,ρ) მეტრიკული სივრცის გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფი, რომლებისთვისაც სრულდება 1)–3) თვისებები.

დინამიკური სისტემების შესახებ დაწვრილებითი ინფორმაცია შეიძლება იხილოთ [1], [2], [3], [8], [9], [16], [42]-[45] შრომებში.

დინამიკურ სისტემების განსაზღვრას მივცეთ შემდეგი ინტერპრეტაცია:

ვთქვათ,

$$G=\{f_t : t\in \mathbf{R}\}$$

არის E სივრცის ერთპარამეტრიანი გარდაქმნათა ჯგუფი. E სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ექვივალენტობის დამოკიდებულება შემდეგიპირობით:

$$(\forall x)(\forall y)(x\in E \,\&\, y\in E \Rightarrow (x\sim y \Leftrightarrow y\in G(x)),$$

სადაც $G(x)$--ით აღნიშნულია x წერტილის G -ორბიტა.

აქედან გამომდინარე, დინამიკურ სისტემა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც G ჯგუფთან ასოცირებული ექვივალენტურობის დამოკიდებულება. შემდგომში, როცა დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემის ცნება გაიგივებული იქნება ინვარიანტულ (კვაზიინვარიანტულ) ზომასთან, ჩვენ დავინახავთ, რომ იმ ფაზურ სივრცეებში, რომლებიც კომპაქტურია (ან ლოკალურად კომპაქტურია), G ჯგუფი ფაქტიურად ტრანზიტულია, ე.ი. გვექნება მხოლოდ ერთი ექვივალენტურობის კლასი. ამავე დროს, თუ ლოკალური კომპაქტურობა ფაზური სივრცისათვის დარღვეულია (მაგალითად, უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში), მაშინ აუცილებლად საქმე გვექნება უსასრულო რაოდენობის ექვივალენტურობის კლასებთან.

$f(x,t)$ ფუნქციას ფიქსირებული $t\in\mathbf{R}$ წერტილისთვის ეწოდება მოძრაობა, ხოლო ფიქსირებული $x\in E$ წერტილისთვის $\{f(x,t):t\in\mathbf{R}\}$ სიმრავლეს ეწოდება მოძრაობის ტრაექტორია, ე.ი. ტრაექტორია არის

მოძრაობის *ran* (მნიშვნელობათა არე). იგი აღინიშნება $f(x;-\infty,+\infty)$ სიმბოლოთი.

მოცემული $A\subset E$ სიმრავლის სახე ჯგუფის f_t გარდაქმნისას, რომელიც შეესაბამება $t\in R$ პარამეტრს, აღვნიშნოთ $f(A,t)=f_t(A)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრა 10. მოცემულ $A\subset E$ სიმრავლეს ეწოდება ინვარიანტული $\{f(x,t):x\in E,t\in\mathbf{R}\}$ დინამიკური სისტემის მიმართ, თუ ჯგუფის ნებისმიერი გარდაქმნისას

$$f_t(A)=f(A,t)=A\ (-\infty<t<+\infty).$$

ეს ნიშნავს, რომ თუ წერტილი ეკუთვნის ინვარიანტულ სიმრავლეს, მაშინ ამ სიმრავლეში შედის ყველა ტრაექტორია, განსაზღვრული ამ წერტილით, ე.ი.

$$(\forall x)(x\in A\Rightarrow f(x,t)\subset f(A,t)\subset A).$$

მოვიყვანოთ დინამიკური სისტემების მაგალითები, რომლებიც განსაზღვრული სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში.

მაგალითი 8. ვთქვათ, მოცემულია ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,x_2\cdots,x_n),\ (i=1,2,\cdots,n),$$

სადაც ყოველი $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ ფუნქცია უწყვეტია $D\subset R^n$ ჩაკეტილი არის $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ყველა წერტილში. ვიგულისხმოთ, რომ $t=0$ პარამეტრისათვის შესრულებულია პირობები:

$$x_1=x_1^{(0)},x_2=x_2^{(0)},\cdots,x_n=x_n^{(0)}\ ,$$

ე.ი. $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)$ არის მოძრაობის საწყისი წერტილი.

ვთქვათ, $x_i=f_i\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},t\right)(i=1,2,\cdots,n)$ არის სისტემის ამონახსნი. ცნობილია, რომ ამონახსნი შეიძლება გაგრძელდეს ნებისმიერი $t\in R$ წერტილისათვის და ყოველი

$$x_i=f_i\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},t\right)(i=1,2,\cdots,n)$$

ამონახსნი არის უწყვეტი ფუნქცია t წერტილისა და საწყისი წერტილის კოორდინატების მიმართ. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x,t)=\{f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t):1\le i\le n\}.$$

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ $\{f(x,t):x\in\mathbf{R}^n,t\in\mathbf{R}\}$ არის დინამიკური სისტემა $\mathbf{R}^n$ სივრცეში.

განვიხილოთ დინამიკური სისტემის მოძრაობები, განსაზღვრული ამავე მაგალითში მოცემული დიფერენციალური განტოლებით. ამ შემთხვევაში საწყისი $x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$ მნიშვნელობები, როცა $t=t_0$, განსაზღვრავს მოცემული სისტემის ერთადერთ მოძრაობას

$$x_i=f_i\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)},t-t_0\right)(i=1,2,\cdots,n),$$

სადაც ყოველი f_i უწყვეტი დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ეს მოძრაობა მოკლედ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$x=f(x_0,t)\left(x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}\right)\right).$$

მაგალითი 9. ვთქვათ,

$$(\forall x)(\forall t)(x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}\,\&\,t\in\mathbf{R}\Rightarrow f(x,t)=e^t\cdot x)\ .$$

სადაც *e* ნეპერის რიცხვია.

ცხადია, რომ ყოველი $x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ წერტილისთვის $\{f(x,t):t\in\mathbf{R}\}$ იქნება არაპერიოდული მოძრაობა.

მაგალითი 10. ვთქვათ, C არის კომპლექსურ რიცხვთა ორგანზომილებიანი სივრცე. თუ

$$(\forall z)(\forall t)(z\in C\,\&\,t\in\mathbf{R}\Rightarrow f(z,t)=z\cdot e^{it}),$$

მაშინ $\{f(z,t):z\in C,t\in\mathbf{R}\}$ არის დინამიკური სისტემა, რომლის ყოველი მოძრაობა პერიოდულია.

მაგალითი 11. თუ $(X,\|\cdot\|)$ არის ნებისმიერი უსასრულოგანზომილებიანი ბანახის სივრცე, მაშინ $\{f(x,t):x\in X,t\in\mathbf{R}\}$ სისტემა განსაზღვრული პირობით

$$(\forall x)(\forall t)(x\in X\,\&\,t\in\mathbf{R}\Rightarrow f(x,t)=x+at)\ ,$$

სადაც $a \in X$ და $\|a\| \neq 0$, არის დინამიკური სისტემა, რომლის ყოველი მოძრაობა არის არაპერიოდული.

მაგალითი 12. ვთქვათ, (E, ρ) ნებისმიერი მეტრიკული სივრცეა. თუ

$$(\forall x)(\forall t)(x \in X \ \& \ t \in R \Rightarrow f(x,t) = x),$$

მაშინ $\{f(x,t) : x \in E, t \in R\}$ სისტემა არის დინამიკური და თანაც, ყოველი მოძრაობა ამ სისტემიდან არის იგივური გარდაქმნა.

განსაზღვრა 11. ვთქვათ, $n \geq 1$ ნატურალური რიცხვია. n -ური რიგის ინტეგრალური ინვარიანტი (პუანკარეს აზრით) ეწოდება გამოსახულებას

$$\int\int_D \cdots \int M(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n ,$$

თუ შესრულებულია ტოლობა

$$\int\int_D \cdots \int M(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int\int_{D_t} \cdots \int M(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n ,$$

სადაც $D_t = f(D,t) = f_t(D)$ წარმოადგენს არეს დროის t მომენტში, რომელიც $t=0$ მომენტში იყო $D = D_0$.

მაგალითი 13. (პუანკარე). $\mathbf{R}^3$ სივრცეში განვიხილოთ დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y,z), \ \frac{dy}{dt} = Y(x,y,z), \ \frac{dz}{dt} = Z(x,y,z) \ .$$

მივცეთ მას ისეთი ინტერპრეტაცია, რომ ეს სისტემა განსაზღვრავს სითხის მოძრაობის სიჩქარეს, რომელიც ავსებს სივრცეს. თუ $\rho(x,y,z)$ -ით აღვნიშნავთ სითხის სიმკვრივეს x, y, z წერტილში, მაშინ ინტეგრალი

$$\iiint_D \rho(x,y,z) dxdydz$$

არის სითხის მასა, რომელიც ავსებს D არეს. ბოლო ინტეგრალი არის 3-განზომილებიანი ინტეგრალური ინვარიანტი, რადგან ეს მასა არ იცვლება,

როცა სითხე, რომელიც გადაადგილდება მთელ ტერიტორიაზე t დროს მონაკვეთში, დაიკავებს D_t არეს. როცა სითხე არ იკუმშება, მაშინ

$$\rho(x, y, z) = const$$

და ამ შემთხვევაში ინტეგრალურ ინვარიანტს წარმოადგენს მოცულობა.

მაგალითი 14. აუცილებელი და საკმარისი პირობა, იმისა რომ

$$\frac{dx_i}{dt} = X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა უშვებდეს n-განზომილებიანი ინტეგრალური ინვარიანტის როლში მოცულობას, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0,$$

ე.ი. $\left(X_1, \cdots, X_n\right)$ ვექტორული ველის დივერგენცია უნდა იყოს ნულის ტოლი.

კლასიკური ჰამილტონის სისტემა

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\ (i = 1,2,\cdots,n),$$

სადაც $H(x_1, x_2, \cdots, x_n,\ y_1, y_2, \cdots, y_n)$ არის ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია, ცხადია ეკუთვნის ასეთ სისტემათა კლასს. ამ შემთხვევაში არსებითად გამოიყენება ლიუვილის კლასიკური თეორემა, რომელიც გვეუბნება, რომ დინამიკური სისტემის ყოველი მოძრაობა ინარჩუნებს მოცულობას.

განსაზღვრა 12. ვთქვათ, (E,ρ) მეტრიკულ სივრცეში მოცემულია $\{f_t : t \in \mathbf{R}\}$ დინამიკური სისტემა. E-ზე განსაზღვრულ ბორელის μ ზომას ეწოდება ინვარიანტული $\{f_t : t \in \mathbf{R}\}$ დინამიკური სისტემის მოძრაობების მიმართ, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall A)(A \subset E \,\&\, t \in \mathbf{R} \,\&\, A \in dom(\mu) \Rightarrow \mu(f_t(A)) = \mu(A)).$$

გასაგებია, რომ ინვარიანტული ზომა არის ბუნებრივი განზოგადება ინტეგრალური ინვარიანტისა. ცხადია აგრეთვე, რომ ინვარიანტული ზომა

წარმოადგენს ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ობიექტს დინამიკურ სისტემათა თეორიაში. ამიტომ ბუნებრივად ისმება ამოცანა ასეთი ზომის არსებობის შესახებ ფაზურ სივრცეში.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ დინამიკურ სისტემებს, რომლებისთვისაც არსებობენ შესაბამისი ინვარიანტული ზომები. ამიტომ ხშირად დინამიკური სისტემის ქვეშ გულისხმობენ ინვარიანტულ ზომას მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ. ამ კონტექსტში ბუნებრივია შემდეგი განსაზღვრა.

განსაზღვრა 13. (E, G, S, μ) ოთხეულს, სადაც E ძირითადი ფაზური სივრცეა, G არის სივრცის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფი, S-არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ - კი G-ინვარიანტული ზომაა, ეწოდება აბსტრაქტული დინამიური სისტემა, ანუ როგორც უკვე შესავალში აღვნიშნეთ, სივრცე ინვარიანტული ზომით.

აბსტრაქტული დინამიკური სისტემების შესახებ იხილეთ, [10]-[19], [21], [22], [26]-[28], [46]-[54] შრომებში.

დინამიკური სისტემის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ზომიანი სივრცე არის დინამიკური სისტემა, როგორც ინვარიანტული ზომიანი სივრცის კერძო შემთხვევა (ამ კერძო შემთხვევაში გარდაქმნათა ჯგუფის როლში ავიღოთ მხოლოდ იგივური გარდაქმნა). ინვარიანტული ზომიანი სივრცის განხილვისას არსებითია გარდაქმნათა ჯგუფის გაფართოება. ამ თვალსაზრისით საინტერესოა იმ ფაქტის აღნიშვნა, რომ ნებისმიერ სასრულგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არსებობენ ყველა პარალელური ძვრების π_n ჯგუფის მიმართ ინვარიანტული ზომები და ეს ჯგუფი (რომელიც კანონიკური იზომორფიზმით გაიგივებულია $\mathbf{R}^n$ სივრცესთან) მოქმედებს ტრანზიტულად $\mathbf{R}^n$ სივრცეში. ამიტომ π_n ჯგუფთან ასოცირებული ექვივალენტურობის დამოკიდებულებით (ანუ დინამიკური სისტემით) წარმოქმნილი ინტრანზიტულობის კლასების სიმძლავრე ერთის ტოლია, ე.ი. გვაქვს ერთადერთი კლასი, რომელიც ემთხვევა ძირითად ფაზურ

სივრცეს. უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არსებობენ მხოლოდ ყველგან მკვრივი ქვესივრცეების მიმართ ინვარიანტული ზომები, ამიტომ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ შემთხვევაში ექვივალენტურობის კლასების სიმძლავრე უსასრულოა.

ვთქვათ, $(E,\ G,\ S,\ \mu)$ აბსტრაქტული დინამიკური სისტემაა.

განსაზღვრა 14. ვიტყვით, რომ $(E,\ G,\ S,\ \mu)$ დინამიკურ სისტემას გააჩნია მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება, თუ ნებისმიერი $X \subset E$ სიმრავლისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$X \in S,\ \mu(X) > 0,$$

არსებობს თვლადი ოჯახი $\{g_n : n < \omega\} \subset G$ ისეთი, რომ

$$\mu(E \setminus \bigcup_{n \in N} g_n(X)) = 0.$$

მართებულია შემდეგი დებულება.

განსაზღვრა 15. ვიტყვით, რომ $(E,\ G,\ S,\ \mu)$ დინამიკური სისტემა ფლობს ერთადერთობის თვისებას (ყველა σ-სასრულო დინამიკური სისტემის კლასის მიმართ), თუ S-ზე განსაზღვრული ყოველი დინამიკური სისტემა მოცემული დინამიკური სისტემისაგან განსხვავდება მხოლოდ გარკვეული მუდმივი კოეფიციენტით.

მაგალითი 15. ვთქვათ, მოცემულია $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემა, სადაც G არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ყველა იზომეტრულ გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფი, L_n არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ლებეგის აზრით ზომად ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი, ხოლო λ_n კი ლებეგის სტანდარტული ზომა $\mathbf{R}^n$-ში. მაშინ შემდეგი ორი პირობა ექვივალენტურია:

1) $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემა ფლობს ერთადერთობის თვისებას;

2) ყოველი $x \in \mathbf{R}^n$ წერტილისათვის, $G(x)$ ორბიტა არის არათვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლე $\mathbf{R}^n$-ში.

მაგალითი 15-ის შესახებ იხილეთ, [13], [16].

მაგალითი 16. ვთქვათ, ისევ მოცემულია $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემა, სადაც $G \subset \pi_n$. შემდეგი ორი პირობა ექვივალენტურია:

1′) $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემა ფლობს ერთადერთობის თვისებას;

2′) ჯგუფი G არათვლადი ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფია $\mathbf{R}^n$ სივრცეში.

მაგალითი 16-სთან დაკავშირებით იხილეთ, მაგალითად, [13], [16].

მაგალით 16-თან დაკავშირებით ინტერესს წარმოადგენს შემდეგი მაგალითის განხილვა.

მაგალითი 17. ვთქვათ, b_n –ით აღნიშნულია n-განზომილებიანი ბორელის ზომა $\mathbf{R}^n$-ში და ვთქვათ, $n \geq 2$. $\mathbf{R}^n$ სივრცეში განვიხილოთ ჯგუფი $G = Q \times \mathbf{R}^{n-1}$, სადაც Q არის ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbf{R}$-ში. ცხადია, რომ G ჯგუფი არათვლადი და ყველგან მკვრივია $\mathbf{R}^n$ სივრცეში. ნებისმიერი $X \subset \mathbf{R}^n$ ბორელის სიმრავლისათვის განვსაზღვროთ ფუნქციონალი

$$\nu(X) = \sum_{q \in Q} b_{n-1}\left(X \bigcap \left(\{q\} \times \mathbf{R}^{n-1}\right)\right).$$

ცხადია, რომ ν წარმოადგენს არანულოვან σ-სასრულო G-ინვარიანტულ ბორელის ზომას $\mathbf{R}^n$ – ში.

ადვილია იმის ჩვენება, რომ ν არ შეიძლება განსხვავდებოდეს b_n ზომისაგან მხოლოდ მუდმივი კოეფიციენტით. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\left(\mathbf{R}^n, G, B(\mathbf{R}^n), b_n\right)$ დინამიკური სისტემა არ ფლობს ერთადერთობის თვისებას, რაც იმის მიმანიშნებელია, რომ $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემის სისრულე თამაშობს არსებით როლს მაგალით 16-ში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ G ჯგუფი ემთხვევა $\mathbf{R}^n$ სივრცის ყველა პარალელურ გადატანათა π_n ჯგუფს, მაშინ $\left(\mathbf{R}^n, \pi_n, B(\mathbf{R}^n), b_n\right)$ დინამიკური სისტემა ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

მაგალითი 18. ვთქვათ, მოცემულია $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემა, სადაც $G \subset \pi_n$. მაშინ შემდეგი ორი პირობა ექვივალენტურია:

1″) $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკურ სისტემას გააჩნია მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება;

2″) *G* არის ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფი π_n-ში.

მაგალითი 18-ის შესახებ იხილეთ, მაგალითად, [13], [16].

მაგალითი 19. ვთქვათ, *H* არის ნებისმიერი არათვლადი ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, რომელიც წარმოიდგინება კომპაქტების თვლადი გაერთიანების სახით, და ვთქვათ, $G \subset H$ ნებისმიერი ჯგუფია. ცხადია, რომ *G* ჯგუფი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც *H* ძირითადი ფაზური სიმრავლის გარდაქმნათა რაღაც ჯგუფი. აღვნიშნოთ $\mu' -$თი *H* ტოპოლოგიური ჯგუფის ბორელის σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ჰაარის ზომის გასრულება, ე.ი. მივიღეთ $\left(H, G, \left(B(H)\right)', \mu'\right)$ სრული დინამიკური სისტემა.

შემდეგი ორი პირობა ექვივალენტურია:

ა) $\left(H, G, \left(B(H)\right)', \mu'\right)$ დინამიკური სისტემა ფლობს ერთადერთობის თვისებას;

ბ) ჯგუფი *G* არათვლადი და ყველგან მკვრივია *H*-ში.

მაგალითი 20. განვიხილოთ მაგალითი 19-ში მოყვანილი დინამიკური სისტემა. შემდეგი ორი პირობა ექვივალენტურია:

ა′) $\left(H, G, \left(B(H)\right)', \mu'\right)$ დინამიკურ სისტემას გააჩნია მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება;

ბ′) ჯგუფი G ყველგან მკვრივია H-ში.

მაგალითი 19 და მაგალითი 20-ის დამტკიცება მოცემულია [55] შრომაში.

მოყვანილი ფაქტები საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ დინამიკური სისტემების წმინდა დინამიკური თვისებები, როგორიცაა მეტრიკული ტრანზიტულობისა და ერთადერთობის თვისებები, დახასიათებულია

წმინდა სიმრავლურ-თეორიულ ტერმინებში. უფრო მეტიც, შეგვიძლია მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვიჩვენებს, რომ დინამიკური სისტემის ერთადერთობის თვისების დახასიათება მჭიდროდ უკავშირდება მოცემული გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფის სიმძლავრეს.

მაგალითი 21. აღვჭურვოთ ორელემენტიანი {0, 1} სიმრავლე დისკრეტული ტოპოლოგიით და განვიხილოთ განზოგადებული კანტორის $\{0,1\}^{\alpha}$ დისკონტინუუმი, სადაც α რაიმე უსასრულო კარდინალური რიცხვია. სივრცე $\{0,1\}^{\alpha}$ წარმოადგენს კომპაქტურ ტოპოლოგიურ H ჯგუფს, რომელშიც ჯგუფის ოპერაცია განისაზღვრება როგორც შეკრება *mod*(2)-ით. მაგალითი 20-დან გამომდინარეობს, რომ თუ $\alpha \geq \omega_1$, მაშინ$\left(H, G, (\mathrm{B}(H))', \mu'\right)$ $(G \subset H)$ დინამიკური სისტემის ერთადერთობის თვისების შესრულებისათვის საკმარისია ავიღოთ $\{0,1\}^{\alpha} -$ ში ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფი *G*, რომელიც შედგება ყველა იმ α-კორტეჟებისაგან, რომელთა მხოლოდ სასრულო რაოდენობის წევრები განსხვავდებიან ნულისაგან (ე.ი. ფინიტური α-კორტეჟები). შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ

$$Card(G) = \alpha .$$

ახლა განსაკუთრებით გამოვყოთ ის შემთხვევა, როცა

$$\alpha = 2^{\beta},$$

სადაც β რაიმე უსასრულო კარდინალური რიცხვია.

ამ შემთხვევაში $\{0,1\}^{\alpha}$ სივრცე შეიცავს β სიმძლავრის ყველგან მკვრივ ქვეჯგუფს. თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებს, მაშინ დავასკვნით, რომ როცა $\beta \geq \omega_1$ და *G* არის β სიმძლავრის ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფი $\{0,1\}^{2^{\beta}}-$ში, მაშინ $\left(\{0,1\}^{2^{\beta}}, G, B\left(\{0,1\}^{2^{\beta}}\right)', \mu'\right)$ დინამიკური სისტემა ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი არათვლადი კარდინალური α რიცხვისათვის $\{0,1\}^{\alpha}$ სივრცე არ შეიცავს ყველგან მკვრივ ქვეჯგუფს,

რომლის სიმძლავრე მკაცრად ნაკლებია α-ზე. მაგალითად, თუ α კარდინალური რიცხვი არის დომინანტური, ე.ი. თუ

$$(\forall \xi)(\xi < \alpha \Rightarrow 2^{\xi} < \alpha),$$

მაშინ ნებისმიერი ყველგან მკვრივ ქვეჯგუფს $\{0,1\}^{\alpha}$ სივრციდან გააჩნია α კარდინალურ რიცხვზე მეტი ან ტოლი სიმძლავრე.

მაგალითი 21-ის შესახებ იხილეთ, [16], [56].

2.2. აბსტრაქტული დინამიკური და აბსტრაქტული კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი სხვადასხვა ფაზური სივრცეებისათვის

ახლა განვიხილოთ აბსტრაქტული დინამიკური და აბსტრაქტული კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში.

კლასიკური მაგალითი ინვარიანტული ალბათური ზომის არსებობის შესახებ არაცარიელ კომპაქტურ მეტრიზებად სივრცეში განსაზღვრულ დინამიკური სისტემების მიმართ პირველად დაამტკიცეს ნ. კრილოვმა და ნ. ბოგოლუბოვმა.

თეორემა 11. არსებობს ალბათური (E, G, S, μ) დინამიკური სისტემა, სადაც E არის არაცარიელი კომპაქტური მეტრიკული სივრცე, S ამ სივრცის ბორელის σ-ალგებრა, G არის E სივრცის ჰომეომორფიზმთა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი, ხოლო μ კი ალბათური G-ინვარიანტული ბორელის ზომაა E-ზე.

კრილოვ-ბოგოლუბოვის თეორემის დამტკიცება მოყვანილია [8], [9], [44] შრომებში.

მივიყვანოთ დებულება, რომელიც არის კრილოვ-ბოგოლუბოვის თეორემის არსებითი განზოგადება.

თეორემა 12 (მარკოვი-კაკუტანი). ვთქვათ, *E* არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე *R* ველზე, *V* არის არაცარიელი ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლე *R* -ზე, *U* -კი *E* სიმრავლის თავის თავში წრფივ გარდაქმნათა ისეთი სიმრავლეა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$(\forall u)(\forall v)(u \in U \,\&\, v \in V \Rightarrow u \circ v = v \circ u),$$

$$(\forall u)(u \in U \Rightarrow u(V) \subset V),$$

$(\forall u)(u \in U \Rightarrow u$ ასახვის შევიწროება *V* სიმრავლეზე უწყვეტია).

მაშინ არსებობს $x_0 \in V$ წერტილი ისეთი, რომ

$$(\forall u)(u \in U \Rightarrow u(x_0) = x_0).$$

თეორემა 12-ის დამტკიცება იხილეთ, მაგალითად, [6].

აქვე აღვნიშნოთ, რომ მარკოვ-კაკუტანის თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა *E* სივრცის თავის თავში გარდაქმნათა ჯგუფი წარმოადგენს არაკომუტატიური ჯგუფების ისეთ ფართო კლასს, როგორიცაა ამოხსნადი ჯგუფები. ამ შემთხვევაში დამტკიცება ჩატარდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით კომპოზიციური მწკრივის სიგრძის მიმართ.

დებულებების სახით მოვიყვანოთ კლასიკური დინამიკური სისტემების მაგალითები.

თეორემა 13 (ჰაარი). არსებობს $(H, H, B(H), \mu)$ დინამიკური სისტემა, სადაც *H* არის არაცარიელი ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, $B(H)$ არის *H*-ის ბორელის σ-ალგებრა, ხოლო μ არის ამ ჯგუფის მიმართ მარცხენა-ინვარიანტული ჰაარის ზომა. ეს დინამიკური სისტემა არის σ-სასრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა *H* ჯგუფი არის σ-კომპაქტური.

თეორემა 14 (ა. ლებეგი). არსებობს $(\mathbf{R}^n, G, L_n, \lambda_n)$ დინამიკური სისტემა, სადაც *G* არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ყველა იზომეტრულ გარდაქმნათა ჯგუფის ქვეჯგუფი, L_n არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ლებეგის აზრით ზომად ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი, ხოლო λ_n კი ლებეგის სტანდარტული ზომაა $\mathbf{R}^n$-ში.

განსაზღვრა 16. ვთქვათ, (E, ρ) მეტრიკულ სივრცეში განსაზღვრულია $\{ f_t(x): \ t \in \mathbf{R}\}$ დინამიკური სისტემა. E -ზე განსაზღვრულ ბორელის ν ზომას ეწოდება კვაზიინვარიანტული $\{ f_t(x): \ t \in \mathbf{R}\}$ დინამიკური სისტემის მოძრაობების მიმართ, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall A)(\forall t)(A \in dom(\nu) \,\&\, t \in \mathbf{R} \Rightarrow (\nu(f(A,t) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0)) .$$

ანალოგიურად აბსტრაქტული დინამიკური სისტემისა, აქაც (E, G, S, μ) ოთხეულს ეწოდება აბსტრაქტული კვაზიდინამიკური სისტემა ანუ სივრცე კვაზიინვარიანტული ზომით, თუ E არის ძირითადი ფაზური სივრცე, G არის E სივრცის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფი, S ამ სივრცეში განსაზღვრული σ-ალგებრაა, ხოლო μ კი G-კვაზიინვარიანტული ზომაა E -ზე.

მოვიყვანოთ რამდენიმე დებულება, რომელიც მართებულია ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომებისათვის.

ლემა 4. ვთქვათ, E არის ძირითადი ფაზური სივრცე, G ამ სივრცის რაიმე გარდაქმნათა ჯგუფია, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G-ინვარიანტული ალგებრა, ხოლო μ კი S -ზე განსაზღვრული G -ინვარიანტული ალბათური ზომაა. მაშინ არსებობს (E, G, $\overline{S}$, $\overline{\mu}$) დინამიკური სისტემა, რომელიც წარმოადგენს მოცემული დინამიკური სისტემის გაგრძელებას, სადაც $\overline{S}$ -ით აღნიშნულია S-ით წარმოქმნილი სიმრავლეთა σ-ალგებრა.

ცხადია, რომ ლემა 4 წარმოადგენს კლასიკური კარათეოდორის თეორემის განზოგადებას დინამიკური სისტემებისათვის. შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური შედეგი, საზოგადოდ, არ იქნება მართებული კვაზიდინამიკური სისტემებისათვის.

ლემა 5-ის დამტკიცება მოყვანილია [6] შრომაში.

დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემებისათვის მართებულია შემდეგი წინადადებები.

ლემა 5. ვთქვათ, (E_i, G_i, S_i, μ_i) $(1 \le i \le n)$ არის დინამიკურ სისტემათა სასრული ოჯახი. მაშინ ოთხეული $\left(\prod_{1\le i\le n} E_i, \prod_{1\le i\le n} G_i, \prod_{1\le i\le n} S_i, \prod_{1\le i\le n} \mu_i \right)$ აგრეთვე არის დინამიკურ სისტემას.

ლემა 6. ვთქვათ, (E_i, G_i, S_i, μ_i) $(i \in N)$ არის ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემათა თვლადი ოჯახი. მაშინ $\left(\prod_{i\in N} E_i, \prod_{i\in N} G_i, \prod_{i\in N} S_i \prod_{i\in N} \mu_i\right)$ ოთხეული არის კვაზიდინამიკური სისტემა.

ლემა 5 და ლემა 6-ის დამტკიცებები მოცემულია [18], [26] შრომებში.

ნ. კრილოვისა და ნ. ბოგოლუბოვის თეორემა იძლევა პასუხს არაცარიელ კომპაქტურ მეტრიკულ სივრცეებში ალბათური დინამიკური სისტემის არსებობის შესახებ, სადაც გარდაქმნათა ჯგუფი არის ამ სივრცეში მოცემული მოძრაობები. ცნობილია, აგრეთვე, დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობა (შესაბამისი გარდაქმნათა ჯგუფების მიმართ) სასრულგანზომილებიან სივრცეებში. ამ თვალსაზრისით საინტერესოა და მნიშვნელოვანია ანალოგიური საკითხის გამოკვლევა უსასრულოგანზომილებიან სივრცეებში. როგორც უკვე მრავალჯერ აღვნიშნეთ, უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არ არსებობს ლებეგის კლასიკური ზომის ანალოგი, ანუ σ-სასრულო ბორელის ზომები, რომლებიც ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) იქნებიან სივრცის ყველა შესაძლო პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ. ამიტომ დაისვა დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების არსებობის საკითხი უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში, სადაც გარდაქმნათა ჯგუფებს წარმოადგენენ ამ სივრცის რაიმე პარალელურ გადატანათა ყველგან მკვრივი ქვესივრცეები.

ამ თვალსაზრისით მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 22. ვთქვათ, I ინდექსთა ნებისმიერი სიმრავლეა. ყოველი $i \in I$ ინდექსისთვის T_i სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი წრეწირი $\mathbf{R}^2$ -ში, ხოლო l_i -ით აღვნიშნოთ წრფე $\mathbf{R}^2$-ში, რომელიც გადის (0; -1) წერტილში და ეხება T_i წრეწირს ყოველი $i \in I$ ინდექსისთვის. f_i-ით აღვნიშნოთ ინვერსია ცენტრით (0,1) წერტილში, რომელსაც $T_i \setminus \{(0,1)\}$ სიმრავლე გადაჰყავს l_i წრფეში. თუ h ნებისმიერი პარალელური გადატანაა

l_i წრფისა, მაშინ $f_i^{-1} \circ h \circ f_i$ არის ჰომეომორფიზმი $T_i \setminus \{(0,1)\}$ სიმრავლისა თავის თავზე. ეს ჰომეომორფიზმი ცალსახად შეიძლება გაგრძელდეს ერთეულოვანი T_i წრეწირის ჰომეომორფიზმამდე. თუ G_i არის T_i წრეწირის ყველა ასეთი ჰომეომორფიზმების ჯგუფი, მაშინ ჰაარის ზომა $\prod_{i \in I} T_i$ ნამრავლზე წარმოადგენს კვაზიინვარიანტულ ზომას $\{G_i : i \in I\}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ჯამის მიმართ.

მაგალითი 23. ვთქვათ, I ინდექსთა ნებისმიერი სიმრავლეა და

$$(\forall i)(i \in I \Rightarrow \mathbf{R}_i = \mathbf{R}),$$

$$(\forall_i)(i \in I \Rightarrow T_i \text{ არის ერთეულოვანი წრეწირი } \mathbf{R}^2 - \text{ში}).$$

მაშინ არსებობს $\left(\prod_{i \in I} T_i, \sum_{i \in I} T_i, B\left(\prod_{i \in I} T_i \right), \bar{\mu} \right)$ კვაზიდინამიკური სისტემა.

დაწვრილებითი ინფორმაცია მაგალით 22 და მაგალით 23-ის შესახებ იხილეთ, [57], [58], [59] შრომებში.

შევნიშნოთ, რომ თუ Γ მეტრიზებადი ტოპოლოგიური ჯგუფია, რომლის ტოპოლოგიური წონა არაზომადია ფართო აზრით და თუ Γ ჯგუფის ბორელის σ-ალგებრაზე განსაზღვრულია ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, სადაც გარდაქმნათა ჯგუფი წარმოადგენს Γ-ს ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფს, მაშინ Γ ჯგუფი აუცილებლად იქნება სეპარაბელური. მეორეს მხრივ, მაგალითი 23 გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი კარდინალური α რიცხვისათვის არსებობს სრული არალოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი G ისეთი, რომ

$$Card(G) \geq \alpha ,$$

და რომლის ბორელის σ-ალგებრაზე შეიძლება განისაზღვროს ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, სადაც გარდაქმნათა ჯგუფი იქნება G ჯგუფის ყველგან მკვრივი რაიმე ქვეჯგუფი. კერძოდ, თუ

$$\alpha > 2^{\mathfrak{c}},$$

მაშინ G ჯგუფი არ არის სეპარაბელური.

ახლა ვთქვათ, α ნებისმიერი არათვლადი სიმრავლეა. $\mathbf{R}^{\alpha}$-ით აღვნიშნოთ ყველა ფუნქციების სივრცე, რომლის განსაზღვრის არეა α და მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\mathbf{R}$, ხოლო $B(\mathbf{R}^{\alpha})$-ით კი აღვნიშნოთ $\mathbf{R}^{\alpha}$ სივრცის ბორელის σ-ალგებრა.

მაგალითი 24. ვთქვათ, α ინდექსთა სიმრავლისათვის შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$Card(\alpha) > \omega .$$

მაშინ არ არსებობს $(\mathbf{R}^{\alpha}, \mathbf{R}^{(\alpha)}, \mathrm{B}(\mathbf{R}^{\alpha}), \mu)$ ალბათური რადონის კვაზიდინამიკური სისტემა, სადაც $\mathbf{R}^{(\alpha)}$ – ით აღნიშნულია α სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველაშესაძლო ფინიტური ფუნქციების სივრცე, ე.ი.

$$\mathbf{R}^{(\alpha)} = \left\{ x_t : t \in \alpha, \&(\forall t)(t \in \alpha \Rightarrow x_t \in \mathbf{R}^{\alpha}) \,\&\, Card\left(\{t : x_t \neq 0\}\right) < \omega \right\}.$$

მაგალითი 25. ვთქვათ, α ინდექსთა არათვლადი სიმრავლეა. მაგალით 23-ში მოყვანილი ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა არის რეგულარული. მეორეს მხრივ, იგივე ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, რომლის გარდაქმნათა ჯგუფია $R^{(\alpha)}$ ვექტორული სივრცე, მაგალითი 24-ის თანახმად, არ შეიძლება იყოს რადონის.

მაგალითი 26. ვთქვათ, α პარამეტრთა ნებისმიერი სიმრავლეა ისეთი, რომ

$$Card(\alpha) > \boldsymbol{c}.$$

მაშინ არ არსებობს $(\mathbf{R}^{\alpha}, G, \mathrm{B}(\mathbf{R}^{\alpha}), \mu)$ ალბათური კვაზიდინამიკური სისტემა, სადაც G არის $\mathbf{R}^{\alpha}$ სივრცის რომელიღაც ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცე.

მაგალითი 27. არ არსებობს არანულოვანი $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \mathrm{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \mu\right)$ კვაზიდინამიკური სისტემა.

იმ შემთხვევაში, როცა $Card(\alpha) = \omega$, არანულოვანი $\left(\mathbf{R}^{\alpha}, \mathbf{R}^{(\alpha)}, B(\mathbf{R}^{\alpha}), \chi\right)$ (ანუ, $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \chi\right)$) დინამიკური სისტემის არსებობის დამტკიცება ეკუთვნის ა. ხარაზიშვილს (იხილეთ, [22]).

$\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \chi\right)$ დინამიკური სისტემა არსებით როლს თამაშობს შემდგომ მსჯელობებში, ამიტომ ჩვენ მოვიყვანთ ამ დინამიკური სისტემის კონსტრუქციას.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_n = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_1 \times \cdots \times \mathbf{R}_n \times \prod_{i>n} \Delta_i \ (n \in \mathbf{N}),$$

სადაც

$$(\forall i)(i \in \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{R}_i = \mathbf{R}),$$

$$(\forall i)\left(i \in N \Rightarrow \Delta_i = \left[0, \frac{1}{i+1}\right)\right).$$

ყოველი $\mathbf{R}_i$ $(i \in \mathbf{N})$ სივრცე აღვჭურვოთ ინვარიანტული ლებეგის ზომით, ნორმირებული $\mu_i(\Delta_i) = 1$პირობით, ხოლო ყოველი Δ_i $(i \in \mathbf{N})$ სივრცე აღვჭურვოთ ლებეგის λ_i ზომით, ნორმირებული $\lambda_i(\Delta_i) = 1$ პირობით.

ყოველი ნატურალური $i \in \mathbf{N}$ -სთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\chi_n = \prod_{i \le n} \mu_i \times \prod_{i>n} \lambda_i$$

და $\overline{\chi}_n$ -ით აღვნიშნოთ ბორელის ზომა $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში, განსაზღვრული ტოლობით

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) \Rightarrow \overline{\chi}_n(X) = \chi_n\left(X \cap A_n\right)).$$

მტკიცდება, რომ $\{\overline{\chi}_n : n \in \mathbf{N}\}$ ზომათა ოჯახისათვის არსებობს ინდუქციური ზღვარი,

$$\lim_{n \to \infty} \overline{\chi}_n(X) = \chi(X),$$

თანაც χ ფუნქციონალი წარმოადგენს არანულოვან σ -სასრულო ზომას, რომელიც განსაზღვრულია $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცის ბორელის σ -ალგებრაზე.

მართლაც, რადგან ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $A_n \subset A_{n+1}$, ამიტომ χ_{n+1} ზომის ადიტიურობის გამო გვექნება

$$\overline{\chi}_{n+1}(x) = \chi_{n+1}(X \cap A_{n+1}) = \chi_{n+1}\left(X \cap \left[A_{n+1} \setminus A_n \cup A_n\right]\right) =$$
$$= \chi_{n+1}\left[X \cap \left(A_{n+1} \setminus A_n\right)\right] + X_{n+1}\left(X \cap A_n\right).$$

შევნიშნოთ, რომ χ_{n+1} ზომის შევიწროება A_n სიმრავლეზე ემთხვევა χ_n ზომას. $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ ჩართვის გამო გვაქვს

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) \Rightarrow \chi_n\left(A_n \bigcap X\right) \le \chi_{n+1}\left(A_{n+1} \bigcap X\right)).$$

აქედან კი გამომდინარეობს ზღვრის არსებობა

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\chi}_n(X) = \chi(X).$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ზღვარს გააჩნია ზომის ყველა თვისება.

1) χ თვლადად ადიტიურია.

ვთქვათ, $X = \bigcup_{k\in N} X_k$, სადაც

$$(\forall k)(\forall n)(k \in N \;\&\; n \in \mathbf{N} \;\&\; k \ne n \Rightarrow X_k \bigcap X_n = \varnothing).$$

$$(\forall k)(k \in \mathbf{N} \Rightarrow X_k \in dom(\chi)).$$

ერთის მხრივ, გვაქვს

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \overline{\chi}_n(X) = \lim_{n\to\infty} \overline{\chi}_n\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbf{N}} \overline{\chi}_n(X_k) \le \sum_{k\in\mathbf{N}} \lim_{n\to\infty} \overline{\chi}_n(X_k) = \sum_{k\in\mathbf{N}} \chi(X_k)$$

ხოლო, მეორე მხრივ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbf{N}} \overline{\chi}_n(X_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1} \overline{\chi}_n(X_k)\right) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} \overline{\chi}_n(X_k) = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \overline{\chi}_n(X_k) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k>n} \overline{\chi}_n(X_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \overline{\chi}_n(X_k) + \lim_{k\to\infty} \sum_{k\in\mathbf{N}} \overline{\chi}_n(X_k),$$

ე.ი.

$$\chi\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k\right) \ge \sum_{k=1}^{m} \chi(X_k),$$

და, შესაბამისად,

$$\chi\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k\right) \ge \sum_{k\in\mathbf{N}} \chi(X_k).$$

საბოლოოდ კი მივიღებთ, რომ

$$\chi\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k\right)=\sum_{k\in\mathbf{N}}\chi(X_k).$$

ამით χ ზომის თვლადად ადიტიურობა დამტკიცებულია.

1) ზომა არანულოვანია, რადგან

$$\chi\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\Delta_i\right)=1.$$

2) χ ზომა σ-სასრულოა.

მართლაც, შევნიშნოთ, რომ

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}=\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right).$$

რადგან

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\in\mathrm{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}),$$

ამიტომ χ ზომის განსაზღვრის თანახმად, გვექნება

$$\overline{\chi}_n\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right)=\chi_n\left\{\left[\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\setminus\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right]\cap A_n\right\}=\chi_n(\varnothing)=0.$$

რადგან ყოველი $n\in\mathbf{N}$ ინდექსისთვის $\overline{\chi}_n$ არის σ-სასრულო, ამიტომ არსებობს $\left\{B_k^{(n)}:k\in M\right\}$ ზომად სიმრავლეთა ოჯახი ისეთი, რომ

$$(\forall k)(k\in\mathbf{N}\Rightarrow\overline{\chi}_n(B_k^{(n)})<+\infty);$$

$$(\forall k)(k\in\mathbf{N}\Rightarrow A_n=\bigcup_{k\in N}B_k^{(n)}).$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა ოჯახი

$$\left\{B_k^{(n)}:k\in\mathbf{N},n\in\mathbf{N}\right\}.$$

ცხადია, რომ

$$(\forall k)(\forall n)(k\in\mathbf{N}\,\&\,n\in\mathbf{N}\Rightarrow\chi\left(B_k^{(n)}\right)=\chi\left(B_k^{(n)}\cap A_n\right)=\overline{\chi}\left(B_k^{(n)}\right)<+\infty\Big).$$

მეორე მხრივ, გვაქვს

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}}A_k=\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}}B_k^{(n)}\right).$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \setminus \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}} B_k^{(n)}\right)\right),$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ χ ზომა σ-სასრულოა.

მაგალითი 28. არსებობს $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \chi\right)$ დინამიკური სისტემა, სადაც $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ არის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცის ვექტორული ქვესივრცე, რომელიც შედგება ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო ფინიტური მიმდევრობებისგან. ე.ი.

$$\mathbf{R}^{(\mathbf{N})} = \left\{x : x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\&\, Card\left\{i : i \in \mathbf{N} \,\&\, x_i \neq 0\right\} < \omega\right\}.$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ მოცემული დინამიკური სისტემის შევიწროება l_2 ჰილბერტის სივრცეზე აგრეთვე წარმოქმნის $\left(l_2, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(l_2), \chi\right)$ დინამიკურ სისტემას.

მართლაც, შევნიშნოთ, რომ სიმრავლე

$$l_2 = \left\{x : x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,\&\, \sum_{i\in\mathbf{N}} x_i^2 < +\infty\right\}$$

წარმოადგენს $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეს, ე.ი. $B(l_2) = l_2 \bigcap B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$.

ვთქვათ, $X \in B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ და $g \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$. ცხადია, რომ g ელემენტი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$g = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0,0,0,\cdots).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(\forall m)(m \geq n \Rightarrow \overline{\chi}_n(g(X)) = \overline{\chi}_m(X)).$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ

$$\chi(g(X)) = \chi(X),$$

რაც ნიშნავს χ ზომის $R^{(N)}$ -ინვარიანტულობას. რადგან

$$\prod_{i\in\mathbf{N}} \Delta_i \subset l_2 \quad \text{და} \quad \chi\left(\prod_{i\in\mathbf{N}} \Delta_i\right) = 1,$$

ამიტომ χ შევიწროება $l_2 -$ ზე არანულოვანი ზომაა.

ვინაიდან

$$\left(\forall g\right)\left(g \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \Rightarrow g(l_2) = l_2\right),$$

ამიტომ l_2 სიმრავლე წარმოადგენს $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ -ინვარიანტულ სიმრავლეს.

ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ სივრცე ყველგან მკვრივია $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში.

ვთქვათ, U ნებისმიერი ღია სიმრავლეა $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში. არსებობს სასრული ოჯახი $\mathbf{R}$-ის ღია სიმრავლეებისა $\{U_k : 1 \le k \le n\}$ ისეთი, რომ

$$U \supset \left(\prod_{1 \le k \le n} U_k\right) \times \left(\prod_{i > n} \mathbf{R}_i\right).$$

ვთქვათ, $x_k \; (1 \le k \le n)$ არის ნებისმიერი წერტილი $U_k \; (1 \le k \le n)$ სიმრავლიდან. მაშინ $R^{(N)}$ სივრცის

$$g = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$$

ელემენტი აგრეთვე ეკუთვნის U სიმრავლეს.

$\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, B(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}), \chi\right)$ დინამიკური სისტემას და მისი აგების კონსტრუქციას გამოვიყენებთ შემდეგ თავებშიც, სადაც გამოვიკვლევთ დინამიკური სისტემების არსებობის საკითხებს და სხვადასხვა თვისებებს.

მაგალით 28-ში მოყვანილი დინამიკური სისტემის შესახებ და მისი გამოყენებები იხილეთ, [13]-[18], [22], [60]-[74].

2.3. პოლონური სივრცეები და დინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი

ვთქვათ, G არის ნებისმიერი პოლონური ტოპოლოგიური ჯგუფი. ცნობილია, რომ თუ G არის ლოკალურად კომპაქტური, მაშინ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო ჰაარის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

დავუშვათ, რომ G არ არის ლოკალურად კომპაქტური. მაშინ ბუნებრივად დაისმის ანალოგიური საკითხი იმის შესახებ, არსებობს თუ არა σ-სასრულო ბორელის ზომა G-ზე, რომელიც ინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

ცნობილია რომ ამ შეკითხვაზე პასუხი უარყოფითია.

ასევე ბუნებრივად დაისმის საკითხი იმის შესახებ, არსებობს თუ არა σ-სასრულო ბორელის ზომა G-ზე, რომელიც კვაზიინვარიანტულია G-ს ყველა მარცხენა (მარჯვენა) გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ.

ამ ამოცანაზე პასუხი უარყოფითია.

თეორემა 15. ვთქვათ, G არის პოლონური ტოპოლოგიური ჯგუფი და H არის არა σ-კომპაქტური ქვეჯგუფი G-ში. მაშინ არ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო მარცხენა (მარჯვენა) H-კვაზიინვარიანტული ბორელის ზომა G-ში.

კერძოდ, თუ G არის არალოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ არ არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო მარცხენა (მარჯვენა) G-კვაზიინვარიანტული ბორელის ზომა G-ში.

თეორემა 15-თად დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებში არსებობენ არანულოვანი მარცხენა (მარჯვენა) ინვარიანტული ზომები.

ამ შემთხვევაშიც ბუნებრივად დაისვა საკითხი დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობის საკითხი არა ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფების შემთხვევაში, როცა გარდაქმნათა ჯგუფი წარმოადგენს ყველგან მკვრივ ქვესივრცეს. ამ ამოცანაზე პასუხი ეკუთვნის გ. ფანცულაიას. მოვიყვანოთ ამოცანის ამოხსნის სქემა. აქვე გვინდა შევნიშნოთ, რომ ზემოთ დასმული ამოცანა ამოხსნილია პირდაპირი ნამრავლების მეთოდით, რომელზეც შემდგომში გვექნება საუბარი.

ლემა 7. ვთქვათ, $n \geq 3$. მაშინ ყველა n რიგის საკუთრივი ნამდვილი ორთოგონალური მატრიცთა სიმრავლე ქმნის O_n არაკომუტატიურ ჯგუფს მატრიცთა გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

ვთქვათ, $\left(\mathbf{R}_{i,}B(\mathbf{R}_i),\mu_i\right)$ $(i\in\mathbf{N})$ არის ალბათური კვაზიდინამიკურ სისტემათა თვლადი ოჯახი, სადაც

ა) ნებისმიერი $i\in\mathbf{N}$ -სათვის $\mathbf{R}_i$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძია;

ბ) $B(\mathbf{R}_i)$ ბორელის σ -ალგებრაა $\mathbf{R}_i$ -ზე;

გ) μ_i არის $\mathbf{R}_i$ -კვაზიინვარიანტული ალბათური ბორელის ზომა.

დავუშვათ, რომ λ ჰაარის ზომაა არაკომუტატიურ კომპაქტურ (მით უფრო, ლოკალურად კომპაქტურ) ტოპოლოგიურ O_n ჯგუფში. განვიხილოთ ზომათა ნამრავლი

$$\nu=\prod_{i\in\mathbf{N}}\mu_i\times\lambda.$$

ცხადია, რომ ν ზომა განსაზღვრულია ბორელის σ -ალგებრაზე $\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_i\right)\times O_n$ სივრცეში და კვაზიინვარიანტულია $\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_i\right)\times O_n$ ჯგუფის მიმართ, რომელიც ყველგან მკვრივია $\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_i\right)\times O_n$ სივრცეში.

შევნიშნოთ, რომ $\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_i\right)\times O_n$ ჯგუფი წარმოადგენს არაკომუტატიურ არალოკალურად კომპაქტურ უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ჯგუფს.

ლემა 8. არსებობს ალბათური კვაზიდინამიკური $\left(\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_i\right)\times O_n,\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\mathbf{R}_i\right)\times O_n,\nu\right)$ სისტემა.

ახლა განვიხილოთ ორი დინამიკური სისტემა:

$$\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}},\mathbf{R}^{(\mathbf{N})},B\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right),\chi\right),\quad \left(O_n,O_n,B(O_n),\mu\right)\quad (n\geq 3).$$

განვიხილოთ ამ დინამიკურ სისტემათა ნამრავლი. ცხადია, რომ $\chi\times\mu$ ზომათა ნამრავლი ინვარიანტულია ბმული ყველგან მკვრივი $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\times O_n$ ჯგუფის მიმართ. მეორეს მხრივ, $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}\times O_n$ არის არაკომუტატიური არალოკალურად კომპაქტური უსასრულოგანზომილებიანი ტოპოლოგიური ჯგუფი.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თეორემა 16. არაკომუტატიური არალოკალურად კომპაქტური უსასრულო-განზომილებიანი ტოპოლოგიური ჯგუფისათვის არსებობს

$$\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times O_n, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \times O_n, B\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times O_n\right), \chi \times \mu\right)$$

კვაზიდინამიკური სისტემა.

შესაბამისად, თუ განვიხილავთ χ ზომის შევიწროებას l_2 სივრცეზე აღვნიშნავთ მას $\overline{\chi}$, მაშინ მივიღებთ შემდეგი თეორემის მართებულობას.

თეორემა 17. არსებობს

$$\left(l_2 \times O_n, \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \times O_n, B\left(l_2 \times O_n\right), \overline{\chi} \times \mu\right)$$

კვაზიდინამიკური სისტემა.

ახლა მივიყვანოთ რამდენიმე დამხმარე დებულება, რომელიც დაგვჭირდება შემდეგი მასალის გადმოცემისათვის.

მართებულია შემდეგი თეორემა

მართებულია შემდეგი დებულებები.

ვთქვათ, $\left\{\mu_i : i \in I\right\}$ არის ალბათურ ზომათა ისეთი ოჯახი, რომ ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის μ_i ზომა განსაზღვრულია $\mathbf{R}$-ის ბორელის σ-ალგებრაზე და არის $\mathbf{R}$-კვაზიინვარიანტული. დავუშვათ, რომ

$$\mathbf{R}^{(I)} = \left\{g \in \mathbf{R}^I : card\left\{i \in I : g_i \neq e_i\right\} < \omega\right\}.$$

ცხადია, რომ $\mathbf{R}^{(I)}$ არის ყველგან მკვრივი ქვესივრცე $\mathbf{R}^I$-ში. თუ გავითვალისწინებთ თეორემას კვაზიინვარიანტული დინამიკური სისტემათა ნამრავლის შესახებ , მაშინ კვაზიინვარიანტული ზომათა

$$\mu = \prod_{i \in N} \mu_i$$

ნამრავლი განსაზღვრულია $B\left(\mathbf{R}^I\right)$-ს ბორელის σ-ალგებრაზე არის კვაზიინვარიანტული.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $card(I) \le \omega$, მაშინ μ არის ბორელის ალბათური ზომა $\mathbf{R}^I$ სივრცეში და $\mathbf{R}^{(I)}$-კვაზიინვარიანტულია.

მაგალითი 29. ვთქვათ, G არის ადიტიური $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ჯგუფის ისეთი ქვეჯგუფი, რომ

$$G \setminus \mathbf{R}^{(\mathbf{N})} \neq \varnothing.$$

მაშინ არსებობს ალბათურ ზომათა $\{\mu_n : n \in \mathbf{N}\}$ ოჯახი, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) ყოველი $n \in \mathbf{N}$ რიცხვისათვის μ_n ზომა განსაზღვრულია $\mathbf{R}$-ის ბორელის σ-ალგებრაზე და კვაზიინვარიანტულია $\mathbf{R}$-ის ყველა გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ;

ბ) ზომათა $\{\mu_n : n \in \mathbf{N}\}$ ოჯახის ნამრავლი $\mu = \prod_{n \in \mathbf{N}} \mu_n$ არ არის კვაზიინვარიანტული G-ს მიმართ.

უსასრულოგანზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში ისეთი ბორელის ალბათური ზომათა კლასი, რომლებიც კვაზიინვარიანტულები არიან ყველგან მკვრივი ვექტორული $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ ქვესივრცის მიმართ, საკმაოდ მდიდარია (სიმძლავრის თვალსაზრისით).

მოყვანილი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ არის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ს უდიდესი ვექტორული ქვესივრცე, რომელსაც გააჩნია მაგალითში მოყვანილი თვისებები.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში განსაზღვრულია ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია ამ სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ, შესაძლებელია ანალოგიური ზომა აიგოს სხვა უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში. კერძოდ, ბუნებრივად დაისმება შემდეგი ამოცანა:

ყოველი სეპარაბელური ბანახის სივრცისათვის არსებობს თუ არა ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტული იქნება ამ სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

ამ შეკითხვაზე პასუხი არის დადებითი.

ამ შეკითხვის პასუხისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ლემა.

ლემა 9. ვთქვათ, E არის ნებისმიერი სეპარაბელური ბანახის სივრცე. მაშინ არსებობს უწყვეტი წრფივი სიურექცია

$$\varphi : l_1 \to E \ ,$$

სადაც l_1-ით აღნიშნულია კლასიკური ბანახის სივრცე, რომელიც შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა ყველა ისეთ $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ მიმდევრობებს, რომ

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < \infty.$$

ლემა 9-ის დამტკიცება იხილეთ, [13]-ში.

მაგალითი 30. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, l_1 არის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ის ქვესივრცე. უფრო მეტიც l_1 არის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ს ბორელის ქვესიმრავლე. ამ შემთხვევაში არსებობს ალბათურ ზომათა $\{\mu_n : n \in \mathbf{N}\}$ ოჯახი, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) ყოველი $n \in \mathbf{N}$ რიცხვისათვის μ_n ზომა განსაზღვრულია $\mathbf{R}$-ის ბორელის σ-ალგებრაზე და კვაზიინვარიანტულია $\mathbf{R}$-ის ყველა გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ;

ბ) ზომათა $\{\mu_n : n \in \mathbf{N}\}$ ოჯახის ნამრავლი $\mu = \prod_{n \in \mathbf{N}} \mu_n$ ზომისათვის სრულდება პირობა

$$\mu(l_1) > 0.$$

აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ l_1 სივრცეში არსებობს ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია l_1-ის ყველგან მკვრივი $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ ქვესივრცის მიმართ.

მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 18. ვთქვათ, E არის ნებისმიერი სეპარაბელური ბანახის სივრცე. მაშინ E სივრცეში არსებობს ბორელის ალბათური ზომა, რომელიც კვაზიინვარიანტულია E-ს ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

დამტკიცება. წინა მაგალითიდან გამომდინარეობს, რომ l_1 სივრცეში არსებობს ბორელის ალბათური ზომა ν, რომელიც კვაზიინვარიანტულია

l_1-ის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. ლემა 9-დან გამომდინარეობს , რომ არსებობს წრფივი უწყვეტი სიურექცია

$$\varphi : l_1 \to E \ .$$

დავუშვათ, რომ

$$\mu(X) = \nu\left(\varphi^{-1}(X)\right) \quad \left(X \in B(E)\right).$$

ცხადია, რომ μ არის ალბათური ზომა E-ზე. თუ ν კვაზიინვარიანტულია l_1-ის ყველგან მკვრივი U ქვესივრცის მიმართ, მაშინ μ ზომა კვაზიინვარიანტული იქნება $V = \varphi(U)$ ქვესივრცის მიმართ. თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ φ არის უწყვეტი სიურექცია, მივიღებთ რომ V არის ყველგან მკვრივი E სივრცეში.

ამით თეორემა 18 დამტკიცებულია.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 19. არსებობს არანულოვანი $\left(X, G, B(X), \mu\right)$დინამიკური სისტემა, სადაც X არის უსასრულოგანზომილებიანი პოლონური წრფივი სივრცე, G არის X-ის მკვრივი წრფივი ქვესივრცე, $B(X)$ წარმოადგენს ბორელის σ-ალგებრას, ხოლო μ კი G-ინვარიანტული არანულოვანი σ-სასრულო ზომაა X -ზე.

თეორემა 19-ის დასამტკიცებლად ვსარგებლობთ წინა პარაგრაფებში აგებულ $\left(l_2, R^{(N)}, B(l_2), \chi\right)$ დინამიკური სისტემით და თეორემა 9-ით. თუ გამოვიყენებთ თეორემა 10-ში მოყვანილ T ოპერატორს, მაშინ μ ზომა X-ზე განვსაზღვროთ შემდეგი პირობით

$$\mu(A) = \chi\left(T^{-1}\left(T(l_2) \cap A\right)\right), \quad \left(A \in \mathrm{B}(X)\right).$$

χ ზომის თვისებებიდან გამომდინარეობს μ ზომის თვისებები.

თეორემა 19-ის დაწვრილებითი დამტკიცების სქემა მოყვანილია წინა თავში, ამიტომ აქ ჩვენს მას არ მოვიყვანთ.

ვთქვათ, (E, Γ, S, μ) არის ზომიანი სივრცე.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, თუ E არის უსასრულოგანზომილებიანი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე, მაშინ არ არსებობს E-ზე განსაზღვრული არაგადაგვარებული σ-სასრული ბორელის ზომა, რომელიც არის კვაზიინვარიანტული E სივრცის ყველა ძვრით წარმოქმნილი ჯგუფის მიმართ. ამის გამო ბუნებრივად ისმის კითხვა, თუ რამდენად შესაძლებელია ყველა ძვრით წარმოქმნილი ჯგუფის მიმართ კვაზიინვარიანტული თვისებების შესუსტება. კერძოდ, შეიძლება დაისვას ამოცანა E სივრცეზე ისეთი არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომის არსებობის შესახებ, რომელიც კვაზიინვარიანტული იქნება ყველა ძვრით წარმოქმნილი ჯგუფის მდიდარი ქვეჯგუფის მიმართ. მდიდარი ქვეჯგუფის ქვეშ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, მაგალითად, ისეთი Γ ქვეჯგუფი რომელიც არის ყველგან მკვრივი E სივრცეში. ამ მიმართულებით, თავის დროზე დაისვა შემდეგი ამოცანები.

ამოცანა 1. დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე E რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: E სივრცეზე არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის კვაზიინვარიანტული E სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

ამოცანა 2. დავახასიათოთ (წმინდა ალგებრულ და ტოპოლოგიურ ტერმინებში) ყველა ისეთი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე E რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას: E სივრცეზე არსებობს ერთი მაინც არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის ინვარიანტული E სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

შემდეგი მაგალითი ახდენს იმის დემონსტრირებას, რომ პასუხი 1 და 2 ამოცანებზე შეიძლება იყოს განსხვავებული ძვრების მიმართ ინვარიანტული σ-ალგებრით აღჭურვილი ვექტორული E სივრცისათვის.

მაგალითი 31. ვთქვათ α არის პარამეტრთა სიმრავლე, რომლის სიმძლავრე მეტია პირველი არათვლადი კარდინალური ω_1 რიცხვის სიმძლავრეზე. განვიხილოთ α სიმძლავრეზე განსაზღვრულ

ნამდვილმნიშვნელობიან ფუნქციათა ვექტორული სივრცე R^{α} აღჭურვილი ბერის σ-ალგებრით. $R^{(\alpha)}$-თი ავღნიშნოთ R^{α} სივრცის ყველა ფინიტური $\alpha -$ მიმდევრობების ქვესივრცე. ცხადია, რომ $R^{(\alpha)}$ არის ყველგან მკვრივი R^{α} სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ არსებობს R^{α} სივრცეზე განსაზღვრული ბერის ალბათური $R^{(\alpha)}$ - კვაზიინვარიანტული ბერის ალბათური ზომა μ. ასეთი ზომის მაგალითს წარმოადგენს R ღერძზე განსაზღვრული უწყვეტი ალბათური ბორელის ზომების $(\mu_i)_{i\epsilon\alpha}$ ოჯახის ნამრავლი. ვაჩვენოთ, რომ R^{α} სივრცეზე შეუძლებელია არაგადაგვარებული σ-სასრული $R^{(\alpha)}$-ინვარიანტული ბერის ზომის განსაზღვრა. დავუშვათ საწინააღმდეგო და λ იყოს სივრცეზე განსაზღვრული არაგადაგვარებული σ-სასრული $R^{(\alpha)}$-ინვარიანტული ბერის ზომა. მაშინ, λ-ზომის σ-სასრულობის გამო იარსებებს ბერის სიმრავლეთა$(F_k)_{K\epsilon N}$ოჯახი, ისეთი რომ $\lambda(F_K)< \infty$ როცა k $\in N$ და $R^{\alpha} = U_{k\in N}F_k$. λ ზომის არაგადაგვარებულობის გამო იარსებებს ისეთი $K_0 \in N$ რომ $0< \lambda$ (F_{K_0}) $< \infty$. იმის გამო, რომ F_{k_0} არის ბერის სიმრავლე, ამიტომ იარსებებს თვლადი ქვესიმრავლე $I \subseteq \alpha$ და ისეთი ბორელის სიმრავლე $X \in B(R^I)$ რომ შესრულდება ტოლობა

$$F_{k_0} = \left\{ \left(x_j \right)_{j\epsilon\alpha} : \left(x_j \right)_{j\epsilon\alpha} \in R^{\alpha} \& \left(x_i \right)_{i\epsilon I} \in X \right\}$$

I სიმრავლის თვლადობისა და α სიმრავლის არათვლადობის გამო იარსებებს $i_0 \in \alpha \setminus I$. ყოველი $n \in Z$ მთელი რიცხვისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_{K_0}^{(n)} = \left\{ \left(x_j \right)_{j\epsilon\alpha} : \left(x_j \right)_{j\epsilon\alpha} \in R^{\alpha} \& \left(x_i \right)_{i\epsilon I} \in X \;\&\; x_{i_0} \in [n, n+1[\right\}.$$

ვინაიდან λ არის $R^{(\alpha)}$-ინვარიანტული, ჩვენ ვასკვნით რომ λ $(F_{K_0}^{(n)}) = \lambda$ $(F_{K_0}^{(m)})$ ყოველი $n,m \in Z$ მთელი რიცხვებისათვის. ვინაიდან

$$F_{K_0}^{(n)} = F_{K_0}^{(m)} + (n-m)\; X_{i_0},$$

სადაც x_{i_0} აღნიშნავს $\{i_0\}$ წერტილოვანი სიმრავლის ინდიკატორ ფუნქციას განსაზღვრულს α პარამეტრულ სიმრავლეზე რომელიც არის $R^{(\alpha)}$ ქვესივრცის ელემენტი.

ვაჩვენოთ, რომ λ $(F_{K_0}^{(0)})$ სიდიდე არაა განსაზღვრული. მართლაც, აქ შესაძლებელია ორი შემთხვევა.

შემთხვევა 1. λ $(F_{K_0}^{(0)}) = 0$. შევნიშნოთ, რომ ეს შეუძლებელია, ვინაიდან

$$\lambda\,(F_{K_0})=\sum_{n\in Z}\lambda\,(F_{K_0}^{(n)})=\sum_{n\in Z}\lambda\,(F_{K_0}^{(0)}+\mathrm{n}\ \ X_{i_0})=\sum_{n\in Z}\lambda\,(F_{K_0}^{(0)})=0,$$

რაც ეწინააღმდეგება $0< \lambda\,(F_{K_0})$ პირობის მართებულობას.

შემთხვევა2. λ $(F_{K_0}^{(0)}) =\alpha > 0$. მაშინ

$$\lambda\,(F_{K_0})=\sum_{n\in Z}\lambda\,(F_{K_0}^{(n)})=\sum_{n\in Z}\lambda\,(F_{K_0}^{(0)}+\mathrm{n}\ \ X_{i_0})=\sum_{n\in Z}\lambda\,(F_{K_0}^{(0)})=\sum_{n\in Z}\alpha=\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება $\lambda\,(F_{K_0})<\infty$ პირობის მართებულობას.

ჩვენ მიზნია დავახასიათოთ ყველა ის მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეები, რომლებიც უშვებენ ისეთი არაგადაგვარებული σ-სასრული ბორელის ზომებს, რომლებიც არიან ინვარიანტული ყველგან მკვრივი ვექტორული სივრცეების მიმართ.

ჩვენ დაგვჭირდება ორი დამხმარე დებულება ზომის თეორიიდან.

პირველი დებულება იძლევა ინფორმაციას ტოპოლოგიური წონის შესახებ ისეთი თუ სრულ მეტრიკულ ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეებისათვის, რომლებიც უშვებენ ყველგან მკვრივი ვექტორული სივრცეების მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრული ბორელის ზომებს.

ლემა 10. თუ E არის მეტრიზებადი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. თუ E- ს ტოპოლოგიური წონა არ არის ზომადი ფართე აზრით და შესაძლებელია ამ სივრცეზე ყველგან მკვრივი ვექტორული Γ ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვერებული σ-სასრული ბორელის ზომის განსაზღვრა, მაშინ E სეპარაბელურია.

მაგალითი 32. ვთქვათ, l^{∞} არის შემოსაზღვრულ ნამდვილ მიმდევრობათა ბანახის სივრცე აღჭურვილი $\|.\|_{\infty}$ ნორმით, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\left\|(\ x\ \ _k)_{k\in N}\right\|_{\infty}=SUP_{k\in N}|\ x\ \ _k|.$$

ცხადია, რომ l^∞ სივრცის ტოპოლოგიური წონა კონტინუუმის (ე.ი., 2^ω-ის) სიმძლავრის ტოლია. კონტიმუუმ ჰიპოთეზის მართებულობის შემთხვევაში (ე.ი., $2^\omega = \omega_1$), l^∞ სივრცის ტოპოლოგიური წონა იქნება ω_1 -ის ტოლი, რომელიც ულამის ცნობილი დებულების თანახმად, არაზომადია ფართე აზრით. ამ სივრცეზე შეუძლებელია განისაზღვროს რაიმე ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრული ბორელის ზომა, ვინაიდან წინააღმდეგ სემთხვევაში l^∞ სივრცე იქნებოდა სეპარაბელური. რაც აშკარა წინააღმდეგობაა (l^∞ სივრცე არასეპარაბელურია, ვინაიდან მისი ტოპოლოგიური წონა ω_1 არათვლადი კარდინალური რიცხვია).

შევნიშნოთ, რომ სოლოვეის კარგად ცნობილ მოდელში (იხილეთ, [6]) ყოველი $r > 0$ რიცხვისათვის, l^∞ სივრცეზე შესაძლებელია ისეთი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის v_r ზომის განსაზღვრა, რომელიც r რადიუსის მქონე ბირთვებზე მიიღებს ერთ ტოლ მნიშვნელობას.

მეორე დებულება გვიჩვენებს, რომ ყოველი პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცისათვის ამოცანები 1-2 წყდება დადებითად.

ლემა 11. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან წრფივ პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ E სივრცეზე არსებობს არაგადაგვარებული σ-სასრული ბორელის ზომა, რომელიც არის ინვარიანტული გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ.

ლემა 11-ის დამტკიცება იხილეთ, [73] შრომაში.

ლემა 10 და ლემა 11-ის გამოყენებით მიიღება 1-2 ამოცანების ამოხსნა სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეებისათვის.

თეორემა 20. ვთქვათ, E არის სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. მაშინ E სივრცეზე არსებობს გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის სეპარაბელური.

დამტკიცება. აუცილებლობა. დავუშვათ, E სივრცეზე არსებობს გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა. მაშინ ლემა 10-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ E არის სეპარაბელური და აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ, E არის სრული მეტრიკული ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. მაშინ ლემა 11-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ E სივრცეზე არსებობს გარკვეული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა და ამით საკმარისობა დამტკიცებულია.

2.4. ორდინალური და სტანდარტული აბსტრაქტული დინამიკური სისტემები უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში

დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული იმ აქსიომის მიღების შემთხვევაში, როცა ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით, აბსოლუტურად კრებადი შაუდერის ბაზისით აღჭურვილი ბანახის სივრცის ბულეანზე პირველად აგებულ იქნა ისეთი ინვარიანტული ზომის მაგალითი, რომელიც სტანდარტულ მართკუთხედზე ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას (იხილეთ, [18]). სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში, რომლებშიც არსებობს შაუდერის ბაზისი, აგებულ იქნა ლებეგის ზომის ანალოგიური ზომა ყოველგვარი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე (იხილეთ, [75]). [76] შრომაში ნაჩვენები იქნა, რომ ხარაზიშვილის μ_Q ზომის გასრულება $\overline{\mu_Q}$ გააჩნია ერთადერთობის თვისება საბაზისო სივრცის ყველა შესაძლო l_1-ინვარიანტული σ-სასრულო ზომათა კლასის მიმართ, რომლის განსაზღვრის არე დაემთხვევა $\overline{\mu_Q}$ ზომის განსაზღვრის არეს. შემდეგ ეს

შედეგი განზოგადებულ იქნა ყველა უსასრულოგამზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცეებისათვის (იხილეთ, [74]). აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ [74] ნაშრომში განხილული მიდგომა ინვარიანტული ზომების არსებობის ამოცანის შესახებ უსასრულოგანზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში მკვეთრად განსხვავდება ანალოგიური ამოცანის ოქსტობის მიერ შემოთავაზებულ კონსტრუქციისგან (იხილეთ, [77]). [49] და [75] შრომებში მოცემული ზომების კონსტრუქციები საშუალებას გვაძლევს აბსოლუტურად კრებადი მარკუშევიჩის ბაზისით აღჭურვილ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში აგებულ იქნას ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომები, რომლებიც ამ ბაზისით განსაზღვრულ სტანდარტულ პარალელეპიპედზე ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას.

[23] შრომაში შემოთავაზებულია ყველაშესაძლო ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების R^{∞} სივრცეში „ლებეგის ზომის“ აგების ახალი მიდგომა. ამ ნაშრომში დემონსტრირებულია, რომ [75] და [76] შრომებში აგებული ორივე ზომა, მანკიევიჩის და პრაისი-ტიშერის გენერატორები (იხილეთ, [78]) და ზომა, რომელიც აგებულია [79]-ში არ წარმოადგენენ α-სტანდარტულ ლებეგის ზომას $\alpha=(1,1,\cdots)$-სათვის R^{∞} სივრცეში.

ვთქვათ, α არის პარამეტრთა უსასრულო სიმრავლე და $\{\alpha_i : i\in I\}$ წარმოადგენს α ისეთ დაყოფას, რომ α_i არის არაცარიელი სასრული ქვესიმრავლე ყოველი $i\in I$-სათვის. დავუშვათ, რომ $j\in\alpha$-სათვის μ_j იყოს σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც განსაზღვრულია პოლონურ მეტრიკულ (E_j,ρ_j) სივრცეში. [24] ნაშრომში შემოტანილია $\{\mu_j : j\in\alpha\}$ ზომათა ოჯახის სტანდარტული $\{\alpha_i : i\in I\}$-ნამრავლის ცნება და დამტკიცებულია მისი არსებობა. როგორც შედეგი, ყოველი უსასრულო α პარამეტრისათვის აგებულ იქნა ისეთი „სტანდარტული $\{\alpha_i : i\in I\}$-ლებეგის ზომა“ R^{α} სივრცის ქვესიმრავლეთა ბორელის σ-ალგებრაზე, რომელიც

არის ინვარიანტული ძვრებითა და გადანაცვლებების წარმოქმნილი ჯგუფის მიმართ.

სანამ უშუალოდ გადავიდოდეთ ძირითადი მასალის გადმოცემამდე, დაგვჭირდება რამდენიმე განსაზღვრება და დამხმარე წინადადება.

ლემა 12. ვთქვათ, $\{Y_i : i \in I\}$ არის ტოპოლოოგიურ სივრცეთა რაიმე ოჯახი და

$$Y = \prod_{i \in I} Y_i$$

არის მოცემული სივრცეთა ოჯახის პირდაპირი ნამრავლი, რომელიც აღჭურვილია ნამრავლი ტოპოლოგიით. ვთქვათ,

$$p_j : Y \to Y_j$$

არის j-პროექცია $(j \in I)$ განსაზღვრული შემდეგი ფორმულით

$$p_j\left(\{y_i : i \in I\}\right) = y_j ,$$

სადაც $\{y_i : i \in I\} \in Y$.

თუ X არის ტოპოლოგიური სივრცე, მაშინ ასახვა

$$f : X \to Y$$

არის უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ყოველი $p_j \circ f \quad (j \in I)$ კომპოზიცია უწყვეტია.

ლემა 12-ის დამტკიცება მოცემულია [36] მონოგრაფიაში.

ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე.

განსაზღვრა 17. $\{x_k : k \in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობას ეწოდება მინიმალური, თუ ყოველი x_k ვექტორი არ ეკუთვნის $\{x_i : i \neq k\}$ ვექტორთა მიმდევრობაზე მოჭიმულ ჩაკეტილ წრფივ გარსს.

X სივრცის მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური თუ ჩაკეტილი წრფივი გარსი შეიცავს X-ს.

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ფუნდამენტური მინიმალური $\{x_k : k \in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობისათვის არსებობს ერთადერთი უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალების მიმდევრობა $\left\{x_k^* : k \in \mathbf{N}\right\}$, რომელიც აკმაყოფილებს $x_k^*(x_l) = \delta_{kl}$ $(k, l \in \mathbf{N})$ პირობას. ასეთ მიმდევრობას ეწოდება $\{x_k : k \in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობის ბიორთოგონალური. თუ $\{x_k : k \in \mathbf{N}\}$ მიმდევრობა არის მინიმალური და ფუნდამენტური, მაშინ ყოველი $x \in X$ წარმოიდგინება განზოგადებული ფურიეს მწკრივის სახით

$$\sum_{k \in N} x_k^*(x) x_k .$$

x ვექტორის წარმოდგენა არის ერთადერთი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\left\{x_k^* : k \in \mathbf{N}\right\}$ ბიორთოგონალური მიმდევრობა არის ტოტალური. ე. ი. ყოველი $x \neq 0$ -სათვის არსებობს ისეთი $k \in \mathbf{N}$ რიცხვი, რომ $x_k^*(x) \neq 0$.

განსაზღვრა 18. მარკუშევიჩის ბაზისი (M -ბაზისი) ეწოდება ისეთ მიმდევრობას, რომელიც არის ფუნდამენტური, მინიმალური და ტოტალურად ბიორთოგონალური.

მარკუშევიჩის თეორემის თანახმად, ყოველი სეპარაბელური ბანახის X სივრცის თვლად განზომილებიანი მკვრივი L ქვესივრცისათვის X -ში არსებობს ისეთი M -ბაზისი $\left\{x_k, x_k^* : k \in \mathbf{N}\right\}$, რომ

$$le\{x_i : i \in \mathbf{N}\} = L .$$

ამ თეორემის შესახებ იხილეთ [38].

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ბანახის სივრცე M -ბაზისით არის სეპარაბელური.

M -ბაზის ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} \|x_k\| < \infty .$$

მართებულია შემდეგი წინადადებები.

ლემა 13. ყოველ უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე აღჭურვილია აბსოლუტურად კრებადი M -ბაზისით.

ლემა 14. ვთქვათ, $\left\{x_k, x_k^* : k \in \mathbf{N}\right\}$ არის აბსოლუტურად კრებადი M-ბაზისი X ბანახის სივრცეში. მაშინ ყოველი შემოსაზღვრული რიცხვთა $\left\{a_k : k \in \mathbf{N}\right\}$ მიმდევრობისათვის შემდეგი მწკრივი

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k x_k$$

აბსოლუტურად კრებადია რაიმე $x \in X$ ელემენტზე და ყველა k-სათვის

$$x_k^*(x) = a_k .$$

ლემა 13-ის და ლემა 14-ის დამტკიცებები მოცემულია [74] შრომაში.

ვთქვათ, $\left\{x_k, x_k^* : k \in \mathbf{N}\right\}$ არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის X სივრცის აბსოლუტურად კრებადი M-ბაზისი და განვსაზღვროთ P მართკუთხედი შემდეგნაირად:

$$P = \left\{ x \in X : \left|x_k^*(x)\right| \leq \frac{1}{2} \right\} \qquad (1)$$

ყველა $k \in \mathbf{N}$-სათვის. შევნიშნოთ, რომ P არის X-ის კომპაქტური ქვესიმრავლე.

როგორც ყოველთვის, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ით აღნიშნულია ყველაშესაძლო ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების სივრცე, ხოლო $e_k = (0, 0, \cdots, 0, 1, \cdots)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ არის ერთეულოვანი ვექტორი, სადაც 1-იანი მდებარეობს ნომრით k-ურ ადგილზე.

ოპერატორი

$$T : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

განვსაზღვროთ შემდეგი პირობით:

$$Tx = \left\{ x_k^*(x) : k \in \mathbf{N} \right\}. \qquad (2)$$

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ T არის წრფივი, ინიექციური, უწყვეტი და ნებისმიერი k-სათვის

$$Tx_k = e_k .$$

ლემა 15. თუ $S = T(X) \in B\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)$, მაშინ ოპერატორი $T : X \to S$ არის ბორელის იზომორფიზმი.

ლემა 15-ის დამტკიცება მოცემულია [74] შრომაში.

ვთქვათ, $\{\beta_j : j \in \mathbf{N}\} \in [0, +\infty]^{\mathbf{N}}$.

განსაზღვრა 19. ვიტყვით, რომ $\beta \in [0, +\infty]$ არის $\{\beta_j : j \in \mathbf{N}\}$ რიცხვთა ორდინალური ნამრავლი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \beta_i .$$

$\{\beta_j : j \in \mathbf{N}\}$ რიცხვთა ორდინალური ნამრავლი აღინიშნება $(\mathbf{O})\prod_{i\in N} \beta_i$ სიმბოლოთი.

რიცხვთა $\{\beta_i : i \in \mathbf{N}\}$ ოჯახის სტანდარტული ნამრავლი აღინიშნება $(\mathbf{S})\prod_{i\in N} \beta_i$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$(\mathbf{S})\prod_{i\in \mathbf{N}} \beta_i = 0 \text{ Tu } \sum_{i\in \mathbf{N}^-} \ln(\beta_i) = -\infty, \text{ sadac } \mathbf{N}^- = \{i : \ln(\beta_i) < 0\},$$
$$\text{da } (\mathbf{S})\prod_{i\in \mathbf{N}} \beta_i = e^{\sum_{i\in\mathbf{N}}\ln(\beta_i)} \text{ Tu } \sum_{i\in \mathbf{N}^-} \ln(\beta_i) \neq -\infty.$$

ვთქვათ, $\alpha = \{n_k : k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_0 = [0, n_0] \cap \mathbf{N}, \quad F_1 = [n_0 + 1, n_0 + n_1] \cap \mathbf{N}, \cdots,$$
$$F_k = [n_0 + n_1 + \cdots + n_{k-1} + 1, n_0 + n_1 + \cdots + n_k] \cap \mathbf{N}, \cdots$$

განსაზღვრა 20. ვიტყვით, რომ $\beta \in [0, +\infty]$ არის $\{\beta_i : i \in \mathbf{N}\}$ რიცხვების ორდინალური α-ნამრავლი, თუ β არის $\left\{\prod_{i\in F_k} \beta_i : k \in \mathbf{N}\right\}$ რიცხვების ორდინალური ნამრავლი. $\{\beta_i : i \in \mathbf{N}\}$ რიცხვების ორდინალური α-ნამრავლი აღინიშნება $(\mathbf{O},\alpha)\prod_{i\in N} \beta_i$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრა 21. ვიტყვით, რომ $\beta \in [0, +\infty]$ არის $\{\beta_i : i \in \mathbf{N}\}$ რიცხვების სტანდარტული α-ნამრავლი, თუ β არის $\left\{\prod_{i\in F_k} \beta_i : k \in \mathbf{N}\right\}$ რიცხვების

სტანდარტული ნამრავლი. $\{\beta_i : i \in \mathbf{N}\}$ რიცხვების სტანდარტული α-ნამრავლი აღინიშნება $(\mathbf{S},\alpha)\prod_{i\in N}\beta_i$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, $\alpha = \{n_k : k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. ვთქვათ, $(\alpha)OR$ არის ყველა უსასრულოგანზომილებიანი ზომადი $R = \prod_{i\in N} R_i$ $\left(R_i \in B\left(\mathbf{R}^{n_i}\right)\right)$ α-მართკუთხედების კლასი, რომლისთვისაც $\left\{\lambda_1^{n_i}(R_i) : i \in \mathbf{N}\right\}$ რიცხვების ორდინალური ნამრავლი არსებობს და სასრულია, სადაც λ_1 აღნიშნავს ლებეგის წრფივ ზომას $\mathbf{R}$-ზე.

განსაზღვრა 22. ვიტყვით, რომ ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომის გასრულება λ ზომა არის ორდინალური α-ლებეგის ზომა $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში (ან მოკლედ, $O(\alpha)LM$) თუ ყოველი $R \in (\alpha)OR$-სათვის გვაქვს

$$\lambda(R) = (\mathbf{O})\prod_{k\in\mathbf{N}} \lambda_1^{n_k}(R_k).$$

ვთქვათ, $\alpha = \{n_k : k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. ვთქვათ, $(\alpha)SR$ არის ყველა უსასრულოგანზომილებიანი ზომადი $R = \prod_{i\in N} R_i$ $\left(R_i \in B\left(\mathbf{R}^{n_i}\right)\right)$ α-მართკუთხედების კლასი, რომლისთვისაც $\left\{\lambda_1^{n_i}(R_i) : i \in \mathbf{N}\right\}$ რიცხვების სტანდარტული ნამრავლი არსებობს და სასრულია.

განსაზღვრა 23. ვიტყვით, რომ ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომის გასრულება λ ზომა არის სტანდარტული α-ლებეგის ზომა $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში (ან მოკლედ, $S(\alpha)LM$), თუ ყოველი $R \in (\alpha)SR$-სათვის გვაქვს

$$\lambda(R) = (\mathbf{S})\prod_{k\in\mathbf{N}} \lambda_1^{n_k}(R_k).$$

მართებულია შემდეგი დებულებები:

ლემა 16. ნებისმიერი $\alpha = \{n_k : k \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის მართებულია ჩართვა

$$(\alpha)OR \subset (\alpha)SR.$$

ლემა 17. ყოველი $\alpha=\{n_k : k\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში არსებობს ბორელის ზომა μ_α, რომელიც არის $\mathsf{O}(\alpha)\mathsf{LM}$.

ლემა 18. ყოველი $\alpha=\{n_k : k\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცეში არსებობს ბორელის ზომა ν_α, რომელიც არის $\mathsf{S}(\alpha)\mathsf{LM}$.

ლემა 16, ლემა 17 და ლემა 18-ის დამტკიცებები მოცემულია [18] შრომაში.

ვთქვათ, ზომად (E,S) სივრცეში მოცემულია ორი μ_1 და μ_2 ზომა.

განსაზღვრა 24. ვიტყვით, რომ μ_1 ზომა არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ_2-ის მიმართ, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა

$$(\forall X)\left(X\in S\ \&\ \mu_2(X)=0\Rightarrow\mu_1(X)=0\right)$$

და ეს ფაქტი აღინიშნება $\mu_1\ll\mu_2$ სიმბოლოთი.

თუ $\mu_1\ll\mu_2$ და $\mu_2\ll\mu_1$ პირობები შესრულებულია ერთდროულად, მაშინ μ_1 და μ_2 ზომებს ეწოდებათ ექვივალენტური და წერენ $\mu_2=\mu_1$.

აბსოლუტურად უწყვეტი ზომების შესახებ იხილეთ, მაგალითად, [32].

მართებულია შემდეგი წინადადება.

ლემა 19. ნებისმიერი $\alpha=\{n_k : k\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის მართებულია $\nu_\alpha\ll\mu_\alpha$ დამოკიდებულება. ამასთან, μ_α და ν_α ზომები არ არიან ექვივალენტურები.

ვთქვათ, $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ იმ პირობით, რომ $n_i=n_j$ ყოველი $i,j\in\mathbf{N}$. ვთქვათ, ყოველი $i\in\mathbf{N}$-სათვის

$$F_i=\left(a_1^{(i)},a_2^{(i)},\cdots,a_{n_0}^{(i)}\right).$$

დავუშვათ, რომ f არის $\mathbf{N}$-ის ისეთი გადანაცვლება, რომ ყოველი $i\in\mathbf{N}$-სათვის არსებობს ისეთი $j\in\mathbf{N}$ რიცხვი, რომ როცა $1\le k\le n_0$ სრულდება ტოლობა

$$f\left(a_k^{(i)}\right)=a_k^{(j)}\ .$$

მაშინ ასახვას

$$A_f : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

განსაზღვრული შემდეგი დამოკიდებულებით

$$A_f\left(\{z_k : k \in \mathbf{N}\}\right) = \left\{z_{f(k)} : k \in \mathbf{N}\right\}$$

ეწოდება კანონიკური α -გადანაცვლება $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ -ში.

ვთქვათ, G_α არის ჯგუფი, რომელიც წარმოქმნილია ყველა შესაძლო გადანაცვლებებითა და ძვრებით $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ -ში.

მართებულია შემდეგი დებულებები:

ლემა 20. ყოველი ისეთი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ რიცხვისათვის, რომლისთვისაც $n_i = n_j \ (i, j \in \mathbf{N})$ ν_α ზომა წარმოადგენს G_α -ინვარიანტულს.

ლემა 21. ვთქვათ, $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ და ვთქვათ,

$$T^{n_i} : \mathbf{R}^{n_i} \to \mathbf{R}^{n_i} \ \ (i > 1)$$

არის ისეთი წრფივი გარდაქმნების ოჯახი, რომელთა იაკობიანი $\vartriangle_i \neq 0$ და $0 < \prod_{i \in N} \vartriangle_i < \infty$. დავუშვათ, რომ

$$T^{\mathbf{N}} : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

არის ასახვა განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$T^{\mathbf{N}}(x) = \left(T^{n_1}\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}\right), T^{n_2}\left(x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots, x_{n_1+n_2}\right), \cdots\right),$$

სადაც $x = \{x_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. მაშინ ყოველი $E \in B\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right)$ სიმრავლისათვის გვაქვს

$$\mu_\alpha\left(T^{\mathbf{N}}(E)\right) = \left(\prod_{i \in \mathbf{N}} \vartriangle_i\right) \mu_\alpha(E).$$

ახლა ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და $\left(x_k, x_k^{*}\right)$ არის აბსოლუტურად კრებადი M -ბაზისი. დავუშვათ, რომ

$$T : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

არის წრფივი ოპერატორი, განსაზღვრული (1) პირობით.

ვთქვათ, $\alpha=\{n_k : k\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

განსაზღვრა 25. ვიტყვით, რომ ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა μ არის ორდინალური α-ლებეგის ზომა X-ზე (ან მოკლედ, O(α)LM(X)) თუ ყოველი $R\in(\alpha)OR$-სათვის, რომლისთვისაც $R\cap T(X)\in(\alpha)OR$ გვაქვს

$$\mu\left(T^{-1}(R)\right)=\mu_\alpha\left(R\cap T(X)\right),$$

სადაც μ_α არის ზომა, რომელზეც ლაპარაკია ლემა 17-ში.

განსაზღვრა 26. ვიტყვით, რომ ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა μ არის სტანდარტული α-ლებეგის ზომა X-ზე (ან მოკლედ, S(α)LM(X)) თუ ყოველი $R\in(\alpha)SR$-სათვის, რომლისთვისაც $R\cap T(X)\in(\alpha)SR$ გვაქვს

$$\mu\left(T^{-1}(R)\right)=\nu_\alpha\left(R\cap T(X)\right),$$

სადაც ν_α არის ზომა, რომელზეც ლაპარაკია ლემა 18-ში.

ვთქვათ, X არის უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და $\left(x_k,x_k^{*}\right)$ არის აბსოლუტურად კრებადი M-ბაზისი.

თეორემა 21. ყოველი $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის X-ში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა ψ_α რომელიც არის O(α)LM(X).

დამტკიცება. ვთქვათ, $Y\in B(X)$. ფუნქციონალი ψ_α განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით

$$\psi_\alpha(Y)=\mu_\alpha\left(T(Y)\right),$$

სადაც μ_α ლემა 17-ში მოცემული ზომა, ხოლო T არის ოპერატორი განსაზღვრული (2) ფორმულით.

განსაზღვრის თანახმად ადვილის ჩვენება იმისა, რომ ψ_α არის არანულოვანი ბორელის ზომა, ვინაიდან (1) ფორმულით განსაზღვრული P პარალელეპიპედისათვის გვაქვს

$$\psi_\alpha(P)=\mu_\alpha(T(P))=\mu_\alpha\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^{\mathbf{N}}\right)=1.$$

ბოლოო დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^{\mathbf{N}}$ შედის O(α)LM(X) კლასში ყოველი $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ -სათვის.

ხლა ვაჩვენოთ ψ_α ზომის ძვრების მიმართ ინვარიანტულობა. მართლაც, ყოველი $Y\in B(X)$ და ყოველი $h\in X$ -სათვის გვაქვს

$$\psi_\alpha(Y+h)=\mu_\alpha(T(Y+h))=\mu_\alpha(T(Y)+T(h))=\mu_\alpha(T(Y))=\psi_\alpha(Y).$$

ბოლოს ვაჩვენოთ, რომ არის O(α)LM(X). დავუშვათ, რომ $R\in(\alpha)OR$, რომლისთვისაც $R\cap T(X)\in(\alpha)OR$. მაშინ გვექნება

$$\psi_\alpha\left(T^{-1}(R)\right)=\psi_\alpha\left(T^{-1}\left(R\cap T(X)\right)\right)=\mu_\alpha\left(T\left(T^{-1}\left(R\cap T(X)\right)\right)\right)=\mu_\alpha\left(R\cap T(X)\right).$$

ამით თეორემა 21 დამტკიცებულია.

თეორემა 22. ყოველი $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ -სათვის X -ში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა η_α რომელიც არის **S**(α)LM(X).

დამტკიცება. ვთქვათ,. ფუნქციონალი η_α განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმულით

$$\eta_\alpha(Y)=\nu_\alpha(T(Y)),$$

სადაც ν_α ლემა 18-ში მოცემული ზომა, ხოლო T არის ოპერატორი განსაზღვრული (2) ფორმულით.

განსაზღვრის თანახმად ადვილის ჩვენება იმისა, რომ η_α არის არანულოვანი ბორელის ზომა, ვინაიდან (1) ფორმულით განსაზღვრული P პარალელეპიპედისათვის გვაქვს

$$\eta_\alpha(P)=\nu_\alpha(T(P))=\nu_\alpha\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^{\mathbf{N}}\right)=1.$$

ბოლო დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{\mathbf{N}}$ შედის $\mathsf{S}(\alpha)\mathsf{LM}(X)$ კლასში ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის.

ახლა ვაჩვენოთ η_α ზომის ძვრების მიმართ ინვარიანტულობა. მართლაც, ყოველი $Y \in B(X)$ და ყოველი $h \in X$-სათვის გვაქვს

$$\eta_\alpha(Y+h) = \nu_\alpha\left(T(Y+h)\right) = \nu_\alpha\left(T(Y)+T(h)\right) = \nu_\alpha\left(T(Y)\right) = \eta_\alpha(Y).$$

ბოლოს ვაჩვენოთ, რომ η_α არის $\mathsf{S}(\alpha)\mathsf{LM}(X)$. დავუშვათ, რომ $R \in (\alpha)SR$, რომლისთვისაც $R \cap T(X) \in (\alpha)SR$. მაშინ გვექნება

$$\eta_\alpha\left(T^{-1}(R)\right) = \eta_\alpha\left(T^{-1}\left(R \cap T(X)\right)\right) = \nu_\alpha\left(T\left(T^{-1}\left(R \cap T(X)\right)\right)\right) = \nu_\alpha\left(R \cap T(X)\right).$$

ამით თეორემა 22 დამტკიცებულია.

თეორემა 23. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის მართებულია $\eta_\alpha \ll \psi_\alpha$ დამოკიდებულება. ამასთან η_α და ψ_α ზომები არ არიან ექვივალენტურები.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $\eta_\alpha \ll \psi_\alpha$. მართლაც, ვთქვათ, $\psi_\alpha(Y) = 0$, სადაც $Y \in B(X)$. მაშინ გვაქვს

$$\psi_\alpha(Y) = \mu_\alpha\left(T(Y)\right) = 0.$$

ლემა 19-ის თანახმად $\nu_\alpha \ll \mu_\alpha$ ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\nu_\alpha\left(T(Y)\right) = 0.$$

η_α ზომის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\nu_\alpha\left(T(Y)\right)$ სიდიდე ემთხვევა $\eta_\alpha(Y)$ სიდიდეს, საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$\eta_\alpha(Y) = 0.$$

ახლა უნდა დავამტკიცოთ, რომ η_α და ψ_α ზომები არ არიან ექვივალენტურები.

ყოველი $i \in \mathbf{N}$-სათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$D_i = \prod_{j \in F_i} \left[0, e^{\frac{(-1)^j}{i \times n_j}} \right].$$

ცხადია, რომ $i \in \mathbf{N}$ -სათვის

$$m^{n_i}\left(D_i\right) = e^{\frac{(-1)^i}{i}} .$$

შევნიშნოთ, რომ დადებით ნამდვილ რიცხვთა $\left\{ e^{\frac{(-1)^i}{i \times n_i}} : i \in \mathbf{N} \right\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ზემოდან $\sqrt{e}$ რიცხვით.

რადგან $\left\{ \left(x_k, x_k^{*} \right) : k \in \mathbf{N} \right\}$ არის აბსოლუტურად კრებადი M -ბაზისია ბანახის X სივრცეში, ამიტომ ლემა 14-ის თანახმად ორმაგი მწკრივი $\sum_i \sum_{j \in F_i} a_j x_j$ არის აბსოლუტურად კრებადი რაიმე $x \in X$ ელემენტზე, როცა

$$\left| a_j \right| \le e^{\frac{(-1)^i}{i \times n_i}} \qquad \left(j \in F_j \right).$$

ამის გამო გვაქვს

$$T\left(D\right) = \prod_{i \in \mathbf{N}} D_i ,$$

სადაც D განსაზღვრულია შემდეგი პირობით:

$$D = \left\{ \sum_i \sum_{j \in F_i} a_j x_j : 0 \le a_j \le e^{\frac{(-1)^i}{i \times n_i}} , j \in F_i \right\}.$$

ვინაიდან

$$(\mathbf{S}) \prod_{i \in \mathbf{N}} m^{n_i}\left(D_i\right) = (\mathbf{S}) \prod_{i \in \mathbf{N}} e^{\frac{(-1)^i}{i}} = 0,$$

ამიტომ ერთის მხრის გვაქვს

$$\eta_\alpha\left(D\right) = \nu_\alpha\left(T\left(D\right)\right) = \nu_\alpha\left(\prod_{i \in \mathbf{N}} D_i \right) = 0.$$

მეორეს მხრის, კი მივიღებთ

$$\psi_\alpha\left(D\right) = \mu_\alpha\left(T\left(D\right)\right) = \mu_\alpha\left(\prod_{i \in \mathbf{N}} D_i \right) = 2,$$

რადგან

$$(\mathbf{O})\prod_{i\in\mathbf{N}} m^{n_i}\left(D_i\right)=(\mathbf{O})\prod_{i\in\mathbf{N}} e^{\frac{(-1)^i}{i}}=2.$$

ბოლო უკანასკნელი ორი დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ η_α და ψ_α ზომები არ არიან ექვივალენტურები.

ამით თეორემა 23 სრულად დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ისეთია, რომ ყოველი $i,j\in\mathbf{N}$-სათვის $n_i=n_j$. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა: ნებისმიერი $i\in\mathbf{N}$-სათვის

$$F_i=\left\{a_1^{(i)},\cdots,a_{n_0}^{(i)}\right\}.$$

დავუშვათ, რომ f არის $\mathbf{N}$-ის ისეთი გადანაცვლება, რომ ყოველი $i\in\mathbf{N}$-სათვის არსებობს ისეთი $j\in\mathbf{N}$ რიცხვი, რომ როცა $1\le k\le n_0$ სრულდება ტოლობა

$$f\left(a_k^{(i)}\right)=a_k^{(j)}\ .$$

თუ ასახვა

$$A_f : X\to X$$

განსაზღვრული შემდეგი დამოკიდებულებით

$$A_f\left(\sum_k x_k x_k^*\right)=\sum_k x_{f(k)}x_k^*$$

კრებადია ყოველ $x=\sum_k x_k x_k^*\in X$ ელემენტზე, მაშინ A_f-ს ეწოდება კანონიკური α-გადანაცვლება X-ში.

ვთქვათ, G_α არის ჯგუფი, რომელიც წარმოქმნილია ყველა შესაძლო A_f კანონიკური α-გადანაცვლებით და ძვრებით X-ში, რომლისთვისაც მართებულია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$(\forall x)\Big(x\in X\Rightarrow A_f(x)=T^{-1}\Big(A_f\big(T(x)\big)\Big)\Big).$$

თეორემა 24. ნებისმიერი $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის, რომლისთვისაც ყოველი $i,j\in\mathbf{N}$-სათვის $n_i=n_j$, ზომა η_α არის G_α-ინვარიანტული.

დამტკიცება. თეორემა 22-ის თანახმად η_α ზომა ინვარიანტულია პარალელური გადატანათა ჯგუფის მიმართ. უნდა ვაჩვენოთ, რომ η_α ზომა ინვარიანტულია A_f კანონიკური α-გადანაცვლებების ჯგუფის მიმართ. მართლაც, კანონიკური α-გადანაცვლებების განსაზღვრების თანახმად და ლემა 20-ის თანახმად გვაქვს

$$(\forall Y)\Big(Y \in B(X) \Rightarrow \eta_\alpha\left(A_f(Y)\right) = \nu_\alpha\left(T\left(A_f(Y)\right)\right) = \nu_\alpha\left(A_f\left(T(Y)\right)\right) = \nu_\alpha\left(T(Y)\right) = \eta_\alpha(Y)\Big).$$

ამით თეორემა 24-ის დამტკიცება დასრულებულია.

ვთქვათ, $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ და $L^{n_i} = \left\{ \sum_{j \in F_j} a_j x_j : \{a_j : j \in F_j\} \in \mathbf{R}^{n_i} \right\}$.

დავუშვათ, რომ

$$T^{n_i} : \mathrm{R}^{n_i} \to \mathrm{R}^{n_i}$$

არის წრფივი გარდაქმნების ოჯახი.

დავუშვათ, რომ

$$T^{\mathbf{N}} : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

არის ასახვა განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$T^{\mathbf{N}}(x) = \left(T^{n_1}\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}\right), T^{n_2}\left(x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots, x_{n_1+n_2}\right), \cdots\right),$$

სადაც $x = \{x_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

ვთქვათ, $T^{n_i} : L^{n_i} \to L^{n_i}$ ასახვა განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$T^{n_i}\left(\sum_{j \in F_j} a_j x_j\right) = \sum_{j \in F_j} \mathrm{Pr}_j\left(T^{n_i}\left(\{a_j : j \in F_j\}\right)\right),$$

სადაც $i \in \mathbf{N}$, Pr_j-ით აღნიშნულია j-ური პროექცია X-ში, რომელიც განსაზღვრულია $\mathrm{Pr}_j(x) = x_j^*(x) x_j$

პირობით.

დავუშვათ, რომ არის

$$T^{\mathbf{N}} : X \to X$$

ასახვა, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$T^{\mathbf{N}}(x)=\sum_i \Pr_{L^{n_i}}(x),$$

სადაც $\Pr_{L^{n_i}}$ აღნიშნავს პროექციას L^{n_i} ვექტორულ ქვესივრცეზე და რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$\Pr_{L^{n_i}}(x)=\sum_{j\in F_j} x_j^*(x)x_j \ .$$

თეორემა 25. ვთქვათ, $\alpha=\{n_i : i\in\mathbf{N}\}\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ და ვთქვათ,

$$T^{n_i}:\mathbf{R}^{n_i}\to\mathbf{R}^{n_i}\ \ (i>1)$$

არის ისეთი წრფივი გარდაქმნების ოჯახი, რომელთა იაკობიანი $\triangle_i\neq 0$ და $0<\prod_{i\in N}\triangle_i<\infty$. თუ ყოველი $x\in X$ განსაზღვრულია $T^{\mathbf{N}}$ ასახვა შემდეგი დამოკიდებულებით

$$(\forall x)\left(x\in X\Rightarrow T^{\mathbf{N}}(x)=T^{-1}\left(T^{\mathbf{N}}\left(T(x)\right)\right)\right),$$

მაშინ ყოველი $Y\in B(Y)$ სრულდება შემდეგი ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა ψ_α ზომისათვის

$$\psi_\alpha\left(T^{\mathbf{N}}(Y)\right)=\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\triangle_i\right)\psi_\alpha(Y).$$

დამტკიცება. თეორემის პირობის თანახმად და ψ_α ზომის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები

$$\psi_\alpha\left(T^{\mathbf{N}}(Y)\right)=\mu_\alpha\left(T\left(T^{\mathbf{N}}(Y)\right)\right)=\mu_\alpha\left(T^{\mathbf{N}}\left(T(Y)\right)\right).$$

ლემა 8-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\psi_\alpha\left(T^{\mathbf{N}}(Y)\right)=\mu_\alpha\left(T^{\mathbf{N}}\left(T(Y)\right)\right)=\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\triangle_i\right)\mu_\alpha\left(T(Y)\right)=\left(\prod_{i\in\mathbf{N}}\triangle_i\right)\psi_\alpha(Y).$$

ამით თეორემა 25-ის დამტკიცება დასრულებულია.

ვთქვათ, X არის სეპარაბელური ბანახის სივრცე.

განსაზღვრა 27. Y-ს ეწოდება shy-სიმრავლე, თუ ის წარმოადგენს ბორელის ისეთი Y' სიმრავლის ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობა

$$\mu(Y'+x)=0$$

ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის და რაიმე ისეთი ბორელის ალბათური μ ზომისათვის, რომ $\mu(K) = \mu(X)$, სადაც K კომპაქტია X სივრცეში.

shy-სიმრავლის დამატებას ეწოდება პრივალენსი.

მოყვანილი ცნებების შესახებ იხილეთ, [78].

განსაზღვრა 28. ბორელის μ ზომას ეწოდება shy-სიმრავლის გენერატორი X სივრცეში თუ $\overline{\mu}(Y) = 0 \quad (Y \subset X)$ ტოლობის მართებულობიდან გამომდინარეობს, რომ Y არის shy-სიმრავლე X-ში, სადაც $\overline{\mu}$-თი აღნიშნულია μ ზომის გასრულება.

მტკიცდება, რომ ყოველი კვაზისასრული ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა X სივრცეში არის shy-სიმრავლის გენერატორი ამავე სივრცეში. თუ გამოვიყენებთ ამავე თავში მიღებულ შედეგებს მივიღებთ, რომ ν_α და ψ_α ზომები არიან shy-სიმრავლის გენერატორები X-ში ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის.

ზემოთ მოყვანილი ცნებებისა და დებულებების შესახებ იხილეთ [78] შრომაში.

ამ პარაგრაფში ჩვენ მოვიყვანთ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში ორდინალური და სტანდარტული ზომების გარკვეული მატარებლებს.

განსაზღვრა 29. ვთქვათ, მოცემულია ბორელის μ ზომა რაიმე X სივრცეში. A ბორელის ქვესიმრავლეს ეწოდება μ ზომის მატარებელი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობა

$$\mu(X \setminus A) = 0.$$

თეორემა 26. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის სეპარაბელურ ბანახის X სივრცეში η_α (ან, ψ_α) ზომა არის shy-სიმრავლის გენერატორი და მისი მატარებელი შეიძლება შეირჩეს ისეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლე, რომელიც არ დაიფარება X სივრცის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი ოჯახით.

დამტკიცება. რადგან ყოველი კვაზისასრული ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა X სივრცეში არის shy-სიმრავლის

გენერატორი ამავე სივრცეში, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ წინა თავებში მიღებულ შედეგებს მივიღებთ, რომ ν_α (ან, ψ_α) ზომა არის shy-სიმრავლის გენერატორი X -ში.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$Z_1 = X_1 \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}\setminus\{1\}}, \quad Z_2 = X_2 \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}\setminus\{1\}} ,$$

სადაც X_1 და X_2 შესაბამისად არიან ისეთი shy-სიმრავლე და პირველი კატეგორიის სიმრავლე $\mathbf{R}$ -ში, რომ

$$\mathbf{R} = X_1 \cup X_2 .$$

შევნიშნოთ, რომ $\nu_\alpha(Z_1) = 0$ (ან, $\mu_\alpha(Z_1) = 0$) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ Z_2 არის ν_α (ან, μ_α) ზომის მატარებელი.

ერთის მხრივ, Z_2 არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ში, რომელიც არ დაიფარება $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ სივრცის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი ოჯახით. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ,

$$Z_2 = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} F_k ,$$

სადაც ყოველი $k \in \mathbf{N}$ -სათვის F_k არის კომპაქტი $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ -ში. მაშინ გვაქვს, რომ F_k ($k \in \mathbf{N}$) არის shy-სიმრავლე ამავე სივრცეში (იხილეთ, [25]). რადგან ν_α (ან, ψ_α) ზომა არიან shy-სიმრავლის გენერატორები $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ში, ამიტომ Z_1 არის shy-სიმრავლე. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$Z_1 \cup \bigcup_{k \in \mathbf{N}} F_k = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$$

არის shy-სიმრავლე $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ში, რაც წინააღმდეგობაა იმ ფაქტთან, რომ ყოველი კვაზისასრული ბორელის μ ზომისათვის $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-ში გვაქვს

$$\mu(\mathbf{R}^{\mathbf{N}} + t) = \mu(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) > 0$$

ყოველი $t \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ -სათვის.

ყოველივე ეს ნიშნავს, რომ $T^{-1}(Z_2)$ წარმოადგენს η_α (ან, ψ_α ზომა) ზომის მატარებელს, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 26-ის პირობებს.

ამით თეორემა 26 სრულად დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ყოველი უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე წარმოიდგინება, როგორც shy-სიმრავლისა და პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანება.

შედეგი 2. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან ბანახის სივრცეში არსებობს პირველი კატეგორიის სიმრავლე, რომელიც არის პრივალენსი და არ დაიფარება კომპაქტების თვლადი გაერთიანებით.

შედეგი 3. ყოველ X უსასრულოგანზომილებიან ბანახის X სივრცეში არსებობს პირველი კატეგორიის სიმრავლე D, რომელიც არ დაიფარება კომპაქტების თვლადი გაერთიანებით და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$(\forall h)\big(h \in X \Rightarrow D \cap (D+h) \text{ არის პრივალენსი}\big).$$

შედეგი 4. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან ბანახის X სივრცეში არსებობს ისეთი პირველი კატეგორიის D სიმრავლე, რომ ნებისმიერი ყოველი $h \in X$ წერტილისათვის მოიძებნება ისეთი $y \in D$ წერტილი, რომ უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია $y, y+h, y+2h, \cdots$ შედის D-ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D = Z_2$, სადაც Z_2 არის სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია თეორემა 26-ში. განვიხილოთ სიმრავლეთა ოჯახი

$$\{D - ih : i \in \mathbf{N}\}.$$

რადგან $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} \{D - ih\}$ სიმრავლე არის პრივალენსი, ამიტომ არსებობს $y \in \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \{D - ih\}$.

ვინაიდან $y \in D - ih$ ყოველი $i \in \mathbf{N}$-სათვის ამიტომ არსებობს ისეთი $y_i \in D$ $(i \in \mathbf{N})$ რომელიც აკმაყოფილებს $y = y_i - ih$ პირობას $i \in \mathbf{N}$ -სათვის, საიდანაც გვექნება

$$y_i = y + ih.$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია $y, y+h, y+2h, \cdots$ შედის D-ში.

შედეგი 5. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან ბანახის X სივრცეში არსებობს ისეთი პირველი კატეგორიის D სიმრავლე, რომ ნებისმიერი $h \in X$ -სათვის D_h სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი დამოკიდებულებით

$$D_h = \left\{ y : y \in D \,\&\, (\forall i)\left(i \in \mathbf{N} \Rightarrow y + ih \in D\right) \right\}$$

არის პრივალენსი X -ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D = Z_2$, სადაც Z_2 არის სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია თეორემა 26-ში. განვიხილოთ სიმრავლეთა ოჯახი

$$\left\{ D - ih : i \in \mathbf{N} \right\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} \left\{ D - ih \right\}$ სიმრავლე არის პრივალენსი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$B_h = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \left\{ D - ih \right\}.$$

ვინაიდან $y \in D - ih$ ყოველი $i \in \mathbf{N}$ -სათვის, ამიტომ არსებობს ისეთი $y_i \in D$ $\left(i \in \mathbf{N}\right)$ რომელიც აკმაყოფილებს $y = y_i - ih$ პირობას $i \in \mathbf{N}$ -სათვის, საიდანაც გვექნება

$$y_i = y + ih.$$

შედეგი 4-დან გამომდინარეობს, რომ უსასრულო არითმეტიკული პროგრესია $y, y + h, y + 2h, \cdots$ შედის D -ში. ვინაიდან $B_h \subset D_h$, ამიტომ არის D_h პრივალენსი X -ში.

შედეგი 5 შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი ფორმულირებით;

შედეგი 6. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან ბანახის X სივრცეში არსებობს ისეთი პირველი კატეგორიის D სიმრავლე, რომ ნებისმიერი $h \in X$ -სათვის $X \setminus D_h$ სიმრავლე არის η_α (ან, ψ_α) ნული ზომის სიმრავლე(იგივეა რაც, shy-სიმრავლე), სადაც

$$D_h = \left\{ y : y \in D \,\&\, (\forall i)\left(i \in \mathbf{N} \Rightarrow y + ih \in D\right) \right\}.$$

შედეგი 7. ყოველ უსასრულოგანზომილებიან ბანახის X სივრცეში არსებობს ისეთი პირველი კატეგორიის D სიმრავლე, რომ ელემენტების

ნებისმიერი $h=\{h_k : k \in \mathbf{N}\} \in X$ მიმდევრობისათვის სიმრავლე, განსაზღვრული შემდეგი დამოკიდებულებით

$$D_h = \left\{ y : y \in D \,\&\, (\forall i)\left(i \in \mathbf{N} \Rightarrow y + \sum_{k=1}^{i} h_k \in D \right) \right\}$$

არის პრივალენსი X -ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $D = Z_2$, სადაც Z_2 არის სიმრავლე, რომელიც განსაზღვრულია თეორემა 26-ში.

განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლე

$$\left\{ D - \sum_{k=1}^{i} h_k : i \in \mathbf{N} \right\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} \left\{ D - \sum_{k=1}^{i} h_k \right\}$ სიმრავლე არის პრივალენსი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$B_h = \bigcap_{i \in \mathbf{N}} \left\{ D - \sum_{k=1}^{i} h_k \right\}.$$

ვთქვათ, $y \in B_h$. ვინაიდან $y \in D - \sum_{k=1}^{i} h_k$ ყოველი $i \in \mathbf{N}$ -სათვის, ამიტომ არსებობს ისეთი $y_i \in D$ $(i \in \mathbf{N})$ რომელიც აკმაყოფილებს $y = D - \sum_{k=1}^{i} h_k$ პიროზას $i \in \mathbf{N}$ -სათვის, საიდანაც გვექნება

$$y_i = y + \sum_{k=1}^{i} h_k .$$

რადგან $y_i = y + \sum_{k=1}^{i} h_k$ შედის D -ში და $B_h \subset D_h$, ამიტომ არის D_h პრივალენსი X -ში.

ამით შედეგი 7 დამტკიცებულია.

თავი III

აბსტრაქტული დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების გაგრძელების სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი

დინამიკური სისტემების გაგრძელება წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საკითხს დინამიკურ სისტემათა თეორიისათვის. ეს საკითხი არსებითია არა მხოლოდ დინამიკური სისტემების თეორიის განვითარებისათვის, არამედ ის წარმოადგენს საფუძველს ისეთი დარგებისათვის, როგორიცაა: ჰარმონიული ანალიზი, ალბათობა და მათემატიკური სტატისტიკა, ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია და თანამედროვე მათემატიკის სხვა მიმართულებები.

დინამიკური სისტემის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ზომიანი სივრცე არის დინამიკური სისტემა, როგორც ინვარიანტული ზომიანი სივრცის კერძო შემთხვევა (ამ კერძო შემთხვევაში გარდაქმნათა ჯგუფის როლში ავიღოთ მხოლოდ იგივური გარდაქმნა). ინვარიანტული ზომიანი სივრცის განხილვისას არსებითია გარდაქმნათა ჯგუფის გაფართოება. ამ თვალსაზრისით საინტერესოა იმ ფაქტის აღნიშვნა, რომ ნებისმიერ სასრულგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არსებობენ ყველა პარალელური ძვრების π_n ჯგუფის მიმართ ინვარიანტული ზომები და ეს ჯგუფი (რომელიც კანონიკური იზომორფიზმით გაიგივებულია R^n სივრცესთან) მოქმედებს ტრანზიტულად R^n სივრცეში. ამიტომ π_n ჯგუფთან ასოცირებული ექვივალენტურობის დამოკიდებულებით (ანუ დინამიკური სისტემით) წარმოქმნილი ინტრანზიტულობის კლასების სიმძლავრე ერთის ტოლია, ე.ი. გვაქვს ერთადერთი კლასი, რომელიც ემთხვევა ძირითად ფაზურ სივრცეს. უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არსებობენ მხოლოდ ყველგან მკვრივი ქვესივრცეების მიმართ

ინვარიანტული ზომები, ამიტომ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ შემთხვევაში ექვივალენტურობის კლასების სიმძლავრე უსასრულოა.

როდესაც ვსაუბრობთ დინამიკური სისტემების გაგრძელების ამოცანაზე, განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევს ისეთი გაგრძელებები, როცა მოცემული დინამიკური სისტემის შესაბამისი ინვარიანტული ზომისათვის ვიხილავთ თვლადად-ადიტიურ გაგრძელებებს. ამ თვალსაზრისით არსებობს დინამიკური სისტემების გაგრძელების შემდეგი მეთოდები:

1) მარჩევსკის მეთოდი;
2) კოდაირასა და კაკუტანის მეთოდი;
3) კაკუტანისა და ოქსტობის მეთოდი;
4) სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდი.

დინამიკური სისტემების გაგრძელების თანამედროვე ასპექტები მოცემულია ცნობილი მათემატიკოსების შრომებში, მონოგრაფიებში თუ სახელმძღვანელოებში (იხილეთ, მაგალითად, [13]-[19], [26], [27], [28], [47], [48], [50], [54], [62], [63]).

დინამიკური სისტემების გაგრძელების სხვადასხვა ასპექტებს შორის გამოიყოფა სამი კონცეფცია:

ა) წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ასპექტი;

ბ) ტოპოლოგიური ასპექტი:

გ) ალგებრული ასპექტი.

დინამიკური სისტემების გაგრძელების ყველაზე ზოგად მეთოდს წარმოადგენს მარჩევსკის მეთოდი. ეს მეთოდი არ არის დამოკიდებული საბაზისო სიმრავლის სტრუქტურაზე და ყოველთვის იძლევა შესაძლებლობას ევკლიდეს სივრცეებში კლასიკური ლებეგის ზომა გაგრძელდეს იზომეტრიკულად ინვარიანტულ თვლადად ადიტიურ ზომამდე. უნდა ვაღინიშნოს, რომ მარჩევსკის მეთოდი წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ხასიათისაა და ის არ იძლევა საწყისი ზომის მაქსიმალურ იზომეტრიულად ინვარიანტულ გაგრძელებას (იხილეთ, მაგალითად, [26], [54].).

გამოიყენა რა დინამიკური სისტემების გაგრძელების ალგებრული ასპექტი, კერძოდ, პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი, ა. ხარაზიშვილმა ამოხსნა სერპინსკის მიერ დასმული ამოცანა ლებეგის ზომის მკაცრი გაგრძელების შესახებ. უფრო მეტიც, სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდით შესაძლებელი გახდა სერპინსკის ამოცანა განზოგადებულიყო ნებისმიერი არათვლად ამოხსნადი ჯგუფებისთვისაც (იხილეთ, მაგალითად, [26]).

შემდგომში ვნახავთ, რომ პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი არის სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის კერძო შემთხვევა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ მოყვანილი მეთოდები პირველად მოცემულ იქნა ა. ხარაზიშვილის შრომებში. შემდგომ კი განვითარებულ და გამოყენებული იყო გ. ფანცულაიასა და ა. კირთაძის მიერ.

პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

ვთქვათ, მოცემულია ნებისმიერი ორი $(G,\cdot)$ და $(H,\cdot)$ ჯგუფი და ვთქვათ, $X \subset G$ ქვესიმრავლეს გააჩნია ზომის თეორიის თვალსაზრისით რაიმე თვისება (σ-სასრულობა, ერგოდულობა, ერთადერთობის თვისება, შტეინჰაუსის თვისება და სხვ.) G-ში. მაშინ ძირითად შემთხვევებში $X \times H$ სიმრავლე ინარჩუნებს იგივე თვისებას $G \times H$ პირდაპირ ნამრავლში.

მოვიყვანოთ მაგალითების სახით რამდენიმე შედეგი, რომლებიც მიღებულია პირდაპირი ნამრავლების მეთოდის გამოყენებით.

მაგალითი 33. პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი არსებით როლს თამაშობს მოცემული დინამიკური სისტემის მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების (ერგოდულობის) თვისების დადგენაში. კერძოდ, თუ (G_1, G_1, μ_1) დინამიკური სისტემა არის მეტრიკულად ტრანზიტული გარდაქმნათა G_1 თვლადი ჯგუფის მიმართ და (G_2, G_2, μ_2) დინამიკური სისტემა მეტრიკულად ტრანზიტულია G_2 გარდაქმნათა ჯგუფის მიმართ, მაშინ მოცემული დინამიკურ სისტემათა ნამრავლი არის მეტრიკულად ტრანზიტული.

აქვე შევნიშნოთ, რომ რადგან დინამიკური სისტემის მეტრიკული ტრანზიტულობა უშუალოდ დაკავშირებულია დინამიკური სისტემის ერთადერთობის საკითხთან, ამიტომ ბუნებრივია, რომ პირდაპირი ნამრავლების მეთოდი ასევე მნიშვნელოვანია მოცემული დინამიკური სისტემის ერთადერთობის საკითხის კვლევაში.

უფრო დაწვრილებით მაგალითი 33-ის შესახებ იხილეთ, [16], [65] შრომებში.

მაგალითი 34. პირდაპირი ნამრავლების მეთოდის საშუალებით განზოგადდა სერპინსკის კარგად ცნობილი ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა G არათვლადი ჯგუფის კარდინალური რიცხვი $card\left(G\right)=\alpha$ არის რეგულარული კარდინალი. კერძოდ, ვთქვათ, მოცემულია G არათვლადი ჯგუფი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$G=G_1\times G_2,\quad G_1\cap G_2=\{e\},$$

სადაც G_1 და G_2 არიან G ჯგუფის ქვეჯგუფები, $card\left(G_1\right)=\omega_1$ და e არის G ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. თუ $\left(G,G,\mu\right)$ არის კვაზიდინამიკური სისტემა, მაშინ ყოველი $X\subset G_1$ არათვლადი სიმრავლისათვის არსებობს $\left(G,G,\mu'\right)$ კვაზიდინამიკური სისტემა, რომელიც არის მოცემული სისტემის გაგრძელება და არსებობს $Y\in I\left(\mu'\right)$ სიმრავლე, რომ

$$X\cdot Y=G\notin I\left(\mu'\right),$$

სადაც $I\left(\mu'\right)$ არის σ-იდეალი, რომელიც წარმოქმნილია μ' ზომის მიმართ ნული ზომის სიმრავლეებით G -ში.

კერძოდ, თუ $X\in I\left(\mu'\right)$, მაშინ G წარმოიდგინება, როგორც μ' ზომის მიმართ ნული ზომის ორი სიმრავლის ალგებრული ნამრავლის სახით.

უფრო დაწვრილებით მაგალითი 34-ის შესახებ იხილეთ [16], [80] შრომებში.

მაგალითი 35. პირდაპირი ნამრავლების მეთოდით შესაძლებელი გახდა უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არასეპარაბელური σ-სასრულო ბორელის ზომების აგება, რომლებიც

ინვარიანტულია ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცეების მიმართ. ერთის მხრივ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ნამდვილ რიცხვთა ყველაშესაძლო მიმდევრობების სივრცეში არსებობს არანულოვანი σ-სასრული $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{B}\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right), \mathbf{R}^{(N)}, \chi\right)$ დინამიკური სისტემა, რომელიც ინვარიანტულია ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. მეორე მხრივ, ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე არსებობს არანულოვანი σ-სასრულო არასეპარაბელური $\left(\mathbf{R}, \boldsymbol{B}(\mathbf{R}), \mathbf{R}, \mu\right)$ დინამიკური სისტემა, რომელიც არის კლასიკური $\left(\mathbf{R}, \mathbf{L}_n, D_n, \lambda_n\right)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელება.

პირდაპირი ნამრავლების მეთოდის გამოყენებით ზემოთ მოცემული დინამიკური სისტემების ნამრავლი წარმოადგენს არანულოვან σ-სასრულო $\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \boldsymbol{B}\left(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}\right), \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \chi \times \mu\right)$ დინამიკურ სისტემას, რომელიც ინვარიანტულია ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ.

მაგალითი 35-ის შესახებ იხილეთ [62], [63].

მაგალითი 36. პირდაპირი ნამრავლების მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელი გახდა არალოკალურად კომპაქტურ არაკომუტატიურ ტოპოლოგიურ ჯგუფში აგებულ იქნა კვაზიდინამიკური სისტემა ყველგან მკვრივი ზმული ქვესივრცის მიმართ.

მაგალითი 36-ის შესახებ იხილეთ [17].

ახლა ვთქვათ, მოცემულია ორი $(G_1, \cdot)$ და $(G_2, \cdot)$ დინამიკური სისტემა და ვთქვთ,

$$\varphi : G_1 \to G_2$$

არის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

დავუშვათ, რომ მოცემული გვაქვს $X \subset G_2$ სიმრავლისათვის რაიმე ზოგადი $P(X)$ თვისება. მაშინ გვაქვს

$$P\left(\varphi^{-1}(X)\right) \Leftrightarrow P(X).$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $P(X)$ თვისება შენარჩუნებადია სიურექციული ჰომომორფიზმის დროს.

კერძოდ, თუ განვიხილავთ კანონიკურ სიურექციულ ჰომომორფიზმს

$$pr_2 : H \times G_2 \to G_2$$

მაშინ მივიღებთ პირდაპირი ნამრავლების მეთოდს, სადაც $H \subset G_1$ და G_1-ის როლში გვაქვს $H \times G_2$.

მაგალითი 37. სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის გამოყენებით ნაჩვენებია, რომ ყოველი არათვლადი კომუტატიური G ჯგუფისათვის არსებობს ორი G-აბსოლუტურად უგულებელყოფადი სიმრავლე A და B, რომელთა პირდაპირი ჯამი $A+B$ გვაძლევს მთელ G ჯგუფს (იხილეთ, მაგალითად, [81], [82]).

მაგალითი 38. სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის გამოყენების შესაძლებელი გახდა ნებისმიერ არათვლად კომუტატიურ ჯგუფზე არაატომური არასეპარაბელური σ-სასრულო მარცხნიდან ინვარიანტული ზომის არსებობის დამტკიცება. ასევე, იგივე მეთოდის გამოყენებით არათვლად ამოხსნად ჯგუფებზე განსაზღვრული არასეპარაბელური მარცხნიდან ინვარიანტული ზომის ტოპოლოგიური წონის ქვემოდან შეფასება ამოხსნადი ჯგუფის კომპოზიციური მწკრივის ფაქტორ-ჯგუფების კარდინალური რიცხვების ტერმინებში (იხილეთ, მაგალითად, [83], [84])

მართებულია შემდეგი წინადადება.

ლემა 22. ვთქვათ, მოცემულია $\left(G_2, dom(\mu), G_2, \mu\right)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა და ვთქვთ,

$$\varphi : G_1 \to G_2$$

არის სიურექციული ჰომომორფიზმი, სადაც $(G_1, \cdot)$ რაიმე არათვლადი ჯგუფია.

განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი ოჯახი

$$S = \left\{\varphi^{-1}(Y) : Y \in dom(\mu)\right\},$$

და განვსაზღვროთ ν ფუნქციონალი შემდეგი პირობით:

$$\nu\left(\varphi^{-1}(Y)\right) = \mu(Y),$$

სადაც $Y \in dom(\mu)$.

მაშინ ν ფუნქციონალი არის ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(3) S არის G_1-ის ქვესიმრავლეთა G_1-ინვარიანტული σ-ალგებრა;

(4) (G_1, S, G_1, ν) არის არაატომური σ-სასრულო დინამიკური სისტემა G_1-ზე.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $Y_1 \in dom(\mu)$ და $Y_2 \in dom(\mu)$ სიმრავლეებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\varphi^{-1}(Y_1) = \varphi^{-1}(Y_2).$$

რადგან φ გადასახვა არის სიურექციული ჰომომორფიზმი ამიტომ

$$Y_1 \triangle Y_2 = \varnothing .$$

მაშასადამე, გვაქვს

$$\nu(Y_1 \triangle Y_2) = 0,$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\nu(Y_1) = \nu(Y_2).$$

ამით ნაჩვენები იყო ν ზომის განსაზღვრის კორექტულობა.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი $X \in S$ სიმრავლე და ნებისმიერი $g \in G_1$ ელემენტი. მაშინ $X = \varphi^{-1}(Y)$ რომელიღაც $Y \in dom(\mu)$ სიმრავლისათვის. თუ $h = \varphi(g)$, მაშინ ადვილია დანახვა იმისა, რომ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$g \cdot X = \varphi^{-1}(h \cdot Y),$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\nu(g \cdot X) = \mu(h \cdot Y) = \mu(Y) = \nu(\varphi^{-1}(Y)) = \nu(X)$$

ტოლობა. ეს ნიშნავს, რომ ν არის G_1-მარცხნიდან ინვარიანტული ზომა.

ლემა 22 ამით დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ G_1-ის μ-ზომად ქვესიმრავლეთა არათვლადი $\{Y_k : k \in I\}$ ოჯახი. ლემა 22-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები

$$\nu\left(\varphi^{-1}\left(Y_j\right)\odot\varphi^{-1}\left(Y_i\right)\right)=\nu\left(\varphi^{-1}\left(Y_j\odot Y_i\right)\right)=\mu\left(Y_j\odot Y_i\right),$$

სადაც $j\in I,\ i\in I$ და „$\odot$" სიმბოლოთი აღნიშნულია საბაზისო სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციებიდან ერთ-ერთი (გაერთიანება, თანაკვეთა, სხვაობა, სიმეტრიული სხვაობა და ა. შ.).

თუ გამოვიყენებთ სიურექციული ჰომომორფიზმების ზემოთ მოყვანილ პრინციპს, მივიღებთ შემდეგ წინადადებას:

ვთქვათ, მოცემულია $\left(G_2, dom\left(\mu\right), G_2, \mu\right)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა და ვთქვთ,

$$\varphi: G_1 \to G_2$$

არის სიურექციული ჰომომორფიზმი, სადაც $\left(G_1,\cdot\right)$ რაიმე არათვლადი ჯგუფია.

განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი ოჯახი

$$S=\left\{\varphi^{-1}\left(Y\right): Y\in dom\left(\mu\right)\right\},$$

და განვსაზღვროთ ν ფუნქციონალი შემდეგი პირობით:

$$\nu\left(\varphi^{-1}\left(Y\right)\right)=\mu\left(Y\right),$$

სადაც $Y\in dom\left(\mu\right)$.

თუ $\left(G_2, dom\left(\mu\right), G_2, \mu\right)$ დინამიკური სისტემა ფლობს რაიმე სიმრავლურ-თეორიულ თვისებას, მაშინ $\left(G_1, S, G_1, \nu\right)$ დინამიკური სისტემაც ფლობს იგივე თვისებას.

ლემა 22-დან და მოყვანილი დებულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი წინადადება.

ლემა 23. ვთქვათ, მოცემულია $\left(G_2, dom\left(\mu\right), G_2, \mu\right)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა და ვთქვთ,

$$\varphi: G_1 \to G_2$$

არის სიურექციული ჰომომორფიზმი, სადაც $\left(G_1,\cdot\right)$ რაიმე არათვლადი ჯგუფია.

თუ არსებობს რაიმე ისეთი $\left(G_2, dom(\mu'), G_2, \mu'\right)$ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემა, რომელიც არის $\left(G_2, dom(\mu), G_2, \mu\right)$ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემის გაგრძელება, მაშინ $\left(G_1, S', G_1, \nu'\right)$ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემა წარმოადგენს $\left(G_1, S, G_1, \nu\right)$ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემის გაგრძელებას, სადაც $\left(G_1, S, G_1, \nu\right)$ და $\left(G_1, S', G_1, \nu'\right)$ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემები შესაბამისად წარმოადგენენ $\left(G_2, dom(\mu), G_2, \mu\right)$ და $\left(G_2, dom(\mu'), G_2, \mu'\right)$ დინამიკური (კვაზიდინამიკური) სისტემების წარმომადგენლებს φ სიურექციული ჰომომორფიზმის დროს.

როგორც ცნობილია, დინამიკური სისტემების გაგრძელება მჭიდროდაა დაკავშირებული ზომის თვალსაზრისით ,,მსუქანი“ გრაფიკის მქონე ფუნქციებთან. ინვარიანტული ზომის გაგრძელების ასეთი მეთოდი პირველად შემოთავაზებულ იქნა კადაირასა და კაკუტანის მიერ თავიანთ შრომაში, რომელიც ეხებოდა ლებეგის ზომის არასეპარაბელურ გაგრძელებას (იხილეთ, [27]).

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდი წარმოადგენს კოდაირა და კაკუტანისა და სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის გარკვეული კომბინაცია.

ვთქვათ, მოცემულია ორი $\left(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1\right)$ და $\left(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2\right)$ არათვლადი დინამიკური სისტემა.

განსაზღვრა 31. ვიტყვით, რომ $\Gamma \subset G_1 \times G_2$ სიმრავლე არის მსუქანი (მასიური) ნამრავლი $\mu_1 \times \mu_2$ ზომის მიმართ $G_1 \times G_2$-ში, თუ $\mu_1 \times \mu_2$ ზომის მიმართ ზომადი ყოველი $Z \subset G_1 \times G_2$ სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $\mu_1 \times \mu_2 (Z) > 0$, გვაქვს

$$\Gamma \cap Z \neq \varnothing.$$

მსუქანი გრაფიკის მქონე ფუნქციის მაგალითი პირველად ააგო ვ. სერპინსკიმ (იხილეთ, [5]).

ვთქვათ, გადასახვა

$$f : G_1 \to G_2$$

არის ჰომომორფიზმი.

განსაზღვრა 32. ვიტყვით, რომ f არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი, თუ f -ის გრაფიკი არის მსუქანი მსუქანი $\mu_1 \times \mu_2$ ნამრავლი ზომის მიმართ $G_1 \times G_2$-ში.

რაიმე

$$f : G_1 \to G_2$$

ფუნქციას ეწოდება ზომადი ზომის მიმართ μ_1, თუ ნებისმიერი $B \in dom(\mu_2)$ სიმრავლისათვის სრულდება თანაფარდობა

$$f^{-1}(B) \in dom(\mu_1).$$

ეს არის კლასიკური განსაზღვრა ფუნქციის ზომადობის მოცემული ზომის მიმართ

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 27. ვთქვათ, მოცემულია $(G_1, \cdot)$ არათვლადი ჯგუფი და $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$ არათვლადი ალბათური დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,

$$f : G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს σ-სასრულო $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ და $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

(ა) $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა წარმოადგენს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;

(ბ) f არის ზომადი $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემის მიმართ.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის დამტკიცება ჩავატაროთ μ_1 და μ_2 მარცხენა-ინვარიანტული ზომებისათვის.

დავუშვათ, რომ $Y_1 \in dom(\mu_2)$ და $Y_2 \in dom(\mu_2)$ სიმრავლეებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$f^{-1}(Y_1)=f^{-1}(Y_2).$$

საიდანაც მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$f^{-1}(Y_1)\vartriangle f^{-1}(Y_2)=\varnothing.$$

ე. ი. გვაქვს

$$f^{-1}(Y_1\vartriangle Y_2)=\varnothing.$$

ამიტომ ადვილია ჩვენება იმისა, რომ

$$(Y_1\vartriangle Y_2)\cap\Gamma_f=\varnothing,$$

სადაც Γ_f არის f ფუნქციის გრაფიკი.

რადგან f გადასახვა არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი, რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქციის გრაფიკი არის მსუქანი, ამიტომ გვექნება

$$\mu_2(Y_1\vartriangle Y_2)=0.$$

მაშასადამე,

$$\mu_2(Y_1)=\mu_2(Y_2).$$

ამით ნაჩვენები იყო μ_1 ზომის განსაზღვრის კორექტულობა.

ახლა დავუშვათ, რომ $Z\in dom(\mu_1\times\mu_2)$ და განვიხილოთ სიმრავლეები

$$Z'=\{x\in E:(x,f(x))\in Z\},$$

$$S=\{Z':Z\in dom(\mu_1\times\mu_2)\}.$$

ცხადია, რომ S არის σ-ალგებრა E სიმრავლეზე და

$$dom(\mu_1)\subset S.$$

S-ზე განვსაზღვროთ ზომა პირობით

$$(\forall Z)(Z\in dom(\mu\times\nu)\Rightarrow\overline{\mu}(Z')=(\mu_1\times\mu_2)(Z)).$$

ვაჩვენოთ $\overline{\mu}$ ზომის განსაზღვრის კორექტულობა.

ვთქვათ, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$Z'=\{x:(x,f(x))\in Z_1\}=\{x:(x.f(x))\in Z_2\},$$

სადაც $Z_1 \in dom(\mu_1 \times \mu_2)$, $Z_2 \in dom(\mu_1 \times \mu_2)$.

Γ_f -ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის გრაფიკი $E{\times}R$ სიმრავლეზე და დავამტკიცოთ, რომ

$$\Gamma_f \bigcap (Z_1 \Delta Z_2) = \phi.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. არსებობს ისეთი $(x, f(x))$ წერტილი მოცემული f ფუნქციის გრაფიკზე, რომ

$$(x, f(x)) \in Z_1 \Delta Z_2 = (Z_1 \setminus Z_2) \bigcup (Z_2 \setminus Z_1).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$(x, f(x)) \in Z_1, \quad (x, f(x)) \notin Z_2$$

ან

$$(x, f(x)) \in Z_2, \quad (x, f(x)) \notin Z_1.$$

ეს კი წინააღმდეგობრივია Z' ელემენტის წარმოდგენასთან, ე.ი. მივიღებთ, რომ

$$\Gamma_f \bigcap (Z_1 \Delta Z_2) = \phi.$$

რადგან Γ_f გრაფიკი $(\mu{\times}\nu)$-მსუქანია $E{\times}R$ ნამრავლში, ამიტომ გვექნება

$$(\mu_1 \times \mu_2)(Z_1 \Delta Z_2) = 0,$$

ეს ნიშნავს, რომ

$$(\mu_1 \times \mu_2)(Z_1) = (\mu_1 \times \mu_2)(Z_2).$$

ამით $\overline{\mu}$ ზომის განსაზღვრის კორექტულობა ნაჩვენებია.

ახლა ვთქვათ,

$$X \in dom(\mu_1), \quad Z = X \times ran(f) \in dom(\mu_1 \times \mu_2).$$

თუ $Z' = X$, მაშინ

$$\bar{\mu}(Z') = \bar{\mu}(X) = (\mu_1 \times \mu_2)(X \times ran(f)) = \mu_1(X) \cdot \mu_2(ran(f)) = \mu_1(X) .$$

ეს ნიშნავს, რომ $\bar{\mu}$ წარმოადგენს μ ზომის გაგრძელებას, ე. ი.

$$\mu_1 \subset \bar{\mu}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$(\forall B)(B \in \mathrm{B}(G_1) \Rightarrow f^{-1}(B) \in S).$$

მართლაც, თუ $x \in f^{-1}(B)$, მაშინ $f(x) \in B$ და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$(x, f(x)) \in G_1 \times B \in dom(\mu_1 \times \mu_2) ,$$

$$S = \{x : (x, f(x)) \in E \times B\} = \{x : x \in f^{-1}(B)\},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$f^{-1}(B) \in S.$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, f ფუნქცია ზომადია μ ზომის გაგრძელებათა $M(\mu_1)$ კლასის მიმართ.

ლემა 24. ვთქვათ, მოცემულია σ-სასრული (G, S, G, μ) დინამიკური სისტემა, რომლისთვისაც სრულდება $\mu(G) = +\infty$ პირობა. მაშინ არსებობს (G, S, G, ν) კვაზიდინამიკური სისტემა, რომელიც ექვივალენტურია მოცემული (G, S, G, μ) დინამიკური სისტემის.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{X_n : n \in N\} \subset dom(\mu)$ არის თვლადი ოჯახი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისა, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

$$G = \bigcup_{n \in N} X_n ;$$

$$(\forall n)(n \in N \Rightarrow \mu(X_n) < +\infty).$$

S მოცემულ σ-ალგებრაზე განვსაზღვროთ ν ზომა შემდეგი პირობით:

$$\nu(X) = \sum_{n \in N} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(X \cap X_n)}{\mu(X_n)}, \qquad (X \in S).$$

ადვილია შემოწმება იმისა, რომ ν ზომა არის ალბათური ზომა S-ზე. ასევე ცხადია, რომ ყოველი $X \in S$ ელემენტისათვის $\nu(X) > 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mu(X) > 0$.

ამ თვალსაზრიზით ჩვენ ვამბობთ, რომ ν და μ ზომები არიან ექვივალენტურები.

თეორემა 27 და ლემა 24-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 28. ვთქვათ, მოცემულია ორი σ-სასრულო $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ და $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$ დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,

$$f : G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი.

მაშინ არსებობს $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(ა) $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა წარმოადგენს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;

(ბ) f არის ზომადი $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემის მიმართ.

თეორემა 28-ის დამტკიცება ხდება იმავე სქემით, როგორც თეორემა 27-ის.

თავი IV

აბსტრაქტული დინამიკური სისტემების სიმრავლურ-თეორიული ასპექტები

4.1. უ. დარჯის ერთი ამოცანის შესახებ

ვთქვათ, G არის სრული სეპარაბელური მეტრიკული ჯგუფი და, როგორც ყოველთვის, $B(G)$-ით აღვნიშნოთ ბორელის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა.

განსაზღვრა 33. $X \subset G$ ბორელის ქვესიმრავლეს ეწოდება ჰაარის ნულზომადი სიმრავლე, თუ არსებობს ν ბორელის ალბათური ზომა G-ზე ისეთი, რომ $\nu(gXh)=0$ ყოველი $g,h \in G$-სათვის. ასეთ შემთხვევაში μ-ს უწოდებენ მარცხენა და მარჯვენა ტრანსვერსალურს.

G-ს ყველა ჰაარის ნულზომადი სიმრავლეთა კლასი ქმნის σ-იდეალს, ხოლო ორმნიშვნელობიანი ალბათური $\mu_{(H,G)}$ ზომას, განსაზღვრული ამ σ-იდეალით, უწოდებენ ორმნიშვნელობიან ჰაარის ზომას G-ზე.

ამ ცნებების შესახებ იხილეთ, [85].

კარგადაა ცნობილი, რომ პირველი კატეგორიის სიმრავლეთა კლასი G-ში ქმნის σ-იდეალს. ორმნიშვნელობიანი ალბათური $\mu_{(C,G)}$ ზომას, განსაზღვრული ამ σ-იდეალით, უწოდებენ ორმნიშვნელობიან კატეგორულ ზომას G-ზე.

$X \subset G$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მცირე ზომის თვალსაზრისით, თუ ის არის ჰაარის ნულზომადი სიმრავლე. ანალოგიურად, $Y \subset G$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მცირე კატეგორიის თვალსაზრისით, თუ ის არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე.

დავუშვათ, რომ P არის წინადადება, რომელიც ფორმულირებულია ჰაარის ნულზომადი, პირველი კატეგორიის სიმრავლეებისა და წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ცნებების ტერმინებში.

განსაზღვრა 34. ვიტყვით, რომ ორადულობის პრინციპი ზომასა და კატეგორიას შორის არის ჭეშმარიტი P წინადადების მიმართ, თუ P ექვივალენტურია P^* წინადადების, რომელიც მიიღება P-სგან ზომისა და კატეგორიის თვალსაზრისით მცირე სიმრავლეების ცნებების ურთიერთ ჩანაცვლებით.

მართებულია შემდეგი წინადადება.

თეორემა 29. ვთქვათ, P არის წინადადება , განსაზღვრული შემდეგნაირად:

„ყოველი ორი პოლონური G_1 და G_2 ჯგუფისათვის და ყოველი $Y \subset G_1$ ჰაარის ნულზომადი სიმრავლისათვის გვაქვს

$$(\forall X)\left(X \subset G_2 \Rightarrow Y \times X \text{ არის ჰაარის ნულზომადი } G_1 \times G_2 \text{ - ში}\right).“$$

მაშინ ორადულობის პრინციპი ჭეშმარიტია P წინადადების მიმართ.

დამტკიცება. დამტკიცება შედგება ორი ეტაპისაგან.

პირველი ეტაპი:

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ X არის ბორელის სიმრავლე. რადგან $Y \subset G_1$ არის ჰაარის ნულზომის სიმრავლე G_1-ში, ამიტომ გვაქვს $\mu_{(H,G_1)}(Y) = 0.$ მეორეს მხვრივ, არსებობს ν ალბათური ბორელის ზომა G_1-ში, რომ $\nu(gYh) = 0$.

განვიხილოთ $Y \times G_2$ ბორელის სიმრავლე. ბორელის $\mu \times \lambda$ ზომისათვის, სადაც λ არის ნებისმიერი ბორელის ალბათური ზომა G_2-ში, გვაქვს

$$\left(\forall (g_1, f_1)\right)\left(\forall (g_2, f_2)\right)\left((g_1, f_1) \in G_1 \times G_2 \,\&\, (g_2, f_2) \in G_1 \times G_2 \Rightarrow \mu \times \lambda\left((g_1, f_1)(Y \times G_2)(g_2, f_2)\right)\right) =$$
$$\mu \times \lambda\left((g_1 Y \times G_2)(g_2, f_2)\right) = \mu \times \lambda\left(g_1 Y g_2 \times G_2\right) = \mu\left(g_1 Y g_2\right)\lambda\left(G_2\right) = 0.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $Y \times G_2$ სიმრავლე არის ჰაარის ნულზომის სიმრავლე $G_1 \times G_2$-ში. საიდანაც გვექნება, რომ ყოველი $X \subset G_2$ სიმრავლისათვის

$$\mu_{(H, G_1 \times G_2)}(Y \times X) = 0.$$

მეორე ეტაპი:

ამ შემთხვევაში უნდა ვაჩვენოთ, რომ P^* წინადადება, რომელიც მიიღება P-სგან ზომისა და კატეგორიის თვალსაზრისით მცირე სიმრავლეების ცნებების ურთიერთ ჩანაცვლებით, აგრეთვე სრულდება. ე. ი. უნდა ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი წინადადება

„ყოველი ორი პოლონური G_1 და G_2 ჯგუფისათვის და ყოველი $Y \subset G_1$ პირველი კატეგორიის სიმრავლისათვის გვაქვს

$(\forall X)\big(X \subset G_2 \Rightarrow Y \times X$ პირველი კატეგორიის $G_1 \times G_2$ - ში$\big)$.“

თუ $Y \subset G_1$ სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის მაშინ

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Y_n ,$$

სადაც ყოველი $n \in \mathbf{N}$ ნატურალური რიცხვისათვის Y_n არსად მკვრივია G_1-ში.

ვაჩვენოთ, რომ $Y_n \times G_2$ სიმრავლე არის არსად მკვრივი $G_1 \times G_2$-ში ყოველი $n \in \mathbf{N}$-სათვის.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ არსებობს არაცარიელი ღია სიმრავლეები $U_1 \subset G_1$ და $U_2 \subset G_2$, რომ $U_1 \times U_2 \subset \operatorname{int}\big(cl\left(Y_n \times G_2\right)\big)$. რადგან $\operatorname{int}\big(cl\left(Y_n \times G_2\right)\big) = \operatorname{int}\big(cl\left(Y_n\right)\big) \times G_2,$ ამიტომ $U_1 \subset \operatorname{int}\big(cl\left(Y_n\right)\big)$. ეს კი წინააღმდეგობრივია იმ ფაქტთან, რომ Y_n არსად მკვრივია G_1-ში.

საბოლოოდ გვაქვს

$$Y \times G_2 = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} Y_n\right) \times G_2 = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (Y_n \times G_2)\right),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $Y_n \times G_2$ სიმრავლე არის არსად მკვრივი ყოველი $n \in \mathbf{N}$-სათვის. რადგან $X \times Y$ არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე $G_1 \times G_2$-ში, საიდანაც მივიღებთ

$$\mu_{\left(C, G_1 \times G_2\right)}\left(Y \times X\right) = 0 .$$

ამით თეორემა 29 დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 35. ლოკალურად კომპაქტურ ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ ჯგუფს, რომლის მარცხენა ჰაარის ზომა ემთხვევა მარჯვენა ჰაარის ზომას ეწოდება უნიმოდულარული ჯგუფი.

ცხადია, რომ ყოველი კომუტატიური ლაკალურად კომპაქტური σ-კომპაქტური ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფი არის უნიმოდალური. უნიმოდალური ჯგუფის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ჰაარის ზომა არის ორმხრივად ინვარიანტული.

დარჯის მიერ დასმული იქნა შემდეგი ამოცანა (იხილეთ, [29]):

შესაძლებელია თუ არა, რომ G პოლონური ჯგუფი წარმოვიდგინოთ პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

თუ μ_H და μ_C შესაბამისად აღვნიშნავთ $\mu_{(H,G)}$ და $\mu_{(C,G)}$ ზომების შევიწროებას $dom\left(\mu_{(H,G)}\right) \cap dom\left(\mu_{C,G}\right)$ σ ალგებრაზე, მაშინ დარჯის ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი სახით:

არიან თუ არა μ_H და μ_C ზომები წყვილ-წყვილად სინგულარული.

[30] და [31] შრომებში ნაჩვენებია, რომ ყოველი ლაკალურად კომპაქტური არაკომპაქტური პოლონური ჯგუფების უსასრულო ნამრავლი წარმოიდგინება არათანამკვეთი ჰაარის ნულზომადი სიმრავლისა და პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანების სახით, რაც წარმოადგენს დარჯის ამოცანის ნაწილობრივ ამონახსნ. ჩვენ წარმოვადგენთ დამტკიცების სხვა გზას უნიმოდალური არა კომპაქტური პოლონური ჯგუფების ოჯახებისათვის.

ლემა 25. ყოველი უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი წარმოიდგინება ჰაარის ნულზომადი სიმრავლისა და არათანამკვეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანების სახით.

ლემა 25-ის დამტკიცების სქემა მოცემულია [7]-ში.

თეორემა 29 და ლემა 25-დან გამომდინარეობა შემდეგი წინადადება.

შედეგი 8. ვთქვათ, G_i $\left(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\}\right)$ არის პოლონური ჯგუფი და ვთქვათ, G_1 არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი. მაშინ $G = \prod_{i \in \mathbf{N}} G_i$ წარმოიდგინება არათანამკვეთი პირველი კატეგორიის სიმრავლის გაერთიანების სახით.

დამტკიცება. ლემა 25-ის თანახმად G_1 წარმოიდგინება ჰაარის ნულზომადი X_1 სიმრავლისა და არათანამკვეთი პირველი კატეგორიის X_2 სიმრავლის გაერთიანების სახით.

დავუშვათ, რომ

$$Y_1 = X_1 \times \prod_{k>1} G_k \quad \text{და} \quad Y_2 = X_2 \times \prod_{k>1} G_k \,.$$

თეორემა 29-ის თანახმად Y_1 არის ჰაარის ნულზომის სიმრავლე G-ში, ხოლო Y_2 კი პირველი კატეგორიის სიმრავლე G-ში. ცხადია, რომ

$$G = Y_1 \cup Y_2, \quad Y_1 \cap Y_2 = \varnothing.$$

ამით შედეგი 8 დამტკიცებულია.

ვთქვათ, $\left\{\left(X_i, M_{i,}\mu_i\right) : i \in \mathbf{N}\right\}$ არის ზომად სივრცეთა მიმდევრობა ყოველი $i \in \mathbf{N}$-სათვის, ρ_i არის მეტრიკა X_i-ში. დავუშვათ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) ყოველი $\left(X_i, \rho_i\right)$ არის ლოკალურად კომპაქტური მეტრიკული სივრცე;

(ბ) ყოველი M_i შეიცავს X_i-ის $B\left(X_i\right)$ ბორელის σ-ალგებრას და μ_i არის რეგულარული რადონის ზომა X_i-ში;

(გ) ყოველი i-სათვის , ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისათვის არსებობს X_i-ის ბორელის ქვესიმრავლეთა $\left\{A_i : i \in \mathbf{N}\right\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $d_i\left(A_j\right) < \delta$ და $X_i = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} A_j$, სადაც $d_i\left(A_j\right)$ არის A_j სიმრავლის დიამეტრი X_i-ში.

ვთქვათ,

$$X = \prod_{i \in \mathbf{N}} X_i$$

და დავუშვათ, რომ X აღჭურვილია ნამრავლი ტოპოლოგიით. $\mathfrak{R}$-ით აღვნიშნოთ ყველა $R \subset X$ მართკუთხედების ოჯახი, რომლებსაც აქვთ შემდეგი სახე

$$R = \prod_{i \in \mathbf{N}} R_i \quad \left(R_i \in B\left(X_i\right)\right)$$

და

$$0 \leq \prod_{i \in \mathbf{N}} \mu_i\left(R_i\right) = \lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \mu_i\left(R_i\right) < +\infty.$$

ახლა $R \in \mathfrak{R}$-სათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\tau(R) = \prod_{i \in \mathbf{N}} \mu_i\left(R_i\right).$$

დავუშვათ $E \subset X$ სათვის

$$\tau^*(E) = \inf\left\{\sum \tau\left(R_j\right) : E \subset \bigcup R_j\right\}.$$

აგრეთვე, შევთანხმდეთ რომ $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0, \quad +\infty \cdot +\infty = +\infty$.

ლემა 26. τ^* ფუნქცია არის გაზე ზომა X-ზე. ვთქვათ, M არის X-ის ქვესიმრავლეთა ისეთი σ-ალგებრა, რომლების ზომადია τ^*-ის მიმართ და ვთქვათ, μ არის ზომა X-ზე, მიღებული τ^*-ის შევიწროების შედეგად $B(X)$-ზე. მაშინ ყოველი $R = \prod_{i \in \mathbf{N}} R_i \quad \left(R_i \in B\left(X_i\right)\right)$ გვაქვს $\mu(R) = \mu\left(\prod_{i \in \mathbf{N}} R_i\right)$. თუ ყოველი X_i სივრცე შეიცავს ისეთ თანაუკვეთ A_i და B_i სიმრავლეებს, რომ $\mu_i\left(A_i\right) = \mu_i\left(B_i\right) = 1$, მაშინ μ არ არის σ-სასრული. დასასრულს, ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი $\left(X_i, \rho_i\right)$ არის M_i-ზომადი. თუ ყოველი μ_i არის მარცხენა-ინვარიანტული ზომა M_i-ზე, მაშინ ის არის მარცხენა-ინვარიანტული X-ზე. შესაბამისად, თუ ყოველი μ_i არის მარჯვენა-ინვარიანტული ზომა M_i-ზე, მაშინ ის არის მარჯვენა-ინვარიანტული X-ზე.

ლემა 26-ის დამტკიცება მოყვანილია [49]-ში.

ლემა 26-დან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი ლემა.

ლემა 27. ლემა 26-ის პირობებში, თუ ყოველი $i \in \mathbf{N}$-სათვის X_i არის პოლონური ჯგუფი და μ_i არის ორმხრივად ინვარიანტული ბორელის ზომა X_i-ზე, მაშინ μ არის ორმხრივად ინვარიანტული ბორელის ზომა X-ზე.

დამტკიცება. μ ზომის განსაზღვრის თანახმად, $g=\{g_i : i \in \mathbf{N}\}$, $f=\{f_i : i \in \mathbf{N}\} \in X$ და $E \in B(X)$-სათვის გვაქვს

$$\mu(gEf) = \inf\left\{\sum \tau(R_j) : gEf \subset \bigcup R_j\right\} = \inf\left\{\sum \tau(R_j) : E \subset \cup g^{-1}R_j f^{-1}\right\} =$$
$$= \inf\left\{\sum \tau\left(g^{-1}R_j f^{-1}\right) : E \subset \cup g^{-1}R_j f^{-1}\right\} = \inf\left\{\sum \tau(R_j) : E \subset \cup R_j\right\} = \mu(E).$$

ლემა 28. ვთქვათ, $i \in \mathbf{N}$ და G_i არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი, რომელიც არ არის კომპაქტური და ვთქვათ, μ_i არის ჰაარის ზომა G_i-ზე. მაშინ ბორელის μ ზომა, რომელიც განსაზღვრულია ლემა 28-ში არის ორმხრივად ინვარიანტული ჰაარის ნულზომის გენერატორი $G=\prod_{i\in\mathbf{N}} G_i$.

ლემა 29. ვთქვათ, $k \in \mathbf{N}$ და $\{G_k : k \in \mathbf{N}\}$ არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფთა ოჯახი, რომელიც არ არის კომპაქტი. ვთქვათ, λ_k არის ჰაარის ზომა G_k-ზე და H არის $\prod_{k\in\mathbf{N}} Y_k$ სახის ბორელის აზრით ზომადი მართკუთხედთა ისეთი კლასი, რომ

$$card\left(\{k : 0 \le \lambda_k(Y_k) < +\infty\}\right) = \omega.$$

თუ $X \subset \prod_{i\in\mathbf{N}} G_i$ დაიფარება H-ის ელემენტთა თვლადი გაერთიანებით, მაშინ X არის shy-სიმრავლე შემდეგ ნამრავლში $G=\prod_{i\in\mathbf{N}} G_i$.

ლემა 30. ვთქვათ, $i \in \mathbf{N}$ და G_i არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი, რომელიც არ არის კომპაქტური. მაშინ $\prod_{k\in\mathbf{N}} G_k$ ჯგუფის ყოველი კომპაქტური ქვესიმრავლე არის ორმხრივად ინვარიანტული ჰაარის ნულზომის სიმრავლეებით წარმოქმნილი ჰაარის ნულზომის სიმრავლე.

ლემა 28-30-ის დამტკიცება მოცემულია [19] წიგნში.

ლემა 31. ვთქვათ, $i \in \mathbf{N}$ და G_i არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი, რომელიც არ არის კომპაქტური და ვთქვათ, μ_i არის ჰაარის ზომა G_i-ზე. მაშინ ბორელის μ ზომა, რომელიც განსაზღვრულია ლემა 28-ში არის ჰაარის ნულზომის გენერატორი $G = \prod_{i \in \mathbf{N}} G_i$.

თეორემა 30. ვთქვათ, $i \in \mathbf{N}$ და G_i არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი, რომელიც არ არის კომპაქტური და ვთქვათ, μ_i არის ჰაარის ზომა G_i-ზე. მაშინ ბორელის μ ზომა, რომელიც განსაზღვრულია ლემა 28-ში კონცენტრირებულია პირველი კატეგორიის სიმრავლეზე, რომელიც არ დაიფარება კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით $G = \prod_{i \in \mathbf{N}} G_i$ -ში.

დამტკიცება. ლემა 25-ის თანახმად, G_1 წარმოიდგინება არათანამკვეთი ჰაარის ნულზომის X_1 სიმრავლისა და პირველი კატეგორიის X_2 სიმრავლის გაერთიანების სახით. რადგან $\mu_1(X_1) = 0$ და $\mu\left(X \times \prod_{k>1} G_k\right) = 0$, ამიტომ

$$A = X_1 \times \prod_{k>1} G_k$$

სიმრავლე არის ჰაარის ნულზომის. რადგან μ კონცენტრირებულია

$$B = X_2 \times \prod_{k>1} G_k$$

სიმრავლეზე, ამიტომ თეორემა 29-ის თანახმად ეს სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე G-ში.

ვაჩვენოთ, რომ B არ დაიფარება G-ის კომპაქტური სიმრავლეების თვლადი გაერთიანების სახით. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $\{F_k : i \in \mathbf{N}\}$ არის კომპაქტების ისეთი თვლადი ოჯახი, რომელიც ფარავს G-ის. ლემა 30-ის თანახმად, B არის ჰაარის ნულზომის სიმრავლე და გვექნება, რომ $G = A \cup B$ და ის არის ჰაარის ნულზომის სიმრავლე, რაც წინააღმდეგობაა.

4.2. აბსტრაქტული დინამიკური სისტემები სიმრავლეთა თეორიის მოდელებში

ვთქვათ, E პოლონური სივრცეა და დავუშვათ, რომ E სივრცე აღჭურვილია σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომით.

[85]-ის მიხედვით კომპაქტურ, სრულყოფილ, ნული ზომის სიმრავლეებს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ღერძზე უწოდებენ კანტორის სიმრავლეებს.

დ. ფრემლინის მიერ დასმული იქნა შემდეგი ამოცანები (იხილეთ, [86].

ამოცანა 3. ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ და λ^* -თი აღნიშნულია ლებეგის გარე ზომა. $\lambda^*(X)=0 \Leftrightarrow \exists$ბორელის ალბათური ისეთი μ ზომა, რომ $(\forall t)(t \in \mathbf{R} \Rightarrow \mu(X+t)=0)$?

ლემა 32.(**ZFC+CH**) თეორიაში ამოცანა 3-ზე პასუხი უარყოფითია.

ლემა 32-ის შესახებ იხილეთ, [86].

ლემა 33. (**ZFC**) სიმრავლეთა თეორიაში ამოცანა 1-ზე პასუხი უარყოფითია.

ლემა 33 იხილეთ, [86] შრომაში.

ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ და $\lambda^*(X)>0$ და ვთქვათ, μ არის ბორელის ალბათური ზომა. ვიტყვით, რომ μ გამოსახავს X-ის დადებით ზომას, თუ არსებობს $t \in \mathbf{R}$ რიცხვი, რომ

$$\mu^*(X+t)>0.$$

ამოცანა 4. არსებობს თუ არა ისეთი დიფუზიური სინგულარული ბორელის ალბათური μ ზომა, რომ ყოველი $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის, რომლისთვისაც $\lambda^*(X)>0$, არსებობს $t \in \mathbf{R}$ რიცხვი, რომ $\mu^*(X+t)>0$?

[86] შრომაში ჩამოყალიბებულია ამოცანა 4-ის ანალოგი კატეგორიებისათვის.

შევნიშნოთ, რომ ეს შედეგი არსებითად აზოგადებს [87] და [88] შრომებში მიღებულ წინადადებებს.

განსაზღვრა 36. ვიტყვით, რომ მკაცრი ორადულობის პრინციპი ზომასა და კატეგორიას შორის არის ჭეშმარიტი, თუ ზომასა და კატეგორიას შორის ორადულობის პრინციპი ჭეშმარიტია ყოველი ისეთი წინადადებისათვის, რომელიც ფორმულირებულია ჰაარის ნულ სიმრავლეებით, პირველი კატეგორიის სიმრავლეებით და წმინდა სიმრავლურ-თეორიული ცნებებით.

შემდეგი წინადადება ცნობილია, როგორც ერდოშ-სერპინსკის ორადულობის პრინციპი.

ლემა 34 (ორადულობის პრინციპი). თუ მართებულია კონტინუუმის ჰიპოთეზა, მაშინ ჭეშმარიტია მკაცრი ორადულობის პრინციპი წრფივ ლებეგის ზომასა და ბერის კატეგორიას შორის.

შენიშვნა. ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$. ამ სიმრავლეს ეწოდება სერპინსკის სიმრავლე, თუ არის არათვლადი და ყოველი ლებეგის ნული ზომის Y სიმრავლისათვის $X \cap Y$ თანაკვეთა არა უმეტეს თვლადია (იხილეთ, [14]). ყველა შესაძლო სერპინსკის სიმრავლეთა ოჯახი ქმნის σ-იდეალს, რომელიც ინვარიანტულია ისეთი გარდაქმნების მიმართ $\mathbf{R}$ რიცხვით ღერძზე, რომლებიც ინარჩუნებენ $\mathbf{R}$-ის ყველა ლებეგის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა σ-იდეალს. შევნიშნოთ, რომ თუ მივიღებთ

$$\text{(MA)}\&\left(2^{\omega} > \omega_1\right)$$

წინადადებას, მაშინ არ არსებობს სერპინსკის სიმრავლე. სერპინსკიმ დაამტკიცა, რომ კონტინუუმის ჰიპოთეზის მიღების შემთხვევაში $\mathbf{R}$-ზე არსებობს სერპინსკის სიმრავლე (იხილეთ, [14]). აგრეთვე შევნიშნოთ, რომ სერპინსკის სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე და არათვლადი ქვესიმრავლე სერპინსკის სიმრავლისა არ არის ლებეგის აზრით ზომადი (იხილეთ, [14]), საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\lambda^*\left(X\right) > 0$.

ანალოგიურ შედეგს მივიღებთ ყოველი დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომისათვის $\mathbf{R}$-ზე. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ყოველი სერპინსკის სიმრავლე არის კონტრმაგალითი 3-4 ამოცანებისათვის **(ZFC)&(CH)** სიმრავლეთა თეორიაში.

განვსაზღვროთ P წინადადება შენდეგნაირად:

$(\exists X)(X \subset \mathbf{R} \& \lambda^*(X) > 0 \Rightarrow (\forall Y)(\forall t)(Y$ პირველი კატეგორიის სიმრავლეა $\mathbf{R}$-ზე $\& t \in \mathbf{R})$
$\Rightarrow card(x + t \cap Y) \leq \omega)$.

მაშინ P^* წინადადება განვსაზღვროთ შემდეგი ფორმით:

$(\exists X)(X \subset \mathbf{R} \& X$ არ არის პირველი კატეგორიის $\Rightarrow (\forall Y)(\forall t)(\lambda(Y) = 0 \; \& t \in \mathbf{R})$
$\Rightarrow card(x + t \cap Y) \leq \omega)$.

რადგან P წინადადება ჭეშმარიტია (ZFC&CH) სიმრავლეთა თეორიაში, ამიტომ ერდოშ-სერპინსკის ორადულობის თეორემის თანახმად P^* წინადადება აგრეთვე ჭეშმარიტია (ZFC&CH) სიმრავლეთა თეორიაში.

ლემა 35. (ZF&DC &AD) სიმრავლეთა თეორიაში ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით.

შევნიშნოთ, რომ ანალოგიური შედეგი მართებულია სიმრავლეთა თეორიის სხვა მოდელშიც (იხილეთ, [6]).

[25] შრომაში დამტკიცებულია შემდეგი წინადადება.

ლემა 36. (ZF&DC) მოდელში ნამდვილ რიცხვთა $S \in \mathbf{R}$ ღერძის ქვესიმრავლე არის ჰაარის ნულზომის მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ის არის ლებეგის ნულზომის ქვესიმრავლე $\mathbf{R}$-ში.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ზომიანი (E_1, S_1, μ_1) და (E_2, S_2, μ_2). ზომებს μ_1 და μ_2 ეწოდებათ იზომორფულები, თუ არსებობს ისეთი ზომადი იზომორფიზმი

$$\varphi : E_1 \to E_2$$

ისეთი, რომ

$$(\forall X)(X \in S_1 \Rightarrow \mu_1(X) = \mu_2(\varphi(X))).$$

ლემა 37. ვთქვათ, E_1 და E_2 პოლონური სივრცეებია და ვთქვათ, და μ_1 არის ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომა E_1-ში და μ_2 არის ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომა E_2-ში. მაშინ არსებობს ბორელის იზომორფიზმი

$\varphi : (E_1, B(E_1)) \to (E_2, B(E_2))$

ისეთი, რომ ყოველი $X \in B(E_1)$-სათვის

$\mu_1(X)=\mu_2(\varphi(X)).$

ლემა 37-ის დამტკიცება იხილეთ, [37]-ში.

ვთქვათ, E არის პოლონური სივრცე და μ არის ამ სივრცეში განსაზღვრული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომა.

ლემა 38. (ZF&DC&AD) მოდელში μ ზომის $\overline{\mu}$ გასრულება განსაზღვრულია E სივრცის მთელ ბულეანზე.

ახლა ვთქვათ, E არის პოლონური სივრცე და μ არის ამ სივრცეში განსაზღვრული ბორელის σ-სასრული ზომა. მაშინ მართებულია შემდეგი ლემა.

ლემა 39. (ZF&DC&AD) მოდელში

$$(\forall X)\left(X\subset E\Rightarrow \mu^*(X)=\mu_*(X)=\overline{\mu}(X)\right).$$

ლემა 40. (ZF&DC&AD) მოდელში ამოცანა3-სათვის მართებულია შემდეგი პასუხი:

$X\subset\mathbf{R}$ სიმრავლისათვის $\lambda^*(X)=0$ ტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს ბორელის ალბათური ზომა μ ისეთი, რომ ყოველი $t\in\mathbf{R}$ რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\mu^*(X+t)=0.$$

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, $X\subset\mathbf{R}$ და $\lambda^*(X)=0$. რადგან $\lambda^*(X)=\lambda(X)=0$, ამიტომ არსებობს ბორელის სიმრავლე $Y\subset X$ და $\lambda(Y)=0$. ლემა 5-ის თანახმად არსებობს ბორელის ალბათური ზომა μ, რომ $\mu(Y-h)=0$ ყოველი $h\in\mathbf{R}$-სათვის. რადგან $X-h\subset Y-h$ და $Y-h$ არის ბორელის, ამიტომ ყოველი $h\in\mathbf{R}$-სათვის გვაქვს

$\mu^*(X-h)\le\mu(Y-h)=0.$

საკმარისობა. ვთქვათ, გვაქვს ისეთი ბორელის ალბათური ზომა μ, რომ $\mu^*(X+t)=0$ ყოველი $t\in\mathbf{R}$-სათვის. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\lambda^*(X)=0.$ დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $\lambda^*(X)>0.$ რადგან $\lambda^*(X)=\lambda_*(X)$,

ამიტომ არსებობს ისეთი ბორელის სიმრავლე $Y \subset X$, რომ $\lambda(Y) > 0$. ლემა 5-ის თანახმად არსებობს ისეთი $t_0 \in \mathbf{R}$ ზვრა, რომ $\mu(Y + t_0) > 0$.

ლემა 8-ის თანახმად გვაქვს

$$\mu^*(X + t_0) = \mu_*(X + t_0) \geq \mu(Y + t_0) > 0,$$

რომელიც წინააღმდეგობრივი დაშვებასთან.

თეორემა 31. ამოცანა 3 დამოუკიდებელია (ZF&DC) თეორიაში.

დამტკიცება. ვიცით, რომ (ZFC&CH) და (ZFC) თეორიაში პასუხი ამოცანა 3-ზე უარყოფითია. მეორეს მხრივ, ლემა 9-ის თანახმად მივიღებთ, რომ ამოცანა 3 დამოუკიდებელია (ZF&DC) თეორიაში.

ზუსტად ანალოგიური მსჯელობებით მივიღებთ შემდეგი თეორემის მართებულობას.

თეორემა 32. ამოცანა 4 დამოუკიდებელია (ZF&DC) თეორიაში.

ცნობილი უნგრელი მათემატიკოსის პ. ერდოშის მიერ ნაშრომში დასმული იყო შემდეგი ამოცანა:

ამოცანა 5. არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ ლებეგის აზრით ზომადი E სიმრავლე, რომლის ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს?

ამ ამოცანის შესახებ იხილეთ, [89], [90].

ამ თვალსაზრისით ერდოშმა გამოთქვა მოსაზრება, რომ ევკლიდური სიბრტყის შემთხვევისათვის უმცირესი ასეთი საუკეთესო მუდმივა არის

$$c_0 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

რიცხვი.

ერდოშის ამოცანა განხილული იყო სხვადასხვა ავტორების მიერ. მაგალითად, იხილეთ, [91].

ჩვენს მიერ განხილულ იქნა ერდოშის პრობლემის გარკვეული ვარიანტი. კერძოდ:

არსებობს თუ არა ისეთი p სასრული რიცხვი, რომ E სიმრავლე რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს?

ე. ი. როგორ სახეს მიიღებს ერდოშის ამოცანა ლებეგის გარე ზომის შემთხვევაში.

კარგადაა ცნობილი, რომ თუ ევკლიდური სიბრტყის E ქვესიმრავლის ლებეგის ზომა არის $+\infty$, მაშინ ყოველი დადებითი s რიცხვისათვის E შეიცავს s ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

ჩვენს მიერ ნაჩვენები იქნება, რომ ანალოგიური შედეგი არ არის მართებული გარე ზომის შემთხვევაში. კერძოდ, აგებული იქნება ევკლიდური სიბრტყის ისეთი ქვესიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$, და ყოველი დადებითი s რიცხვისათვის E არ შეიცავს s ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

ამისათვის დაგვჭირდება რამდენიმე დამხმარე დებულება.

ვთქვათ, $L(x,y)$ არის წრფე, რომელიც გავლებულია x და y წერტილებზე. ყოველი $r>0$ რიცხვისათვის სიმრავლეს

$$C_{(x,y,r)}=\left\{z\in R^2:\rho\big(z,L(x,y)\big)=r\right\},$$

სადაც ρ–თი აღნიშნულია R^2 სივრცის ჩვეულებრივი მეტრიკა, ვუწოდოთ ცილინდრი R^2–ში, ხოლო $L(x,y)$ წრფეს კი ვუწოდოთ ამ ცილინდრის სიმეტრიის ღერძი.

ლემა 41. ვთქვათ, $C_{(x,y,r)}$ არის ცილინდრი R^2–ში და $L(x,y)$ არის მისი სიმეტრიის ღერძი. თუ l არის წრფე R^2–ში, რომელიც არ არის პარალელური $L(x,y)$–ის, მაშინ

$$card\left(C_{(x,y,r)}\cap l\right)\le 2.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x(0,1)$ და $y(0,0)$.

დავუშვათ, რომ l წრფე განსაზღვრულია შემდეგი განტოლებით

$$\frac{z_1 - b_1}{c_1} = \frac{z_2 - b_2}{c_2},$$

სადაც ვექტორები $b(b_1, b_2)$ და $e(0,1)$ არ არიან კოლინეარულნი.

ამ შემთხვევაში $C_{(x,y,r)}$ ცილინდრისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$C_{(x,y,r)} = \left\{ (z_1, z_2) \in R^2 : z_1^{\,2} = r^2 \right\}.$$

l წრფის პარამეტრული სახის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$z_k = b_k + c_k t \qquad (k = 1, 2; t \in R).$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ $z_1^{\,2} = r^2$

პარამეტრულ განტოლებას, მივიღებთ რომ $C_{(x,y,r)} \cap l$ თანაკვეთის წერტილები არაუმეტეს ორია.

ამით ლემა 41 დამტკიცებულია.

ახლა m_2–ით აღვნიშნოთ ლებეგის ორგანზომილებიანი კლასიკური ზომა, ხოლო $\boldsymbol{c}$-თი კი კონტინუუმის სიმძლავრე.

მართებულია შემდეგი ლემა.

ლემა 42. ვთქვათ, F არის ბორელის აზრით ზომადი ქვესიმრავლე R^2–ში, სადაც $0 < m_2(F) < \infty$. მაშინ F არ დაიფარება ცილინდრთა $\{C_i : i \in I\}$ ოჯახით, სადაც $card(I) < \boldsymbol{c}$.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო. დავუშვათ, რომ F დაიფარება ცილინდრთა $\{C_i : i \in I\}$ ოჯახით, სადაც $card(I) < \boldsymbol{c}$.

დავუშვათ, რომ L_i არის სიმეტრიის ღერძი C_i ცილინდრის ყოველი i–სთვის. ვთქვათ, L არის წრფე, რომელიც არ არის პარალელური $\{L_i : i \in I\}$ წრფეების. ფუბინის თეორემის თანახმად, არსებობს L წრფის ისეთი ძვრა $L + a$, რომ $m_a(L + a \cap F) > 0$, სადაც m_a აღნიშნავს ლებეგის წრფის ზომას $L + a$–ზე. მაშასადამე, $L + a \cap F$ თანაკვეთის კარდინალური რიცხვი ტოლია $\boldsymbol{c}$–სი. ლემა 41–ის თანახმად, $L + a \cap C_i$ თანაკვეთის კარდინალური რიცხვი არ აღემატება 2–ს. მაშასადამე,

$$card\left(\left(L+a\cap F\right)\setminus\bigcup_{i\in I}\left(L+a\cap C_i\right)\right)=\boldsymbol{c}.$$

ბოლო დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$card\left(\left(L+a\cap\left(F\setminus\bigcup_{i\in I}C_i\right)\right)\right)=\boldsymbol{c},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ F არ დაიფარება ცილინდრთა $\{C_i : i\in I\}$ ოჯახით.

ლემა 43. არსებობს ისეთი $D\subset R^2$ სიმრავლე, რომ:

ა) D–ს თანაკვეთას სიბრტყის ყოველ ბორელის დადებით ზომიან სიმრავლესთან გააჩნია დადებითი m_2 –ზომა;

ბ) D არ შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის ყველა წვეროს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{F_\xi : \xi<\varphi\}$ არის ბორელის აზრით ზომადი სიბრტყის ქვესიმრავლეთა მიმდევრობა, რომელთაც გააჩნიათ დადებითი m_2 ზომა, სადაც φ –თი აღნიშნულია პირველი ორდინალური რიცხვი, რომლებიც შეესაბამებიან კონტინუუმის სიმძლავრეს.

ვთქვათ, $x_0\in F_0,\ x_1\in F_1\setminus\{x_0\}$ და $x_2=F_2\setminus\left(\{x_0\}\cup\{x_1\}\cup C_{(x_0,x_1,r(x_0,x_1))}\right)$, სადაც $r(x_0,x_1)=\dfrac{2}{\rho(x_0,x_1)}$ და ρ აღნიშნავს ჩვეულებრივ მანძილს x_0 და x_1 წერტილებს შორის სიბრტყეზე.

დავუშვათ, რომ $\xi<\varphi$–სთვის განსხვავებულ წერტილთა $\{x_\vartheta : \vartheta<\xi\}$ ნაწილობრივი მიმდევრობა, რომლებსაც გააჩნია შემდეგი ორი თვისება, უკვე აგებულია.

(1) $\vartheta<\xi$ –თვის გვაქვს $x_\vartheta\in F_\vartheta$;

(2) სიმრავლე $\{x_\vartheta : \vartheta<\xi\}$ არ შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის ყველა წვეროს.

დავუშვათ, რომ

$$A_\xi = F_\xi \setminus \left(\bigcup_{(x,y)\in\{x_\vartheta:\vartheta<\xi\}^2} C_{(x,y,r(x,y))} \bigcup_{\vartheta<\xi} (x_\vartheta) \right).$$

ლემა 42–ის თანახმად, ეს სხვაობა არ არის ცარიელი. ახლა x_ξ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$x_\xi \in A_\xi .$$

ცხადია, რომ განსხვავებულ წერტილთა $\{x_\xi : \xi < \varphi\}$–მიმდევრობა უკვე აგებულია და ფლობს შემდეგ თვისებებს:

1) $\xi < \varphi$ –თვის გვაქვს $x_\xi \in F_\xi$;

2) სიმრავლე $\{x_\xi : \xi < \varphi\}$ არ შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის ყველა წვეროს.

ვთქვათ, რომ $D = \{x_\xi : \xi < \varphi\}$.

ცხადია, რომ ა) პირობა შესრულებულია.

ბ) პირობის შესამოწმებლად დავუშვათ საწინააღმდეგო. დავუშვათ, რომ $x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, x_{\xi_3}$ არის სამი წერტილი D სიმრავლიდან, რომლისთვისაც $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$, და სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებიც ეს წერტილებია, არის ერთის ტოლი. ჩვენი აგებიდან ჩანს, რომ x_{ξ_3} წერტილი არ შედის D სიმრავლეში და შესაბამისად, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

თეორემა 33. არ არსებობს სასრული მუდმივა p ისეთი, რომ ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

დამტკიცება. ვთქვათ, D_a არის წრე , რომლის ცენტრი მდებარეობს (0,0) წერტილში და $m_2(D_a) = a$ ყოველი $a \in R^+$ –სთვის (საკმარისია, რომ $r_a = \sqrt{\dfrac{a}{\pi}}$). დავუშვათ, რომ $E_a = D \cap D_a$, სადაც D არის სიმრავლე, რომელიც აგებულია ლემა 43–ში. შევნიშნოთ, რომ $m_2^*(E_a) = a$, ყოველი $a \in R^+$ –სთვის.

დავუშვათ, რომ p არის ისეთი სასრული მუდმივა, რომ ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა მეტია p –ზე, შეიცავს 1–ის ტოლი

ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს. განვიხილოთ სიმრავლე E_{2p}. ცხადია, რომ

$$m_2^*\left(E_{2p}\right) = 2p > p,$$

მაგრამ E_{2p} სიმრავლე, როგორც D სიმრავლის ქვესიმრავლე, არ შეიცავს 1–ს ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს. მივიღეთ წინააღმდეგობა და შესაბამისად, თეორემა 33 დამტკიცებულია.

თუ E სიმრავლის მაგავრად ავიღებთ ლემა 43–ში აგებულ D სიმრავლეს, მაშინ მივიღებთ შემდეგი თეორემის მართებულობას.

თეორემა 33. ევკლიდეს სიბრტყეზე არსებობს სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და არ შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

თეორემა 34. შემდეგი წინადადება:

„ ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს“

დამოუკიდებელია *(ZF)&(DC)* თეორიასთან.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 34–ს ანალოგიური თეორემა არ იქნება მართებული სოლოვეის მოდელში (*(ZF)&(DC)&(ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით))*. კერძოდ, სოლოვეის მოდელში ევკლიდეს სიბრტყეზე ყოველი სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს.

3. დასკვნა

წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომში „სხვადასხვა პოლონურ ჯგუფებზე განსაზღვრული დინამიკური სისტემების ზოგიერთი თვისებების შესახებ“ განხილულია აბსტრაქტული დინამიკური და აბსტრაქტული კვაზიდინამიკური სისტემების არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები სხვადასხვა ფაზურ სივრცეებში. კერძოდ, მიღებულია შემდეგი დებულებები:

1. ვთქვათ, მოცემულია $(G_1,\cdot)$ არათვლადი ჯგუფი და $(G_2, dom(\mu_2), G_2, \mu_2)$

არათვლადი ალბათური დინამიკური სისტემა. ამასთან ვთქვათ,

$$f : G_1 \to G_2$$

არის თითქმის სიურექციული ჰომომორფიზმი. მაშინ არსებობს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ და $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

(ა) $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემა წარმოადგენს $(G_1, dom(\mu_1), G_1, \mu_1)$ დინამიკური სისტემის გაგრძელებას;

(ბ) f არის ზომადი $(G_1, dom(\mu_1'), G_1, \mu_1')$ დინამიკური სისტემის მიმართ.

2. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის უსასრულოგანზომილებიან ბანახის სივრცეში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა ψ_α , რომელიც არის $\mathrm{O}(\alpha)\mathrm{LM}(X)$.

3. ყოველი $\alpha = \{n_i : i \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$-სათვის უსასრულოგანზომილებიან ბანახის სივრცეში არსებობს არანულოვანი ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა η_α , რომელიც არის $\mathbf{S}(\alpha)\mathrm{LM}(X)$.

4. ვთქვათ, G_i $(i \in \mathbf{N} \setminus \{1\})$ არის პოლონური ჯგუფი და ვთქვათ, G_1 არის უნიმოდალური პოლონური ჯგუფი. მაშინ $G = \prod_{i \in \mathbf{N}} G_i$ წარმოიდგინება

არათანამკვეთი პირველი კატეგორიისა და ჰაარის ნულსიმრავლის გაერთიანების სახით.

5. წინადადება

„ ყოველი E სიმრავლე, რომლის ლებეგის გარე ზომა არის $+\infty$ და შეიცავს 1–ის ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედის წვეროებს“

დამოუკიდებელია (ZF)&(DC) თეორიასთან.

სადისერტაციო ნაშრომის იდეები და მიღებული შედეგები საინტერესოა მათემატიკით დაინტერესებული ფართო მასშტაბით მკითხველთათვის. ნაშრომში გადმოცემულია ზოგიერთი საკითხისადმი ახალი მეთოდოლოგიური მიდგომა, რაც ასევე მნიშვნელოვანია.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. G.D. Birkhoff, What is the ergodic theorem. Amer. Math. Mouthly, vol. 49, 1942.
2. G.D. Birkhoff, Dynamical Systems. 1927.
3. C.I. Byrnes, N.E. Hurt, On the moduli of linear dynamical systems. Advances in Mathematics, New York, Academic Press, 1977.
4. D. Ornstein, Ergodic theory, randomness, and dynamical systems. Yala University Press, 1973.
5. Handbook of Mathematical Logic (Edided by J. Barwise). Amsterdam: North-Holland Publishing Comp., 1977.
6. R.M.Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. Ann. Math., 92, 1970.
7. J.C. Oxtoby, Measure and Category. Berlin, Springer, 1970.
8. N. Kryloff et N. Bogoliuboff, Les mesures invariantes at transitives dans la mecanique non lineaire. Math. Sbornik, vol. 1, no. 5, 1936.
9. N. Kryloff et N. Bogoliuboff, La theorie generale de la mesure et son application a l’etude des systemes dynamiques de la mecanique non-lineavre. Ann. of Math., vol. 38, no. 1, 1937.
10. E. Hewitt and K. Ross, Abstract Harmonic Analysis. Vol. 1, Springer, Berlin, 1963.
11. R. Baker, Lebesgue measure on R^{∞}. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 113, no. 4, 1991.
12. I. Girsanov and B. Mityagin, Quasi-invariant measures on linear topological spaces. Nauchn. Dokl. 2, 1959 (in Russian).
13. A.B. Kharazishvili, Transformation Groups and Invariant Measures. World Scientific, 1998.
14. A. B. Kharazishvili, Topics in Measure Theory and Real Analysis, Atlantic Press, Amsterdam-Paris, 2009.

15. A.B. Kharazishvili, On a nonseparable extension of the Lebesgue measure, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 226, no. 1, 1976 (in Russian).

16. ა. კირთაძე, დინამიკური და კვაზიდინამიკური სისტემების თეორიის ზოგიერთი ასპექტი, გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2006, 270 გვ.

17. G.R. Pantsulaia, On the existence of a quasi-invariant measure on a non-locally compact noncommutative topological group. Bull. Acad. Sci. GSSR, vol. 120, no. 1, 1985 (in Russian).

18. G.R. Pantsulaia, Invariant and quasiinvariant measures in infinite-dimensional topological vector spaces. Nova Science Publishers, INC., New York, 2007. 234 pp.

19. G. R. Pantsulaia, Selected Topics of an Infinite-dimensional Classical Analysis, Nova Science Publishers, INC., New York, 2007. 234 pp

20. A.V. Skorohod, Integration in Hilbert spaces, Springer, Berlin et al., 1974.

21. H. Shimomura, On the construction of invariant measure over the orthogonal group on the Hilbert space by the method of Kelley transformation. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8, 10, 1975.

22. A.B. Kharazishvili, On invariant measures in the Hilbert space. Bull. of the Acad. of Sci., of the GSSR, vol. 114, no. 1, 1984 (in Russian).

23. G.R. Pantsulaia, On ordinary and standard Lebesgue measures on R∞, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 57 (3-4) (2009), 209–222.

24. G.R. Pantsulaia, On ordinary and standard products of infinite family of σ –finite measures and some of their applications, Acta Math. Sinica (Engl. Ser.) 27 (2011), NO. 3, 477–496.

25. B. Hunt, T. Sauer, J. Jorke, Prevalense: a translation-invariant “almost every” on infinite-dimensional spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 27, no. 2, 1992.

26. A.B. Kharazishvili, Invariant Extensions of the Lebesgue Measure. Tbilisi, 1983 (in Russian).

27. K. Kodaira, S. Kakutani, A nonseparable translation-invariant extension of the Lebesgue measure space. Ann. Math., vol. 52, 1950.

28. S. Kakutani, J. Oxtoby, Construction of non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space. Ann. Math., 52, 1950.

29. U. Darji, Haar negligible comeagre sets, in Problem presented at the conference Integration, Vector measures and Related Topics IV, ed. D.H. Fremlin (2011).

30. M.P. Cohen, Notes on Haar null sets, (2012), 1-18, Retrieved Febrary 7, 2013 from

http://www.math.unt.edu/mpc0061/preprints/HaarNullNotes.pdf

31. S. Solecki, Haar null and non-dominating sets, Fund. Math. 170(2001), 197-217.

32. P. Halmos, Measure theory. Princeton, Van Nostrand, 1950.

33. Caratheodory. Űber das lineare Mass von Punktmengeneine Varallgemeinerung des Längenbegriffs, Gőttingen Nachr., 1914.

34. H. Becker and A.S. Kechris, The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions, London Mathematical Society Lecture Series, 232, Cambridge University Press, 1996.

35. H. Becker, Polish group actions: dichotomies and generalized ele-mentary embed-dings, J. Amer. Math. Soc. 11(2) (1998), 397–449.

36. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, М. 1959.

37. J. Cichon, A. Kharazishvili, B. Weglorz. Subsets of the real line. Wydawnictwo Uniwersytetu Lodzkiego, Lodz, 1995.

38. R. Engelking, Outline of general topology, PWN, Warsaw; North-Holland, Amsterdam, 1968.

39. V. Klee, On the borelian and projective types of linear subspaces, Math. Scand. 6 (1958), pp. 189-199.

40. A.S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Graduate Texts in Mathematics, 56. Springer-Verlag, New York, 1995.pp. 402.

41. N.T. Peck, On nonlocally convex spaces. II. Math. Ann., 178 (1968), 209-218.

42. I. Cornfeld, J. Sinaj, S. Fomin, Ergodic Theory. Izd. Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

43. V.I. Arnold, Ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).

44. N. Nemyckii, N. Stepanov, The quatitative theory of dynamical systems. Moscow-Leningrad, 1949 (in Russian)

45. I.G. Petrovskii, Lecture notes in the theory of ordinary differential equations. Nauka, 5-th ed., Moscow, 1964 (in Russian).

46. Y. Yamasaki, Invariant measures of the infinite-dimensional rotation group. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 8, 1972.

47. A. Hulanicki, Invariant extensions of the Lebesgue measure. Fund. Math., vol. 51, 1962.

48. A. Hulanicki, C. Ryll-Nardzewski, Invariant extensions of the Haar measure. Coll. Math., vol. 42, 1979.

49. R. Baker, “Lebesgue measure”on R∞. II. *Proc. Amer. Math. Soc.* vol. 132, no. 9, 2003, pp. 2577–2591.

50. K. Ciesielski, A. Pelc, Extensions of invariant measures on Euclidean spaces, Fund. Math., 153, 1985.

51. I. Daleckii and S. Fomin, Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).

52. P. Halmos, Lecture notes in ergodic theory. Moskow, 1959 (in Russian).

53. P. Zakrzewski, The uniqueness of Haar measure and set theory. Colloq. Math., vol. 74, no. 1, 1997.

54. P. Zakrzewski, Extending isometrically invariant measures on R^n. Real Analysis Exchauge, 21, 2, 1995-1996.

55. A.B. Kharazishvili, To the uniqueness property of the Haar measure. Reports of the Seminar of Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, State University, vol. 18, 1984 (in Russian).

56. A.B. Kharazishvili, On the uniqueness of Lebesgue and Borel measures, Journal of Applied Analysis, vol. 3, no. 1, 1997.

57. A.B. Kharazishvili, Some remarks on quasi-invariant and invariant measures. Real Analysis Exchange, vol. 24, no. 1, 1998-1999.

58. A.B. Kharazishvili, On quasiinvariant measures. Bull. Acad. Sci. GSSR, vol. 101, no. 3, 1981 (in Russian).

59. A.B. Kharazishvili, Quasiinvariant measures in topological groups. Bull. Acad. Sci. GSSR, vol. 108, no. 2, 1982 (in Russian).

60. M. Beriashvili, A. Kirtadze, On the uniqueness property of non-separable extensions of invariant Borel measures and relative measurability of real-valued functions, Georgian Mathematical Journal, vol. 29, no.1, 2014, pp. 49-57.

61. A.P. Kirtadze and G.R. Pantsulaia, The property of essential uniqueness of invariant measures in vector spaces. Bull. Acad. Sci. GSSR, vol. 127, no. 1, 1987 (in Russian).

62. A. Kirtadze, Nonseparable extensions of invariant measures in infinite-dimensional vector spaces that have the uniqueness property. Bull. Acad. Sci., GSSR, vol. 136, no. 2, 1989 (in Russian).

63. A. Kirtadze, Nonseparable extensions of invariant measures and the uniqueness property, (Russian) Soobshch. Akad. Nauk Gruzii 142 (1991), no. 2, 261--264.

64. A. Kirtadze, G. Pantsulaia. Invariant measures in the space R^N. Bull. Acad. Sci. GSSR, vol. 141, no. 2, 1991 (in Russian).

65. A. Kirtadze, On the uniqueness property for invariant measures. Georgian Math. Journal, vol. 12, no. 3, 2005.

66. A. Kirtadze, G.R. Pantsulaia. Relation between shy sets and Haar null-sets Banach space l^∞. Bull. Acad. Sci. of Georgia, vol. 172, no. 3, 2005.

67. A.P. Kirtadze, G.R. Pantsulaia, Lebesgue nonmeasurable sets and the uniqueness of invariant measures in infnite-dimensional vector spaces, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 143 (2007), 95-101.
68. G.R. Pantsulaia, On an invariant Borel measure in Hilbert space. Bull. of the Polish Acad. of Sci. Math., vol. 52, no. 1, 2004.
69. A. Kirtadze, G. Pantsulaia. On uniquely definable extensions of invariant measures in the space R^N. Bull. Acad. Sci. of Georgia, vol. 149, no. 2, 1994 (in Russian).
70. A. Kirtadze, G. Pantsulaia. On some notions of null sets in the infinite-dimensional topological vector space R^N. Bull. Acad. Sci. Georgia, vol. 172, no. 2, 2005
71. G.R. Pantsulaia, On translation-invariant measures in the non-separable Banach space l^∞. Trans. of GTU, 2(430), 2000.
72. G.R. Pantsulaia, Duality of measure and category in infinite-dimensional separable Hilbert space. IJMMS 30: 6, 2002.
73. J. Feldman, Nonexistence of quasi-invariant measures on in infinite-dimensional linear spaces,
74. Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 142-146.
75. T. Gill, A. Kirtadze, G. Pantsulaia, A. Plochko, The existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces, Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici, 50.2 (2014), pp. 401-419.
76. T.L. Gill, W.W. Zachary, Lebesgue measure on a version of RN, Real Analysis Exchange, Summer Symposium (2009), 42–49.
77. T.L. Gill, G. R. Pantsulaia, W.W. Zachary, Constructive analysis in infinitely many varíebles, Communications in Mathematical Analysis, 13 (1), (2012), 107–141.
78. J.C. Oxtoby, Invariant measures in groups which are not locally compact. Trans. AMS., vol. 60, 1946.

79. G.R. Pantsulaia, On generators of shy sets on Polish topological vector spaces, New York J. Math., 14 (2008), 235-261.

80. G.R. Pantsulaia, Relations between shy sets and sets of ν_p-measure zero in Solovey′s Model. Bull. Polish Acad. Sci., vol. 52, no. 1, 2004.

81. A. Kirtadze, On the method of direct products in the theory of quasi-invariant measures, Georgian Math. Journal, vol. 12, no. 1. 2005.

82. A.B. Kharazishvili, A. Kirtadze, On algebraic sums of measure zero sets in uncountable commutative groups, Proc. A. Razmadze Math. Institute, vol. 135, 2004.

83. A.B. Kharazishvili, A. Kirtadze, On algebraic sums of absolutely negligible sets, Proc. A. Razmadze Math. Institute, vol. 136, 2004.

84. A.B. Kharazishvili, A. Kirtadze, Nonseparable left-invariant measures on uncountable solvable groups, Proc. A. Razmadze Math. Institute, vol. 139, 2005, pp. 45-52.

85. A. Kirtadze, On some estimates of topological weights of left-invariant measures on uncountable solvable groups, Proceedings of A. Razmadze Math. Inst., vol. 145, 2007, pp. 35-41.

86. C.A. Cabrelli, K.E. Hare, U.M. Molter, Classifying Cantor sets by their fractal dimensions, Proc. Amer. Math. Soc. 138(11), 2010, pp. 3965-3974.

87. M. Elekes, J. Steprans, Haar null sets and the consistent reflection on non-meagreness, arXiv preprint arXiv:1109.6164

88. T. Bartoszynski, On perfectly meager sets, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 4.

89. M. Burke, A. W. Miller, Models in which every nonmeager set is nonmeager in a nowhere dence Cantor set, Canad. J. Math. 57 (2005).

90. J. Mycielski, S. Swierczkowski, On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. Fund., 54, 1964.

91. P. Erdos, Set-Teoretic, measure-Teoretic, Combinatorial and Number-Theoretic problems concerning point sets in Euclidean Space, Real Anal. Exchange, 4(2), 1978-79.
92. P. Erdös, R. Mauldin, The nonexistence of certain invariant measures. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 59, 1976.
93. R. Mauldin, Some Problems and ideas of Erdos in analysis and Geometry, Proceedings of the Erdos Centennial, Budapest, July, 1-5, 2013.
94. N. Rusiashvili, On an existence of invariant and quasi-invariant σ-finite Borel measures in complete metric topological vector spaces, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 5, no. 1, 2013, pp. 1-7.
95. G. Pantsulaia, N. Rusiashvili, On questions of U. Darji and D. Fremlin, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 5, no. 2, 2013, pp. 1-11.
96. Tepper G, Aleks Kirtadze, Gogi Pantsulaia and Nino Rusiashvili, On ordinary and standart "Lebesgue Measures" in separable Banach spaces, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 5, no. 3-4, 2013, pp. 1-20.
97. G. Pantsulaia, N. Rusiashvili, On a certain version of the Erdos problem, Georgian International Journal of Sciences and Technology, vol. 6, no. 1-2, 2013, pp. 1-6.
98. A. Kirtadze, G. Pantsulaia, N. Rusiashvili, On uniform distribution for invariant extensions of the linear Lebesgue measure.
arXiv:submit/1483137/[math.CA]9 Mar2016