საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გელა მანელიძე

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის ამოცანებში

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა ,,მათემატიკა", შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი 0175, საქართველო
ივლისი, 2016 წელი

თბილისი,
2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფ. დავით ნატროშვილი
პროფ. გივი ბერიკელაშვილი

რეცენზენტები: ———————————————————

———————————————————

დაცვა შედგება —————— წლის ———— ——————————————, ———— საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ———, აუდიტორია ———.

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე.

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელის მომწერნი, ვადასტურებთ, რომ გავეცანით მანელიძე გელას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: "ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის ამოცანებში" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი:

ხელმძღვანელი: პროფ. დავით ნატროშვილი

ხელმძღვანელი: პროფ. გივი ბერიკელაშვილი

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2016

ავტორი: გელა მანელიძე
დასახელება: ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის ამოცანებში
ხარისხი: დოქტორი
სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პირების ან ინსტიტუტების მიერ ზემოთ მოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ვუძღვნი ჩემს შვილიშვილებს:

ანას, დავითს, ნინის, მარიამს.

რეზიუმე

გელა მანელიძის სადისერტაციო ნაშრომი **"ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის ამოცანებში"** ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიულ გამოკვლევას და მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგების პრობლემებს. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების გაანალიზება თეორიულ და პრაქტიკულ ასპექტებში ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის.

ჰელმჰოლცის განტოლება გვხვდება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელებში და ამიტომ შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც ტალღათა გავრცელების პირდაპირ ამოცანებში, ისე შებრუნებულ ამოცანებში. ტალღების გავრცელების ეს მოდელები ფართოდ გამოიყენება საინჟინრო ელექტრონიკაში, ბიოსამედიცინო აპარატურაში, ფიზიკური გამზომი აპარატურის წარმოებაში, რადარულ სისტემებში, ანტენებში და სხვა.

დისერტაციაში განხილული დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა მყარი დეფორმადი სხეულების თეორიაში ერთ-ერთ ძირითად მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს. ამ მიმართულებით, სადისერტაციო ნაშრომში კვლევის ძირითადი ობიექტი არის ანიზოტროპული დრეკადი სხეულების მოდელის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთაც უდიდესი გამოყენება აქვთ სამშენებლო და ინდუსტრიულ ინჟინერიაში, კომპოზიტური მასალების თეორიაში, მასალათა გამძლეობის ამოცანებში და სხვა.

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის პოტენციალთა მეთოდისა და რელიხ-ვეკუას ლემის გამოყენებით ნაშრომში დამტკიცებულია დირიხლეს, ნეიმანის, რობინის და შერეული გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის თეორემები სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში) და დადგენილია ამონახსნების შეფასებები იმავე ფუნქციურ სივრცეებში სასაზღვრო ზედაპირებზე მოცემული ფუნქციების ნორმების საშუალებით. არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმ ფაქტს, რომ ყველა გარე სასაზღვრო ამოცანა ჰელმოლცის განტოლებებისათვის დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ეკვივალენტურ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებაზე. არსებითი აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ შესწავლილია უსასრულო არეზე გავრცელებული ნიუტონის

მოცულობითი პოტენციალის ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში, როდესაც შესაბამისი სიმკვრივის საყრდენი არ არის კომპაქტური. კერძოდ, დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ზომერფელდის გამოსხივების პირობას მოცულობითი პოტენციალისათვის. ამავე დროს, განხილულია პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ კლასიკური მიდგომა არ გამოდგება რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში და მოითხოვს სპეციალურ მოდიფიკაციას.

მიღებული შედეგები არსებითადაა გამოყენებული ბზარის და ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანებისა და შერეული ტრანსმისიის ამოცანების გამოსაკვლევად უბნობრივად ერთგვაროვანი სხეულებისათვის. დადგენილია ამ ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობა, პოტენციალების წრფივი კომბინაციით წარმოდგენადობა, და შესწავლილია მათი სიგლუვე სინგულარობის წირების მიდამოში.

ანალოგიურად, დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისთვის გაანალიზებულია დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანები (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში). შესაბამისი ფუნქციური სივრცეების ნორმებში დადგენილია ამონახსნების შეფასებები სასაზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

მიღებული აპრიორული შეფასებები არსებით როლს თამაშობს დისერტაციაში შემოთავაზებული ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდზე დაფუძნებული მიახლოებითი ამონახსნების მოძებნის ალგორითმების აგებაში. ფაქტობრივად, შემოთავაზებულ ალგორითმებს სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება დაჰყავს სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე ფუნდამენტური ამონახსნების საშუალებით სპეციალურად აგებულ ფუნქციათა სისტემაში.

ერთგვაროვანი და უბნობრივად ერთგვაროვანი მრავალკომპონენტიანი კომპოზიტური სტრუქტურების შემთხვევაში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დასმული სამგანზომილებიანი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისთვის, აგრეთვე შერეული ტრანსმისიის ტიპის ამოცანებისთვის, რომლებიც მოიცავენ ეკრანისა და ბზარის ტიპის ამოცანებს, დისერტაციაში განვითარებულია და დაფუძნებულია ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი.

უნდა აღინიშნოს, რომ სამეცნიერო ლიტერატურაში უკანასკნელ პერიოდამდე არ იყო ცნობილი, თუ როგორ შეიძლებოდა ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებში, რადგან აღნიშნულ მეთოდთან დაკავშირებული არსებული მიდგომები არ გამოდგებოდა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებისთვის. ეს პრობლემა

წარმატებითაა გადაჭრილი სადისერტაციო ნაშრომში. ამ პრობლემის გადაჭრაში არსებითი როლი ითამაშა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანების ჩამოყალიბებამ შერეული საკონტაქტო ამოცანების სახით ხელოვნურად შემოტანილ ზედაპირებზე განსაზღვრული დამატებითი ტრანსმისიის პირობებით.

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დაფუძნებულია აგრეთვე ანიზოტროპული სხეულების დრეკადობის კლასიკური თეორიის გადაადგილების, ძაბვის და შერეული ტიპის სტატიკის ამოცანებისათვის.

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი ამოცანისათვის აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა სპეციალური სისტემები, რომელთათვისაც მტკიცდება წრფივად დამოუკიდებლობა და სისრულე განსახილველი სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის ბუნებრივ ფუნქციურ სივრცეებში (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში).

Abstract

The present PhD Thesis of Gela Manelidze **"Application of Fundamental Solutions Method to the static and steady state oscillation problems of Mathematical Physics"** is devoted to the theoretical investigation of different type boundary-transmission problems for partial differential equations of Mathematical Physics and construction of algorithms of approximate solutions. In particular, the main goal of the investigation is to analyze theoretical and practical aspects of boundary and boundary-contact problems for the Helmholtz equation and the system of differential equations of statics of the theory of elasticity.

The Helmholtz equation encounters in the mathematical models of acoustic and electro-magnetic waves and investigation of the corresponding boundary value problems have a crucial role in the study of direct and inverse wave scattering problems. These models have a wide range of applications in engineering, bio-medicine, physical measuring devices, radar systems, antennas, etc.

The system of statics of the theory of elasticity, treated in the thesis, represents one of the basic models in the theory of deformable solids. In this direction, the basic object of investigation is the system of differential equations corresponding to anisotropic elastic solids, having an essential applications in civil and industrial engineering, theory of composite materials, in the theory of durability, etc.

By the potential method and applying the Rellich-Vekua celebrated lemma, the uniqueness and existence theorems of solutions for the Dirichlet, Neumann, Robin, and mixed exterior boundary value problems for the Helmholtz equation are proved in different function spaces (Sobolev-Slobodetskii, Bessel potential and Besov spaces). The estimates of the corresponding norms of solution are established by the appropriate norms of given boundary functions. The most principal thing here is that all the boundary value problems are reduced to the equivalent, uniquely solvable integral (pseudodifferential) equations.

It should be mentioned that a detailed analysis related to the volume Newtonian potentials associated with the Helmholtz equation is given when the domain of integration is unbounded region and the sufficient conditions are found when a volume potential with density having noncompact support belongs to the Sommerfeld class of radiating functions.

Some principal questions related to the application of the so called direct boundary integral equations method to the exterior problems is considered. In particular, it is established that this approach is not applicable for the resonance frequencies and in this case it needs a special modification described in the thesis.

The results obtained are applied to the screen and crack type problems as well as to the mixed transmission problems for piece wise homogeneous structures. The unique solvability of these problems and the representability of solutions by linear

combinations of the layer potentials is established. The smoothness properties of solutions near the exceptional curves are studied.

Similar results are formulated for the Dirichlet, Neumann, and mixed type problems for the linear equilibrium equations of anisotropic elasticity in the Sobolev-Slobodetskii, Bessel potential, and Besov spaces. The corresponding estimates of norms of solutions by the appropriate norms of the boundary functions are established.

The above mentioned estimates play a crucial role in construction of algorithms for approximation of solutions by the Fundamental Solutions Method offered in the thesis. Actually, by this method, the solution procedure of the boundary value problems are reduced to the approximation problem of given boundary functions by means of linear combinations of functions specially constructed by the fundamental solutions.

For the basic and mixed exterior boundary value and mixed boundary-transmission problems, as well as for the screen and crack type problems for the Helmholtz equation, the Fundamental Solutions Method is developed and justified.

It should be mentioned that in the scientific literature the Fundamental Solution Method for the crack type problems has not been treated. This issue is successfully elaborated in the present thesis by reduction of the crack problem to the appropriate mixed transmission problem by introducing an artificial transmission surface where the rigid contact conditions are prescribed.

The Fundamental Solution Method is developed and justified also for the anisotropic elasticity theory for the Dirichlet, Neumann, and mixed boundary value problems of statics in the interior domains.

For all the above mentioned boundary value and transmission problems special systems of functions are constructed by means of the corresponding fundamental solutions which are linearly independent and dense in the appropriate Sobolev-Slobodetskii, Bessel potential, and Besov spaces.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი 16

თავი I. ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა .. 22

§1. ზედაპირთა კლასები და ფუნქციური სივრცეები 22

§2. ამოცანების დასმა და დამხმარე დებულებები 23

2.1. დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ეკრანის ტიპის, ბზარის ტიპის ამოცანების ჩამოყალიბება 23

2.2. გრინის ფორმულები და რხევის პოტენციალები 27

2.3. უსასრულო არეზე გავრცელებული ნიუტონის პოტენციალის თვისებები 33

§3. ამონახსნთა არსებობის თეორემები 41

3.1. ამონახსნის არსებობის დებულება დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანისათვის 41

3.2. ამონახსნის არსებობის დებულება ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანისათვის 44

3.3. ამონახსნის არსებობის დებულება ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანისათვის 46

3.4. ამონახსნის არსებობის დებულება ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანისათვის 53

3.5. ამონახსნის არსებობის დებულება ბზარის ტიპის სასაზღვრო ამოცანისათვის 58

§4. საკონტაქტო ამოცანები 62

4.1. ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა 62

4.2. შერეული საკონტაქტო ამოცანა 66

§5. შენიშვნები პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდის შესახებ 72

5.1. დირიხლეს და ნეიმანის შიგა ამოცანები 73

5.2. ტრადიციული მიდგომა გარე ამოცანებში 75

5.2.1. პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე დაფუძნებული მიდგომა 75

5.2.2. მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე დაფუძნებული მიდგომა 81

5.3. მოდიფიცირებული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი 88

5.3.1. მოდიფიცირებული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი დირიხლეს ამოცანისათვის 88

5.3.2. მოდიფიცირებული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი ნეიმანის ამოცანისათვის 90

თავი II. ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი 93

§6. ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის შესახებ 93

§7. ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის 95

§8. ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დრეკადობის თეორიაში 110

დამატება A: ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის თვისებები გახსნილ მრავალსახეობებზე 125

დამატება B: რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები 127

დასკვნა 135

გამოყენებული ლიტერატურა 137

ცხრილების ნუსხა

ცხრილი 1. ცდომილებები A1 განტოლებისათვის, როცა d=8 131

ცხრილი 2. ცდომილებები A1 განტოლებისათვის, როცა d=10 131

ცხრილი 3. ცდომილებები A1 განტოლებისათვის, როცა d=50 131

ცხრილი 4. ცდომილებები A2 განტოლებისათვის, როცა d=8 132

ცხრილი 5. ცდომილებები A2 განტოლებისათვის, როცა d=10 132

ცხრილი 6. ცდომილებები A2 განტოლებისათვის, როცა d=50 132

ცხრილი 7. ცდომილებები A3 განტოლებისათვის, როცა d=8 133

ცხრილი 8. ცდომილებები A3 განტოლებისათვის, როცა d=10 133

ცხრილი 9. ცდომილებები A3 განტოლებისათვის, როცა d=50 133

ნახაზების ნუსხა

ნახ. 1. Ω^+ და Ω^- არეები 24
ნახ. 2. ბზარის შემცველი არე 25
ნახ. 3. უსასრულო არის დანაწილება 37
ნახ. 4. ფიქტიური ზედაპირები 96
ნახ. 5. ინტერპოლაციის კვანძების გენერირება მერიდიანზე 128
ნახ. 6. ინტერპოლაციის კვანძების გენერირება პარალელზე 129
ნახ. 7. ფსევდოზედაპირი 130

მადლობას გუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს,
პროფესორ დავით ნატროშვილს
და ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს,
პროფესორ გივი ბერიკელაშვილს
მნიშვნელოვანი სამეცნიერო რჩევებისა და
გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიულ გამოკვლევას და მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგების პრობლემებს. კერძოდ, ჩვენი ძირითადი მიზანია სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების გაანალიზება თეორიულ და პრაქტიკულ ასპექტებში ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის.

ჰელმჰოლცის განტოლება გვხვდება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელებში და ამიტომ შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც ტალღათა გავრცელების პირდაპირ ამოცანებში, ისე შებრუნებულ ამოცანებში. ტალღების გავრცელების ეს მოდელები ფართოდ გამოიყენება საინჟინრო ელექტრონიკაში, ბიოსამედიცინო აპარატურაში, ფიზიკური გამზომი აპარატურის წარმოებაში, რადარულ სისტემებში, ანტენებში და სხვა.

დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა მყარი დეფორმადი სხეულების თეორიაში ერთ-ერთ ძირითად მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს. ჩვენი განხილვის ძირითადი ობიექტი არის ანიზოტროპული დრეკადი სხეულების მოდელის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთაც უდიდესი გამოყენება აქვთ ინჟინერიაში, კომპოზიტური მასალების თეორიაში, მასალათა გამძლეობის ამოცანებში და სხვა.

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით ჩვენ დავამტკიცეთ დირიხლეს, ნეიმანის, რობინის და შერეული გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის თეორემები სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში და დავადგინეთ ამონახსნების შეფასებები იმავე ფუნქციურ სივრცეებში. მიღებული შედეგები არსებითად გამოვიყენეთ ბზარის და ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანების და შერეული ტრანსმისიის ამოცანების გამოსაკვლევად უბნობრივად ერთგვაროვანი სხეულებისათვის.

ანალოგიურად, დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისთვის გაანალიზებულია დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანები. შესაბამისი ფუნქციური სივრცეების ნორმებში დავადგინეთ ამონახსნების შეფასებები სასაზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

არსებულ სამეცნიერო ლიტერატურაში თეორიული თვალსაზრისით

კაგრადაა შესწავლილი დისერტაციაში განხილული ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები რეგულარულ და L_2 სივრცის ბაზაზე აგებულ სობოლევის სივრცეებში (იხ. [1], [2], [3], [4]). თუმცა უნდა აღინიშნოს, რომ რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში სასაზღვრო ამოცანები არ არის დაყვანილი ეკვივალენტურ ინტეგრალურ განტოლებებზე და ამის გამო ეს განტოლებები ამოხსნადია ფრედჰოლმის მესამე თეორემის შესაბამისად. ეს მოითხოვს შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების საკუთრივი რიცხვებისა და საკუთრივი ფუნქციების ცოდნას, რაც ეფექტურობის თვალთახედვით პრაქტიკულად განუხორციელებელი ამოცანაა ზოგადი არეების შემთხვევაში. ჩვენ ვიყენებთ განსხვავებულ მიდგომას და სასაზღვრო ამოცანები დაგვყავს ეკვივალენტურ ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომლებიც ამოხსნადია ფრედჰოლმის პირველი თეორემის შესაბამისად. ამასთან ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემებს ვამტკიცებთ $L_p,\ p > 1,$ სივრცის ბაზაზე აგებულ სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში. აგრეთვე ვასაბუთებთ, რომ მონაცემების მაღალი სიგლუვის პირობებში შერეული და ბზარის ტიპის ამოცანების ამონახსნები, ფაქტორბივად, ეკუთვნის დისერტაციაში შემოღებულ ნახევრად რეგულარულ ფუნქციათა სივრცეს. აქ არსებითად გამოიყენება ამონახსნების ასიმპტოტური თვისებების გაანალიზება სინგულარობის წირების მიდამოში (ეს წირებია ბზარების კიდეები ან წირები, სადაც იცვლება სასაზღვრო პირობების ტიპები შერეულ ამოცანებში) (იხ. [5], [6], [7], [8]).

დისერტაციაში მიღებული აპრიორული შეფასებები არსებით როლს თამაშობს ჩვენ მიერ შემოთავაზებული ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდზე დაფუძნებული მიახლოებითი ამონახსნების მოძებნის ალგორითმების აგებაში. ფაქტობრივად, ჩვენ მიერ შემოთავაზებულ ალგორითმებს სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება დაჰყავს სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე ფუნდამენტური ამონახსნების საშუალებით სპეციალურად აგებულ ფუნქციათა სისტემაში.

ერთგვაროვანი და უბნობრივად ერთგვაროვანი მრავალკომპონენტიანი კომპოზიტური სტრუქტურებისთვის დასმული სამგანზომილებიანი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისთვის, აგრეთვე შერეული ტრანსმისიის ტიპის ამოცანებისთვის დისერტაციაში განვითარებულია ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი (ფამ) (Method of Fundamental Solutions – MFS), რომელიც პირველად შემოტანილი იქნა ცნობილი ქართველი მათემატიკოსის ვიქტორ კუპრაძის მიერ წინა საუკუნის 60-იან წლებში (ამ მიმართულებით იხ. ვიქტორ კუპრაძისა და მერაბ ალექსიძის პიონერული ნაშრომები [9, 10, 11]).

ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის ძირითადი იდეა არის ის, რომ დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ ამონახსნის სინგულარობის $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ პოლუსები განთავსდეს განსახილველი არის გარეთ და აიგოს ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\Gamma(x-y^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$, დამტკიცდეს ამ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა და სისრულე შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში და შემდეგ მათი $\sum_{k=1}^{N} C_k \Gamma(x-y^{(k)})$ სახის წრფივი კომბინაციებით მივუახლოვდეთ საძიებელ ამონახსნს. აქ C_k მუდმივებია, რომლებიც უნდა შეირჩეს სასაზღვრო პირობის დასაკმაყოფილებლად. ცხადია, დიფერენციალური განტოლება ავტომატურად დაკმაყოფილდება.

წინა საუკუნის 70-იანი წლებიდან დაწყებული, ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი თანდათანობით გადაიქცა მიახლოებითი ამონახსნის აგების ეფექტურ მეთოდად და გამოყენებული იყო მრავალი ფიზიკური და საინჟინრო ამოცანის ამოსახსნელად (მათ შორის, ფუნქციონალურად გრადუირებული სტრუქტურებისთვის) (იხ. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27] და იქ ციტირებული ლიტერატურა). ლიტერატურაში ძირითადად ყურადღება გამახვილებული იყო ამონახსების აპროქსიმაციაზე L_2 სივრცის ბაზაზე აგებულ სობოლევის სივრცეებში. წარმოდგენილ დისერტაციაში ამონახსების აპროქსიმაციის პრობლემა განხილულია $L_p, p > 1$, სივრცის ბაზაზე აგებულ სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში.

უნდა აღინიშნოს, რომ სამეცნიერო ლიტერატურაში უკანასკნელ პერიოდამდე არ იყო ცნობილი, თუ როგორ შეიძლებოდა ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებში, რადგან აღნიშნულ მეთოდთან დაკავშირებული არსებული მიდგომები არ გამოდგებოდა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებისთვის. ჩვენი კვლევის ერთ-ერთი მთავარი მიზანი იყო ამ სიძნელეების გადაჭრა და ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გავრცელება ეკრანის და ბზარის ტიპის შერეული სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისთვის. ამ პრობლემის გადაჭრაში არსებითი როლი ითამაშა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანების ჩამოყალიბებამ შერეული საკონტაქტო ამოცანების სახით ხელოვნურად შემოტანილ ზედაპირებზე განსაზღვრული დამატებითი ტრანსმისიის პირობებით.

ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი ხასიათდება გამოყენების არაჩვეულებრივი სიმარტივით, რაც გამოწვეულია შემდეგი მიზეზებით (იხ., მაგ., [16] და იქ ციტირებული ლიტერატურა):

• საცდელი ფუნქციები, რომლებიც ემთხვევა ფუნდამენტურ ამონახსნებს, მარტივი და ერთგვაროვანი სტრუქტურისაა;

• არ არის საჭირო სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლა;

• არ მოითხოვს საზღვრის ტრიანგულაციას;

• მარტივია მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობის პოვნა სხეულის შიგა წერტილებში;

• ფუნდამენტური ამონახსნების წრფივი კომბინაციით წარმოდგენილი აპროქსიმაციის წარმოებულები შეიძლება უშუალოდ გამოითვალოს;

• საცდელი ფუნქციების წრფივი გარსის სიმკვრივე შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში უზრუნველყოფს მეთოდის მაღალ ადაპტურობას;

• ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის გამოყენება შეიძლება არარეგულარული საზღვრის შემთხვევაშიც (არ მოითხოვება საზღვრის სიგლუვე, მაგალითად, საზღვარი შეიძლება იყოს ლიპშიცის ზედაპირი);

უკანასკნელი ოთხი ათწლეულის განმავლობაში ლიტერატურაში გვხვდებოდა ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის რამდენიმე განსხვავებული ფორმულირება. მათგან ორი ყველაზე უფრო პოპულარული არის შემდეგი:

(i) პირველ შემთხვევაში სინგულარობები (ფუნდამენტური ამონახსნის $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ პოლუსები) განლაგებულია ფიქსირებულ ზედაპირზე, რომელიც მდებარეობს განსახილველი არის გარეთ და წარმოადგენს ე.წ. ფსევდოსაზღვარს. ამ ფორმულირებას მივყავართ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემამდე უცნობი კოეფიციენტების მიმართ (მაგალითად, კოლოკაციის ან გალიორკინის მეთოდის გამოყენებით).

(ii) მეორე შემთხვევაში $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ პოლუსების პოზიცია განისაზღვრება როგორც დისკრეტული ამოცანის ამონახსნის შემადგენელი ნაწილი. ამ ფორმულირებას მივყავართ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არაწრფივ ამოცანასთან.

როგორც ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ, წარმოდგენილი დისერტაციის ერთ-ერთი მთავარი მიზანია აღნიშნული მეთოდის გავრცელება და დასაბუთება როგორც ძირითადი, ასევე ეკრანის და ბზარის ტიპის შერეული ამოცანებისათვის. შესაბამისი ალგორითმების დაფუძნებისათვის საჭიროა ჯერ ჩატარდეს თეორიული გამოკვლევა აღნიშნული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თვალსაზრისით,

გამოკვლეულ იქნას მათი რეგულარობა, დადგინდეს სიგლუვის კლასები და შეფასდეს ამონახსნის ნორმა შესაბამისი სასაზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

აქ პრობლემა შეიძლება წარმოიქმნას იმ ფაქტთან დაკავშირებით, რომ $\sum_{k=1}^{N} C_k \Gamma(x - y^{(k)})$ ტიპის წრფივი კომბინაციები არ იყოს ყველგან მკვრივი შესაბამის ფუნქციათა სივრცეში, განსაკუთრებით, მდგრადი რხევის ამოცანებში, როდესაც რხევის პარამეტრი დაემთხვევა რეზონანსულ სიხშირეს. ამ შემთხვევაში საჭიროა მეთოდის არსებითი მოდიფიცირება, რაც დეტალურადაა გაანალიზებული დისერტაციაში.

ახლა მოკლედ მიმოვიხილოთ დისერტაციაში მიღებული შედეგები თავებისა და პარაგრაფების მიხედვით.

თავი I შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან.

§1-ში დახასიათებულია ზედაპირთა კლასები და კლასიკური და განზოგადებული ფუნქციური სივრცეები.

§2 ეძღვნება ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ეკრანის ტიპის და ბზარის ტიპის ამოცანების დასმას. გარდა ამისა, შემოტანილია ნიუტონის, მოცულობითი და ზედაპირული პოტენციალები და დახასიათებულია მათი თვისებები. ამ პარაგრაფში სპეციალური განხილვის საგანია უსასრულო არეზე გავრცელებული, ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალის ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში, როდესაც შესაბამისი სიმკვრივის საყრდენი არ არის კომპაქტური. კერძოდ, დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ზომერფელდის გამოსხივების პირობას მოცულობითი პოტენციალისათვის.

§3 ეძღვნება ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ეკრანის ტიპის და ბზარის ტიპის ამოცანებისთვის არსებობის დებულებების დამტკიცებას სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში და ამ სივრცეებში ამონახსნების ნორმების შეფასებას (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში).

§4-ში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის გამოკვლეულია ძირითადი და შერეული საკონტაქტო ამოცანები და მიღებულია ამონახსნების ნორმების შეფასება. აქ მიღებულ შედეგებს არსებითი გამოყენება აქვთ ბზარის და ეკრანის ტიპის ამოცანებისათვის ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის დაფუძნებაში.

§5-ში განხილულია პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ კლასიკური მიდგომა არ გამოდგება რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში და მოითხოვს მოდიფიკაციას.

თავი II შედგება სამი პარაგრაფისაგან, რომლებშიც დაფუძნებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი სხვადასხვა ამოცანებისათვის.

კერძოდ, მე-6 პარაგრაფში აღწერილია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის ძირითადი კონცეფციები და დეტალურადაა გადმოცემული ბიბლიოგრაფიული და ისტორიული ცნობები.

მე-7 პარაგრაფში დაფუძნებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისათვის (დირიხლეს, ნეიმანის, რობინის, შერეული), აგრეთვე, ძირითადი და შერეული საკონტაქტო ამოცანებისათვის ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში. ამ შედეგების ბაზაზე დაფუძნებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებისათვის, რაც დისერტაციის ერთ-ერთ უმთავრეს შედეგს წარმოადგენს.

მე-8 პარაგრაფში ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დაფუძნებულია დრეკადობის კლასიკური თეორიის გადაადგილების, ძაბვის და შერეული ტიპის ამოცანებისათვის.

ბოლოს, დამატება A-ში მოყვანილია გახსნილ (არაშეკრულ) მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის საკითხები, რომლებიც არსებითად გამოიყენება შერეული, ეკრანის და ბზარის ტიპის სასაზღვრო ამოცანების გამოსაკვლევად.

დამატება B-ში მოცემულია ბირთვისთვის დასმული კონკრეტული სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების აპროქსიმაცია ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის გამოყენებით. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები მოტანილია ცხრილების სახით.

თავი I. ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

1 ზედაპირთა კლასები და ფუნქციური სივრცეები

ვთქვათ, Ω^+ არის სამგანზომილებიანი შემოსაზღვრული არე ევკლიდეს $\mathbb{R}^3$ ნამდვილ სივრცეში, რომლის $S = \partial\Omega^+$ საზღვარი გლუვია. ყველგან ნაშრომში ვიგულისხმებთ, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავე ეკუთვნის Ω^+ არეს.

$C^k(\Omega^+)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ Ω^+ არეში k-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების სიმრავლე. $C^k(\overline{\Omega}^+)$ აღნიშნავს $C^k(\Omega^+)$ სივრცის იმ ფუნქციების სიმრავლეს, რომელთა კერძო წარმოებულები k რიგამდე ჩათვლით უწყვეტად გაგრძელებადია Ω^+ არის $S = \partial\Omega^+$ საზღვარზე. $C^{0,\alpha}(\Omega^+)$ აღნიშნავს $C^0(\Omega^+) \equiv C(\Omega^+)$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცის ქვესიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას α მაჩვენებლით, სადაც $0 < \alpha \leq 1$, ე.ი. თუ $f \in C^{0,\alpha}(\Omega^+)$, მაშინ არსებობს ისეთი C_0 დადებითი მუდმივი (f-ზე დამოკიდებული), რომ

$$|f(x) - f(y)| \leq C_0|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega^+.$$

$C^{k,\alpha}(\Omega^+)$ აღნიშნავს $C^k(\Omega^+)$ სივრცის იმ ფუნქციების სიმრავლეს, რომელთა k რიგის კერძო წარმოებულები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას α მაჩვენებლით.

ვიტყვით, რომ $S = \partial\Omega^+$ ზედაპირი ეკუთვნის $C^{k,\alpha}$ კლასს, თუ ეს ზედაპირი მისი ყოველი წერტილის მიდამოში ლოკალურად წარმოადგენს $C^{k,\alpha}$ სივრცის ფუნქციის გრაფიკს.

ანალოგიურად განიმარტება $C^k(S)$ და $C^{k,\alpha}(S)$ ფუნქციური სივრცეები $S = \partial\Omega^+$ ზედაპირზე.

თუ S ზედაპირი ეკუთვნის $C^{0,1}$ კლასს, მაშინ მას უწოდებენ ლიპშიცის ზედაპირს, ხოლო $C^{1,\alpha}$ კლასის ზედაპირებს უწოდებენ ლიაპუნოვის ზედაპირებს. ხშირად C^1 კლასის ზედაპირებს უწოდებენ გლუვ ზედაპირებს, ხოლო C^2 კლასის ზედაპირებს კი - უწყვეტ სიმრუდიან ზედაპირებს. თუ S ზედაპირი ეკუთვნის C^k კლასს ნებისმიერი k ნატურალური რიცხვისთვის, მაშინ მას უსასრულოდ გლუვი ეწოდება და ვწერთ $S \in C^\infty$ (მაგ., სფერული ზედაპირი, ელიფსური ზედაპირი და სხვ.). შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ამოზნექილი მრავალწახნაგა ფიგურის საზღვარი არის ლიპშიცის კლასის ზედაპირი (მაგ., პარალელეპიპედის საზღვარი). ლიპშიცის ზედაპირია ასევე კონუსური ზედაპირი, სასრული ცილინდრის საზღვარი, ნახევარბირთვის საზღვარი, ბირთვის კონუსური სექტორის საზღვარი და სხვა. არალიპშიცური არეა, მაგალითად, ერთმანეთზე ჯვარედინად დადებული ორი მართი პარალელეპიპედის

გაერთიანება, ან არე, რომლის საზღვარი შეიცავს უკუქცევის ანუ ნულოვანი წამახვილების წერტილს (პიკს) (არალიპშიცური არეების სხვა მაგალითები იხილეთ მონოგრაფიაში [28], [29]).

L_p, W_p^r, H_p^s და $B_{p,q}^s$ (სადაც $r \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$) სიმბოლოებით აღვნიშნოთ კარგად ცნობილი ლებეგის, სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის ფუნქციათა სივრცეები შესაბამისად (იხ. [30], [31], [32]). გავიხსენოთ, რომ $H_2^r = W_2^r = B_{2,2}^s$, $H_2^s = B_{2,2}^s$ და $W_p^t = B_{p,q}^t$ და $H_p^k = W_p^k$ ნებისმიერი $r \geq 0$ და $s \in \mathbb{R}$-თვის, t ნებისმიერი არამთელი დადებითი რიცხვია, ხოლო k არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. შემოვიღოთ შემდეგი სივრცეები:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_p^s(\mathcal{M}) &:= \{f : f \in H_p^s(\mathcal{M}_0),\ \operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{M}}\},\\
\widetilde{B}_{p,q}^s(\mathcal{M}) &:= \{f : f \in B_{p,q}^s(\mathcal{M}_0),\ \operatorname{supp} f \subset \overline{\mathcal{M}}\},\\
H_p^s(\mathcal{M}) &:= \{r_{\mathcal{M}} f : f \in H_p^s(\mathcal{M}_0)\},\\
B_{p,q}^s(\mathcal{M}) &:= \{r_{\mathcal{M}} f : f \in B_{p,q}^s(\mathcal{M}_0)\},
\end{aligned}$$

სადაც $\mathcal{M}_0$ შეკრული ზედაპირია საზღვრის გარეშე და $\mathcal{M}$ არის $\mathcal{M}_0$-ის ღია ქვემრავალსახეობა, რომლის საზღვარია $\partial\mathcal{M} \neq \varnothing$; $r_{\mathcal{M}}$ არის $\mathcal{M}$-ზე შეზღუდვის ოპერატორი. ქვემოთ, ზოგჯერ გამოვიყენებთ შემდეგ შემოკლებულ აღნიშვნებს: $H_2^s = H^s$ და $W_2^s = W^2$.

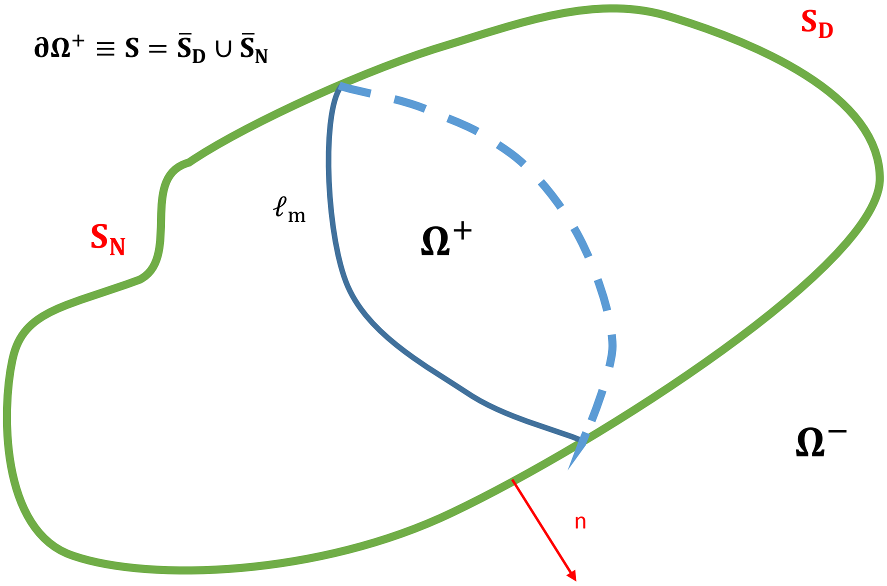
თუ მოცემული იქნება მხოლოდ არაცარიელი $\partial\mathcal{M}$ საზღვრის მქონე ღია მრავალსახეობა $\mathcal{M}$, მაშინ ჩვენ ისევ გამოვიყენებთ $\widetilde{B}_{p,q}^s(\mathcal{M})$ სიმბოლოს იმ ფუნქციათა სივრცის აღსანიშნავად, რომელთა ნულით გაგრძელებაც შესაბამისად შერჩეულ $\mathcal{M}_0$ შეკრულ მრავალსახეობაზე (იგულისხმება, რომ ასეთი მრავალსახეობა არსებობს) ეკუთვნის $B_{p,q}^s(\mathcal{M}_0)$ სივრცეს და რომელთა საყრდენი მოთავსებულია $\overline{\mathcal{M}}$-ში, ე.ი., ფაქტობრივად, ეს სივრცე დაემთხვევა $r_{\mathcal{M}}\widetilde{B}_{p,q}^s(\mathcal{M})$ სივრცეს.

2 ამოცანების დასმა და დამხმარე დებულებები

2.1 დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ეკრანის ტიპის, ბზარის ტიპის ამოცანების ჩამოყალიბება

ვთქვათ, Ω^+ არის $\mathbb{R}^3$ სივრცის სასრული დიამეტრის მქონე არე, რომლის საზღვარია $\partial\Omega^+ \equiv S \in C^{k;\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$.

აღვნიშნოთ $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega^+}$. ვიგულისხმოთ, რომ S გაყოფილია ორ თანაუკვეთ ნაწილად: $S = \overline{S}_D \cup \overline{S}_N$, $S_D \cap S_N = \emptyset$; ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ გამყოფი წირიც $\ell_m = \partial S_D = \partial S_N$ გლუვია. ჩვენ განვიხილავთ ასევე შემთხვევას, როდესაც Ω^- არე შეიცავს შიგა ბზარის ტიპის არაშეკრულ Σ ზედაპირს, რომელიც წარმოადგენს რაიმე გლუვი $C^{k;\alpha}$ კლასის შეკრული S_0 ზედაპირის გლუვ ქვემრავალსახეობას.



ნახ.1 Ω^+ და Ω^- არეები

ამასთან, ბზარის კიდე $\ell_C = \partial\Sigma$ გლუვი წირია. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ S_0 ზედაპირით შემოსაზღვრული არე Ω_0 მთლიანად ძევს S ზედაპირის გარეთ: $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega^-$.

$n(x)$-ით აღვნიშნოთ S და S_0 ზედაპირების გარე ნორმალების ორტები. ამით ნორმალის მიმართულება Σ ბზარის ზედაპირზე ცალსახადაა განსაზღვრული. აღვნიშნოთ $\{u\}^+$ და $\{u\}^-$ სიმბოლოებით u ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობები $\partial\Omega^\pm = S$ ზედაპირზე შესაბამისად Ω^+ და Ω^- არეებიდან. განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლება:

$$A\left(\partial,\omega\right)u\left(x\right) \equiv \triangle u\left(x\right) + \omega^2 u\left(x\right) = \Phi\left(x\right), \quad x \in \Omega^\pm, \tag{1}$$

სადაც $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ლაპლასის ოპერატორია, $\omega \in \mathbb{R}$ რხევის სიხშირის პარამეტრია, u არის საძიებელი რხევის ამპლიტუდა („გადაადგილება“), ხოლო Φ გარკვეული სიგლუვის მოცემული ფუნქციაა; $\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

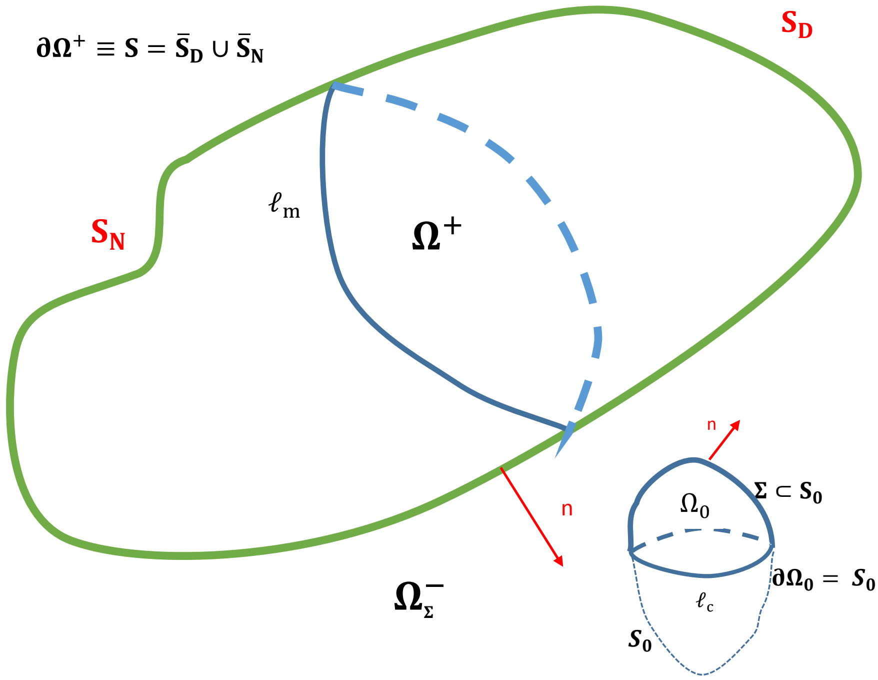
ცნობილია, რომ ჰელმჰოლცის ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსნია [1]

$$\Gamma\left(x,\omega\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\omega|x|}}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tag{2}$$

ე.ი.

$$A\left(\partial_x,\omega\right)\Gamma\left(x-y,\omega\right) = \delta\left(x-y\right), \tag{3}$$

სადაც δ არის დირაკის განზოგადებული დელტა ფუნქცია.



ნახ.2 ბზარის შემცველი არე

განმარტება 1 ([1, 2, 3, 4]). ვიტყვით, რომ u ფუნქცია აკმაყოფილებს ზომერფელდის (A. Sommerfeld) გამოსხივების პირობებს, თუ საკმარისად დიდი $|x|$-თვის (ე.ი. როცა $|x| \to \infty$)

$$u\,(x) = \mathcal{O}\left(|x|^{-1}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u\,(x)}{\partial\,|x|} - i\,\omega\,u\,(x) = o\left(|x|^{-1}\right). \tag{5}$$

შენიშვნა 2. ნაშრომში [1] ილია ვეკუამ აჩვენა, რომ თუ u აკმაყოფილებს ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებას

$$A\,(\partial,\omega)\,u\,(x) \equiv \triangle u\,(x) + \omega^2 u\,(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{6}$$

და გამოსხივების (5) პირობას, მაშინ u აკმაყოფილებს ქრობის (4) პირობასაც.

გამოსხივების (4)-(5) პირობების დამაკმაყოფილებელ ფუნქციათა კლასს ვუწოდოთ ზომერფელდის კლასი და აღვნიშნოთ $Z\,(\Omega^-)$ სიმბოლოთი.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ

$$\Gamma\,(\cdot - y,\omega) \in Z\left(\mathbb{R}^3 \backslash \{y\}\right) \tag{7}$$

ნებისმიერი ფიქსირებული y წერტილისათვის.

განმარტება 3. ვიტყვით, რომ u ფუნქცია რეგულარულია $\Omega \in \{\Omega^-,\Omega^+\}$ არეში, თუ $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\,(\Omega)$.

ვიტყვით, რომ ფუნქცია ნახევრად რეგულარულია Ω არეში, რომლის საზღვარი $\partial\Omega = S = \overline{S}_D \cup \overline{S}_N$ დანაწილებულია ორ არათანამკვეთ S_D და S_N ნაწილებად, $\partial S_D = \partial S_N = \ell_m$, თუ $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\backslash\ell_m\right) \cap C^2\left(\Omega\right)$ და პირველი რიგის წარმოებულებს აქვთ შემდეგი თვისება

$$\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_k}\right| \leq c[\mathrm{dist}\left(x,\ell_m\right)]^{-\gamma}, \quad x \in \overline{\Omega}\backslash\ell_m, \quad k = 1,2,3, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

სადაც $\mathrm{dist}\left(x,\ell_m\right)$ აღნიშნავს მანძილს x წერტილიდან ℓ_m წირამდე.
ამასთან, მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია და ინტეგრებადია Ω-ში. ნახევრად რეგულარული ფუნქციების კლასი Ω არეში აღვნიშნოთ $\widetilde{C}(\Omega;\ell_m;\gamma)$ სიმბოლოთი.

თუ Ω შეიცავს შიგა ბზარის ტიპის ჭრილს, მაშინ ვიტყვით, რომ u ვექტორი ნახევრად რეგულარულია $\Omega_\Sigma = \Omega\backslash\overline{\Sigma}$ არეში, სადაც $\Sigma \subset S_0$ და S_0 შემოსაზღვრავს $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ არეს, თუ u უწყვეტია Ω_Σ-ში და უწყვეტად გაგრძელებადია $\overline{\Sigma}$-ზე Ω_0-დან და $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$-დან; ამასთან ერთად, პირველი რიგის წარმოებულები უწყვეტია Ω_Σ-ში, უწყვეტად გაგრძელებადია Σ-ზე Ω_0-დან და $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$-დან და

$$\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_k}\right| \leq C[\mathrm{dist}\left(x,\ell_C\right)]^{-\gamma}, \quad x \in \overline{\Omega}\backslash\ell_C, \quad k = 1,2,3, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

ხოლო მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია Ω_Σ-ში და ლოკალურად ინტეგრებადია Ω_Σ-ზე. ნახევრად რეგულარული ფუნქციების კლასი Ω_Σ არეში აღვნიშნოთ $\widetilde{C}(\Omega_\Sigma;\ell_C;\gamma)$ სიმბოლოთი.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი და შერეული გარე სასაზღვრო ამოცანები.

დირიხლეს ამოცანა. ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის განტოლების

$$\triangle u\left(x\right) + \omega^2 u\left(x\right) = \Phi\left(x\right), \quad x \in \Omega^-, \tag{8}$$

რეგულარული $u \in C^1\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\left\{u\left(x\right)\right\}^- = f\left(x\right), \quad x \in S, \tag{9}$$

სადაც

$$\Phi \in C^{0,\alpha}\left(\Omega^-\right), \quad f \in C^1\left(S\right). \tag{10}$$

ნეიმანის ამოცანა. ვიპოვოთ (8) განტოლების რეგულარული $u \in C^1\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\left\{\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right\}^- = F(x), \quad x \in S, \tag{11}$$

სადაც Φ აკმაყოფილებს (10) პირობას და

$$F \in C\left(S\right). \tag{12}$$

<u>**ძირითადი შერეული ამოცანა.**</u> ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (8) განტოლების ნახევრად რეგულარული $u \in \widetilde{C}^1\left(\overline{\Omega}^-; \ell_m; \gamma\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ შერეულ სასაზღვრო პირობებს

$$\left\{u\left(x\right)\right\}^- = f_1\left(x\right), \quad x \in S_D, \tag{13}$$

$$\left\{\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial n\left(x\right)}\right\}^- = F_1\left(x\right), \quad x \in S_N, \tag{14}$$

სადაც Φ აკმაყოფილებს (10) პირობას და

$$f_1 \in C^1\left(S_D\right), \quad F_1 \in C\left(S_N\right). \tag{15}$$

<u>**ეკრანის ტიპის ამოცანა.**</u> ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (8) განტოლების ნახევრად რეგულარული ამონახსენი Ω_Σ^- არეში, $u \in \widetilde{C}\left(\Omega_\Sigma^-; \ell_C; \gamma\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$, რომელიც აკმაყოფილებს ეკრანის ტიპის სასაზღვრო პირობებს Σ-ზე:

$$\left\{u\left(x\right)\right\}_\Sigma^+ = f^{(+)}\left(x\right), \quad \left\{u\left(x\right)\right\}_\Sigma^- = f^{(-)}\left(x\right), \quad x \in \Sigma, \tag{16}$$

და ერთ-ერთი ტიპის სასაზღვრო პირობას (დირიხლეს, ნეიმანის ან შერეულ სასაზღვრო პირობას) S ზედაპირზე, ამასთან, $f^{(\pm)} \in C^1\left(\Sigma\right)$.

<u>**ბზარის ტიპის ამოცანა.**</u> ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (8) განტოლების ნახევრად რეგულარული ამონახსენი Ω_Σ^- არეში, $u \in \widetilde{C}\left(\Omega_\Sigma^-; \ell_C; \gamma\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$, რომელიც აკმაყოფილებს ბზარის ტიპის სასაზღვრო პირობებს Σ-ზე:

$$\left\{\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial n\left(x\right)}\right\}^+ = F^{(+)}\left(x\right), \quad \left\{\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial n\left(x\right)}\right\}^- = F^{(-)}\left(x\right), \quad x \in \Sigma, \tag{17}$$

და ერთ-ერთი ტიპის სასაზღვრო პირობას (დირიხლეს, ნეიმანის ან შერეულ სასაზღვრო პირობას) S ზედაპირზე, ამასთან, $F^{(\pm)} \in C\left(\Sigma\right)$.

2.2 გრინის ფორმულები და რხევის პოტენციალები

ნებისმიერი რეგულარული ფუნქციისათვის მართებულია გრინის შემდეგი ფორმულები სასრული დიამეტრის მქონე Ω^+ არისათვის გლუვი $S = \partial\Omega^+$ საზღვრით [1]:

$$\int\limits_{\Omega^+} A\left(\partial, \omega\right) u\, v\, dx = \int\limits_{\Omega^+} \left[-\nabla u \cdot \nabla v + \omega^2 u\, v\right] dx + \int\limits_S \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+ \{v\}^+ dS, \tag{18}$$

$$\int\limits_{\Omega^+} \left[A\left(\partial, \omega\right) u\, v - u\, A\left(\partial, \omega\right) v\right] dx = \int\limits_S \left[\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+ \{v\}^+ - \{u\}^+ \left\{\frac{\partial v}{\partial n}\right\}^+\right] dS, \tag{19}$$

სადაც $\nabla u = \operatorname{grad} u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)$, ხოლო $a \cdot b$ აღნიშნავს $a = (a_1, a_2, a_3)$ და $b = (b_1, b_2, b_3)$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს: $a \cdot b = \sum_{k=1}^{3} a_k\ b_k$.

აღვნიშნოთ $B(z, \varepsilon)$ სიმბოლოთი $\varepsilon > 0$ რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით z წერტილში.

თუ (19) ფორმულაში v-ს მაგივრად ავიღებთ ფუნდამენტურ ამონახსნს, $v\,(x) = \Gamma\,(x - z, \omega)$, ხოლო Ω^+-ის მაგიერ ავიღებთ $\Omega^+_\varepsilon \equiv \Omega^+ \backslash B\,(z, \varepsilon)$ არეს, მაშინ ზღვრული პროცესის გამოყენებით, როცა $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$\int\limits_{\Omega^+} \Gamma\,(x-z)\,A\,(\partial_x, \omega)\,u\,(x)\,dx - \int\limits_S \Gamma\,(x-z, \omega) \left\{ \frac{\partial u\,(x)}{\partial n\,(x)} \right\}^+ dS -$$

$$+ \int\limits_S \frac{\partial \Gamma(x-z,\omega)}{\partial n(x)} \{u(x)\}^+ dS = \begin{cases} u(z), & z \in \Omega^+, \\ 0, & z \in \Omega^-. \end{cases} \tag{20}$$

(19) და (20) ფორმულების ანალოგები იწერება ასევე უსასრულო Ω^- არის შემთხვევაში $Z\,(\Omega^-)$ კლასის რეგულარული ფუნქციებისათვის. კერძოდ, თუ $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\,(\Omega^-)$, ამასთან Au და Av ფუნქციებს გააჩნიათ კომპაქტური საყრდენი, მაშინ [1]

$$\int\limits_{\Omega^-} \left[A\,(\partial, \omega)\,u - uA\,(\partial, \omega)\,v\right] dx = -\int\limits_S \left[\left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^- \{v\}^- - \{u\}^- \left\{ \frac{\partial v}{\partial n} \right\}^- \right] dS,$$

$$\int\limits_{\Omega^-} \Gamma\,(x-z)\,A\,(\partial, \omega)\,u\,(x)\,dx + \int\limits_S \Gamma\,(x-z, \omega) \left\{ \frac{\partial u\,(x)}{\partial n\,(x)} \right\}^- dS - \tag{21}$$

$$- \int\limits_S \frac{\partial \Gamma\,(x-z, \omega)}{\partial n\,(x)} \{u\}^- dS = \begin{cases} 0, & z \in \Omega^+, \\ u\,(z)\,, & z \in \Omega^-. \end{cases}$$

უსასრულო არისათვის მართებულია, ასევე (18) ფორმულის ანალოგი, თუ მოვითხოვთ, რომ v-ს საყრდენი $\operatorname{supp} v$ კომპაქტურია:

$$\int\limits_{\Omega^-} A\,(\partial, \omega)\,u\,v\,dx = \int\limits_{\Omega^-} \left[-\nabla u \cdot \nabla v + \omega^2\,u\,v\right] dx - \int\limits_S \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^- \{v\}^- dS, \tag{22}$$

$$u \in C^2\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \quad v \in C^2_{\text{comp}}\left(\Omega^-\right).$$

(18)-(22) ფორმულები შეიძლება განზოგადდეს სობოლევის სივრცის ფუნქციებისათვის და უფრო ზოგადი ლიპშიცის არეებისათვის. კერძოდ, თუ $u \in W^1\,(\Omega^+)$ და $A\,(\partial, \omega)\,u \in L_2\,(\Omega^+)$, მაშინ (18) ფორმულა ასე გადაიწერება [33]

$$\left\langle \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\}^+, \{v\}^+ \right\rangle_S = \int\limits_{\Omega^+} A\,(\partial, \omega)\ u\,v\,dx + \int\limits_{\Omega^+} \left[\nabla u \cdot \nabla v - \omega^2\,u\,v\right] dx, \tag{23}$$

სადაც $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ სიმბოლო აღნიშნავს დუალობას ურთიერთშეუღლებულ $H_2^{-1/2}(S)$ და $H_2^{1/2}(S)$ სივრცეებს შორის. ეს (23) ფორმულა კორექტულად განმარტავს ნორმალით წარმოებულის განზოგადებულ კვალს S საზღვარზე, რომელიც ზოგადად არ არსებობს ჩვეულებრივი კვალის აზრით.

ცხადია, $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+ \in H_2^{-1/2}(S)$, რადგან $\{v\}^+ \in H_2^{1/2}(S)$.

თუ $u,v\in W^1(\Omega^+)$ და $A(\partial,\omega)\,u\in L_2(\Omega^+)$, მაშინ მართებულია ასევე (20) ფორმულა, სადაც $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+$ გვესმის განზოგადებული კვალის აზრით.

(23) ტოლობა მართებულია ასევე, თუ $u\in W_p^1(\Omega^+)$, $A(\partial,\omega)u\in W_p^1(\Omega^+)$ და $v\in W_{p'}^1(\Omega^+)$, $1/p+1/p'=1$. ამ შემთხვევაში $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+$ განზოგადებული კვალისთვის გვაქვს ჩართვა $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+\in B_{p,p}^{-1/p}(S)$, $p>1$.

სრულიად ანალოგიურად, თუ $u\in W_{2,\mathrm{loc}}^1(\Omega^-)$, $Au\in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^-)$ და $v\in W_{2,\mathrm{comp}}^1(\Omega^-)$, მაშინ მართებულია (22) ფორმულის ანალოგი, რომელიც ასე ჩაიწერება

$$\left\langle \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^-, \{v\}^- \right\rangle_S = -\int_{\Omega^-} A(\partial,\omega)\,u\,v\,dx + \int_{\Omega^-}\left[-\nabla u\cdot\nabla v+\omega^2 u\,v\right]dx. \qquad (24)$$

ეს ფორმულა კორექტულად განსაზღვრავს ნორმალით წარმოებულის განზოგადებულ კვალს S-ზე, $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^-\in H_2^{-\frac{1}{2}}(S)$.

(24) ფომულა ასევე მართებულია, თუ $u\in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega^-)$, $A(\partial,\omega)u\in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^-)$, $v\in W_{p',\mathrm{comp}}^1(\Omega^-)$, და კორექტულად განსაზღვრავს განზოგადებულ კვალს $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^-\in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S)$.

შემოვიღოთ ნიუტონის ტიპის მოცულობითი პოტენციალი და მარტივი და ორმაგი ფენის ზედაპირული პოტენციალები:

$$\mathrm{P}_\Omega(f)(x)=\int_\Omega \Gamma(x-y,\omega)\,f(y)\,dy,\quad x\in\mathbb{R}^3, \qquad (25)$$

$$V(g)(x)=\int_S \Gamma(x-y,\omega)\,g(y)\,dS_y,\quad x\in\mathbb{R}^3\backslash S, \qquad (26)$$

$$W(h)(x)=\int_S\left[\frac{\partial}{\partial n(y)}\Gamma(x-y,\omega)\right]h(y)\,dS_y,\quad x\in\mathbb{R}^3\backslash S. \qquad (27)$$

მაშინ ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები (20) და (21) ასე გადაიწერება:

$$u(x)=\mathrm{P}_{\Omega^+}(A(\partial,\omega)\,u)(x)-V\left(\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+\right)(x)+W\left(\{u\}^+\right)(x),\quad x\in\Omega^+, \qquad (28)$$

$$u(x)=\mathrm{P}_{\Omega^-}(A(\partial,\omega)\,u)(x)+V\left(\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^-\right)(x)-W\left(\{u\}^-\right)(x),\quad x\in\Omega^-. \qquad (29)$$

აქ (28) ფორმულაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$u \in W_2^1\left(\Omega^+\right), \quad A(\partial,\omega)u \in L_2\left(\Omega^+\right), \quad \{u\}^+ \in H_2^{\frac{1}{2}}(S), \quad \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+ \in H_2^{-\frac{1}{2}}(S), \tag{30}$$

ან

$$u \in W_p^1\left(\Omega^+\right), \quad A(\partial,\omega)u \in L_p\left(\Omega^+\right), \quad \{u\}^+ \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S), \quad \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+ \in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S), \tag{31}$$

ხოლო (29) ფორმულაში

$$u \in W_{2,\mathrm{loc}}^1(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-),\ Au \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^-),\ \{u\}^- \in H_2^{\frac{1}{2}}(S),\ \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^- \in H_2^{-\frac{1}{2}}(S), \tag{32}$$

ან

$$u \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-),\ A(\partial,\omega)u \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^-),\ \{u\}^- \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S),\ \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^- \in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S). \tag{33}$$

რხევის პოტენციალებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები (იხ. მაგ., [1, 3, 4, 29, 33, 34, 35, 36]).

თეორემა 4. ვთქვათ, S ლიპშიცის ზედაპირია. მაშინ შემდეგი ოპერატორები უწყვეტია:

$$\begin{aligned}
V &: H_2^{-\frac{1}{2}}(S) \to H_2^1\left(\Omega^+\right), \\
V &: H_2^{-\frac{1}{2}}(S) \to H_{2,\mathrm{loc}}^1\left(\Omega^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \\
W &: H_2^{\frac{1}{2}}(S) \to H_2^1\left(\Omega^+\right), \\
W &: H_2^{\frac{1}{2}}(S) \to H_{2,\mathrm{loc}}^1\left(\Omega^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \\
\mathrm{P}_{\Omega^+} &: H_2^0\left(\Omega^+\right) \to H_{2,\mathrm{loc}}^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3\right), \\
\mathrm{P}_{\Omega^-} &: H_{2,\mathrm{comp}}^0\left(\Omega^-\right) \to H_{2,\mathrm{loc}}^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3\right),
\end{aligned}$$

თუ $g \in \left[H_2^{-\frac{1}{2}}(S)\right]^3$, $h \in \left[H_2^{\frac{1}{2}}(S)\right]^3$, $f \in L_2(\Omega^+)$, ან $f \in L_{2,\mathrm{comp}}(\Omega^-)$,

მაშინ

$$L\left(\partial,\omega\right)\mathrm{P}_{\Omega^{+}}\left(f\right)\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), & \Omega^{+}\text{-ში},\\ 0, & \Omega^{-}\text{-ში},\end{cases} \tag{34}$$

$$L\left(\partial,\omega\right)\mathrm{P}_{\Omega^{-}}\left(f\right)\left(x\right)=\begin{cases}0, & \Omega^{+}\text{-ში},\\ f\left(x\right), & \Omega^{-}\text{-ში},\end{cases} \tag{35}$$

$$L\left(\partial,\omega\right)V\left(g\right)\left(x\right)=0, \qquad L\left(\partial,\omega\right)W\left(h\right)\left(x\right)=0, \qquad \Omega^{\pm}\text{-ში}, \tag{36}$$

$$\left\{V\left(g\right)\left(x\right)\right\}^{+}=\left\{V\left(g\right)\left(x\right)\right\}^{-}=\mathcal{H}g\left(x\right) \qquad S\text{-ზე}, \tag{37}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n\left(x\right)}V\left(g\right)\left(x\right)\right\}^{\pm}=\left[\mp 2^{-1}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right]g\left(x\right) \qquad S\text{-ზე}, \tag{38}$$

$$\left\{W\left(h\right)\left(x\right)\right\}^{\pm}=\left[\pm 2^{-1}I+\mathcal{K}\right]h\left(x\right) \qquad S\text{-ზე}, \tag{39}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n(x)}W\left(h\right)\left(x\right)\right\}^{+}=\left\{\frac{\partial}{\partial n(x)}W\left(h\right)\left(x\right)\right\}^{-}\equiv\mathcal{L}h\left(x\right) \qquad S\text{-ზე}. \tag{40}$$

აქ $\widetilde{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორებია:

$$\widetilde{\mathcal{K}}g\left(x\right):=\int\limits_{S}\left[\frac{\partial}{\partial n\left(x\right)}\Gamma\left(x-y,\omega\right)\right]g\left(y\right)dS, \quad x\in S, \tag{41}$$

$$\mathcal{K}h\left(x\right):=\int\limits_{S}\left[\frac{\partial}{\partial n\left(y\right)}\Gamma\left(x-y,\omega\right)\right]h\left(y\right)dS, \quad x\in S, \tag{42}$$

$$\mathcal{H}g\left(x\right):=\int\limits_{S}\left[\Gamma\left(x-y,\omega\right)\right]g\left(y\right)dS, \quad x\in S. \tag{43}$$

შემდეგი ოპერატორები შემოსაზღვრულია შესაბამის სივრცეებში

$$\mathcal{H}:H_2^{-\frac{1}{2}}\left(S\right)\to H_2^{\frac{1}{2}}\left(S\right), \tag{44}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}}:H_2^{-\frac{1}{2}}\left(S\right)\to H_2^{-\frac{1}{2}}\left(S\right), \tag{45}$$

$$\mathcal{K}:H_2^{\frac{1}{2}}\left(S\right)\to H_2^{\frac{1}{2}}\left(S\right), \tag{46}$$

$$\mathcal{L}:H_2^{\frac{1}{2}}\left(S\right)\to H_2^{-\frac{1}{2}}\left(S\right). \tag{47}$$

თუ $S\in C^{1,\alpha}$, $0<\alpha\leq 1$, მაშინ $\widetilde{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ ოპერატორები წარმოადგენენ სუსტი სინგულარობის ინტეგრალურ ოპერატორებს, ხოლო $\mathcal{L}$ არის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი.

თუ $S\in C^{k+1,\alpha}$, სადაც $k\geq 1$ და $0<\beta<\alpha\leq 1$, მაშინ

$$V:C^{k,\beta}\left(S\right)\to C^{k+1,\beta}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right), \tag{48}$$

$$W:C^{k,\beta}\left(S\right)\to C^{k,\beta}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right), \tag{49}$$

$$\mathcal{H}:C^{k,\beta}\left(S\right)\to C^{k+1,\beta}\left(S\right), \tag{50}$$

$$\widetilde{\mathcal{K}},\mathcal{K}:C^{k,\beta}\left(S\right)\to C^{k,\beta}\left(S\right), \tag{51}$$

$$\mathcal{L}:C^{k,\beta}\left(S\right)\to C^{k-1,\beta}\left(S\right). \tag{52}$$

რეგულარული $C^{1,\alpha}$ კლასის ზედაპირების შემთხვევაში (45), (46) და (51) ოპერატორები კომპაქტურია.

შენიშვნა 5. ზოგადი წარმოდგენის (28) ფორმულიდან, ერთგვაროვანი განტოლების $A(\partial,\tau)\,u(x)=0,\quad x\in\Omega^{+}$ ამონახსნისათვის გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები

$$\left(-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}\right)\{u\}^{+}=\mathcal{H}\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^{+},\quad \mathcal{L}\{u\}^{+}=\left(-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right)\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^{+}. \tag{53}$$

თუ აქ თანმიმდევრობით ჩავსვამთ ჯერ $u=W(g)$ ორმაგი ფენის პოტენციალს, ხოლო შემდეგ მარტივი ფენის $u=V(g)$ პოტენციალს, და გავითვალისწინებთ მათი წყვეტის ფორმულებს, მივიღებთ შემდეგ ოპერატორულ ტოლობებს:

$$\mathcal{H}\mathcal{L}=\left(-\frac{1}{4}I+\mathcal{K}^{2}\right),\quad \mathcal{K}\mathcal{H}=\mathcal{H}\widetilde{\mathcal{K}},\ \mathcal{L}\mathcal{H}=\left(-\frac{1}{4}I+\widetilde{\mathcal{K}}^{2}\right),\quad \mathcal{L}\mathcal{K}=\widetilde{\mathcal{K}}\mathcal{L}. \tag{54}$$

შენიშვნა 6. თუ $C^{1,\alpha}$, მაშინ $\frac{\partial}{\partial n(x)}\Gamma(x-y,\omega)=\mathcal{O}(|x-y|^{\alpha-2}),\ x,y\in S$, და ამიტომ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (51) ოპერატორები კომპაქტურია. (54) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები $\mathcal{L}$ და $\mathcal{H}$ წარმოადგენენ ერთმანეთის ორმხრივ რეგულიარიზატორებს, რადგან

$$\mathcal{L}\mathcal{H}=-\frac{1}{4}I+T_1,\quad \mathcal{H}\mathcal{L}=-\frac{1}{4}I+T_2,$$

სადაც T_1 და T_2 სუსტი სინგულარობის მქონე გულებიანი ინტეგრალური ოპერატორებია, რომლებიც შეესაბამება კომპაქტურ ოპერატორებს. შევნიშნოთ, რომ, ზოგადად, $\mathcal{L}$ და $\mathcal{H}$ ოპერატორები არაა შებრუნებადი, თუ ω ემთხვევა დირიხლეს ან ნეიმანის შიგა ამოცანის საკუთრივ სიხშირეს. ამიტომ აქ საქმე არ გვაქვს ეკვივალენტურ რეგულიარიზატორებთან რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში.

შენიშვნა 7. ყველა ზემოთ დასმული სასაზღვრო ამოცანა შეიძლება ჩამოყალიბდეს სობოლევის $W^{1}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^{-})$ და ბესელის $H^{1}_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^{-})$ პოტენციალთა სივრცეებში. შევნიშნოთ, რომ ელიფსური განტოლებების ამონახსნების შიგა რეგულარობის თეორემების თანახმად, ჰელმჰოლცის (8) განტოლების ნებისმიერი განზოგადებული $u\in W^{1}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^{-})$ ამონახსნი ეკუთვნის $W^{2}_{p}(\Omega^{*})$ სივრცეს, თუ $\Phi\in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^{-})$, $\overline{\Omega^{*}}\subset\Omega^{-}$ და $\overline{\Omega^{*}}$ სასრული დიამეტრის მქონე არეა (იხ. მაგ. [29]).

განზოგადებული ამოცანების ჩამოყალიბების დროს u ამონახსნს ვეძებთ $W^{1}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^{-})$ სივრცეში, რის გამოც განტოლება (8) გვესმის დისტრიბუციის აზრით, დირიხლეს ტიპის პირობა გვესმის ჩვეულებრივი კვალის აზრით, ხოლო ნეიმანის ტიპის პირობა გვესმის განზოგადებული კვალის აზრით, რომელიც გრინის ფორმულის საშუალებით განისაზღვრება. განზოგადებულ ერთგვაროვან გარე სასაზღვრო ამოცანებსაც გააჩნიათ ერთადერთი ამონახსენი.

2.3 უსასრულო არეზე გავრცელებული ნიუტონის პოტენციალის თვისებები

ეს პარაგრაფი ეხება ჰელმჰოლცის ოპერატორის შესაბამისი მოცულობითი პოტენციალის ყოფაქცევის დადგენას უსასრულობის მიდამოში (იხ. [37]).

ეს პრობლემა წამოიჭრება უსასრულო არეში არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნადობის გამოკვლევის დროს.

კერძოდ, განვიხილოთ არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლება:

$$\Delta u\left(x\right)+\omega^{2}u\left(x\right)=\Phi\left(x\right), \quad x\in\Omega^{-} \tag{55}$$

სადაც u საძიებელი ფუნქციაა, Δ ლაპლასის ოპერატორია, ω ნამდვილი რიცხვია (სიხშირის პარამეტრია), Ω^{-} არის უსასრულო სამგანზომილებიანი არე, რომლის საზღვარია შეკრული ორგანზომილებიანი S ზედაპირი, ხოლო Φ არის Ω^{-} არეზე განსაზღვრული ცნობილი ფუნქცია.

1896 წელს ტალღის გავრცელებასთან დაკავშირებული ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარე არნოლდ ზომერფელდმა ჩამოაყალიბა გამოსხივების (4)-(5) პირობები.

1943 წელს ილია ვეკუამ დაამტკიცა, რომ **მეტაჰარმონიული ფუნქციებისთვის** (ანუ ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი $\Delta u\left(x\right)+\omega^{2}u\left(x\right)=0$ განტოლების ამონახნებისათვის) (5) თვისებიდან გამომდინარეობს ქრობის (4) თანაფარდობა. უფრო მეტიც, (5) თანაფარდობაში დადგინდა ქრობის რიგი:

$$\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial n\left(x\right)}-i\omega u\left(x\right)=O\left(|x|^{-2}\right), \quad |x|\to\infty.$$

იმავე წელს ფრანც რელიხმა და ილია ვეკუამ ერთდროულად და ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად დაამტკიცეს მეტაჰარმონიული ფუნქციების შესანიშნავი თვისება, რომელიც სამეცნიერო ლიტერატურაში ცნობილია რელიხ-ვეკუას ლემის სახელით.

ლემა (რელიხ-ვეკუა, 1943). თუ $\boldsymbol{u}$ მეტაჰარმონიული ფუნქციაა $\boldsymbol{\Omega^{-}}$ არეში და აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\Sigma(R)}|u(x)|^{2}\,d\Sigma(R)=0, \tag{56}$$

სადაც $\boldsymbol{\Sigma(R)}$ არის $\boldsymbol{R}$ რადიუსიანი სფერო, მაშინ $\boldsymbol{u(x)=0}$, $\boldsymbol{x\in\Omega^{-}}$.

ამ ლემიდან გამომდინარეობს, რომ არანულოვანი მეტაჰარმონიული ფუნქციის ქრობის რიგი უსასრულობის მიდამოში არ შეიძლება აღემატებოდეს ერთს, რაც პრინციპულად განსხვავდება ჰარმონიული ფუნქციების თვისებისაგან.

რელიხ-ვეკუას ლემისა და გრინის ფორმულების გამოყენებით მტკიცდება, რომ პარაგრაფ 2.1-ში ჩამოყალიბებულ სასაზღვრო ამოცანებს არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი ამონახსენი.

ერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ზემოთ მითითებული სასაზღვრო ამოცანები გამოკვლეულია მრავალი მეცნიერის მიერ: ვ.კუპრაძე, ი.ვეკუა, რ.კლაინმანი, დ.კოლტონი, რ.კრესი, მ.კოსტაბელი, ე.სტეფანი, ჟ.კ.ნედელეკი, ჰ.ბრაკაგე, პ.ვერნერი, რ.ლაისი, ო.პანიჩი და მრავალი სხვა (იხილეთ ისტორიული და ბიბლიოგრაფიული მონაცემები შრომებში: [3, 4, 14, 38]).

ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობა შესწავლილია სხვადასხვა ფუნქციონალურ სივრცეებში, როგორც გლუვ ფუნქციათა სივრცეებში, ასევე L_2-ბაზისიან სობოლევ-სლობოდეცკის განზოგადებულ ფუნქციათა სივრცეებში.

სამეცნიერო ლიტერატურაში ძირითადად განხილულია სასაზღვრო ამოცანები არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის გნტოლებისათვის, როდესაც Φ ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი.

როგორც ცნობილია, სასაზღვრო ამოცანები (55) არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის შეიძლება ყოველთვის დავიყვანოთ სასაზღვრო ამოცანებზე ეთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის.

კერძოდ, ნიუტონის ტიპის მოცულობითი პოტენციალი

$$\mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega^{-}}\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|}\Phi\left(x\right)dx \tag{57}$$

წარმოადგენს (55) არაერთგვაროვანი განტოლების რეგულარულ ამონახსნს, თუ Φ ფუნქცია აკმაყოფილებს სიგლუვის გარკვეულ პირობებს [39, 40] .

კერძოდ, მარტივი საჩვენებელია, რომ თუ Φ ფუნქციას გააჩნია კომპაქტური საყრდენი და იგი უწყვეტია ჰელდერის აზრით, მაშინ (57) ტოლობით განსაზღვრული $N(\Phi)$ ფუნქცია არის (55) არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლების რეგულარული ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს ზომერფელდის გამოსხივების პირობებს.

ამიტომ, თუ (55) არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$u=v+N\left(\Phi\right), \tag{58}$$

მარტივად დავინახავთ, რომ v ფუნქცია უნდა იყოს ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსენი, რომელმაც უნდა დააკმაყოფილოს შესაბამისი სასაზღვრო პირობა:

$$\Delta v\left(x\right)+\omega^{2}v\left(x\right)=0,\quad x\in\Omega^{-},$$

$$\{Bv(x)\}^{-}=G\left(x\right),\quad x\in S,$$

სადაც B არის ან დირიხლეს, ან ნეიმანის, ან რობინის ან შერეული ამოცანის შესაბამისი ოპერატორი.

ჩვენი მიზანია, დავადგინოთ, რა ხდება როდესაც Φ ფუნქციის საყრდენი ემთხვევა მთელ Ω^- არეს და, მაშასადამე, არ არის კომპაქტური სიმრავლე. ამ შემთხვევაში (57) ტოლობით მოცემული $N(\Phi)$ ფუნქცია:

- კორექტულად უნდა იყოს განსაზღვრული (არასაკუთრივი ინტეგრალი და მისი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები უნდა იყოს კრებადი),
- აკმაყოფილებდეს ზომერფელდის გამოსხივების პირობებს უსასრულობის მიდამოში,
- აკმაყოფილებდეს (55) არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას Ω^- არეში.

თუ ეს პირობები სრულდება, მაშინ (57) ტოლობით განსაზღვრული $N(\Phi)$ ფუნქცია საშუალებას მოგვცემს სასაზღვრო ამოცანები (55) არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დავიყვანოთ სასაზღვრო ამოცანებზე ეთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის (58) წარმოდგენის საშუალებით.

სწორედ ამ თვისებების დადგენას ეძღვნება ეს პარაგრაფი. კერძოდ, მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 8. ვთქვათ, $\Phi \in C\left(\mathbb{R}^3\right)$ და

$$\left|\Phi\left(x\right)\right| \leq \frac{C}{\left(1+\left|x\right|\right)^m}, \tag{59}$$

სადაც $m > 4$ და C დადებითი მუდმივია. მაშინ ჰელმჰოლცის $\left(\Delta + \omega^2\right)$ ოპერატორის, შესაბამისი ნიუტონის პოტენციალი

$$\mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|}\Phi\left(x\right)dx, \quad y \in \mathbb{R}^3, \tag{60}$$

აკმაყოფილებს ზომერფელდის გამოსხივების პირობებს, ანუ საკმარისად დიდი $|y|$-სათვის გვაქვს:

$$\mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right) = O\left(|y|^{-1}\right), \tag{61}$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right)}{\partial\left|y\right|} - i\omega \mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right) = O\left(|y|^{-2}\right). \tag{62}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ (62) თანაფარობა.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$K\left(x,y\right) := \left(\frac{\partial}{\partial\left|y\right|} - i\omega\right)\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|}. \tag{63}$$

ჩვენ ქვემოთ გამოვიყენებთ $K(x,y)$ ფუნქციის წარმოდგენას სხვადასხვა ფორმით, კერძოდ,

$$\begin{aligned}
&K\left(x,y\right)=\left(\frac{\partial}{\partial\left|y\right|}-i\omega\right)\frac{e^{i\omega\left|x-y\right|}}{\left|x-y\right|}=\left(\frac{y_k}{\left|y\right|}\frac{\partial}{\partial y_k}-i\omega\right)\frac{e^{i\omega\left|x-y\right|}}{\left|x-y\right|}\\
&=\left[-\frac{y_k}{\left|y\right|}\frac{y_k-x_k}{\left|x-y\right|^3}+i\omega\frac{y_k}{\left|y\right|}\frac{y_k-x_k}{\left|x-y\right|^2}-\frac{i\omega}{\left|x-y\right|}\right]e^{i\omega\left|x-y\right|}\\
&=\left[\frac{\left(x\cdot y\right)-\left|y\right|^2}{\left|y\right|\left|x-y\right|^3}-\frac{i\omega\left(x\cdot y\right)}{\left|y\right|\left|x-y\right|^2}+i\omega\left(\frac{\left|y\right|}{\left|x-y\right|^2}-\frac{1}{\left|x-y\right|}\right)\right]e^{i\omega\left|x-y\right|}\\
&=\left[\frac{\left(x\cdot y\right)-\left|y\right|^2}{\left|y\right|\left|x-y\right|^3}-\frac{i\omega\left(x\cdot y\right)}{\left|y\right|\left|x-y\right|^2}+\frac{i\omega\left(2\left(x\cdot y\right)-\left|x\right|^2\right)}{\left|x-y\right|^2\left(\left|y\right|+\left|x-y\right|\right)}\right]e^{i\omega\left|x-y\right|}.
\end{aligned}\tag{64}$$

აქ გათვალისწინებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_k}\left|x-y\right|=\frac{y_k-x_k}{\left|x-y\right|};\\
&\frac{\partial}{\partial y_k}e^{i\omega\left|x-y\right|}=i\omega\frac{y_k-x_k}{\left|x-y\right|}e^{i\omega\left|x-y\right|};\\
&\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{e^{i\omega\left|x-y\right|}}{\left|x-y\right|}=\frac{i\omega\frac{y_k-x_k}{\left|x-y\right|}e^{i\omega\left|x-y\right|}\left|x-y\right|-\frac{y_k-x_k}{\left|x-y\right|}e^{i\omega\left|x-y\right|}}{\left|x-y\right|^2};\\
&\frac{\left|y\right|}{\left|x-y\right|^2}-\frac{1}{\left|x-y\right|}=\frac{\left|y\right|-\left|x-y\right|}{\left|x-y\right|^2}=\frac{\left|y\right|^2-\left|x-y\right|^2}{\left|x-y\right|^2\left(\left|y\right|+\left|x-y\right|\right)}=\\
&\qquad=\frac{\left|y\right|^2-\left|x\right|^2+2\left(x\cdot y\right)-\left|y\right|^2}{\left|x-y\right|^2\left(\left|y\right|+\left|x-y\right|\right)}
\end{aligned}$$

დავაფიქსიროთ y წერტილი და ვიგულისხმოთ, რომ $|y|=R$ საკმარისად დიდია. $\mathbb{R}^3$ სივრცე დავყოთ ოთხ თანაუკვეთ არედ და შესაბამისი ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ოთხი შესაკრების ჯამის სახით:

$$\frac{\partial \mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right)}{\partial\left|y\right|}-i\omega\mathrm{P}\left(\Phi\right)\left(y\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}K\left(x,y\right)\Phi\left(x\right)dx=-\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{4}I_j\left(y\right),\tag{65}$$

სადაც

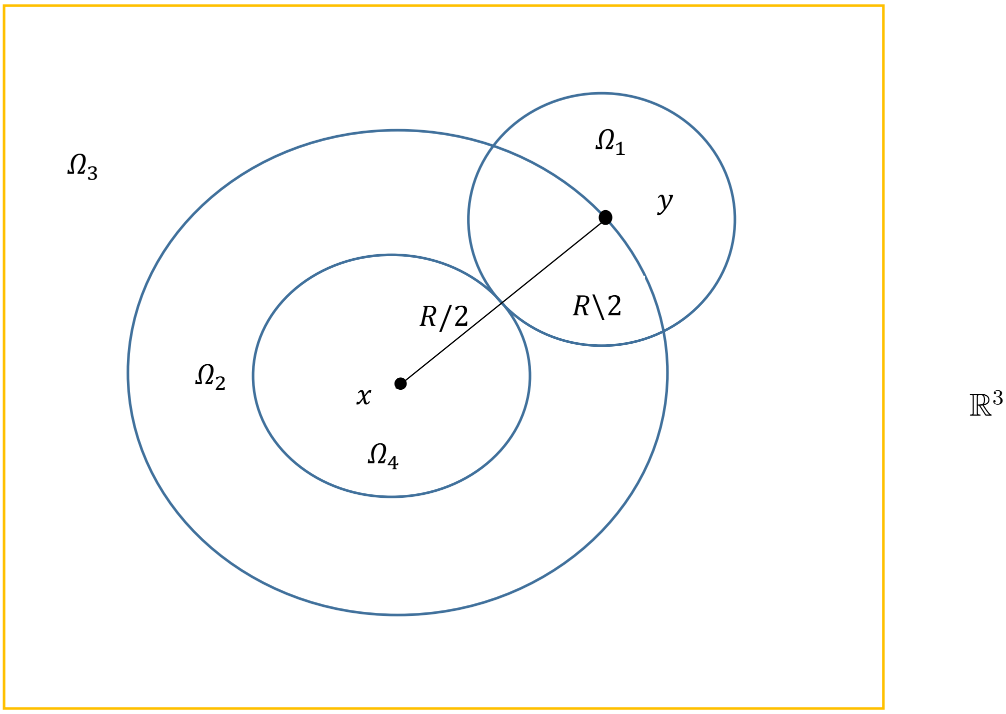
$$I_j\left(y\right)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_j}K\left(x,y\right)\Phi\left(x\right)dx,\tag{66}$$

$$\Omega_1=B\left(y,\frac{R}{2}\right),\tag{67}$$

$$\Omega_2=B\left(0,R\right)\setminus\left\{B\left(0,\frac{R}{2}\right)\cup B\left(y,\frac{R}{2}\right)\right\},\tag{68}$$

$$\Omega_3=\mathbb{R}^3\setminus\left\{B\left(0,R\right)\cup\Omega_1\right\},\tag{69}$$

$$\Omega_4=B\left(0,\frac{R}{2}\right).\tag{70}$$



ნახ.3 უსასრულო არის დანაწილება

შევაფასოთ ინტეგრალები $|y| = R$-ის საშუალებით.

ჯერ შევაფასოთ ინტეგრალის გული:

$$K(x,y) = \left[-\frac{y_k}{|y|} \frac{y_k - x_k}{|x-y|^3} + i\omega \frac{y_k}{|y|} \frac{y_k - x_k}{|x-y|^2} - \frac{i\omega}{|x-y|} \right] e^{i\omega|x-y|}$$

შემდეგი თანაფარდობების გათვალისწინებით

$$\left| \frac{y_k}{|y|} \right| \leq 1, \quad \left| e^{i\omega|x-y|} \right| = 1, \quad \left| \frac{y_k - x_k}{|x-y|^3} \right| \leq \frac{1}{|x-y|^2}.$$

მივიღებთ:

$$K(x,y) \leq \left(\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{2\omega}{|x-y|} \right) \leq \max(1;\omega) \left[\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|} \right].$$

ახლა შევაფასოთ ინტეგრალი თითოეულ არეზე ცალ-ცალკე.

დავიწყოთ I_1 ინტეგრალის შეფასებით. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$x \in \Omega_1 \Rightarrow |x-y| \leq \frac{R}{2}; \quad \frac{R}{2} \leq |x| \leq \frac{3R}{2}.$$

სფერულ კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვდოთ y წერტილში. მაშინ x წერტილის კოორდინატები ამ სისტემაში იქნება (ρ, φ, θ), სადაც $\rho = |x-y|$:

$$x_1 = y_1 + \varrho \cos\varphi \sin\theta,$$

$$x_2 = y_2 + \varrho \sin\varphi \sin\theta,$$

$$x_3 = y_3 + \varrho\cos\theta,$$
$$0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varrho \le R/2.$$

ამიტომ I_1 ინტეგრალი შემდეგნაირად შეფასდება

$$|I_1(y)| \le c_1 \int\limits_{\Omega_1} \left[\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|}\right] |\phi(x)|\, dx \le$$
$$\le c_1 \sup_{\Omega_1} |\phi(x)| \int\limits_{B\left(y,\frac{R}{2}\right)} \left[\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|}\right] dx \le$$
$$\le c_1 \sup_{\Omega_1} |\phi(x)| \int_0^{\frac{R}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\right] \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\rho \le \frac{c_2 R^2}{(1+R)^m}. \tag{71}$$

აქ გამოყენებულია შემდეგი შეფასებები (ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $R > 4$):

$$\int_0^{\frac{R}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\right] \rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi d\rho =$$
$$= \int_0^{\frac{R}{2}} [1+\rho]\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi\left(\frac{R}{2} + \frac{R^2}{8}\right) \le \pi R^2.$$

ამასთან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$|\Phi(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^m} \le \frac{2^m C}{(2+R)^m},$$

მაშინ (71)-დან მივიღებთ:

$$|I_1(y)| \le C R^{2-3-m} = C|y|^{2-3-m}, \quad \text{როცა} \quad |y| = R \gg 1. \tag{72}$$

ახლა შევაფასოთ I_2 ინტეგრალი. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$x \in \Omega_2 \Rightarrow |x-y| \ge \frac{R}{2}, \quad \frac{R}{2} \le |x| \le R.$$

რადგან

$$\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|} \le \frac{4}{R^2} + \frac{2}{R} \le \frac{c_2}{R}$$

და

$$|\Phi(x)| \le \frac{C}{(1+|x|)^m} \le \frac{2^m C}{(2+R)^m} \le \frac{2^m C}{R^m} \le c_4 R^{-m},$$

ამიტომ

$$|I_2(y)| \le c_1 \int\limits_{\Omega_2} \left[\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|}\right] |\Phi(x)|\, dx \le \frac{c_2}{R} c_4 R^{-m} \frac{4}{3}\pi R^3 \le$$
$$\le C R^{2-3-m} = C|y|^{2-3-m}.$$

ახლა შევაფასოთ I_3 ინტეგრალი. გავითვალისწინოთ, რომ

$$x \in \Omega_3 \Rightarrow |x-y| \geq \frac{R}{2}, \quad |x| \geq R,$$
$$\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|} \leq \frac{4}{R^2}+\frac{2}{R} \leq \frac{c_2}{R},$$
$$|\Phi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^m} \leq \frac{C}{|x|^m}.$$

სფერულ კოორდინატებზე გადასვლით მივიღებთ:

$$|I_3(y)| \leq c_1 \int\limits_{\Omega_3} \left[\frac{1}{|x-y|^2} + \frac{1}{|x-y|}\right] |\Phi(x)|\, dx$$
$$\leq \frac{c_2}{R} \int\limits_{|x|\geq R} |\Phi(x)|\, dx \leq \frac{c_3}{R} \int_R^\infty \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^m} \leq \frac{c_3}{R}\frac{1}{m-3} R^{3-m}.$$

ამრიგად

$$|I_3(y)| \leq C \ , R^{2-3-m} = C \ , |y|^{2-3-m}. \tag{73}$$

ბოლოს შევაფასოთ I_4 ინტეგრალი. ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$x \in \Omega_4 \Rightarrow |x-y| \geq \frac{R}{2}, \quad |x| \leq \frac{R}{2},$$
$$\frac{1}{|x-y|} \leq \frac{2}{R}, \quad (x \cdot y) \leq |x|\,|y|\,.$$

ამ თანაფარდობების გამოყენებით დავადგენთ:

$$|K(x,y)| \leq \left| \frac{(x\cdot y)}{|y|\,|x-y|^3} - \frac{|y|^2}{|y|\,|x-y|^3} - \frac{i\omega\,(x\cdot y)}{|y|\,|x-y|^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{i\omega 2\,(x\cdot y)}{|x-y|^2\,(|y|+|x-y|)} - \frac{i\omega |x|^2}{|x-y|^2\,(|y|+|x-y|)} \right| \leq$$
$$\leq c_1 \left| \left(\frac{|x|}{R^3} + \frac{1}{R^2} + \frac{|x|}{R^2} + \frac{|x|}{R^2} + \frac{|x|^2}{R^3} \right) \right| \leq \frac{c_2}{R^2}\,(1+|x|)\,.$$

ამიტომ

$$I_4(y) \leq \frac{c_2}{R^2} \int\limits_{|x|\leq \frac{R}{2}} (1+|x|)\,|\Phi(x)|\, dx \leq \frac{c_2}{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|)\,|\Phi(x)|\, dx \leq$$
$$\leq \frac{c_3}{R^2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{(1+|x|)^{m-1}}.$$

თუ $m > 4$, მაშინ მიღებული არასაკუთრივი ინტეგრალი კრებადია და გვექნება:

$$|I_4(y)| \leq C R^{-2} = C|y|^{-2}. \tag{74}$$

(72)-(74) უტოლობებიდან გამომდინარეობს (62) თანაფარდობა.

(61) თანაფარდობა მტკიცდება ანალოგიურად. მართლაც გვაქვს შემდეგი შეფასება:

$$|\mathrm{P}(\Phi)(y)| = \left| \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \Phi(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} |\Phi(x)|\, dx.$$

აქაც, ზემოთ ჩატარებული მსჯელობების ანალოგიურად, დავყოთ საინტეგრო არე იმავე ტიპის ოთხ არათანამკვეთ Ω_j, $j = 1, 2, 3, 4$, არედ და წარმოვადგინოთ ინტეგრალი ოთხი შესაკრების ჯამის სახით:

$$|\mathrm{P}(\Phi)(y)| = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} |\Phi(x)|\, dx = \sum_{j=1}^{4} J_j(y),$$

სადაც

$$J_j(y) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_j} \frac{1}{|x-y|} |\Phi(x)|\, dx.$$

იმავე მსჯელობების ჩატარებით, რაც ზემოთ იყო გამოყენებული, მივიღებთ შემდეგ შეფასებებს:

$$J_1(y) \leq c_1 \sup_{\Omega_1} |\Phi(x)| \int\limits_{B\left(y, \frac{R}{2}\right)} \frac{dx}{|x-y|} \leq$$

$$\leq c_1 \sup_{\Omega_1} |\Phi(x)| \int_0^{\frac{R}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho \sin\theta d\theta d\varphi d\rho \leq \frac{c_2 R^2}{(1+R)^m}.$$

$$J_2(y) \leq \frac{c_3}{R} \sup_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |\Phi(x)| \int\limits_{\Omega_2} dx \leq \frac{c_3 R^2}{(1+R)^m},$$

$$J_3(y) \leq \frac{c_5}{R} \int\limits_{|x| \geq R} |\Phi(x)|\, dx \leq \frac{c_6}{R} \int_R^{\infty} \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^m} \leq c_7\, R^{2-m},$$

$$J_4(y) \leq \frac{c_8}{R} \left| \int\limits_{\Omega_4} \Phi(x)\, dx \right| \leq \frac{c_9}{R} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dx}{(1+|x|)^m} \leq \frac{c_1 0}{R},$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი შეფასება, როცა $m > 4$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

3 ამონახსნთა არსებობის თეორემები

წინა პარაგაფში აღვნიშნეთ, რომ ყველა ზემოთ დასმულ კლასიკურ და განზოგადებულ სასაზღვრო ამოცანას (რეგულარულ, ნახევრად რეგულარულ და სობოლევის სივრცეებში) არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსნი ანუ შესაბამის ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი რხევის პარამეტის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ამ პარაგრაფში გავაანალიზებთ სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის საკითხებს და დავადგენთ ამონახსნების შეფასებებს იმ ფორმით, რაც შემდგომში არსებითად იქნება გამოყენებული ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის დაფუძნებაში (შეადარე [1, 3, 4, 29, 41, 42, 43, 44]).

ქვემოთ ყოველთვის ვიგულისხმოთ, რომ

$$S = \partial\Omega^- \in C^{2,\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{75}$$

$$\Phi \in C^{0,\beta}\left(\Omega^-\right), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1, \tag{76}$$

და Φ აკმაყოფილებს თეორემა 8-ში მოყვანილ ქრობის პირობებს.

შევნიშნოთ, რომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანები არაერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის, რადგან არაეთგვაროვანი (8) განტოლების ერთი კონკრეტული გამოსხივებადი რეგულარული ამონახსენი შეგვიძლია ყოველთვის დავწეროთ ცხადი სახით მოცულობითი პოტენციალის საშუალებით

$$u_0\left(x\right) = \mathrm{P}_{\Omega^-}\left(\Phi\right)\left(x\right) = \int\limits_{\Omega^-} \Gamma\left(x-y,\omega\right)\Phi\left(y\right)dy. \tag{77}$$

ამასთან,

$$u_0 \in C^{2,\beta}\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z(\Omega^-). \tag{78}$$

3.1 ამონახსნის არსებობის დებულება დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანისათვის

განვიხილოთ დირიხლეს შემდეგი ამოცანა ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი განტოლებისათვის:

$$A\left(\partial,\omega\right)u\left(x\right) = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad u \in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{79}$$

$$\left\{u\left(x\right)\right\}^- = f\left(x\right), \quad x \in S, \tag{80}$$

$$f \in C^{1,\beta}\left(S\right), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1. \tag{81}$$

ვეძებოთ ამოცანის ამონახსენი მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციის სახით (იხ. [44], Leis, Pan)

$$u\left(x\right) = W\left(g\right)\left(x\right) + aV\left(g\right)\left(x\right), \tag{82}$$

სადაც g არის საძიებელი სიმკვრივე, ხოლო a არის კომპლექსური მუდმივი

$$a = a_1 + ia_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0. \tag{83}$$

მაშინ (79) განტოლება სრულდება ავტომატურად, ხოლო (80) სასაზღვრო პირობას მივყავართ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებაზე საძიებელი g ფუნქციის მიმართ:

$$-\frac{1}{2}g(x) + \mathcal{K}g(x) + a\mathcal{H}g(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{84}$$

სადაც $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ განსაზღვრულია (42) და (43) ტოლობით.

(84) არის ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება, რადგან $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ ოპერატორების გულები სუსტი სინგულარობისაა S ზედაპირის სიგლუვის გამო (იხილე (75)). ამიტომ (84)-ის უპირობოდ ამოხსნადობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (84)-ის შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას

$$\left(-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right) g(x) = 0 \tag{85}$$

გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი.

ვთქვათ, g_1 ამონახსნია (85) განტოლებისა. მაშინ ფუნქცია

$$u_1(x) = W(g_1)(x) + aV(g_1)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash S, \tag{86}$$

ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს და აკმაყოფილებს (79) განტოლებას $\Omega^\pm$ არეში, ამასთან (85)-ის ძალით

$$\{u_1(x)\}^- = 0, \quad x \in S. \tag{87}$$

ამიტომ, დირიხლეს გარე ამოცანისათვის ერთადერთობის თეორემის თანახმად გვექნება

$$u_1(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

აქედან კი, თეორემა 4-ის გამოყენებით, დავასკვნით:

$$\{u_1(x)\}^+ - \{u_1(x)\}^- = g_1, \quad x \in S, \tag{88}$$

$$\left\{\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)}\right\}^- = -ag_1, \quad x \in S, \tag{89}$$

ანუ

$$\left\{\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)}\right\}^+ + a\{u_1(x)\}^+ = 0, \quad x \in S. \tag{90}$$

ამრიგად, (86) ტოლობით განსაზღვრული u_1 ფუნქცია არის რობინის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის რეგულარული ამონახსენი.

დავწეროთ გრინის (18) ფორმულა u და $v = \overline{u}$ ფუნქციებისათვის Ω^+ არეში. (90)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^+} \left[-\left|\nabla u_1(x)\right|^2 + \omega^2 |u_1(x)|^2\right] dx - a \int\limits_S \left|\{u_1(x)\}^+\right|^2 dS = 0.$$

რადგან $\operatorname{Im} a = a_2 \neq 0$, ამიტომ ამ უკანასკნელიდან წარმოსახვითი ნაწილის ნულთან გატოლება გვაძლევს

$$\{u_1(x)\}^+ = 0, \quad x \in S. \tag{91}$$

მაშინ (90) პირობის ძალით $\left\{\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)}\right\}^+ = 0$, $x \in S$, და ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენიდან (იხ. (28)) მივიღებთ $u_1(x) = 0$, $x \in \Omega^+$. ამრიგად, $u_1(x) = 0$, $x \in \Omega^\pm$, რაც (88)-ის თანახმად იძლევა ტოლობას $g(x) = 0$, $x \in S$.

ამრიგად, ფრედჰოლმის $\left(-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right)$ ოპერატორის გული ტრივიალურია და ამიტომ

$$\mathcal{D} \equiv -\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H} : C^{1,\beta}(S) \to C^{1,\beta}(S) \tag{92}$$

შებრუნებადი ოპერატორია. აქედან კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ

$$\mathcal{D} \equiv -\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H} : L_2(S) \to L_2(S) \quad \left[H_2^{1/2}(S) \to H_2^{1/2}(S)\right] \tag{93}$$

აგრეთვე შებრუნებადი ოპერატორებია.

ამიტომ (84) ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი $f \in C^{1,\beta}(S)$ ფუნქციისათვის და ამონახსნი g ეკუთვნის $C^{1,\beta}(S)$ სივრცეს.

მიღებული შედეგებიდან და თეორემა 4-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 9. თუ სრულდება (75) და (81) პირობები, მაშინ დირიხლეს (79)-(80) გარე ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოიდგინება (82) სახით, სადაც g სიმკვრივე განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (84) ინტეგრალური განტოლებიდან, და სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C_1(\Omega)\, \|f\|_{C^{1,\beta}(S)}, \tag{94}$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2(\Omega)\, \|f\|_{L_2(S)}, \tag{95}$$

$$\|u\|_{H_2^1(\Omega)} \leq C_3(\Omega)\, \|f\|_{H_2^{1/2}(S)}, \tag{96}$$

სადაც Ω არე წარმოადგენს Ω^- სიმრავლის ნებისმიერი სასრული დიამეტრის ქვესიმრავლეს, ხოლო $C_1(\Omega)$, $C_2(\Omega)$ და $C_3(\Omega)$ მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ Ω არეზე.

იმავე მსჯელობების სიტყვა-სიტყვით გამეორებით, რაც გამოყენებულია [8] მონოგრაფიაში ანალოგიური თეორემების დასამტკიცებლად, შეგვიძლია ვაჩვენოთ შემდეგი დებულების მართებულება, რომელსაც არსებითი გამოყენება აქვს შერეული ამოცანების გამოკვლევის დროს.

შედეგი 10. ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი განტოლების ყოველი $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$, $p > 1$, კლასის ამონახსენი წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულით

$$u(x) = W\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)(x) + aV\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)(x),$$

სადაც $a = a_1 + ia_2$, $a_2 \neq 0$, $g = \{u\}^- \in B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S)$, ხოლო $\mathcal{D}^{-1}$ არის შემდეგი ოპერატორის

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H} : B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S) \to B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S) \tag{97}$$

შებრუნებული.

ეს დებულება მტკიცდება იმავე მსჯელობებით, რაც გამოყენებულია შრომაში [38].

3.2 ამონახსნის არსებობის დებულება ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანისათვის

განვიხილოთ ნეიმანის შემდეგი გარე ამოცანა:

$$A(\partial,\omega)u(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad u \in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{98}$$

$$\left\{\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right\}^- = F(x), \quad x \in S, \tag{99}$$

$$F \in C^{0,\beta}(S), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1. \tag{100}$$

ამოცანის ამონახსნი კვლავ ვეძებოთ (82) სახით

$$u(x) = W(h)(x) + aV(h)(x), \quad x \in \Omega^-, \quad a = a_1 + ia_2, \quad a_2 \neq 0. \tag{101}$$

მაშინ საძიებელი h სიმკვრივისთვის (99) პირობა იძლევა შემდეგ სინგულარულ ინტეგრო-დიფერენციალურ (ანუ ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებას (იხ. თეორემა 4)

$$\mathcal{L}h(x) + a\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right)h(x) = F(x), \quad x \in S, \tag{102}$$

სადაც $\mathcal{L}$ და $\widetilde{\mathcal{K}}$ განსაზღვრულია (40) და (41) ტოლობებით.

$\mathcal{L}$ არის პირველი რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი, რომელსაც გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისება

$$\mathcal{L} : C^{1,\beta}(S) \to C^{0,\beta}(S), \tag{103}$$

$$\mathcal{L} : H^{1/2}_2(S) \to H^{-1/2}_2(S). \tag{104}$$

$\mathcal{L}$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო

$$\mathfrak{S}(\mathcal{L};\xi) = \frac{1}{2}|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

დადებითია და ამიტომ (104) ოპერატორი არის ფრედჰოლმის ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით (იხ. [5]). რადგან $\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right)$ არის (103) და (104) ოპერატორების კომპაქტური შეშფოთება, ამიტომ

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right) : C^{1,\beta}(S) \to C^{0,\beta}(S), \tag{105}$$

$$: H_2^{1/2}(S) \to H_2^{-1/2}(S) \tag{106}$$

არის ფრედჰოლმის ოპერატორები ნულოვანი ინდექსით. მათი შებრუნებადობისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ მათი ნულ-სივრცეები ტრივიალურია.

მართლაც, ვთქვათ $h_0 \in H_2^{1/2}(S)$ არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი

$$\mathcal{L}h_0 + a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right)h_0 = 0 \quad S\text{-ზე}. \tag{107}$$

ჩართვის თეორემების თანახმად, მაშინ $h_0 \in C^{0,\beta}(S)$. ეს შეიძლება ვაჩვენოთ აგრეთვე (54) ოპერატორული ტოლობების გამოყენებით.

ავაგოთ ფუნქცია

$$u_0(x) = W(h_0)(x) + aV(h_0)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash S. \tag{108}$$

(107) ტოლობის ძალით u_0 იქნება ნეიმანის გარე ამოცანის რეგულარული გამოსხივებადი ამონახსენი. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად $u_0 = 0$, $x \in \Omega^-$.

როგორც უკვე ვაჩვენეთ, თუ (108) ფუნქცია ნულის ტოლია Ω^- არეში, მაშინ $h_0(x) = 0$, $x \in S$, რაც ამტკიცებს, რომ (104) ოპერატორის გული ტრივიალურია. ამიტომ იგი და მასთან ერთად (103) ოპერატორი შებრუნებადია. შედეგად მივიღებთ, რომ არაერთგვაროვანი (102) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის. აქედან კი გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

თეორემა 11. თუ სრულდება (75) და (100) პირობები, მაშინ ნეიმანის (98)-(99) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოიდგინება (101) სახით, სადაც h სიმკვრივე განისაზღვრება (102) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან და სრულდება შემდეგი უტოლობები

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \le C_4(\Omega)\,\|f\|_{C^{0,\beta}(S)}, \tag{109}$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C_5(\Omega)\,\|f\|_{L_2(S)}, \tag{110}$$

$$\|u\|_{H_2^1(\Omega)} \le C_6(\Omega)\,\|f\|_{H_2^{-1/2}(S)}, \tag{111}$$

სადაც Ω არე წარმოადგენს Ω^- სიმრავლის ნებისმიერი სასრული დიამეტრის ქვესიმრავლეს, ხოლო $C_4(\Omega)$, $C_5(\Omega)$ და $C_6(\Omega)$ მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ Ω არეზე.

3.3 ამონახსნის არსებობის დებულება ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანისათვის

განვიხილოთ შემდეგი ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანა:

$$A(\partial,\omega)\,u(x)=0,\quad x\in\Omega^-,\quad u\in W^1_{2,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right)\cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{112}$$

$$\{u(x)\}^-=f_1(x),\quad x\in S_D, \tag{113}$$

$$\left\{\frac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right\}^-=F_1(x),\quad x\in S_N, \tag{114}$$

$$f_1\in H_2^{1/2}(S_D),\quad F_1\in H^{-1/2}(S_N). \tag{115}$$

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ S, S_D, S_N ზედაპირები და ℓ_m წირი C^∞ სიგლუვისაა.

აღვნიშნოთ f_1 ფუნქციის რაიმე ფიქსირებული გაგრძელება S_D-დან მთელ S ზედაპირზე f-ით, რომელიც ინარჩუნებს სიგლუვეს:

$$r_{S_D}f=f_1\quad S_D\text{-ზე}, \tag{116}$$

$$f\in H_2^{1/2}(S). \tag{117}$$

ვეძიოთ (112)-(115) შერეული ამოცანის ამონახსენი შემდეგი სახით

$$u(x)=W\left(\mathcal{D}^{-1}(f+\widetilde{g})\right)(x)+aV\left(\mathcal{D}^{-1}(f+\widetilde{g})\right)(x),\quad x\in\Omega^-, \tag{118}$$

სადაც $\mathcal{D}^{-1}$ არის (93) ოპერატორის შებრუნებული, $a=a_1+ia_2$, $a_2\neq 0$, ხოლო $\widetilde{g}\in\widetilde{H}_2^{1/2}(S_N)$ არის საძიებელი სიმკვრივე.

ცხადია, რომ $\{u\}^-=f+\widetilde{g}$ S-ზე და ამიტომ (113) პირობა სრულდება ავტომატურად, ისევე როგორც (112) თანაფარდობები.

(114) სასაზღვრო პირობას მივყავართ შემდეგ ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებაზე

$$\left[\mathcal{L}+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right)\right]\mathcal{D}^{-1}(f+\widetilde{g})=F_1\quad S_N\text{-ზე} \tag{119}$$

ანუ

$$r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}\widetilde{g}=F\quad S_N\text{-ზე}, \tag{120}$$

სადაც

$$\mathcal{N}=\mathcal{L}+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right),$$

$$F=F_1-r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}f\in H_2^{-1/2}(S_N). \tag{121}$$

$\mathcal{D}$ ოპერატორის სტრუქტურიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathcal{D}^{-1}=-2I+T_{\mathcal{D}}, \tag{122}$$

სადაც

$$T_{\mathcal{D}} : H^{1/2}(S) \to H^{1/2}(S), \qquad\qquad (123)$$
$$: L_2(S) \to L_2(S)$$

კომპაქტური ოპერატორებია.

ამიტომ, $\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}$ პირველი რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის მთავარი სინგულარული ნაწილი იქნება $-2\mathcal{L}$ ოპერატორი, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი $\mathfrak{S}(-2\mathcal{L};\xi)$ სიმბოლო არის უარყოფითი ლუწი ფუნქცია:

$$\mathfrak{S}(-2\mathcal{L};\xi) = -|\xi|, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \qquad (124)$$

(120) განტოლების შესასწავლად გამოვიყენოთ არაშეკრულ (გახსნილ), გლუვ ზედაპირზე განსაზღვრული ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორების თეორია (იხ. დამატება A).

თუ გამოვიყენებთ თეორემა A.1-ს ძლიერად ელიფსური $-\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}$ ოპერატორისათვის, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო დადებითი და ლუწი ფუნქციაა, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1} : \widetilde{H}^s_p(S_N) \to H^{s-1}_p(S_N) \qquad (125)$$
$$: \widetilde{B}^s_{p,q}(S_N) \to B^{s-1}_{p,q}(S_N) \qquad (126)$$

ფრედჰოლმის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორებია ნულოვანი ინდექსით, თუ

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{p} + \frac{1}{2}. \qquad (127)$$

ამასთან ერთად (124) და (126) ოპერატორების ნულ-სივრცეები $\forall q \geq 1$-თვის ერთი და იგივეა s და p პარამეტრების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (127) უტოლობებს.

ვაჩვენოთ, რომ (125) და (126) ოპერატორების ნულ-სივრცე ტრივიალურია, თუ სრულდება (127) თანაფარდობები. ამისათვის საკმარისია დავადგინოთ, რომ $q = 2$, $p = 2$, და $s = 1/2$ კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვისაც (127) მართებულია, შესაბამისი ნულ-სივრცე ტრივიალურია. გავიხსენოთ, რომ $H^{1/2}_2 = B^{1/2}_{2,2}$, და დავუშვათ, რომ $\widetilde{g}_0 \in \widetilde{H}^{1/2}_2(S_N)$ არის შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი

$$r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}\widetilde{g}_0 = 0 \quad S_N\text{-ზე}. \qquad (128)$$

შევადგინოთ ფუნქცია

$$u_0(x) = W\left(\mathcal{D}^{-1}\widetilde{g}_0\right)(x) + aV\left(\mathcal{D}^{-1}\widetilde{g}_0\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S. \qquad (129)$$

(128) თანაფარდობის თანახმად დავასკვნით, რომ $u_0(x)$ არის ერთგვაროვანი გარე შერეული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი და

ამიტომ ერთადერთობის თეორემის ძალით იგი ნულის ტოლია Ω^- არეში. წინა პუნქტში ჩატარებული მსჯელობების გამოყენებით, მარტივად მივიღებთ, რომ $\{u_0\}^- = \mathcal{D}^{-1}\widetilde{g}_0 = 0$ S-ზე, საიდანაც გამომდინარეობს: $\widetilde{g}_0 = 0$ S-ზე, ანუ (125) და (126) ოპერატორების ნულ-სივრცეები ნულის ტოლია, თუ s და p აკმაყოფილებენ (127) უტოლობებს. აქედან კი დავასკვნით, რომ (120) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, რაც თავის მხრივ, იწვევს არსებობის შემდეგ დებულებას.

თეორემა 12. გარე შერეულ (112)-(115) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$, რომელიც წარმოდგენადია (118) ფორმულით, სადაც f არის f_1 -ის ნებისმიერი ფიქსირებული გაგრძელება სიგლუვის კლასის შენარჩუნებით S_D-დან S-ზე, ხოლო $\tilde{g}$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (120) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან.

მართებულია აგრეთვე წინა თეორემის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 13. ვთქვათ, (112)-(115) დასმაში სრულდება შემდეგი პირობები

$$f_1 \in B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_D), \quad F_1 \in B^{-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_N), \quad \frac{4}{3} < p < 4. \tag{130}$$

მაშინ შერეულ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in W^1_{\mathrm{p,loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$, რომელიც წარმოიდგინება (118) სახით, სადაც $f \in B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S)$ არის f_1-ის ნებისმიერი ფიქსირებული გაგრძელება, სიგლუვის კლასის შენარჩუნებით, S_D-დან S-ზე, ხოლო $\widetilde{g} \in \widetilde{B}^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_N)$ განისაზღვრება (120) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან, სადაც მარჯვენა მხარე F მოიცემა (121) ტოლობით და ეკუთვნის $B^{-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_N)$ სივრცეს. ამასთან ერთად, ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega^- \cap B(R))} \le C(R)\left[\|f_1\|_{B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_D)} + \|F_1\|_{B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_N)}\right],$$

სადაც R საკმარისად დიდი რიცხვია, ისეთი, რომ $\overline{\Omega^+} \subset B(R)$, $\overline{\Omega}_0 \subset B(R)$, $B(R)$ არის R რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო $C(R)$ არის R-ზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივი.

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ (120) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია, თუ $s = 1 - \frac{1}{p}$ და $\frac{4}{3} < p < 4$, რადგანაც სრულდება (127) თანაფარდობები. აქედან კი მარტივად გამომდინარეობს, რომ შერეულ (112)-(115) გარე ამოცანას (130) პირობებში გააჩნია ამონახსენი $W^1_{\mathrm{p,loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ კლასში. მისი ერთადერთობა $p = 2$-სათვის, რომელიც გამომდინარეობს გრინის ფორმულებიდან და რელიხ-ვეკუას ლემიდან, უკვე ნაჩვენები გვაქვს.

ვაჩვენოთ ერთადერთობა იმ შემთხვევაში, როცა $p \neq 2$ და $p \in \left(\frac{4}{3}; 4\right)$.

ვთქვათ $u_0 \in W^1_{\mathrm{p,loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ არის შესაბამისი გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი. მაშინ, ცხადია,

$$\widetilde{g} := \{u_0\}^- \in \widetilde{B}^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_N), \quad \widetilde{h} := \left\{\frac{\partial u_0}{\partial n}\right\}^- \in \widetilde{B}^{-\frac{1}{p}}_{p,p}(S_D), \tag{131}$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების ძალით.

დავწეროთ u_0 ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენა (იხ. (29))

$$u_0(x) = V\left(\widetilde{h}\right)(x) - W(\widetilde{g})(x), \quad x \in \Omega^-. \tag{132}$$

ამ ტოლობიდან მარტივად მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\widetilde{g} = \mathcal{H}\widetilde{h} - \left(-\frac{1}{2}\widetilde{g} + \mathcal{K}\widetilde{g}\right) \ S\text{-ზე},$$
$$\widetilde{h} = \frac{1}{2}\widetilde{h} + \widetilde{\mathcal{K}}\widetilde{h} - \mathcal{L}\widetilde{g} \ S\text{-ზე},$$

ანუ

$$\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\widetilde{g} = \mathcal{H}\widetilde{h} \quad S\text{-ზე}, \tag{133}$$

$$\mathcal{L}\widetilde{g} = \left(-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right)\widetilde{h} \quad S\text{-ზე}. \tag{134}$$

გავამრავლოთ (133) ტოლობა $a = a_1 + ia_2$ $(a_2 \neq 0)$ კომპლექსურ რიცხვზე და მივუმატოთ მეორე ტოლობას:

$$\left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right]\widetilde{g} = \left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]\widetilde{h}. \tag{135}$$

ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი ოპერატორები შებრუნებადია.

$$\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right) : H^s_p(S) \to H^{s-1}_p(S), \tag{136}$$

$$: B^s_{p,q}(S) \to B^{s-1}_{p,q}(S), \tag{137}$$

$$-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H} : H^s_p(S) \to H^s_p(S), \tag{138}$$

$$: B^s_{p,q}(S) \to B^s_{p,q}(S), \tag{139}$$

ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ კერძო შემთხვევაში, როცა $p = 2$, $s = \frac{1}{2}$, მაშინ (136) ოპერატორი (რაც ამ შემთხვევაში ემთხვევა (137) ოპერატორს, თუ $q = 2$) შებრუნებადია. ანალოგიურად, თუ $s = -\frac{1}{2}$ და $p = 2$, მაშინ (138) ოპერატორი შებრუნებადია.

მართლაც,

$$-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H} : L_2(S) \to L_2(S), \tag{140}$$

არის ფრედჰოლმის ოპერატორი, რადგან $\widetilde{\mathcal{K}}$ და $\mathcal{H}$ ოპერატორები სუსტი სინგულარობის ოპერატორებია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ (140) ოპერატორის

ნულ-სივრცე ტრივიალურია. ვთქვათ, $h \in L_2(S)$ არის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი:

$$\left(-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right) h + a\mathcal{H}h = 0. \tag{141}$$

ჩართვის თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ $h \in C^{0,\alpha}(S)$.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$v(x) = V(h)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash S. \tag{142}$$

მაშინ (141) გამო v არის რობინის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი:

$$A(\partial,\omega)\, v(x) = 0 \quad \Omega^+\text{-ში},$$
$$\left\{\frac{\partial v(x)}{\partial n(x)}\right\}^+ + a\{v(x)\}^+ = 0 \quad S\text{-ზე}.$$

ამიტომ, როგორც ზემოთ უკვე ვაჩვენეთ, $v(x) = 0$, $x \in \Omega^+$. ახლა, მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის გამო, დავასკვნით, რომ Ω^- არეში v ფუნქცია არის რეგულარული გამოსხივებადი ფუნქცია, რომელიც არის დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი. ამიტომ, ერთადერთობის თეორემის თანახმად, $v(x) = 0$, $x \in \Omega^-$. რადგან $v(x) = V(h)(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, მივიღებთ, რომ $h = 0$ S-ზე და, მაშასადამე, (140) ოპერატორის გული ტრივიალურია, საიდანაც, თავის მხრივ გამომდინარეობს (138) და (139) ოპერატორების შებრუნებადობა პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის ($1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq q < \infty$).

ზუსტად ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება (136) ოპერატორის შებრუნებადობა.

გადავწეროთ (135) ტოლობა შემდეგი სახით

$$\widetilde{h} = \left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]^{-1} \left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right] \widetilde{g} \quad S\text{-ზე}. \tag{143}$$

(131) ჩართვიდან გამომდინარეობს, $\widetilde{h} = 0$ S_N-ზე და, მაშასადამე,

$$r_{S_N}\left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]^{-1} \left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right] \widetilde{g} = 0 \quad S_N\text{-ზე}. \tag{144}$$

ცხადია, რომ $\left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]^{-1} \left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right]$ ოპერატორის მთავარი ნაწილია პირველი რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი $-2\mathcal{L}$, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო უარყოფითია (იხ. (124)). ამიტომ

$$r_{S_N}\left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]^{-1} \left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right] : \widetilde{H}^s_p(S_N) \to H^{s-1}_p(S_N), \tag{145}$$
$$: \widetilde{B}^s_{p,q}(S_N) \to B^s_{p,q}(S_N), \tag{146}$$

ოპერატორი არის ფრედჰოლმის ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, თუ სრულდება (127) პირობა. ამასთან ერთად, ამ ოპერატორების ნულ-სივრცეები ერთი და იგივეა s და p პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (127) პირობას. შევნიშნოთ, რომ თუ $s = 1 - 1/p$ და $\frac{4}{3} < p < 4$, მაშინ (127) უტოლობები კმაყოფილდება.

განვიხილოთ (145) და (146) ოპერატორები, როცა $s = \frac{1}{2}$, $p = 2$, $q = 2$; და ვაჩვენოთ, რომ ამ ოპერატორებს, რომლებიც, ფაქტობრივად ემთხვევა ერთმანეთს, ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ტრივიალური ნულ-სივრცეები გააჩნიათ.

ვთქვათ, $\widetilde{g}_0 \in \widetilde{H}_2^{1/2}(S_N) \equiv \widetilde{B}_{2,2}^{1/2}(S_N)$ არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი

$$r_{S_N}\left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]^{-1}\left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right]\widetilde{g}_0 = 0 \quad S_N\text{-ზე}. \tag{147}$$

შევნიშნოთ, რომ მართებულია შემდეგი ოპერატორული ტოლობა:

$$\left[\mathcal{L}+a\left(\frac{1}{2}I+\mathcal{K}\right)\right]\left[-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}+a\mathcal{H}\right]=\left[-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}+a\mathcal{H}\right]\left[\mathcal{L}+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right)\right], \tag{148}$$

რომელიც მტკიცდება (54) ტოლობების გამოყენებით. მართლაც,

$$\begin{aligned}
&\left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\right]\left[-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{L} + \mathcal{L}\mathcal{K} + a\mathcal{L}\mathcal{H} + A\left(-\frac{1}{4}I + \mathcal{K}^2\right) + a^2\left(\frac{1}{2}I + \mathcal{K}\right)\mathcal{H} = \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{L} + \widetilde{\mathcal{K}}\mathcal{L} + a\left(-\frac{1}{4}I + \widetilde{\mathcal{K}}^2\right) + a\mathcal{H}\mathcal{L} + a^2\mathcal{H}\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right) = \\
&= \left[-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}} + a\mathcal{H}\right]\left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right)\right].
\end{aligned}$$

(148) ტოლობიდან კი (138) ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით გვექნება შემდეგი ოპერატორული ტოლობა:

$$\left[-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}+a\mathcal{H}\right]^{-1}\left[\mathcal{L}+a\left(\frac{1}{2}I+\mathcal{K}\right)\right]=\left[\mathcal{L}+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\right)\right]\left[-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}+a\mathcal{H}\right]^{-1}. \tag{149}$$

ამიტომ, (147) განტოლების თანახმად $\widetilde{g}_0$ იქნება შემდეგი განტოლების ამონახსენიც

$$r_{S_N}\left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right)\right]\left[-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right]^{-1}\widetilde{g}_0 = 0 \quad S_N\text{-ზე}. \tag{150}$$

განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$u_0(x) = W\left(\left[-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right]^{-1}\widetilde{g}_0\right) + aV\left(\left[-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right]^{-1}\widetilde{g}_0\right)(x), \tag{151}$$

$$x \in \Omega^-.$$

ცხადია, $u_0(x) \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$.

(151) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial n}\right\}^- = \left[\mathcal{L} + a\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}\right)\right]\left[-\frac{1}{2}I + \mathcal{K} + a\mathcal{H}\right]^{-1} \widetilde{g}_0 \quad S\text{-ზე}, \tag{152}$$

$$\{u_0\}^- = \widetilde{g}_0 \quad S\text{-ზე}. \tag{153}$$

ამიტომ (150) განტოლების ძალით და $\widetilde{g}_0 \in \widetilde{H}^s_p(S_N)$ ჩართვის გამო

$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S_N\text{-ზე},$$

$$\{u_0\}^- = 0 \quad S_D\text{-ზე},$$

ე.ი. u_0 არის გარე შერეული ერთგვაროვანი ამოცანის $W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ კლასის ამონახსენი. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის ძალით $u_0(x) = 0$, $x \in \Omega^-$, საიდანაც დავასკვნით (იხ. (151) და (152)), რომ $g_0 = 0$ S-ზე. ამიტომ (145) და (146) ოპერატორების გული ტრივიალურია, თუ $s = \frac{1}{2}$, $p = 2$, $q = 2$, და, მაშასადამე, ისინი შებრუნებადია. მაშინ (145) და (146) ოპერატორები შებრუნებადია, თუ $s = 1 - \frac{1}{p}$ და $\frac{4}{3} < p < 4$, რადგან კმაყოფილდება (127) უტოლობა. ამის გამო (144) და (131) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{g} = \{u_0\}^- = 0$, რაც (143)-ის ძალით იწვევს ტოლობას $\widetilde{h} = \left\{\frac{\partial u_0}{\partial n}\right\}^- = 0$. მაშინ (132) ტოლობიდან საბოლოოდ მივიღებთ $u_0(x) = 0$, $x \in \Omega^-$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

მართებულია სიგლუვის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 14. ვთქვათ, კმაყოფილდება (130) ჩართვები,

$$\frac{4}{3} < p < 4, \quad 1 < t < \infty, \quad 1 \le q \le \infty, \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{t} + \frac{1}{2}, \tag{154}$$

და $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ არის შერეული გარე ამოცანის ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოდგენილია (118) სახით, სადაც სიმკვრივე $\tilde{g}$ ცალსახად განისაზღვრება (120) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

(i) თუ

$$f_1 \in B^s_{t,t}(S_D), \quad F_1 \in B^{s-1}_{t,t}(S_N),$$

მაშინ

$$u \in H^{s+\frac{1}{t}}_{t,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-);$$

(ii) თუ

$$f_1 \in B^s_{t,q}(S_D), \quad F_1 \in B^{s-1}_{t,q}(S_N),$$

მაშინ

$$u \in B^{s+\frac{1}{t}}_{t,q,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-);$$

(iii) თუ β არაა მთელი და

$$f_1 \in C^{0,\beta}(S_D), \quad F_1 \in B^{\beta-1}_{\infty,\infty}(S_N),$$

მაშინ

$$u \in \Big[\bigcap_{\gamma<\nu} C^{0,\gamma}(\Omega^-)\Big] \cap Z(\Omega^-), \quad \nu = \min\Big\{\beta, \frac{1}{2}\Big\}.$$

დამტკიცება. დამტკიცება სიტყვასიტყვით ემთხვევა თეორემა 4.14-ის დამტკიცებას [46] შრომაში (იხილე ასევე თეორემა 5.22 ნაშრომში [8]). $\square$

3.4 ამონახსნის არსებობის დებულება ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანებისათვის

საილუსტრაციოდ ჯერ განვიხილოთ ეკრანის ტიპის ამოცანა, როდესაც Ω_Σ^- არის S საზღვარზე მოცემულია დირიხლეს სასაზღვრო პირობა:

$$A(\partial,\omega)u(x) = 0, \quad x \in \Omega_\Sigma^-, \quad u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega_\Sigma^-) \cap Z(\Omega^-), \tag{155}$$

$$\{u\}^- = f \quad S\text{-ზე}, \tag{156}$$

$$\{u\}^+ = f^+ \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{157}$$

$$\{u\}^- = f^- \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{158}$$

სადაც

$$f \in B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S), \quad f^{(\pm)} \in B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma), \tag{159}$$

და სრულდება ბუნებრივი თავსებადობის პირობა

$$f^{(+)} - f^{(-)} \in \widetilde{B}^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma). \tag{160}$$

ვეძებოთ ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$u(x) = W_S(\mathcal{D}^{-1}g)(x) + aV_S(\mathcal{D}^{-1}g)(x) + V_\Sigma(\varphi)(x) + W_\Sigma(\psi)(x), \ x \in \Omega_\Sigma^-, \tag{161}$$

სადაც $\mathcal{D}^{-1}$ არის (97) ოპერატორის შებრუნებული, $a = a_1 + ia_2$, $a_2 \neq 0$, ხოლო $g \in B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S)$, $\varphi \in \widetilde{B}^{-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma)$, $\psi \in \widetilde{B}^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma)$ საძიებელი სიმკვრივეებია.

ცხადია, (157)-(158) პირობები ეკვივალენტურია შემდეგი პირობების:

$$\{u\}^+ - \{u\}^- = f^{(+)} - f^{(-)} \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{162}$$

$$\{u\}^+ + \{u\}^- = f^{(+)} + f^{(-)} \quad \Sigma\text{-ზე}. \tag{163}$$

ამიტომ (161) წარმოდგენიდან და (156), (162), (163) პირობებიდან საძიებელი g, φ და ψ ფუნქციების მიმართ მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$g + r_S[V_\Sigma(\varphi) + W_\Sigma(\psi)] = f \quad S\text{-ზე}, \tag{164}$$

$$\psi = f^{(+)} - f^{(-)} \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{165}$$

$$r_\Sigma\left[W_S(\mathcal{D}^{-1}g) + a\,V_S(\mathcal{D}^{-1}g)\right] + r_\Sigma\mathcal{H}_\Sigma\varphi + r_\Sigma\mathcal{K}_\Sigma\psi = \frac{1}{2}\left[f^{(+)} + f^{(-)}\right] \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{166}$$

ანუ

$$
\begin{aligned}
& g+r_S\left[V_\Sigma(\varphi)\right]=f_1 && S\text{-ზე}, && (167)\\
& r_\Sigma\left[W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right]+r_\Sigma\ \mathcal{H}_\Sigma\varphi=f_2 && \Sigma\text{-ზე}, && (168)\\
& \psi=f_3 && \Sigma\text{-ზე}, && (169)
\end{aligned}
$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
& f_1=f-r_S W_\Sigma\left(f^{(+)}-f^{(-)}\right)\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S),\\
& f_2=\frac{1}{2}\left[f^{(+)}+f^{(-)}\right]f-r_\Sigma\mathcal{K}_\Sigma\left(f^{(+)}-f^{(-)}\right)\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma),\\
& f_3=f^{(+)}-f^{(-)}\in\widetilde{B}_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma).
\end{aligned} \tag{170}
$$

ამრიგად, ψ ფუნქცია ცხადი სახით განისაზღვრება, ხოლო g და φ ფუნქციების მიმართ მიიღება (167)-(168) სისტემა, რომელიც ასე გადავწეროთ

$$
g+T_1\varphi=f_1 \quad S\text{-ზე}, \tag{171}
$$

$$
T_2 g+r_{_\Sigma}\mathcal{H}_{_\Sigma}\varphi=f_2 \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{172}
$$

სადაც

$$
T_1\varphi=r_{_S}\left[V_{_\Sigma}(\varphi)\right], \quad T_2 g=r_{_\Sigma}\left[W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)+a\,V_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right]. \tag{173}
$$

ცხადია, შემდეგი ოპერატორები კომპაქტური ოპერატორებია

$$
\begin{aligned}
& T_1:\widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma)\to B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S),\\
& T_2:B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S)\to B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma).
\end{aligned} \tag{174}
$$

ფაქტობრივად, T_1 და T_2 უსასრულო რიგის გამაგლუვებელი ოპერატორებია, რადგან $S\cap\overline{\Sigma}=\emptyset$.

გადავწეროთ (171)-(172) სისტემა მატრიცული ფორმით:

$$
\mathbb{M}X=Y, \tag{175}
$$

სადაც $X=(g,\varphi)^T$, $Y=(f_1,f_2)^T$,

$$
\mathbb{M}X=\left[\begin{array}{cc} I & T_1\\ T_2 & r_\Sigma\mathcal{H}_\Sigma\end{array}\right]. \tag{176}
$$

$\mathbb{M}$ ოპერატორს გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისებები

$$
\mathbb{M}:H_p^s(S)\times\widetilde{H}_p^{s-1}(\Sigma)\to H_p^s(S)\times H_p^s(\Sigma), \tag{177}
$$

$$
:B_{p,q}^s(S)\times\widetilde{B}_{p,q}^{s-1}(S)\to B_{p,q}^s(S)\times B_{p,q}^s(\Sigma), \tag{178}
$$

$$
1<p<\infty, \quad s\in\mathbb{R}, \quad \le q\le\infty.
$$

თეორემა A.1-ის გამოყენებით (იხილე დამატება A) მარტივად ვაჩვენებთ, რომ

$$\begin{aligned} r_{\Sigma}\,\mathcal{H}_{\Sigma} &: \widetilde{H}_p^{s-1}(\Sigma) \to H_p^s(\Sigma), \\ &: \widetilde{B}_{p,q}^{s-1}(\Sigma) \to B_{p,q}^s(\Sigma) \end{aligned} \tag{179}$$

შებრუნებადი ოპერატორებია, თუ

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{p} + \frac{1}{2}, \quad 1 < p < \infty. \tag{180}$$

მართლაც, $\mathcal{H}_{\Sigma}$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{\Sigma}; x, \xi) = -\frac{1}{2|\xi|}$ და იგი განსხვავებულია ნულისაგან $\forall x \in \Sigma$ და $\xi \in \mathbb{R}^2$, $|\xi| = 1$.

ამიტომ (179) ოპერატორები ფრედჰოლმურია ნულოვანი ინდექსით, თუ სრულდება (180) პირობები. ვაჩვენოთ, რომ შესაბამისი ნულ-სივრცეები ტრივიალურია, თუ $s = \frac{1}{2}$, $p = q = 2$. ვთქვათ, $\varphi_0 \in \widetilde{H}_2^{-1/2}(\Sigma) \equiv \widetilde{B}_{2,2}^{-1/2}(\Sigma)$ არის შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი:

$$r_{\Sigma}\mathcal{H}_{\Sigma}\varphi_0 = 0 \quad \Sigma\text{-ზე} \tag{181}$$

და განვიხილოთ ფუნქცია

$$u_0(x) = V_{\Sigma}(\varphi_0)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Sigma}. \tag{182}$$

ცხადია, რომ $u_0 \in H^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Sigma}\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Sigma}\right)$ და u_0 აკმაყოფილებს ეკრანის ტიპის ერთგვაროვან პირობებს Σ ზედაპირზე, (181) თანაფარდობის თანახმად:

$$A(\partial, \omega)\, u_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Sigma}, \tag{183}$$

$$\{u_0(x)\}_{\Sigma}^{+} = 0 \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{184}$$

$$\{u_0(x)\}_{\Sigma}^{-} = 0 \quad \Sigma\text{-ზე}. \tag{185}$$

დავწეროთ გრინის (18) ფორმულა u_0 და $\overline{u}_0$ ფუნქციებისათვის Ω_0 და $B(R) \backslash \overline{\Omega}_0$ არეებში (აქ R საკმრისად დიდი რიცხვია, ისეთი, რომ $\overline{\Omega}_0 \subset B(R)$, სადაც $B(R)$ არის R რადიუსიანი ბირთვი, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში):

$$\int\limits_{B(R)\backslash\overline{\Omega}_0} \left(-|\nabla u_0|^2 + \omega |u_0|^2\right) dx + \int\limits_{S(R)} \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \overline{u}_0\, dS(R) + \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \overline{u}_0\, dS = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega_0} \left(-|\nabla u_0|^2 + \omega |u_0|^2\right) dx + \int\limits_{\partial\Omega_0} \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \overline{u}_0\, dS = 0.$$

ამ ტოლობების შეკრებით და (184)-(185) პირობებისა და დამატებით იმის გათვალისწინებით, რომ $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Sigma}$ არეში u_0 ნამდვილი ცვლადის ანალიზური ფუნქციაა, მივიღებთ

$$\int\limits_{B(R)\backslash\overline{\Omega}_0} \left(-|\nabla u_0|^2 + \omega |u_0|^2\right) dx + \int\limits_{S(R)} \frac{\partial u_0}{\partial n}\, \overline{u}_0 dS(R) = 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\operatorname{Im} \int\limits_{S(R)} \frac{\partial u_0}{\partial n} \, \overline{u}_0 \, dS\,(R) = \operatorname{Im} \int\limits_{S(R)} \frac{\partial u_0}{\partial R} \, \overline{u}_0 \, dS\,(R) = 0. \tag{186}$$

რადგან u_0 აკმაყოფილებს გამოსხივების პირობებს, ამიტომ საკმარისად დიდი R-თვის

$$\frac{\partial u_0\,(x)}{\partial R} = i\omega u_0\,(x) + \mathcal{O}\left(R^{-2}\right), \quad x \in S\,(R)\,.$$

ამიტომ (186)-დან, u_0-ის ქრობის რიგის გათვალისწინებით $\big(u_0(x) = \mathcal{O}(R^{-1})\big)$, მივიღებთ

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{S(R)} |u_0|^2 dS\,(R) = 0$$

და რელიხ-ვეკუას ლემის თანახმად დავასკვნით, რომ

$$u_0\,(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \Sigma.$$

(182) ტოლობის ძალით კი გვექნება

$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial n}\right\}^+_\Sigma - \left\{\frac{\partial u_0}{\partial n}\right\}^-_\Sigma = -\varphi_0 = 0 \quad \Sigma\text{-ზე}.$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ (179) ოპერატორების გული ტრივიალურია, თუ $s = \frac{1}{2}$, $p = q = 2$. ამიტომ ეს ოპერატორები შებრუნებადია თუ s და p აკმაყოფილებენ (180) უტოლობას.

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ (177) და (178) ასახვით განსაზღვრული $\mathbb{M}$ ოპერატორები არის ფრედჰოლმური და მათი ინდექსი ნულის ტოლია, თუ სრულდება (180) უტოლობა.

ვაჩვენოთ, რომ მათი გული ტრივიალურია. კვლავ განვიხილოთ პარამეტრების კონკრეტული მნიშვნელობა $s = \frac{1}{2}$, $p = q = 2$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (180) პირობას.

ვთქვათ, $X_0 = (g_0, \varphi_0)$ ამონახსნია ერთგვაროვანი $\mathbb{M}\,X_0 = 0$ განტოლებისა, ე. ი. g_0 და φ_0 ამონახსენია (167) და (168) ერთგვაროვანი განტოლებებისა:

$$g_0 + r_S\,[V_\Sigma\,(\varphi_0)] = 0 \qquad S\text{-ზე}, \tag{187}$$

$$r_\Sigma\left[W_S\left(\mathcal{D}^{-1} g_0\right) + aV_S\left(\mathcal{D}^{-1} g_0\right)\right] + r_\Sigma \mathcal{H}_\Sigma \varphi_0 = 0 \qquad \Sigma\text{-ზე}, \tag{188}$$

$$g_0 \in H_2^{1/2}\,(S)\,, \quad \varphi_0 \in \widetilde{H}_2^{-1/2}\,(\Sigma)\,.$$

ავაგოთ ფუნქცია

$$v_0\,(x) = W_S\left(\mathcal{D}^{-1} g_0\right)(x) + aV_S\left(\mathcal{D}^{-1} g_0\right)(x) + \\ + V_\Sigma\,(\varphi_0)\,(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \left(S \cup \overline{\Sigma}\right). \tag{189}$$

ცხადია, $v_0 \in W^1_{2,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right)$ და (187) და (188) ტოლობების ძალით არის ერთგვაროვანი (155)-(158) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად

$$v_0(x) = 0, \quad x \in \Omega^-_\Sigma.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi_0 = \left\{\frac{\partial v_0}{\partial n}\right\}^+_\Sigma - \left\{\frac{\partial v_0}{\partial n}\right\}^-_\Sigma = 0,$$

და (187)-ის თანახმად $g_0 = 0$ S-ზე. ეს კი ამტკიცებს, რომ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში $\mathbb{M}$ ოპერატორის გული ტრივიალურია, ამიტომ (177) და (178) ოპერატორების გულები ტრივიალურია, თუ სრულდება (180) პირობები და მაშასადამე, ისინი შებრუნებადია. აქედან კი გამომდინარეობს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის შემდეგი დებულება:

თეორემა 15. ვთქვათ, სრულდება (159)-(160) პირობები და $\frac{4}{3} < p < 4$. მაშინ ეკრანის ტიპის (155)-(158) ამოცანა ამოხსნადია ცალსახად და ამონახსენი წარმოდგენადია (161) ტოლობით, სადაც g, φ და ψ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (167)-(169) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან. ამასთან ერთად, ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega^-_\Sigma \cap B(R))} \leq C(R)\Big[\|f\|_{B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S)} + \|f^{(+)} + f^{(-)}\|_{B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma)} + \\ + \|f^{(+)} - f^{(-)}\|_{B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma)}\Big],$$

სადაც R საკმარისად დიდი რიცხვია, ისეთი, რომ $\overline{\Omega^+} \subset B(R)$, $\overline{\Omega}_0 \subset B(R)$, ხოლო $C(R)$ არის R-ზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივი.

ქვემოთ ჩამოყალიბებული არსებობისა და რეგულარობის თეორემა მტკიცდება იმავე ტიპის მსჯელობებით, რაც გამოყენებული იყო შერეული ამოცანებისთვის ანალოგიური თეორემების დამტკიცების დროს.

თეორემა 16. ვთქვათ, კმაყოფილდება (159)-(160) ჩართვები და

$$\frac{4}{3} < p < 4, \quad 1 < t < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{t} + \frac{1}{2}$$

და $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right)$ არის ეკრანის ტიპის (155)-(158) სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოდგენადია (161) ტოლობით, სადაც g, φ და ψ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (167)-(169) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

მაშინ, ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

(i) თუ

$$f \in B_{t,t}^{s}(S), \quad f^{(\pm)} \in B_{t,t}^{s}(\Sigma), \quad f^{(+)} - f^{(-)} \in \widetilde{B}_{t,t}^{s}(\Sigma),$$

მაშინ

$$u \in H_{t,\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{t}}\left(\Omega_{\Sigma}^{-}\right) \cap Z\left(\Omega_{\Sigma}^{-}\right);$$

(ii) თუ

$$f \in B_{t,q}^{s}(S), \quad f^{(\pm)} \in B_{t,q}^{s}(\Sigma), \quad f^{(+)} - f^{(-)} \in \widetilde{B}_{t,q}^{s}(\Sigma),$$

მაშინ

$$u \in B_{t,q,\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{t}}\left(\Omega_{\Sigma}^{-}\right) \cap Z\left(\Omega_{\Sigma}^{-}\right);$$

(iii) თუ $\beta > 0$ არაა მთელი,

$$f \in C^{0,\beta}(S), \quad f^{(\pm)} \in C^{0,\beta}(\Sigma), \quad r_{\partial\Sigma}\left(f^{(+)} - f^{(-)}\right) = 0,$$

მაშინ

$$u \in \Big[\bigcap_{\gamma<\nu} C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)\Big] \cap Z\left(\Omega_{\Sigma}^{-}\right), \quad \nu = \min\left\{\beta, \frac{1}{2}\right\};$$

აქ Ω არის ან Ω_0 ან $\Omega^{-}\backslash\overline{\Omega}_0$. გავიხსენოთ, რომ $\overline{\Sigma} \subset \partial\Omega_0$.

ეს თეორემა, ფაქტობრივად, ამბობს, რომ ბზარის კიდის მიდამოში u ფუნქცია ჰელდერის აზრით უწყვეტია $\nu - \varepsilon$ მაჩვენებლით, სადაც ε ნებისმიერად მცირე დადებითი რიცხვია.

3.5 ამონახსნის არსებობის დებულება ბზარის ტიპის სასაზღვრო ამოცანებისათვის

განვიხილოთ ბზარის ტიპის ამოცანა, როდესაც Ω_{Σ}^{-} არის S საზღვარზე მოცემულია კვლავ დირიხლეს პირობა:

$$A(\partial,\omega)\, u(x) = 0, \quad x \in \Omega_{\Sigma}^{-}, \quad u \in W_{p,\mathrm{loc}}^{1}\left(\Omega_{\Sigma}^{-}\right) \cap Z\left(\Omega^{-}\right), \tag{190}$$

$$\{u\}^{-} = f \quad S\text{-ზე}, \tag{191}$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^{+} = F^{+} \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{192}$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^{-} = F^{-} \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{193}$$

სადაც

$$f \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S), \quad F^{(\pm)} \in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma), \tag{194}$$

და სრულდება ბუნებრივი თავსებადობის პირობა

$$F^{(+)} - F^{(-)} \in \widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma). \tag{195}$$

ვეძებოთ ამოცანის ამოხსნა კვლავ ზედაპირული პოტენციალების წრფივი კომბინაციის სახით

$$u\left(x\right)=W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\left(x\right)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\left(x\right)+V_\Sigma\left(\varphi\right)\left(x\right)+W_\Sigma\left(\psi\right)\left(x\right),\quad x\in\Omega_\Sigma^-, \tag{196}$$

სადაც $a=a_1+ia_2$, $a_2\neq 0$, $\mathcal{D}^{-1}$ კვლავ არის (97) ოპერატორის შებრუნებული, ხოლო

$$g\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(S\right),\quad \varphi\in \widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}\left(\Sigma\right),\quad \psi\in \widetilde{B}_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(\Sigma\right), \tag{197}$$

საძიებელი სიმკვრივეებია.

(192)-(193) პირობები გადავწეროთ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმით

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+-\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^-=F^{(+)}-F^{(-)}\quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{198}$$

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^++\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^-=F^{(+)}+F^{(-)}\quad \Sigma\text{-ზე}. \tag{199}$$

(196) წარმოდგენა და (191), (198), (199) პირობები გვაძლევს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას საძიებელი სიმკვრივეებისათვის:

$$g+r_S\left[V_\Sigma\left(\varphi\right)+W_\Sigma\left(\psi\right)\right]=f\qquad S\text{-ზე}, \tag{200}$$

$$\varphi=F^{(-)}-F^{(+)}\qquad \Sigma\text{-ზე}, \tag{201}$$

$$\begin{aligned}&r_\Sigma\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right)\right]+\widetilde{\mathcal{K}}_\Sigma\varphi+\mathcal{L}_\Sigma\psi=\\&\qquad=\frac{1}{2}\left[F^{(+)}+F^{(-)}\right]\qquad \Sigma\text{-ზე},\end{aligned} \tag{202}$$

ანუ

$$g+r_S\left[W_\Sigma\left(\psi\right)\right]=F_1\qquad S\text{-ზე}, \tag{203}$$

$$r_\Sigma\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right)\right]+r_\Sigma\mathcal{L}_\Sigma\psi=F_2\quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{204}$$

$$\varphi=F_3\qquad \Sigma\text{-ზე}, \tag{205}$$

სადაც

$$\begin{aligned}&F_1=f-r_SV_\Sigma\left(F^{(-)}-F^{(+)}\right)\in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}\left(S\right),\\&F_2=\frac{1}{2}\left[F^{(+)}+F^{(-)}\right]-r_\Sigma\widetilde{\mathcal{K}}_\Sigma\left(F^{(-)}-F^{(+)}\right)\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(\Sigma\right),\\&F_3=F^{(-)}-F^{(+)}\in \widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}\left(\Sigma\right).\end{aligned} \tag{206}$$

როგორც ვხედავთ, φ ფუნქცია განისაზღვრება ცხადი სახით, ხოლო g და ψ ფუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$g+\widetilde{T}_1\psi=F_1\quad S\text{-ზე}, \tag{207}$$

$$\widetilde{T}_2g+r_\Sigma\mathcal{L}_\Sigma\psi=f_2\quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{208}$$

სადაც

$$\widetilde{T}_1\psi = r_S\left[W_\Sigma\left(\psi\right)\right], \quad \widetilde{T}_2 g = r_\Sigma\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right) + aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right)\right]. \tag{209}$$

ცხადია,

$$\widetilde{T}_1 : \widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}\left(\Sigma\right) \to B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(S\right),$$
$$\widetilde{T}_2 : B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(S\right) \to B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}\left(\Sigma\right)$$

კომპაქტური ოპერატორებია, რადგან $S \cap \overline{\Sigma} = \emptyset$. ფაქტობრივად, $\widetilde{T}_1$ და $\widetilde{T}_2$ უსასრულო რიგის გამაგლუვებელი ოპერატორებია.

როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც (207)-(208) სისტემა გადავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\widetilde{\mathbb{M}}\widetilde{X} = \widetilde{Y}, \tag{210}$$

სადაც $\widetilde{X} = (g, \psi)^T$, $\widetilde{Y} = (F_1, F_2)$,

$$\widetilde{\mathbb{M}} := \begin{bmatrix} I & \widetilde{T}_1 \\ \widetilde{T}_2 & r_\Sigma \mathcal{L}_\Sigma \end{bmatrix}. \tag{211}$$

ამ ოპერატორს გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისებები

$$\widetilde{\mathbb{M}} : H_p^s\left(S\right) \times \widetilde{H}_p^s\left(\Sigma\right) \to H_p^s\left(S\right) \times H_p^{s-1}\left(\Sigma\right), \tag{212}$$
$$: B_{p,q}^s\left(S\right) \times \widetilde{B}_{p,q}^s\left(\Sigma\right) \to B_{p,q}^s\left(S\right) \times B_{p,q}^{s-1}\left(\Sigma\right). \tag{213}$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{L}_\Sigma$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო $\mathfrak{S}\left(\mathcal{L}_\Sigma; x, \xi\right) = \frac{1}{2}\left|\xi\right| > 0$, როცა $\xi \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

კვლავ თეორემა A.1-ის გამოყენებით (იხილე დამატება A) დავასკვნით, რომ შემდეგი ოპერატორები

$$r_\Sigma \mathcal{L}_\Sigma : \widetilde{H}_p^s\left(\Sigma\right) \to H_p^{s-1}\left(\Sigma\right), \tag{214}$$
$$: \widetilde{B}_{p,q}^s\left(\Sigma\right) \to B_{p,q}^{s-1}\left(\Sigma\right), \tag{215}$$

ფრედჰოლმის ოპერატორებია ნულოვანი ინდექსით, თუ

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{p} + \frac{1}{2}, \quad 1 < p < \infty. \tag{216}$$

ზუსტად იმ მსჯელობის საშუალებით, რაც გამოყენებული იყო წინა პუნქტში (ეკრანის ტიპის ამოცანის ანალიზის დროს), ვაჩვენებთ, რომ (214)-(215) ოპერატორები შებრუნებადია, თუ სრულდება (216) პირობები. აქედან გამომდინარეობს, რომ (212) და (213) ოპერატორები ფრედჰოლმურია ნულოვანი ინდექსით. ვაჩვენოთ, რომ მათი ნულ-სივრცეები ტრივიალურია პარამეტრის შემდეგი კერძო მნიშვნელობებისათვის: $q = 2$, $p = 2$ და $s = 1/2$.

ვთქვათ, $\widetilde{X}_0 = (g_0, \psi_0)$ ამონახსნია ერთგვაროვანი $\widetilde{\mathbb{M}}\widetilde{X}_0 = 0$ განტოლებისა, ე.ი.

$$g_0 + r_S \left[W_\Sigma \left(\psi_0 \right) \right] = 0 \qquad S\text{-ზე}, \tag{217}$$

$$r_\Sigma \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(W_S \left(\mathcal{D}^{-1} g_0 \right) + a V_S \left(\mathcal{D}^{-1} g_0 \right) \right) \right] + r_\Sigma \mathcal{L}_\Sigma \psi_0 = 0 \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{218}$$

$$g_0 \in H_2^{1/2}(S), \quad \psi_0 \in \widetilde{H}_2^{1/2}(\Sigma).$$

ავაგოთ ფუნქცია

$$u_0(x) = W_S \left(\mathcal{D}^{-1} g_0 \right)(x) + a V_S \left(\mathcal{D}^{-1} g_0 \right)(x) + \\ + W_\Sigma \left(\psi_0 \right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left(S \cup \overline{\Sigma} \right). \tag{219}$$

ცხადია, u_0 ამონახსნია ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი განტოლებისა $\left(\Omega_\Sigma^-\right)$ არეში და ეკუთვნის $W^1_{2,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right)$ კლასს. გარდა ამისა (217) და (218) ტოლობების ძალით u_0 აკმაყოფილებს ერთგვაროვან (191), (192) და (193) ტოლობებს. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად იგი ნულის ტოლია Ω^-_Σ არეში. რადგან, $\{u_0\}^+_\Sigma - \{u_0\}^-_\Sigma = \psi_0 = 0$ Σ-ზე, ამიტომ (217)-ის ძალით გვექნება $g_0 = 0$, და, მაშასადამე, ამ კონკრეტულ შემთხვევაში ($s = \frac{1}{2}$, $q = 2$, $p = 2$) (212) და (213) ოპერატორების ნულ-სივრცეები ტრივიალურია.

მაშინ, თეორემა A.1-ის ძალით ისინი შებრუნებადია ნებისმიერი s, p და $1 \leq q \leq \infty$ პარამეტრებისათვის თუ სრულდება (216) უტოლობები.

ამ შედეგებზე დაყრდნობით მტკიცდება შემდეგი არსებობისა და რეგულარობის თეორემები.

თეორემა 17. ვთქვათ, სრულდება (194)-(195) პირობები და $\frac{4}{3} < p < 4$. მაშინ ბზარის ტიპის (190)-(193) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right)$ და ამონახსენი წარმოიდგინება (196) ფორმით, სადაც g, φ და ψ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (203)-(205) სისტემიდან. ამასთან ერთად მართებულია შემდეგი შეფასება

$$\|u\|_{W^1_p\left(\Omega^-_\Sigma \cap B(R)\right)} \leq C(R) \left[\|f\|_{B^{1-\frac{1}{p}}_{p,p}(S)} + \left\|F^{(+)} + F^{(-)}\right\|_{B^{-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma)} + \right. \\ \left. + \left\|F^{(+)} - F^{(-)}\right\|_{B^{-\frac{1}{p}}_{p,p}(\Sigma)} \right],$$

სადაც R საკმარისად დიდი რიცხვია, ისეთი, რომ $\overline{\Omega^+} \subset B(R)$, $\overline{\Omega}_0 \subset B(R)$.

ამ ამოცანისათვისაც მართებულია შემდეგი თეორემა ამონახსნთა სიგლუვის შესახებ.

თეორემა 18. ვთქვათ, კმაყოფილდება (194)-(195) ჩართვები და

$$\frac{4}{3} < p < 4, \quad 1 < t < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{t} + \frac{1}{2},$$

და $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right)$ არის ბზარის ტიპის (190)-(193) სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოიდგინება (196) სახით, სადაც სადაც g, φ და ψ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (203)-(205) სისტემიდან.

მაშინ, ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

(i) თუ

$$f \in B^s_{t,t}(S), \quad F^{(\pm)} \in B^{s-1}_{t,t}(\Sigma), \quad F^{(+)} - F^{(-)} \in \widetilde{B}^{s-1}_{t,t}(\Sigma),$$

მაშინ

$$u \in H^{s+\frac{1}{t}}_{t,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right);$$

(ii) თუ

$$f \in B^s_{t,q}(S), \quad F^{(\pm)} \in B^{s-1}_{t,q}(\Sigma), \quad F^{(+)} - F^{(-)} \in \widetilde{B}^{s-1}_{t,q}(\Sigma),$$

მაშინ

$$u \in B^{s+\frac{1}{t}}_{t,q,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-_\Sigma\right) \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right);$$

(iii) თუ $\beta > 0$ და არ არის მთელი,

$$f \in C^{0,\beta}(S), \quad F^{(\pm)} \in B^{\beta-1}_{\infty,\infty}(\Sigma), \quad F^{(+)} - F^{(-)} \in \widetilde{B}^{\beta-1}_{\infty,\infty}(\Sigma),$$

მაშინ

$$u \in \Big[\bigcap_{\gamma<\nu} C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)\Big] \cap Z\left(\Omega^-_\Sigma\right), \quad \nu = \min\left\{\frac{1}{2}, \beta\right\}.$$

აქ Ω არის ან Ω_0 ან $\Omega^- \backslash \overline{\Omega}_0$.

4 საკონტაქტო ამოცანები

4.1 ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა

ვთქვათ, მთელი $\mathbb{R}^3$ სივრცე რაიმე გლუვი $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, ზედაპირით გაყოფილია შიგა $\Omega^+ = \Omega_1$ და გარე $\Omega^- = \Omega_2$ არეებად. ვიგულისხმოთ, რომ Ω_1 და Ω_2 არეები შევსებულია მუდმივი ρ_1 და ρ_2 სხვადასხვა სიმკვრივის მქონე მასალით.

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა: ვიპოვოთ რეგულარული $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1\left(\overline{\Omega}_1\right)$ და $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1\left(\overline{\Omega}_2\right) \cap Z(\Omega_2)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებებს შესაბამის არეებში

$$\left(\Delta + \rho_1\omega^2\right) u_1 = 0 \quad \Omega_1\text{-ზე}, \tag{220}$$

$$\left(\Delta + \rho_2\omega^2\right) u_2 = 0 \quad \Omega_2\text{-ზე}, \tag{221}$$

და შემდეგ საკონტაქტო პირობებს S ზედაპირზე:

$$\{u_1(x)\}^+ - \{u_2(x)\}^- = f(x), \quad x \in S, \tag{222}$$

$$\left\{\frac{\partial u_1(x)}{\partial n(x)}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u_2(x)}{\partial n(x)}\right\}^- = F(x), \quad x \in S, \tag{223}$$

სადაც

$$f \in C^{1,\beta}(S), \quad F \in C^{0,\beta}(S), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1. \tag{224}$$

გრინის ფორმულებისა და რელიხ-ვეკუას ლემის გამოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ ამ ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან საკონტაქტო ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

შევისწავლოთ ამონახსნის არსებობის საკითხი. ვეძებოთ (220)-(223) ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$u_1(x) = V_1(g_1)(x), \quad x \in \Omega_1, \tag{225}$$

$$u_2(x) = W_2(g_2)(x) + aV_2(g_2)(x), \quad x \in \Omega_2, \tag{226}$$

სადაც V_j და W_j აღნიშნავს $(\Delta + \rho_j\,\omega^2)$ ჰელმჰოლცის ოპერატორის შესაბამისი $\Gamma\left(x, \sqrt{\rho_j}\omega\right)$ ფუნდამენტური ამონახსნის საშუალებით აგებულ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს, ხოლო g_1 და g_2 საძიებელი სიმკვრივეებია. a არის კომპლექსური რიცხვი ნულისგან განსხვავებული წარმოსახვითი ნაწილით, $a = a_1 + ia_2$, $a_2 \neq 0$.

(222) და (223) საკონტაქტო პირობები გვაძლევს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას უცნობი g_1 და g_2 ფუნქციების მიმართ:

$$\mathcal{H}_1 g_1 - \left(-\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_2 + a\,\mathcal{H}_2\right) g_2 = f \quad S\text{-ზე}, \tag{227}$$

$$\left(-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}_1\right) g_1 - \left[\mathcal{L}_2 + a\left(\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}_2\right)\right] g_2 = F \quad S\text{-ზე}, \tag{228}$$

სადაც $\mathcal{H}_j$, $\mathcal{K}_j$, $\widetilde{\mathcal{K}}_j$ და $\mathcal{L}_j$ ინტეგრალური ოპერატორები წარმოშობილია შესაბამისად V_j და W_j პოტენციალებისა და მათი ნორმალით წარმოებულების სასაზღვრო მნიშვნელობებით:

$$\{V_j(g)\}^\pm = \mathcal{H}_j g,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n} V_j(g)\right\}^\pm = \left(\mp\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}_j\right) g,$$

$$\{W_j(g)\}^\pm = \left(\pm\frac{1}{2}I + \mathcal{K}_j\right) g,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial n} W_j(g)\right\}^\pm = \mathcal{L}_j g.$$

(227)-(228) სისტემა წარმოადგენს ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა ელიფსურ სისტემას, ხოლო შესაბამისი ოპერატორი

წარმოადგენს ფრედჰოლმის ოპერატორს ნულოვანი ინდექსით. სისტემის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო (დუგლის-ნირენბერგის აზრით) არის შემდეგი მატრიცა

$$\left[\begin{array}{cc} \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\right) & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\mathfrak{S}\left(\mathcal{L}_2\right) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{2|\xi|} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\,|\xi| \end{array}\right],$$

ხოლო დეტერმინატი იქნება

$$-\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\right)\mathfrak{S}\left(\mathcal{L}_2\right)+\frac{1}{4}=-\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\mathcal{L}_2\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

როგორც უკვე ვიცით

$$\mathcal{D}_2=-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}_2+a\,\mathcal{H}_2 : C^{1,\beta}\left(s\right)\to C^{1,\beta}\left(s\right), \tag{229}$$

$$\mathcal{N}_2=\mathcal{L}_2+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_2\right) : C^{1,\beta}\left(s\right)\to C^{0,\beta}\left(s\right) \tag{230}$$

ოპერატორები შებრუნებადია შესაბამის სივრცეებში.

ვაჩვენოთ, რომ (227)-(228) სისტემის ერთგვაროვან ვერსიას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი. ვთქვათ $\widetilde{g}_1$ ამონახსნია ერთგვაროვანი სისტემის S-ზე

$$\begin{cases} H_1\widetilde{g}_1-D_2\widetilde{g}_2=0 \\ \left(-\frac{1}{2}I+K_1\right)\widetilde{g}_1-N_2\widetilde{g}_2=0 \end{cases} \tag{231}$$

და შევადგინოთ პოტენციალები

$$\widetilde{u}_1\left(x\right)=V_1\left(\widetilde{g}_1\right)\left(x\right), \tag{232}$$

$$\widetilde{u}_2\left(x\right)=W_2\left(\widetilde{g}_2\right)\left(x\right)+aV_2\left(\widetilde{g}_2\right)\left(x\right). \tag{233}$$

ცხადია, რომ $\left(\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2\right)$ წყვილი წარმოადგენს ერთგვაროვანი (220)-(223) საკონტაქტო ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად $u_1\left(x\right)=0$, $x\in\Omega_1$ და $u_2\left(x\right)=0$, $x\in\Omega_2$. აქედან კი პოტენციალთა თვისების გამოყენებით სტანდარტული მსჯელობით დავადგენთ, რომ $g_1=g_2=0$ S-ზე.

ამიტომ (227)-(228) სისტემა ცალსახად ამოხსნადია. ამონახსნი შეგვიძლია ცხადი სახით გამოვსახოთ (229)-(230) ოპერატორებისა და მათი შებრუნებულების საშუალებით. (227) განტოლებიდან განვსაზღვროთ g_2 სიმკვრივე,

$$g_2=\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1 g_1-\mathcal{D}_2^{-1}f_1, \tag{234}$$

და ჩავსვათ ეს გამოსახულება (228)-ში

$$\left[\left(-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_1\right)-\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\right]g_1=F-\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}f. \tag{235}$$

ამ გარდაქმნების ეკვივალენტურობიდან გამომდინარეობს, რომ (234)-(235) სისტემა ეკვივალენტურია (227)-(228) სისტემის.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathcal{P} := \left(-\frac{1}{2}I + \widetilde{\mathcal{K}}_1\right) - \mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1. \tag{236}$$

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{P}$ არის ნულოვანი რიგის ფსევდო-დიფერენციალური ოპერატორი, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლოა $\mathfrak{S}(\mathcal{P}) = -1$. ამავე დროს, იგი არის შებრუნებადი ოპერატორი,

$$\mathcal{P} : C^{1,\beta}(S) \to C^{1,\beta}(S), \tag{237}$$

რადგან მისი ნულ-სივრცე ტრივიალურია.

მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\mathfrak{S}\left(\mathcal{D}_2^{-1}\right) = -2$ და $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2\mathcal{H}_2) = -\frac{1}{4}$, მარტივად დავადგენთ შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathcal{P};\xi) &= -\frac{1}{2} - \mathfrak{S}(\mathcal{N}_2;\xi)(-2)\,\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2;\xi) = -\frac{1}{2} + 2\mathfrak{S}(\mathcal{N}_2\mathcal{H}_2)\\ &= -\frac{1}{2} + 2\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2\mathcal{H}_2) = -\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -1, \quad \forall x\in S, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

(237) ოპერატორის ნულ-სივრცის ტრივიალურობა გამომდინარეობს (234)-(235) და (227)-(228) სისტემების ეკვივალენტურობიდან.

(237) ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით (235) და (234) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$g_1 = \mathcal{P}^{-1}F - \mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}f, \tag{238}$$

$$g_2 = \mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}F - \mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}f - \mathcal{D}_2^{-1}f. \tag{239}$$

ამრიგად, დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 19. თუ $S\in C^{2,\alpha}$, $0<\beta<\alpha\le 1$, და შესრულდება (224) პირობები, მაშინ ძირითად საკონტაქტო (220)-(222) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი

$$(u_1,u_2)\in\left[C^2(\Omega_1)\cap C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega}_1\right)\right]\times\left[C^2(\Omega_2)\cap C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega}_2\right)\cap Z(\Omega_2)\right]$$

და u_1 და u_2 წარმოდგენადია (225)-(226) ფორმულებით, სადაც g_1 და g_2 სიმკვრივეები მოცემულია (238)-(239) ტოლობებით.

მართებულია აგრეთვე ამ თეორემის განზოგადებული ვერსია სობოლევის სივრცეების შემთხვევაში, რომელიც შეიძლება დამტკიცდეს იმავე მსჯელობებით, რაც გამოყენებული იყო სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის დროს.

თეორემა 20. თუ შესრულებულია პირობები

$$f \in B_{p,p}^{1-1/p}(S), \quad F \in B_{p,p}^{-1/p}(S), \quad 1 < p < \infty, \tag{240}$$

მაშინ (220)-(223) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი განზოგადებული ამონახსნი

$$(u_1, u_2) \in W_p^1(\Omega_1) \times \left(W_{p,loc}^1(\Omega_2) \cap z(\Omega_2)\right) \tag{241}$$

და u_1 და u_2 ფუნქციები წარმოიდგინება (225)-(226) ფორმულებით, სადაც g_1 და g_2 სიმკვრივეები მოცემულია (238)-(239) ტოლობებით. ამასთან

$$\|u_1\|_{W_p^1(\Omega_1)} \leq C_1 \left(\|f\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S)} + \|F\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S)}\right), \tag{242}$$

$$\|u_2\|_{W_p^1(\Omega_2 \cap B(R))} \leq C_2(R) \left(\|f\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S)} + \|F\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S)}\right), \tag{243}$$

სადაც C_1 დადებითი მუდმივია, R ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი რიცხვია, ისეთი რომ $\overline{\Omega}_1 \subset B(R)$ და $C_2(R)$ არის R-ზე დამოკიდებული მუდმივი.

შენიშვნა 21. თუ $p = 2$, მაშინ თეორემა 20 მართებულია აგრეთვე იმ შემთხვევაში, როცა S ლიპშიცის ზედაპირია (შეადარე [29], [33]).

4.2 შერეული საკონტაქტო ამოცანა

ვთქვათ, მთელი $\mathbb{R}^3$ სივრცე კვლავ გაყოფილია ორ ნაწილად რაიმე გლუვი შეკრული S ზედაპირით, რომელიც თავის მხრივ შედგება ორი S_T და S_C ზედაპირისგან: $S = \overline{S}_T \cup \overline{S}_C$, $S_T \cap S_C = \emptyset$. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ S_T და S_C ზედაპირები და $\ell = \partial S_T = \partial S_c$ წირი C^∞ სიგლუვისაა.

დავსვათ შემდეგი შერეული საკონტაქტო ამოცანა (M – N.C):
ვიპოვოთ ფუნქციები $u_1 \in W_p^1(\Omega_1)$, $u_2 \in W_{p,loc}^1(\Omega_2) \cap Z(\Omega_2)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებებს დისტრიბუციული აზრით

$$\left(\Delta + \rho_1 \omega^2\right) u_1 = 0 \quad \Omega_1\text{-ში}, \tag{244}$$

$$\left(\Delta + \rho_2 \omega^2\right) u_2 = 0 \quad \Omega_2\text{-ში}, \tag{245}$$

და შერეულ საკონტაქტო პირობებს S ზედაპირზე:

$$\{u_1\}^+ - \{u_2\}^- = f_1 \qquad S_T\text{-ზე}, \tag{246}$$

$$\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- = F_1 \qquad S_T\text{-ზე}, \tag{247}$$

$$\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ = F^{(+)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{248}$$

$$\left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- = F^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{249}$$

სადაც
$$f_1 \in B_{p,p}^{1-1/p}(S_T), \quad F_1 \in B_{p,p}^{-1/p}(S_T), \quad F^{(\pm)} \in B_{p,p}^{-1/p}(S_C), \tag{250}$$

ამასთან სრულდება თავსებადობის შემდეგი აუცილებელი პირობა

$$F := \begin{cases} F_1 & S_T\text{-ზე}, \\ F^{(+)} - F^{(-)} & S_C\text{-ზე}, \end{cases} \qquad F \in B_{p,p}^{-1/p}(S). \tag{251}$$

თუ (248) და (249) პირობების ნაცვლად მოცემულია დირიხლეს ტიპის პირობები

$$\{u_1\}^+ = f^{(+)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{252}$$
$$\{u_2\}^- = f^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{253}$$

მაშინ ასეთ შერეულ საკონტაქტო ამოცანას ვუწოდოთ $(M - D.C)$ ამოცანა. ამ შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ

$$f^{(\pm)} \in B_{p,p}^{1-1/p}(S_C), \tag{254}$$

$$f := \begin{cases} f_1 & S_T\text{-ზე}, \\ f^{(+)} - f^{(-)} & S_C\text{-ზე}, \end{cases} \qquad f \in B_{p,p}^{1-1/p}(S). \tag{255}$$

ჩვენ ჯერ შევისწავლით საკონტაქტო $(M - N.C)$ ამოცანას.

ვთქვათ, $\widetilde{f}_1$ არის f_1 ფუნქციის რაიმე ფიქსირებული გაგრძელება S_T-დან მთელ S ზედაპირზე სიგლუვის კლასის შენარჩუნებით,

$$\widetilde{f}_1 \in B_{p,p}^{1-1/p}(S), \quad r_{S_T}\widetilde{f}_1 = f_1. \tag{256}$$

მაშინ ნებისმიერი გაგრძელება წარმოდგება $f = \widetilde{f}_1 + g$ სახით, სადაც

$$g \in \widetilde{B}_{p,p}^{1-1/p}(S_C). \tag{257}$$

ცხადია, რომ (247)-(249) პირობები ეკვივალენტურია შემდეგი პირობებისა:

$$\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- = F \qquad S\text{-ზე}, \tag{258}$$
$$\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ + \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- = F^{(+)} + F^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{259}$$

სადაც F მოცემულია (251) ფორმულით.

ამასთან ერთად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\{u_1\}^+ - \{u_2\}^- = \widetilde{f}_1 + g, \tag{260}$$

სადაც g უცნობი ფუნქციაა.

(258) და (260) ტოლობები და ზემოთ მიღებული შედეგები გვაძლევს მოტივაციას იმისთვის, რომ $(M-N.C)$ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u_1(x)=V_1(g_1)(x), \qquad x\in\Omega_1, \tag{261}$$

$$u_2(x)=W_2(g_2)(x)+aV_2(g_2)(x), \quad x\in\Omega_2, \tag{262}$$

სადაც

$$g_1=\mathcal{P}^{-1}F-\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}\left(\widetilde{f}_1+g\right), \tag{263}$$

$$g_2=\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}F-\left(\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}+\mathcal{D}_2^{-1}\right)\left(\widetilde{f}_1+g\right), \tag{264}$$

სადაც g აკმაყოფილებს (257) ჩართვას და არის საძიებელი ფუნქცია, ხოლო ცნობილი F და $\widetilde{f}_1$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (251) და (256) ჩართვებს.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ $(M-N.C)$ ამოცანის (244), (245), (246), (258) პირობები სრულდება ავტომატურად, ხოლო დარჩენილი (259) პირობა იძლევა შემდეგ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებას საძიებელი g ფუნქციის მიმართ:

$$\left(-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_1\right)g_1+\left[\mathcal{L}_2+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_2\right)\right]g_2=F^{(+)}+F^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}. \tag{265}$$

თუ გავითვალისწინებთ (263) და (264) თანაფარდობებს, (265) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} r_{S_C}\Bigg\{ &-\left(-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_1\right)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}- \\ &-\left[\mathcal{L}_2+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_2\right)\right]\mathcal{D}_2^{-1}\left(\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}+I\right)\Bigg\}g=\Psi \quad S_C\text{-ზე}, \end{aligned} \tag{266}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \Psi=F^{(+)}+F^{(-)}-r_{S_C}\Bigg\{&\left(-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_1\right)\left(\mathcal{P}^{-1}F-\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}\widetilde{f}_1\right)+ \\ &+\left[\mathcal{L}_2+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_2\right)\right]\left(\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}F-\right. \\ &\left.-\mathcal{D}_2^{-1}\left(\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}+I\right)\widetilde{f}_1\right)\in B_{p,p}^{-1/p}(S)\,. \end{aligned} \tag{267}$$

შემოვიღოთ $\mathcal{Q}$ ოპერატორი

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}:=&-\left(-\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_1\right)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}- \\ &-\left[\mathcal{L}_2+a\left(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}_2\right)\right]\mathcal{D}_2^{-1}\left(\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}+I\right). \end{aligned} \tag{268}$$

$\mathcal{Q}$ ოპერატორს აქვს ასახვის შემდეგი თვისებები:

$$r_{S_c}\mathcal{Q}\ :\widetilde{H}_p^s(S_C)\to H_p^{s-1}(S_C), \tag{269}$$

$$:\widetilde{B}_{p,q}^s(S_C)\to B_{p,q}^s(S_C), \tag{270}$$

$$s\in\mathbb{R},\quad 1<p<\infty,\quad 1\le q\le\infty. \tag{271}$$

იმისათვის რომ შევისწავლოთ $r_{S_c}Q$ ოპერატორის ფრედჰოლმურობის თვისებები და დავადგინოთ მისი შებრუნებადობა, გამოვთვალოთ მისი მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო და გამოვიკვლიოთ მისი ნულ-სივრცე.

$\mathcal{Q}$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლოსთვის გვაქვს:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\mathcal{Q};x,\xi)&=\frac{1}{2}(-1)\,\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2;x,\xi)(-2)-\\&-\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2;x,\xi)(-2)\left[\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1;x,\xi)(-1)\,\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2;x,\xi)(-2)+1\right]=\\&=\mathfrak{S}(L_2;x,\xi)+2\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2;x,\xi)\left(-\frac{1}{2}+1\right)=2\mathfrak{S}(\mathcal{L}_2;x,\xi)=\\&=|\xi|>0,\quad \xi\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}.\end{aligned} \tag{272}$$

აქ გავითვალისწინეთ, რომ $\mathcal{K}_j$ და $\widetilde{\mathcal{K}}_j$ სუსტი სინგულარობის მქონე გულიანი ოპერატორებია და

$$\begin{gathered}\mathfrak{S}\left(\mathcal{P}^{-1};x,\xi\right)=-1,\quad \mathfrak{S}\left(\mathcal{D}_2^{-1};x,\xi\right)=-2,\\ \mathfrak{S}(\mathcal{L}_j,x,\xi)=\frac{|\xi|}{2},\quad \mathfrak{S}(\mathcal{H}_j,x,\xi)=-\frac{1}{2|\xi|},\ \ \forall x\in S,\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}.\end{gathered} \tag{273}$$

თეორემა A.1-ის გამოყენებით დავადგენთ, რომ თუ სრულდება შემდეგი უტოლობები

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{2}<s<\frac{1}{p}+\frac{1}{2}, \tag{274}$$

მაშინ (269) და (270) ოპერატორები ფრედჰოლმის ოპერატორებია ნულოვანი ინდექსით.

ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{Q}$ ოპერატორის გული ტრივიალურია პარამეტრების კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის, როცა $s=\frac{1}{2}$, $p=q=2$.

გავიხსენოთ, რომ $H_2^s\equiv B_{2,2}^s$.

ვთქვათ, $\widetilde{g}\in\widetilde{H}_2^{1/2}(S_C)$ არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი

$$r_{S_C}\mathcal{Q}\widetilde{g}=0\quad S_C\text{-ზე}, \tag{275}$$

სადაც $\mathcal{Q}$ განსაზღვრულია (268) ტოლობით, და ავაგოთ ფუნქციები (იხ. (261)-(264))

$$v_1(x)=V_1(h_1)(x),\quad x\in\Omega_1, \tag{276}$$

$$v_2(x)=W_2(h_2)(x)+aV_2(h_2)(x),\quad x\in\Omega_2, \tag{277}$$

$$h_1=-\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}\widetilde{g}, \tag{278}$$

$$h_2=-\mathcal{D}_2^{-1}\left(\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}+I\right)\widetilde{g}. \tag{279}$$

(275)-(279) თანაფარდობების ძალით მარტივად შევამოწმებთ, რომ v_1 და v_2 ამონახსნია ერთგვაროვანი $(M-N.C)$ ამოცანისა, სადაც $p=2$ ანუ სრულდება ჩართვები

$$v_1 \in W_2^{-1}(\Omega_1)\, W, \quad v_2 \in W_{2,loc}^1(\Omega_2) \cap Z(\Omega_2),$$

ერთგვაროვანი განტოლებები

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \rho_1 \omega^2\right) v_1 = 0 \quad \Omega_1\text{-ში}, \\ \left(\Delta + \rho_2 \omega^2\right) v_2 = 0 \quad \Omega_2\text{-ში}, \end{aligned}$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობები

$$\begin{aligned} \{v_1\}^+ - \{v_2\}^- = 0 \quad S_C\text{-ზე}, \\ \left\{\frac{\partial v_1}{\partial n}\right\}^+ + \left\{\frac{\partial v_2}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S_C\text{-ზე} \\ \left\{\frac{\partial v_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial v_2}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S\text{-ზე}. \end{aligned}$$

ამიტომ ერთადერთობის თეორემის ძალით

$$v_1(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \tag{280}$$

$$v_2(x) = 0, \quad x \in \Omega_2, \tag{281}$$

v_1 და v_2 ფუნქციების სტრუქტურის ძალით, (280) და (281) ტოლობებიდან დავასკვნით, რომ (276) და (277) ტოლობებით მოცემული v_1 და v_2 ფუნქციები ნულია შესაბამისად Ω_2 და Ω_1 არეებშიც. ამიტომ მივიღებთ

$$h_1 = 0 \quad S\text{-ზე}, \qquad h_2 = 0 \quad S\text{-ზე}. \tag{282}$$

(278) ფორმულიდან, თუ გამოვიყენებთ $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}_2$ და $\mathcal{D}_2$ ოპერატორების შებრუნებადობას, დავასკვნით

$$\widetilde{g} = 0 \quad S\text{-ზე},$$

რაც ამტკიცებს, რომ (269) და (270) ოპერატორების ნულ-სივრცეები ტრივიალურია და, მაშასადამე, ეს ოპერატორები შებრუნებადია, თუ s და p პარამეტრები აკმაყოფილებენ (274) უტოლობებს.

ამ შედეგებს მივყავართ არსებობის შემდეგ დებულებამდე.

თეორემა 22. თუ სრულდება (250), (251) პირობები და $\frac{4}{3} < p < 4$, მაშინ შერეულ საკონტაქტო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი

$$(u_1, u_2) \in W_p^1(\Omega_1) \times \left[W_{p,loc}^1(\Omega_2) \cap Z(\Omega_2)\right],$$

რომელიც წარმოიდგინება (261)-(264) ფორმულებით, სადაც $g \in \widetilde{B}_{p,p}^{1-1/p}(S_C)$ არის ცალსახად ამოხსნადი (266) ფსევდოდიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. ამასთან

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{W_p^1(\Omega_1)} \leq C_1 \Big(&\|f_1\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S_T)} + \|F_1\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_T)} \\ &+ \left\|F^{(+)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)} + \left\|F^{(-)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)} \Big), \end{aligned} \tag{283}$$

$$\begin{aligned}\|u_2\|_{W_p^1(\Omega_2 \cap B(R))} \leq C(R) \Big(&\|f_1\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S_T)} + \|F_1\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_T)} \\ &+ \left\|F^{(+)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)} + \left\|F^{(-)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)} \Big), \end{aligned} \tag{284}$$

სადაც C_1 დადებითი მუდმივია, R ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ისეთი რომ $\overline{\Omega}_1 \subset B(R)$ და $C_2(R)$ არის R დამოკიდებული მუდმივი.

დამტკიცება. ამონახსნის არსებობა $p \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ინდექსისთვის გამომდინარეობს (261)-(264) ფორმულებიდან და (270) ოპერატორთა შებრუნებადობიდან, რადგან, თუ $s = 1 - 1/p$ და $p \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$, მაშინ სრულდება (274) უტოლობები.

რაც შეეხება ამონახსნის ერთადერთობას p-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ინტერვალიდან, იგი შეიძლება ასე ვაჩვენოთ.

თუ $(u_1, u_2) \in W_p^1(\Omega_1) \times \left(W_{p.loc}^1(\Omega_2) \cap Z(\Omega_2)\right)$, მაშინ თეორემა 20-ის თანახმად u_1 და u_2 წარმოიდგინება (225), (226) სახით, სადაც g_1 და g_2 მოიცემა (263)-(264) სახით, რომელშიც

$$F := \left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- \in B_{p,p}^{-1/p}(S), \tag{285}$$

$$f := \{u_1\}^+ - \{u_2\}^- \in B_{p,p}^{1-1/p}(S). \tag{286}$$

ერთგვაროვანი $(M - N.C)$ ამოცანის პირობების თანახმად $F = 0$ S-ზე, და $r_{S_C} f = 0$ S_C-ზე. ამიტომ

$$f \in \widetilde{B}_{p,p}^{1-1/p}(S_C). \tag{287}$$

შედეგად მივიღებთ, რომ ერთგვაროვანი $(M - N.C)$ ამოცანის ამონახსნთა წყვილი, (u_1, u_2) წარმოდგენადია (225)-(226) სახით, სადაც

$$g_1 = -\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1} f \qquad S\text{-ზე}, \tag{288}$$

$$g_2 = -\mathcal{D}_2^{-1}\left[\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1} + I\right] f \quad S\text{-ზე}, \tag{289}$$

რაც ემთხვევა (276)-(279) წარმოდგენებს.

გავითვალისწინოთ, რომ ერთგვაროვანი $(M - N.C)$ ამოცანის შემთხვევაში გვაქვს ერთგვაროვანი პირობა

$$\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ + \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S_C\text{-ზე},$$

რომელსაც მივყავართ ერთგვაროვან ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებაზე

$$r_{S_C}\,\mathcal{Q}\,f = 0 \quad S_C\text{-ზე}, \tag{290}$$

ამ განტოლებას კი, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, $\widetilde{B}^{1-1/p}_{p,p}(S_c)$ კლასში გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, შემდეგი ოპერატორის

$$r_{S_C}\mathcal{Q} : \widetilde{B}^{1-1/p}_{p,p}(S_C) \to B^{-1/p}_{p,p}(S_C)$$

შებრუნებადობის გამო, რადგან, თუ $s = 1 - 1/p$ და $\frac{4}{3} < p < 4$, მაშინ კმაყოფილდება (274) პირობები. ამრიგად (290)-დან მივიღებთ, რომ $f = 0$ S-ზე და (288)-(289) ტოლობებიდან დავასკვნით, რომ $g_1 = g_2 = 0$. ამიტომ საბოლოოდ (225)-(226) ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$u_1 = 0 \ \ \Omega_1\text{-ში} \quad \text{და} \quad u_2 = 0 \ \ \Omega_2\text{-ში}.$$

ამით ამონახსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია, როდესაც $p \in \left(\frac{4}{3}, 4\right)$.

თეორემის ბოლო ნაწილი, ნორმების შეფასების შესახებ, გამომდინარეობს პოტენციალების თვისებებისა და შესაბამისი სასაზღვრო ოპერატორების შებრუნებადობიდან. □

შენიშვნა 23. თუ $p = 2$ მაშინ თეორემა 22 მართებულია აგრეთვე იმ შემთხვევაშიც, როცა S, S_T და S_C ლიპშიცის ზედაპირია (შეადარე [29], [33]).

5 შენიშვნები პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდის შესახებ

ამ პარაგრაფში ჩვენ გამოვიკვლევთ ეგრეთ წოდებულ პირდაპირ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის ზოგიერთ ასპექტს აკუსტიკური ტალღების გავრცელების სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიაში (იხ. [47]).

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ძირითადი შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები სამეცნიერო ლიტერატურაში ფართოდაა გაანალიზებული სხვადსხვა მეთოდით (იხილეთ [1], [2], [3], [4], [29], [33]) კარგადაა ცნობილი, რომ ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ცალსახად ამოხსნადი გარე დირიხლეს და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანები პირდაპირი მეთოდით არ დაიყვანება ეკვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებებზე, რომლებიც ცალსახად იქნება ამოხსნადი რხევითი პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. რხევითი პარამეტრის ასეთ გამონაკლის მნიშვნელობებს ეწოდება რეზონანსული სიხშირეები. რეზონანსული სიხშირეების შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორები, რომლებიც მიიღება

პირდაპირი მეთოდის გამოყენებით და ეფუძნება ჰელმჰოლცის განტოლების ამონახსნის ზოგად ინტეგრალურ წარმოდგენას, არ არიან შებრუნებადი ოპერატორები. მიუხედავად ამისა, შესაბამისი არაერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლებები ყოველთვის ამოხსნადია, თუმცა, სამწუხაროდ, ამონახსნები არ განისაზღვრება ცალსახად. ისინი განისაზღვრება შესაბამისი ერთგვაროვანი ინტეგრალური ოპერატორის ნულ-სივრცის ელემენტების წრფივი კომბინაციის სიზუსტით. ამ ნულ-სივრცის ელემენტები წარმოადგენენ გარკვეული შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის არატრივიალური ამონახსნების სასაზღვრო მნიშვნელობებს ან არატრივიალური ამონახსნების ნორმალით წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობებს. ნაშრომში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ არაერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებს შორის არსებობს ერთადერთი ამონახსენი, რომელსაც ფიზიკური შინაარსი გააჩნია და შეესაბამება გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის სასაზღვრო კვალს ანუ (სასაზღვრო მნიშვნელობას), ან ამ ამონახსნის ნორმალის გასწვრივ წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობას. საილუსტრაციოდ ჩვენ დეტალურად განვიხილავთ დირიხლეს გარე ამოცანას ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში, თუმცა უნდა აღვნიშნოთ, რომ აღწერილი მეთოდი და შესაბამისი მსჯელობები შეიძლება წარმატებით იქნას გამოყენებული სხვა ამოცანებისთვისაც, კერძოდ, ნეიმანის, რობინის და შერეული ამოცანებისათვის. ეს მიდგომა შეიძლება განზოგადდეს ასევე მდგრადი დრეკადი რხევის ამოცანებისათვის იზოტროპული და ანიზოტროპული სხეულების შემთხვევაში. (იხილე, მაგ. [14], [38], [48], [49]). ნაშრომის ფინალურ ნაწილში ჩვენ გავაანალიზებთ პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლების მოდიფიცირებულ მეთოდს რომელსაც დირიხლეს და ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანები დაჰყავს ეკვივალენტურ ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ ან სინგულარულ ინტეგრო-დიფერენციალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებაზე.

5.1 დირიხლეს და ნეიმანის შიგა ამოცანები

განვიხილოთ დირიხლეს ერთგვაროვანი შიგა ამოცანა:

$$(\Delta + \omega^2)\, u(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{291}$$

$$\{u(x)\}^+ = 0, \qquad x \in S. \tag{292}$$

ამ ამოცანას $W_2^1(\Omega^+)$ გააჩნია ან მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი ან წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სასრული რაოდენობა $\{u_k\}_{k=1}^N$, სადაც $N \geqslant 1$ ნატურალური რიცხვია და ზოგადი წარმოდგენის (28) ფორმულის თანახმად არატრივიალური ამონახსნები წარმოიდგინება შემდეგი ფორმით

(იხ. მაგ., [1], [29])

$$u_k(x) = V\big(\{\partial_n u_k\}^+\big)(x), \qquad x \in \Omega^+, \quad k = \overline{1,N}, \tag{293}$$

სადაც $\{\partial_n u_k\}^+ \in H_2^{-1/2}(S)$.

რადგან $0 = \big\{V\big(\{\partial_n u\}^+\big)\big\}^+ = \big\{V\big(\{\partial_n u\}^+\big)\big\}^-$, ამიტომ

$$V\big(\{\partial_n u_k\}^+\big)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \quad k = \overline{1,N}, \tag{294}$$

და $\big\{\{\partial_n u_k\}^+\big\}_{k=1}^N$ ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია S ზედაპირზე. (294) ტოლობები გამომდინარეობს დირიხლეს გარე ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობის თეორემიდან, მაშინ როცა $\big\{\{\partial_n u_k\}^+\big\}_{k=1}^N$ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა შედეგია (293) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობისა.

აღვნიშნოთ

$$\psi_k = \{\partial_n u_k\}^+, \quad k = \overline{1,N}. \tag{295}$$

ცხადია, რომ ფუნქციათა სისტემა

$$\big\{u_k(x),\ x \in \Omega^+\big\}_{k=1}^N \tag{296}$$

ბაზისია (291)-(292) დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივ ვექტორთა სივრცეში.

სრულიად ანალოგიურად შიგა ერთგვაროვანი ნეიმანის ამოცანისათვის

$$(\Delta + \omega^2)\, u(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{297}$$

$$\{\partial_n u(x)\}^+ = 0, \qquad x \in S \tag{298}$$

მართებულია შემდეგი (იხილე, მაგ., [1], [29]):

(i) (297)-(298) ამოცანას $W_2^1(\Omega^+)$ სივრცეში გააჩნია ან მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი ან წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სასრული რაოდენობა $\{v_k\}_{k=1}^M$, სადაც $M \geqslant 1$ ნატურალური რიცხვია. კვლავ ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის (28) ფორმულის თანახმად არატრივიალური ამონახსნები წარმოიდგინება შემდეგი ფორმით (იხილე, მაგ., [1], [29])

$$v_k(x) = -W\left(\{v_k\}^+\right)(x), \qquad x \in \Omega^+, \quad k = \overline{1,M}; \tag{299}$$

(ii) (40) ფორმულისა და ნეიმანის გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის თანახმად ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$W\big(\{v_k\}^+\big)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \quad k = \overline{1,M}; \tag{300}$$

(iii) ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$, სადაც

$$\varphi_k = \{v_k\}^+, \quad k = \overline{1, M}, \tag{301}$$

წრფივად დამოუკიდებელია S ზედაპირზე. მართლაც, თუ $\sum\limits_{k=1}^{M} c_k \varphi_k = 0$ S-ზე, მაშინ $\sum\limits_{k=1}^{M} c_k v_k(x) = -W\Big(\sum\limits_{k=1}^{M} c_k \varphi_k\Big) = 0$ Ω^+ არეში, რაც ეწინააღმდეგება $\{v_k\}_{k=1}^M$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას Ω^+ არეში.

შევნიშნოთ, რომ თუ ω არ არის რეზონანსული სიხშირე, მაშინ, როგორც დირიხლეს, ისე ნეიმანის ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ანუ $N = 0$ და $M = 0$.

5.2 ტრადიციული მიდგომა გარე ამოცანებში

განვიხილოთ დირიხლეს არაერთგვაროვანი გარე ამოცანა: ვიპოვოთ ფუნქცია $u \in H^{1,0}_{2,\,loc}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ ისეთი, რომ

$$(\Delta + \omega^2)\, u\,(x) \,=\, f(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{302}$$

$$\{u\,(x)\}^- = \varphi_0\,(x), \qquad x \in S, \tag{303}$$

სადაც

$$f \in L_{2,comp}(\Omega^-), \qquad \varphi_0 \in H_2^{\frac{1}{2}}(S). \tag{304}$$

5.2.1 პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე დაფუძნებული მიდგომა

ამონახსნის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის (29) ფორმულის ძალით მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ თანაფარდობას

$$u(x) - V\big(\{\partial_n u\}^-\big)(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W\,(\varphi_0)(x), \quad x \in \Omega^-. \tag{305}$$

ამ ფორმულიდან S ზედაპირზე კვალის აღებით Ω^- არიდან, მივიღებთ პირველი გვარის ფრედგოლმის ინტეგრალურ განტოლებას $\widetilde{\psi} = \{\partial_n u\}^-$ ფუნქციის მიმართ S ზედაპირზე.

$$\mathcal{H}\,\widetilde{\psi} = -\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^- + 2^{-1}\,\varphi_0 + \mathcal{K}\,(\varphi_0). \tag{306}$$

შევნიშნოთ, რომ (306) ტოლობის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$-\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^- + 2^{-1}\,\varphi_0 + \mathcal{K}\,(\varphi_0) = \big\{-\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W\,(\varphi_0)\big\}^+ \qquad S\text{-ზე}, \tag{307}$$

რადგან $f \in L_{2,comp}(\Omega^-)$ ფუნქციისთვის მოცულობითი პოტენციალი $\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)$ ეკუთვნის $H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ სივრცეს და

$$\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^+ = \Big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\Big\}^-, \qquad \big\{\partial_n \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^+ = \big\{\partial_n \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^- \quad S\text{-ზე}. \tag{308}$$

ამრიგად (306) განტოლება შეიძლება გადაიწეროს შემდეგნაირად

$$\mathcal{H}\,\widetilde{\psi} = \Psi \qquad S\text{-ზე}, \tag{309}$$

სადაც

$$\Psi(x) := \big\{ -\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) + W(\varphi_0)(x)\big\}^+, \quad x \in S. \tag{310}$$

აქ წამოიჭრება ორი კითხვა:

კითხვა 1. არის (309) განტოლება ამოხსნადი $H_2^{-1/2}(S)$ სივრცეში ნებისმიერი $f \in L_{2,comp}(\Omega^-)$ და $\varphi_0 \in H_2^{1/2}(S)$ ფუნქციებისთვის?

კითხვა 2. როგორც უკვე ვაჩვენეთ პარაგრაფ 3.1-ში, (302)-(303) სასაზღვრო ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი მონაცემებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (304) პირობებს და ამონახსნისთვის მართებულია ჩართვა $u \in H^{1,0}_{2,loc}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$. ინტერესის საგანია, რა კავშირია (309) ინტეგრალური განტოლების $\widetilde{\psi}$ ამონახსნსა და ნორმალით წარმოებულის $\{\partial_n u\}^-$ კვალს შორის? ეს საკითხი განსაკუთრებით საინტერესოა, როდესაც ω არის რეზონანსული სიხშირე დირიხლეს შიგა ამოცანისათვის, რაც იმას ნიშნავს, რომ (309) ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას $(\Psi = 0)$ გააჩნია არატრივიალური ამონახსენი. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში, თუ არაერთგვაროვანი (306) განტოლება ამოხსნადია, მაშინ ამონახსენი არ განისაზღვრება ცალსახად. გამოსაკვლევია, როგორ უნდა შეირჩეს ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლიდან ისეთი $\widetilde{\psi}$, რომელსაც ექნება ფიზიკური მნიშვნელობა და დაემთხვევა ცალსახად განსაზღვრულ ფუნქციას – ფუნქციის ნორმალური წარმოებულის კვალს $\{\partial_n u\}^-$.

ქვემოთ ჩვენ გავაანალიზებთ პასუხებს ორივე კითხვაზე.

დავიწყოთ იმის აღნიშვნით, რომ ოპერატორი

$$\mathcal{H} \;:\; H^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S) \tag{311}$$

არის ნულოვანი ინდექსის მქონე ფრედჰოლმის ოპერატორი. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\mathcal{H}_0$ ოპერატორი

$$\mathcal{H}_0 \;:\; H^{-1/2}(S) \to H^{1/2}(S),$$

რომელიც შეესაბამება სიხშირის $\omega=0$ მნიშვნელობას, შებრუნებადია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $\mathcal{H}_0$ ოპერატორი, რომელიც წარმოშობილია ჰარმონიული მარტივი ფენის პოტენციალით, შებრუნებადია. (იხ. [29], [50], [51]).

მეორე მხრივ, თუ ω არის რეზონანსული სიხშირე დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანისთვის Ω^+ არის შემთხვევაში, მაშინ (294) და (295) თანაფარდობებიდან დავასკვნით, რომ

$$\mathcal{H}(\psi_k)=0 \quad S\text{-ზე}, \quad k=1,\dots,N, \tag{312}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\dim\ker\mathcal{H}\geqslant N. \tag{313}$$

თავის მხრივ, თუ $\widetilde{\psi}$ ფუნქცია ამონახსნია ერთგვაროვანი $\mathcal{H}(\widetilde{\psi})=0$ განტოლებისა S-ზე, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ შესაბამისი მარტივი ფენის პოტენციალი $V(\widetilde{\psi})$ ამონახსნია დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანისა Ω^+ არეში და ამიტომ

$$V(\widetilde{\psi})(x)=\sum_{k=1}^{N}c_k\,u_k(x) \quad \Omega^+\text{-ში}, \tag{314}$$

რადგან $\{u_k(x),\ x\in\Omega^+\}_{k=1}^N$ ფუნქციათა სისტემა ბაზისია (291)-(292) დირიხლეს ერთგვაროვანი ამოცანის საკუთრივ ფუნქციათა სივრცეში, რომელიც შეესაბამება ω რეზონანსულ სიხშირეს.

მარტივი ფენის $V(\widetilde{\psi})$ პოტენციალის უწყვეტობის გამო S ზედაპირზე გადასვლისას და დირიხლეს გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით დავადგენთ, რომ

$$V(\widetilde{\psi})(x)=0, \quad x\in\Omega^-. \tag{315}$$

(314) და (315) ტოლობებიდან (295) გათვალისწინებით მივიღებთ

$$-\widetilde{\psi}=\{\partial_n V(\widetilde{\psi})\}^+-\{\partial_n V(\widetilde{\psi})\}^-=\sum_{k=1}^{N}c_k\,\{\partial_n u_k\}^+=\sum_{k=1}^{N}c_k\,\psi_k \quad S\text{-ზე}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\dim\ker\mathcal{H}\leqslant N$, რაც (313) თანაფარდობასთან ერთად გვაძლევს

$$\dim\ker\mathcal{H}=N \quad \text{და} \quad \{\psi_k\}_{k=1}^N \text{ ბაზისია } \ker\mathcal{H}\text{-ში}. \tag{316}$$

მარტივია იმის ჩვენება, რომ თუ $\widetilde{\psi}$ არის შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი

$$\mathcal{H}\,\widetilde{\psi}=0 \quad S\text{-ზე},$$

მაშინ მისი კომპლექსურად შეუღლებული $\overline{\widetilde{\psi}}$ ფუნქცია ამონახსენი იქნება შეუღლებული ინტეგრალური განტოლებისა

$$\mathcal{H}^* \overline{\widetilde{\psi}} = 0 \quad S\text{-ზე},$$

სადაც $\mathcal{H}^*$ არის $\mathcal{H}$-ის შეუღლებული ოპერატორი,

$$\mathcal{H}^* g\,(x) = \int\limits_S \overline{\Gamma(x-y,\omega)}\, g\,(y)\, dS = \overline{\mathcal{H}\,\overline{g}}\,(x). \tag{317}$$

ამიტომ $\{\psi^*_k\}_{k=1}^N$ ფუნქციათა სისტემა არის $\mathcal{H}^* : H_2^{-1/2}(S) \to H_2^{1/2}(S)$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისი,

$$\{\psi^*_k\}_{k=1}^N \equiv \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^N = \Big\{ \{\overline{\partial_n\, u_k}\}^+ \Big\}_{k=1}^N. \tag{318}$$

არაერთგვაროვანი (306) (ანუ (309)) ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\big\langle \Psi\,, \overline{\psi^*_k} \big\rangle_S = \Big\langle \big\{ -\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0) \big\}^+ ,\, \psi_k \Big\rangle_S = 0, \quad k = \overline{1,N}. \tag{319}$$

(318)-ის გათვალისწინებით (319) ტოლობები ასე გადაიწერება

$$\Big\langle \big\{ -\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0) \big\}^+ ,\, \big\{\partial_n u_k\big\}^+ \Big\rangle = 0, \quad k = \overline{1,N}. \tag{320}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$v\,(x) := -\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\,(x) + W\,(\varphi_0)\,(x), \qquad x \in \Omega^+. \tag{321}$$

ცხადია, რომ

$$A(\partial,\omega) v\,(x) \equiv \big(\Delta + \omega^2\big)\, v\,(x) = 0 \qquad \Omega^+\text{-ში}$$

(321) ტოლობისა და თეორემა 4-ის ძალით. ამიტომ გრინის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega^+} \big[A(\partial,\omega) v\, u_k - v\, A(\partial,\omega) u_k \big]\, dy \\ &\qquad = \big\langle \{\partial_n\, v\}^+ ,\, \{u_k\}^+ \big\rangle_S - \big\langle \{v\}^+ ,\, \{\partial_n u_k\}^+ \big\rangle_S\,, \end{aligned} \tag{322}$$

საიდანაც (320) ტოლობა გამომდინარეობს ნებისმიერი $f \in L_{2,comp}(\Omega^-)$ და $\varphi_0 \in H^{1/2}(S)$ ფუნქციებისათვის.

ამრიგად, ზემოთ დასმულ კითხვა 1-ს აქვს დადებითი პასუხი.

ახლა გადავიდეთ კითხვა 2-ის გაანალიზებაზე.

ზემოთ მიღებული შედეგებიდან (316)-ის თანახმად მივიღებთ, რომ (306) ინტეგრალური განტოლების ზოგადი ამონახსენი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\widetilde{\psi} = \psi_0 + \sum_{k=1}^N c_k\, \psi_k, \tag{323}$$

სადაც ψ_0 არის (306) არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსენი, c_k ნებისმიერი კომპლექსური მუდმივებია, ხოლო $\{\psi_k\}_1^N$ არის $\ker\mathcal{H}$-ის ბაზისი, ψ_k განსაზღვრულია (295) თანაფარდობით, სადაც $\{u_k(x),\ x \in \Omega^+\}_{k=1}^N$ არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი (291)-(292) ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების სივრცის ბაზისი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ შესაძლებელია c_k პარამეტრების ეფექტურად შერჩევა ისე, რომ (323) ტოლობით განსაზღვრული $\widetilde{\psi}$ ფუნქცია დაემთხვეს S-ზე ცალსახად განსაზღვრულ $\{\partial_n u\}^-$ ფუნქციას, რომელიც თავის მხრივ (306) ინტეგრალური განტოლების ამონახსნია.

ამ მიზნით ავაგოთ შემდეგი ფუნქცია

$$U(x) = V\left(\psi_0 + \sum_{k=1}^N c_k\,\psi_k\right)(x) + \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W(\varphi_0)(x), \quad x \in \Omega^+. \quad (324)$$

(306) და (323) თანაფარდობების გათვალისწინებით მარტივად შევამოწმებთ, რომ U ფუნქცია ამონახსნია შემდეგი დირიხლეს ერთგვაროვანი შიგა ამოცანის:

$$\Delta U(x) + \omega^2 U(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad (325)$$

$$\{U(x)\}^+ = 0, \quad x \in S. \quad (326)$$

შედეგად მივიღებთ, რომ U წარმოდგენადია ასე

$$U(x) = \sum_{k=1}^N d_k\,u_k(x) \quad \Omega^+\text{-ში}, \quad (327)$$

სადაც d_k კომპლექსური მუდმივებია, ხოლო u_k არის ზემოთ შემოტანილი დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი (291)-(292)ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების სივრცის ბაზისი.

(295) ტოლობის შესაბამისად, (293) თანაფარდობიდან მივიღებთ

$$V(\psi_k) = u_k \quad \Omega^+\text{-ში}, \quad (328)$$

და შედეგად (324)-დან დავასკვნით

$$U(x) \equiv \sum_{k=1}^N c_k\,u_k(x) + V(\psi_0)(x) + \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W(\varphi_0)(x) \quad \Omega^+\text{-ში}. \quad (329)$$

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ თუ U ორთოგონალურია ყველა u_k ფუნქციასთან $L_2(\Omega^+)$ აზრით, მაშინ იგი იქნება იგიურად ნულის ტოლი Ω^+ არეში (327)-ის თანახმად.

(329) ტოლობის ძალით, ორთოგონალობის პირობას $(U, u_j)_{L_2(\Omega^+)} = 0$, $j = 1, \ldots, N$, მივყავართ შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე c_k პარამეტრების მიმართ:

$$\sum_{k=1}^N b_{jk}\,c_k = b_j, \qquad j = \overline{1, N}, \quad (330)$$

სადაც

$$b_{jk}=(u_k,u_j)_{L_2(\Omega^+)},\qquad b_j=-(F,u_j)_{L_2(\Omega^+)}\,, \tag{331}$$

$$F(x):=V(\psi_0)(x)+\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x)-W(\varphi_0)(x)\,,\quad x\in\Omega^+. \tag{332}$$

შევნიშნოთ, რომ გრამის დეტერმინანტი არანულოვანია, $\det[b_{jk}]_{N\times N}\neq 0$, რადგან $\{u_k\}_1^N$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ამიტომ (330) სისტემიდან c_k კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრება. აღვნიშნოთ ეს ამონახსნი $c_k^{(0)}$-ით, ხოლო $U^{(0)}(x)$-ით კი (324) ტოლობით განსაზღვრული შესაბამისი ფუნქცია, რომელშიც c_k-ს მაგიერ ჩაწერილია $c_k^{(0)}$ პარამეტრები. მაშინ ცხადია, რომ გვაქვს

$$\begin{aligned}U^{(0)}(x)=V\Big(\psi_0(x)+\sum_{k=1}^{N}c_k^{(0)}\,\psi_k\Big)(x)&\\ +\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x)-W(\varphi_0)(x)=0,&\quad x\in\Omega^+.\end{aligned} \tag{333}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\psi^{(1)}:=\psi_0+\sum_{k=1}^{N}c_k^{(0)}\,\psi_k\quad S\text{-ზე}. \tag{334}$$

ცხადია, რომ $\psi^{(1)}$ არის (306) განტოლების ამონახსენი, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება:

$$V\big(\psi^{(1)}\big)(x)+\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x)-W(\varphi_0)(x)=0,\quad x\in\Omega^+. \tag{335}$$

მარტივი საჩვენებელია, რომ (335) თვისება ცალსახად განსაზღვრავს $\psi^{(1)}$ ფუნქციას. მართლაც, თუ ორი $\psi^{(1)}$ და $\psi^{(2)}$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (335) ტოლობას, მაშინ სხვაობა $V(\psi^{(1)})-V(\psi^{(2)})=V(\psi^{(1)}-\psi^{(2)})$ იგიურად ნულის ტოლია Ω^+ არეში. მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობისა და დირიხლეს გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით მარტივად დავასკვნით, რომ $V(\psi^{(1)}-\psi^{(2)})=0$ მთელს $\mathbb{R}^3$ სივრცეში. აქედან კი მარტივად დავასკვნით, რომ $\psi^{(1)}-\psi^{(2)}=0$ S ზედაპირზე წყვეტის (38) თანაფარდობების ძალით.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\psi^{(1)}$ ფუნქცია S ზედაპირზე ემთხვევა ნორმალით წარმოებულის $\{\partial_n u\}^-$ კვალს. მართლაც, თუ (305) ტოლობაში $\{\partial_n u\}^-$-ის მაგიერ ჩავსვამთ $\psi^{(1)}$ ფუნქციას, მივიღებთ:

$$u(x)=\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x)-W(\varphi_0)(x)+V(\psi^{(1)})(x),\quad x\in\Omega^-. \tag{336}$$

თუ გავითვალისწინებთ (38), (40) ფორმულებს და მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\mathrm{P}_{\Omega^-}\in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ როდესაც $f\in L_{2,comp}(\Omega^-)$, (335) ტოლობის

გათვალისწინებით ჩვენ დავადგენთ შემდეგ თანაფარდობას

$$\begin{aligned}\{\partial_n u\}^- &= \big\{\partial_n \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^- - \big\{\partial_n W(\varphi_0)\big\}^- + 2^{-1}\,\psi^{(1)} + \widetilde{\mathcal{K}}\psi^{(1)}\\ &= \big\{\partial_n \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^+ - \big\{\partial_n W(\varphi_0)\big\}^+ + \big\{-2^{-1}\psi^{(1)} + \widetilde{\mathcal{K}}\psi^{(1)}\big\} + \psi^{(1)}\\ &= \big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0) + V(\psi^{(1)})\big]\big\}^+ + \psi^{(1)} = \psi^{(1)}. \qquad (337)\end{aligned}$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ $\psi^{(1)}$ ემთხვევა $\{\partial_n u\}^-$ კვალს და მაშასადამე, კითხვა 2-საც გააჩნია დადებითი პასუხი.

შევნიშნოთ, რომ (336) ტოლობის მარჯვენა მხარე არ შეიცვლება, თუ $\psi^{(1)}$ ფუნქციის მაგიერ ავიღებთ (306) განტოლების ნებისმიერ $\widetilde{\psi}$ ამონახსნს, რადგან $\psi^{(1)} - \widetilde{\psi}$ ეკუთვნის $\{\psi_k\}_1^N \subset \ker\mathcal{H}$ სისტემის წრფივ გარსს, რის გამოც $V(\psi_k)(x) = 0$, $x \in \Omega^-$, (295) და (294) ტოლობების ძალით. ამის გამო $V(\psi^{(1)})(x) = V(\widetilde{\psi})(x)$ Ω^--ში. ზემოთ მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ (306) განტოლების უსასრულო რაოდენობა ამონახსნებს შორის ერთადერთი $\psi^{(1)}$ ფუნქცია არსებობს, რომელსაც აქვს თვისება $\psi^{(1)} = \{\partial_n u\}^-$, სადაც u არის დირიხლეს არაერთგვაროვანი (302)-(303) გარე ამოცანის ერთადერთი ამონახსენი.

5.2.2 მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე დაფუძნებული მიდგომა

დირიხლეს იმავე გარე ამოცანისათვის (იხ. (302)-(303)) აქ ჩვენ განვიხილავთ ფრედჰოლმის მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე დაფუძნებულ პირდაპირ მეთოდს. ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენიდან გვაქვს

$$u(x) - V\big(\{\partial_n u\}^-\big)(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W(\varphi_0)(x), \quad x \in \Omega^-, \qquad (338)$$

სადაც f და φ_0 კვლავ აკმაყოფილებენ (304) პირობებს.

გამოვითვალოთ (338) ტოლობის ნორმალით წარმოებულის ზღვრული მნიშვნელობა S ზედაპირზე Ω^- არიდან

$$-2^{-1}\big\{\partial_n u\big\}^- + \widetilde{\mathcal{K}}\big\{\partial_n u\big\}^- = \big\{\partial_n\big[-\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big]\big\}^- \quad S\text{-ზე}. \qquad (339)$$

თეორემა 4-ის და (304) პირობის თანახმად (339) ტოლობის მარჯვენა მხარისათვის შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\Phi := \big\{\partial_n\big[-\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big]\big\}^- = \big\{\partial_n\big[-\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big]\big\}^+ \quad S\text{-ზე}. \quad (340)$$

უცნობი $\{\partial_n u\}^-$ ფუნქცია აღვნიშნოთ $\widetilde{\varphi}$-ით,

$$\widetilde{\varphi} := \{\partial_n u\}^- \in H_2^{-1/2}(S)\,. \qquad (341)$$

ცხადია, რომ უცნობი $\widetilde{\varphi}$ ფუნქციისთვის გვაქვს (339) განტოლება, რომელიც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\big(-2^{-1}\,I+\widetilde{\mathcal{K}}\big)\,\widetilde{\varphi}=\Phi\quad S\text{-ზე}. \tag{342}$$

შევნიშნოთ, რომ $-2^{-1}\,I+\widetilde{\mathcal{K}}$ ოპერატორი წარმოშობილია მარტივი ფენის პოტენციალის ნორმალით წარმოებულის ზღვრული მნიშვნელობიდან (იხილეთ თეორემა 4). კარგადაა ცნობილი, რომ მას აქვს ასახვის შემდეგი თვისება:

$$-2^{-1}\,I+\widetilde{\mathcal{K}}\;:\;H_2^{-1/2}(S)\to H_2^{-1/2}(S) \tag{343}$$

და იგი არის ფრედჰოლმის ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, მაგრამ, ზოგადად, იგი არ არის შებრუნებადი. კერძოდ, იგი არ არის შებრუნებადი თუ ω პარამეტრი არის ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის საკუთრივი მნიშვნელობა Ω^+ არისათვის (იხ., მაგ., [1], [29]).

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ნეიმანის (297)-(298) შიგა სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია სასრული რაოდენობა წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისა ω პარამეტრის რეზონანსული მნიშვნელობებისათვის. (წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნთა ამ რაოდენობას ეწოდება ω პარამეტრის რანგი). აღვნიშნოთ ამ ნულ-სივრცის განზომილება M-ით და ვთქვათ, რომ $\big\{v_k\big\}_{k=1}^{M}$ სისტემა წარმოადგენს მის ბაზისს $H_2^1(\Omega^+)$ სივრცეში. აშკარაა, რომ ისინი წარმოდგენადია ორმაგი ფენის (299) პოტენციალით Ω^+ არეში. გავიხსენოთ, რომ

$$\varphi_k=\big\{v_k\big\}^+\in H_2^{1/2}(S),\quad k=1,\cdots,M, \tag{344}$$

ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე და (300) თანაფარდობის თანახმად გვაქვს

$$W(\varphi_k)(x)=0\quad \Omega^-\text{-ში},\quad k=1,\cdots,M. \tag{345}$$

თუ ავიღებთ (345) ტოლობის კვალს Ω^- -დან, მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\big(-2^{-1}\,I+\mathcal{K}\big)\,\varphi_k=0\quad S\text{-ზე},\;\; k=1,\cdots,M. \tag{346}$$

$\mathcal{K}$ ოპერატორის შეუღლებული $\mathcal{K}^*$ ოპერატორისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\mathcal{K}^*\,\psi=\overline{\widetilde{\mathcal{K}}\,\overline{\psi}}\,. \tag{347}$$

ამიტომ, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $-2^{-1}\,I+\mathcal{K}$ და $-2^{-1}\,I+\mathcal{K}^*$ ოპერატორები ნულოვანი ინდექსის მქონე ურთიერთშეუღლებული ოპერატორებია (347) და (346) ტოლობების ძალით დავასკვნით:

$$\dim\ker\big(-2^{-1}\,I+\mathcal{K}\big)=\dim\ker\big(-2^{-1}\,I+\widetilde{\mathcal{K}}\big)\geqslant M. \tag{348}$$

(348) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (342) განტოლება უპირობოდ ამოხსნადი არაა ზოგადად და (342) განტოლებიდან $\widetilde{\varphi}$ არ განისაზღვრება ცალსახად.

როგორც ზემოთ, აქაც წამოიჭრება ორი კითხვა:

კითხვა 3. არის თუ არა (342) განტოლება ამოხსნადი $H_2^{-1/2}(S)$ სივრცეში ნებისმიერი $f \in L_{2,comp}(\Omega^-)$ და $\varphi_0 \in H_2^{1/2}(S)$ ფუნქციებისათვის?

კითხვა 4. უკვე ვიცით, რომ დირიხლეს გარე (302)-(303) სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in H_{2,loc}^{1,0}(\Omega^-) \cap S(\Omega^-)$ ნებისმიერი მონაცემებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (304) პირობებს. რა დამოკიდებულებაა (342) განტოლების $\widetilde{\varphi}$ ამონახსნსა და ნორმალით წარმოებულის $\{\partial_n u\}^-$ ზღვრულ მნიშვნელობას შორის? ეს კითხვა კვლავ მნიშვნელოვანია ω პარამეტრის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვისაც ნეიმანის შიგა ამოცანას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნები. ამ შემთხვევაში (342) ერთგვაროვან განტოლებას ($\Phi = 0$) გააჩნია არატრივიალური ამონახსნები. ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში, თუ არაერთგვაროვან (342) განტოლებას გააჩნია ამონახსენი, მაშინ ეს ამონახსენი ცალსახად არ განისაზღვრება და ისმება საკითხი, როგორ შევარჩიოთ ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლიდან ისეთი $\widetilde{\varphi}$ ამონახსენი, რომელსაც ექნება ფიზიკური მნიშვნელობა და დაემთხვევა ცალსახად განსაზღვრულ $\{\partial_n u\}^-$ ფუნქციას.

ჩვენ დავიწყებთ კითხვა 3-ის გაანალიზებით და ვაჩვენებთ, რომ (342) განტოლება ყოველთვის ამოხსნადია.

ამ მიზნით ჯერ დავამტკიცოთ, რომ

$$\big(-2^{-1}I + \mathcal{K} \big) : H^{1/2}(S) \to H^{1/2}(S) \tag{349}$$

ოპერატორის ნულ-სივრცის განზომილება M-ის ტოლია და $\{\varphi_k\}_{k=1}^{M}$ არის ამ ნულ-სივრცის ბაზისი. აქ M არის ნეიმანის შიგა (297)-(298) ამოცანის საკუთრივი ფუნქციების სივრცის განზომილება, ანუ შესაბამისი ω პარამეტრის რანგი.

მართლაც, ვთქვათ,

$$\big(-2^{-1}I + \mathcal{K} \big) h = 0 \quad S\text{-ზე}. \tag{350}$$

მაშინ, აქედან გამომდინარეობს, რომ ორმაგი ფენის $W(h)$ პოტენციალი ამონახსნია დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის და ამიტომ, ერთადერთობის თეორემის თანახმად

$$W(h)(x) = 0 \quad \Omega^-\text{-ში}. \tag{351}$$

(40) ტოლობის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $W(h)$ ხსნის ნეიმანის შიგა (297)-(298) ამოცანას და ამიტომ

$$W(h)(x) = \sum_{k=1}^{M} d_k v_k(x), \quad x \in \Omega^+. \tag{352}$$

(299) და (345) ტოლობების გამოყენებით გვაქვს

$$W\Big(h + \sum_{k=1}^{M} d_k \varphi_k\Big) = 0 \quad \Omega^+\text{-ში}. \tag{353}$$

(345) და (351) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$W\Big(h + \sum_{k=1}^{M} d_k \varphi_k\Big) = 0 \quad \Omega^-\text{-ში}. \tag{354}$$

თავის მხრივ, (353)-(354) ტოლობებიდან მარტივად დავასკვნით, რომ

$$h + \sum_{k=1}^{M} d_k \varphi_k = 0 \quad S\text{-ზე}, \tag{355}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\dim\ker\big(-2^{-1}I + \mathcal{K}\big) = \dim\ker\big(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}\big) = M. \tag{356}$$

ცხადია, რომ შეუღლებული განტოლების

$$\big(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^* g = \overline{\big(-2^{-1}I + \mathcal{K}\big)\overline{g}} = 0 \tag{357}$$

წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა არის

$$\Big\{\overline{\varphi_k}\Big\}_{k=1}^{M} \equiv \Big\{\overline{\{v_k\}^+}\Big\}_{k=1}^{M}. \tag{358}$$

მაშინ (342) არაერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იქნება

$$\langle \Phi, \varphi_k \rangle_S = 0, \qquad k = \overline{1, M}, \tag{359}$$

სადაც Φ განსაზღვრულია (340) ტოლობით.

(359) ტოლობები შეიძლება კვლავ შევამოწმოთ გრინის (322) იგივეობის გამოყენებით, სადაც u_k-ს მაგიერ უნდა ჩავსვათ v_k, ხოლო v-ს მაგიერ კი $v = -\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)$, ამასთან ერთად გავითვალისწინოთ, რომ $\{\partial_n v\}^+ = \Phi$ S-ზე.

ამრიგად, (339) (ანუ (342)) განტოლება ამოხსნადია.

აღვნიშნოთ

$$\big(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}\big)\widetilde{\varphi} = 0 \quad S\text{-ზე} \tag{360}$$

ინტეგრალური განტოლების წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სრული სისტემა $\{\widetilde{\varphi}_k\}_{k=1}^{M}$-ით. ცხადია, რომ შესაბამისი მარტივი ფენის პოტენციალები

$$v_k(x) = V(\widetilde{\varphi}_k)(x), \quad x \in \Omega^+, \quad k = \overline{1, M}, \tag{361}$$

აკმაყოფილებენ (297)-(298) პირობებს.

ძალიან მარტივად შეიძლება შემოწმდეს, რომ

$$\{v_k\}_{k=1}^{M} \quad \text{ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია} \quad \Omega^+\text{-ში}. \tag{362}$$

ამიტომ ფუნქციათა $\{\{v_k\}^+\}_{k=1}^{M} \equiv \{\mathcal{H}\widetilde{\varphi}_k\}_{k=1}^{M}$ სისტემა ასევე წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

მართლაც, თუ

$$\sum_{k=1}^{M} a_k \{v_k\}^+ = 0 \quad S\text{-ზე} \quad \text{სადაც} \quad \sum_{k=1}^{M} |a_k| \neq 0,$$

მაშინ შემდეგი ტოლობისა

$$\sum_{k=1}^{M} a_k \big\{\partial_n v_k\big\}^+ = 0 \quad S\text{-ზე}$$

და გრინის მესამე (28) ფორმულის გამოყენებით დავასკვნით, რომ

$$\sum_{k=1}^{M} a_k v_k(x) = 0 \quad \Omega^+\text{-ში},$$

რაც ეწინააღმდეგება (362) თანაფარდობას.

ამრიგად, (342) განტოლების ზოგადი ამონახსენი ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0 + \sum_{k=1}^{M} c_k \widetilde{\varphi}_k, \tag{363}$$

სადაც $\widetilde{\varphi}_0$ არის (342) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსენი.

ახლა გავაანალიზოთ კითხვა 4: როგორ შევარჩიოთ c_k მუდმივები (363) ტოლობაში ისე, რომ მივიღოთ სასურველი ფიზიკური თანაფარდობა $\widetilde{\varphi} = \big\{\partial_n u\big\}^-$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს იმას ნიშნავს, რომ c_k მუდმივები ისე უნდა შეირჩეს, რომ შემდეგ ფორმულაში (იხილე (338))

$$u(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W(\varphi_0)(x) + V\Big(\widetilde{\varphi}_0 + \sum_{k=1}^{M} c_k \widetilde{\varphi}_k\Big)(x)\,, \tag{364}$$

მარტივი ფენის პოტენციალის სიმკვრივე დაემთხვეს თვით u ფუნქციის ნორმალით წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობას ანუ

$$\big\{\partial_n u\big\}^- = \widetilde{\varphi} \equiv \widetilde{\varphi}_0 + \sum_{k=1}^{M} c_k \widetilde{\varphi}_k \quad S\text{-ზე}. \tag{365}$$

ამისთვის ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ (365) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია Ω^+ არეში, ანუ

$$U := \mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0) + V(\widetilde{\varphi}) = 0 \quad \Omega^+\text{-ში}. \tag{366}$$

ცხადია, რომ $(\Delta + \omega^2)\,U = 0$ Ω^+-ში და (342) და (340) ტოლობების ძალით სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\big\{\partial_n U\big\}^+ = 0 \quad S\text{-ზე}. \tag{367}$$

ამიტომ U ფუნქცია ამონახსნია ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის, რის გამოც U ეკუთვნის საკუთრივი ფუნქციების სივრცეს, რომლის ბაზისია $\{v_k\}_{k=1}^M$. (361) ტოლობების გამოყენებით U ფუნქცია შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$U = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0) + V(\widetilde{\varphi}_0) + \sum_{k=1}^{M} c_k\, v_k \quad \Omega^+\text{-ში}. \tag{368}$$

ახლა შევარჩიოთ c_k მუდმივები ისე, რომ U ფუნქცია ორთოგონალური იყოს v_k, $k=\overline{1,M}$ ფუნქციებისა.

$(U,\, v_k)_{L_2(\Omega^+)} = 0$ თანაფარდობებს მივყავართ შემდეგ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე:

$$\sum_{k=1}^{M} (v_k,\, v_j)_{L_2(\Omega^+)}\, c_k = \big(-\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0) - V(\psi_0)\,,\, v_j \big)_{L_2(\Omega^+)}, \tag{369}$$
$$j = \overline{1,M}\,.$$

ამ სისტემის მატრიცა $[((v_k,\, v_j)_{L_2(\Omega^+)})]_{M\times M}$ წარმოადგენს გრამის მატრიცას და არაგადაგვარებულია, ამიტომ, ცხადია, (369) სისტემიდან c_k საძიებელი მუდმივები ცალსახად განისაზღვრება.

ამრიგად, არსებობს ისეთი $c_k^{(0)}$ მუდმივები, რომ (366) ტოლობა სრულდება. ამ $c_k^{(0)}$ მუდმივებით ავაგოთ (342) განტოლების $\widetilde{\varphi}^{(1)}$ ამონახსენი,

$$\widetilde{\varphi}^{(1)} = \widetilde{\varphi}_0 + \sum_{k=1}^{M} c_k^{(0)}\, \widetilde{\varphi}_k\,. \tag{370}$$

მაშინ, ცხადია (366) თანაფარდობა სრულდება.

ისე, როგორც ზემოთ, აქაც მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\widetilde{\varphi}^{(1)}$ ცალსახად განისაზღვრება.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\widetilde{\varphi}^{(1)}$ ფუნქცია წარმოადგენს საძიებელ ფიზიკურ ამონახსნს, რომელიც შეესაბამება $\big\{\partial_n u\big\}^-$ კვალს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ ავაგებთ დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს შემდეგი ტოლობით (იხილეთ (338)-(339)):

$$u(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W(\varphi_0)(x) + V(\widetilde{\varphi}^{(1)})(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{371}$$

მაშინ

$$\big\{\partial_n u\big\}^- = \widetilde{\varphi}^{(1)} \quad S\text{-ზე}. \tag{372}$$

მართლაც, (340) და (366) თანაფარდობების გამოყენებით დავადგენთ შემდეგ ტოლობას

$$\begin{aligned}
\big\{\partial_n u\big\}^- &= \big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0) + V(\widetilde{\varphi}^{(1)})\big]\big\}^- \\
&= \big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0)\big]\big\}^+ + 2^{-1}\widetilde{\varphi}^{(1)} + \widetilde{\mathcal{K}}\,\widetilde{\varphi}^{(1)} \\
&= \widetilde{\varphi}^{(1)} + \Big\{\partial_n\Big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0)\Big]\Big\}^+ - 2^{-1}\widetilde{\varphi}^{(1)} + \widetilde{\mathcal{K}}\,\widetilde{\varphi}^{(1)} \\
&= \widetilde{\varphi}^{(1)} + \big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) - W(\varphi_0) + V(\widetilde{\varphi}^{(1)})\big]\big\}^+ \\
&= \widetilde{\varphi}^{(1)}.
\end{aligned}$$

ამრიგად, ჩვენ გავაანალიზეთ ტრადიციული პირდაპირი სასაზღვრო განტოლებების მეთოდი დირიხლეს გარე ამოცანისათვის ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში. ამ მიდგომას სასაზღვრო ამოცანა დაჰყავს ან ფრედჰოლმის პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე ან ფრედჰოლმის მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებაზე. ორივე შემთხვევაში მიღებული ინეგრალური განტოლებები არაა ეკვივალენტური ცალსახად ამოხსნადი სასაზღვრო ამოცანისა, რადგან შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორები არაა შებრუნებადი სიხშირის პარამეტრის ყველა მნიშვნელობისათვის, კერძოდ რეზონანსული მნიშვნელობებისათვის. მიუხედავად ამისა, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ მიღებული ინტეგრალური განტოლებები, რომელთაც სპეციალური მარჯვენა მხარე გააჩნიათ, ყოველთვის ამოხსნადია, თუმცა ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი ცალსახად არ განისაზღვრება. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ინტეგრალური განტოლების ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლეში არსებობს ერთადერთი ფიზიკური შინაარსის მქონე ამონახსენი, რომელიც ემთხვევა სასაზღვრო ამოცანის ცალსახად განსაზღვრული გამოსხივებადი ამონახსნის ნორმალით წარმოებულის კვალს S-ზე.

შენიშვნა 24. სრულიად ანალოგიურად შეიძლება გავაანალიზოთ ტრადიციული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში.

შენიშვნა 25. თუ ω პარამეტრის მნიშვნელობა არ ემთხვევა რეზონანსულ სიხშირეს, მაშინ შესაბამისი სასაზღვრო იტეგრალური განტოლებები ცალსახად ამოხსნადია და ერთადერთი ამონახსენი ავტომატურად წარმოადგენს ფიზიკური შინაარსის ამონახსნს: დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში იგი ემთხვევა გამოსხივებადი ამონახსნის ნორმალური წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობას, ხოლო ნეიმანის

სასაზღვრო ამოცანის შემთხვევაში კი - თვით გამოსხივებადი ამონახსნის კვალს საზღვარზე.

5.3 მოდიფიცირებული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი

გამოვიყენოთ შემდეგ ნაშრომებში [43], [44], და [45] (იხილე აგრეთვე [3] და [52]), განვითარებული მეთოდი და გამოვიკვლიოთ დირიხლეს და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანები მოდიფიცირებული პირდაპირი მეთოდით, რომელსაც სასაზღვრო ამოცანები დაჰყავს ეკვივალენტურ, ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებაზე.

5.3.1 მოდიფიცირებული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი დირიხლეს ამოცანისათვის

განვიხილოთ დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანა (302)-(303).

ამონახსნის ზოგადი ინტეგრალური (305) წარმოდგენიდან გვაქვს შემდეგი თანაფარდობები:

$$u(x) - V(\{\partial_n u\}^-)(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) - W(\varphi_0)(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{373}$$

$$\mathcal{H}(\{\partial_n u\}^-) = \big\{ - \mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big\}^- + \varphi_0 \quad S\text{-ზე}, \tag{374}$$

$$- 2^{-1}\{\partial_n u\}^- + \widetilde{\mathcal{K}}\left(\{\partial_n u\}^-\right) = \big\{\partial_n\big[- \mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big]\big\}^- \quad S\text{-ზე}. \tag{375}$$

ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ უცნობი $\{\partial_n u\}^-$ ფუნქცია.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\psi := \{\partial_n u\}^- \quad S\text{-ზე}, \tag{376}$$

$$\Psi := \big\{\big[- \mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big]\big\}^- + \varphi_0 \quad S\text{-ზე}, \tag{377}$$

$$\Phi := \big\{\partial_n\big[- \mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + W(\varphi_0)\big]\big\}^- \quad S\text{-ზე}. \tag{378}$$

გავამრავლოთ (374) ტოლობა $i\,\alpha$ სიდიდეზე და მივუმატოთ იგი (375) ტოლობას, მივიღებთ:

$$\big[- 2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}} + i\,\alpha\,\mathcal{H}\big]\,\psi = \Phi + i\,\alpha\,\Psi \quad S\text{-ზე}. \tag{379}$$

აქ α რაიმე ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}} + i\,\alpha\,\mathcal{H} \,:\, H^{-1/2}(S) \to H^{-1/2}(S) \tag{380}$$

არის ფრედჰოლმის ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით (იხილე [3], [43], [44], [45], [48], [49]). ახლა ვაჩვენოთ, რომ ამ ოპერატორის გული ტრივიალურია. მართლაც, თუ ψ_0 შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნია

$$\big[-2^{-1}I+\widetilde{\mathcal{K}}+i\,\alpha\,\mathcal{H}\big]\,\psi_0=0\quad S\text{-ზე}, \tag{381}$$

მაშინ მარტივი ფენის პოტენციალი $u_0(y):=V(\psi_0)(x)$ ამონახსნია რობინის შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის ((381) და თეორემა 4-ის ძალით)

$$(\Delta+\omega^2)\,u_0\;=\;0\quad\Omega^+\text{-ში}, \tag{382}$$

$$\{\partial_n u_0+i\,\alpha\,u_0\}^+=0\quad S\text{-ზე}. \tag{383}$$

გრინის (18) ფორმულის გამოყენებით, რომელშიც $u=u_0$ და $v=\overline{u_0}$, მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^+}\Big[\sum_{k=1}^{3}|\partial_k u_0|^2-\omega^2\,|u_0|^2\Big]\,dx=-i\,\alpha\int\limits_{\partial\Omega^+}|\{u_0\}^+|^2\,dS.$$

რადგან $\alpha\neq 0$ და $\alpha\in\mathbb{R}$ უკანასკნელი ტოლობიდან დავასკვნით $\{u_0\}^+=0$ S-ზე. მაშინ (383) თანაფარდობიდან გვაქვს ტოლობა: $\{\partial_n\,u_0\}^+=0$ S-ზე. ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის (28) ფორმულიდან კი საბოლოოდ დავასკვნით, რომ $u_0(x)=V(\psi_0)(x)=0$, $x\in\Omega^+$. აქედან კი მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის, დირიხლეს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის და წყვეტის (38) ფორმულების გამოყენებით დავადგენთ $\psi_0=0$ ტოლობას S-ზე.

ამრიგად, (379) განტოლებიდან ψ ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება და დირიხლეს (303) ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება (373) ტოლობიდან,

$$u(x)=\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x)-W(\varphi_0)(x)+V(\psi)(x),\quad x\in\Omega^-. \tag{384}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (376) თანაფარდობა მართებულია უკანასკნელი ტოლობით წარმოდგენილი u ფუნქციისთვის. მართლაც, თეორემა 4, ასევე (384) და (379)-ის გამოყენებით დავადგენთ შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{aligned}\big\{\partial_n\,u\big\}^-&=\big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big]\big\}^-+2^{-1}\psi+\widetilde{\mathcal{K}}\,\psi\\&=-\Phi+2^{-1}\psi+\widetilde{\mathcal{K}}\,\psi=\psi-i\,\alpha\,\mathcal{H}\psi+i\,\alpha\,\Psi\\&=\psi-i\,\alpha\,\big[\mathcal{H}\psi+\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big\}^-+\varphi_0\big]\\&=\psi-i\,\alpha\,\big[\mathcal{H}\psi+\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^+-2^{-1}\varphi_0-\mathcal{K}\varphi_0\big]\\&=\psi-i\,\alpha\,\big\{V\,(\psi)+\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big\}^+.\end{aligned} \tag{385}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი ფუნქცია

$$U(x):=V\,(\psi)(x)+\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x)-W(\varphi_0)(x),\quad x\in\Omega^+, \tag{386}$$

იგივურად ნულის ტოლია Ω^+ არეზე. ეს ვაჩვენოთ შემდეგნაირად. ცხადია, რომ U ჰელმჰოლცის განტოლების ამოხსნაა,

$$(\Delta+\omega^2)\,U\,(x)\,=\,0, \qquad x\in\Omega^+, \tag{387}$$

და გარდა ამისა (379) ტოლობის ძალით აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\begin{aligned}\big\{\partial_n U+i\,\alpha\,U\big\}^+ =&\big(-2^{-1}I+\widetilde{\mathcal{K}}+i\,\alpha\,\mathcal{H}\big)\psi+\big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big]\big\}^+\\ &+i\,\alpha\,\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big\}^+\\ =&\big(-2^{-1}I+\widetilde{\mathcal{K}}+i\,\alpha\,\mathcal{H}\big)\psi-\Phi-i\,\alpha\,\Psi=0.\end{aligned} \tag{388}$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ თეორემა 4 და შემდეგი ცხადი თანაფარდობები:

$$\begin{aligned}&\big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big]\big\}^+=\big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big]\big\}^-=-\Phi,\\ &\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big\}^+=\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)\big\}^+-\mathcal{K}\varphi_0-2^{-1}\varphi_0=\\ &\qquad=\big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\big\}^--\varphi_0=-\Psi.\end{aligned}$$

ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ U ამონახსნია რობინის ერთგვაროვანი (387)-(388) ამოცანის. გრინის სხვაობიანი ფორმულის გამოყენებით მარტივად ვაჩვენებთ, რომ რობინის ერთგვაროვან (387)-(388) ამოცანას მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი გააჩნია. ამიტომ (386) ტოლობით განსაზღვრული U ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია Ω^+-ში, და მაშასადამე,

$$\Big\{V(\psi)+\mathrm{P}_{\Omega^-}(f)-W(\varphi_0)\Big\}^+=0 \quad S\text{-ზე}. \tag{389}$$

აქედან კი გამომდინარეობს დასამტკიცებელი (385) ტოლობა, $\big\{\partial_n u\big\}^-=\psi$.

ამრიგად, ზემოთ აღწერილი პირდაპირი მეთოდით დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანა (302)-(303) სიხშირის პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ეკვივალენტურად დაიყვანება ცალსახად ამოხსნად (379) ინტეგრალურ განტოლებაზე $\psi=\big\{\partial_n u\big\}^-$ უცნობი ფუნქციის მიმართ.

5.3.2 მოდიფიცირებული პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდი ნეიმანის ამოცანისათვის

ახლა განვიხილოთ ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა გამოსხივებად ფუნქციათა სივრცეში:

$$\Delta u+\omega^2 u=f \quad \Omega^-\text{-ში}, \tag{390}$$

$$\{\partial_n u\}^-=\psi_0 \quad S\text{-ზე}. \tag{391}$$

აქ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ

$$f \in L_{2,comp}(\Omega^-), \quad \psi_0 \in H^{-1/2}(S). \tag{392}$$

კვლავ, ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$u(x) + W\big(\{u\}^-\big)(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) + V(\psi_0)(x)\,, \quad x \in \Omega^-. \tag{393}$$

ამ ტოლობიდან მარტივად მივიღებთ, რომ

$$2^{-1}\{u\}^- + \mathcal{K}\{u\}^- = \Phi \quad S\text{-ზე}, \tag{394}$$

$$\mathcal{L}\{u\}^- = \Psi \quad S\text{-ზე}, \tag{395}$$

სადაც

$$\Phi := \big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + V(\psi_0)\big\}^- \quad S\text{-ზე}, \tag{396}$$

$$\Psi := \big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + V(\varphi_0)\big]\big\}^- - \varphi_0 \quad S\text{-ზე}. \tag{397}$$

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 4-ის ძალით Φ და Ψ ფუნქციები შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ

$$\Phi = \big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + V(\psi_0)\big\}^+ \quad S\text{-ზე}, \tag{398}$$

$$\Psi = \big\{\partial_n\big[\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + V(\varphi_0)\big]\big\}^+ \quad S\text{-ზე}. \tag{399}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\varphi := \{u\}^-. \tag{400}$$

გავამრავლოთ (394) ტოლობა $i\alpha$ სიდიდეზე და მივუმატოთ (395) ტოლობას, მივიღებთ:

$$\big[\mathcal{L} + i\,\alpha\,\big(2^{-1}\,I + \mathcal{K}\big)\big]\,\varphi = \Psi + i\,\alpha\,\Phi \quad S\text{-ზე}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \tag{401}$$

ოპერატორი

$$\mathrm{K} \equiv \mathcal{L} + i\,\alpha\,\big(2^{-1}\,I + \mathcal{K}\big) \;\; : \;\; H^{1/2}(S) \to H^{-1/2}(S) \tag{402}$$

არის ფრედჰოლმის ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით. საკმარისად გლუვი S ზედაპირის შემთხვევაში K არის პირველი რიგის ძლიერად ელიფსური ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი. ფაქტობრივად K არის მთავარი ერთგვაროვანი დადებითი სიმბოლოს მქონე სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი (იხ. მაგ., [48], [49], [51]).

ვაჩვენოთ, რომ (402) ოპერატორის ნულ-სივრცე ტრივიალურია. მართლაც, ვთქვათ,

$$\mathrm{K}\varphi_0 = 0 \quad S\text{-ზე} \tag{403}$$

და განვიხილოთ ფუნქცია:

$$u_0(x) = W(\varphi_0)(x), \quad x \in \Omega^{\pm}. \tag{404}$$

მარტივი საჩვენებელია, რომ u_0 ფუნქცია ხსნის ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებას $\Omega^{\pm}$ არეში და (403) ტოლობის ძალით აკმაყოფილებს რობინის ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას

$$\{\partial_n u_0 + i\,\alpha\, u_0\}^{+} = 0 \quad S\text{-ზე}.$$

ამიტომ $u_0(x) = W(\varphi_0)(x) = 0$ Ω^{+}-ში. (40) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ $u_0 = W(\varphi_0)$ ფუნქცია ამონახსნია ნეიმანის ერთგვაროვანი გარე სასაზღვრო ამოცანის. ამიტომ $u_0(x) = W(\varphi_0)(x) = 0$ Ω^{-}-ში. მიღებული ტოლობებიდან კი გამომდინარეობს, რომ $\varphi_0 = 0$ S-ზე.

ამრიგად, (402) ოპერატორი შებრუნებადია და (401) განტოლება ცალსახად ამოხსნადია. (393) ტოლობიდან (400) ტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$u(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) + V(\psi_0)(x) - W(\varphi)(x) \quad \Omega^{-}\text{-ში}, \tag{405}$$

სადაც φ ფუნქცია (401) განტოლების ამონახსნია.

ვაჩვენოთ, რომ მართლაც სრულდება (400) ტოლობა (405) თანაფარდობით განსაზღვრული u ფუნქციისათვის.

ზემოთ გამოყენებული მსჯელობებისა და (398)-(399) ტოლობების გათვალისწინებით (405) თანაფარდობიდან დავადგენთ, რომ

$$\begin{aligned}\{u\}^{-} =& \big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + V(\psi_0)\big\}^{-} + 2^{-1}\varphi - \mathcal{K}\varphi = \\ =& \varphi + \Phi - \big(2^{-1}\varphi + \mathcal{K}\varphi\big) = \qquad (406)\\ =& \varphi + \big\{\mathrm{P}_{\Omega^-}(f) + V(\psi_0) - W(\varphi)\big\}^{+}. \qquad (407)\end{aligned}$$

როგორც წინა პარაგრაფში, აქაც შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი ფუნქცია

$$U(x) = \mathrm{P}_{\Omega^-}(f)(x) + V(\psi_0)(x) - W(\varphi)(x), \quad x \in \Omega^{+}, \tag{408}$$

იგივურად ნულის ტოლია Ω^{+} არეში, რადგანაც იგი ამონახსნია ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი განტოლებისა და (401) ტოლობის ძალით აკმაყოფილებს რობინის ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას S-ზე,

$$\big\{\partial_n U + i\alpha U\big\}^{+} = \Psi + i\,\alpha\,\Phi - \mathcal{L}\varphi - i\alpha\big(2^{-1}\varphi + \mathcal{K}\varphi\big) = 0 \quad S\text{-ზე}. \tag{409}$$

ამიტომ (406) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\{u\}^{-} = \varphi \quad S\text{-ზე}.$$

ამრიგად, სიხშირის ω პარამეტრის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ზემოთ აღწერილ პირდაპირ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა (390)-(391) დაჰყავს ეკვივალენტურ ცალსახად ამოხსნად (401) ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებაზე $\varphi = \{u\}^{-}$ უცნობი ფუნქციის მიმართ.

თავი II. ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი

6 ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის შესახებ

ამ თავში ძირითადი და შერეული სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანებისთვის და შერეული ტრანსმისიის ტიპის ამოცანებისთვის ჩვენ განვავითარებთ და დავაფუძნებთ ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდს (Method of Fundamental Solutions - MFS), რომელიც პირველად შემოტანილი იქნა ცნობილი ქართველი მათემატიკოსის ვიქტორ კუპრაძის მიერ წინა საუკუნის 60-იან წლებში (ამ მიმართულებით იხ. ვ. კუპრაძისა და მ. ალექსიძის პიონერული ხასიათის შრომები [9, 10, 11]). ამ მეთოდის იდეა არის ის, რომ ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ ამონახსნის სინგულარობის $\{y^{(k)}\}_1^{\infty}$ პოლუსები განთავსდეს განსახილველი არის გარეთ და აიგოს ფუნქციათა მიმდევრობა $\left\{\Gamma\left(x-y^{(k)}\right)\right\}_1^{\infty}$, დამტკიცდეს ამ სისტემის სისრულე შესაბამის ფუნქციურ სივრცეში და შემდეგ $\sum_1^N C_k \Gamma\left(x-y^{(k)}\right)$ სახის წრფივი კომბინაციებით მივუახლოვდეთ საძიებელ ამონახსნს. აქ C_k მუდმივებია, რომლებიც უნდა შეირჩეს სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებიდან. წინა საუკუნის 70-იან წლებიდან დაწყებული, MFS თანდათანობით გადაიქცა მიახლოებითი ამონახსნის აგების სასარგებლო მეთოდად და გამოყენებული იქნა მრავალი ფიზიკური და საინჟინრო ამოცანის ამოხსნისას (მათ შორის, ფუნქციონალურად გრადუირებული სტრუქტურებისთვის). ამასთან დაკავშირებით იხილეთ [9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27] და იქ ციტირებული ლიტერატურა, აგრეთვე ამ მეთოდისადმი მიძღვნილი კაოშიუნგში (ტაივანი) 2011 წელს ჩატარებული კონფერენციის - "The International Workshop on MFS, Kaohsiung (Taiwan)" მასალები. ეს კონფერენცია მეექვსე იყო კონფერენციების სერიაში, რომლებიც პერიოდულად იმართება (იხ. კონფერენციის გვერდი http://www.math.nsysu.edu.tw/conference/TrefftzMFS2011).

უნდა აღინიშნოს, რომ სამეცნიერო ლიტერატურაში აქამდე არ იყო ცნობილი, თუ როგორ გამოვიყენოთ MFS ბზარის ტიპის ამოცანების ამოხსნისთვის, რადგან MFS-თან დაკავშირებული სხვადასხვა მიდგომები გამოდგება ბზარის ამოცანებისთვის. ჩვენი კვლევის ერთ-ერთი მთავარი მიზანია ამ სიძნელეების გადაჭრა და MFS-ის გავრცელება ბზარის ტიპის შერეული სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისთვის.

რიცხვითი ამონახსნის მიღების ერთ-ერთ მძლავრ მეთოდს წარმოადგენს სასრულ ელემენტთა მეთოდი (Finite Element Method - FEM). მაგრამ ბევრ მნიშვნელოვან შემთხვევაში მისი ეფექტურობა შესამჩნევად ეცემა, მაგალითად, უსასრულო არეებისთვის, ან როდესაც თავს იჩენენ ისეთი

ლოკალური ეფექტები, როგორიცაა ამონახსნის სინგულარული ყოფაქცევა ბზარის კიდესთან, ან მაღალი სიხშირის ელექტრომაგნიტური ტალღების სკინ-ეფექტი, ან როდესაც საჭიროა დისკრეტიზაციის ბადის მუდმივი ცვლილება, მაგალითად, დინამიკური ბზარის სიმულირებისას. მეთოდის ეფექტურობის შემცირება გამოწვეულია არასტანდარტული (მაგალითად, უსასრულო) ელემენტების შემოყვანის აუცილებლობით, და/ან ძალიან ფაქიზი, არაერთგვაროვანი, ცვლადი ბიჯის მქონე ბადის შემოღებით. ამ შემთხვევებში მუდმივკოეფიციენტებიანი სასაზღვრო ამოცანებისთვის სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების/სასაზღვრო ელემენტების მეთოდი (BIEM/BEM) ეფექტურობით აღემატება სასრულ ელემენტთა მეთოდს.

ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი ხასიათდება გამოყენების არაჩვეულებრივი სიმარტივით, რაც გამოწვეულია შემდეგი მიზეზებით (იხილეთ [9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 53] და იქ ციტირებული ლიტერატურა):

- საცდელი ფუნქციები მარტივი და ერთგვაროვანი სტრუქტურისაა;
- არ არის საჭირო სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლა;
- არ მოითხოვს საზღვრის რთულ დანაწილებას (ტრიანგულაციას);
- მარტივია მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობის პოვნა სხეულის შიგა წერტილებში;
- MFS აპროქსიმაციის წარმოებულები შეიძლება უშუალოდ გამოითვალოს;
- საცდელი ფუნქციების განსაკუთრებული სიუხვე უზრუნველყოფს მეთოდის მაღალ ადაპტურობას;
- MFS მეთოდის გამოყენება შეიძლება არარეგულარული საზღვრის შემთხვევაშიც;

უკანასკნელი ოთხი ათწლეულის განმავლობაში ლიტერატურაში გვხვდებოდა MFS მეთოდის რამდენიმე განსხვავებული ფორმულირება. მათგან ორი ყველაზე უფრო პოპულარული არის შემდეგი:

(i) პირველ შემთხვევაში სინგულარობები (ფუნდამენტური ამონახსნის პოლუსები) მდებარეობს ფიქსირებულ ზედაპირზე, რომელიც არ ემთხვევა განსახილველი სხეულის საზღვარს და წარმოადგენს ე.წ. ფსევდოსაზღვარს. ამ ფორმულირებას მივყავართ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემამდე უცნობი კოეფიციენტების მიმართ.

(ii) მეორე შემთხვევაში პოლუსების პოზიცია განისაზღვრება როგორც დისკრეტული ამოცანის ამონახსნის შემადგენელი ნაწილი. ამ ფორმულირებას მივყავართ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არაწრფივ ამოცანასთან.

წარმოდგენილი გამოკვლევის ერთ-ერთი მთავარი მიზანია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გავრცელება და დასაბუთება როგორც ძირითადი, ასევე ეკრანის და ბზარის ტიპის შერეული ამოცანებისათვის როგორც ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში (იხ. [54]), ისე მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, ანიზოტროპული სხეულების დრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანებისათვის.

7 ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის

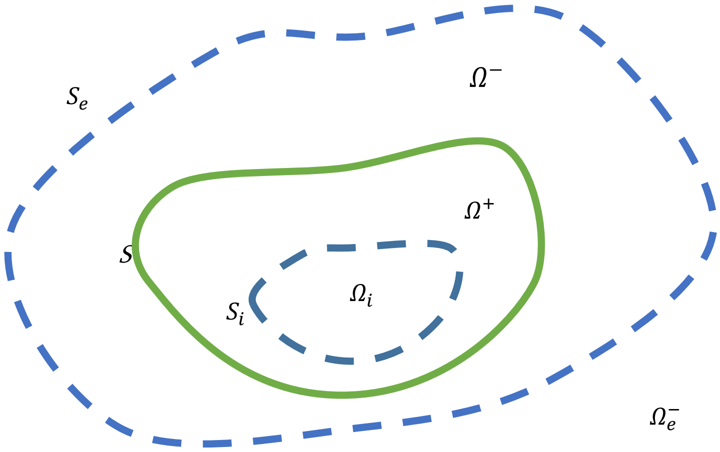
აქ ჩვენ გავაანალიზებთ ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდს ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში. სამეცნიერო ლიტერატურაში ეს მეთოდი მოიხსენიება აგრეთვე სხვა სახელებითაც, კერძოდ, დამატებით წყაროთა მეთოდი, განზოგადებული ფურიეს მწკრივთა მეთოდი, დამხმარე გამომსხივებლების მეთოდი, დისკრეტულ წყაროთა მეთოდი, განზოგადებული მულტიპოლუსური ტექნიკა და სხვა (იხ. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 21, 55, 56, 57, 58] და იქ ციტირებული ლიტერატურა).

ამონახსნის არსებობისა და მდგრადობის შესახებ დისერტაციის პირველ თავში მიღებული შედეგების გამოყენებით ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ფაქტობრივად სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნების აგება დაიყვანება მოცემული სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე გარკვეულ ფუნქციათა სრულ (მკვრივ) სისტემაში. როგორც კვლევამ აჩვენა, განსხვავებულ ამოცანებს განსხვავებული სტრუქტურის სრული სისტემა შეესაბამება. დეტალურად ამ საკითხებს ქვემოთ განვიხილავთ, მაგრამ აქ გვსურს აღვნიშნოთ, რომ ჩვენ განვაზოგადებთ ამ მეთოდს ეკრანისა და ბზარის ტიპის ამოცანებისათვის, რაც სამეცნიერო ლიტერატურაში არ ყოფილა განხილული.

წინასწარ დავამტკიცოთ რამდენიმე დებულება, რომელსაც გამოვიყენებთ მიახლოებითი ამონახსნების ასაგები ალგორითმების დასაფუძნებლად.

ვთქვათ, Ω^+ სასრული დიამეტრის მქონე არეა და $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega^+}$. ვიგულისხმოთ, რომ $S = \partial\Omega^+ = \partial\Omega^-$ არის მარტივად ბმული გლუვი ზედაპირი, $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.

ვთქვათ, S_i არის რაიმე მარტივად ბმული შეკრული (ლიპშიცის)



ნახ. 4 ფიქტიური ზედაპირები S_i და S_e, $S_i \subset \Omega^+$ და $S_e \subset \Omega^-$.

ზედაპირი, რომელიც მთლიანად მდებარეობს S ზედაპირის შიგნით: $S_i \subset \Omega^+$. S_i ზედაპირით შემოსაზღვრული არე აღვნიშნოთ Ω_i^+ სიმბოლოთი. ცხადია, $\overline{\Omega_i^+} \subset \Omega^+$.

ვთქვათ, S_e არის რაიმე შეკრული (ლიპშიცის) ზედაპირი, რომელიც თავის შიგნით მოიცავს S ზედაპირს, $S_e \subset \Omega^-$. S_e ზედაპირის გარე არე აღვნიშნოთ Ω_e^--ით, $\overline{\Omega_e^-} \subset \Omega^-$.

განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი სიმრავლე S-ზე:

$$\varphi_k(x) = [B(y, \partial y)\, \Gamma(x-y,\ \omega)]_{y=y^{(k)}}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{410}$$
$$y^{(k)} \in S_i, \quad x \in S,$$

სადაც $\Gamma(x-y,\ \omega)$ ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნია, $\{y^{(k)}\}^{\infty}$ არის თვლადი ყველგან მკვრივი, სიმრავლე S_i-ზე, $B(y, \partial y)$ არის რობინის ტიპის სასაზღვრო ოპერატორი,

$$B(y, \partial y) := \frac{\partial}{\partial n(y)} + a, \quad y \in S_i, \tag{411}$$
$$a = a_1 + i a_2, \quad a_1,\ a_2 \in \mathbb{R},$$

$n(y)$ არის S_i ზედაპირის მიმართ გარე ნორმალის ორტი $y \in S_i$ წერტილში.

ლემა 26. ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ყველგან მკვრივია (სრულია) $\mathrm{L}_2(S)$ სივრცეში.

დამტკიცება. დებულების დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $h \in \mathrm{L}_2(S)$ და

$$\int\limits_S \varphi_k(x)\, h(x)\, ds = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{412}$$

მაშინ $h = 0$ S-ზე.

(410), (411) და (412) ტოლობები გვაძლევს:

$$\left(\frac{\partial}{\partial n(y)}+a\right)\int\limits_S \Gamma(x-y,\ \omega)\,h(x)\,dS_x,\quad y=y^{(k)}\in S_i. \tag{413}$$

რადგან $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ ყველგან მკვრივია S_i-ზე და მარტივი ფენის პოტენციალი

$$v(y):=V_S(h)(y)=\int\limits_S \Gamma(x-y,\ \omega)\,h(x)\,dS_x \tag{414}$$

ეკუთვნის $C^{\infty}(\Omega^+)$ კლასს, ამიტომ (413))-დან დავასკვნით, რომ v რეგულარული ამონახსნია შემდეგი რობინის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანისა:

$$\left(\Delta+\omega^2\right)v(y)=0,\quad y\in\Omega_i^+, \tag{415}$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial n(y)}+a\right)v(y)\right\}^+=0,\quad y\in S_i=\partial\Omega_i^+. \tag{416}$$

ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად გვექნება

$$v(y)=0,\quad y\in\Omega_i^+. \tag{417}$$

რადგან v არის ნამდვილი y ცვლადის ანალიზური ფუნქცია Ω^+-ში, ამიტომ (417)-დან დავასკვნით:

$$v(y)=0,\quad y\in\Omega^+. \tag{418}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობას, მივიღებთ: $\{v(y)\}^+=\mathcal{H}h(y)=0$ S-ზე, საიდანაც ჩართვის თეორემის თანახმად დავასკვნით $h\in C^{1,\alpha}(S)$. მეორე მხრივ, $v(y)$ არის დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი:

$$\left(\Delta+\omega^2\right)v(y)=0,\quad y\in\Omega^-, \tag{419}$$

$$\{v(y)\}^-=0,\quad y\in S. \tag{420}$$

რადგანაც v რეგულარულია და $v\in Z(\Omega^-)$, დირიხლეს ამოცანის ამოხსნის ერთადერთობის ძალით, $v(y)=0$, $y\in\Omega^-$. აქედან კი გამომდინარეობს

$$\left\{\frac{\partial v(y)}{\partial n(y)}\right\}^- - \left\{\frac{\partial v(y)}{\partial n(y)}\right\}^+=h(y)=0,\quad y\in S. \qquad \square$$

ლემა 27. ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

დამტკიცება. უნდა დავამტკიცოთ, რომ განსახილველი სისტემის ნებისმიერი სასრული ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ვთქვათ,

$$v^{(N)}(x):=\sum_{k=1}^{N}c_k\varphi_k(x)=0,\quad x\in S,\quad \sum_{k=1}^{N}|c_k|\neq 0, \tag{421}$$

ანუ, რაიმე $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

ცხადია,

$$\left(\Delta+\omega^2\right) v^{(N)}(x)=0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^N, \tag{422}$$

სადაც $\left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^N \in S_i$ იზოლირებული $y^{(k)}$ წერტილების სიმრავლეა. ამასთან

$$v^{(N)} \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^3 \backslash \left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^N\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3 \backslash \left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^N\right). \tag{423}$$

(421), (422) და (423) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ $v^{(N)}$ არის დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის რეგულარული გამოსხივებადი ამონახსნი Ω^- არეში:

$$\begin{gathered}\left(\Delta+\omega^2\right) v^{(N)}(x)=0, \quad x \in \Omega^-, \\ \left\{v^{(N)}(x)\right\}^-=0, \quad x \in S, \\ v^{(N)} \in C^1\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap \ Z\left(\Omega^-\right).\end{gathered}$$

ამიტომ $v(x)$=0, $x \in \Omega^-$ და ანალიზურობის ძალით

$$v(x)=0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^N. \tag{424}$$

რადგან $y^{(k)}$ წერტილები იზოლირებულია, (421) და (424) გვაძლევს $c_k=0$, $k=1,\ldots,N$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს ლემას. □

მართებულია ლემა 26-ის შემდეგი განზოგადებული ვერსია.

ლემა 28. ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ყველგან მკვრივია $B_{p,p}^s(S)$ სივრცეში, $1<p<\infty$, $s<1$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ როდესაც $s=0$ და $p=2$, მაშინ დებულება ემთხვევა ლემა 26-ს. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ლემა 28, უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ h ეკუთვნის $B_{p,p}^s(S)$ სივრცის შეუღლებულ სივრცეს, ე.ი. $h \in B_{p',p'}^{-s}(S)$, და სრულდება ტოლობები

$$\langle\varphi_k, h\rangle_S=0, \quad k=1,2,\ldots, \tag{425}$$

სადაც $\langle\ ,\ \rangle_S$ აღნიშნავს დუალობას $B_{p,p}^s(S)$ და $B_{p',p'}^{-s}(S)$ სივრცეებს შორის, მაშინ $h=0$.

აქ ჩვენ ვიყენებთ ჰან-ბანახის (Hahn-Banch) თეორემის შემდეგ შედეგს. ვთქვათ, B ბანახის სივრცეა და X წრფივი ქვესივრცეა B-ში. B^* იყოს B-ს შეუღლებული სივრცე. X წრფივი ქვესივრცე მკვრივია B-ში ანუ $\overline{X}=B$, თუ იმ ფაქტიდან, რომ $f(x)=0$ ყველა $x \in X$ ელემენტისათვის, სადაც f ნებისმიერი ფუნქციონალია შეუღლებული B^* სივრციდან, გამომდინარეობს, $f=0$.

ისევე როგორც ლემა 26-ის დამტკიცების დროს, აქაც მარტივად ვაჩვენებთ, რომ (425) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\left(\frac{\partial}{\partial n\left(y\right)}+a\right)\left\langle \Gamma\left(x-y,\ \omega\right),h\right\rangle_{S}=0,\quad y\in S_{i}. \tag{426}$$

საიდანაც იმავე მსჯელობებით დავასკვნით, რომ

$$v\left(y\right)=V\left(h\right)\left(y\right)=\left\langle \Gamma\left(x-y,\ \omega\right),h\right\rangle_{S}=0,\quad y\in\Omega^{+}. \tag{427}$$

იმისათვის, რომ არსებობდეს $V\left(h\right)\in H_{p'}^{-s+1+1/p'}(\Omega^{+})$ ფუნქციის კვალი S საზღვარზე, უნდა შესრულდეს პირობა

$$-s+1+\frac{1}{p'}>1/p'\quad \text{ანუ}\quad s<1. \tag{428}$$

თუ ეს პირობა სრულდება, მაშინ გვექნება

$$\left\{v\left(y\right)\right\}^{+}=\mathcal{H}h\left(y\right)=0,\quad y\in S, \tag{429}$$

საიდანაც ფსევდოდიფერენციალური $\mathcal{H}$ ოპერატორის ელიფსურობისა და ჩართვის თეორემის გამოყენებით დავასკვნით, რომ, ფაქტობრივად, $h\in C^{0,\beta}\left(S\right)$. ამის გამოყენებით კი, ისევე როგორც ლემა 26-ში, მარტივად ვაჩვენებთ, რომ $h=0$. $\square$

განვიხილოთ ფუნქციათა სისტემა S ზედაპირზე

$$\psi_{k}\left(x\right)=\frac{\partial\varphi_{k}\left(x\right)}{\partial n\left(x\right)},\quad x\in S,\quad k=1,2,\ldots, \tag{430}$$

სადაც $\varphi_{k}\left(x\right)$ ფუნქციები განსაზღვრულია (410) ტოლობით და $n\left(x\right)$ არის S ზედაპირის გარე ნორმალის ორტი $x\in S$ წერტილში.

ლემა 29. ფუნქციათა $\left\{\psi_{k}\left(x\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა მკვრივია L_{2} სივრცეში.

დამტკიცება. აქაც ლემის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $h\in L_{2}\left(S\right)$ და

$$\int\limits_{S}\psi_{k}\left(x\right)h\left(x\right)dS=0,\quad k=1,2,\ldots, \tag{431}$$

მაშინ $h=0\quad S$-ზე.

$\left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ სიმრავლის ყველგან მკვრივობის გამო S_{i} ზედაპირზე, (430) და (410) ტოლობების გათვალისწინებით (431)-დან დავასკვნით, რომ

$$\left(\frac{\partial}{\partial n\left(y\right)}+a\right)\int\limits_{S}\left[\frac{\partial}{\partial n\left(x\right)}\Gamma\left(x-y,\ \omega\right)\right]h\left(x\right)dS_{x}=0,\quad y\in S_{i}. \tag{432}$$

აღვნიშნოთ

$$w\left(y\right)=W_{S}\left(h\right)\left(y\right),\quad y\in\mathbb{R}^{3}\backslash S. \tag{433}$$

მაშინ (431) და (432) ტოლობების ძალით გვექნება:

$$\left(\Delta+\omega^{2}\right)w\left(y\right)=0,\quad y\in\Omega_{i}^{+},\tag{434}$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial n\left(y\right)}+a\right)w\left(y\right)\right\}^{+}=0,\quad y\in S_{i}=\partial\Omega_{i}^{+}.\tag{435}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $w\in C^{\infty}\left(\overline{\Omega_{i}^{+}}\right)$ და გამოვიყენებთ ერთადერთობის თეორემას რობინის შიგა ამოცანისათვის, დავასკვნით, რომ $w\left(y\right)=0$, $y\in\Omega_{i}^{+}$. მაშინ, ანალიზურობის ძალით $w\left(y\right)=0$, $y\in\Omega^{+}$. შევნიშნოთ, რომ მაშინ

$$\left\{w\left(y\right)\right\}^{+}=\frac{1}{2}h\left(y\right)+\mathcal{K}h\left(y\right)=0,\quad y\in S.\tag{436}$$

რადგან $\mathcal{K}$ სუსტი სინგულარობის მქონე გულიანი ოპერატორია, ამიტომ აქედან ჩართვის თეორემების ძალით მივიღებთ, $h\in H_{2}^{s}(S)$, ნებისმიერი $s\in\mathbb{R}$, თუ $w\in C^{\infty}$; კერძოდ, თუ $S\in C^{2,\alpha}$, მაშინ $h\in C^{1,\beta}\left(S\right)$, $0<\beta<\alpha$, და $w=W\left(h\right)\in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right)\cap Z\left(\Omega^{-}\right)$. ამიტომ შემდეგი პირობიდან

$$\left\{\frac{\partial w\left(y\right)}{\partial n\left(y\right)}\right\}^{+}=\left\{\frac{\partial w\left(y\right)}{\partial n\left(y\right)}\right\}^{-}=0$$

და ნეიმანის ამოცანის ერთადერთობის თეორემიდან დავასკვნით $w\left(y\right)$=0, $y\in\Omega^{-}$. საბოლოოდ მივიღებთ $\left\{w\left(y\right)\right\}^{+}-\left\{w\left(y\right)\right\}^{-}=h\left(y\right)=0$, რაც ამტკიცებს დებულებას. □

შედეგი 30. ფუნქციათა სისტემა $\{\psi_{k}\}$ მკვრივია $B_{p,p}^{s}\left(S\right)$ სივრცეში, $1<p<\infty$, $s\leq0$.

დამტკიცება. ზუსტად იმავე მსჯელობით, როგორც ლემა 29-ის დამტკიცებაში, აქაც ვაჩვენებთ, რომ $\{\psi_{k}\}$ სისტემა მკვრივია $L_{p}\left(S\right)$-ში, საიდანაც გამომდინარეობს მისი სიმკვრივე $B_{p,p}^{s}\left(S\right)$ სივრცეში, როცა $s<0$, რადგან $B_{p,p}^{s}\left(S\right)\subset B_{p,p}^{0}\left(S\right)\equiv L_{p}\left(S\right)$. □

ლემა 31. ფუნქციათა სისტემა $\{\psi_{k}\}_{k=1}^{\infty}$ წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

დამტკიცება. ვთქვათ, N რაიმე ნატურალური რიცხვია და c_{k}, $k=1,2,\ldots,N$ კომპლექსური რიცხვები ისეთია, რომ $\sum_{k=1}^{N}\left|c_{k}\right|\neq0$ და

$$\sum_{k=1}^{N}c_{k}\psi_{k}\left(x\right)=0,\quad x\in S.\tag{437}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$v^{(N)}\left(x\right)=\sum_{k=1}^{N}c_{k}\psi_{k}\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}^{3}\backslash\left\{y^{(1)},\ldots,y^{(N)}\right\}.\tag{438}$$

(437) და (438) თანაფარდობებიდან გვაქვს

$$\left(\Delta+\omega^2\right) v^{(N)}(x)=0, \quad x \in \Omega^-, \tag{439}$$
$$\left\{\frac{\partial v^{(N)}}{\partial n(x)}\right\}^-=0, \quad x \in S,$$
$$v \in C^\infty\left(\Omega^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right).$$

ამიტომ ნეიმანის გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობიდან და $v^{(N)}$ ფუნქციის ანალიზურობიდან $\mathbb{R}^3 \backslash \left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\right\}$ არეში, დავასკვნით $v^{(N)}(x)=0,\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\right\}$, საიდანაც $\left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^N$ წერტილების დისკრეტულობიდან გამომდინარე, დავასკვნით $c_k=0,\ k=1,2, \ldots, N$. □

განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი სისტემა S-ზე:

$$\mathcal{X}_j(x)=\left[B\left(x, \partial_x\right) \Gamma(x-z,\ \omega)\right]_{z=z^{(j)}}, \qquad j=1,1,3, \ldots, \tag{440}$$

სადაც $\left\{z^{(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია S_e-ზე,

$$B\left(x, \partial_x\right)=\frac{\partial}{\partial n(x)}+a, \quad x \in S, \tag{441}$$

$n(x)$ კვლავ არის S ზედაპირის მიმართ გარე ნორმალის ორტი x წერტილში.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

ლემა 32. ფუნქციათა სისტემა $\left\{\mathcal{X}_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ მკვრივია $L_2(S)$ სივრცეში და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

დამტკიცება. კვლავ ვაჩვენოთ, რომ თუ $h \in L_2(S)$ და

$$\int_S \mathcal{X}_j(x)\, h(x)\, dS=0, \quad j=1,2, \ldots, \tag{442}$$

მაშინ $h(x)=0,\ x \in S$.

(440), (441) და (442) თანაფარდობებიდან და $\left\{z^{(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ სიმრავლის S_e-ზე მკვრივობიდან მარტივად დავასკვნით , რომ

$$\begin{aligned} u(z):&=\int_S\left[\left(\frac{\partial}{\partial n(x)}+a\right) \Gamma(x-z,\ \omega)\right] h(x)\, dS_x= \\ &=W(h)(z)+a V(h)(z)=0, \quad z \in S_e. \end{aligned} \tag{443}$$

ცხადია, $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega_e^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ და ამიტომ დირიხლეს გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით $u(z)=0,\ z \in \Omega_e^-$. საიდანაც ანალიზურობის ძალით დავასკვნით $u(z)=0,\ z \in \Omega^-$. მაშინ

$$\{u(z)\}^+=-\frac{1}{2} h(z)+\mathcal{K} h(z)+a \mathcal{H} h(z)=0, \quad z \in S,$$

და კვლავ ჩართვის თეორემის ძალით გვექნება $h \in C^{1,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$. ამიტომ $u \in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega^{+}}\right)$ და Ω^{+} არეში იგი არის რობინის ერთგვაროვანი ამოცანის რეგულარული ამონახსნი. ამიტომ $u(z) = 0$, $z \in \Omega^{+}$. აქედან კი გამომდინარეობს $\{u(z)\}^{+} - \{u(z)\}^{-} = h(z) = 0$, $z \in S$, რაც ამთავრებს დებულების დამტკიცებას.

წრფივად დამოუკიდებლობა მტკიცდება ისევე, როგორც ლემა 27, 29 და 31-ში. □

შედეგი 33. ფუნქციათა სისტემა $\{\mathcal{X}_j\}_{j=1}^{\infty}$ მკვრივია $B^{s}_{p,p}(S)$ სივრცეში, $1 < p < \infty$ და $s \leq 0$.

დამტკიცება. იმავე მსჯელობით, როგორც ლემა 32-ის მტკიცებაში, ვაჩვენებთ, რომ დებულება მართებულია $L_p(S) = B^{0}_{p,p}(S)$ სივრცისათვის. აქედან კი გამომდინარეობს მისი მართებულობა $B^{s}_{p,p}(S)$ სივრცისათვის, რადგან $B^{s}_{p,p}(S) \subset B^{0}_{p,p}(S)$, როცა $s < 0$. □

განვიხილოთ ფუნქციათა სისტემა

$$\mathcal{V}_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in S_D, \\ \psi_k(x), & x \in S_N, \end{cases} \tag{444}$$

სადაც $\overline{S_D} \cup \overline{S_N} = S$, φ_k და ψ_k მოცემულია (410) და (430) ტოლობებით.

ლემა 34. ფუნქციათა $\{\mathcal{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა მკვრივია $B^{1-1/p}_{p,p}(S_D) \times B^{-1/p}_{p,p}(S_N)$ სივრცეში, 4/3<p<4, და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

დამტკიცება. დებულების დამტკიცებისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ (h_1, h_2) ეკუთვნის $B^{1-1/p}_{p,p}(S_D) \times B^{-1/p}_{p,p}(S_N)$ სივრცის შეუღლებულ სივრცეს

$$(h_1, h_2) \in \tilde{B}^{-(1-1/p)}_{p',p'}(S_D) \times \tilde{B}^{1/p}_{p',p'}(S_N) = \tilde{B}^{-1/p'}_{p',p'}(S_D) \times \tilde{B}^{1-1/p'}_{p',p'}(S_N) \tag{445}$$

და

$$\langle \varphi_k, h_1 \rangle_{S_D} + \langle \psi_k, h_2 \rangle_{S_N} = 0, \tag{446}$$

მაშინ h_1=0 S_D-ზე და h_2=0 S_N-ზე. აქ $\langle\ ,\ \rangle_{S_D}$ და $\langle\ ,\ \rangle_{S_N}$ აღნიშნავს დუალობას შესაბამის სივრცეებს შორის.

იმავე მსჯელობით, რაც გამოყენებული იყო ზემოთ მოყვანილ დამტკიცებაში, (444) და (446) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$u(y) = V_{S_D}(h_1)(y) + W_{S_N}(h_2)(y) = 0, \quad y \in \Omega^{+}, \tag{447}$$

რადგან (446) ტოლობა ემთხვევა პირობას

$$\left(\frac{\partial}{\partial n(y)} + a\right) u(y) = 0 \quad S_i\text{-ზე}.$$

შევნიშნოთ, რომ (445)-ის ძალით

$$V_{S_D}(h_1) \in H^1_{p',\mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \quad W_{S_N}(h_2) \in H^1_{p',\mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{448}$$

ამიტომ $u \in H^1_{p',\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ და ამასთან (447) ტოლობიდან (445) ჩართვის გამო წყვეტის ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ

$$\{u\}^- = 0 \qquad S_D\text{-ზე} \quad \text{და} \quad \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S_N\text{-ზე}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\frac{4}{3} < p < 4$, მაშინ p'-იც იმავე უტოლობას აკმაყოფილებს: $\frac{4}{3} < p' < 4$.

ამიტომ გარე შერეული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის გამო გვექნება $u(y) = 0$, $y \in \Omega^-$. მაშინ $h_1 = 0$ S-ზე და $h_2 = 0$ S-ზე, რადგან $\{u\}^+ - \{u\}^- = -h_2$ S-ზე და $\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u}{\partial n}\right\}^- = -h_1$ S-ზე.

წრფივად დამოუკიდებლობა მტკიცდება ზემოთ გამოყენებული სტანდარტული მსჯელობებით (იხ. ლემა 27, 29, 31). $\square$

ახლა განვიხილოთ ის სისტემა, რომელიც საკონტაქტო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგების დროს გამოიყენება.

ვთქვათ, S არის $\Omega_1 = \Omega^+$ და $\Omega_2 = \Omega^-$ არეების საერთო საკონტაქტო ზედაპირი, ხოლო $S_i \in \Omega^+$ და $S_e \in \Omega^-$ კვლავ იყოს იმავე სტრუქტურის ზედაპირები რაც ზემოთ: S_i მდებარეობს S-ის შიგნით და შემოსაზღვრავს Ω_i^+ არეს, ხოლო S_e მოიცავს S-ს და მისი გარე არე იყოს Ω_e^-.

$\left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ იყოს ყველგან მკვრივი სიმრავლე S_i-ზე, ხოლო $\left\{z^{(j)}\right\}$ კი - ყველგან მკვრივი სიმრავლე S_e-ზე.

ვთქვათ, Ω_1-ში გვაქვს ჰელმჰოლცის განტოლება

$$\left(\triangle + \rho_1 \omega^2\right) u^{(1)} = 0 \quad \Omega_1\text{-ში}, \quad \rho_1 = const > 0,$$

ხოლო Ω_2-ში კი

$$\left(\triangle + \rho_2 \omega^2\right) u^{(2)} = 0 \quad \Omega_2\text{-ში}, \quad \rho_2 = const > 0.$$

შესაბამისი ფუნდამენტური ამონახსნები იქნება $\Gamma\left(x, \sqrt{\rho_1}\ \omega\right)$ და $\Gamma\left(x, \sqrt{\rho_2}\ \omega\right)$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\gamma^{(1)}(x,\ y) = \Gamma\left(x - y, \sqrt{\rho_1}\ \omega\right), \quad \gamma^{(2)}(x,\ y) = \Gamma\left(x - y, \sqrt{\rho_2}\ \omega\right), \tag{449}$$

$$\gamma_j^{(1)}(x) = \Gamma\left(x - z^{(j)}, \sqrt{\rho_1}\ \omega\right), \quad z^{(j)} \in S_e, \tag{450}$$

$$\gamma_k^{(2)}(x) = \Gamma\left(x - y^{(k)}, \sqrt{\rho_2}\ \omega\right), \quad y^{(k)} \in S_i, \tag{451}$$

$$\varphi_k^{(2)}(x) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial n(y)} + a\right) \gamma^{(2)}(x, y)\right]_{y = y^{(k)}}, \quad y^{(k)} \in S_i. \tag{452}$$

შევადგინოთ შემდეგი ვექტორ-ფუნქციების სისტემა

$$\Psi_j(x) = \left[\gamma_j^{(1)}(x),\ \frac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)}\right], \quad x \in S, \tag{453}$$

$$\Phi_k(x) = \left[\varphi_k^{(2)}(x),\ \frac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)}\right], \quad x \in S. \tag{454}$$

ლემა 35. ვექტორ-ფუნქციათა სისტემა

$$\{\Psi_j\,(x)\,, \Phi_k\,(x)\}_{j,k=1}^{\infty}\,, \quad x \in S, \tag{455}$$

მკვრივია (სრულია) $B_{p,p}^{1-1/p}\,(S) \times B_{p,p}^{-1/p}\,(S)$, $1 < p < \infty$, სივრცეში და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

დამტკიცება. დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი: თუ ნებისმიერი $h = (h_1,\ h_2)$ ვექტორი, რომელიც ეკუთვნის $B_{p,p}^{1-1/p}\,(S) \times B_{p,p}^{-1/p}\,(S)$ სივრცის შეუღლებულ სივრცეს,

$$h = (h_1,\ h_2) \in B_{p',p'}^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)}\,(S) \times B_{p',p'}^{\frac{1}{p}}\,(S)\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{456}$$

აკმაყოფილებს პირობებს,

$$\langle \Psi_j, h \rangle_S = 0\,, \qquad \langle \Phi_k,\ h \rangle_S = 0, \quad j,\ k = 1, 2, 3, \dots\,, \tag{457}$$

მაშინ იგი ნულოვანი ვექტორია, $h_1 = 0,\ h_2 = 0$ S-ზე.

$z^{(j)}$ და $y^{(k)}$ წერტილების სიმრავლის ყველგან მკვრივობის გამო შესაბამისად S_e და S_i ზედაპირზე, (457)-დან (447) და (454) თანაფარდობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int\limits_S \gamma^{(1)}(x,z)\,h_1(x)dS_x + \int\limits_S \frac{\partial \gamma^{(1)}(x,z)}{\partial n(x)}\,h_2(x)dS_x = 0, \quad z \in S_e, \tag{458}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n(y)} + a\right)\left[\int\limits_S \gamma^{(2)}(x,y)\,h_1(x)dS_x + \int\limits_S \frac{\partial \gamma^{(2)}(x,y)}{\partial n(x)}\,h_2(x)dS_x\right] = 0, \quad y \in S_i. \tag{459}$$

ამიტომ სტანდარტული მსჯელობით მივიღებთ, რომ შემდეგი ვექტორები

$$u_m\,(y) = \int\limits_S \gamma^{(m)}(x,y)\,h_1(x)dS_x + \int\limits_S \frac{\partial \gamma^{(m)}(x,y)}{\partial n(x)}\,h_2(x)dS_x\,, \qquad y \in \mathbb{R}^3 \backslash S, \tag{460}$$

ამონახსნებია შემდეგი ამოცანების:

$$\left(\Delta + \rho_1\omega^2\right)u_1\,(y) = 0, \quad y \in \Omega_e^-,$$

$$\{u_1\,(y)\}^- = 0, \quad y \in S_e,$$

$$u_1 \in C^\infty(\overline{\Omega_l^-}) \cap Z(\Omega^-)$$

და

$$\begin{aligned}
&\left(\Delta+\rho_2\omega^2\right)u_2\left(y\right)=0, \quad y\in\Omega_i^+,\\
&\left\{\frac{\partial u_2\left(y\right)}{\partial n\left(y\right)}\right\}^+ + a\{u_2\left(y\right)\}^+=0, \quad y\in S_i\text{-ზე},\\
&u_2\in C^\infty(\overline{\Omega_i^+}).
\end{aligned}$$

ამიტომ $u_1\left(y\right)=0$, $y\in\Omega_e^-$ და $u_2\left(y\right)=0$, $y\in\Omega_i^+$ და ანალიზურობის გამო გვექნება

$$u_1\left(y\right)=0, \quad y\in\Omega_2=\Omega^-, \quad u_2\left(y\right)=0, \quad y\in\Omega_1=\Omega^+. \tag{461}$$

თუ გავითვალისწინებთ (456) ჩართვებს, დავინახავთ, რომ

$$\begin{aligned}
&u_m\in H^1_{p'}\left(\Omega^+\right),\\
&u_m\in H^1_{p',\mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right)\cap Z\left(\Omega^-\right).
\end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ ზედაპირული პოტენციალის წყვეტის ფორმულებს, მივიღებთ

$$\{u_m\}_S^+-\{u_m\}_S^-=h_2\,, \quad \left\{\frac{\partial u_m}{\partial n}\right\}_S^+-\left\{\frac{\partial u_m}{\partial n}\right\}_S^-=-h_1, \quad m=1,2,$$

ანუ

$$h_2=\{u_1\}^+=-\{u_2\}^-, \quad h_1=-\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+=\left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^-.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\{u_1\}_S^++\{u_2\}_S^-=0\,, \quad \left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}_S^++\left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}_S^-=0.$$

ამიტომ წყვილი $(u_1,\ -u_2)$ ამონახსნია ერთგვაროვანი საკონტაქტო ამოცანის და ამიტომ ერთადერთობის თეორემის ძალით $u_1=0$ Ω_1-ში და $u_2=0$ Ω_2-ში, რაც (461) ტოლობასთან ერთად იძლევა $h_1=h_2=0$ S-ზე.

ამით (455) სისტემის სისრულე დამტკიცებულია.

წრფივად დამოუკიდებლობის საჩვენებლად, დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, რაიმე ნატურალური N-თვის და a_k, b_k, $k=1,\dots,N$, კომპლექსური რიცხვებისათვის, სადაც $\sum_{k=1}^N\left(|a_k|+|b_k|\right)\neq0$, სრულდება ტოლობა:

$$\sum_{k=1}^N\left(a_k\Psi_k\left(x\right)+b_k\Phi_k\left(x\right)\right)=0, \quad x\in S. \tag{462}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$v_1\left(x\right)=\sum_{k=1}^N a_k\gamma_k^{(1)}\left(x\right), \quad x\in\mathbb{R}^3\backslash\left\{z^{(1)},\dots,z^{(N)}\right\}, \tag{463}$$

$$v_2\left(x\right)=\sum_{k=1}^N b_k\varphi_k^{(2)}\left(x\right), \quad x\in\mathbb{R}^3\backslash\left\{y^{(1)},\dots,y^{(N)}\right\}. \tag{464}$$

ცხადია,

$$v_1 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus \left\{z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}\right\}\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3 \setminus \left\{z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}\right\}\right), \tag{465}$$

$$v_2 \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3 \setminus \left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\right\}\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3 \setminus \left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\right\}\right). \tag{466}$$

(462)-(464)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}
\left(\triangle + \rho_1\omega^2\right) v_1(y) &= 0, \quad x \in \Omega^+,\\
\left(\triangle + \rho_2\omega^2\right) v_2(y) &= 0, \quad x \in \Omega^-,\\
\{v_1\}_S^+ + \{v_2\}_S^- &= 0, \quad x \in S,\\
\left\{\frac{\partial v_1}{\partial n}\right\}_S^+ + \left\{\frac{\partial v_2}{\partial n}\right\}_S^- &= 0, \quad x \in S.
\end{aligned}$$

რადგან (465) და (466)-ის თანახმად, v_1 და v_2 რეგულარული ვექტორებია, ამიტომ საკონტაქტო ამოცანისათვის ერთადერთობის თეორემის თანახმად გვექნება

$$v^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \Omega^+ \quad \text{და} \quad v^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

აქედან კი v_1 და v_2 ვექტორების ანალიზურობის ძალით დავასკვნით, რომ

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}\right\},\\
v_2(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\right\}.
\end{aligned}$$

რადგან $z^{(j)}$ და $y^{(j)}$ წერტილები იზოლირებულია, ამიტომ (462)-დან დავასკვნით $a_k = b_k = 0$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს (455) სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას. □

ახლა განვიხილოთ ის სისტემა, რომლითაც ხდება იმ შერეული საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნის მიახლოება, რომელიც, როგორც კერძო შემთხვევას, მოიცავს ბზარისა და ეკრანის ტიპის ამოცანებს.

ამ ტიპის სისტემის აგების მოტივაციას იძლევა შერეული ამოცანის გადაწერა შემდეგი ეკვივალენტური სახით (იხ. ქვეპარაგრაფი 4.2):

$$\begin{aligned}
\left(\triangle + \rho_1\omega^2\right) u_1(y) &= 0, && x \in \Omega^+,\\
\left(\triangle + \rho_2\omega^2\right) u_2(y) &= 0, && x \in \Omega^-,\\
\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- &= F && S\text{-ზე},\\
\left\{\frac{\partial u_1}{\partial n}\right\}^+ + \left\{\frac{\partial u_2}{\partial n}\right\}^- &= F^+ + F^- && S_C\text{-ზე},\\
\{u_1\}^+ - \{u_2\}^- &= f_1 && S_T\text{-ზე},
\end{aligned} \tag{467}$$

სადაც $u_1 \in H_p^1(\Omega^+)$, $u_2 \in H^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$,

$$F = \begin{cases} F^{(+)} - F^{(-)} & S_C\text{-ზე},\\ F_1 & S_C\text{-ზე}, \end{cases} \qquad F \in B_{p,p}^{-1/p}(S),$$

$$F^{(+)}, \;\; F^{(-)} \in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_C), \;\; f_1 \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_T), \;\; F_1 \in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_T).$$

მოტივაციის დაფუძნებაა შემდეგი ფაქტი. თუ (466) შერეული საკონტაქტო ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \gamma_j^{(1)}(x), \quad x \in \Omega^+,$$
$$u_2(x) = \sum_{k=1}^{M} b_k \varphi_k^{(2)}(x), \quad x \in \Omega^-,$$

მაშინ საჭიროა დაკმაყოფილდეს შემდეგი მიახლოებითი ტოლობები

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)} - \sum_{k=1}^{M} b_k \frac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)} \approx F \qquad S\text{-ზე},$$
$$\sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)} + \sum_{k=1}^{M} b_k \frac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)} \approx F^+ + F^- \quad S_C\text{-ზე},$$
$$\sum_{j=1}^{N} a_j \gamma_j^{(1)}(x) - \sum_{k=1}^{M} b_k \varphi_k^{(2)}(x) \approx f_1 \qquad S_T\text{-ზე},$$

ანუ

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \begin{bmatrix} r_S \dfrac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)} \\ r_{S_C} \dfrac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)} \\ r_{S_T} \gamma_j^{(1)}(x) \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{N} b_k \begin{bmatrix} r_S \dfrac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)} \\ -r_{S_C} \dfrac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)} \\ r_{S_T} \varphi_k^{(2)}(x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} F \\ F^+ + F^- \\ f_1 \end{bmatrix}.$$

ეს მოსაზრება გვაძლევს მოტივაციას განვიხილოთ ვექტორ ფუნქციათა შემდეგი სისტემა

$$P_j(x) = \left[r_S \frac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)}, \quad r_{S_C} \frac{\partial \gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)}, \quad r_{S_T} \gamma_j^{(1)}(x) \right]^T, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{468}$$
$$Q_k(x) = \left[r_S \frac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)}, \quad r_{S_C} \frac{\partial \varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)}, \quad r_{S_T} \varphi_k^{(2)}(x) \right]^T, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{469}$$

სადაც $\gamma_j^{(1)}(x)$ და $\varphi_k^{(2)}(x)$ განსაზღვრულია (450)-(452) ტოლობებით.

ლემა 36. ვექტორ ფუნქციათა სისტემა $\{P_j(x), Q_k(x)\}_{j,\ k=1}^{\infty}$ სრულია $\mathbb{H} \equiv B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S) \times B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_C) \times B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_T)$ სივრცეში, $\frac{4}{3} < p < 4$, და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

დამტკიცება. დებულების დასამტკიცებლად კვლავ ვისარგებლოთ ზემოთ გამოყენებული მიდგომებით. ამრიგად, უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $h = (h_1, h_2, h_3)$ ეკუთვნის $\mathbb{H}$ სივრცის შეუღლებულ სივრცეს

$$h \in B_{p',p'}^{\frac{1}{p}}(S) \times \tilde{B}_{p',p'}^{\frac{1}{p}}(S_C) \times B_{p',p'}^{-\left(1-\frac{1}{p}\right)}(S_T) \tag{470}$$

და

$$\langle P_j, \ h\rangle = 0, \quad \langle Q_k, \ h\rangle = 0, \quad j,k = 1,2,\dots\,, \tag{471}$$

მაშინ $h = 0$. თუ გავითვალისწინებთ $z^{(j)}$ და $y^{(k)}$ წერტილების მკვრივობას, შესაბამისად S_e და S_i ზედაპირებზე (471) ასე გადაიწერება

$$\int\limits_S \frac{\partial\gamma^{(1)}(x,y)}{\partial n(x)} h_1(x)\,dS_x + \int\limits_{S_C} \frac{\partial\gamma^{(1)}(x,y)}{\partial n(x)} h_2(x)\,dS_x + $$

$$+ \int\limits_{S_T} \gamma^{(1)}(x,y)\, h_3(x)\,dS_x = 0\,, \quad y \in S_e, \tag{472}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n(y)} + a\right)\left[\int\limits_S \frac{\partial\gamma_j^{(2)}(x,y)}{\partial n(x)} h_1(x)\,dS_x - \int\limits_{S_C} \frac{\partial\gamma_j^{(2)}(x,y)}{\partial n(x)} h_2(x)\,dS_x + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{S_T} \gamma_j^{(2)}(x)\, h_3(x)\,dS_x\right] = 0\,, \quad y \in S_i. \tag{473}$$

ამიტომ, კვლავ რობინის შიგა ამოცანის და დირიხლეს გარე ამოცანის რეგულარული ამონახსნის ერთადერთობიდან გამომდინარე, დავასკვნით, რომ

$$w_1(y) = \int\limits_S \frac{\partial\gamma^{(1)}(x,y)}{\partial n(x)} h_1(x)\,dS_x + \int\limits_{S_C} \frac{\partial\gamma^{(1)}(x,y)}{\partial n(x)} h_2(x)\,dS_x + $$

$$+ \int\limits_{S_T} \gamma^{(1)}(x,y)\, h_3(x)\,dS_x = 0\,, \quad y \in \Omega_e^-, \tag{474}$$

$$w_2(y) = \int\limits_S \frac{\partial\gamma^{(2)}(x,y)}{\partial n(x)} h_1(x)\,dS_x - \int\limits_{S_C} \frac{\partial\gamma^{(2)}(x,y)}{\partial n(x)} h_2(x)\,dS_x + $$

$$+ \int\limits_{S_T} \gamma^{(2)}(x,y)\, h_3(x)\,dS_x = 0\,, \quad y \in \Omega_i^+, \tag{475}$$

რადგან $w_1 \in C^\infty\left(\overline{\Omega_e^-}\right)$ და $w_2 \in C^\infty\left(\overline{\Omega_i^+}\right)$.

თუ გავითვალისწინებთ (470) ჩართვას, მარტივად დავასკვნით, რომ $w_m \in H_{p'}^1(\Omega^\pm) \cap Z(\Omega^-)$, $m = 1,2$, და W_m ანალიზურია $\Omega^\pm$ არეებში. ამიტომ (474) და (475) ტოლობები იძლევა:

$$w_1(y) = 0, \quad y \in \Omega^-, \quad w_2(y) = 0, \quad y \in \Omega^+. \tag{476}$$

(474), (475) და (476) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$\left.\begin{array}{l} \{w_1\}^+ - \{w_1\}^- = h_1 \quad S_T\text{-ზე} \\ \{w_2\}^+ - \{w_2\}^- = h_1 \quad S_T\text{-ზე} \end{array}\right\} \Rightarrow \{w_1\}^+ + \{w_2\}^- = 0 \quad S_T\text{-ზე}, \tag{477}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\dfrac{\partial w_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\dfrac{\partial w_1}{\partial n}\right\}^+ = -h_3 \ S_T\text{-ზე} \\ \left\{\dfrac{\partial w_2}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\dfrac{\partial w_2}{\partial n}\right\}^- = -h_3 \ S_T\text{-ზე}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\dfrac{\partial w_1}{\partial n}\right\}^+ + \left\{\dfrac{\partial w_2}{\partial n}\right\}^- = 0 \ S_T\text{-ზე}, \tag{478}$$

$$\left\{\frac{\partial w_1}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial W_1}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S_C\text{-ზე} \ \Rightarrow \left\{\frac{\partial w_1}{\partial n}\right\}^+ = 0 \quad S_C\text{-ზე}, \tag{479}$$

$$\left\{\frac{\partial w_2}{\partial n}\right\}^+ - \left\{\frac{\partial w_2}{\partial n}\right\}^- = 0 \quad S_C\text{-ზე} \ \Rightarrow \left\{\frac{\partial w_2}{\partial n}\right\}^+ = 0 \quad S_C\text{-ზე}, \tag{480}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{w_1\}^+ - \{w_1\}^- = h_1 + h_2 \quad S_T\text{-ზე} \\ \{w_2\}^+ - \{w_2\}^- = h_1 - h_2 \quad S_T\text{-ზე}\end{array}\right\} \Rightarrow \{w_1\}^+ + \{w_2\}^- = h_2 \quad S_T\text{-ზე}, \tag{481}$$

კვლავ გავიხსენოთ, რომ თუ $\frac{4}{3} < p < 4$, მაშინ $\frac{4}{3} < p' < 4$. ახლა შევნიშნოთ, რომ (477), (478), (479) და (480) პირობების გამო, ფუნქციათა წყვილი

$$(w_1, \ -w_2) \in H^1_{p'}\left(\Omega^+\right) \times \left[H^1_{p',\mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)\right]$$

წარმოადგენს ერთგვაროვანი სრული საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნს და რადგან $\frac{4}{3} < p' < 4$, ეს ამონახსნი ტრივიალურია

$$w_1(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \qquad w_2(x) = 0, \quad x \in \Omega^-,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$h_1 = 0 \quad S\text{-ზე}, \qquad h_2 = 0 \quad S_C\text{-ზე} \quad \text{და} \quad h_3 = 0 \quad S_T\text{-ზე}.$$

ეს ამტკიცებს ლემის პირველ ნაწილს.

$\{P_j(x), Q_k(x)\}_{j,k=1}^{\infty}$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ სრულდება ტოლობა

$$\sum_{j=1}^{N} a_j P_j(x) - \sum_{k=1}^{N} b_k Q_k(x) = 0, \tag{482}$$

ანუ კომპონენტობრივად

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N} a_j [P_j(x)]_1 - \sum_{k=1}^{N} b_k [Q_k(x)]_1 = 0 \qquad S\text{-ზე},\\ &\sum_{j=1}^{N} a_j [P_j(x)]_2 - \sum_{k=1}^{N} b_k [Q_k(x)]_2 = 0 \qquad S_C\text{-ზე},\\ &\sum_{j=1}^{N} a_j [P_j(x)]_3 - \sum_{k=1}^{N} b_k [Q_k(x)]_3 = 0 \qquad S_T\text{-ზე},\end{aligned}$$

სადაც a_j და b_k რაიმე კომპლექსური რიცხვებია. ვაჩვენოთ, რომ მაშინ $a_j = 0$, $b_k = 0, \ j,k = 1,2,\ldots,N$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$v_1(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \gamma_j^{(1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}\right\}, \tag{483}$$

$$v_2\left(x\right)=\sum_{k=1}^{N}b_k\varphi_k^{(2)}\left(x\right),\quad x\in\mathbb{R}^3\backslash\left\{y^{(1)},\ldots,y^{(N)}\right\}. \tag{484}$$

ცხადია, v_1 და v_2 ნამდვილი ცვლადის ანალიზური ფუნქციებია თავის განსაზღვრის არეში და (482)-(484) ტოლობების თანახმად

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial v_1}{\partial n}\right\}^+-\left\{\frac{\partial v_2}{\partial n}\right\}^-&=0\quad S\text{-ზე},\\
\left\{\frac{\partial v_1}{\partial n}\right\}^++\left\{\frac{\partial v_2}{\partial n}\right\}^-&=0\quad S_C\text{-ზე},\\
\left\{v_1\right\}^+-\left\{v_2\right\}^-&=0\quad S_T\text{-ზე},\\
v_1\in C^\infty\left(\overline{\Omega^+}\right),\quad v_2\in C^\infty&\left(\overline{\Omega^-}\right)\cap Z\left(\Omega^-\right).
\end{aligned}$$

ამიტომ ფუნქციების წყვილი (v_1,v_2) რეგულარული ამონახსნია ერთგვაროვანი შერეული ამოცანის და ერთადერთობის თეორემის თანახმად

$$v_1\left(x\right)=0,\qquad x\in\Omega^+,\qquad v_2\left(x\right)=0,\qquad x\in\Omega^-.$$

მაშინ, ანალიზურობის ძალით $v_1(x)=0$ და $v_2(x)=0$ თავის განსაზღვრის არეში და რადგან $z^{(j)}$ და $y^{(k)}$ წერტილები იზოლირებულია, (483) და (484) ტოლობებიდან დავასკვნით, რომ $a_j=0$, $j=1,\ldots,N$, და $b_k=0$, $k=1,\ldots,N$. □

შენიშვნა 37. რადგანაც ბზარის ტიპის ამოცანა არის შერეული საკონტაქტო ამოცანის კერძო შემთხვევა, როდესაც Ω^+ და Ω^- არეებში გვაქვს ერთი და იგივე ჰელმჰოლცის განტოლება და საკონტაქტო პირობები S_T-ზე ერთგვაროვანია, ამიტომ ფაქტობრივად, ჩვენ გვაქვს ალგორითმი ბზარის ტიპის ამოცანისათვისაც. ფაქტობრივად, (466) ამოცანაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $\rho_1=\rho_2=1$, $F_1=0$ და $f_1=0$ S_T-ზე, დანარჩენი პირობები იგივე რჩება.

ამ თეორიული კვლევის მნიშვნელობა ის არის, რომ სასაზღვრო ამოცანები დავიყვანეთ მოცემულ სრულ სისტემაში ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხზე. ცხადია, ამ აპროქსიმაციის რიცხვითი რეალიზაცია დაკავშირებულია კვლავ არსებით სირთულეებთან, რაც ცალკე კვლევის საგანია.

8 ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დრეკადობის თეორიაში

უკანასკნელ პერიოდში დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების მიახლოებით ამოსახსნელად ფართოდ გამოიყენება

პოტენციალთა მეთოდი. შექმნილია სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებათა (სიგ) მეთოდის ორი მიმართულება. პირველ მიმართულებაში, რომელსაც სიგ-ის პირდაპირ მეთოდს უწოდებენ, სასაზღვრო ამოცანები ინტეგრალურ განტოლებებზე დაიყვანება გადაადგილების ვექტორის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის - სომილიანის ტიპის ფორმულების გამოყენებით. მეორე მიმართულებაში გამოიყენება ამონახსნის წარმოდგენადობა მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალთა სახით. აღსანიშნავია, რომ სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებები, რომლებზეც მიიყვანება სასაზღვრო ამოცანები, წარმოადგენენ ფსევდოდიფერენციალურ ელიფსურ განტოლებებს ზედაპირზე. არსებობს ასეთი განტოლებების მიახლოებითი ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდი. მონოგრაფიებში [59, 60, 61] მოყვანილია ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდით ამოხსნილი მყარი დეფორმადი სხეულის დრეკადობის თეორიის მრავალი პრაქტიკული ამოცანა. ამ მეთოდის თეორიული ასპექტები დაწვრილებითაა გადმოცემული ფუნდამენტურ ნაშრომებში [14, 50]-ში. აქვე შესაძლებელია გაფართოებული ბიბლიოგრაფიის ნახვა. [14] მონოგრაფიაში განვითარებულია დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის განსხვავებული მეთოდი იზოტროპული სხეულებისათვის. ამ მეთოდს უწოდებენ - ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდს (ფამ). ამ მეთოდის ჩამოყალიბებისა და მისი კრებადობის იმ მიდგომით დასამტკიცებლად, რომელიც მოყვანილია მითითებულ მონოგრაფიაში, საჭიროა ჯერ თეორიულად გამოვიკვლიოთ პოტენციალთა მეთოდით განხილული ამოცანები. ამასთან, მსჯელობებში არსებითად გამოიყენება კელვინის ფუნდამენტური მატრიცის ცხადი სახე და მისი ელემენტების თვისებები. განზოგადებული მწკრივების მეთოდს ის უპირატესობა აქვს, რომ იგმ-საგან განსხვავებით, აქ გამოთვლების დროს ინტეგრალქვეშა ფუნქციები არ შეიცავენ სინგულარობას. ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ფართოდ არის გამოყენებული [55] მონოგრაფიაში მრავალი პრაქტიკული ამოცანის ამოსახსნელად.

ამ პარაგრაფში მოცემულია ფამ-ის გავრცელება დრეკადობის ანიზოტროპულ თეორიაში. ქვემოთ განხილული იქნება ანიზოტროპული გარემოს დრეკადობის თეორიის სტატიკის ყველა ძირითადი სასაზღვრო ამოცანა. ფამ-ის დაფუძნება დრეკადობის ანიზოტროპულ თეორიაში რთულდება იმით, რომ ამ შემთხვევაში ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა არ ჩაიწერება ელემენტარული ფუნქციების საშუალებით. მიღებული შედეგების გადატანა შესაძლებელია მათემატიკური ფიზიკის სტატიკისა და მდგრადი რხევისა უფრო რთული მოდელებისათვის.

ქვემოთ ჩვენ არსებითად გამოვიყენებთ [62] ნაშრომში მიღებულ შედეგებს, სადაც შესწავლილია დრეკადობის ანიზოტროპული თეორიის სტატიკის ამოცანები პოტენციალთა მეთოდით.

ამოცანა $(\mathrm{I})^{\pm}$. ვთქვათ, $\Omega^{+}\subset\mathbb{R}^{3}$ სასრული დიამეტრის მქონე არეა ბმული $S=\partial\Omega^{+}$ საზღვრით: $\overline{\Omega^{+}}=\Omega^{+}\cup S$, $\Omega^{-}=\mathbb{R}^{3}\backslash\overline{\Omega^{+}}$. ვიგულისხმოთ, რომ S არის $C^{2,\alpha}$, $0<\alpha\leq 1$, კლასის ზედაპირი.

განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

$$\mathbb{A}\left(\partial_{x}\right)u\left(x\right)=0,\quad x\in\Omega^{\pm}, \tag{485}$$

$$\left[u\left(z\right)\right]^{\pm}=f\left(x\right),\quad z\in S, \tag{486}$$

სადაც $\mathbb{A}$ ელიფსური დიფერენციალური მატრიცული ოპერატორია, რომელიც მიღებულია დრეკადობის თეორიის წონასწორობის განტოლებებიდან:

$$\mathbb{A}\left(\partial\right)=\left\|\mathbb{A}_{kj}\left(\partial_{x}\right)\right\|_{3\times 3},\;\; \mathbb{A}_{kj}\left(\partial_{x}\right)=c_{kpjq}\partial_{p}\partial_{q},\;\; \partial_{k}=\frac{\partial}{\partial x_{k}},\;\; k,j=1,2,3, \tag{487}$$

$c_{kjpq}=c_{pqkj}=c_{jkpq}$ დრეკადი მუდმივებია, $u=\left(u_{1},u_{2},u_{3}\right)^{\top}$ - გადაადგილების ვექტორია, $f=\left(f_{1},f_{2},f_{3}\right)^{\top}$ არის S-ზე მოცემული ვექტორ ფუნქცია, $f_{j}\in C^{1,\beta}\left(S\right)$, $0<\beta<\alpha\leq 1$, $j=1,2,3$.

(487)-ში იგულისხმება აჯამვა 1-დან 3-მდე განმეორებითი ინდექსების მიმართ. $(\cdot)^{\top}$ სიმბოლო აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას.

$\mathbb{A}$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა აღვნიშნოთ $\Gamma=\left\|\Gamma_{kj}\right\|_{3\times 3}$ სიმბოლოთი (იხილე [62]):

$$\Gamma\left(x\right)=-\frac{1}{8\pi^{2}\left|x\right|}\int_{0}^{2\pi}\mathbb{A}^{-1}\left(a\overline{\eta}\right)d\varphi, \tag{488}$$

სადაც $\eta=\left(\cos\varphi,\sin\varphi,0\right)$, $a=\left\|a_{kj}\right\|_{3\times 3}$ - ისეთი ორთოგონალური მატრიცაა, რომ $a^{\top}x^{\top}=\left(0,0,|x|\right)^{\top}$.

ჯერ განვიხილოთ შიგა $(\mathrm{I})^{+}$ ამოცანა. [62]-ში ნაჩვენებია, რომ ამოცანა $(\mathrm{I})^{+}$ ცალსახად ამოხსნადია და ამონახსნი წარმოდგენადია ორმაგი ფენის პოტენციალის სახით:

$$u\left(x\right)=\int\limits_{S}\left[T\left(\partial_{y},n\left(y\right)\right)\Gamma\left(y-x\right)\right]^{\top}g\left(y\right)dS_{y},\quad x\in\Omega^{+}, \tag{489}$$

სადაც $n\left(y\right)$ არის გარე ნორმალის ორტი $y\in S$ წერტილში, $T\left(\partial_{y},n\right)$ ძაბვის ოპერატორია

$$T\left(\partial,n\right)=\left\|T_{kj}\left(\partial,n\right)\right\|_{3\times 3},\quad T_{kj}\left(\partial,n\right)=c_{kpjq}n_{p}\partial_{q}. \tag{490}$$

სიმკვრივე $g=\left(g_{1},g_{2},g_{3}\right)^{\top}$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების ნორმალური სისტემიდან

$$-\frac{1}{2}g\left(z\right)+\int\limits_{S}\left[T\left(\partial_{y},n\left(y\right)\right)\Gamma\left(y-z\right)\right]^{\top}g\left(y\right)dS_{y}=f\left(z\right),\quad z\in S. \tag{491}$$

რეგულარული ჩართვის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $g_k \in C^{1,\beta}(S)$ და

$$\|g\|_{L_2(S)} \leq c\|f\|_{L_2(S)}, \quad c = const > 0, \tag{492}$$

სადაც $\|\cdot\|_{L_2(S)}$ არის ნორმა $L_2(S)$ სივრცეში:

$$\|g\|^2{}_{L^2(S)} = \int\limits_S \left(|g_1(z)|^2 + |g_2(z)|^2 + |g_3(z)|^2\right) dS_z.$$

(489)-დან გამომდინარეობს, რომ $\forall x \in \overline{\Omega_0^+} \subset \Omega^+$:

$$|\partial^\gamma u(x)| \leq c_0\|g\|_{L^2(S)} \leq c_1\|f\|_{L^2(S)}, \tag{493}$$

სადაც $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ნებისმიერი მულტი ინდექსია.

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით (489)-დან მივიღებთ:

$$|u(x)|^2 \leq \left[\int\limits_S \frac{|g(y)|}{|x-y|^2} dS_y\right]^2 = \left[\int\limits_S \frac{1}{|x-y|^{1-\delta}} \cdot \frac{|g(y)|}{|x-y|^{1+\delta}} dS_y\right]^2$$
$$\leq \int\limits_S \frac{dS_y}{|x-y|^{2-2\delta}} \cdot \int\limits_S \frac{|g(y)|^2}{|x-y|^{2+2\delta}} dS_y \leq c\int\limits_S \frac{|g(y)|^2}{|x-y|^{2+2\delta}} dS_y \quad \forall x \in \Omega^+. \tag{494}$$

ავიღოთ δ ისეთი, რომ $2\delta < 1$; მაშინ (494)-დან გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^+} |u(x)|^2 dx \leq \int\limits_{\Omega^+} dx \int\limits_S \frac{c|g(y)|^2}{|x-y|^{2+2\delta}} dS_y \leq c\int\limits_S |g(y)|^2 dS_y \int\limits_{\Omega^+} \frac{dx}{|x-y|^{2+2\delta}}.$$

ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\|u\|_{L^2(\Omega^+)} \leq c\|g\|_{L^2(S)} \leq c\|f\|_{L^2(S)}. \tag{495}$$

ჩამოვაყალიბოთ მიღებული შედეგები შემდეგი ლემის სახით.

ლემა 38. თუ u (485)-(486) ამოცანის რეგულარულია მონახსნია, მაშინ იგი წარმოდგენადია (489) სახით და ადგილი აქვს (493) და (495) თანაფარდობებს.

ახლა შევუდგეთ (485)-(486) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგებას. ვთქვათ,

$$x_0 \overline{\in} \Omega^+, \quad B(x_0, \rho) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < \rho, \quad \rho > 0\right\}, \quad \Sigma_0 = \partial B(x_0, \rho).$$

ჩავთვალოთ, რომ $\overline{\Omega^+} \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \varnothing$.

აღვნიშნოთ $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=1}^\infty$-ით $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right) \in \Sigma_0$ წერტილთა ყველგან მკვრივი სიმრავლე Σ_0-ზე.

ვთქვათ, $\Gamma^{(j)}$ არის Γ მატრიცის j-ური სვეტი და განვიხილოთ ვექტორთა შემდეგი სიმრავლე:

$$\begin{array}{lll}
\varphi^{(1)}(x)=\Gamma^{(1)}\big(x-x^{(1)}\big), & \varphi^{(2)}(x)=\Gamma^{(2)}\big(x-x^{(1)}\big), & \varphi^{(3)}(x)=\Gamma^{(3)}\big(x-x^{(1)}\big), \\
\varphi^{(4)}(x)=\Gamma^{(1)}\big(x-x^{(2)}\big), & \varphi^{(5)}(x)=\Gamma^{(2)}\big(x-x^{(2)}\big), & \varphi^{(6)}(x)=\Gamma^{(3)}\big(x-x^{(2)}\big), \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\varphi^{(3k-2)}(x)=\Gamma^{(1)}\big(x-x^{(k)}\big), & \varphi^{(3k-1)}(x)=\Gamma^{(2)}\big(x-x^{(k)}\big), & \varphi^{(3k)}(x)=\Gamma^{(3)}\big(x-x^{(k)}\big), \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
\end{array} \tag{496}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Phi(\Sigma_0) = \left\{\varphi^{(k)}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad x\overline{\in}\Sigma_0. \tag{497}$$

ცხადია, რომ (497) სისტემის თითოეული ვექტორი (485) განტოლების ამონახსნია $\mathbb{R}^3\backslash\Sigma_0$-ში.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 39. $\Phi(\Sigma_0)$ სისტემა სრულია $L^2(S)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, რაიმე $h \in L^2(S)$ ვექტორისათვის სრულდება ორთოგონალობის შემდეგი პირობები

$$\int\limits_S h(y)\,\varphi^{(k)}(y)\,dS_y = 0, \quad k=\overline{1,\infty}. \tag{498}$$

ვაჩვენოთ, რომ მაშინ $h=0$.

(498) თანაფარდობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_S h(y)\,\Gamma\left(y-x^{(k)}\right)dS_y = 0. \tag{499}$$

ავაგოთ მარტივი ფენის პოტენციალი

$$V(x) = \int\limits_S \Gamma(x-y)\,h(y)\,dS_y. \tag{500}$$

ცხადია, რომ მარტივი ფენის (500) პოტენციალი, როცა $h \in L^2(S)$, წარმოადგენს ნამდვილი x ცვლადის ანალიზურ ვექტორს Ω^+ და Ω^- არეებში [62]. V ვექტორის Σ_0-ზე უწყვეტობისა და $\left\{x^{(k)}\right\}$ სიმრავლის Σ_0-ში მკვრივობის გამო დავასკვნით, რომ

$$V(x) = 0, \quad x \in \Sigma_0.$$

რადგან V არის (485) განტოლების ამონახსნი $\mathbb{R}^3\backslash S$-ში, ამიტომ $(\mathrm{I})^+$ ამოცანის $B(x_0,\rho)$ არეში ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$V(x) = 0, \quad x \in B(x_0,\rho).$$

აქედან, V ვექტორის Ω^- არეში ნალიზურობის გამო დავასკვნით

$$V(x)=0, \quad x\in\Omega^-. \tag{501}$$

მარტივი ფენის პოტენციალის თვისებების გამოყენებით (500) და (501)-დან გვექნება:

$$[T(\partial_z,n(z))V(z)]^-=\frac{1}{2}h(z)+\int\limits_S T(\partial_z,n(z))\Gamma(z-y)h(y)\,dS_y=0, \tag{502}$$

თითქმის ყველა $z\in S$ -თვის.

რეგულარული ჩართვის თეორემის გამოყენებით [14, 62] (502) განტოლებიდან გვექნება, რომ $h\in C^{1,\beta}(S)$, $0<\beta<\alpha$. მაშინ V იქნება რეგულარული ვექტორი $\overline{\Omega^+}$-ში და $\overline{\Omega^-}$-ში. მაშინ (501)-დან გამომდინრეობს, რომ

$$V(x)=0, \quad x\in\overline{\Omega^+}.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ მარტივი ფენისათვის წყვეტის ფორმულებს, მივიღებთ ([62])

$$[T(\partial_z,n(z))V(z)]^- - [T(\partial_z,n(z))V(z)]^+ = h(z)=0, \quad z\in S.$$

ამგვარად, ვექტორთა $\Phi(\Sigma_0)$ სისტემა სრულია $L^2(S)$-ში. □

თეორემა 40. სისტემა $\Phi(\Sigma_0)$ წრფივად დამოუკიდებელია $L^2(S)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, არსებობს ისეთი ნამდვილი c_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ რიცხვები, რომ სრულდება პირობა

$$\psi_n(z)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi^{(k)}(z)=0, \quad z\in S, \tag{503}$$

სადაც n რაიმე ნატურალური რიცხვია.

მაშინ, ცხადია, რომ ვექტორი

$$\psi_n(z)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi^{(k)}(z) \tag{504}$$

წარმოადგენს ერთგვაროვანი $(\mathrm{I})^+$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს Ω^+ არეში და ამიტომ

$$\psi_n(z)=0, \quad z\in\Omega^+. \tag{505}$$

ψ_n ვექტორის $\mathbb{R}^3\backslash\{x^1,\dots,x^p\}$-ში ანალიზურობის გამო, სადაც $p=\frac{n}{3}$, თუ n 3-ის ჯერადია და $p=1+\left[\frac{n}{3}\right]$ სხვა დანარჩენ შემთხვევებში, (505)-დან გვექნება

$$\psi_n(z)=0, \quad z\in\mathbb{R}^3\backslash\left\{x^{(1)},\dots,x^{(p)}\right\}. \tag{506}$$

შევარჩიოთ $\varepsilon > 0$ იმდენად მცირე, რომ ბირთვი $\overline{B}\left(x^{(q)}, \varepsilon\right)$, $q = 1, \ldots, p$, არ შეიცავდეს $x^{(1)}, \ldots, x^{(q-1)}, x^{(q+1)}, \ldots, x^{(p)}$ წერტილებს. ვთქვათ, $S_q = \partial B\left(x^{(q)}, \varepsilon\right)$. განვიხილოთ ვექტორი

$$T\left(\partial_z, n\left(z\right)\right) \psi_n\left(z\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k T\left(\partial_z, n\left(z\right)\right) \varphi^{(k)}\left(z\right), \quad z \in S_q,$$

სადაც $n\left(z\right)$ არის S_q ზედაპირის გარე ნორმალი z წერტილში:

$$n\left(z\right) = \frac{z - x^{(q)}}{\left|z - x^{(q)}\right|}.$$

მაშინ,

$$\int\limits_{S_q} T\left(\partial_z, n\left(z\right)\right) \Gamma\left(x - z\right) dS_z = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{B}\left(x^{(q)}, \varepsilon\right), \\ I, & x \in B\left(x^{(q)}, \varepsilon\right), \end{cases} \quad q = \overline{1, n},$$

ტოლობის ძალით [62], (506)-დან ვასკვნით,

$$c_k = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

ამგვარად, $\Phi\left(\Sigma_0\right)$ სისტემის ყოველი ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

ამით თეორემა 40 დამტკიცებულია. □

ვექტორთა $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}$ სისტემაზე მოჭიმული წრფივი გარსი აღვნიშნოთ $\mathcal{L}_N$-ით:

$$\mathcal{L}_N = \mathcal{L}\left\{\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(N)}\right\}, \tag{507}$$

N ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია.

ვთქვათ,

$$u^{(N)}\left(x\right) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi^{(k)}\left(x\right), \quad x \in \overline{\Omega}^{+}. \tag{508}$$

ცხადია, რომ (508) ვექტორი წარმოადგენს $(\mathrm{I})^{+}$ ამოცანის ამონახსნს და S-ზე აკმაყოფილებს პირობას

$$\left[u^{(N)}\left(z\right)\right]^{+} = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi^{(k)}\left(z\right), \quad z \in S. \tag{509}$$

(497) სისტემის სრულობის გამო ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი N რიცხვი და $a_k\left(k = 1, \ldots, N\right)$ მუდმივები, რომ ნებისმიერი f-სათვის $C^{1,\beta}\left(S\right)$ კლასიდან ადგილი ექნება ტოლობას

$$\left\|f - f^{N}\right\|_{L^2(S)} < \varepsilon, \tag{510}$$

სადაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია,

$$f^{(N)}(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k \overset{(k)}{\varphi}(z). \tag{511}$$

მაშინ, $(\mathrm{I})^+$ ამოცანის წრფივობისა და ლემა 38-ის ძალით გვექნება

$$\left|\partial^\gamma u(x) - \partial^\gamma u^N(x)\right| < c_0 \left\|f - f^{(N)}\right\|_{L^2(S)} < c_1\varepsilon, \quad x \in \overline{\Omega_0^+} \subset \Omega^+, \tag{512}$$

$$\left\|u - u^{(N)}\right\|_{L^2(\Omega^+)} \leq c_2 \left\|f - f^{(N)}\right\|_{L^2(S)} < c_3\varepsilon, \tag{513}$$

სადაც u არის (485)-(486) ამოცანის ამონახსნი, ხოლო $u^{(N)}$ განისაზღვრება (508) ფორმულით. c_k, $k = 0, 1, 2, 3$, მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ S ზედაპირზე და დრეკად მუდმივებზე.

(512) და (513) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ Ω^+ არის ნებისმიერ შიგა წერტილში (ანუ $\overline{\Omega_0^+} \subset \Omega^+$ არეში) $u^{(N)}(x)$ კრებადია $u(x)$-სკენ $C^k\left(\overline{\Omega_0^+}\right)$ მეტრიკით, ხოლო Ω^+ არეში $u^{(N)}$ მიმდევრობა კრებადია u-სკენ $L^2(\Omega^+)$ მეტრიკით. ამ მოსაზრებებიდან გამომდინარე, $u^{(N)}$ ვექტორს ვუწოდოთ $(\mathrm{I})^+$ ამოცანის მიახლოებითი ამონახსენი.

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობებიდან გამომდინარეობს, რომ $u^{(N)}$ მიახლოებითი ამონახსნის u ზუსტ ამონახსნთან სიახლოვეს უზრუნველყოფს $f^{(N)}$და f ვექტორების სიახლოვე, სადაც $f^{(N)}$-ს აქვს (511) სახე. f ვექტორის $f^{(N)}$ ვექტორებით საუკეთესო მიახლოების უზრუნველსაყოფად მოვიქცეთ შემდეგნაირად. (511) ფორმულაში a_k მუდმივები შევარჩიოთ ისე, რომ გამოსახულებამ

$$F_N = \left\|f - f^{(N)}\right\|^2_{L^2(S)} \tag{514}$$

მიიღოს უმცირესი მნიშვნელობა $\mathcal{L}_N$ წრფივ გარსზე (იხ. (507)).

ცხადია, რომ

$$F_N = \|f\|^2_{L^2(S)} + \sum_{k,j=1}^{N} a_k a_j \left(\varphi^{(k)}, \varphi^{(j)}\right) - 2\sum_{k=1}^{N} \left(f, \varphi^{(k)}\right) a_k, \tag{515}$$

სადაც სიმბოლო (f, g) აღნიშნავს $f = (f_1, f_2, f_3)$ და $g = (g_1, g_2, g_3)$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს $L_2(S)$ სივრცის აზრით.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$A_{kj} = \left(\varphi^{(k)}, \varphi^{(j)}\right) = A_{jk}, \quad \left(f, \varphi^{(k)}\right) = b_k, \quad k, j = \overline{1, N}. \tag{516}$$

მაშინ, (515) გამოსახულების მინიმალურობიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ საძიებელმა a_k მუდმივებმა უნდა დააკმაყოფილონ განტოლებათა სისტემა

$$\sum_{j=1}^{N} A_{kj} a_j = b_k, \quad k = \overline{1, N}. \tag{517}$$

თეორემა 40-დან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

ლემა 41. მატრიცა $A = \|A_{kj}\|$, სადაც A_{kj} მოცემულია (516) ფორმულით, არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული.

ამიტომ, (517) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი b_k მარჯვენა მხარისათვის და

$$a = A^{-1}b, \tag{518}$$

სადაც $a = (a_1, \ldots, a_N)^\top$, $b = (b_1, \ldots, b_N)^\top$, ხოლო A^{-1} არის A მატრიცის შებრუნებული.

თუ a_k კოეფიციენტებისათვის მიღებულ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (508)-ში, მივიღებთ $\mathcal{L}_N$ წრფივი გარსის შესაბამის $(\mathrm{I})^+$ ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს.

შენიშვნა 42. ანალოგიურად შეგვიძლია ავაგოთ $(\mathrm{I})^-$ ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი Ω^- არისათვის. ამ შემთხვევაში Σ_0-ს როლში შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერი სფერული ზედაპირი, რომელიც მთლიანად მოთავსებულია Ω^+ არეში.

ამოცანა $(\boldsymbol{II})^{\pm}$. ახლა განვიხილოთ მეორე ძირითადი შიგა ამოცანა:

$$\mathbb{A}\left(\partial_x\right) u\left(x\right) = 0, \quad x \in \Omega^+, \tag{519}$$

$$\left[T\left(\partial_z, n\left(z\right)\right) u\left(z\right)\right]^+ = f\left(z\right), \quad z \in S. \tag{520}$$

აქ $n\left(z\right)$ არის გარე ნორმალის ორტი $z \in S$ წერტილში.

დავუშვათ, რომ სრულდება ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები [62]

$$\int\limits_S f\left(y\right) \chi^{(j)}\left(y\right) dS_y = 0, \quad j = \overline{1,6}, \tag{521}$$

სადაც $\chi^{(j)}$ ვექტორები განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\left\{\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(6)}\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{522}$$

და ისინი წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელი ხისტი გადაადგილების ვქტორების სრულ სისტემას.

[62]-ში დამტკიცებულია, რომ თუ $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in C^{0,\beta}\left(S\right)$, $0 < \beta < \alpha \leq 1$, და სრულდება (521) პირობები, მაშინ (519)-(520) ამოცანას აქვს რეგულარული ამონახსნი $u \in C^1\left(\overline{\Omega^+}\right) \cap C^2\left(\Omega^+\right)$, რომელიც განისაზღვრება ხისტი გადაადგილების ვქტორის სიზუსტით, ხოლო ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტები ცალსახად განისაზღვრებიან.

ვთქვათ, Σ_0 იგივე სფერული ზედაპირია, რაც ზემოთ განვიხილეთ, და S-ზე განვიხილოთ ვექტორთა შემდეგი სისტემა

$$\Psi(\Sigma_0) = \left\{\psi^{(j)}(z)\right\}_{j=1}^{\infty} \cup \left\{\chi^{(j)}(z)\right\}_{j=1}^{6}, \quad z \in S, \tag{523}$$

სადაც

$$\psi^{(j)}(z) = T(\partial_z, n(z))\,\varphi^{(j)}(z), \quad j = \overline{1,\infty}, \tag{524}$$

და $\varphi^{(j)}$ განსაზღვრულია (496) ტოლობებით.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

თეორემა 43. $\Psi(\Sigma_0)$ სისტემა სრულია $L_2(S)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, არსებობს ისეთი $h \in L_2(S)$ ვექტორი, რომ

$$\left(h, \psi^{(j)}\right) = 0, \quad j = \overline{1,\infty}, \tag{525}$$

$$\left(h, \chi^{(q)}\right) = 0, \quad q = \overline{1,6}. \tag{526}$$

განვიხილოთ ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$W(x) = \int\limits_S \left[T(\partial_y, n(y))\,\Gamma(y-x)\right]^{\top} h(y)\,dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash S. \tag{527}$$

(525) ტოლობიდან გამომდინრეობს, რომ $x^{(k)} \in \Sigma_0$, $k = \overline{1,\infty}$, წერტილებში W ნულის ტოლი ხდება და $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ წერტილების სიმრავლის Σ_0-ში სიმკვრივის გამო

$$W(x) = 0, \quad x \in \Sigma_0.$$

ამიტომ დირიხლეს ამოცანის ერთადერთობიდან გამომდინარე, მივიღებთ

$$W(x) = 0, \quad x \in B(x_0, \rho).$$

W ვექტორის Ω^- არეში ანალიზურობის გამო დავასკვნით, რომ

$$W(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \tag{528}$$

მაშინ თითქმის ყველა $z \in S$-თვის გვაქვს

$$[W(z)]^- = -\frac{1}{2}h(z) + \int\limits_S \left[T(\partial_y, n(y))\,\Gamma(y-z)\right]^{\top} h(y)\,dS_y = 0. \tag{529}$$

(529) თანაფარდობა წარმოადგენს ნორმალურ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას h-ის მიმართ. ჩართვის თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $S \in C^{2,\alpha}$, (529) ამოცანის ყველა ამონახსნი ეკუთვნის $C^{1,\beta}$ კლასს, $0 < \beta < \alpha \le 1$. ამიტომ (527) ვექტორი რეგულარულია Ω^+ და Ω^- არეებში:

$$W \in C^1\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right) \cap C^2\left(\Omega^{\pm}\right).$$

ლიაპუნოვ-ტაუბერის ტიპის თეორემის თანახმად გვაქვს (იხ. [62]):

$$[T(\partial_z, n(z) W(z))]^+ = [T(\partial_z, n(z) W(z))]^- = 0.$$

მაგრამ მაშინ (იხ. [62])

$$W(x) = \sum_{q=1}^{6} c_q \chi^{(q)}(x), \quad x \in \Omega^+.$$

რადგან

$$[W(z)]^+ - [W(z)]^- = h(z),$$

ამიტომ გვექნება

$$h(z) = \sum_{q=1}^{6} c_q \chi^{(q)}(x).$$

$\left\{\chi^{(q)}\right\}_1^6$ ვექტორთა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის გამო, (526) პირობებიდან გვექნება $c_q = 0$, $q = \overline{1,6}$ და ამიტომ $h(z) = 0$, $z \in S$. □

თეორემა 44. სისტემა $\Psi(\Sigma_0)$ წრფივად დამოუკიდებელია $L_2(S)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოიძებნება ისეთი β_q და c_j რიცხვები, რომ

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j \psi^{(j)}(z) + \sum_{q=1}^{M} \beta_q \chi^{(q)}(z) = 0, \quad z \in S, \tag{530}$$

სადაც N ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და $M \leq 6$.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი j და q -სათვის:

$$\left(\psi^{(j)}, \chi^{(q)}\right) = 0.$$

ეს თანაფარდობა მარტივად გამოდის გრინის ფორმულიდან

$$\int_{\Omega^+} [\mathbb{A}u \cdot v - u \cdot \mathbb{A}v]\, dx = \int_S [Tu \cdot v - u \cdot Tv]\, dS, \tag{531}$$

თუ ავიღებთ $u = \varphi^{(j)}$ და $v = \chi^{(q)}$.

(530) და (531)-ის ძალით გვექნება

$$\left(\psi, \chi^{(p)}\right) = \sum_{q=1}^{M} \beta_q \left(\chi^{(q)}, \chi^{(p)}\right) = 0, \quad p = \overline{1,M},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\beta_q = 0$, $q = \overline{1,M}$. მაშინ გვექნება

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j \psi^{(j)}(z) = 0, \quad z \in S. \tag{532}$$

თუ განვიხილავთ ვექტორს

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{N}c_j\overset{(j)}{\varphi}(x),\quad x\in\Omega^+, \tag{533}$$

მაშინ (532) პირობა ნიშნავს, რომ

$$T(\partial_z,n(z))\,\varphi(z)=\sum_{j=1}^{N}c_j\psi^{(j)}(z)=0,\quad z\in S.$$

ამიტომ $(\mathrm{II})^+$ ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით, დავასკვნით რომ $\varphi(x)$ ხისტი გადაადგილების ვექტორია:

$$\varphi(x)=\sum_{q=1}^{6}\alpha_q\chi^{(q)}(x)=0,\quad x\in\Omega^+.$$

ეს ნიშნავს, რომ

$$\sum_{j=1}^{N}c_j\varphi^{(j)}(x)-\sum_{q=1}^{6}\alpha_q\chi^{(q)}(x)=0,\quad x\in\Omega^+. \tag{534}$$

ანალიზურობის გამო, (534) ტოლობას ადგილი აქვს $\mathbb{R}^3\backslash\left\{x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right\}$-ზე, სადაც $m=\frac{N}{3}$, თუ N არის 3-ის ჯერადი, და $m=1+\left[\frac{N}{3}\right]$ დანარჩენ შემთხვევებში.

ახლა, ისევე როგორც თეორემა 40-ის დამტკიცებისას, (534))-დან მივიღებთ, რომ $c_j=0,\ j=\overline{1,N}$; მაგრამ, მაშინ $\alpha_q=0,\ q=\overline{1,6}$.

ამგვარად, $\Psi(\Sigma_0)$ სისტემის ყველა ქვესისტემა წრფივად დამოუკიდებელია $L_2(S)$-ში. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამ თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სასაზღვრო f ვექტორი აკმაყოფილებს (521) პირობებს, მაშინ შესაძლებელია მისი აპროქსიმაცია ნებისმიერი სიზუსტით $L_2(S)$ სივრცეში

$$f^{(N)}(z)=\sum_{j=1}^{N}a_j\psi^{(j)}(z) \tag{535}$$

სახის გამოსახულებების საშუალებით, სადაც a_j შესაბამისად შერჩეული მუდმივებია.

ფიქსირებული N-სათვის ვექტორთა $\left\{\psi^{(j)}\right\}_{j=1}^{N}$ სისტემაზე მოჭიმული წრფივი გარსი აღვნიშნოთ $\mathbb{L}_N=\mathbb{L}\left\{\psi^{(1)},\ldots,\psi^{(N)}\right\}$.

N ავიღოთ იმდენად დიდი, რომ

$$\min_{f^{(N)}\in\mathbb{L}_N}\left\|f-f^{(N)}\right\|^2_{L_2(S)}<\delta, \tag{536}$$

სადაც $\delta > 0$ წინასწარ მოცემული ნებისმიერი რიცხვია.

იმისათვის, რომ $\left\|f - f^{(N)}\right\|^2_{L_2(S)}$ ფუნქციონალმა $\mathbb{L}_N$-ზე უმცირესი მნიშვნელობა მიიღოს $f^{(N)}$-ზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (535)-ში a_j კოეფიციენტებმა დააკმაყოფილონ

$$Aa = b \tag{537}$$

განტოლებათა სისტემა, სადაც

$$a = (a_1, \ldots, a_N)^\top, \quad b = (b_1, \ldots, b_N)^\top,$$
$$A = \|A_{kj}\|_{N\times N}, \quad b_j = \left(f, \psi^{(j)}\right), \quad A_{kj} = \left(\psi^{(k)}, \psi^{(j)}\right). \tag{538}$$

ამ შემთხვევაშიც, A მატრიცა სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია.

ცხადია, რომ ზემოთ აღწერილი მეთოდით შესაძლებელია აიგოს ისეთი $\left\{f^{(N)}\right\}_{N=1}^{\infty}$ მიმდევრობა, რომლის ყოველ წევრს ექნება (535) სახე და (531)-ის გამო ავტომატურად დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$\left(f^{(N)}, \chi^{(j)}\right) = 0, \quad j = \overline{1,6}, \quad N = \overline{1,\infty}, \tag{539}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f - f^{(N)}\right\|_{L_2(S)} = 0. \tag{540}$$

მეორე მხრივ, ცხადია, რომ ვექტორი

$$u^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi^{(j)}(x), \quad x \in \Omega^+, \tag{541}$$

სადაც a_j-ები განისაზღვრებიან (537)-დან, წარმოადგენს $(\mathrm{II})^+$ ამოცანის ამონახსნს $f^{(N)}(z)$ სასაზღვრო ფუნქციისათვის:

$$\left[T\left(\partial_z, n(z)\, u^{(N)}(z)\right)\right]^+ = \sum_{i=1}^{N} a_j T\left(\partial_z, n(z)\right)\varphi^{(j)}(z) = f^{(N)}(z), \quad z \in S. \tag{542}$$

(539)-ის ძალით ეს ამოცანა იქნება ამოხსნადი და ადგილი ექნება შემდეგ ფორმულას [62]:

$$u(x) - u^{(N)}(x) = -\int_S G_{\mathrm{II}}(x,y)\left[f(y) - f^{(N)}(y)\right] dS_y +$$
$$+ \sum_{j=1}^{6} c_j \chi^{(j)}(x), \quad x \in \Omega^+, \tag{543}$$

სადაც c_j ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $G_{\mathrm{II}}(x,y)$ არის $(\mathrm{II})^+$ ამოცანის გრინის ტენზორი (იხილეთ [62]) Ω^+ არისათვის. $G_{\mathrm{II}}(x,y)$ მატრიცის ელემენტები აკმაყოფილებენ უტოლობებს [62]:

$$\left|\left[G_{\mathrm{II}}(x,y)\right]_{kj}\right| < \frac{c}{|x-y|},$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x_p}\left[G_{\mathrm{II}}(x,y)\right]_{kj}\right| < \frac{c}{|x-y|^2}, \quad \forall x, y \in \Omega^+.$$

ამიტომ, (543)-დან შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი შეფასებები:

$$\left|e_{kj}\left(u\right)\left(x\right)-e_{kj}\left(u^{(N)}\right)\left(x\right)\right|<c\left\|f-f^{(N)}\right\|_{L_2(S)},\quad x\in\overline{\Omega_0^+}\subset\Omega^+, \tag{544}$$

$$\left\|e_{kj}\left(u\right)-e_{kj}\left(u^{(N)}\right)\right\|_{L^2(\Omega^+)}<c\left\|f-f^{(N)}\right\|_{L_2(S)}, \tag{545}$$

სადაც $e_{kj}\left(u\right)\left(x\right),\ k,j=1,2,3$ არის $u=\left(u_1,u_2,u_3\right)^\top$ ვექტორის x წერტილში გამოთვლილი დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები:

$$2\,e_{kj}\left(u\right)\left(x\right)=\frac{\partial u_j\left(x\right)}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k\left(x\right)}{\partial x_j}.$$

ძაბვის ტენზორის კომპონენტები კი გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$\tau_{kj}\left(u\right)=c_{kjpq}e_{pq}\left(u\right).$$

მოყვანილი მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ (541) ვექტორი იქნება (519)-(520) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსენი.

შენიშვნა 45. ანალოგიურად შეგვიძლია ავაგოთ მიახლოებითი ამონახსენი $(\mathrm{II})^-$ ამოცანისათვის. ამ შემთხვევაში Σ_0 მთლიანად იქნება მოთავსებული Ω^+ არეში და ვექტორთა $\left\{\psi^{(j)}\left(z\right)\right\}_{j=1}^{\infty}=\left\{T\left(\partial_z,n\left(z\right)\right)\varphi^{(j)}\left(z\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი და სრულია $L^2\left(S\right)$ სივრცეში.

შერეული ამოცანა. განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}\left(\partial_x\right)u\left(x\right)=0,\quad x\in\Omega^+,\\
&\left[u\left(z\right)\right]^+=f\left(z\right),\quad z\in S_1,\\
&\left[T\left(\partial_z,n\left(z\right)\right)u\left(z\right)\right]^+=F\left(z\right),\quad z\in S_2,
\end{aligned} \tag{546}$$

სადაც $\overline{S}_1\cup\overline{S}_2=S$, $\overline{S}_1\cap\overline{S}_2=\ell$ საკმარისად გლუვი წირია, რომელიც S ზედაპირს ყოფს ორ S_1 და S_2 ნაწილად, $f\in C^{1,\beta}\left(S_1\right),\ F\in C^{\beta}\left(S_2\right),\ 0<\beta<\alpha\leq 1$.

მიახლოებითი ამონახსენის ასაგებად აქ შესაძლებელია გამოვიყენოთ ანალოგიური სქემა.

მართლაც, ვთქვათ

$$\mathcal{F}\left(z\right)=\begin{cases}f\left(z\right), & z\in S_1,\\ F\left(z\right), & z\in S_2.\end{cases} \tag{547}$$

განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა

$$\begin{aligned}
&\overset{(j)}{\Upsilon}\left(z\right)=\begin{cases}\varphi^{(j)}\left(z\right), & z\in S_1,\\ T\left(\partial_z,n\left(z\right)\right)\varphi^{(j)}\left(z\right), & z\in S_2;\end{cases}\\
&\Lambda\left(\Sigma_0\right)=\left\{\overset{(j)}{\Upsilon}\left(z\right)\right\}_{j=1}^{\infty},\quad z\in S.
\end{aligned} \tag{548}$$

შევნიშნოთ, რომ, ზოგადად, (546) ამოცანის ამონახსენი არ წარმოადგენს $C^1(\overline{\Omega^+})$ კლასის ვექტორს მაშინაც კი, როდესაც S ზედაპირი, ℓ მრუდი და სასაზღვრო F და f ფუნქციები უსასრულოდ გლუვია.

მტკიცდება (შეადარე [8]), რომ თუ

$$f \in C^{\alpha}(S_1) \cap H_2^{1/2}(S), \quad F \in B_{\infty,\infty}^{\alpha-1}(S_2) \cap H_2^{-1/2}(S_2),$$

მაშინ $H_2^1(\Omega^+)$ კლასის განზოგადებული ამონახსენი მიეკუთვნება $u \in \bigcap\limits_{\delta'<\delta} C^{\delta'}(\overline{\Omega^+})$ კლასს, სადაც $\delta = \min\{\alpha,\ 1/2\}$. ცხადია, $\delta \in (0, 1/2)$.

მიახლოებითი $u^{(N)}$ ამონახსნი აქაც შეგვიძლია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$u^{(N)}(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi^{(j)}(x), \quad x \in \overline{\Omega}^+, \tag{549}$$

სადაც a_j შერჩეულია ისე, რომ გამოსახულებამ

$$\begin{gathered}\left\|\mathcal{F}(z) - \mathcal{F}^{(N)}(z)\right\|_{L^2(S)}^2 = \\ = \left\|\mathcal{F}(z) - \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi^{(j)}(z)\right\|_{L_2(S_1)}^2 + \left\|\mathcal{F}(z) - \sum_{j=1}^{N} a_j T(\partial_z n(z))\, \varphi^{(j)}(z)\right\|_{L_2(S)}^2\end{gathered} \tag{550}$$

მიიღოს უმცირესი მნიშვნელობა $\mathbb{L}\left\{\Upsilon^{(1)}, \dots, \Upsilon^{(N)}\right\}$ წრფივ გარსზე.

(550)-ში შემოტანილია აღნიშვნა:

$$\mathcal{F}^{(N)}(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j \Upsilon^{(j)}(z).$$

აქაც, როგორც ზემოთ, a_j კოეფიციენტების მოსაძებნად ვიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$Aa = b, \tag{551}$$

სადაც $a = (a_1, \dots, a_N)^{\top}$, $b = (b_1, \dots, b_N)^{\top}$, $A = \|A_{kj}\|_{N \times N}$,

$$b_k = \left(\mathcal{F}, \Upsilon^{(k)}\right), \quad A_{kj} = \left(\Upsilon^{(k)}, \Upsilon^{(j)}\right).$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ შემთხვევაშიც A მატრიცა სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია. თუ (551) სისტემიდან მოძებნილ a_j მუდმივებს ჩავსვამთ (549)-ში, მივიღებთ შერეული ამოცანის მიახლოებით ამონახსენს. შევნიშნოთ, რომ $\forall x \in \overline{\Omega_0^+} \subset \Omega^+$-თვის გვაქვს

$$\left|u(x) - u^{(N)}(x)\right| < c\left\|\mathcal{F} - \mathcal{F}^{(N)}\right\|_{L_2(S)}.$$

შენიშვნა 46. თუ Ω^+ არის საზღვარი შედგება რამდენიმე ჩაკეტილი ზედაპირისაგან, მაშინ ზემოთ მოყვანილი სქემა, შესაბამისი, ცხადი ცვლილებებით მეიძლება გამოვიყენოთ ამ შემთხვევაშიც. ეს სქემა შეგვიძლია გამოვიყენოთ საკონტაქტო ამოცანების მიახლოებით ამოსახსნელადაც უბან-უბან ერთგვაროვანი ანიზოტროპული გარემოსათვის.

დამატება A: ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის თვისებები გახსნილ მრავალსახეობებზე

ჩვენ აქ ჩამოვაყალიბებთ ცნობილ შედეგებს ფსევდოდიფერენციალური განტოლებების თეორიიდან, რომლებიც ეხება ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობას გახსნილ მრავალსახეობებზე საზღვრით (იხ. მაგ., [63, 5, 64, 65, 66]).

ვთქვათ $\overline{\mathcal{M}} \in C^\infty$ არის კომპაქტური, n-განზომილებიანი მრავალსახეობა (ზედაპირი) $\partial\mathcal{M} \subset C^\infty$ საზღვრით. ვთქვათ $\mathcal{A}$ არის $\nu \in \mathbb{R}$ რიგის ძლიერად ელიფსური $N \times N$ განზომილების მატრიცული ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი $\overline{\mathcal{M}}$ მრავალსახეობაზე. მისი მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცა აღვნიშნოთ $\mathfrak{S}(\mathcal{A}; x, \xi)$-თი რაიმე ლოკალურ კოორდინატთა სისტემაში $\left(x \in \overline{\mathcal{M}},\quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right)$.

ვთქვათ, $\lambda_1(x), \quad \ldots, \lambda_N(x)$ არის შემდეგი მატრიცის მახასიათებელი რიცხვები

$$[\mathfrak{S}(\mathcal{A}; x, 0, 0, \ldots, 0, +1)]^{-1}[\mathfrak{S}(\mathcal{A}; x, 0, 0, \ldots, 0, -1)], \quad x \in \overline{\mathcal{M}}.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\delta_j(x) = \mathrm{Re}\left[(2\pi i)^{-1} \ln \lambda_j(x)\right], \quad j = 1, \ldots, N,$$

სადაც $\ln\zeta$ აღნიშნავს ლოგარითმის შტოს, რომელიც ანალიზურია კომპლექსურ სიბრტყეზე, საიდანაც ამოგდებულია $(-\infty, 0]$ ინტერვალი. $\mathcal{A}$ ოპერატორის ძლიერად ელიფსურობის გამო გვექნება შემდეგი მკაცრი უტოლობა

$$-\frac{1}{2} < \delta_j(x) < \frac{1}{2}, \quad x \in \overline{\mathcal{M}}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

შევნიშნოთ, რომ იმ კონკრეტულ შემთხვევაში, როცა $\mathfrak{S}(\mathcal{A}; x, \xi)$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა ან მისი ელემენტები ξ ცვლადის ლუწი ფუნქციებია, მაშინ ყველა $\delta_j(x) = 0$, $j = 1, \ldots, N$, რადგანაც ყველა საკუთრივი რიცხვი $\lambda_j(x)$ დადებითია.

ასეთი ძლიერად ელიფსური ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის ფრედჰოლმურობის თვისებები აღიწერება შემდეგი თეორემით.

თეორემა $A.1$. ვთქვათ, $s \in \mathbb{R}$ $1 < p < \infty$, $1 \leq t \leq \infty$ და $\mathcal{A}$ არის $\nu \in \mathbb{R}$ რიგის ძლიერად ელიფსური მატრიცული ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი, ე.ი. არსებობს ისეთი დადებითი C_0 მუდმივი

$$\mathrm{Re}\ \mathfrak{S}(\mathbb{A}; x, \xi)\,\eta \cdot \overline{\eta} \geq C_0 |\eta|^2,$$
$$x \in \overline{\mathcal{M}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1, \quad \eta \in \mathbb{C}^N.$$

მაშინ

$$\mathcal{A}:\left[\tilde{H}_p^s\left(\mathcal{M}\right)\right]^N\to\left[H_p^{s-\nu}\left(\mathcal{M}\right)\right]^N, \tag{552}$$

$$\mathcal{A}:\left[\tilde{B}_{p,t}^s\left(\mathcal{M}\right)\right]^N\to\left[B_{p,t}^{s-\nu}\left(\mathcal{M}\right)\right]^N, \tag{553}$$

ფრედჰოლმის ოპერატორებია ნულოვანი ინდექსით, თუ

$$\frac{1}{p}-1+\sup_{x\in\partial\mathcal{M},\ 1\le j\le N}\delta_j\left(x\right)<s-\frac{\nu}{2}<\frac{1}{p}+\inf_{x\in\partial\mathcal{M},\ 1\le j\le N}\delta_j\left(x\right). \tag{554}$$

გარდა ამისა, (A.1) და (A.2) ოპერატორების ნულ-სივრცეები ერთი და იგივეა s და p პარამეტრების ყველა იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებისთვისაც სრულდება (A.3) თანაფარდობები.

შენიშვნა *A.*2. თუ $\mathcal{A}$ სკალარული ოპერატორია, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო დადებითია, როცა $|\xi|=1$, მაშინ (554) პირობა მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{p}-1<s-\frac{\nu}{2}<\frac{1}{p}. \tag{555}$$

დამატება B: რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

ვთქვათ, Ω^+ არის R რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, რომელიც შემოსაზღვრულია S სფერული ზედაპირით. Ω^- ამ ბირთვის გარე არეა.

მეთოდის საილუსტრაციოდ ვიხილავთ დირიხლეს ამოცანას გარე არეში:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \\ \{u(x)\}_S^- = f(x), \quad x \in S. \end{cases} \tag{556}$$

და ვეძებთ მის მიახლოებით ამონახსნს სხვადასხვა სასაზღვრო ფუნქციის შემთხვევაში.

(556) დიფერენციალური განტოლება ემთხვევა ჰელმჰოლცის განტოლებას, როდესაც $\omega = 0$.

ქვემოთ განხილულ სატესტო ამოცანებში ამოცანის ზუსტი ამონახსნი ცნობილია - დადგენილია თითოეული სასაზღვრო პირობის შესაბამისად. (556) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ საბაზისო ფუნქციათა წრფივი კომბინაციის სახით:

$$U^{(N)}(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x), \tag{557}$$

სადაც $\varphi_k(x) = \frac{1}{|x - y^{(k)}|}$ საბაზისო ფუნქციები განსაზღვრულია სფეროს ზედაპირზე. თითოეული $\varphi_k(x)$ საბაზისო ფუნქცია ფუნდამენტური ამონახსნია, რომელთათვისაც $y^{(k)}$ სინგულარობის წერტილს წარმოადგენს. $x^{(k)}$ აღნიშნავს კოლოკაციის წერტილებს.

$y^{(k)}$ და $x^{(k)}$ წერტილები ჩვენ მიერ წინასწარაა შერჩეული.

c_k კოეფიციენტები შეირჩევა ინტერპოლაციის პირობებიდან:

$$U^{(N)}(x^{(j)}) = f(x^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

ანუ

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k(x^{(j)}) = f(x^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნით.

კოლოკაციის წერტლების სხვადასხვა რაოდენობის (ანუ N-ის სხვადასხვა მნიშვნელობის) შესაბამისი მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნის შემდეგ დადგენილია ცდომილება ზუსტ ამონახსნთან.

ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მოძებნის მიზნით S ზედაპირზე ქვემოთ მოცემული წესით შევარჩიეთ $x^{(j)} \in S$ კოლოკაციის კვანძები. შემდეგ კი განვიხილეთ $y^{(j)} \in S^*$ სინგულარობის კვანძები, რომლებიც

კოლოკაციის კვანძების ჰომოთეტიურია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და $\lambda < 1$ ჰომოთეტიის კოეფიციენტით:

$$y^{(j)} = \lambda x^{(j)}.$$

$y^{(j)}$ წერტილები მდებარეობენ S სფეროს კონცენტრულ S^* სფეროზე - ფსევდოზედაპირზე.

შენიშვნა 47. შიგა ამოცანის შემთხვევაში ავიღებთ $\lambda > 1$ და S^* "ფიქტიური" ზედაპირი აღმოჩნდება S-ის გარეთ.

ინტერპოლაციის კვანძების გენერირება საზღვარზე

მერიდიანი დავყოთ n ტოლ ნაწილად და გავავლოთ Ox_1x_2-ის პარალელური სიბრტყეები.

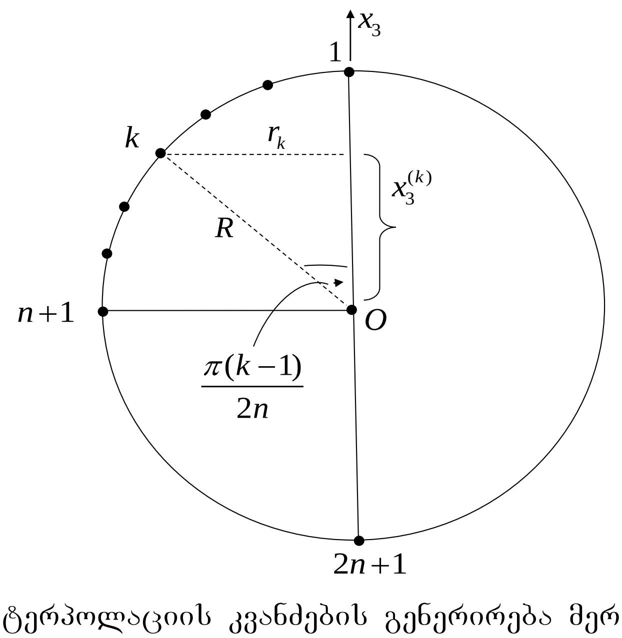
პირველი და $(2n+1)$-ე სიბრტყეები ქმნიან მხოლოდ თითო კვანძს - "პოლუსებს".

k-ური კვეთის წრეწირის რადიუსი იყოს r_k;

ამ წრეწირის ყველა წერტილისათვის

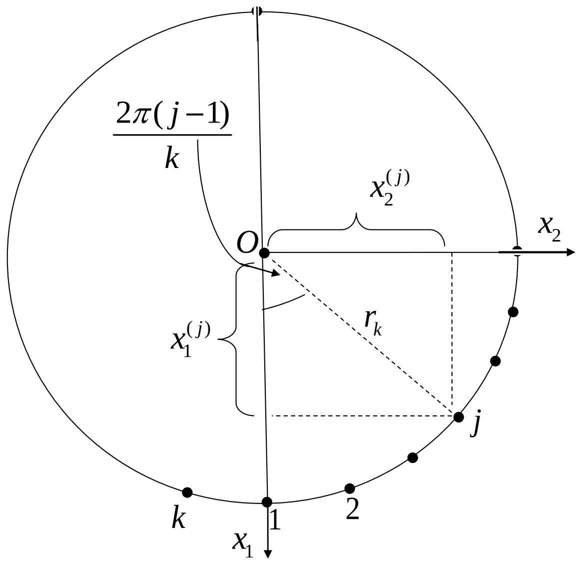
$$x_3 = x_3^{(k)} = R\cos\frac{\pi(k-1)}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1,$$

ხოლო $r_k = R\sin\frac{\pi(k-1)}{2n}$.



ნახ.5 ინტერპოლაციის კვანძების გენერირება მერიდიანზე

k-ური კვეთის წრეწირი დავყოთ k თანატოლ ნაწილად, დაწყებული x_1 ღერძის შესაბამისი წერტილიდან დადებითი მიმართულებით მობრუნებით. ამ წერტილების ნუმერაცია იყოს $1, 2, \ldots, k$.



ნახ.6 ინტერპოლაციის კვანძების გენერირება პარალელზე

კვეთის წრეწირზე j-ური კვანძის კოორდინატებია:

$$x_1 = x_1^{(j)} = r_k \cos\frac{2\pi(j-1)}{k}\,,$$
$$x_2 = x_2^{(j)} = r_k \sin\frac{2\pi(j-1)}{k}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

შენიშვნა 48. ეკვატორის ქვევით ყოველ მომდევნო კვეთაზე გადასვლისას დანაყოფის რიცხვი 1-ით მცირდება.

ზედა ნახევარსფეროზე კვანძების რაოდენობაა:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}\,.$$

ამდენივეა ქვედა ნახევარსფეროზე, ეკვატორზე კი არის $n+1$ კვანძი.

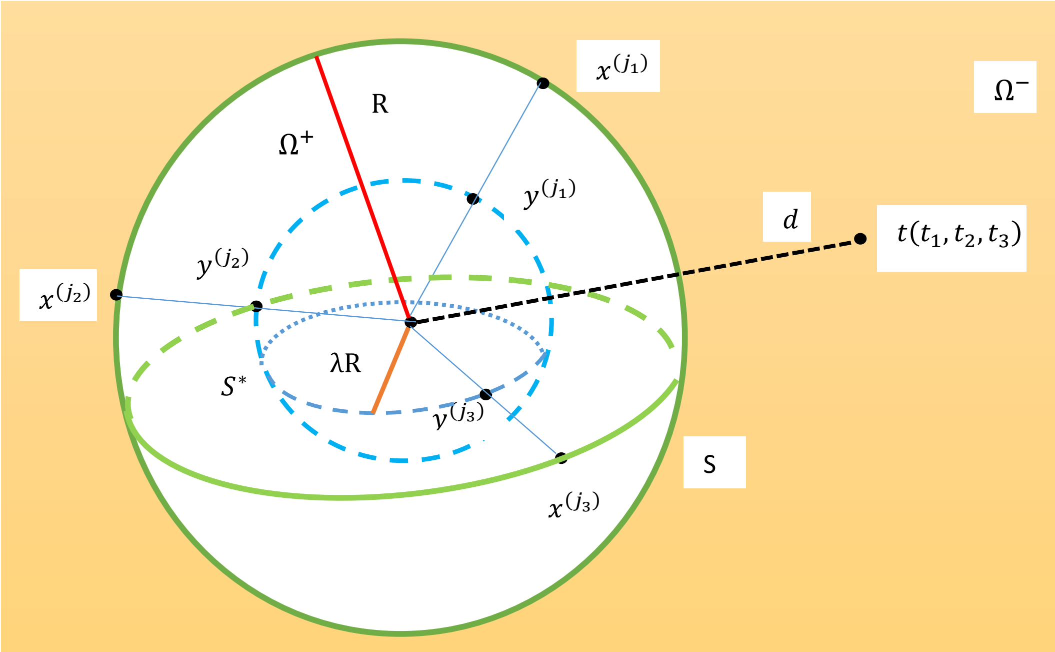
ამრიგად, სფეროზე შერჩეული კვანძების მთლიანი რაოდენობაა $N = (n+1)^2$.

ინტერპოლაციის კვანძები დეკარტულ კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$\left(r_k \cos\frac{2\pi(j-1)}{k}\,, r_k \sin\frac{2\pi(j-1)}{k}, R\cos\frac{\pi(k-1)}{2n}\right)$$
$$= \left(R\sin\frac{\pi(k-1)}{2n}\,\cos\frac{2\pi(j-1)}{k}, R\sin\frac{\pi(k-1)}{2n}\,\sin\frac{2\pi(j-1)}{k}, R\cos\frac{\pi(k-1)}{2n}\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots, 2n+1, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

ექსპერიმენტი ჩატარდა $R = 8$ რადიუსიანი სფეროსათვის, როცა $n = 4$; 6; 8; 10. ანუ, ცალკეულ შემთხვევებში საინტეგრო არის საზღვარზე (ძირითად სფეროზე) აღებული გვაქვს $N = 25$; 59; 81; 121 საინტერპოლაციო კვანძი.

$\lambda = 0,2$ კოეფიციენტებიანი ჰომოთეტიით მიიღება ამდენივე კვანძი "ფიქტიურ" საზღვარზე, რომლებსაც საბაზისო ფუნქციების ასაგებად ვიყენებთ. ჰომოთეტიის კოეფიციენტი 0,2 ექსპერიმენტულადაა შერჩეული.



ნახ.7 ფსევდოზედაპირი

ამ ფუნქციათა სიმრავლეზე ვაგებთ საინტერპოლაციო მრავალწევრს სასაზღვრო f ფუნქციისათვის.

მეთოდის სიზუსტის შესამოწმებლად საინტეგრო არის საზღვარზე და (გარე) არეში შევარჩიეთ ტესტირების $t(t_1, t_2, t_3)$ კვანძები, რომლებიც კოორდინატთა სათავიდან $d = 8$ ($d = 10$; $d = 50$) მანძილითაა დაშორებული, ანუ მდებარეობენ $R = d$ რადიუსიან სფეროზე.

t_1 არის $[0; d]$ შუალედში MatLab-ის პროგრამული საშუალებით შერჩეული შემთხვევითი რიცხვი, $t_2 = d - t_1$, t_3 კი დათვლილია ფორმულით: $t_3 = \sqrt{d^2 - t_1^2 - t_2^2}$.

მიღებული მიახლოებითი ამონახსნი შედარებულია ცნობილ ზუსტ ამონახსნთან $error = |u(t) - U^{(N)}(t)|$ ცდომილების გამოთვლით.

ექსპერიმენტი ჩატარდა სამი ამოცანისათვის d-ს, t-ს, N-ის სხვადასხვა მნიშვნელობების შემთხვევაში. მიღებული შედეგები სათანადო ცხრილებშია მოყვანილი.

ამოცანა $A1$**.** (556) სასაზღვრო პირობაში მარჯვენა მხარეა $f_{A1} = \frac{1}{R}$, ხოლო ზუსტი ამონახსნია $u(x)_{A1} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$.

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=8 .			
t1	t2	*N*=25	*N* =49	*N* =81	*N* =121
3.918115	4.081885	5.07E-05	5.26E-06	5.44E-07	6.31E-08
3.56469	4.43531	5.20E-05	5.03E-06	4.36E-07	3.74E-08
5.170504	2.829496	3.85E-05	4.43E-06	6.55E-07	1.18E-07
5.674919	2.325081	3.15E-05	3.63E-06	5.75E-07	1.18E-07
6.037493	1.962507	2.62E-05	3.00E-06	4.84E-07	1.10E-07
2.208201	5.791799	4.43E-05	2.08E-06	6.87E-08	4.31E-08
5.437621	2.562379	3.49E-05	4.02E-06	6.20E-07	1.19E-07
5.240784	2.759216	3.76E-05	4.33E-06	6.48E-07	1.19E-07
1.300894	6.699106	2.62E-05	8.65E-07	2.31E-07	3.60E-08

ცხრილი 1. ცდომილებები A1 განტოლებისათვის, როცა d=8

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=10 .			
t1	t2	*N*=25	*N* =49	*N*=81	*N*=121
1.189977	8.810023	1.22E-05	1.85E-07	3.21E-08	2.62E-09
4.983641	5.016359	2.59E-05	2.37E-06	2.27E-07	2.74E-08
9.59744	0.40256	9.09E-06	1.10E-06	1.38E-07	2.02E-08
3.403857	6.596143	2.50E-05	1.69E-06	9.95E-08	4.11E-09
5.852678	4.147322	2.42E-05	2.40E-06	2.63E-07	3.77E-08
2.238119	7.761881	2.01E-05	7.34E-07	4.98E-09	5.53E-09
7.512671	2.487329	1.83E-05	2.00E-06	2.43E-07	4.25E-08
2.550951	7.449049	2.18E-05	1.01E-06	2.68E-08	4.16E-09
5.059571	4.940429	2.58E-05	2.38E-06	2.31E-07	2.84E-08

ცხრილი 2. ცდომილებები A1 განტოლებისათვის, როცა d=10

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=50 .			
t1	t2	*N*=25	*N* =49	*N*=81	*N*=121
34.95384	15.04616	2.72E-06	3.40E-07	4.87E-08	8.46E-09
44.54516	5.454837	2.85E-06	3.70E-07	5.38E-08	9.40E-09
47.96457	2.035429	2.93E-06	3.87E-07	5.70E-08	1.00E-08
27.36078	22.63922	2.65E-06	3.24E-07	4.61E-08	8.00E-09
6.931222	43.06878	2.50E-06	2.97E-07	4.29E-08	7.51E-09
7.4647	42.5353	2.50E-06	2.97E-07	4.29E-08	7.51E-09
12.87541	37.12459	2.54E-06	3.02E-07	4.33E-08	7.54E-09
42.03586	7.964137	2.81E-06	3.60E-07	5.22E-08	9.09E-09
12.71411	37.28589	2.53E-06	3.02E-07	4.32E-08	7.53E-09

ცხრილი 3. ცდომილებები A1 განტოლებისათვის, როცა d=50

ამოცანა $A2$**.** (556) სასაზღვრო პირობაში მარჯვენა მხარეა $f_{A2} = \frac{2x_1-3x_2}{R^3}$, ხოლო ზუსტი ამონახსნია $u(x)_{A2} = \frac{2x_1-3x_2}{|x|^3} = \frac{2x_1-3x_2}{(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2})^3}$.

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=8 .			
t1	t2	*N*=25	*N* =49	*N*=81	*N*=121
0.606834	7.393166	3.21E-05	9.36E-06	3.60E-07	8.45E-09
0.431601	7.568399	2.17E-06	9.21E-06	2.12E-07	3.82E-08
4.24638	3.75362	5.16E-04	5.59E-05	5.37E-06	6.66E-07
6.233338	1.766662	3.58E-04	4.90E-05	7.06E-06	1.04E-06
7.472085	0.527915	1.13E-04	1.35E-05	2.22E-06	2.71E-07
1.03925	6.96075	1.17E-04	7.05E-06	7.00E-07	8.58E-08
4.550589	3.449411	5.14E-04	5.93E-05	6.23E-06	8.40E-07
3.755125	4.244875	5.01E-04	4.78E-05	3.79E-06	3.67E-07
0.095217	7.904783	6.98E-05	6.37E-06	1.89E-08	5.75E-08

ცხრილი 4. ცდომილებები A2 განტოლებისათვის, როცა d=8

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=10 .			
t1	t2	*N*=25	*N* =49	*N*=81	*N*=121
8.308286	1.691714	1.07E-04	1.09E-05	1.38E-06	1.79E-07
5.852641	4.147359	2.23E-04	2.19E-05	2.19E-06	2.73E-07
5.497236	4.502764	2.28E-04	2.16E-05	2.04E-06	2.44E-07
9.171937	0.828063	4.10E-05	3.08E-06	3.57E-07	4.21E-08
2.85839	7.14161	1.77E-04	8.95E-06	3.35E-07	1.74E-08
7.572002	2.427998	1.55E-04	1.65E-05	1.99E-06	2.66E-07
7.537291	2.462709	1.57E-04	1.67E-05	2.01E-06	2.69E-07
3.804458	6.195542	2.12E-04	1.49E-05	9.38E-07	5.93E-08
5.678216	4.321784	2.26E-04	2.18E-05	2.12E-06	2.60E-07

ცხრილი 5. ცდომილებები A2 განტოლებისათვის, როცა d=10

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=50 .			
t1	t2	*N*=25	*N*=49	*N*=81	*N*=121
40.71424	9.285759	6.13E-06	1.19E-06	1.86E-07	3.27E-08
12.17625	37.82375	2.54E-06	8.11E-07	1.37E-07	2.54E-08
46.46318	3.536819	7.25E-06	1.33E-06	2.06E-07	3.62E-08
17.49919	32.50081	2.96E-06	8.53E-07	1.42E-07	2.61E-08
9.829763	40.17024	2.41E-06	7.98E-07	1.35E-07	2.52E-08
12.55419	37.44581	2.57E-06	8.14E-07	1.37E-07	2.54E-08
30.80223	19.19777	4.53E-06	1.01E-06	1.62E-07	2.90E-08
23.66444	26.33556	3.60E-06	9.18E-07	1.50E-07	2.72E-08
17.58298	32.41702	2.97E-06	8.54E-07	1.42E-07	2.61E-08

ცხრილი 6. ცდომილებები A2 განტოლებისათვის, როცა d=50

ამოცანა $A3$**.** (556) სასაზღვრო პირობაში მარჯვენა მხარეა $f_{A3} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{R^5}$, ხოლო ზუსტი ამონახსნია $u(x)_{A3} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^5} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})^5}$.

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=8 .			
t1	t2	*N*=25	*N*=49	*N*=81	*N*=121
5.558629	2.441371	2.17E-06	4.14E-06	5.79E-07	1.05E-07
2.536796	5.463204	1.71E-05	4.75E-06	8.04E-08	4.88E-08
7.601776	0.398224	3.27E-06	4.85E-07	2.60E-08	1.80E-08
0.275569	7.724431	4.95E-06	5.48E-06	1.59E-07	3.24E-08
3.509955	4.490045	1.25E-05	7.09E-06	6.31E-07	4.85E-08
3.052468	4.947532	1.51E-05	6.34E-06	4.02E-07	3.83E-10
6.124134	1.875866	4.95E-06	2.37E-06	3.53E-07	5.90E-08
6.361599	1.638401	5.68E-06	1.64E-06	2.59E-07	3.72E-08
1.494981	6.505019	1.58E-05	4.34E-07	4.87E-07	7.11E-08

ცხრილი 7. ცდომილებები A3 განტოლებისათვის, როცა d=8

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=10 .			
t1	t2	*N*=25	*N*=49	*N*=81	*N*=121
9.648885	0.351115	5.61E-06	1.10E-06	1.39E-07	1.70E-08
1.576131	8.423869	5.13E-06	4.06E-07	1.43E-07	1.72E-08
9.705928	0.294072	5.74E-06	1.11E-06	1.36E-07	1.68E-08
9.571669	0.428331	5.42E-06	1.10E-06	1.43E-07	1.72E-08
4.853756	5.146244	5.86E-06	2.76E-06	2.39E-07	2.16E-08
8.002805	1.997195	2.87E-06	1.52E-06	2.08E-07	2.48E-08
1.418863	8.581137	4.55E-06	6.41E-07	1.50E-07	1.59E-08
4.217613	5.782387	6.70E-06	2.57E-06	1.80E-07	1.00E-08
9.157355	0.842645	4.44E-06	1.11E-06	1.59E-07	1.78E-08

ცხრილი 8. ცდომილებები A3 განტოლებისათვის, როცა d=10

t(t1; t2; t3)		ცდომილება, როცა d=50 .			
t1	t2	*N*=25	*N*=49	*N*=81	*N*=121
19.61135	30.38865	4.51E-07	7.32E-08	1.26E-08	3.19E-09
32.77389	17.22611	3.84E-07	7.59E-08	1.32E-08	3.40E-09
8.559334	41.44067	5.65E-07	8.16E-08	1.35E-08	3.23E-09
35.3023	14.6977	3.81E-07	7.84E-08	1.36E-08	3.48E-09
1.591642	48.40836	7.00E-07	9.59E-08	1.51E-08	3.45E-09
13.84615	36.15385	5.02E-07	7.63E-08	1.29E-08	3.19E-09
2.30857	47.69143	6.79E-07	9.35E-08	1.48E-08	3.41E-09
4.856589	45.14341	6.24E-07	8.75E-08	1.41E-08	3.31E-09
41.17289	8.827109	3.94E-07	8.80E-08	1.49E-08	3.75E-09

ცხრილი 9. ცდომილებები A3 განტოლებისათვის, როცა d=50

სადემონსტრაციო ამოცანებისთვის ჩატარებული რიცხვითი გამოთვლების შედეგები გვიჩვენებს მეთოდის კარგ სიზუსტეს, რომელიც ნარჩუნდება კოორდინატთა სათავიდან ტესტური წერტილების დაშორებისას და უმჯობესდება კოლოკაციის წერტილების რაოდენობის ზრდის შესაბამისად.

დასკვნა

გელა მანელიძის სადისერტაციო ნაშრომი **"ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის ამოცანებში"** ეძღვნება ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების თეორიული და პრაქტიკული ასპექტების გაანალიზებას.

ჰელმჰოლცის განტოლება გვხვდება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელებში და შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც ტალღათა გავრცელების პირდაპირ ამოცანებში, ისე შებრუნებულ ამოცანებში. ტალღების გავრცელების ეს მოდელები ფართოდ გამოიყენება საინჟინრო ელექტრონიკაში, ბიოსამედიცინო აპარატურაში, ფიზიკური გამზომი აპარატურის წარმოებაში, რადარულ სისტემებში, ანტენებში და სხვა.

დისერტაციაში განხილული დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა მყარი დეფორმადი სხეულების თეორიაში ერთ-ერთ ძირითად მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს. ამ მიმართულებით, სადისერტაციო ნაშრომში კვლევის ძირითადი ობიექტი არის ანიზოტროპული დრეკადი სხეულების მოდელის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთაც უდიდესი გამოყენება აქვთ სამშენებლო და ინდუსტრიულ ინჟინერიაში, კომპოზიტური მასალების თეორიაში, მასალათა გამძლეობის ამოცანებში და სხვა.

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის პოტენციალთა მეთოდისა და რელიხ-ვეკუას ლემის გამოყენებით ნაშრომში დამტკიცებულია დირიხლეს, ნეიმანის, რობინის და შერეული გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის თეორემები სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში) და დადგენილია ამონახსნების შეფასებები იმავე ფუნქციურ სივრცეებში სასაზღვრო ზედაპირებზე მოცემული ფუნქციების ნორმების საშუალებით. არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმ ფაქტს, რომ ყველა გარე სასაზღვრო ამოცანა ჰელმოლცის განტოლებეისათვის დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ეკვივალენტურ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებაზე.

შესწავლილია უსასრულო არეზე გავრცელებული ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალის ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში, როდესაც შესაბამისი სიმკვრივის საყრდენი არ არის კომპაქტური. კერძოდ, დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ზომერფელდის გამოსხივების პირობას მოცულობითი პოტენციალისათვის.

განხილულია პიდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ კლასიკური მიდგომა არ გამოდგება რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში და მოითხოვს სპეციალურ მოდიფიკაციას.

მიღებული შედეგების გამოყენებით გამოკვლეულია ბზარის და ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანები და შერეული ტრანსმისიის ამოცანები უბნობრივად ერთგვაროვანი სხეულებისათვის. დადგენილია ამ ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობა, პოტენციალების წრფივი კომბინაციით წარმოდგენადობა, და შესწავლილია მათი სიგლუვე სინგულარობის წირების მიდამოში.

დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისთვის გაანალიზებულია დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანები (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში). შესაბამისი ფუნქციური სივრცეების ნორმებში დადგენილია ამონახსნების შეფასებები სასაზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

მიღებული აპრიორული შეფასებების გამოყენებით დისერტაციაში შემოთავაზებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდზე დაფუძნებული მიახლოებითი ამონახსნების აგების ალგორითმები. ფაქტობრივად, შემოთავაზებულ ალგორითმებს სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება დაჰყავს სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე ფუნდამენტური ამონახსნების საშუალებით სპეციალურად აგებულ ფუნქციათა სისტემაში.

ერთგვაროვანი და უბნობრივად ერთგვაროვანი მრავალკომპონენტიანი კომპოზიტური სტრუქტურების შემთხვევაში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დასმული სამგანზომილებიანი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისთვის, აგრეთვე შერეული ტრანსმისიის ტიპის ამოცანებისთვის, რომლებიც მოიცავენ ეკრანისა და ბზარის ტიპის ამოცანებს, დისერტაციაში განვითარებულია და დაფუძნებულია ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი.

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დაფუძნებულია აგრეთვე ანიზოტროპული სხეულების დრეკადობის კლასიკური თეორიის გადაადგილების, ძაბვის და შერეული ტიპის სტატიკის ამოცანებისათვის.

ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი ამოცანისათვის აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა სპეციალური სისტემები, რომელთათვისაც მტკიცდება წრფივად დამოუკიდებლობა და სისრულე განსახილველი სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის ბუნებრივ ფუნქციურ სივრცეებში (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში).

გამოყენებული ლიტერატურა

References

[1] Vekua I.N. On metaharmonic functions, Proc. Tbilisi Mathem. Inst. of Acad. Sci. Georgian SSR, 12 (1943), 105-174.

[2] Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von in anendlichen Gebieten. Uber. Deutsch. Math. Verein, 53 (1943), 57-65.

[3] Colton D. and Kress R. Integral equation method in scattering theory. Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.

[4] Colton D. and Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 3rd ed., Springer Verlag, Berlin, 2013.

[5] Eskin G. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations. Transl. of Mathem. Monographs, Amer. Math. Soc., 52, Providence, Rhode Island, 1981.

[6] Chkadua O. and Duduchava R. Pseudodifferential equations on manifolds with boundary: Fredholm property and asymptotic. Math. Nachr., 222 (2001), 79 139.

[7] Chkadua O. and Duduchava R. Asymptotic of functions represented by potentials. Russian J. Math. Phys., 7 , 1 (2000), 15 47.

[8] Buchukuri T., Chkadua O., Natroshvili D. Mathematical problems of generalized thermo-electro-magneto-elasticity theory, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 68 (2016), 1-167.

[9] Kupradze V.D. On one method of approximate solution of the boundary problems of mathematical physics. Journal of Appl. Math. and Math. Physics. 4 (1964) 6, 11-18.

[10] Kupradze V.D. About approximate solution of mathematical physics problems. Successes of Math. Sciences. 22 (1967) 2, 59-107

[11] Kupradze V.D., Aleksidze M.A. On one approximate method for solving boundary problems. The BULLETIN of the Georgian Academy of Sciences. 30(1963)5, 529-536

[12] Browder F. Approximation by solutions of partial differential equations, Amer. J. Math., 84 (1962), 34-160.

[13] Kupradze V.D., Aleksidze M.A. The method of functional equations for approximate solution of some boundary problems. Journal of Appl. Math. and Math. Physics. 4 (1964), 683-715

[14] Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. Three Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics 25,North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[15] Mathon R., Johnston R.L. The approximate solution of elliptic boundary value problems by fundamental solutions, SIAM J. Numer. Anal. 14 (1977), 4, 638-650.

[16] Bogomolny A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems, SIAM J. Numer. Anal. 22, 4 (1985), 644-669.

[17] Kitagava T. On the numerical stability of the method of fundamental solution applied to the Dirichlet problem, Japan J. Appl. Math., 5 (1988), 1, 123-133.

[18] Ushijima T., Chiba F. Error estimates for a fundamental solution method applied to reduce wave problems in a domain exterior to a disc, J. Comput. Appl. Math. 159 (2003), 1 137-148.

[19] Natroshvili D. Method of generalized series in anisotropic elasticity. Proceedings of I.Vekua Institute of Appl. Math. Tbilisi State University, 39 (1990), 110-132.

[20] Nedelec J.-C. Acoustic and Electromagnetic Equations. Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] Smyrlis Y.-S. Applicability and applications of the method of fundamental solutions, Mathematics of Computation, 78, 267 (2009), 1399-1434.

[22] Fan C.M., Chen C.S., Monroe J. The method of fundamental solutions for solving convection-diffusion equations with variable coefficients, Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 1 (2009) 215-230.

[23] Chen W., Lin J., Wang F. Regularized meshless method for nonhomogeneous problems, Engineering Analysis with Boundary Elements. 35 (2011) 253-257.

[24] Chen W., Wang F.Z. A method of fundamental solutions without fictitious boundary,Engineering Analysis with Boundary Elements. 34 (2010) 530-532.

[25] Karageorghis A., Lesnic D. Application of the MFS to inverse obstacle scattering problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 35 (2011), 631-638.

[26] Marin L., Lesnic D. The method of fundamental solutions for nonlinear functionally graded materials, International Journal of Solids and Structures, 44 (2007), 631-638.

[27] Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The MFS for the detection of inner boundaries in linear elasticity. In: Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods, XXXIII, (2011), 229-239.

[28] Grisward P. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman, London 1985.

[29] McLean W. Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

[30] Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators, North Holland, Amsterdam, 1978.

[31] Triebel H. Theory of function spaces, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

[32] Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications, Springer Verlag, Berlin, 1973.

[33] Costabel M. Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results, SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 613-626.

[34] Gunter N.M. Potential Theory and its Application to the Basic Problems of Mathematical Physics. Fizmatgiz, Moscow 1953 (Russian, Translation in French: Gauthier Villars, Paris 1994).

[35] Natroshvili D., Djagmaidze A., Svanadze M. Problems of the Linear Theory of Elastic Mixtures, Tbilisi University, Tbilisi, 1986.

[36] Duduchava R. The Green formula and layer potentials, Integral Equations and Operator Theory, 41 (2001), 2, 127-178.

[37] Manelidze G. Newtonian volume potential for the Helmholtz equation in unbounded domains, Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 64 (2014), 41-47.

[38] Natroshvili D. Boundary integral equation method in the steady state oscillation problems for anisotropic bodies, Math. Methods in Applied Sciences, 20, No. 2 (1997), 95-119.

[39] Mikhlin S.G., Prössdorf S. Singular Integral Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[40] Miranda C. Partial differential equations of elliptic type. Second revised edition. (Translated from the Italian) Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 2. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[41] Stephan E.P. Boundary integral equations for mixed boundary value problems in R^3. Math. Nachr., 134 (1987) 21-53.

[42] Kupradze V.D. Boundary value problems of oscillations and integral equations, Moscow, 1950.

[43] Panich O.I. On solvability of external boundary value problems for wave equation and Maxwell system, Usp. Mat. Nauk, 20 (1965), 221-226.

[44] Brakhage H., Werner P. Uber das Dirichletsche Aussenraumproblem fur die Helmholtzsche Schwingungsgleichung, Arch. Math., 16 (1965), 325-329.

[45] Leis R. Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Aussenraums der Schwingungsgleichung, Mat. Z., 90 (1965), 205-211.

[46] Natroshvili D., Giorgashvili L., Zazashvili Sh. Steady state oscillation problems in the theory of elasticity for chiral materials, Journal of Integral Equations and Applications, 17, No. 1, Spring (2005), 19-69.

[47] Manelidze G., Natroshvili D. Method of fundamental solutions for transmission problems, Bulletin of TICMI, Vol. 19, No. 2 (2015), 21-39.

[48] Jentsch L., Natroshvili D. Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticityof anisotropic bodies. Part I. Memoirs on Differential Equations andMathematical Physics, 17 (1999), 7-127.

[49] Jentsch L., Natroshvili D. oshvili,Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticityof anisotropic bodies, Part II. Memoirs on Differential Equations andMathematical Physics, 18 (1999), 1-50.

[50] Dautray R. and Lions J.L. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 4. Integral equations and numerical methods. (Translated from the French) Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[51] Hsiao G. C., Wendland W. L. Boundary integral equations, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[52] Burton A. J., Miller G.F. The application of integral equation method to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, Proc. Royal Soc. London, A323 (1971), 201-210.

[53] Fleck M., Grzhibovskis R., Rjasanow S. A New Fundamental Solution Method Basedon the Adaptive Cross Approximation, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics,65, 2015, 93-111.

[54] Manelidze G., Natroshvili D. Direct boundary integral equations method for acoustic problems in unbounded domains, Bulletin of TICMI, Vol. 19, No. 1 (2015), 3-25.

[55] Aleksidze M.A. Fundamental functions in approximate solutions of the boundary problems, Nauka, Moscow 1991.

[56] Eremin Yu.A., Ilinski A.S., Sveshnikov A.G. The method of non-orthogonal serieses in the problems of electromagnetic waves diffraction. Reports of Academy of Sciences of the USSR. 247(1979) 6, 1351-1354

[57] Eremin Yu.A., Ilinski A.S., Sveshnikov A.G. Models of Electromagnetic Scattering Problems Based on Discrete Sources Method. North-Holland, Mechanics and Mathematical Methods, A Series of Handbooks, First Series: Computational Methods in Mechanics. Vol. 4, Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering, edited by Thomas Wreidt. Chapter 4, pp. 39-79, 1999.

[58] Hafner Ch. The generalized multipole technique for computational electro-magnetics. Artech House Books, 1990.

[59] Balas J., Sladek J., Sladek V. Stress Analysis by Boundary Element Methods. Elsevier, Amsterdam 1989.

[60] Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques. Springer Verlag, Berlin 1984.

[61] Benitez F.G. (ed.), Fundamental Solutions in Boundary Elements. SAND (Camas) Sevilla 1997.

[62] Natroshvili D. Investigations of Boundary Value and Initial Boundary Value Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity for Homogeneous Anisotropic Media Using the Potential Methods. Dr. of Science Thesis, Tbilisi 1984 (Russian).

[63] Agranovich M.S. Elliptic singular integro-differential operators. Uspekhi Mat. Nauk, 20 (1965), No. 5, 3-120.

[64] Grubb G. Pseudodifferential boundary problems in spaces. Comm. P. D. E., 15 (1990), No. 3, 289-340.

[65] Shargorodsky E. An L_p-Analogue of the Vishik-Eskin Theory. Mem. Diff. Equations Math. Phys., 2 (1994), 41-146.

[66] Brener A.V., Shargorodsky E. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators. Encyclopaedia of Math. Sci., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, Vol. 79, No. 9 (1997), 145-215.