სსიპ-სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
მათემატიკის და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ლეილა სულავა

არაწრფივი სოციალური პროცესების მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება

ინფორმატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

თბილისი 2016

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია სსიპ-სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტში მათემატიკის და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტზე.

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: **თემურ ჩილაჩავა**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულების პროფესორი, საქართველოს საბუნებისმეტყველო და განათლების მეცნიერებათა აკადემიების ნამდვილი წევრი, ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის ვიცე-პრეზიდენტი.

ექსპერტები: **ზურაბ გეგეჭკორი**

მათემატიკის დოქტორი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულების ასოცირებული პროფესორი.

თეოდორე ზარქუა

ინჟინერიის დოქტორი ინფორმატიკაში, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი.

ოფიციალური რეცენზენტები: **ჰამლეტ მელაძე**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს საპატრიარქოს წმ. ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის პროფესორი.

თამაზ ობგაძე

ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორი, ხელსაწყოთმშენებლობის ავტომატიზაციისა და მართვის სისტემების დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, საინჟინრო აკადემიის ნამდვილი წევრი.

დისერტაციის დაცვა შედგება 2016 წლის საათზე სსიპ- სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადისერტაციო კომისიის სხდომაზე.
მისამართი: ანა პოლიტკოვსკაიას ქ. №9, IV სართული, საპრეზენტაციო ოთახი.
სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი, გამოყენებითი მათემატიკის მიმართულების ასოცირებული პროფესორი **ციალა ძიძიგური**

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

კაცობრიობა ინტელექტუალურ განვითარებასთან და დაგროვილ ცოდნასთან ერთად იცვლის თავის შეხედულებას მის გარშემო არსებულ სამყაროს აგებულებაზე - ანუ განვითარებასთან ერთად მუდმივად იცვლება სამყაროს მოდელი.

სინერგეტიკა (ერთობლივი ქმედება) ანუ თვითორგანიზების თეორია, დღეისათვის საგანთა-შორისო კავშირების კვლევის ერთ-ერთი ყველაზე პოპულარული და პერსპექტიული მიდგომაა. სინერ-გეტიკამ გაიარა დიდი და რთული გზა. თითქმის ორმოცი წლის წინ მას უყურებდნენ როგორც ფიზიკოს-თეორეტიკოსების გასართობს, რომლებმაც ბევრ არაწრფივ მოვლენაში ნახეს მსგავსება. ოცი წლის წინათ კი სინერგეტიკის კონცეფციების, მეთოდების, წარმოდ-გენების წყალობით აღმოჩენილი იყო ბევრი შესანიშნავი მოვლენა ფიზიკაში, ქიმიაში, ბიოლოგიაში, ჰიდროდი-ნამიკაში. ახლა ეს დისციპლინათაშორისი მიდგომა სულ უფრო გამოიყენება სტრატეგიულ დაგეგმარებაში, ისტორიული ალტერნატივების ანალიზის დროს, კაცობრიობის წინაშე მდგარი გლობალური პრობლემების გადაჭრის გზების პოვნაში და ა.შ.

მსოფლიოში მაღალი ტემპით მიმდინარე გლობა-ლურმა ტექნოლოგიურმა ცვლილებებმა და კაცობრიობის ინფორმატიზაციამ განაპირობა ისეთი მძლავრი მიმართულების შექმნა, როგორიცაა მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება.

სინერგეტიკამ მძლავრი ბიძგი მისცა მათემატიკური მოდელების გამოყენებას სოციალურ მეცნიერებებში: სოციოლოგიაში, ისტორიაში, დემოგრაფიაში, პოლიტოლოგიაში, კონფლიქტოლოგიაში და სხვა.

მსოფლიოში მიმდინარე პროცესებიდან გამომდინარე, აქტუალური გახდა ისეთი სოციალური პროცესის შესწავლა, როგორიცაა სახელმწიფოებრივი და ადმინისტრაციული მართვა. ადმინისტრაციული მართვის მათემატიკური მოდელი პირველად შემოთავაზებული იქნა პროფ. თ. ჩილაჩავას მიერ.

სახელმწიფო მართვის თვალსაზრისით, განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ისეთი სოციალური პროცესის აღწერა მათემატიკურ ენაზე (მათემატიკური მოდელის შექმნა), როგორიც არის პოლიტიკური არჩევნები. ბევრი მეცნიერი შეეხო ამ თემატიკას, მაგრამ, ძირითადად, მათ ინტერესს წარმოადგენდა უკვე ჩატარებული არჩევნების შედეგების სტატისტიკური მონაცემების ანალიზი.

უაღრესად აქტუალურია ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ პოლიტიკური სუბიექტების მომხრეთა რაოდენობის დინამიკა საარჩევნო პერიოდში არჩევნების შედეგების შესაძლო პროგნოზირებით.

ამ მიმართულებით ორ და სამპარტიული არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელები პირველად შემოთავაზებულ იქნა ნაშრომებში

- Chilachava T.I. Nonlinear mathematical model of dynamics of voters of two political subjects. Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Reports, 2013, vol. 39, pp. 13 - 22.
- Чилачава Т.И. Нелинейная математическая модель динамики избирателей проправительственной и оппозиционной партий (двух избирательных субъектов). Basic paradigms in science and technology. Development for the XXI century. Transactions II, 2012, стр. 184 –188.
- Чилачава Т.И. Нелинейная трехпартийная математическая модель выборов. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XXI Международной конференции, Москва, 2013, стр. 513 - 516.

მართვისა და არჩევნების მოდელები მეტად აქტუალურია როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული თვალსაზრისით. დაინტერესებულ სუბიექტებს საშუალება ეძლევათ ფართოდ გამოიყენონ მიღებული შედეგები, გათვალონ პარამეტრები და მომავალში აირჩიონ სტრატეგია მათთვის სასურველი მიზნის მისაღწევად.

კვლევის ობიექტი და მიზანი

წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია ვაჩვენოთ მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირების გამოყენების მნიშვნელობა სოციოლოგიაში. კერძოდ, შეიქმნას მათემატიკური და

კომპიუტერული მოდელები ისეთი სოციალური პროცესების აღწერისთვის, როგორიცაა ადმინისტრაციული მართვა და პოლიტიკური არჩევნები, რომლებსაც ექნებათ გამოყენება პრაქტიკაში.

დისერტაციის კვლევის ობიექტს წარმოადგენს აღნიშნული მოდელების შესწავლა სხვადასხვა საწყისი პირობებისა და მოდელების პარამეტრების შემთხვევაში.

დასახული მიზნის მისაღწევად ნაშრომში დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების მათემატიკური თეორიის, რიცხვითი და კომპიუტერული მეთოდების გამოყენებით ხდება იმ დასმული ამოცანების შესწავლა, რაც დაკავშირებულია გამოსაკვლევი მოდელების ანალიზთან.

მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები

1. ცვლადი ადმინისტრაციული მართვის შემთხვევაში კოშის ამოცანა არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის ამოხსნილია ანალიზურად ზუსტად. მოდელის პარამეტრებისა და საწყის პირობებს შორის სხვადასხვა დამოკიდებულებების მიხედვით მიღებულია მართვის განსხვავებული რეჟიმები. ადმინისტრაციული მართვის არაწრფივი მათემატიკური მოდელის ცვლადი პარამეტრებით კერძო შემთხვევისათვის ნაპოვნია ზუსტი ანალიზური ამონახსნი, ხოლო ზოგად შემთხვევაში მიღებულია რიცხვითი ამოხსნები.

2. განხილულია ორპარტიული არჩევნების ზოგადი არაწრფივი მათემატიკური მოდელი არჩევნებზე ამომრჩევლების გამოცხადების სხვადასხვა მაჩვენებლის, ე.წ. დემოგრაფიული ფაქტორის (არჩევნებიდან არჩევნე-

ბამდე საერთო ამომრჩეველთა რაოდენობის ცვლილება) და შესაძლო ფალსიფიცირების გათვალისწინებით. განხილულია შემთხვევა, როცა არჩევნებიდან არჩევნებამდე მმართველი და ოპოზიციური პარტიების ხმების მოზიდვის კოეფიციენტები არის დროის ექსპონენციალურად ზრდადი ფუნქციები, ხოლო ადმინისტრაციული რესურსების გამოყენების ფუნქციისათვის განხილულია სამი შემთხვევა: როცა ეს ფუნქცია მუდმივია; როცა ეს ფუნქცია წრფივია და პროპორციულია ოპოზიციური პარტიის ამომრჩეველთა რაოდენობისა; როცა ეს ფუნქცია ექსპონენციალურად ზრდადია. კომპიუტერული მოდელირების მეშვეობით მიღებულია რიცხვითი ამოხსნები.

3. განხილულია სამპარტიული არჩევნების ახალი ზოგადი არაწრფივი მათემატიკური მოდელი ცვლადი კოეფიციენტებით და დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინებით, რომელიც აღწერს მმართველი და ორი ოპოზიციური პარტიების ამომრჩეველთა რაოდენობის დინამიკას არჩევნებიდან მორიგ არჩევნებამდე. დემოგრაფიის ფაქტორის გათვალისწინების გარეშე, სამსუბიექტიანი არჩევნების არაწრფივი მოდელის მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევაში, მიღებულია ზუსტი ანალიზური ამონახსნი. ნაპოვნია პირობები, რომლის შესრულების შემთხვევაში მოდელი იქნება არატრივიალური (როდესაც არჩევნების შედეგები წინასწარ არ არის ცხადი).

4. სამსუბიექტიანი არჩევნების ზოგადი არაწრფივი მათემატიკური მოდელისათვის ამომრჩეველთა ხმების მოზიდვის კოეფიციენტების, ადმინისტრაციული რესურსების გამოყენების ფაქტორისა და დემოგრაფიული კოეფიციენტების ექსპონენციალურად ზრდადი

ფუნქციების შემთხვევაში ჩატარებულია კომპიუტერული მოდელირება. მიღებულია რიცხვითი ამოხსნები, გაკეთებულია შედეგების ვიზუალიზაცია.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო ექვს საერთაშორისო და ერთ რესპუბლიკურ სამეცნიერო კონფერენციებზე:

1. აკადემიკოს ი. ფრანგიშვილის დაბადების 80 წლისთავისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია “საინფორმაციო და კომპიუტერული ტექნოლოგიები, მოდელირება, მართვა“, თბილისი, 2010.
2. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის I საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, ბათუმი, 2010.
3. XVIII საერთაშორისო კონფერენცია „რთული სისტემების უსაფრთხოების მართვის პრობლემები“, მოსკოვი, 2010.
4. პროფ. რ. აბსავას 65 წლისთავისადმი მიძღვნილი სამეცნიერო კონფერენცია, თბილისი, 2012.
5. XXIII საერთაშორისო კონფერენცია „რთული სისტემების უსაფრთხოების მართვის პრობლემები“, მოსკოვი, 2015.
6. აკადემიკოს ი. ფრანგიშვილის დაბადების 85 წლისთავისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია “საინფორმაციო და კომპიუტერული ტექნოლოგიები, მოდელირება, მართვა“, თბილისი, 2015.

7. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის VI საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, ბათუმი, 2015.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

დისერტაცია შედგება შესავალის, სამი თავის, დასკვნის, გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისგან და სამი დანართისაგან. სულ ნაშრომი მოიცავს 172 გვერდს. დანართში მოცემულია 61 ლისტინგი. გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა მოიცავს 125 დასახელებას.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი

შესავალში განხილულია სადისერტაციო თემის აქტუალობა, მოცემულია კვლევითი თემის გარშემო ლიტერატურის მიმოხილვა, თავების მიხედვით მოკლედ აღწერილია მიღებული შედეგები და მათი პრაქტიკული მნიშვნელობები.

პირველ თავში დასმულ ამოცანას წარმოადგენდა ისეთი სოციალური პროცესის აღწერა მათემატიკურ ენაზე (მათემატიკური მოდელის შექმნა), როგორიც არის ადმინისტრაციული ზეწოლა, რომელიც შეიძლება ხორციელდებოდეს მაკროდონეზე (სახელმწიფო ან მისი დიდი რეგიონი, მაკრომოდელი) ან მიკროდონეზე (სასწავლო დაწესებულება, საწარმო ობიექტი და სხვა, მიკრომოდელი) მრავალფეროვანი იდეოლოგიური და ტექნოლოგიური საშუალებებით. მათემატიკურ მოდელში განიხილება სამი ობიექტი:

1. ადმინისტრაცია (მმართველი სტრუქტურები, ხელისუფლება), რომლის მიზანს მიკრო ან მაკროდონეზე წარმოადგენს მის დაქვემდებარებაში მყოფი ადამიანების მართვა, თავისი ინტერესებიდან გამომდინარე. ეს ინტერესები შეიძლება იყოს როგორც სამართლიანი (დემოკრატიული მართვა) ისე უსამართლო (არადემოკ-რატიული მართვა).

2. კონფორმისტები, რომლებიც ეგუებიან მმართველ ადმინისტრაციას.

3. თავისუფლად მოაზროვნეები, ანუ არამართვადი ადამიანები, რომლებიც, მიუხედავად ადმინისტრაციული ზეწოლისა, რჩებიან თავისუფალნი თავის არჩევანში ან მოქმედებაში.

ადმინისტრაციული მართვის ზოგადი მათემა-ტიკური მოდელი შემოთავაზებულია შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha(t)x(t)y(t) - \beta(t)x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t)y(t) + \beta(t)x(t) \end{cases} \qquad (1.1)$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0,$$

სადაც

$x(t)$ - დროის t მომენტში თავისუფლად მოაზროვნე (არამართვადი) ადამიანების რაოდენობაა, $t \in [0,T], T < \infty$;

$y(t)$ - დროის t მომენტში კონფორმისტების (მართვადი ადამიანების) რაოდენობაა;

$\alpha(t) > 0$ - თავისუფლების კოეფიციენტია t მომენტში;

$\beta(t) > 0$ - წრფივი ადმინისტრაციული ზეწოლის უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა, რომლითაც ხასიათდება ადმინისტრაციული რესურსების გამოყენების მასშტაბი.

პირველი თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულ არაწრფივ მათემატიკურ მოდელში (1.1) ადმინისტრაციულ ზეწოლას აქვს მუდმივი ხასიათი და ის არ არის დამოკიდებული დროზე. მოდელის განხილვის პერიოდში ადამიანთა ორივე ჯგუფის ე.წ. დემოგრაფიული ცვლილებები არ არის გათვალისწინებული: მაკრომოდელის შემთხვევაში ჩათვლილია, რომ შობადობისა და სიკვდილიანობის კოეფიციენტები ტოლია, ხოლო მიკრომოდელის შემთხვევაში დაწესებულებაში თანამშრომლების შემოდინების და გადინების კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია.

მოდელი არის უწყვეტი და საძიებელ ფუნქციებს გააჩნიათ სისტემაში შემავალი პირველი რიგის უწყვეტი წარმოებულები. მოდელის პარამეტრებისა (აქტიურობის ხარისხის მაჩვენებელი ანუ თავისუფლების კოეფიციენტი, წრფივი ადმინისტრაციული ზეწოლის მაჩვენებელი) და საწყის პირობებს შორის სხვადასხვა დამოკიდებულებების მიხედვით მიღებულია რამოდენიმე განსხვავებული შემთხვევა.

პირველი თავის მეორე პარაგრაფში განხილულია ადმინისტრაციული მართვის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი, რომელსაც შეუძლია აღწეროს მოცემულ სოციუმში მმართველი სტრუქტურების მხრიდან მზარდი ადმინისტრაციული ზეწოლა ადამიანებზე მათი მოქმედებების გაკონტროლების მიზნით. მათემატიკური მოდელი აღიწერება ორუცნობიანი (თავისუფლად მოაზროვნეების და კონფორმისტების რაოდენობა დროის

t მომენტში) არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემით. ცვლადი ადმინისტრაციული ზეწოლის პირობებში კოშის ამოცანა არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისათვის ამოხსნილია ანალიზურად ზუსტად. მოდელის პარამეტრებისა (აქტიურობის ხარისხის მაჩვენებელი, წრფივი ადმინისტრაციული ზეწოლის მაჩვენებელი) და საწყის პირობებს შორის სხვადასხვა დამოკიდებულებების მიხედვით მიღებულია რამოდენიმე განსხვავებული შემთხვევა.

პირველი თავის მესამე პარაგრაფში განხილულია ადმინისტრაციული მართვის ზოგადი არაწრფივი მათემატიკური მოდელი (1.1), რომელიც აღწერს მმართველი სტრუქტურების მხრიდან მზარდ ადმინისტრაციულ ზეწოლას, ყველა კოეფიციენტის ცვლადობის შემთხვევაში. კერძო შემთხვევისთვის ნაპოვნია ზუსტი ანალიზური ამონახსნი:

$$x(t)=x_1+\frac{1}{w(t)}$$
$$y(t)=a-\left(x_1+\frac{1}{w(t)}\right),$$

სადაც

$$w(t)=e^{(b+2x_1)\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}\left(w_0+\int_0^t e^{-(b+2x_1)\int_0^\tau \alpha(\mu)d\mu}\alpha(\tau)d\tau\right)$$

$$x_0+y_0=a,\ \ \beta(t)=b\alpha(t), b>0, b=const$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2+4a}}{2},\ w_0=\frac{1}{x_0-x_1},\ x_0\neq x_1.$$

პირველი თავის მეოთხე პარაგრაფში ზოგადი არაწრფივი მათემატიკური მოდელისათვის განხილულია ორი შემთხვევა :

ა) თავისუფლების კოეფიციენტები და ადმინისტრაციული ზეწოლის ფუნქციები არიან დროის ექსპონენციალურად ზრდადი ფუნქციები. მაშინ სისტემა (1.1) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha_0 e^{\delta \frac{t}{T}} x(t)y(t) - \beta_0 e^{\gamma \frac{t}{T}} x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha_0 e^{\delta \frac{t}{T}} x(t)y(t) + \beta_0 e^{\gamma \frac{t}{T}} x(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0$$

$$\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \delta > 0, \gamma > 0.$$

ბ) თავისუფლების კოეფიციენტები და ადმინისტრაციული ზეწოლის ფუნქციები ხარისხოვანია. მაშინ სისტემა (1.1) მიიღებს სახეს:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha_0 (\dfrac{t+t_0}{T})^n x(t)y(t) - \beta_0 (\dfrac{t+t_0}{T})^k x(t) \\ \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha_0 (\dfrac{t+t_0}{T})^n x(t)y(t) + \beta_0 (\dfrac{t+t_0}{T})^k x(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0, n, k \in N .$$

რიცხვითი ამოხსნისათვის გამოყენებულია პროგრა-მული გარემო MATLAB. ჩატარებულია მრავლობითი რიცხვითი ექსპერიმენტი შესაბამისი გრაფიკული გამოსახვით.

მეორე თავში განხილულია ორპარტიული არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი დემოგრაფიული ფაქტორის (არჩევნებიდან არჩევნებამდე საერთო ამომრჩეველთა რაოდენობის ცვლილება), მოდელის ყველა კოეფიციენტის ცვალებადობის, ამომრჩევლების სხვადასხვა აქტივობის და შესაძლო ფალსიფიცირების გათვალისწინებით. მოდელი აღწერს მმართველი და ოპოზიციური პარტიების ამომრჩეველთა ხმების რაოდენობის დინამიკას პერიოდში არჩევნებიდან მორიგ არჩევნებამდე. მოდელში განიხილება სამი ობიექტი:

1. სახელმწიფო და ადმინისტრაციული სტრუქტურები, რომლებიც სახელისუფლებო რესურსების გამოყენებით ზეგავლენას ახდენენ ოპოზიციური პარტიის მხარდამ-ჭერ ამომრჩევლებზე, სახელისუფლებო პარტიის მხარეზე გადმოყვანის მიზნით.
2. ოპოზიციური პარტიის მხარდამჭერი ამომრჩევლები.
3. მმართველი პარტიის მხარდამჭერი ამომრჩევლები.

ორპარტიული არჩევნების არაწრფივი მათემატიკუ-რი მოდელის ზოგადი სახე განხილულია შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_1(t) - \alpha_2(t))N_1(t)N_2(t) - f(t, N_1(t)) + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_2(t) - \alpha_1(t))N_1(t)N_2(t) + f(t, N_1(t)) + \beta_2 N_2(t) \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$N_1(0) = N_{10}, \;\; N_2(0) = N_{20}, \;\; N_{10} < N_{20} \;, \;\; N_1(t), N_2(t) \in C^1[0,T] \qquad (2.2)$$

სადაც $N_1(t), N_2(t)$ - შესაბამისად ოპოზიციური და სახელისუფლებო პარტიების მხარდამჭერ ამომრჩეველთა რაოდენობაა დროის t მომენტში, $t \in [0, T]$;

განტოლებათა სისტემა (2.1) მოცემულია შუალედში $t \in (0, T]$, ხოლო საწყისი (კოშის) პირობები (2.2) $t = 0$ მომენტში;

$t = 0$ - წინა არჩევნების მომენტია, როდესაც ერთ-ერთმა პარტიამ არჩევნები მოიგო და გახდა მმართველი პარტია ($N_{10} < N_{20}$);

$t = T$ - მომდევნო არჩევნების მომენტია (ხშირ შემთხვევაში $T = 4$ წელს ან 1460 დღეს);

$\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ - შესაბამისად ოპოზიციური და სახელისუფ-ლებო პარტიების ხმების მოზიდვის ცვლადი კოეფიციენტებია t მომენტში, რომლებიც დამოკიდე-ბულია ამ პარტიების სამოქმედო პროგრამებზე, ასევე ფინანსურ, ინფორმაციულ და ტექნოლოგიურ შესაძ-ლებლობებზე.

არატრივიალური მოდელი (როდესაც არჩევნების შედეგები წინასწარ არ არის ცხადი) მიიღება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა

$$\alpha_1(t) > \alpha_2(t) > 0, t \in [0, T] .$$

$f(t, N_1(t))$ - თავისი არგუმენტების უწყვეტი დადები-თი ფუნქციაა, რომლითაც ხასიათდება ადმინისტრა-ციული რესურსების გამოყენების მასშტაბი და მიმართულია ოპოზიციური პარტიის ამომრჩევლებზე მათი ხმების მოსაზიდად ხელისუფლების შენარჩუნების მიზნით.

β_1, β_2 – შესაბამისად მხარეების საარჩევნო დემოგრაფი-ული ცვლილებების გათვალისწინების კოეფიციენტებია.

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში განხილულია ორპარტიული არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი დემოგრაფიული ფაქტორის, ასევე მოდელის ყველა კოეფიციენტების ცვალებადობის გათვალისწი-ნებით. განხილულია შემთხვევა, როცა არჩევნებიდან არჩევნებამდე მმართველი და ოპოზიციური პარტიების ხმების მოზიდვის კოეფიციენტები არიან დროის ექსპონენციალურად ზრდადი ფუნქციები, ხოლო ადმინისტრაციული რესურსების გამოყენების ფუნქცი-ისათვის განხილულია სამი შემთხვევა: როცა ეს ფუნქცია მუდმივია; როცა ეს ფუნქცია წრფივია და პროპორცი-ულია ოპოზიური პარტიის ამომრჩეველთა რაოდენობის; როცა ეს ფუნქცია ექსპონენციალურად ზრდადია. შესაბამისად მიღებულია კოშის სამი განსხვავებული ამოცანა:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_{10} e^{\delta_1 \frac{t}{T}} - \alpha_{20} e^{\delta_2 \frac{t}{T}}) N_1(t) N_2(t) - b + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_{20} e^{\delta_2 \frac{t}{T}} - \alpha_{10} e^{\delta_1 \frac{t}{T}}) N_1(t) N_2(t) + b + \beta_2 N_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_{10} e^{\delta_1 \frac{t}{T}} - \alpha_{20} e^{\delta_2 \frac{t}{T}}) N_1(t) N_2(t) - b_1 N_1(t) + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_{20} e^{\delta_2 \frac{t}{T}} - \alpha_{10} e^{\delta_1 \frac{t}{T}}) N_1(t) N_2(t) + b_1 N_1(t) + \beta_2 N_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_{10}e^{\delta_1 \frac{t}{T}} - \alpha_{20}e^{\delta_2 \frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) - F_0 e^{\delta \frac{t}{T}} + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_{20}e^{\delta_2 \frac{t}{T}} - \alpha_{10}e^{\delta_1 \frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) + F_0 e^{\delta \frac{t}{T}} + \beta_2 N_2(t) \end{cases}$$

$$N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_{20}, \quad N_{10} < N_{20}, \quad N_1(t), N_2(t) \in C^1[0,T].$$

მეორე თავის მეორე პარაგრაფში განხილულია ზოგადი არაწრფივი მათემატიკური მოდელი ამომრჩევლების აქტივობის, დემოგრაფიული ფაქტორის და შესაძლო ფალსიფიცირების გათვალისწინებით.

მეორე თავის მესამე პარაგრაფში ზემოთ აღნიშნული ფაქტორების გათვალისწინებით მიღებულია რიცხვითი ამოხსნები. გამოთვლებისათვის გამოყენებულ იქნა პროგრამული გარემო MATLAB. სხვადახსვა სასტარტო პირობების მიხედვით მიღებულია რამდენიმე განსხვავებული შედეგი (განსხვავებული მოდელი). შედეგები დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწი-ნებით გარკვეულწილად განსხვავდება შედეგებისგან, რომლებიც მიღებულია დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინების გარეშე.

მესამე თავში განხილულია სამი საარჩევნო სუბიექტის (მმართველი და ორი ოპოზიციური პარტიის) არჩევნების პროცესის დინამიკა არჩევნებიდან არჩევნებამდე. არაწრფივ მათემატიკურ მოდელში, რომელიც აღწერს ამ პროცესს, მონაწილეობს ოთხი ობიექტი:

1. სახელმწიფო და ადმინისტრაციული სტრუქტურე-ბი, რომლებიც მმართვის სახელმწიფო რესურსების გამოყენებით ზეგავლენას ახდენენ ოპოზიციური პარტიების მხარდამჭერ ამომრჩევლებზე სახელისუფ-ლებო პარტიის მხარეზე გადმოყვანის მიზნით (ამავე

დროს აღნიშნული სტრუქტურები, ცხადია, არიან მმართველი პარტიის მხარდამჭერი ამომრჩევლებიც) .

2. მმართველი პარტიის მხარდამჭერი ამომრჩევლები.

3. პირველი ოპოზიციური პარტიის მხარდამჭერი ამომრჩევლები.

4. მეორე ოპოზიციური პარტიის მხარდამჭერი ამომრჩევლები.

ამ არაწრფივ მათემატიკურ მოდელში ყველა კოეფიციენ-ტი ცვლადია, აგრეთვე გათვალისწინებულია დემოგრა-ფიული ფაქტორიც.

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც აღწერს აღნიშნულ არაწრფივ პროცესს, აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_1(t)-\alpha_2(t))N_1(t)N_2(t)+(\alpha_1(t)-\alpha_3(t))N_1(t)N_3(t)-\beta_1(t)N_1(t)+\gamma_1(t)N_1(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_2(t)-\alpha_1(t))N_1(t)N_2(t)+(\alpha_2(t)-\alpha_3(t))N_2(t)N_3(t)-\beta_2(t)N_2(t)+\gamma_2(t)N_2(t) \\ \frac{dN_3(t)}{dt} = (\alpha_3(t)-\alpha_1(t))N_1(t)N_3(t)+(\alpha_3(t)-\alpha_2(t))N_2(t)N_3(t)+\beta_1(t)N_1(t)+\beta_2(t)N_2(t)+\gamma_3(t)N_3(t) \end{cases}$$

(3.1)

განტოლებათა სისტემა (3.1) განიხილება შუალედში $t \in (0,T]$, ხოლო საწყისი (კოშის) პირობები $t=0$ მომენტში

$$N_{10} = N_1(0)\,, N_{20} = N_2(0)\,, N_{30} = N_3(0)\,. \qquad (3.2)$$

კოშის ამოცანის (3.1),(3.2) ამოხსნას ვეძებთ $t \in [0,T]$ სეგმენტზე უწყვეტად დიფერენცირებად ფუნქციათა კლასში

$$N_1(t), N_2(t), N_3[t] \in C^1[0,T]\,. \qquad (3.3)$$

განტოლებათა სისტემა (3.1) - ში:

$N_1(t), N_2(t), N_3(t) -$ შესაბამისად პირველი, მეორე ოპოზიციური და მმართველი პარტიების მხარდამჭერ ამომრჩეველთა რაოდენობაა დროის t მომენტში;

t=0 -- წინა არჩევნების მომენტია, როდესაც ერთ-ერთმა პარტიამ არჩევნები მოიგო და გახდა მმართველი პარტია;

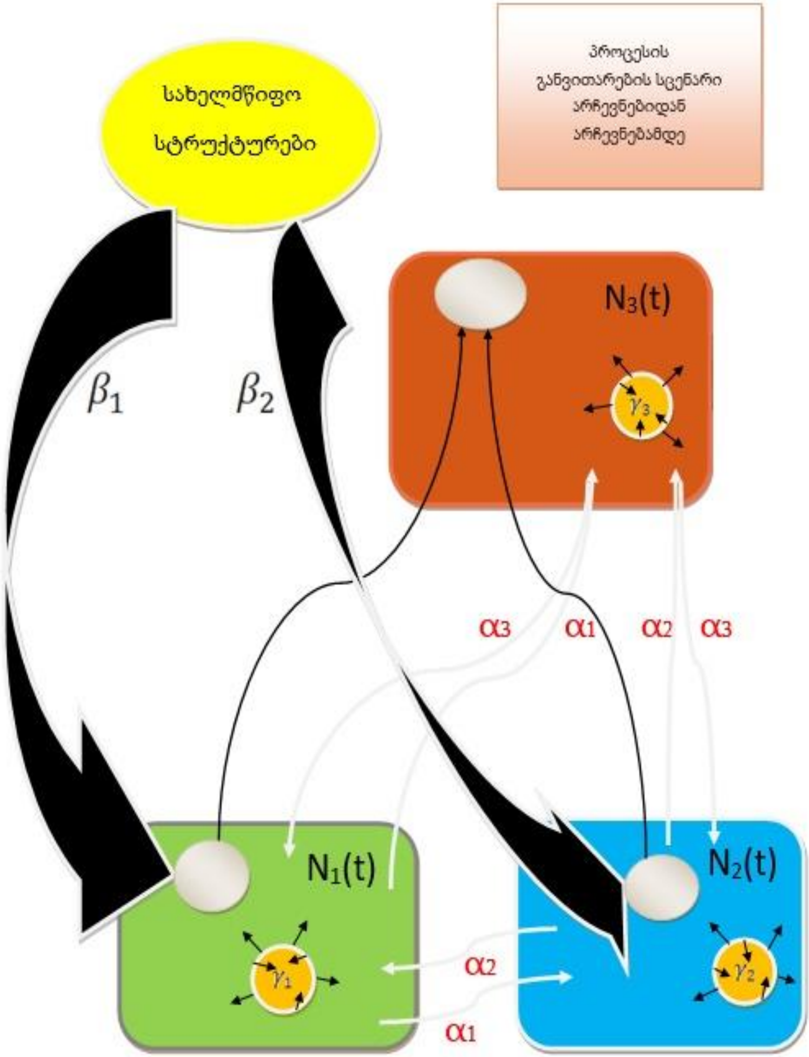
t=T -- მომდევნო არჩევნების მომენტია (ხშირ შემთხვევაში T= 4 წელს ან 1460 დღეს);

$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ - შესაბამისად პირველი, მეორე ოპოზიციური და მმართველი პარტიების ხმების მოზიდვის კოეფიციენტებია t მომენტში, რომლებიც დამოკიდებულია ამ პარტიების სამოქმედო პროგრამებზე, ასევე ფინანსურ, ინფორმაციულ და ტექნოლოგიურ შესაძლებლობებზე;

$\beta_1(t), \beta_2(t)$ - უწყვეტი დადებითი ფუნქციებია, რომლებიც განსაზღვრავენ ადმინისტრაციული რესურსების გამოყენების მასშტაბებს და მიმართულებები არიან პირველი და მეორე ოპოზიციური პარტიების ამომრჩევლებზე შესაბამისად მათი ხმების მოსაზიდად ხელისუფლების შენარჩუნების მიზნით;

$\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ -- შესაბამის მხარეების საარჩევნო დემოგრაფიული ცვლილებების გათვალისწინების კოეფიციენტებია.

სურათ 1-ზე შემოთავაზებულია აღწერილი პროცესის სქემატური აღწერა, ანუ პროცესის სცენარი.


სახელმწიფო
სტრუქტურები
პროცესის
განვითარების სცენარი
არჩევნებიდან
არჩევნებამდე
β_1
β_2
$N_3(t)$
γ_3
α_3
α_1
α_2
α_3
$N_1(t)$
$N_2(t)$
γ_1
γ_2
α_2
α_1

სურათი 1.

მესამე თავის პირველ პარაგრაფში განხილულია სამსუბიექტიანი არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი მუდმივი კოეფიციენტებით. კერძო შემთხვევისათვის, დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინების გარეშე, მიღებულია (3.1), (3.2) -ის ზუსტი ანალიზური ამონახსნი

$$\begin{cases} N_1(t) = \dfrac{\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3 + p(\alpha_2 - \alpha_3)} N_{10} e^{[(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1]t}}{\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3 + p(\alpha_2 - \alpha_3)} + N_{10}(e^{[(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1]t} - 1)} \\ N_2(t) = pN_1(t), p \equiv N_{20} / N_{10} \\ N_3(t) = a - (p+1)N_1(t), a \equiv N_{10} + N_{20} + N_{30} \end{cases} \quad (3.4)$$

ნაპოვნია პირობები, რომლის შესრულების შემთხვევაში მოდელი იქნება არატრივიალური. გაკეთებულია შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები.

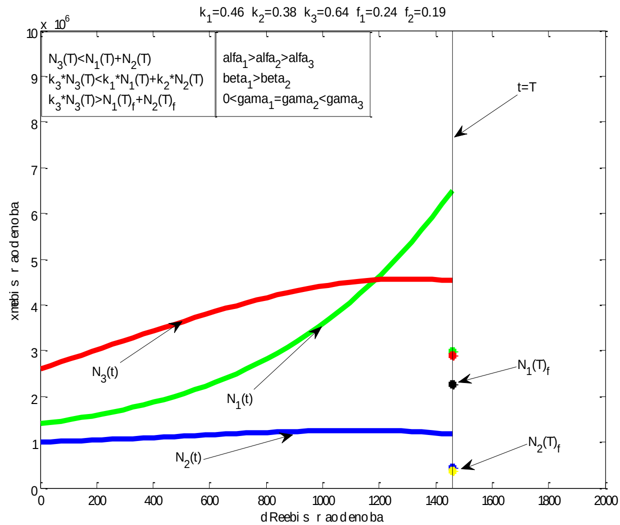
მესამე თავის მეორე პარაგრაფში განხილულია სამსუბიექტიანი არჩევნების არაწრფივი მათემატიკური მოდელი ცვლადი კოეფიციენტებით. გათვალისწინე-ბულია ამომრჩეველთა გამოცხადების მოსალოდნელი მაჩვენებელი, ასევე გათვალისწინებელია, რომ ზოგიერთ, ნაკლებად დემოკრატიულ, ქვეყნებში არჩევნების დღეს ადგილი აქვს არჩევნების შედეგების გარკვეულ ფალსიფიცირებას.

მოდელში განიხილება ცვლადი კოეფიციენტების შემთხვევა, კერძოდ, ვვარაუდობთ, რომ არჩევნებიდან

არჩევნებამდე ამომრჩევლების ხმების მოზიდვის კოეფიციენტები, ადმინისტრაციული რესურსების გამოყენების ფაქტორი და დემოგრაფიული კოეფიციენ-ტები არიან დროის ექსპონენციალურად ზრდადი ფუნქციები.

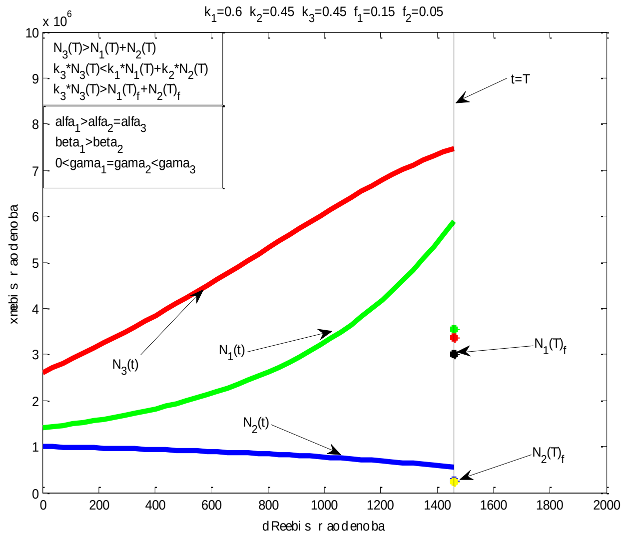
მესამე თავის მესამე პარაგრაფში ზემოთ აღნიშნული ფაქტორების გათვალისწინებით კომპიუტერული მოდელირების მეშვეობით მიღებულია რიცხვითი ამოხსნები. გამოთვლებისათვის გამოყენებულ იქნა პროგრამული გარემო MATLAB. ჩატარებულია მრავლობითი რიცხვითი ექსპერიმენტი შესაბამისი გრაფიკული გამოსახვით (მაგალითად, ნახ.1, ნახ.2 - ში მოყვანილია პარტიების ამომრჩეველთა განსხვავებული აქტივობის, ფალსიფიცირების და დემოგრაფიული ფაქტორის გათვალისწინების კერძო შემთხვევები), გაკეთებულია მნიშვნელოვანი დასკვნები.

დისერტაციის ბოლოში მოყვანილია სამი **დანართი**, სადაც მოცემულია და აღწერილია სხვადასხვა პროგრამული კოდების ერთობლიობა, რომელთა საშუა-ლებითაც ჩატარებულია გათვლები და გაკეთებულია შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები.



k1=0.46 k2=0.38 k3=0.64 f1=0.24 f2=0.19
x 10^6
N3(T)<N1(T)+N2(T)
k3*N3(T)<k1*N1(T)+k2*N2(T)
k3*N3(T)>N1(T)f+N2(T)f
alfa1>alfa2>alfa3
beta1>beta2
0<gama1=gama2<gama3
t=T
N3(t)
N1(t)
N2(t)
N1(T)f
N2(T)f
xmebis raodenoba
dReebis raodenoba

ნახ.1



k1=0.6 k2=0.45 k3=0.45 f1=0.15 f2=0.05
x 10^6
N3(T)>N1(T)+N2(T)
k3*N3(T)<k1*N1(T)+k2*N2(T)
k3*N3(T)>N1(T)f+N2(T)f
alfa1>alfa2=alfa3
beta1>beta2
0<gama1=gama2<gama3
t=T
N3(t)
N1(t)
N2(t)
N1(T)f
N2(T)f
xmebis raodenoba
dReebis raodenoba

ნახ.2

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში

1. თ. ჩილაჩავა, ც. ძიძიგური, ლ. სულავა, მ. ჩაკაბერია ადმინისტრაციული ზეწოლის არაწრფივი მათემატიკური მოდელი. სოხუმის უნივერსიტეტის შრომები, ტ.VII, მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა სერია, სსუ გამომცემლობა, თბილისი, 2009, გვ. 169 – 180.
2. Chilachava T., Chakaberia M., Dzidziguri Ts., Sulava L. Nonlinear mathematical model of administrative pressure. Georgian mathematical union. First international Conference, Books of Abstracts. Batumi, September 12 – 19, 2010, pp. 74 – 75.
3. Чилачава Т.И., Дзидзигури Ц.Д., Сулава Л. О., Чакаберия М.Р. Об одной нелинейной математической модели административного управления. Тезисы докладов Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвященной 80-летию со дня рождения И.В.Прангишвили, 2010, стр.203– 204.
4. Чилачава Т.И., Сулава Л.О., Чакаберия М.Р. Об одной нелинейной математической модели управления. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XVIII Международной конференции, Москва, декабрь 2010, стр.492–496.
5. Чилачава Т.И., Сулава Л.О. Нелинейная математическая модель переменного административного управления. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, ტ. III, 2012, გვ. 234 – 244.

6. Чилачава Т.И., Сулава Л. О. Об одной нелинейной математической модели управления. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2013, № 1(37), pp. 60 – 64.
7. Chilachava T.I., Sulava L.O. Nonlinear mathematical model of elections with variable coefficients. VI International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2015, p.97.
8. Сулава Л.О. Математическое и компьютерное моделирование нелинейных процессов выборов. Труды Международной конференции «Информационные и компьютерные технологии, моделирование, управление», посвященной 85-летию со дня рождения И.В.Прангишвили, Тбилиси, 2015, стр. 387 – 390..
9. Чилачава Т.И., Сулава Л.О. Математическое и компьютерное моделирование процессов выборов с двумя избирательными субъектами и переменными коэффициентами модели. Проблемы управления безопасностью сложных систем. Труды XXIII Международной конференции, Москва, 2015, стр. 356 - 359.
10. Chilachava T.I., Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of nonlinear processes of elections with two selective subjects. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2015, № 2(46), pp. 61 – 78.
11. სულავა ლ. ორსუბიექტიანი არჩევნების პროცესების მათემატიკური და კომპიუტერული

მოდელირება. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის შრომები, 2015, ტ. IX - X, გვ. 177 – 188.
12. Chilachava T.I., Sulava L.O. Three party nonlinear mathematical model of elections. VII International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2016, pp.105-106.
13. Chilachava T.I., Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of three-party elections. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2016, № 2(48), pp.59 – 72.

LEPL SOKHUMI STATE UNIVERSITY

Faculty of Mathematics and Computer Sciences

The right of manuscript

Leila Sulava

Mathematical and computer modeling of nonlinear social processes

Abstract of presented dissertation for Ph.D. academic degree in Informatics

Tbilisi, 2016

Dissertation is fulfilled at the Faculty of Mathematics and Computer Sciences of the LEPL Sokhumi State University

Scientific adviser:	**Temur Chilachava** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Applied Mathematics of the Sokhumi State University, Full member of the Academy Natural Sciences and Education of Georgia, Vice-president Tskhum-Abkhazian Academy of Science.
Experts:	**Zurab Gegechkori** Doctor of Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics of the Sokhumi State University. **Theodore Zarqua** Doctor of Engineering Informatics, Associate Professor of the Georgian Technical University.
Official reviewers:	**Hamlet Meladze** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of St. Andrew the First-Called Georgian University of the Patriarchate of Georgia. **Tamaz Obgadze** Doctor of Technical Sciences, Professor of Georgian Technical University, Head of Department of automation equipment and control systems, Full member of Academy of Engineering.

Dissertation will be presented at , 2016 at at the session of the Dissertation Commission of the Faculty of Mathematics and Computer Sciences of the LEPL Sokhumi State University

Address: 9 Ana Politkovskaya Str., IV floor, Presentation Room.

Dissertation Council Secretary,

of Applied Mathematics Associate Professor **Tsiala Dzidziguri**

General Description of the Dissertation
Relevance of the problem

Intellectual development of humanity and the accumulated knowledge about the world, pushes mankind to change its worldview about the structure of the universe, i.e. we observe the world that is constantly changing with the development. Synergetics (joint action), i.e. self-organization theory, is one of the most popular and promising approach towards researching links between different disciplines. Synergetics has been through long and difficult journey. Almost forty years ago it was considered as a method of entertainment for physicists-theoretics, who found similarities between nonlinear phenomenons. And twenty years ago the concepts and methods of synergetics enabled discovery of many interesting phenomenon in physics, chemistry, biology, hydrodynamics, etc. Today this interdisciplinary approach is more widely used in strategic planning, the analysis of historical alternatives, finding solutions to the outstanding global problems of humanity, etc. The fast moving global technological advancement and increased informatisation of the humanity enabled creation of new direction, such as mathematical and computer modeling.

Synergetics initiated the application of mathematical models in social sciences: sociology, history, demographic studies, political science, conflict studies, etc.

The current developments in the modern world made it relevant to study social processes, such as public administration and administrative management. For the first time the administration model was proposed by prof. T.I. Chilachava.

In terms of governance of particular interest is the description by mathematics (the creation of a mathematical model) of a social process, how is the process of political elections. Many scientists worked on this subject, but in most cases, they were interested in analyzing statistical data of results of carried out elections.

Extremely important is the creation of a mathematical model, which would give an opportunity to define the dynamics of change in the number of supporters of different political subjects during the election period and a possible forecast of the election results.

The nonlinear mathematical models of two and three party elections were first proposed in the following works:

- Chilachava T.I. Nonlinear mathematical model of dynamics of voters of two political subjects. Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Reports, 2013, vol. 39, pp. 13 - 22.
- Chilachava T.I. A nonlinear mathematical model of the dynamics of the voters pro-government and opposition parties (the two election subjects). Basic paradigms in science and technology. Development for the XXI century. Transactions II, 2012, pp. 184 –188 (russian).
- Chilachava T.I. Nonlinear mathematical model of three-party elections. Problems of security management of complex systems. Proceedings of the XXI International Conference, Moscow, 2013, pp. 513 – 516 (russian).

The models of management and elections are quite relevant from the theoretical as well as practical point of view. The interested parties are encouraged to use widely the given results, calculate parameters and choose the future strategy for achieving the desired goal.

Research Object and Goal

The main goal of the dissertation is to demonstrate the importance of using mathematical and computer modeling in sociology, more specifically, to develop mathematical and computer models to describe the social processes, such as administrative management and political elections, which will be applied in practice.

The object of research of the dissertation is the study of the above mentioned models in the case of different initial conditions and model parameters.

Achieving this goal is achieved through the study of scientific problems associated with the analysis of the models in question, using the mathematical theory of systems of differential equations, numerical methods, computer modeling.

Scientific novelties and Main Results

1. In case of changing administrative management the solution of Cauchy's problem about nonlinear differential equations systems is solved exact analytically. According to the different dependencies between model parameters and initial conditions of governance is received various regimes. By applying variable parameters of nonlinear mathematical model of administrative management when looking at private case the exact analytical solution was found, while numerical solutions were obtained for the general case.

2. General nonlinear mathematical model of two party elections is considered by taking into account different indicators of voters' turnout, of demographic factor (changes in the total number of voters from election to election) and possible election fraud. Described the case when the coefficient of attracting voters for pro-government and opposition parties is exponentially growing function of time, and for utilization function of administrative resources three cases are considered: when the function is constant; when the function is linear and proportional to the number of voters for opposition parties; when the function is exponentially growing. Through computational modeling the numerical solutions are obtained.
3. The new general nonlinear mathematical model with variable coefficients and taking into account demographic factor is described for the case of three party elections. It analyses quantity voters' number dynamics of pro-government and two opposition parties from elections to elections. In case of constant variables of the model and ignoring demographic factors the exact analytical solution has been obtained. The conditions were found for which the model became nontrivial (when the election results are not obvious).
4. In case, when the coefficient of attracting votes, utilization of administrative resources and demographic coefficient are exponentially growing functions, the numerical solutions of general nonlinear mathematical model for the three party elections are obtained and visualized.

Approbation

Main results of the dissertation were presented on 6 international and 1 republic science conferences:

1. International scientific conference "Information and computer technologies, modelling, control" devoted to the 80th anniversary of academician I.V. Prangishvili , Tbilisi, 2010.
2. I international Conference mathematical union Georgian, Batumi, 2010.
3. Proceedings of the XVIII International Conference "Problem of security management of complex systems", Moscow, 2010.
4. Scientific conference devoted to the 65th anniversary of prof R.M. Absava, Tbilisi, 2012.
5. Proceedings of the XXIII International Conference "Problem of security management of complex systems", Moscow, 2015.
6. International scientific conference "Information and computer technologies, modelling, control" devoted to the 85th anniversary of academician I.V. Prangishvili, Tbilisi, 2015.
7. VI international Conference mathematical union Georgian, Batumi, 2015.

Volume and Structure of Dissertation

The dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion, list of used literature, and three appendixs. The work includes 172 pages. The appendix contains 61 listings. References list includes 125 names.

Brief Summary of the work

In the **introduction** of the dissertation actuality of topic is discussed; review of the literature is given; the object and goal of the work is described and main results, their practical applicability are given.

The **first chapter** the task is description of the mathematical language of the social process in mathematical terms (creating a mathematical model), such as administrative pressure. This pressure can be imposed on macro (state or its large region, macromodel) as well as micro (educational institution, industry, etc., micromodel) level through ideological or technological means. The mathematical model considers three objects:

1. Administration (ruling structures, power) that aims to manage it subordinates on micro and macro levels based on its interests. This can be fair (democratic governance) or unfair (undemocratic governance) management.
2. Conformists who accept the ruling administration.
3. Free thinkers, who, in spite of the pressure, remain free to make their own choice or action.

The general model of administrative management proposed as follows:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha(t)x(t)y(t) - \beta(t)x(t) \\
\dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha(t)x(t)y(t) + \beta(t)x(t)
\end{cases}
\qquad (1.1)
$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0,$$

where

$x(t)$ - is the quantity of free thinkers at time t, $t \in [0,T], T < \infty$;

$y(t)$ - is the quantity of conformists at time t;

$\alpha(t) > 0$ - is freedom coefficient at time t;

$\beta(t) > 0$ - linear continuous positive function of the administrative pressure, which is characterized by the scale of utilized administrative resources.

In the nonlinear mathematical model (1.1) given in the first paragraph of chapter 1 the administrative pressure is constant and it does not depend on time. During the analysis of the model the so-called demographic changes of both groups of people are disregarded: in case of macro model it is assumed that the birth and death rates are equal, and in case of micro model the rations of inflow and outflow of staff are equal as well in the industry. The model is a continuous and search functions have first order continuous derivatives. Depending on the relationships between parameters (like indicators of quality of activity or freedom coefficient and administrative pressure) of the model and initial conditions different control modes are obtained.

The second paragraph of first chapter discusses nonlinear mathematical model of administrative management. It can describe a growing administrative pressure by a government on the public sector with the aim to control peoples actions in any given social structure. The model is described by the system of nonlinear differential equation of two variables (the number of free thinkers and conformists at the time t). An exact analytical solution is found for the problem of Cauchy of the system of nonlinear differential equations in the case of variable administrative pressure. Depending on the relationships between parameters (like indicators of quality of activity and administrative pressure) of the model and initial conditions different cases are obtained.

The third paragraph of first chapter discusses general nonlinear model of administrative management (1.1), which describes growing administrative pressure by a government in case of variable coefficients. An exact analytical solution has been found for a specific case

$$x(t) = x_1 + \frac{1}{w(t)}$$

$$y(t) = a - (x_1 + \frac{1}{w(t)})$$

where

$$w(t) = e^{(b+2x_1)\int_0^t \alpha(\tau)d\tau}(w_0 + \int_0^t e^{-(b+2x_1)\int_0^\tau \alpha(\mu)d\mu}\alpha(\tau)d\tau)$$

$$x_0 + y_0 = a,$$

$$\beta(t) = b\alpha(t), b > 0, b = const$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2},\ w_0 = \frac{1}{x_0 - x_1},\ x_0 \neq x_1.$$

The fourth paragraph of chapter 1 discusses two cases for the general nonlinear mathematical model:

a) The freedom coefficients and functions of administrative pressure are exponentially growing functions of time. Then the system (1.1) is as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha_0 e^{\delta \frac{t}{T}} x(t)y(t) - \beta_0 e^{\gamma \frac{t}{T}} x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha_0 e^{\delta \frac{t}{T}} x(t)y(t) + \beta_0 e^{\gamma \frac{t}{T}} x(t) \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0$$

$$\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \delta > 0, \gamma > 0.$$

b) The freedom coefficients and administrative pressure are qualitative. Then the system (1.1) is as follows:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha_0 \left(\dfrac{t+t_0}{T}\right)^n x(t)y(t) - \beta_0 \left(\dfrac{t+t_0}{T}\right)^k x(t) \\ \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\alpha_0 \left(\dfrac{t+t_0}{T}\right)^n x(t)y(t) + \beta_0 \left(\dfrac{t+t_0}{T}\right)^k x(t) \end{cases} \qquad (1.3)$$

$$x(0) = x_0 \quad y(0) = y_0, n, k \in N.$$

For numerical solution the software MATLAB is used. Numerical experiments are carried out and results are visualized.

Chapter II describes nonlinear mathematical model in case of two party elections by taking into consideration demographic factor (changes in the total number of voters from election to election), variable coefficients, voters different activity and possible falsification of elections. The model describes dynamics of number of votes for ruling and opposition parties from elections to elections. There are three objects in the nonlinear mathematical model that describes this process:

1. State and administrative structures that influence voters of opposition party with the use of state resources to gain their support.
2. Voters who support opposition party.
3. Voters who support ruling party.

The nonlinear mathematical model of two-party elections is described as follows:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_1(t) - \alpha_2(t))N_1(t)N_2(t) - f(t, N_1(t)) + \beta_1 N_1(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_2(t) - \alpha_1(t))N_1(t)N_2(t) + f(t, N_1(t)) + \beta_2 N_2(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$N_1(0) = N_{10},\ N_2(0) = N_{20},\ N_{10} < N_{20}\ ,\ N_1(t), N_2(t) \in C^1[0,T] \quad (2.2)$$

where $N_1(t), N_2(t)$ - number of voters for ruling and opposition parties at time t, $t \in [0,T]$; set of equations (2.1) $t \in (0,T]$ interval and initial conditions (2.2) at $t = 0$;

$t = 0$ - is the time of previous elections, when one of the parties won the elections and became the ruling party ($N_{10} < N_{20}$);

$t = T$ - is the time of the following elections (in most cases $T = 4$ years or 1460 days);

$\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ - are time dependent coefficients of attracting votes for opposition and ruling parties accordingly. They are depend on the action plans, as well as financial, technological and informational capacities of the political parties.

The nontrivial model (the model, when the election results are not obvious) can be only obtained when

$$\alpha_1(t) > \alpha_2(t) > 0, t \in [0,T] .$$

$f(t, N_1(t))$ - is the continuous positive function of its arguments, that is characterized by the scale of used administrative resources and is directed at voters of opposition party with the aim to gain their support and maintain the power.

β_1, β_2 – are the coefficients that describe demographic changes of the parties respectively.

The first paragraph of second chapter describes two-party nonlinear mathematical model with variable coefficients, that takes into account demographic factor. The case is discussed when coefficients of attracting votes by ruling and opposition parties are exponentially growing function of time from election to election. For utilization of administrative resources function of three cases are presented: when the function is constant; when the function is linear and proportional to the number of voters for opposition party; when it is exponentially growing function. Accordingly three different problems of Cauchy are obtained:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_{10}e^{\delta_1\frac{t}{T}} - \alpha_{20}e^{\delta_2\frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) - b + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_{20}e^{\delta_2\frac{t}{T}} - \alpha_{10}e^{\delta_1\frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) + b + \beta_2 N_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_{10}e^{\delta_1\frac{t}{T}} - \alpha_{20}e^{\delta_2\frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) - b_1 N_1(t) + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_{20}e^{\delta_2\frac{t}{T}} - \alpha_{10}e^{\delta_1\frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) + b_1 N_1(t) + \beta_2 N_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_{10}e^{\delta_1\frac{t}{T}} - \alpha_{20}e^{\delta_2\frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) - F_0 e^{\delta\frac{t}{T}} + \beta_1 N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_{20}e^{\delta_2\frac{t}{T}} - \alpha_{10}e^{\delta_1\frac{t}{T}})N_1(t)N_2(t) + F_0 e^{\delta\frac{t}{T}} + \beta_2 N_2(t) \end{cases}$$

$$N_1(0) = N_{10}, \quad N_2(0) = N_{20}, \quad N_{10} < N_{20}, \quad N_1(t), N_2(t) \in C^1[0,T].$$

The second paragraph of the second chapter the general nonlinear mathematical model is described by taking into consideration voters' activity, demographic factor and possible falsification of the elections.

The third paragraph of the second chapter presents numerical solutions by taking into consideration above described factors. For computation the software MATLAB has been used. According to the various initial conditions several results (different models) obtained.

The results obtained with the consideration of demographic factors somewhat differ from those obtained while disregarding these factors.

The chapter III discusses the process dynamics of three party (one ruling and two opposition parties) from elections to elections. There are four objects in the nonlinear mathematical model that describes this process:

1. State and administrative structures, that try to influence supporters of opposition party and gain their support through utilization of state resources (the administrative structures are obviously supporters of the ruling party).
2. The voters who support a ruling party.
3. The voters who support the first opposition party.
4. The voters who support the second opposition party.

In this nonlinear mathematical model all coefficients are variables and demographic factors are taken into consideration.

The differential equation that describes this nonlinear process has following form:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1(t)}{dt} = (\alpha_1(t)-\alpha_2(t))N_1(t)N_2(t) + (\alpha_1(t)-\alpha_3(t))N_1(t)N_3(t) - \beta_1(t)N_1(t) + \gamma_1(t)N_1(t) \\ \dfrac{dN_2(t)}{dt} = (\alpha_2(t)-\alpha_1(t))N_1(t)N_2(t) + (\alpha_2(t)-\alpha_3(t))N_2(t)N_3(t) - \beta_2(t)N_2(t) + \gamma_2(t)N_2(t) \\ \dfrac{dN_3(t)}{dt} = (\alpha_3(t)-\alpha_1(t))N_1(t)N_3(t) + (\alpha_3(t)-\alpha_2(t))N_2(t)N_3(t) + \beta_1(t)N_1(t) + \beta_2(t)N_2(t) + \gamma_3(t)N_3(t) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Equations (3.1) is defined $t \in (0,T]$, and initial conditions (of Cauchy) $t = 0$ moment of time

$$N_{10} = N_1(0)\,, N_{20} = N_2(0)\,, N_{30} = N_3(0)\,. \qquad (3.2)$$

We look for the solution of the Cauchy problem (3.1)-(3.2) $t \in [0,T]$ in the class of continuous differentiable functions

$$N_1(t), N_2(t), N_3[t] \in C^1[0,T]\,. \qquad (3.3)$$

In the equation system (3.1):

$N_1(t), N_2(t), N_3(t) -$ is the number of supports of two opposition and one ruling party at time t;

t=0 – is the time of previous elections, when one of the parties won the elections and became the ruling party;

$t=T$ – is the time of the following elections (in many cases T= 4 years or 1460 days);

$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ -- are the coefficients of attracting votes by the first and second opposition party and the ruling party at time t. They largely depend on the action programs, as well as financial, technological and informational capacities of the political parties;

$\beta_1(t), \beta_2(t)$-- are the continuous positive functions, that define the scale of used administrative resources and are directed at voters respectively of first and second opposition party with the aim to gain their support and maintain the power;

$\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$ -- are the coefficients that describe demographic changes of the respectively parties.

Below can be found schematic description of the process, i.e. process scenario (picture 1).

The first paragraph of chapter III discusses nonlinear mathematical model of three-party elections with constant coefficients. When ignoring demographic factors has been obtained following exact analytical solution (3.1), (3.2):

$$
\begin{cases}
N_1(t) = \dfrac{\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3 + p(\alpha_2 - \alpha_3)} N_{10} e^{[(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1]t}}{\dfrac{(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_3 + p(\alpha_2 - \alpha_3)} + N_{10}(e^{[(\alpha_1 - \alpha_3)a - \beta_1]t} - 1)} \\
N_2(t) = pN_1(t), p \equiv {}^{N_{20}}\!/_{N_{10}} \\
N_3(t) = a - (p+1)N_1(t), a \equiv N_{10} + N_{20} + N_{30}
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

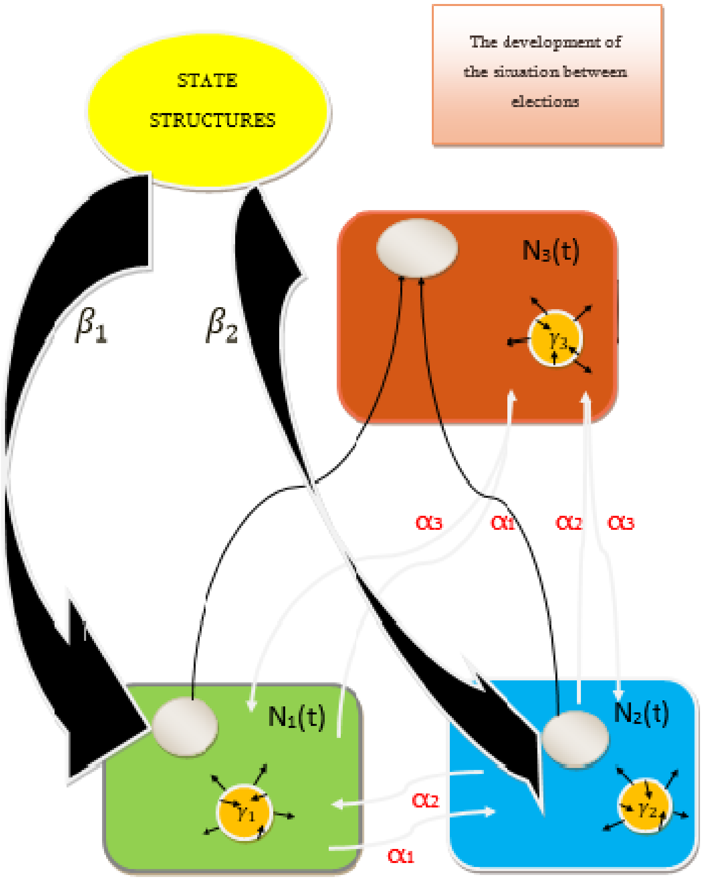
The conditions were found for which the model becomes nontrivial. The relevant graphic illustrations have been developed.

The second paragraph of chapter III discusses nonlinear mathematical model for three party elections with variable coefficients. The expected indicator of voters' turnout was taken into account, also the fact that in some less democratic countries take place some falsification of the election results.

The model describes the case of variable coefficients. Specifically we assume that the coefficients of attracting voters, the factor of utilising administrative resources and demographic coefficients are exponentially growing functions of time from election to election.

The third paragraph of chapter III shows numerical solutions obtained by computational modeling with consideration of factors mentioned above. For computation the software MATLAB has been used. Numerical experiments are carried out, results are visualized (e.g. fig. 1, fig. 2 show cases with different voters' activities, vote rigging and demographic factors) and important conclusions have been made.

At the end of the dissertation the three **appendix** is given. It contains the codes which was used to obtain numerical solutions and create visualization of the results.



Picture 1.

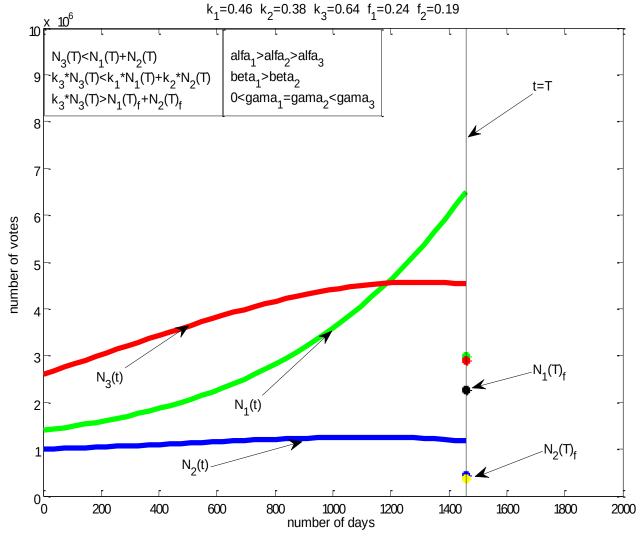

k1=0.46 k2=0.38 k3=0.64 f1=0.24 f2=0.19
x 10^6
N3(T)<N1(T)+N2(T)
k3*N3(T)<k1*N1(T)+k2*N2(T)
k3*N3(T)>N1(T)f+N2(T)f
alfa1>alfa2>alfa3
beta1>beta2
0<gama1=gama2<gama3
t=T
N3(t)
N1(t)
N2(t)
N1(T)f
N2(T)f
number of votes
number of days

Fig.1

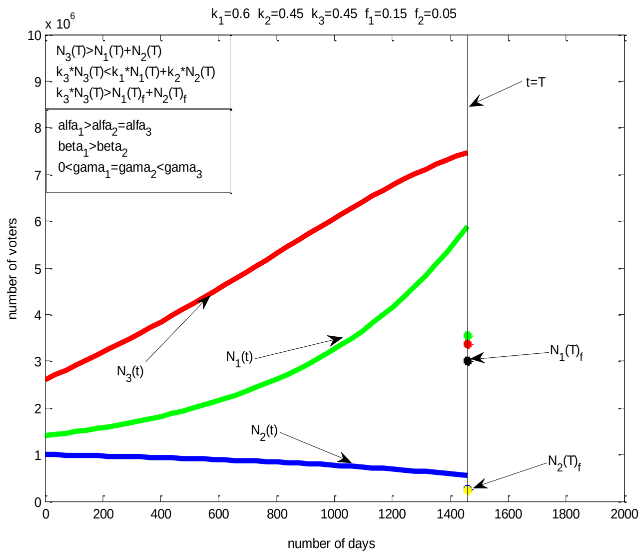

k1=0.6 k2=0.45 k3=0.45 f1=0.15 f2=0.05
x 10^6
N3(T)>N1(T)+N2(T)
k3*N3(T)<k1*N1(T)+k2*N2(T)
k3*N3(T)>N1(T)f+N2(T)f
alfa1>alfa2=alfa3
beta1>beta2
0<gama1=gama2<gama3
t=T
N3(t)
N1(t)
N2(t)
N1(T)f
N2(T)f
number of voters
number of days

Fig.2

The main results of the dissertation are published in the following works:

1. Chilachava T.I., Dzidziguri Ts.D.,Sulava L.O., Chakaberia M.R. Nonlinear mathematical model of administrative management.Sokhumi State University Proceedings, Mathematics and Computer Sciences, vol. VII, 2009, pp. 169-180 (georgian).
2. Chilachava T., Chakaberia M., Dzidziguri Ts., Sulava L. Nonlinear mathematical model of administrative pressure. Georgian mathematical union. First international Conference, Books of Abstracts. Batumi, September 12 – 19, 2010, pp. 74 – 75.
3. Chilachava T.I., Dzidziguri Ts.D., Sulava L.O., Chakaberia M.R. A nonlinear mathematical model of administration. Abstracts of the International scientific conference “Information and computer technologies, simulations”, devoted to the 80th anniversary of academician Prangishvili I.V., 2010, pp. 203-204 (russian).
4. Chilachava T.I., Sulava L.O., Chakaberia M.R. A nonlinear mathematical model of administration. Problem of security management of complex systems. Proceedings of the XVIII International Conference, Moscow, 2010, pp. 492 – 496 (russian).
5. Chilachava T.I., Sulava L.O. A nonlinear mathematical model of variable administrative rule. Tskhum-Abkhazian Academy of sciences proceedings, v. III, 2012, pp. 234 – 244 (russian).
6. Chilachava T.I., Sulava L.O. A nonlinear mathematical model of management.Georgian Electronic Scientific

Journal: Computer Science and Telecommunications, 2013, № 1(37), pp. 60 – 64 (russian).

7. Chilachava T.I., Sulava L.O. Nonlinear mathematical model of elections with variable coefficients. VI International Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Tbilisi - Batumi, 2015, p. 97.
8. Sulava L.O. Mathematical and computer modelling of nonlinear processes of elections. Works of the International scientific conference "Information and Computer Technologies, Modelling, Management" devoted to the 85 anniversary since the birth of academician I. V. Prangishvili, Tbilisi, 2015, pp. 387 – 390 (russian)..
9. Chilachava T.I., Sulava L.O. Mathematical and computer simulation of processses of elections with two electoral subjects and variable coefficients of model. Problems of security management of difficult systems. Works XXIII of the International conference, Moscow, 2015, pp. 356 – 359 (russian).
10. Chilachava T.I., Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of nonlinear processes of elections with two selective subjects. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2015, № 2(46), pp. 61 – 78.
11. Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of Elections with two electoral subjects. Tskhum-Abkhazian Academy of sciences proceedings, 2015, v. IX - X, pp. 177 – 188 (georgian).
12. Chilachava T.I., Sulava L.O. Three party nonlinear mathematical model of elections. VII International

Conference of the Georgian mathematical union, Book of Abstracts, Batumi, 2016, pp.105-106.
13. Chilachava T.I., Sulava L.O. Mathematical and computer modeling of three-party elections. Georgian Electronic Scientific Journal: Computer Science and Telecommunications, 2016, № 2(48), pp. 59 –72.