საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ალექსანდრე კლიმიაშვილი

ალგებრული სტრუქტურები კომპუტერულ მათემატიკაში და მათემატიკურ ლოგიკაში

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“, შიფრი 0501

თბილისი

2015 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. ალექსანდრე კლიმიაშვილი

რეცენზენტები: ---------------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის "------" ----------------, --------- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის -----------------------

----------------------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

თემის აქტუალობა

არასტანდარტული ანალიზის საწყისი განვითარების პერიოდი განეკუ-თვნება გა-სული საუკუნის 60-70 წლებს. ის უკავშირდება ა. რობინსონის და კრეისლერის (იხ. [15]) ნაშრომებს, რომლებიც თავდაპირველად მათემატიკურ ლოგიკას ეყრდნობოდნენ. არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი ინტერესი იმაში მდგომარეობს, რომ, თუ მოცემულია რაიმე "ჩვეულებრივი" მათემატიკური თეორია, მაგალითად, ალგებრა, ანალიზი, ტოპოლოგია ან სხვა, მაშინ არასტანდარტული ანალიზის მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია ასეთი თეორიის სტანდარტული მოდელი "ჩაიდგას" ბევრად უფრო ძლიერ არასტანდარტულ მოდელში. ასეთი ჩადგმა ხშირად ეხმარება "ჩვეულებრივ" მოდელში განვითარებულ მათემატიკურ ინტუიციას და თანაც არასტანდარტულ ანალიზში დამტკიცებული "გადატანის" თეორემების მეშვეობით იძლევა მათემატიკური დამტკიცებებისთვის გამოსადეგ ახალ და ძლიერ მეთოდს. "გადატანის" არსი იმაში მდგომარეობს, რომ დებულება ჭეშმარიტია სტანდარტული მოდელში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი "გადატანილი" ვარიანტი ჭეშმარიტია არასტანდარტულ მოდელში. მაგრამ, რა თქმა უნდა, არასტანდარტული ანალიზი არ შემოიფარგლება მხოლოდ "გადატანით", ნებისმიერი თეორიისთვის ჩამოყალიბებული არასტანდარტული ვერსია იძლევა ბევრ ახალ ინ-ტუიციურ მეთოდს, რომელიც სტანდარტულ თეორიაში არ მოიპოვებოდა. არასტან-დარტული ანალიზის პირველი სისტემატური გარჩევა მოცემული იყო ჯერ კიდევ 1966 წელს რობინსონის მიერ გამოქვეყნებულ წიგნში. მას შემდეგ მრავალი ავტორის მიერ იქნა გამოქვეყნებული არასტანდარტული ანალიზის სხვადახვა ვერსიები, კერ-ძოდ, მახოვერი, პირშფილდი, ნილსენი და სხვა. მეტიც, არასტანდარტულმა მეთო-დებმა ადგილი დაიმკვიდრეს "ჩვეულებრივ" მათემატიკურ თეორიაშიც. ნილსენის მიერ ჩამოყალიბებული მიდგომა განსხვავდება არასტანდარტული ანალიზის ადრინდელი ვერსიებისგან იმით რომ ის აქსიომატურია. ანუ სინტაქტური მიდგომებისგან განსხვავებით ამ შემთხვევაში ხდება არასტანდარტული ანალიზის სემანტიკური შემოტანა. აქ ჩვეულებრივ სიმრავლეთა თეორიას ემატება ახალი პრედიკატი „სტანდარტული" და რამდენიმე აქსიომა. ამ აქსიომების მეშვეობით ხდება არასტანდარტული ანალიზის განვითარება, მაგრამ ასეთი მიდგომის პრობლემა ის არის რომ ის ნაკლებად ინტუიციურია ვიდრე სემანტიკური მიდგომა

და ამიტომ ჩვენ აქ უპირატესობას, მრავალი ავტორის მიერ ჩამოყალიბებულ, სემანტიკურ მიდგომას ვაძლევთ.

თავიდანვე გასაგებია რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ჩადგმას არასტან-დარტულ ნამდვილთა სიმრავლეში ბევრი საინტერესო თვისება გააჩნია.

კერძოდ,

1. გაფართოება ინარჩუნებს დალაგებას, ანუ წრფივად დალაგებული სიმრავლე R ჩაიდგმება წრფივად დალაგებულ არასტანდარტულ ნამდვილთა სიმრავლეში.
2. არსებოს კავშირი სტანდარტული და არა სტანდარტული რიცხვების თვი-სებებს შორის რომელსაც ე. წ. “გადატანის” თეორემები აზუსტებენ. მათ შორის წრფივი დალაგების შენარჩუნებაც გადტანის ერთ-ერთი შედეგია.

აქ უნდა ავღნიშნოთ რომ “გადატანა“ არასტანდარტულ ანალიზში განსხვავდება ჩვეულებრივ მათემატიკაში არსეებული გადატანის შემთხვევებისგან. კერძოდ ჩვეულებრივად ორ სტრუქტურას შორის არსებულ მორფიზმს “გადააქვს“ გარკვეულისახის თვისებები მაგ. ჰომომორფიზმს-ალგებრულ, ჰომეომორფიზმს-ტოპოლოგიური და ა. შ. ასევე კატეგორიათა თეორიაში ფუნქტორები, ბუნებრივი გარდაქმნები და სხვა.

ამისგან განსხვავებით, არასტანდატულ ანალიზში ხდება ზოგადი თვისებების მთელი კლასის გადატანა, რომელთა ძირითადი მახასიათებელი ის არის რომ ისინი გარკვეული ტიპის მკაცრი მათემატიკური გამონათქვამების სახით ჩაიწერებიან.

სწორედ ამის გამო შეუძლებელია არასტანდარტული ანალიზის აღწერა გარ-კვეული რაოდენობით მათემატიკური ლოგიკიდან მოსული კონცეფციების გამოყენების გარეშე.

მათემატიკური ლოგიკისათვის დამახასიათებელი ფორმალიზმიც ნაწილობ-რივ ნარჩუნდება არასტანდარტულ ანალიზში, ამასთან ჩვენ არა მარტო ორ სტრუქტურას შორის მსგავსება არამედ მათ შორის განსხვავებახც გვაინტერესებს, ეს არის არასტანდარტულ ანალიზში განსაზღვრულ ე.წ. “გარეგან” ობიქტთა თვისებების საკითხი. ყოველივე ზემოთქმულიდან გასაგებია რომ, მიუხედავად ნამდვილი რიცხვებიდან არასტანდარტული ნამ-დვილების აგების სუფთა მათემატიკური გზის არსებობისა, შეუძლებელია არასტანდარტული ანალიზის სრულყოფილი ჩამოყალიბება მათემატიკური ლოგიკის გარეშე. ძირითადი რისთვისაც ლოგიკა

აუცილებელია არის "გადატანის" მექანიზმის ფორმალიზაცია. ეს ხდება მოდელთა თეორიაში არსებული შედეგების გამოყენებით, კერძოდ, 1930-იან წლებში სკოლემის მიერ, არასტანდარტულ მოდელებთან დაკავშირებით, მიღებულ შედეგებზე დაყ-რდნობით. ასეთი ფორმალიზაციის აუცილებლობა უფრო გასაგები გახდება ერთი მაგალითის მოშველიებით. კარგად ცნობილია რომ R ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლეს აქვს ე.წ. არქიმედულობის თვისება. არასტანდარტულ შემთხვევაში არასტანდარტულ ნამდვილი რიცხვთა ველი არქიმედული აღარ არის მაგრამ "გადატანის" გამოყენებით შეგვიძლია "არქიმედულობაზე" ლაპარაკი არასტანდარტულ ნატურალურებთან მიმართებაში.

მსგავს სიტუაციებთან დაკავშირებული მათემატიკური სიზუსტის შესაბამისი დონის შენარჩუნება მოითხოვს არასტანდარტულ ანალიზში"სუპერსტრუქტურის" ცნების შემოტანას. სუპერსტრუქტურის სიახლე იმაშია რომ, თუ ჩვეულებრივ მათემატიკაში ჩვენ ვიხილავთ სტრუქტურის ელემენტებს, ელემენტებისგან შემდგარ სიმრავლეებს და შესაძლოა სიმრავლეთა სიმრავ-ლეებს, "სუპერსტრუქტურაში" ხდება ამ პროცესის უსარულო იტერაცია ანუ განიხილებ სიმრავლეთა სიმრავლეების სიმრავლეები და ა.შ.

ეს საშუალებას გვაძლევ არასტანდარტულ ანალიზს მივანიჭოთ მაქსიმალური ზოგადობის დონე და შემოვიღოთ ისეთი ცნებები როგორც"შინაგანი", "გარეგანი", "ჰიპერსასრული" და ა.შ. ამასთან არასტანდარტული ანალიზის ერთ-ერთი ყველაზე მოულოდნელი თვისება იმაში მდგომარეობს რომ არასტანდარტულ რიცხვთა მოდელის აგებისას ჩვენ არ ვზრუნავთ ასე-თი მოდელის ერთად-ერთობაზე. კერძოდ ასეთი მოდელის აგება დამოკიდებულია(როგორც ვნახავთ) "თავისუფალ ულტრაფილტრზე", რომლის ზუსტი შერჩევა ასეთი ულტრაფილტრების უსასრულო სიმრავლიდან, თეორიის აგებისას არ ხდება. ზოგადად, ყველა ეს მოდელი შეიძლება ჩაითვალოს მათემატიკაში დღემდე დაუზუსტებელი "ერთგანზომილებიანი კონტი-ნუმის" შესაძლო მოდელებად. ასეთი კონტინუმის მაგალითია რა თქმა უნდა ნამდვილ რიცხვთა ღერძიც მაგრამ არასტანდარტული ანალიზის შედეგების გათვალისწინებით გასაგები ხდება რომ ეს კარგად ნაცნობი სტრუქტურა ერთგანზომილებიანი კონტინუმის მხოლოდ ერთ-რთ შესაძლო მოდელთაგანია. რაც შეეხება ფორმალიზმის საკითხს არასტანდარტულ ანალიზში აქ უნდა ითქვას რომ ზოგადად რა თქმა უნდა თანამედროვე მათემატიკას ახასიათებს სიზუსტის მაღალი

დონე რომელიც ფორმალიზაცის მინიმალური გამოყენებით მიიღწევა. ანუ ფორმალიზმის გამოყენება არასტანდარტულ ანალიზში გამომდინარეობს არა უბრალოდ სიზუსტის მოთხოვნებიდან არამედ ასე ვთქვათ “საქმის არსს” შეესაბამება. აქედან გამომდინარე, გასაგებია, რომ „ჩვეულებრივ“ მათემატიკაში არასტანდარტული ანალიზის გამოყენება არ არის პოპულარული, მიუხედავად მრავალი ძლიერი შედეგისა რომელიც არასტანდარტულმა მეთოდებმა მათემატიკის მრავალ სფეროში ბოლო წლების განმავლობაში მოგვცა.

აქ შეგვიძლია მოვიყვანოთ არასტანდარტული ანალიზის განვითარების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა. პირველი მცდელობები აეგოთ ნამდვლ რიცხვთა ველის გაფართოების ეკუთვნით დ.ლაუგვიცს და კ.შმიედენს, მათ მიერ აგებული კონსტრუქციები დაფუძნებული იყო ჯერ კიდევ გ. კანტორის მიერ ჩამოყალიბებულ პრინციპებზე და იძლეოდა ნამდვილ რიცხვთა შემცველ რგოლს, რომელიც თავის მხრივ ნულის გაყოფებს შეიცავდა. ამრიგად, ეს კონსტრუქცია არ იძლეოდა ველს რომელიც ნამდვილ რიცხვთა ველის გაფართოება იქნებოდა. ასეთი კონსტრუქცია პირველად მიღებული იქნა რობინსონის მიერ 1961 წელს, რასაც მოყვა ლუქსემბურგის მიერ მსგავსი კონსტრუქციის აგება. არასტანდარტული ანალიზის პირველი სისტემატური აღწერა მოცემული იყო რობინსონის 1966 წელს გამოქვეყნებულ წიგნში. ეს წიგნი ასევე შეიცავდა არსტანდარტული ანალიზის გამოყენების მაგალითებს მათემატიკის სხვადასხვა სფეროდან. არასტანდარტული ანალიზის ჩამოყალიბებისთვის აქ გამოყენებული იყო მოდელთა თეორიის და მათე-მატიკური ლოგიკის ძირითადი ცნებები, ისეთი როგორც პრედიკატთა აღრიცხვის კომპაქტურობის თვისება, ტიპთა თეორია და სხვა. „სუპერსტრუქტურის“ ცნება პირველად შემოტანილი იქნა 1969 წელს რობინსონის და ე. ზაკონის მიერ გამოქვეყნებულ სტატიაში. ამ ცნების მესშვეობით მოხერხდა არასტანდარტული ანალიზის დაყვანა სიმრავლეთა თეორიამდე, მათემატიკური ლოგიკის გამოყენების მინიმუმით.

შემდგომი განვითარება არასტანდატული ანალიზის თეორიული მხარის სრულყოფაში, მოხდა 1977 ე.ნელსონის მიერ გამოქვეყნებული სტატიის შემდეგ. აქ მოცემული იყო არასტანდარტული ანალიზის ჩამოყალიბების აქსიომატური მეთოდი, რომელიც ცნობილია როგორც „შინაგან სიმრავლეთა თეორია“.

ნაშრომის მიზანი:

წინამდებარე ნაშრომში ჩამოვაყალიბებთ არასტანდარტული ანალიზის ძირითად ცნებებს და მეთოდებს, და განვიხილავთ ამ მეთოდების გამოყენების შესაძლებლობას აბსტრაქტულ ალგებრაში, კერძოდ, ველების ნორმირებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის შესწავლისას.

კვლევის მეთოდები: კვლევისას გამოყენებულია არასტანდარტულ ანალიზში შემუშავებული მეთოდები, კერძოდ "გადატანა", არასტანდარტული მოდელის ინტუიციის გამოყენება სტანდარტულ მოდელში და სხვა.

სამეცნიერო სიახლე: ნაშრომი არკვევს არასტანდარტული ნორმის მიერ სტანდარტულის ინდუცირების ზოგად შემთხვევას, ნებისმიერი ალგებრული გაფართოების შემთხვევაში.

მიღებული შედეგების გამოყენება: არასტანდარტულ ანალიზში მიღებულ შედეგებს ფართო გამოყენება აქვთ არა მარტომათემატიკის სხვადასხვა სფეროებში, არამედ ისეთ ფიზიკასთან მჭიდრო კავშირში მყოფ სფეროებშიც როგორიცაა სტოქასტური ანალიზი და მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები.

ნაშრომის აპრობაცია: სადისერტაციო ნაშრომი მოხსენებული იქნა სადოქტორო პროგრამით გათვალისწინებულ ორ სემინარზე და საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ღია 93-ე სტუდენტურ კონფერენციაზე. ასევე სადისერტაციო თემაზე გამოქვეყნებულია 3 სამეცნიერო შრომა.

ნაშრომის სტრუქტურა: ნაშრომი შედგება შესავლის, სამი თავი, დაკვნის და გამოყენებული ლიტერატურის სიისაგან. პირველ ნაწილში მოცემულია არასტანდარტული მოდელების აგების სქემა, ხოლო მეორე ნაწილში განხილულია არატსანდარტული მეთოდების გამოყენებასთან დაკავშირებული საკითხები.

ნაშრომის შინაარსი:

ორ ნაბიჯში შესაძლებელია ${}^{*}R$-ის მიღება, როგორც სავსებით დალაგებული ველის, რომლისთვისაც R წარმოადგენს ქვეველს. პირველი ნაბიჯით R ჩაიდგმება გაფართოებული ალგებრა R^N-ში, ხოლო მეორე ნაბიჯი იქნება R^N-ის ფაქტორიზაცია. ვიწყებთ R-დან R^N-ში ალგებრული ჰომომორფიზმის აგებით. გვაქვს შემდეგი სახის ინექცია

$$r \in R \longrightarrow \langle r, r, r, \ldots \rangle \in R^N . \tag{1}$$

R^N-ზე ალგებრული სტრუქტურა მოიცემა R^N-ის ელემენტების R-ის ოპერაციების გავრცობით შესაბამის კომპონენტებზე ოპერაციების შესრულებით. რა თქმა უნდა, ასე მოცემული სტრუქტურა ველი არ არის (კერძოდ, ნულის გამყოფებს შეიცავს, მაგალითად, $\langle 1,0,1,\ldots\rangle \cdot \langle 0,1,0,\ldots\rangle = \langle 1\cdot 0, 0\cdot 1, 1\cdot 0,\ldots\rangle = \langle 0,0,\ldots\rangle$). აქედან გამომდინარე, R^N-ის ჩადგმა ველში შეუძლებელია. ეს განაპირობებს შემდეგი ნაბიჯის აუცილებლობას.

ავიღოთ ნებისმიერი მაქსიმალური იდეალი R^N-ში. აღვნიშნოთ ეს იდეალი M-ით. მაშინ, კარგად ცნობილია, რომ R^N/M ველს წარმოადგენს და არსებობს კანონიკური ჰომომორფიზმი

$$s \in R^N \longrightarrow [s] = s + M \in R^N/M$$

ანუ ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე არსეობს კომუტატური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "^*(\ )"] \arrow[dr] & & {}^*R = R^N/M \\ & R^N \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

სადაც $^*(\ \ )$ მოიცემა

$$r \in R \mapsto {}^*r = [\langle r,r,r,\ldots\rangle] = \langle r,r,r,\ldots\rangle + M \in {}^*R = R^N/M \,.$$

აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ $^*R$ კარდინალობა არ შეიძლება აღემატებოდეს კონტინუმს, რადგანაც ის არ არის უფრო დიდი; აღემატება R^N-ის კარდინალობას, ხოლო R^N კარდინალობა კონტინუმია.

შესაძლებელია ასევე $^*R$ სიმრავლეზე დალაგების შემოღება. ამისთვის ჯერ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ R^N-ზე მემკვიდრეობით გვაქვს ნაწილობრივი დალაგება, მოცემული $s = \langle s_1, s_2,\ldots\rangle$ და $t = \langle t_1, t_2,\ldots\rangle$-თვის გვაქვს

$$s \le t \Leftrightarrow s_n \le t_n \text{ ყოველი } n \in N\text{-თვის.}$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია შევეცადოთ სრული დალაგების აგებას $^*R$-ზე. ყველაფერი ზემოთქმულიდან გამომდინარე გვჭირდება რამდენიმე სტრუქტურა $^*R$ ველის ბოლომდე განსაზღვრისთვის. კერძოდ, მაქსიმალური იდეალი M $^*R$-ში, R-ის $^*R$-ში ჰომომორფული ჩადგმა, სრული დალაგების განსაზღვრა $^*R$-ზე.

ამ კონსტრუქციების უკეთესად გასაგებად საჭიროა გამოვიყენოთ ზოგიერთი მათემატიკური კონსტრუქცია. კერძოდ, ფილტრი $P(N)$-ში, ულტრაფილტრი $P(N)$,

ზომა N-ზე და მათუ ურთიერთკავშირი, ასევე მათი კავშირი მაქსიმალურ იდეალებთან R^N-ში. ამ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა, შესაძლებელია უფრო დიდი განზოგადოების ხარისხის შემოღება და N-ის მაგივრად ნებისმიერი I უსასრულო სიმრავლის განხილვა, ჩვენი კონსტრუქციები ასეთი განზოგადებით არსებითად არ იცვლებიან.

დავიწყოთ იმით, რომ ნებისმიერ $R^N\left(R^I\right)$ ფუნქციას ეთანადება სიმრავლე $P(I)$-დან (ანუ I-ს ქვესიმრავლე), რომელიც მოიცემა ამ ფუნქციის "ნულების" ამოკრეფით I სიმრავლიდან. კერძოდ, $z(s)=\{i\in I \mid s(i)=0\}\subset I$. აქედან გავიხსენოთ, რომ არა-ცარიელი $\mathsf{F}\subset P(I)$-ს ფილტრი ეწოდება, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $\varnothing\notin\mathsf{F}$;
2. $J,K\in\mathsf{F}\Rightarrow J\cap K\in\mathsf{F}$;
3. თუ $J\subseteq K\in P(I)$ და $J\in\mathsf{F}\Rightarrow K\in\mathsf{F}$.

ამ განსაზღვრების გათვალისწინებით, თუ ავიღებთ ნებისმიერ საკუთრივ $B\in R^I$ იდეალს და განვიხილავთ მასში შემავალი ყოველი ელემენტის ნულების სიმრავლეე-ბისგან შემდგარ სიმრავლეს, მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ასეთი F_I წარმო-ადგენს ფილტრს I-ზე.

ჩვენ ავაგეთ ${}^*R=R^N/I_n$ ნამდვილ რიცხვითა ველის გაფართოება, და ვნახეთ R-ის სტრუქტურის ${}^*R$-ზე "გადატანის" მაგალითები. მთლიანობაში ამგვარი "გადატანა" დაკავშირებულია არა იმდენად R-ისა და ${}^*R$-ის კონკრეტულ სტრუქტურასთან, არამედ "გადატანის მექანიზმთან", რომელიც მათემატიკური ლოგიკის მეთოდების გამოყენებით იგება. ამ კონსტრუქციის აგების რამდენიმე განსხვავებული ვარიანტი არსებობს, ჯერ განვიხილოთ უფრო მარტივი ვერსია, რომელიც მათემატიკური ლოგიკის საფუძვლების გამოყენებას ჯერდება. ამისთვის განვსაზღვროთ რამდენიმე საჭირო სტრუქტურა.

განსაზღვრება. მარტივი სისტემა ეწოდება ნებისმიერ სტრუქტურას, რომელსაც შემდეგი ფორმა აქვს

$$\hat{S}=\left(S,\left(p_i \mid i\in I\right),\left(f_j \mid j\in J\right)\right),$$

სადაც S არაცარიელი სიმრავლეა, $P_i \subseteq S^{n_i}$ არის n_i ადგილიანი მიმართება S-ზე, $f_j : D_j \to S$ არის m_j ადგილიანი ფუნქცია, $D_j \subseteq S^{m_j}$ დომეინით და მნიშვნელობებით S-ში.

შენიშვნა. ასეთი განმარტების თანახმად, ჩვენს მიერ აგებული ორივე R და ${}^*R$ სტრუქტურა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მარტივი სისტემა. კერძოდ,

$$\hat{R} = \left(R,(=,\leq),(+,\times)\right),$$
$${}^*\hat{R} = \left({}^*R,(=,\leq),(+,\times)\right).$$

ამ შემთხვევაში R-ს და ${}^*R$-ს განვიხილავთ როგორც დალაგებული რგოლის (ველის) მაგალითს, მოგვიანებით ვნახავთ, რომ ორივე სტრუქტურისთვის შესაძლებელია ბევრად მეტი მიმართების და ფუნქციის განხილვა R-სა და ${}^*R$-ზე.

ყოველი მარტივი სისტემა $\hat{S}$-თან ასოცირებული მარტივი L_S ენა შემდეგნაირად შემოიღება. $L_{\hat{S}}$-ის **ანბანი** შედგება სიმბოლოების შემდეგი კატეგორიებისგან:

1. ლოგიკური კავშირები $\wedge$ და $\to$ (რომლებიც აღნიშნავენ “და” და “გამომდინარეობს” ლოგიკურ ოპერაციებს, შეგვიძლია ასევე შემოვიტანოთ $\vee$ და $\neg$ (“ან”, “არა”) კავშირები ან სტანდარტულად განვიხილოთ ეს კავშირები როგორც $\wedge$-გან და $\to$-გან მიღებული კავშირები).
2. კვანტორის სიმბოლო $\forall$ (ან $\forall$, $\exists$) “ყველასთვის” და “არსებობს”.
3. სამი ტიპის ფრჩხილი $[\ ]$, $(\ )$, $\langle\ ,\ \rangle$.
4. ცვლადების აღმნიშვნელი სიმბოლოები x, y, z.

ეს კატეგორიები საერთოა ყველა მარტივი სისტემისთვის, ხოლო შემდეგი სამი კატეგორია დამოკიდებულია კონკრეტული სისტემა $\hat{S}$-ზე.

5. მუდმივი სიმბოლოები: ყოველი $s \in S$ შეგვიძლია დავაფიქსიროთ მისი სახელი $\underline{S}$.
6. მიმართების სიმბოლოები: ყოველი P_i-თვის მისი დასახელება $\underline{P}_i$.
7. ფუნქციონალური სიმბოლოები: ყოველი f_j-თვის მისი დასახელება $\underline{f}_j$.

შენიშვნა. აქ არსებობს გარკვეული დუბლირება მიმართების სიმბოლოსა და გახაზული მიმართების სიმბოლოს შორის, რომელიც სინტაქსისა და სემატიკის დუა-

ლიზმთან არის დაკავშირებული. შემდეგში ამ დუბლირებას იგნორირებას გავუკეთებთ და $\underline{P}_i$-ის მაგივრად დავწერთ პირდაპირ P_i, ანუ აღარ დავწერთ $\pm$, $\underline{\times}$ და ა. შ.

შემდეგი ნაბიჯი, რა თქმა უნდა, არის შემოღებული $L_{\hat{S}}$ ენის **ინტერპრეტაცია** ანუ თანადობის აგება $L_{\hat{S}}$ ენასა და $\hat{S}$ სტრუქტურას შორის. ცხადია, ერთი და იგივე ენას, ზოგადად, შეიძლება სხვადასხვა ინტერპრეტაცია გააჩნდეს, ანუ ნებისმიერი n-ადგილიანი მიმართების ან ფუნქციურ სიმბოლოს შესაძლებელია მიენიჭოს სხვადასხვა n-ადგილიანი მიმართების ან ფუნქციის სემანტიკური მნიშვნელობა.

$L_{\hat{S}}$ ენასთან მიმართებაში ასევე შემოგვაქვს შემდეგი განმარტებები:

სიტყვა ეწოდება $L_{\hat{S}}$ ანბანის ელემენტებისგან შემდგარ სასრულ მიმდევრობას.

თერმი არის სიტყვა, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

1. ნებისმიერი კონსტანტის ან ცვლადი სიმბოლოებისგან შემდგარი ერთადგილიანი სიტყვა თერმია;
2. თუ $\underline{f}$ n-ადგილიანი ფუნქციის დასახელებაა და $\tau^1,\ldots,\tau^n$ $\underline{f}\left(\tau^1,\ldots,\tau^n\right)$ თერმია.

თერმს , რომელიც არ შეიცავს ცვლად სიმბოლოებს **მუდმივი თერმი** ეწოდება.

ახლა შეგვიძლია განვმარტოთ $L_{\hat{S}}$ ენის მარტივი გამონათქვამები. მათ განვმარტავთ შემდეგნაირად:

1. ატომური გამონათქვამი მოიცემა როგორც $\underline{P}\left\langle\tau^1,\ldots,\tau^n\right\rangle$, სადაც $\underline{P}$ არის n-ადგილიანი სიმბოლო, ხოლო $\tau^1,\ldots,\tau^n$ არის n-ცალი თერმი.
2. შედგენილი გამონათქვამი მოიცემა შემდეგი სახის ზოგადი ფორმულით

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\left\langle\xi_i\right\rangle\longrightarrow\bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\left\langle\chi_j\right\rangle\right],$$

სადაც $\underline{P}_i$ და $\underline{Q}_j$ n_i და m_j-ადგილიანი მიმართებისთვის ξ_i და χ_j აღნიშნავენ n_i და m_j ცალ თერმს $\tau_i^1,\ldots,\tau_i^{n_i}$ ან $\tau_j^1,\ldots,\tau_j^{m_j}$.

შენიშვნა. გამონათქვამი ზოგადად მათემატიკური ლოგიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნებაა. ამ შემთხვევაში მნიშვნელოვანია გავაიგივოთ განსხვავება გამონათქვამსა და ჩვეულებრივ ფორმულას შორის. მაგალითად, ფორმულაა, რომელიც

კვანტორის დამატებით შეგვიძლია გამონათქვამად ვაქციოთ $(\forall x)\left[x^2+1>0\right]$. ეს გამონათქვამი ფორმულისგან იმით განსხვავდება, რომ მის შემთხვევაში შეგვიძლია ჭეშმარიტება/მცდარობაზე ვილაპარაკოთ. რასაც, ზოგადად, ფორმულებისთვის ადგილი არ აქვს. ნებისმიერი ინტერპრეტაციის მიზნად სწორედ გამონათქვამების ჭეშმარიტება/მცდარობის დაფიქსირება შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

ახლა განვსაზღვროთ $L_{\hat{S}}$ ენის ინტერპრეტაციის ცნება.

$L_{\hat{S}}$ ენის ინტერპრეტაცია განისაზღვრება ინდუიქციური მეთოდით მარტივ

$$\hat{S}=\left(S,\left(p_i\middle|\ i\in I\right),\left(f_j\middle|\ j\in J\right)\right) \tag{17}$$

სისტემაზე შემდეგნაირად:

1. კონსტანტა $\underline{s}$, რომელიც წარმოადგენს $s\in S$ ელემენტის სახელს ინტერპრე-ტირდება ამ ელემენტით. ცხადია, ასეთი ინტერპრეტაცია შესაძლებელია.
2. $\underline{f}\left(\tau^1,\ldots,\tau^n\right)$ თერმი **უშვებს ინტერპრეტაციას** იმ შემთხვევაში, თუ ყველა $\tau^1,\ldots,\tau^n$ თერმი ინტერპრეტირებულია შესაბამისი $s^i\in S$ ელემენტით და თანაც $\left(s^1,\ldots,s^n\right)$ n-ეული ეკუთვნის f-ის დომეინს, სადაც f არის n-ცვლადიანი ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს $\underline{f}$-ის n-ცვლადიანი ფუნქციის სახელის ინტერპრეტაციას. მაშინ $\underline{f}\left(\tau^1,\ldots,\tau^n\right)$ თერმის ინტერპრეტაცია არის $f\left(s^1,\ldots,s^n\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, ანუ არის S-ის ელემენტი $f\left(s^1,\ldots,s^n\right)\in S$.
3. ატომური გამონათქვამი $\underline{P}\left\langle\tau^1,\ldots,\tau^n\right\rangle$ უშვებს ინტერპრეტაციას, მაშინ და მხო-ლოდ მაშინ, თუ ყოველი $\tau^1,\ldots,\tau^n$ ტერმი ინტერპრეტირებულია და $\underline{P}$ – n-ადგილიანი მიმართების სახელს გააჩნია $P-$ n-ადგილიანი მიმართებით მოცემული ინტერპრეტაცია.

გამონათქვამი ჭეშმარიტია, თუ ის უშვებს ინტერპრეტაციას და თანაც $P\left\langle s^1,\ldots,s^n\right\rangle$ ჭეშმარიტია, ანუ $\left(s^1,\ldots,s^n\right)$ ელემენტები P მიმართებაში არიან ერთმანეთთან, სადაც P $\overline{P}$ სახელის ინტერპრეტაციაა. შესაძლებელია, რა თქმა უნდა, P მიმართებას ამ ელემენტებზე არ ჰქონდეს ადგილი, ან ატომური გამონათქვამი საერთოდ არ

უშვებდეს ინტერპრეტაციას. ორივე შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\underline{P}\left\langle \tau^1,\ldots,\tau^n \right\rangle$ გამონათქვამის ჭეშმარიტებას ადგილი არ აქვს.

და ბოლოს, შედგენილი გამონათქვამი

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\left\langle \xi_i\right\rangle \longrightarrow \bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\left\langle \chi_j\right\rangle\right] \tag{18}$$

უშვებს ინტერპრეტაციას, თუ ყოველი $P_i\left\langle \xi_i\right\rangle$ და $Q_j\left\langle \chi_j\right\rangle$ უშვებს ინტერპრეტაციას $x_1,\ldots,x_n$ ცვლადების გარკვეული კონსტანტებით შეცვლისას. ეს გამონათქვამი ჭეშმა-რიტია, თუ არ არსებობს კონსტანტების ჩასმა ისეთი, რომ ამ ჩასმისას $P_i\left\langle \xi_i\right\rangle$ იყოს ჭეშ-მარიტი და ერთი მაინც $Q_j\left\langle \chi_j\right\rangle$ – მცდარი.

ახლა მოვიყვანოთ ასეთი ინტერპრეტაციის მაგალითი. ამისთვის ავიღოთ მარტივი სისტემა

$$\hat{R}=\left(R,P,F\right),$$

სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, P – R-ზე მოცემული ყველა სასრულ ადგი-ლიან მიმართებათა სიმრავლე, F შესაბამის ფუნქციათა სიმრავლეა. (რა თქმა უნდა, ასევე გვაქვს ${}^*\hat{R}=\left({}^*R,{}^*P,{}^*F\right)$ მარტივი სისტემაა, მაგრამ ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ჯერ $\hat{R}$ განვიხილოთ.) ამ სისტემისთვის გვაქვს შესაბამისი სტანდარტული $L_{\hat{R}}$-ენა, რომელიც მათემატიკაში ნამდვილ რიცხვებთან მიმართებაში გამოიყენება და მისი სტანდარტული ინტერპრეტაცია. ავიღოთ $L_{\hat{R}}$ რაიმე გამონათქვამი, მაგალითად,

$$\forall x\ \left[\left(\sqrt{x}>-1\right)\longrightarrow\left(\sqrt{x}\ge 0\right)\right].$$

ეს გამონათქვამი ინტერპრეტირებადია $x\ge 0$-თვის და ამ შემთხვევაში ორივე $\sqrt{x}>-1$ და $\sqrt{x}\ge 0$ ერთდროულად ჭეშმარიტია. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\forall x$-კვანტორის განსაზღვრის არე – დადებითი რიცხვები, რომელიც არაპირდაპირი გზით არის მოცემული. აქ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ მარტივი ენა შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ ერთ $\forall$ კვანტორს ან მასთან ერთად $\exists$ არსებობის კვანტორსაც. ეს ორი შემთხვევა არსებითად ექვივალენტურია, მაგრამ, თუ ენაში არსებობის კვანტორი არ გვაქვს, მაშინ არსებობის კვანტორის შემცველი გამონათქვამების გადაწერას მხოლოდ $\forall$-კვანტორის მეშვეობით გამონათქვამში გარკვეული სახის ცვლილებების შეტანას მოითხოვს.

მაგალითად, ავიღოთ ჭეშმარიტი გამონათქვამი

$$\left(\forall x\right)\left(\forall y\right)\ \left[\left(\underline{R}\langle x\rangle\wedge x\neq 0\right)\longrightarrow\left(x\cdot y\right)=1\right].$$

თუ ენაში მხოლოდ $\forall$-კვანტორი გვაქვს, მაშინ ზემოთ მოცემული გამონათქვამი, მარტივი ენით რომ გამოვთქვათ, უნდა შემოვიღოთ σ ფუნქცია

$$\sigma:\left(R\setminus\{0\}\right)\to R$$

ისეთი, რომ $\sigma\left(x\right)=\dfrac{1}{\alpha}$ ყოველი $x\in R\wedge x\neq 0$-თვის. ამ ფუნქციას ენაში გააჩნია $\underline{\sigma}$ აღნიშვნა. მაშინ ზემოთ მოცემული გამონათქვამი შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\forall x\ \left[\left(\underline{R}\langle x\rangle\wedge x\neq 0\right)\longrightarrow\left(x\cdot\underline{\sigma}\left(x\right)=1\right)\right].$$

ასეთი ტიპის ფუნქციებს, რომლებიც არსებობის კვანტორის შემცველი გამონათქვამების გადაწერისას გამოიყენება. მათლოგიკაში **სკოლემის ფუნქციები** ეწოდებათ.

ყოველივე ზემოთქმულის გამოყენებით ახლა შეგვიძლია დავაზუსტოთ ჩვენს მიერ გამოყენებული R-დან $^*R$-ზე მოცემული გადატანის ცნება. ინდუქციურად შემოვიღოთ გადატანის შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება.

1. **კონსტანტები.** თუ I წარმოადგენს $r\in R$ ნამდვილი რიცხვის დასახელებას $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ $L_{^*\hat{R}}$-ის იქნება $r={}^*r\in{}^*R$ დასახელება.
2. **მიმართებები.** თუ $\underline{P}$ წარმოადგენს $L_{\hat{R}}$-ში მოცემულ $P-R$-ზე მოცემული n-ადგილიანი მიმართების დასახელებას, მაშინ $^*\underline{P}$ იქნება $L_{^*\hat{R}}$-დან აღებული n-ადგილიანი $^*P$ მიმართების დასახელება.
3. **ფუნქციები.** თუ $\underline{f}$ წარმოადგენს $L_{\hat{R}}$-დან აღებულ დასახელებას f ფუნქციისთვის, მაშინ $^*\underline{f}$ იქნება $L_{^*\hat{R}}$-დან აღებული $^*f$ ფუნქციის დასახელება.
4. **თერმები.** თუ τ წარმოადგენს ცვლადს ან კონსტანტას, მაშინ მისი გადატანა მოიცემა $^*T=T$-ით, ანუ ზემოთ მოცემული კონსტანტების გადატანას ვაფართოებთ ცვლადებისთვის. თუ $\tau=f\left(\tau_1,\ldots,\tau_n\right)$ თერმი $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ მისი გადატანა $L_{^*R}$-ზე იქნება $^*\tau={}^*\underline{f}\left({}^*\tau_1,\ldots,{}^*\tau_n\right)$.

5. **ატომური გამონათქვამები.** თუ $\Phi = \underline{P}\left\langle \tau_1,\ldots,\tau_n \right\rangle$ არის ატომური გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ მისი გადატანა იქნება

$$^*\Phi = {}^*\underline{P}\left\langle {}^*\tau_1,\ldots,{}^*\tau_n \right\rangle$$

გამონათქვამი $L_{^*\hat{R}}$-დან.

6. **შედგენილი გამონათქვამი.** თუ

$$\Phi = \forall(x_1)\cdots\forall(x_n)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\left\langle \xi_i\right\rangle \longrightarrow \bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\left\langle \chi_j\right\rangle\right]$$

არის შედგენილი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ

$$^*\Phi = (\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}{}^*\underline{P}_i\left\langle {}^*\xi_i\right\rangle \longrightarrow \bigwedge_{1\le j\le l}{}^*\underline{Q}_j\left\langle {}^*\chi_j\right\rangle\right]$$

არის შესაბამისი გამონათქვამი $L_{^*\hat{R}}$-დან (აქ ყოველი $\xi_i = \left\langle \tau_i^1,\ldots,\tau_i^{n_i}\right\rangle$ თერმების ჩასმას ξ_i ცვლადებში, შეესაბამება $^*\xi_i = \left\langle {}^*\tau_i^1,\ldots,{}^*\tau_i^{n_i}\right\rangle$ ჩასმა, და ასევე χ_j შემთხვევაშიც).

ეს ასრულებს განმარტებას R-დან $^*R$-ზე "გადატანისთვის".

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვაჩვენებს ასეთი "გადატანის" ზოგადობას და თანაც არატრივიალურობას. ავიღოთ მარტივი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-დან

$$(\forall x)(\forall y)\ \left[\left(\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle\right)\longrightarrow(x+y=y+x)\right],$$

სადაც $\underline{R}\langle x\rangle$ და $\underline{R}\langle y\rangle$ ნიშნავს, რომ x, y ნამდვილი რიცხვებია (ანუ აკმაყოფილებენ ტრივიალურ ერთადგილიან მიმართებას), გასაგებია, რომ ეს გამონათქვამი R-ზე შეკრების კომუტატურობას გამოხატავს. განმარტების თანახმად, ამ გამონათქვამის გადატანა იქნება

$$(\forall x)(\forall y)\ \left[\left({}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge {}^*\underline{R}\langle y\rangle\right)\longrightarrow(x+y=y+x)\right],$$

სადაც $^*\underline{R}$ არის $\underline{R}$ ერთადგილიანი მიმართების, ანუ ყოველი $s \in {}^*R$-თვის გვაქვს $^*\underline{R}\langle s\rangle$. ცხადია, გადატანილი გამონათქვამი ჭეშმარიტია $^*\hat{R}$ სისტემაში, რადგან $^*R$-ზე შეკრება კომუტატურია.

ახლა ვნახოთ, როგორც გადაიტანება R-ის არქიმედულობის პირობა.

არქიმედულობა $\exists$-ით კვანტორით გამდიდრებული $L_{\hat{R}}$-ის საშუალებით შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

$$\left(\exists u\right)\left(\forall x\right)\left(\exists n\right)\ \left[\left(\underline{R}_+\langle u\rangle\wedge\underline{R}_+\langle x\rangle\wedge\underline{N}\langle n\rangle\right)\longrightarrow\left(x\le n\times u\right)\right], \qquad (19)$$

სადაც $\underline{R}_+\langle u\rangle$ რიცხვის დადებითობას გამოხატავს, $\underline{N}\langle n\rangle$ გამოხატავს n რიცხვის ნატურალობას, $n\ge1$.

ეს გამონათქვამი შეიძლება არსებობის $\exists$-კვანტორის გარეშეც ჩაიწეროს. ამისთვის შევცვალოთ u ცვლადი 1 კონსტანტით, მივიღებთ

$$\left(\forall x\right)\ \left[\left(\underline{R}_+\langle x\rangle\right)\longrightarrow\left(x\le\underline{\sigma}\left(x\right)\times1\right)\right]$$

რომელიც ასევე $L_{\hat{R}}$-ში მარტივ გამონათქვამს წარმოადგენს. გადატანის შემდეგ მივიღებთ

$$\left(\forall x\right)\ \left[\left({}^*\underline{R}_+\langle x\rangle\right)\longrightarrow\left(x\le{}^*\underline{\sigma}\left(x\right)\times1\right)\right].$$

ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია ${}^*\hat{R}$-ში. მაგრამ დებულება, რომელიც $\hat{R}$-დან ${}^*\hat{R}$-ში გადატანის შემდეგ მივიღეთ, არ შეიძლება ჩაითვალოს ${}^*R$ ველის არქიმედულობის პირობად, რადგან გადატანისას $\underline{N}$ რიცხვის ნატურალურობის პირობა იცვლება ${}^*\underline{N}$ პირობით, რომელიც რიცხვს N-ში ყოფნის ნაცვლად მის ბევრად უფრო ფართო ${}^*N$-ში ყოფნას მოითხოვს. ხოლო არქიმედულობის დროს გვინდა, რომ $x\le n\times1$ შესრულდეს სტანდარტული ნატურალური n-თვის. ეს მაგალითი აჩვენებს, რომ ჩვენს მიერ განმარტებულ გადატანას არატრივიალური ხასიათი აქვს. გადატანისას $\hat{R}$-ში ჭეშმარიტი გამონათქვამიდან ${}^*\hat{R}$-ში ჭეშმარიტი გამონათქვამი მივიღეთ, მაგრამ ჩვენი ინტუიციიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ გამონათქვამის აზრი შეიცვალა. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ არატრივიალურია არასტანდარტული ანალიზის შემდეგი თეორემა.

თეორემა. თუ Φ არის მარტივი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-ში და ის ჭეშმარიტია მარტივ $\hat{R}$ სისტემაში სტანდარტული ინტერპრეციისას, მაშინ ${}^*\Phi$ მარტივი გამონათქვამი $L_{{}^*\hat{R}}$-დან ჭეშმარიტია სისტემა ${}^*\hat{R}$-ში სტანდარტული ინტერპრეტაციისას.

ამ თეორემის დამტკიცება იხ. [19]. აქ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ შემოტანილი გადატანის მარტივი ვერსია ორმხრივია ან გვაქვს არა მარტო Φ

ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში $\Rightarrow {}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ში, არამედ $L_{\hat{R}}$-ში $\Leftrightarrow {}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ში. მაგალითად, თუ გვაქვს Φ, რომელიც ყალბია $L_{\hat{R}}$-ის სტანდარტული ინტერპრეტაციისას, მაშინ ($L_{\hat{R}}$-ის $\neg$ უარყოფითი გაფართოებისთვის) გვაქვს $\neg\Phi$ ჭეშმარიტია, მაშინ ${}^{*}(\neg\Phi)$ ასევე ჭეშმარიტია ${}^{*}\hat{R}$-ში ინტერპრეტაციისას, ანუ ${}^{*}\Phi$-ის ჭეშმარიტება Φ გამონათქვამის ჭეშმარიტებასაც უნდა ნიშნავდეს, რადგან ${}^{*}\Phi$ და ${}^{*}(\neg\Phi)$ ერთდროულად ჭეშმარიტი ვერ იქნება. მაგრამ, რა თქმა უნდა, პრობლემები გვექმნება $L_{\hat{R}}$ ენის ზედმეტი სიმარტივის შენარჩუნების შემთხვევაში და ასევე გადატანის თეორემის უფრო ზოგადი შემთხვევისთვისაც გვექნება Φ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში $\Rightarrow {}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში, მაგრამ ამ გამომდინარეობის შებრუნების მცდელობა პრობლემატურია, რადგან $L_{{}^{*}\hat{R}}$ ენა $L_{\hat{R}}$-თან შედარებით უფრო მეტ გამონათქვამებს შეიცავს და, ამრიგად, გადატანის შებრუნება შეიძლება ზოგჯერ აზრიანი არ იყოს.

ახლა ვნახოთ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული თეორემა.

შემოვიღოთ $L_{\hat{R}}$-ში დამატებით Σ გამონათქვამი

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\langle\xi_i\rangle\longleftrightarrow\bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\langle x_j\rangle\right].$$

ეს გამონათქვამი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $L_{\hat{R}}$ მარტივი ენის ორი გამონათქვამი

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\langle\xi_i\rangle\longleftrightarrow\bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\langle x_j\rangle\right]$$

და

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\left[\bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\langle x_j\rangle\longleftrightarrow\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\langle\xi_i\rangle\right].$$

ცხადია, $L_{{}^{*}\hat{R}}$-თვისაც შესაძლებელია მსგავსი მოდიფიკაცია. გადატანისას Σ გამონათქვამის გადატანას განვიხილავთ, როგორც ორი გამონათქვამის გადატანას, რა თქმა უნდა, თუ Σ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ის სტანდარტული ინტერპრეტაციისას ${}^{*}\Sigma$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ის სტანდარტულ ინტერპრეტაციაში.

შემოვიტანოთ სუპერსტრუქტურის საჭირო ცნება არასტანდარ-ტული ანალიზის გაძლიერებული ვარიანტისთვის. ამჯერად აღარ შემოვიფარგლებით მხოლოდ R-ის არასტანდარტული გაფართოების შესწავლით. ავიღოთ ნებისმიერი X სიმრვლე (ზოგადად, საინტერესო შემთხვევებში გვექნება $R \subseteq X$, მაგრამ ამას განმარტებისთვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ აქვს). განვსაზღვროთ ინდუქციით

$$\begin{aligned} &V_0(X) = X, \\ &V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup P(V_n(X)), \quad n \in N, \end{aligned} \tag{32}$$

სადაც $P(Y)$ ნებისმიერი Y სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთ სიმრავლეს წარმოადგენს, მაშინ **სუპერსტრუქტურას** X-**ზე** ვუწოდებთ თვლად გაერთიანებას

$$V(X) = \bigcup_{n \in N} V_n(X).$$

ცხადია, ნებისმიერი X-სა და Y-თვის თუ გვაქვს $X \subset Y$, ასევე გვაქვს $V(X) \subset V(Y)$. კიდევ გვაქვს

$$\begin{aligned} &X = V_0(X) \subseteq V_1(X) \subseteq \cdots \subseteq V_n(X) \subseteq \cdots \subseteq V(X), \\ &X = V_0(X) \in V_1(X) \in \cdots \in V_n(X) \in \cdots \in V(X), \\ &X = V_0(X), V_1(X), \ldots, V_n(X), \ldots, V(X) \in V(X). \end{aligned}$$

X-ის ელემენტებს ვუწოდებთ **ინდივიდუმებს** და ვთვლით, რომ ისინი **სუპერსტრუქტურის შიგნით** სიმრავლეები არ არიან, ანუ

$$x \in X, \quad y \in V(X) \;\Rightarrow\; y \notin x,$$

$V(X)$ ელემენტებს, ზოგადად, **ერთობლიობებს** ვუწოდებთ. ცხადია, ინდივიდუმებიც ერთობლიობების კერძოს შემთხვევას წარმოადგენს. ნებისმიერი $n \in N$-თვის ერთობლიობებს $V_{n+1}(X)/V_n(X)$-ში ვუწოდებთ $n+1$-რანგის ერთობლიობებს, ხოლო $V_n(X)/V_{n-1}(X)$-ს – n-რანგის ერთობლიობებს.

სუპერსტრუქტურის ცნება ცდილობს ასახოს მათემატიკაში ჩვეულებრივი სიტუაცია, როცა X სიმრავლესთან მიმართებაში, მისი სტრუქტურის შესატყვისი მათემატიკური თეორიის აგებისას, ვლაპარაკობთ არა მარტო მის ელმენტებზე, არამედ ქვესიმრავლეებზე, ქვესიმრავლეთა სიმრავლეებზე და ა. შ. ასეთ შემთხვევაში $V(X)$ იქნება უმცირესი სიმრავლე, რომელიც X-თან დაკავშირებული მათემტიკური მსჯელობისას შემოტანილ ელემენტებს მოიცავს.

ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებაში შემოვიტანეთ შეზღუდვა $X \cap P(X) = \varnothing$. შე-იძლება მოგვეჩვენოს, რომ ასეთი შეზღუდვა ეწინააღმდეგება მათემატიკაში, კერძოდ, R ნამდვილი რიცხვებისთვის შექმნილ ზოგიერთ სიტუაციას; მაგალითად, როგორც ვიცით,**დედეკინდის კვეთა** არის $A, B \subset Q \subset R$ ქვესიმრავლეთა წყვილი ისეთი, რომ $A \cup B = Q$ და ყოველი $a \in A$-თვის, $b \in B$-ტვის გვაქვს $a < b$. ამ კვეთიდან შემდეგ გადავდივართ იდენტიფიკაციაზე $x = \{A, B\}$, $x \in R$, ანუ თითქოს $R \cap P(P(R)) \neq \varnothing$, მაგრამ, ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ გვაქვს არა იდენტობა $x = \{A, B\}$, არამედ ურთიერთცალსახა თანადობა $x \longleftrightarrow \{A, B\}$ (A, B – dedekind) და, ამრიგად, $x \neq \{A, B\}$, ანუ თუ სუპერსტრუქტურის ნული რანგის სიმრავლე $V_0 = R$-ის, მაშინ ზემოხსენებული ნამდვილი რიცხვის იდენტიფიკაცია დედეკინდის კვეთასთან არ გვჭირდება, რადგან R უკვე გაგვაჩნია, როგორც დსწყისი სტრუქტურა, ხოლო, თუ საწყისი სტრუქტურაა Q, მაშინ ნამდვილ არარაციონალი რიცხვები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $V(Q)$ სუპერსტრუქტურის რანგი 2-ის ერთობლიობები და ამ შემთხვევაშიც არანაირი წინააღმდეგობა არ წარმოიშობა. რა თქმა უნდა, ჩვეულებრივ მათემატიკაში არ მოგვეთხოვება თვლადად-უსასრულო რაოდენობის რანგების სტრქუტურების აგება. ჩვეულებრივ შემთხვევაში საქმე შემოისაზღვრება რამდენიმე საწყისი რანგის სტრუქტურით, მაგრამ აქ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ მიღებული სუპერსტრუქტურის კარდინალობა არც ისე დიდია, როგორც შეიძლება მოველოდეთ. ზოგადად, ცხადია, კონსტრუქციიდან არ გამომდინარეობს $V(X) \in V(X)$ და თანაც $A \subseteq V(X)$ არ გამომდინარეობს , რომ $A \in V(X)$. ავიღოთ $a \in X$, მაშინ

$$A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \ldots\},$$

გვაქვს $A \subseteq V(X)$, მაგრამ არა $A \in V(X)$, რადგან A-ს ყოველი “მომდევნო” ელემენტი ამ შემთხვევაში ერთით უფრო მაღალი რანგის სტრუქტურას ეკუთვნის და, ამრიგად, არცერთი n-თვის არ გვექნება $A \in V_n(X)$. ამ სიტუაციიდან გამომდინარე შეგვიძლიაშემოვიღოთ ე. წ. **შემოსაზღვრული რანგის პირობა**, ანუ ყოველი $A \subseteq V(X)$-თვის

$$A \in V(X) \Leftrightarrow A \subseteq V_n(X) \text{ რაიმე } n \in N \text{-თვის.}$$

რა თქმა უნდა, გვაქვს ამ პირობის შებრუნებული პირობაც, ანუ

$$A \in V(X) \setminus X \Rightarrow A \subseteq V(X).$$

ეს ნიშნავს, რომ სუპერსტრუქტურის ელემენტები ან ინდივიდუმები ან ქვესიმრავლეები არიან. სუპერსტრუქტურაში გვაქვს ასევე ტრანზიტულობაც, ანუ:

$$a \in A \in V(X) \Rightarrow a \in V(X). \qquad (33)$$

შემდეგი იმპლიკაციები ასევე ჭეშმარიტია ნებისმიერ სუპერსტრუქტურაში

$$a \in A \subseteq V(X) \Rightarrow a \in V(X),$$
$$B \subseteq A \in V(X) \Rightarrow B \in V(X),$$
$$B \subseteq A \subseteq V(X) \Rightarrow B \subseteq V(X).$$

სუპერსტრუქტურის ასეთ განმარტებასთან მიმართებაში შეიძლება წარმოიშვას შეკითხვა, არის თუ არა ჩვენს მიერ შემოტანილი ცნება საკმარისად “ფართო” და შეიძლება თუ არა მის ფარგლებში ვილაპარაკოთ ჩვეულებრივ მათემატიკურ ცნებებზე, როგორც ფუნქცია, მიმართება და ა. შ. ამ შეკითხვაზე საპასუხოდ შეგვიძლია მაგალითის სახით შემოვიღოთ კარტეზიანული პროდუქტის განმარტება ისეთი სახით, რომ ის სუპერსტრუქტურის ელემენტი აღმოჩნდეს. ავიღოთ ჯერ ორფაქტორიანი კარტეზიანული პროდუქტის შემთხვევა. გავიხსენოთ, რომ დალაგებული წყვილი $\langle x, y \rangle$ შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$\langle x, y \rangle = \{x, \{x, y\}\}.$$

აქედან, განმარტებებიდან თუ გვაქვს $x, y \in V_n(X)$, მაშინ $\langle x, y \rangle \in V_{n+2}(X)$. წყვილის ასეთი განმარტება კორექტულია, რადგან

$$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x = u \ \& \ y = v,$$

მაშინ $A, B \in V_n(X)$ ქვესიმრავლეებისთვის შეგვიძლია შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle |\ x \in A,\ y \in B\}$$

სახით და აქედან გვაქვს

$$A \times B \subseteq V_{n+2}(X), \quad A \times B \subseteq V_{n+3}(X),$$

ანუ ეს ნიშნავს, რომ A, B სიმრავლეების კარტეზიანული პროდუქტი $n+3$ რანგის სიმრავლეა.

თუ ახლა გვინდა ორზე მეტი სიმრავლის პროდუქტის განსაზღვრა ჯერ შემოვიღოთ $x_1, \ldots, x_m$ დალაგებული m-ეულის ცნება; კერძოდ,

$$\langle x_1,\dots,x_m\rangle = \{\langle 1,x_1\rangle,\dots,\langle m,x_m\rangle\},$$

სადაც $x_1,\dots,x_m \in V(X)$, მაშინ ისევ გვაქვს

$$\langle x_1,\dots,x_m\rangle = \langle y_1,\dots,y_m\rangle \Leftrightarrow x_1 = y_1,\dots,x_m = y_m .$$

აქედან m-ცალი სიმრავლის კარტეზიანულ პროდუქტს განვსაზღვრავთ

$$A_1\times\cdots\times A_m = \{\langle x_1,\dots,x_m\rangle \mid x_1\in A_1,\dots,x_m\in A_m\}\in V(X)$$

სახით.

ვხედავთ, რომ კარტეზიანული პროდუქტის განსაზღვრა სუპერსტრუქტურაზე სირთულეს წარმოადგენს. ამასთან, თუ გვაქვს სიმრავლეებისთვის განსაზღვრული კარტეზიანული პროდუქტი, ასევე გვაქვს მიმართებები და ფუნქციები, რომლებიც როგორც ვიცით შეგვიძლია კარტეზიანული პროდუქტის ქვესიმრავლეებად ჩავთვალოთ. ბინარული მიმართების შემთხვევაში გვაქვს $P\subseteq A_1\times A_2$, მაშინ

$$\mathrm{Dom}(P)=\{a_1\in A_1\mid \langle a_1,a_2\rangle\in P\} \text{ რაიმე } a_2\in A_2\text{-თვის},$$

$$\mathrm{Range}(P)=\{a_2\in A_2\mid \langle a_1,a_2\rangle\in P\} \text{ რაიმე } a_1\in A_1\text{-თვის}$$

და B_1, B_2 $(B_1\subseteq A_1,\ B_2\subseteq A_2)$ სიმრავლეებისთვის განვსაზღვრავთ

$$P[B_1]=\{b_2\in A_2\mid \langle b_1,b_2\rangle\in P \text{ რაიმე } b_1\in A_1\},$$
$$P^{-1}[B_2]=\{b_1\in A_1\mid \langle b_1,b_2\rangle\in P \text{ რაიმე } b_2\in A_2\}.$$

ვხედავთ, რომ, თუ $A_1,A_2\in V_n(X)$ არის n-რანგის სიმრავლეებია, მაშინ $P\subseteq A_1\times A_2$ შემთხვევაში $\mathrm{Dom}(P)\in V_{n+1}(X)$ რანგისაა. იგივე შეიძლება ითქვას Rang, $P[B_1]$, $P[B_2]$ სიმრავლეებზეც.

ფუნქციები, როგორც ვიცით, მიმართების კერძოს შემთხვევას წარმოადგენენ და, ამრიგად, მათი შემოტანა სუპერსტრუქტურაში მიმართების შემოტანისგან არ გან-სხვავდება. მაგალითისთვის შეგვიძლია შემოვიტანოთ X სიმრავლის ელემენტების $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა. განვსაზღვროთ ის როგორც $N\times X$ პროდუქტის ქვესიმრავლე. აქ ვთვლით, რომ საწყისი X სიმრავლე შეიცავს N-ს, როგორც თავის ქვესიმრავლეს კარტეზიანული პროდუქტის შემოტანილი განმარტებიდან ვიღებთ, რომ $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა არის $V(X)$ სუპერსტრუქტურის ელემნტი 3 რანგით.

ნორმირება ეწოდება $\varphi : K \to \mathrm{R}^{+}$ ფუნქციას K ველიდან R^{+} არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ისეთს, რომ

1. $\varphi(0)=0$, $\varphi(a)>0$, როცა $a \neq 0$;
2. $\varphi(ab)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$;
3. $\varphi(a+b) \geq \varphi(a)+\varphi(b)$.

ასეთი ველის მაგალითად შეგვიძლია ავიღოთ Q რაციონალურ რიცხვთა ველი, სადაც φ ნორმა შემოტანილია, როგორც ჩვეულებრივი მოდულის ფუნქცია, ანუ

$$\varphi(a)=|a|.$$

ნორმირების მაგალითია აგრეთვე "ტრივიალური" ნორმირება $\varphi(a)=1$, როცა $a \neq 0$ $\varphi(0)=0$.

კარგად ნაცნობი ნორმირებების გარდა, არსებობს სხვა ტიპის ნორმებიც. მაგალითად, ავიღოთ ისევ Q რაციონალურ რიცხვთა ველი და p მარტივი რიცხვი, მაშინ ყოველი $a \neq 0$-თვის გვაქვს $a=\frac{s}{t}p^{n}$, სადაც s, t არის p-თან ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვები, მაშინ

$$\varphi_p(a)=p^{-n} \quad \text{და} \quad \varphi_p(a)=0$$

განსაზღვრავს φ_p ნორმას Q-ზე. მესამე თვისების ნაცვლად უფრო ძლიერ თვისებას აქვს ადგილი, კერძოდ,

3′. $\varphi_p(a+b) \leq \max\left(\varphi_p(a),\varphi_p(b)\right)$.

ასეთ ნორმირებას p**-ადიური ნორმირება** ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.

p-ადიური ნორმირების განმარტება შეგვიძლია განვაზოგადოთ. ავიღოთ D მთელობის დომეინი (რგოლი ნულის გამოყოფების გარეშე) და K მის წილადთა ველი, D-ს ნებისმიერი p მარტივი იდეალი, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. p-ს ხარისხები $p, p^{2},\ldots$ განსხვავებულია და არ არსებობს D-ს ელემენტი, რომელიც ერთდროულად p-ს ყველა ხარისხს ეკუთვნის (ანუ $\bigcap\limits_{n\geq 1} p^{n}=\varnothing$).
2. თუ a იყოფა p^{α}-ზე, მაგრამ არა $p^{\alpha+1}$-ზე და b იყოფა p^{β}-ზე, მაგრამ არა $p^{\beta+1}$-ზე, მაშინ ab იყოფა $p^{\alpha+\beta}$-ზე, მაგრამ არა $p^{\alpha+\beta+1}$-ზე.

ასეთი თვისებების შემთხვევაში D-ზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\varphi : D \to \mathrm{R}^+$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\varphi(a) = e^{-\alpha} \quad (a \neq 0) \quad \text{და} \quad \varphi(\overline{0}) = 0 .$$

აქ α არის p იდეალის ხარისხი, რომელიც a-ს ჰყოფს (რა თქმა უნდა, ეს ხარისხი შეიძლება 0-იც იყოს), e ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, $\overline{0}$ არის D დომეინის ნული. ასე განსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება განვავრცოთ D-ს წილადთა ველზე შემდეგი ფორმულით

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}. \tag{49}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი განსაზღვრება კორექტულია და მიღებული φ ფუნქცია K ველის ნორმირებას წარმოადგენს. ეს განსაზღვრება წარმოადგენს p-ადიური ნორმირების ბუნებრივ განზოგადებას.

p-ადიური ნორმირება წარმოადგენს ე. წ. არა არქიმედული ნორმირების მაგალითს.

ვიტყვით, რომ φ ნორმირება K ველზე **არა არქიმედულია**, თუ K ველის $\overline{1}$ -ერთიანი ნებისმიერს სასრულ ჯამებზე განსაზღვრული φ ნორმის მნიშვნელობათა არე შემოსაზღვრულია ზემოდან, ანუ არსებობს $c \in \mathrm{R}^+$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $n \in N$-თვის $\varphi(n \cdot \overline{1}) < c$. სხვა შემთხვევაში (თუ ასეთი c არ არსებობს) ვიტყვით, რომ ნორმირება **არქიმედულია**. არქიმედული ნორმირების მაგალითია ჩვეულებრივი $|a|$ მოდული Q-ზე, $a \in \mathrm{Q}$, ხოლო არა არქიმედულის p-ადიური ნორმირება ადვილი დასამტკიცებელია. ნებისმიერი არარქიმედული φ ნორმირებისთვის გვაქვს

$3''$. $\varphi(a+b) \leq \max(\varphi(b), \varphi(b))$.

ნორმირებებისთვის ხშირად შემოაქვთ ნორმის ტრანსფორმაცია ლოგარითმული ფუნქციის მეშვეობით. კერძოდ, თუ გვაქვს φ ნორმირება K ველზე ვწერთ

$$\omega(a) = -\log \varphi(a) \quad \text{ყოველი} \quad a \in K\text{-თვის.}$$

ასე განმარტებულ ω-ს **ლოგარითმული ნორმირება** ეწოდება, φ-ის თვისებებიდან გამომდინარე ის აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1. თუ $a \neq 0$, $\omega(a) \in \mathsf{R}^{+}$;

2. $\omega(0) = \infty$, სადაც ∞ არის R-თვის დამატებული ელემენტი თვისებებით:

$$\forall\, a \in \mathsf{R} \qquad \begin{cases} \infty \pm a = \infty \\ a \pm \infty = \infty \end{cases},$$

თუ $a \neq 0$, მაშინ $\begin{cases} \infty \cdot a = \infty \\ a \cdot \infty = \infty \end{cases}$;

3. $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$;

4. $\omega(a+b) \geq \min\big(\omega(a), \omega(b)\big)$.

ორ φ და ψ ნორმირებას ვუწოდებთ ექვივალენტურს, თუ K ველზე მათ მიერ წარმოქმნილი ტოპოლოგიები ერთმანეთს ემთხვევა, ანუ ყოველი a_n მიმდევრობისთვის K-დან გვაქვს $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(a_n) = 0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(a_n) = 0$. K ველზე მოცემული ნებისმიერ ექვივალენტური ნორმების წყვილისთვის არსებობს $\varepsilon \in R^{+}$ ისეთი, რომ $\psi(a) = \left(\psi(a)\right)^{\varepsilon}$ ყოველი $a \in K$-თვის. ცხადია, თუ ორი ნორმა ასეთ კავშირშია ერთმანეთთან, მაშინ ისინი ექვივალენტურებიც არიან.

ოსტროვსკიმ დაამტკიცა შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ოსტროვსკი [1934]). Q რაციონალურ რიცხვთ ველის ნებისმიერი არატრივიალური ნორმირება იქნება ან $\varphi(a) = |a|^{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, ჩვეულებრივი მოდულით ნორმირების ექვივალენტური, ან $\varphi(a) = \varphi_p(a)^{\sigma}$ p-ადიური ნორმირების ექვივალენტური (აქ p მარტივი რიცხვია, ხოლო σ – დადებითი ნამდვილი რიცხვი).

ოსტროვსკიმ შემდეგ დაამტკიცა, რომ Σ ალგებრულ რიცხვთა ველის ნებისმიერი არქიმედული ნორმირება შეიძლება მივიღოთ Σ-ს ჩადგმით, R ნამდვილ ან C კომპლექსურ რიცხვთა ველებში, და φ ნორმირების მოცემით, როგორც $\varphi(a) = |a|^{e}$, $0 < e \leq 1$, ანუ ჩადგმის შედეგად მიღებული რიცხვის მოდულის e ხარისხში აყვანის ოპერაციის შესრულებით. აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ნორმირებას ეწოდება **დისკრეტული**, თუ მისი მნიშვნელობათა დომეინის მულტიპლიკაციური ჯგუფი

ციკლურია. დისკრეტული ნორმირების მაგალითია, კერძოდ, p-ადიური ნორმირება Q-ზე და ასევე p-ადიური ნორმირების განზოგადებული შემთხვევა.

თეორემა. თუ α ალგებრული რიცხვია $^{*}K$ არასტანდარტული ველიდან და თანაც $|\alpha|$ სასრულია $^{*}K$ ყველა შესაძლო არქიმედულ ნორმირებისთვის, მაშინ α სტანდარტულია, $\alpha \in K$.

დამტკიცება. არქიმედული ნორმირება, როგორც ვიცით, მიიღება $^{*}K$-ს ჩადგმით $^{*}\mathrm{C}$-ველში და შემდეგ $^{*}\mathrm{C}$-ზე მოდულის ფუნქციის გამოყენებით. ავიღოთ α-ს $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\ldots,\alpha^{(n)}$ შეუღლებულები $^{*}\mathrm{C}$-ველში ჩადგმისას, $|\alpha|$ სასრულობიდან გამომდინარე ყველა $\left|\alpha^{(1)}\right|,\left|\alpha^{(2)}\right|,\ldots,\left|\alpha^{(n)}\right|$ სასრულია. ავიღოთ ამ რიცხვების b სუპრემუმი და $s_1,\ldots,s_n$ ფუნდამენტური სიმეტრიული ფუნქციები. ეს ფუნქციებისასრულია $\left|\alpha^{(1)}\right|,\left|\alpha^{(2)}\right|,\ldots,\left|\alpha^{(n)}\right|$-ზე და

$$\left|s_k\right| \le \binom{n}{k} b .$$

აქედან, s_k სასრული რაციონალური რიცხვებია $^{*}\mathrm{Q}$-ში, რაც ნიშნავს, რომ ისინი სტანდარტულია.

განვიხლოთ პოლინომი

$$f\left(x\right) = x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + \left(-1\right)^n s_n .$$

ეს სტანდარტული პოლინომია, რომლის ფესვები ასევე სტანდრტულია. α ერთ-ერთი ამ ფესვთაგანია და, აქედან გამომდინარე, α-ც სტანდარტულია.

1.1. ალგებრულ ფუნქციათა ველების ნორმირებები და არასტანდარტული ანალიზი

ახლა ავიღოთ $^{*}\mathrm{Q}$ არასტანდარტული რაციონალური მოდელი. ცხადია, რომ ნებისმიერი α არასტანდარტული რაციონალური რიცხვი ტრანსცენდენტულია Q რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ. ამიტომ Q-ს გაფართოება α-ელემენტით არის ერთდროულად $^{*}\mathrm{Q}$-ის ქვეველი და თანაც იზომორფულია Q კოეფიციენტებიანი ალგებრულ ფუნქციათა ველის. როგორც ვნახეთ Q-ს ნორმირება

შესაძლებელია ან მარტივი რიცხვის (მარტივი იდეალის) მეშვეობით ან ჩვეულებრივი არქიმედული ნორმირებით. არასტანდარტული ანალიზი ამ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს $\mathbb{Q}$-ს ნორმირებისას გამოვიყენოთ არასტანდარტული მარტივი რიცხვი (იდეალი), რაც $\mathbb{Q}$-ს p-ადიურ ნორმირებებს ორ კლასად ჰყოფს. კერძოდ, არასტან-დარტული ან სტანდარტული მარტივის გამოყენების მიხედვით, შეგვიძლია ვილაპა-რაკოთ პირველი ან მეორე ტიპის ნორმირებებზე, არქიმედულ ნორმირებას ამ შემთხვევაში მესამე ტიპის ნორმირებას ვუწოდებთ.

A-თი აღვნიშნოთ ალგებრულ ფუნქციათა ველი კოეფიციენტებით $\mathbb{Q}$-დან. ვნახავთ, რომ $^*\mathbb{Q}$ ველის არასტანდარტული ნორმირება წარმოქმნის A ველის (რომელიც, როგორც ვნახეთ, $^*\mathbb{Q}$-ს ქვეველს წარმოადგენს) სტანდარტულ ნორმირებას, მეტიც A-ს ყველა სტანდარტული ნორმირება შეიძლება ასე წარმოვქმნათ.

ზოგადად, ეს დებულება ჭეშმარიტია არა მარტო $\mathbb{Q}$-სა და $^*\mathbb{Q}$-ის შემთხვევაში, არამედ ნებისმიერი $\mathbb{Q}\subset K$ რაციონალური ალგებრული გაფართოებისთვის და შესა-ბამისი $^*K$ არასტანდარტული მოდელისთვის (რომელიც აიგება როგორც ადრე თავისუფალი ულტრაფილტრის მეშვეობით).

აქაც, ნორმირება მოიცემა ან არასტანდარტული მარტივი იდეალით ან სტანდარ-ტული მარტივი იდეალით ან “ჩვეულებრივი” არქიმედული ნორმირების გამოყენებით (პირველი, მეორე, მესამე ტიპის ნორმირებები). ახლა ვნახოთ როგორ შეიძლება ამ დებულების დამტკიცება. ავიღოთ $^*K$-ველი და მასზე პირველი ტიპის ნორმირება, ამ შემთხვევაში p იყოს არასტანდარტული მარტივი $^*K$-დან . $\nu_p x$-ით აღვნიშნოთ $x\in {}^*K$ ელემენტის რიგი p-ს მიმართ. $\nu_p x\in {}^*X$. A ალგებრულ ფუნქციათა ველისთვის (კოეფიციენტებით K-დან) ავიღოთ ის შემთხვევა, როცა ν_p არ არის ტრივიალურად ნული მთელს $A\setminus\{0\}$-ზე (როგორც ვიცით, $A\subset {}^*K$ და ამიტომ ν_p განსაზღვრულია A-ზე). ავიღოთ ისეთი $\alpha\in A$, რომ $\nu_p\alpha>0$ და β იყოს A-ს ნებისმიერი სხვა ელემენტი, $\beta\neq\alpha$, $\beta\neq 0$. ვაჩვენოთ, რომ $\dfrac{\nu_p\beta}{\nu_p\alpha}$ სტანდარტულია. მართლაც, $\alpha,\beta\in A$ და ამიტომ β ვერ იქნება ტრანსცენდენტული

$K(\alpha)$-ს მიმართ (აქ $\alpha \notin K$, რადგან p არასტანდატულია და $\nu_p x = 0$ ყოველი $x \in K \setminus \{0\}$ -თვის). აქედან გამომდინარე, არსებობს $f(x,y) \in K[x,y]$ პოლინომი

$$f(x,y) = \sum c_{ij} x^i y^j$$

არანულოვანი კოეფიციენტებით K -დან ისეთი, რომ $f(\alpha,\beta) = 0$. მაშინ არსებობს ამ პოლინომის ორი მონომიალი $c_{ij} x^i y^j$ და $c_{kl} x^k y^l$ ისეთი, რომ

$$\nu_p\left(c_{ij}\alpha^i\beta^j\right) = \nu_p\left(c_{kl}\alpha^k\beta^l\right).$$

აქ ორივე c_{ij} და c_{kl} K ველს ეკუთვნიან და ამიტომ $\nu_p c_{ij} = \nu_p c_{kl} = 0$ და აქედან

$$(i-k)\nu_p\alpha = (l-j)\nu_p\beta .$$

ამ შემთხვევაში $l - j \neq 0$ (რადგან, თუ $l - j = 0$, მაშინ $i - k \neq 0$ და $\nu_p\alpha = 0$, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება). ეს ნიშნავს, რომ

$$\nu_p\beta = \frac{i-k}{l-j}\nu_p\alpha ,$$

ანუ $\nu_p\beta$ მიიღება $\nu_p\alpha$ -ს სტანდარტულ რაციონალურ რიცხვზე გამრავლებით. ახლა ავიღოთ

$$\omega_p x = \frac{\nu_p x}{\nu_p\alpha} .$$

მივიღეთ $\omega_p : A \to \mathrm{Q}$ ფუნქცია რაციონალურ რიცხვთა ველში, რომელიც გვაძლევს A -ს დისკრეტულ ნორმირებას, მნიშვნელობებით Q-ში. ეს ნორმირება ინდუცირებულია ν_p ნორმირების მიერ და, ამრიგად, პირველი ტიპის არასტანდარტული ნორმირებისთვის მივიღეთ სტანდარტული ნორმირება A-ზე.

ახლა განვიხილოთ მეორე ტიპის ნორმირება. ამჯერად p ავიღოთ სტანდარტული მარტივი იდეალი K -დან და გავაფართოვოთ ის ${}^*K$ -ზე. ასევე ჩავთვალოთ, რომ სი-ტუაცია არატრივიალურია და, რადგან p სტანდარტულია, ამჯერად გვაქვს $\alpha \in A \setminus \{0\}$ ისეთი, რომ $\nu_p\alpha$ უსასრულოა (სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ დადებითად უსასრულო). ავიღოთ β ელემენტი A-დან. როგორც ადრე არსებობს $f(x,y)$ პოლინომი ისეთი, რომ $f(\alpha,\beta) = 0$. აქედან ისევ გვაქვს $\nu_p\left(c_{ij}\alpha^i\beta^j\right) = \nu_p\left(c_{kl}\alpha^k\beta^l\right)$, მაშინ ვიღებთ

$$\left(i-k\right)\nu_p\alpha=\left(l-j\right)\nu_p\beta+\left(\nu_p c_{kl}-\nu_p c_{ij}\right).$$

$l-j$ ისევ არანულოვანია (რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში $\nu_p\alpha$ სასრულია) და შეგვიძლია ტოლობა გადავწეროთ

$$\frac{\nu_p\beta}{\nu_p\alpha}=\frac{i-k}{l-j}+\frac{\nu_p c_{ij}-\nu_p c_{kl}}{\left(l-j\right)\nu_p\alpha} \tag{50}$$

სახით. მ,არჯვენა მხარეს ჯამის მეორე კომპონენტა ამ ტოლობაში უსასრულოდ მცირეა (რადგან მრიცხველი სასრულია, ხოლო მნიშვნელი უსასრულო). ეს ნიშნავს, რომ $\frac{i-k}{l-j}$ წარმოადგენს $\frac{\nu_p\beta}{\nu_p\alpha}$-ს სტანდარტულ ნაწილს. ავიღოთ

$$\omega_p\beta={}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\beta}{\nu_p\alpha}\right)=\frac{i-k}{l-j}$$

და $\omega_p x$ გვაძლევს A-ზე ინდუცირებულ ნორმას მნიშვნელობებით სტანდარტულ რაციონალ რიცხვებში. არ არის რთული იმის შემოწმება, რომ ω_p აკმაყოფილებს ნორმის თვისებებს ν_p-ს ნორმის თვისებებიდან გამომდინარე. ავიღოთ, მაგალითად, გვაქვს

$$\omega_p\left(\beta\gamma\right)={}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\beta\gamma\right)}{\nu_p\left(\alpha\right)}\right)={}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\beta\right)+\nu_p\left(\gamma\right)}{\nu_p\left(\alpha\right)}\right)={}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\beta\right)}{\nu_p\left(\alpha\right)}\right)+{}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\gamma\right)}{\nu_p\left(\alpha\right)}\right)=\omega_p\beta+\omega_p\gamma\,.$$

თუ გვაქვს $\omega_p\left(\beta+\gamma\right)$, მაშინ ასეთივე მსჯელობით

$$\omega_p\left(\beta+\gamma\right)={}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\beta+\gamma\right)}{\nu_p\alpha}\right)$$

და თუ გვაქვს, მაგალითად, $\nu_p\beta\le\nu_p\alpha$, რაც ნიშნავს, რომ $\omega_p\beta\le\omega_p\gamma$, გვექნება

$${}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\beta+\gamma\right)}{\nu_p\alpha}\right)\ge{}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\beta}{\nu_p\alpha}\right)=\omega_p\beta$$

და აქედან

$$\omega_p\left(\beta+\gamma\right)=\omega_p\left(\beta\right).$$

და ბოლოს, არქიმედული ნორმირებებისთვის ასეთი ნორმირებები მოიცემა მოდულის ფუნქციის მეშვეობით, თუ ${}^*K$-ს ჩავდგამთ ${}^*\mathrm{C}$ არასტანდარტული კომპლექსური რიცხვების ველში (რა თქმა უნდა, ასეთი ნორმა “არქიმედულია”

არასტანდარტული აზრით, ანუ იყენებს ${}^{*}N$ არასტანდარტული ნატურალების არსებობის ფაქტს).

ვთქვათ, $|x|$ არ არის სასრული ყველგან A-ზე (სხვა შემთხვევაში სტანდარტულ ნორმასთან გვაქვს საქმე) და აქედან, თუ გავითვალისწინებთ ნორმის თვისებებს შებრუნებული ფუნქციებისთვის, უსასრულოდ მცირეა A-ს რაიმე ელემენტისთვის. ავიღოთ $\alpha \in A$ ისეთი, რომ $|\alpha|$ უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $\alpha \notin K$. ავიღოთ ისევ $\beta \in A$ და $f(x,y)$ პოლინომი ისეთი, რომ $f(\alpha,\beta)=0$. ავიღოთ $c_{ij}x^i y^j$ ისეთი, რომ $\left|c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|$-მ მიიღოს უდიდესი მნიშვნელობა მონომიალებს შორის, მაშინ ნებისმიერი სხვა $c_{kl}\alpha^k\beta^l$-თვის

$$\left|\frac{c_{kl}\alpha^k\beta^l}{c_{ij}\alpha^i\beta^j}\right| \le 1,$$

და თანაც ეს თანაფარდობა არ შეიძლება იყოს უსასრულოდ მცირე ყველა ასეთი თერმისთვის, რადგან ამ შემთხვევაში $\dfrac{\left|f(\alpha,\beta)-c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}{\left|c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}$ იქნებოდა უსასრულოდ მცირე, მაგრამ $f(\alpha,\beta)=0$ და

$$\frac{\left|f(\alpha,\beta)-c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}{\left|c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}=1,$$

ანუ არსებობს $c_{kl}\alpha^k\beta^l$ მონომიალი, რომლისთვისაც $\left|\dfrac{c_{kl}\alpha^k\beta^l}{c_{ij}\alpha^i\beta^j}\right|$ არ არის უსასრულოდ მცირე და, ამრიგად, მისი ლოგარითმი სასრულია

$$\ln|c_{kl}|-\ln|c_{ij}|+(k-i)\ln|\alpha|+(l-j)\ln|\beta|=-\mu \quad (\mu \ge 0).$$

ამ ჯამში პირველი ორი ლოგარითმი სასრულია და შეგვიძლია დავწეროთ

$$(k-i)\ln|\alpha|+(l-j)\ln|\beta|=\nu,$$

სადაც ν სასრულია და $\ln|\alpha|$ უსასრულოა, მაშინ

$$\frac{\ln|\beta|}{\ln|\alpha|}=\frac{i-k}{l-j}+\frac{\nu}{(l-j)\ln|\alpha|}.$$

აქ მარჯვენა მხარის მეორე წევრი უსასრულოდ მცირეა. თუ ახლა ავიღებთ $\frac{\ln|\beta|}{\ln|\alpha|}$ სტანდარტულ ნაწილს, გვექნება

$$^{\circ}\left(\frac{\ln|\alpha|}{\ln|\beta|}\right)=\frac{i-k}{l-j}. \tag{51}$$

ისევე, როგორც ადრე გავუტოლოთ ეს სტანდარტული რაციონალური რიცხვი $\omega\beta$ -ს, მივიღებთ $\omega\beta$ -ნორმას ნებსმიერი β -თვის A-დან.

დასკვნები

დასკვნები:

ერთი შეხედვით არასტანდარტული ანალიზის კავშირი მათემატიკურ ლოგიკასთან და აქედან გამომდინარე მისი ზედმეტად “ფორმალისტური” მეთოდები პრობლემას ქმნიან მისი გამოყენებისათვის “ჩვეულებრივ” მათემატიკაში. მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს რომ მიუხედავათ მისი გენეზისი თავისებურებების არასტანდარტულ ანალიზში, განსაკუთრებით მის საწყის ვერსიაში, საქმე გვაქვს ნამდვილ რიცხვთა ველის მოდელთან რომელიც სუფთა ალგებრული თვალსაზრისით ჩვეულებრივ ნულ-მახასიათებლიან ველს წარმოადგენს. აქედან გამომდინარე მისი გამოყენება “ჩვეულებრივ” მათემატიკაში, და კერძოთ ველთა თეორიის ზოგიერთ საკითხთან მიმართებაში სავსებით შესაძლებელია. ვნახეთ, რომ არასტანდარტული ნამდვილი რიცხვის, სტანდარტული ნამდვილების ველის მიმართ ტრანსცედენტულობის გამოყენებით, შესაძლებელია ნამდვილთა ზოგიერთი არასტანდარტული გაფართოების გაიგივება ალგებრულ ფუნქციათა ველთან და, აქედან გამომდინარე, სტანდარტული ნორმების ინდუცირება არასტანდარტული “შინაგანი” ნორმების მეშვეობით.

ასეთ ალგებრული ურთიერთქმედება სტანდარტულ და არასტანდარტულ მოდელებს შორის მცირე ნაწილია იმ შესაძლებლობების, რომლებსაც არასტანდარტულია ანალიზი“გადატანის” პრინციპის გამოყენების გარეშეც კი იძლევა. ამრიგად, სავსებით შესაძლებელია არასტანდარტული ანალიზის გამოყენების სფეროს შემდგომი გაფართოება “ჩვეულებრივ”მათემატიკაში, რაც მათემატიკის და

მათემატიკური ლოგიკის ურთიერთქმედების სფეროს მნიშვნელოვანი გაფართოების შესაძლებლობაზე მიგვითითებს.

დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია შემდეგი სტატიები:

1.ა.კლიმიაშვილი. ონოს სამეულის სტრუქტურის აგება ნებისმიერ ლოგოსში.Hydroengineering. No.1-2(19-20) Tbilisi 2015

2. A.Klimiashvili. Algebraic Function Fields and Non-Standard Analysis. Bulletin of Georgian Academy of Sciences, vol. 9, no.2 2015

3. A.Klimiashvili.Construction of Monadic Heyting Algebra in any Logos. Bulletin of Georgian Academy of Sciences, vol. 8, no.3 2014