საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ალექსანდრე კლიმიაშვილი

ალგებრული სტრუქტურები კომპუტერულ მათემატიკაში და მათემატიკურ ლოგიკაში

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“, შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

ივლისი, 2015 წელი

თბილისი

2015 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. ალექსანდრე კლიმიაშვილი

რეცენზენტები: ---------------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის "------" ----------------, --------- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის -----------------------

----------------------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის

სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ნათია კირკიტაძის მიერ შესრულებულ სადოქტორო ნაშრომს დასახელებით: „დაწესებულებაში სუბიექტის საქმიანობის მონიტორინგის სისტემის დამუშავება და კვლევა (სასწავლო დაწესებულების მაგალითზე)“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფ. ალექსანდრე ლაშხი

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2015

ავტორი: ალექსანდრე კლიმიაშვილი

დასახელება: ალგებრული სტრუქტურები კომპუტერულ მათემატიკაში და მათემატიკურ ლოგიკაში

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: თარიღი

რეზიუმე

არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი ცნებების ჩამოყალიბება ა.რობინსონის მიერ მნიშვნელოვანი წინ გადადგმული ნაბიჯი იყო მათემატიკური ლოგიკის და მატთემატიკის საფუძვლების თეორიული გავითარებისთვი.ამის გარდა არასტანდარტული ანალიზში შემოტანილ გადატანის მეთოდს აღმოაჩნდა მრავალი გამოყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში ალგებრული ველების თეორიიდან მათემატიკურ ფიზიკამდე. წინმდებარე ნაშრომში ჩამოყალიბებულია არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი ცნებები და განხილულია არასტანდარტული მეთოდების გამოყენება ველთა თეორიაში და ალგებრულ ფუნქციურ ველებთან დაკავშირებულ ზოგიერთი საკითხის განხილვაში. განხილვა იწყება ნამდვილ რიცხვთა არასტანდარტული მოდელის აგებით. მოდელი იგება ჯერ ნატურალური ინდექსების შემთხვევისთვის მისი აგებისას გამოიყენება როგორც მაქსიმალური იდეალები ასევე ულტრა ფილტრები და ბინარული ზომები, ხდება მაქსიმალური იდეალების ულტრაფილტრების და ბინარული ზომების ექვივალენტობის დამტკიცება არასტანდარტული მოდელების აგების დროს.შემდეგ ხდება ამ მოდელის განზოგადოება ნებისმერი ინდექსების შემთხვევისთვის და არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი ცნებების ჩამოყალიბება, მათ შორის: სუპერსტრუქტურების, სუპერსტრუქტურათა მონომორფიზმის და ლოსის თეორემის საწყისი ვარიანტის.განიხილება არასტანდარტული ანალიზის და მათემატიკური ლოგიკისათვის დამახასიათებელი ფორმალიზმის ურთიერთქმედება. გადატანის თეორემა განიხილება თავდაპირველად მარტივი სტრუქტურებისთვის. შემდეგ ხდება ზოგად სტრუქტურებზე და ფორმალურ ენებზე გადასვლა.განიხილება ულტრახარისხები და შემოსაზღვრული ულტრახარისხები. სუპერსტნუქტურებს შორის იგება მონომორფიზმი და მტკიცდება ამ მონომორფიზმის ზოგიერთი თვისებები. არასტანდატული მოდელების არსებობა ალგებრული ველებისათვის გამოყენებულია ალგებრულ ფუნქციათა ველებთან დაკავშირებული ზოგიერთი პრობლემის განხილვისათვის. ამასთან დაკავშირებით განიხილება ველებზე არქიმედული და არაარქიმედული ნორმები რაციონალური რიცხვებისათვის. არტსტანდარტული რიცხვის ტრანსცედენტულობიდან გამომდინარე ხდება რაციონალურ რიცხვთა ველის არასტანდარტული გაფართოების გამოყენება ალგებრულ ფუნქციათა ველის შესასწავლად.ნაშრომი სრულდება ველთა ნორნირებებისა განხილვით არასტანდარტული შინაგანი ფუნქციების გამოყენებით ნორმირებების ინდუცირებისათვის. ნორმირებების ინდუცირება ხდება სამ სხვადასხვა შემთხვევაში: სტანდარტული მარტივი რიცხვით მიღებული ნორმირებისთვის, არასტანდარტული მარტივი რიცხვით მიღებული ნორმირებისთვის და არქიმედული ნორმირების არასტანდარტული გადატანისთვის. ყოველი ამ შემთხვევისთვის ხდება სტანდარტული ნორმის

ინდუცირება მოდელიდან არასტანდარტული ელემენტის შერჩევის მეშვეობით.

Abstract:

The formulation of main principles of nonstandard analiysis by a.robinson

was an important development both, for mathematics and mathematical logic. The

tools and methods of nonstandard analysis were found to be usful for many branches of mathematics from algebraic field theoru to stochastic analyzis and mathematical physics.

The present work formulates main principles of nonstandard analysis and looks at its applications in algebraic field theory in particular relating to some questions of algebraic function fields and field valuations. It starts by presenting a nonstandard model for Real numbers and proceeds by generalizing this construct, nonstandard reals are constructed uusin maximal ideals, maximal filters and binary measures.

The equivalence of three different methods is shown. We next proceed by

By generalizing this condtruct for any possible index set. The main features

Of nonstandard analysis are then introduced, starting with theorems of transfer. A simplified transfer is first proved followed by its more general form leading to los theorem. The notion of superstructure is then introduced and the usfulnes of bounded ultrapowers demondtrated. We proceed by applying the methods of nonstandard analyisis to Field theory. The notion of field valuation is introduced including p-adic and archimedian valuations. The valuations using standard prime numbers are referd to as valuations of first kind , those using nonstandard primes as valuations of second kind and archimedian valuations as valuations of third kind. For each of these valuations the possibility of inducing a standard valuation using nonstandard one is demonstrated. The work finishes by establishing induced character of standard valuations.

შინაარსი

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

არასტანდარტული ანალიზის საწყისი განვითარების პერიოდი განეკუთვნება გასული საუკუნის 60-70 წლებს. ის უკავშირდება ა. რობინსონის და კრეისლერის ნაშრომებს [1], რომლებიც თავდაპირველად მათემატიკურ ლოგიკას ეყრდნობოდნენ. არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი ინტერესი იმაში მდგომარეობს, რომ, თუ მოცემულია რაიმე "ჩვეულებრივი" მათემატიკური თეორია, მაგალითად, ალგებრა, ანალიზი, ტოპოლოგია ან სხვა, მაშინ არასტანდარტული ანალიზის მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია ასეთი თეორიის სტანდარტული მოდელი "ჩაიდგას" ზევრად უფრო ძლიერ არასტანდარტულ მოდელში. ასეთი ჩადგმა ხშირად ეხმარება "ჩვეულებრივ" მოდელში განვითარებულ მათემატიკურ ინტუიციას და თანაც არასტანდარტულ ანალიზში დამტკიცებული "გადატანის" თეორემების მეშვეობით იძლევა მათემატიკური დამტკიცებებისთვის გამოსადეგ ახალ და ძლიერ მეთოდს. "გადატანის" არსი იმაში მდგომარეობს, რომ დებულება ჭეშმარიტია სტანდარტული მოდელში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი "გადატანილი" ვარიანტი ჭეშმარიტია არასტანდარტულ მოდელში. მაგრამ, რა თქმა უნდა, არასტანდარტული ანალიზი არ შემოიფარგლება მხოლოდ "გადატანით", ნებისმიერი თეორიისთვის ჩამოყალიბებული არასტანდარტული ვერსია იძლევა ბევრ ახალ ინტუიციურ მეთოდს, რომელიც სტანდარტულ თეორიაში არ მოიპოვებოდა. არასტანდარტული ანალიზის პირველი სისტემატური გარჩევა მოცემული იყო ჯერ კიდევ 1966 წელს რობინსონის მიერ გამოქვეყნებულ წიგნში. მას შემდეგ მრავალი ავტორის მიერ იქნა გამოქვეყნებული არასტანდარტული ანალიზის სხვადახვა ვერსიები, კერძოდ, მახოვერი, პირშფილდი, ნილსენი და სხვა. მეტიც, არასტანდარტულმა მეთოდებმა ადგილი დაიმკვიდრეს "ჩვეულებრივ" მათემატიკურ თეორიაშიც. ნილსენის მიერ ჩამოყალიბებული მიდგომა განსხვავდება არასტანდარტული ანალიზის ადრინდელი ვერსიებისგან იმით რომ ის აქსიომატურია. ანუ სინტაქტური მიდგომებისგან განსხვავებით ამ შემთხვევაში ხდება არასტანდარტული ანალიზის სემანტიკური შემოტანა. აქ ჩვეულებრივ სიმრავ-

ლეთა თეორიას ემატება ახალი პრედიკატი „სტანდარტული“ და რამდენიმე აქსიომა. ამ აქსიომების მეშვეობით ხდება არასტანდარტული ანალიზის განვითარება, მაგრამ ასეთი მიდგომის პრობლემა ის არის რომ ის ნაკლებად ინტუიციურია ვიდრე სემანტიკური მიდგომა და ამიტომ ჩვენ აქ უპირატესობას, მრავალი ავტორის მიერ ჩამოყალიბებულ, სემანტიკურ მიდგომას ვაძლევთ.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

1.1. არასტანდარტული მოდელები და არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი სტრუქტურები

თავიდანვე გასაგებია რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ჩადგმას არასტანდარტულ ნამდვილთა სიმრავლეში ბევრი საინტერესო თვისება გააჩნია.

კერძოდ,

1. გაფართოება ინარჩუნებს დალაგებას, ანუ წრფივად დალაგებული სიმრავლე R ჩაიდგმება წრფივად დალაგებულ არასტანდარტულ ნამდვილთა სიმრავლეში.
2. არსებოს კავშირი სტანდარტული და არა სტანდარტული რიცხვების თვისებებს შორის რომელსაც ე. წ. "გადატანის" თეორემები აზუსტებენ. მათ შორის წრფივი დალაგების შენარჩუნებაც გადტანის ერთ-ერთი შედეგია.

აქ უნდა ავღნიშნოთ რომ "გადატანა" არასტანდარტულ ანალიზში განსხვავდება ჩვეულებრივ მათემატიკაში არსეებული გადატანის შემთხვევებისგან. კერძოდ ჩვეულებრივად ორ სტრუქტურას შორის არსებულ მორფიზმს "გადააქვს" გარკვეულისახის თვისებები მაგ. ჰომომორფიზმს-ალგებრულ, ჰომეომორფიზმს-ტოპოლოგიური და ა. შ. ასევე კატეგორიათა თეორიაში ფუნქტორები, ბუნებრივი გარდაქმნები და სხვა.

ამისგან განსხვავებით, არასტანდატულ ანალიზში ხდება ზოგადი თვისებების მთელი კლასის გადატანა, რომელთა ძირითადი მახასიათებელი ის არის რომ ისინი გარკვეული ტიპის მკაცრი მათემატიკური გამონათქვამების სახით ჩაიწერებიან.

სწორედ ამის გამო შეუძლებელია არასტანდარტული ანალიზის აღწერა გარკვეული რაოდენობით მათემატიკური ლოგიკიდან მოსული კონცეფციების გამოყენების გარეშე.

მათემატიკური ლოგიკისათვის დამახასიათებელი ფორმალიზმიც ნაწილობ-რივ ნარჩუნდება არასტანდარტულ ანალიზში, ამასთან ჩვენ არა

მარტო ორ სტრუქტურას შორის მსგავსება არამედ მათ შორის განსხვავებახც გვაინტერესებს, ეს არის არასტანდარტულ ანალიზში განსაზღვრულ ე.წ. “გარეგან” ობიქტთა თვისებების საკითხი. ყოველივე ზემოთქმულიდან გასაგებია რომ, მიუხედავად ნამდვილი რიცხვებიდან არასტანდარტული ნამ-დვილების აგების სუფთა მათემატიკური გზის არსებობისა, შეუძლებელია არასტანდარტული ანალიზის სრულყოფილი ჩამოყალიბება მათემატიკური ლოგიკის გარეშე. ძირითადი რისთვისაც ლოგიკა აუცილებელია არის “გადატანის“ მექანიზმის ფორმალიზაცია. ეს ხდება მოდელთა თეორიაში არსებული შედეგების გამოყენებით, კერძოდ, 1930-იან წლებში სკოლემის მიერ, არასტანდარტულ მოდელებთან დაკავშირებით, მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით. ასეთი ფორმალიზაციის აუცილებლობა უფრო გასაგები გახდება ერთი მაგალითის მოშველიებით. კარგად ცნობილია რომ R ნამდვილი რიცხვთა სიმრავლეს აქვს ე.წ. არქიმედულობის თვისება. არასტანდარტულ შემთხვევაში არასტანდარტულ ნამდვილი რიცხვთა ველი არქიმედული აღარ არის მაგრამ “გადატანის” გამოყენებით შეგვიძლია “არქიმედულობაზე“ ლაპარაკი არასტანდარტულ ნატურალურებთან მიმართებაში.

მსგავს სიტუაციებთან დაკავშირებული მათემატიკური სიზუსტის შესაბამისი დონის შენარჩუნება მოითხოვს არასტანდარტულ ანალიზში“სუპერსტრუქტურის“ ცნების შემოტანას. სუპერსტრუქტურის სიახლე იმაშია რომ, თუ ჩვეულებრივ მათემატიკაში ჩვენ ვიხილავთ სტრუქტურის ელემენტებს, ელემენტებისგან შემდგარ სიმრავლეებს და შესაძლოა სიმრავლეთა სიმრავლეებს, “სუპერსტრუქტურაში“ ხდება ამ პროცესის უსარულო იტერაცია ანუ განიხილებ სიმრავლეთა სიმრავლეების სიმრავლეები და ა.შ.

ეს საშუალებას გვაძლევ არასტანდარტულ ანალიზს მივანიჭოთ მაქსიმალური ზოგადობის დონე და შემოვიღოთ ისეთი ცნებები როგორც“შინაგანი”, “გარეგანი”, “ჰიპერსასრული” და ა.შ. ამასთან არასტანდარტული ანალიზის ერთ-ერთი ყველაზე მოულოდნელი თვისება იმაში მდგომარეობს რომ არასტანდარტულ რიცხვთა მოდელის აგებისას ჩვენ არ ვზრუნავთ ასეთი მოდელის ერთად-ერთობაზე. კერძოდ ასეთი მოდელის აგება დამოკი-

დებულია(როგორც ვნახავთ) “თავისუფალ ულტრაფილტრზე”, რომლის ზუსტი შერჩევა ასეთი ულტრაფილტრების უსასრულო სიმრავლიდან, თეორიის აგებისას არ ხდება. ზოგადად, ყველა ეს მოდელი შეიძლება ჩაითვალოს მათემატიკაში დღემდე დაუზუსტებელი “ერთგანზომილებიანი კონტინუმის” შესაძლო მოდელებად. ასეთი კონტინუმის მაგალითია რა თქმა უნდა ნამდვილ რიცხვთა ღერძიც მაგრამ არასტანდარტული ანალიზის შედეგების გათვალისწინებით გასაგები ხდება რომ ეს კარგად ნაცნობი სტრუქტურა ერთგანზომილებიანი კონტინუმის მხოლოდ ერთ-ერთ შესაძლო მოდელთაგანია. რაც შეეხება ფორმალიზმის საკითხს არასტანდარტულ ანალიზში აქ უნდა ითქვას რომ ზოგადად რა თქმა უნდა თანამედროვე მათემატიკას ახასიათებს სიზუსტის მაღალი დონე რომელიც ფორმალიზაცის მინიმალური გამოყენებით მიიღწევა. ანუ ფორმალიზმის გამოყენება არასტანდარტულ ანალიზში გამომდინარეობს არა უბრალოდ სიზუსტის მოთხოვნებიდან არამედ ასე ვთქვათ “საქმის არსს” შეესაბამება. აქედან გამომდინარე, გასაგებია, რომ „ჩვეულებრივ“ მათემატიკაში არასტანდარტული ანალიზის გამოყენება არ არის პოპულარული, მიუხედავად მრავალი ძლიერი შედეგისა რომელიც არასტანდარტულმა მეთოდებმა მათემატიკის მრავალ სფეროში ბოლო წლების განმავლობაში მოგვცა.

აქ შეგვიძლია მოვიყვანოთ არასტანდარტული ანალიზის განვითარების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა. პირველი მცდელობები აეგოთ ნამდვლ რიცხვთა ველის გაფართოების ეკუთვნით დ.ლაუგვიცს და კ.შმიედენს, მათ მიერ აგებული კონსტრუქციები დაფუძნებული იყო ჯერ კიდევ გ. კანტორის მიერ ჩამოყალიბებულ პრინციპებზე და იძლეოდა ნამდვილ რიცხვთა შემცველ რგოლს, რომელიც თავის მხრივ ნულის გაყოფებს შეიცავდა. ამრიგად, ეს კონსტრუქცია არ იძლეოდა ველს რომელიც ნამდვილ რიცხვთა ველის გაფართოება იქნებოდა. ასეთი კონსტრუქცია პირველად მიღებული იქნა რობინსონის მიერ 1961 წელს, რასაც მოყვა ლუქსემბურგის მიერ მსგავსი კონსტრუქციის აგება. არასტანდარტული ანალიზის პირველი სისტემატური აღწერა მოცემული იყო რობინსონის 1966 წელს გამოქვეყნებულ წიგ-

ნში. ეს წიგნი ასევე შეიცავდა არსტანდარტული ანალიზის გამოყენების მაგალითებს მათემატიკის სხვადასხვა სფეროდან. არასტანდარტული ანალიზის ჩამოყალიბებისთვის აქ გამოყენებული იყო მოდელთა თეორიის და მათემატიკური ლოგიკის ძირითადი ცნებები, ისეთი როგორც პრედიკატთა აღრიცხვის კომპაქტურობის თვისება, ტიპთა თეორია და სხვა. „სუპერსტრუქტურის" ცნება პირველად შემოტანილი იქნა 1969 წელს რობინსონის და ე. ზაკონის მიერ გამოქვეყნებულ სტატიაში. ამ ცნების მესშვეობით მოხერხდა არასტანდარტული ანალიზის დაყვანა სიმრავლეთა თეორიამდე, მათემატიკური ლოგიკის გამოყენების მინიმუმით.

შემდგომი განვითარება არასტანდატული ანალიზის თეორიული მხარის სრულყოფაში, მოხდა 1977 ე.ნელსონის მიერ გამოქვეყნებული სტატიის შემდეგ. აქ მოცემული იყო არასტანდარტული ანალიზის ჩამოყალიბების აქსიომატური მეთოდი, რომელიც ცნობილია როგორც „შინაგან სიმრავლეთა თეორია".

წინამდებარე ნაშრომში ჩამოვაყალიბებთ არასტანდარტული ანალიზის ძირითად ცნებებს და მეთოდებს, და განვიხილავთ ამ მეთოდების გამოყენების შესაძლებლობასაბსტრაქტულ ალგებრაში, კერძოდ, ველების ნორმირებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხის შესწავლისას.

არასტანდარტული მოდელების არსებობასთან დაკავშირებული პირველი შედეგები ეკუთვნის თ.სკოლემს. მის მიერ 1934 გამოქვეყნებულ სტატიაში დამტკიცებული იყო ასეთი მოდელების არსებობა ართმეტიკის შემცველი თეორიებისთვის. სკოლემის შედეგებს დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა, ზოგადად, მათემატიკური ლოგიკისთვის, მაგრამ არასტანდარტული ანალიზის პირველი „მათემატიკური" მოდელები რობინსონის მიერ ჯერ ჩამოყალიბებული არ იყო. როგორც უკვე აღვნიშნეთ,არასტანდარტული ნამდვილ რიცხვთა მოდელის აგების პირველი მცდელობა ეკუთვნის დ.ლაუგვიცს და კ. შმიედენს. ა. რობინსონმა პირველმა ჩამოაყალიბა არასტანდარტული ანალიზის ძირითადი ცნებები და მეთოდები, რომლებსაც მკაცრი მათემატიკური ფორუმულირება მისცა თავის 1966 წელს გამოქვეყნებულ წიგნში: „არა-

სტანდატული ანალიზი". აქ პირველად იქნა ჩამოყალიბებული ახალი თეორიის რამდენიმე ფუნდამენტური ცნება. პარალელურად მსგავს მოდელებზე მუშაობდნენ ლუქსემბურგი, სტროიანი, ალბევერიო და სხვ. არასტანდარტული ანალიზის შემდგომი განვითარების და დეტალიზაციის მცდელობა იყო 1968 წელს მახოვერის და ჰირშფილდის მიერ გამოქვეყნებული "არასტანდარტული ანალიზი". აქ მოცემული იყო არასტანდარტული ანალიზის გამოყენებების მაგალითები "სტანდარტულ" მათემატიკურ თეორიაში. ამის შემდეგ ა.რობინსონის და ე.ზაკონის მიერ, 1969 წელს გამოქვეყნებულ სტატიაში, ჩამოყალიბებული იქნა "სუპერსტრუქტურის" ცნება და შემოღებული იქნა სიმრავლეთა თეორიასთან დამაკავშირებელი ფორმალიზმი.სტანდარტული და არა სტანდარტული ანალიზის ერთიანი კურსის შექმნის მცდელობა მოცემულია ჰ.ჯ. კეისლერის მიერ 1976 წელს გამოქვეყნებულ ორ ტომიან მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოში. ამავე დროს გამოქვეყნდა პ.ლობის ნაშრომები არასტანდარტული ანალიზის გამოყენებაზე ზომის თეორიის ზოგიერთი საკითხითან მიმართებაში. 1977 წელს ე.ნელსონმა თავის სტატიაში ჩამოაყალიბა არასტანდარტული ანალიზის განსხვავებული "აქსიომატური" ვარიანტი. გასული საუკუნის 70-იანი წლების შემდეგ არასტანდარტულმა ანალიზმა აღიარება მოიპოვა როგრც მათემატიკური ლოგიკის და მათემატიკის ურთიერთქმედების მნიშვნელოვანმა მაგალითმა და ამრიგად, მისი მოკლე ან დეტალური მიმოხილვა მრავალ მათემატიკურ ლოგიკასთან დაკავშირებულ წიგნში და სახელმძღვანელოში არის მოცემული. მათ შორის შეგვიძლია ავღნიშნოთ ბულოსი, მახოვერი [2] და მრავალი სხვა.

1.2. არასტანდარტულ ნამდვილ რიცხვთა ველი

ფაქტორიზებული გაფართოების აგება

დავიწყოთ ნამდვილ რიცხვთა არასტანდატული მოდელის აგებით ნატურალური რიცხვების სიმრავლით ინდექსირების შემთხვევაში. ორ

ნაბიჯში შესაძლებელია $^*R$-ის მიღება, როგორც სავსებით დალაგებული ველის, რომლისთვისაც R წარმოადგენს ქვეველს. პირველი ნაბიჯით R ჩაიდგმება გაფართოებული ალგებრა R^N-ში, ხოლო მეორე ნაბიჯი იქნება R^N-ის ფაქტორიზაცია. ვიწყებთ R-დან R^N-ში ალგებრული ჰომომორფიზ-მის აგებით. გვაქვს შემდეგი სახის ინექცია

$$r \in R \longrightarrow \langle r, r, r, \dots \rangle \in R^N . \tag{1}$$

R^N-ზე ალგებრული სტრუქტურა მოიცემა R^N-ის ელემენტების R-ის ოპერაციების გავრცობით შესაბამის კომპონენტებზე ოპერაციების შესრულებით. რა თქმა უნდა, ასე მოცემული სტრუქტურა ველი არ არის (კერძოდ, ნულის გამყოფებს შეიცავს, მაგალითად, $\langle 1,0,1,\dots\rangle \cdot \langle 0,1,0,\dots\rangle = \langle 1\cdot 0, 0\cdot 1, 1\cdot 0,\dots\rangle = \langle 0,0,\dots\rangle$). აქედან გამომდინარე, R^N-ის ჩადგმა ველში შეუძლებელია. ეს განაპირობებს შემდეგი ნაბიჯის აუცილებლობას.

ავიღოთ ნებისმიერი მაქსიმალური იდეალი R^N-ში. აღვნიშნოთ ეს იდეალი M-ით. მაშინ, კარგად ცნობილია, რომ R^N/M ველს წარმოადგენს და არსებობს კანონიკური ჰომომორფიზმი

$$s \in R^N \longrightarrow [s] = s + M \in R^N/M$$

ანუ ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე არსეობს კომუტატური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, "^*(\ )"] \arrow[dr] & & {}^*R = R^N/M \\
& R^N \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

სადაც $^*(\ )$ მოიცემა

$$r \in R \mapsto {}^*r = [\langle r, r, r, \dots \rangle] = \langle r, r, r, \dots \rangle + M \in {}^*R = R^N/M .$$

აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ $^*R$ კარდინალობა არ შეიძლება აღემატებოდეს კონტინუმს, რადგანაც ის არ არის უფრო დიდი; აღემატება R^N-ის კარდინალობას, ხოლო R^N კარდინალობა კონტინუმია.

შესაძლებელია ასევე $^*R$ სიმრავლეზე დალაგების შემოღება. ამისთვის ჯერ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ R^N-ზე მემკვიდრეობით გვაქვს ნაწილობრივი დალაგება, მოცემული $s=\langle s_1,s_2,\dots\rangle$ და $t=\langle t_1,t_2,\dots\rangle$-თვის გვაქვს

$$s\le t \Leftrightarrow s_n \le t_n \text{ ყოველი } n\in N\text{-თვის.}$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია შევეცადოთ სრული დალაგების აგებას $^*R$-ზე. ყველაფერი ზემოთქმულიდან გამომდინარე გვჭირდება რამდენიმე სტრუქტურა $^*R$ ველის ბოლომდე განსაზღვრისთვის. კერძოდ, მაქსიმალური იდეალი M $^*R$-ში, R-ის $^*R$-ში ჰომომორფული ჩადგმა, სრული დალაგების განსაზღვრა $^*R$-ზე.

ამ კონსტრუქციების უკეთესად გასაგებად საჭიროა გამოვიყენოთ ზოგიერთი მათემატიკური კონსტრუქცია. კერძოდ, ფილტრი $P(N)$-ში, ულტრაფილტრი $P(N)$, ზომა N-ზე და მათი ურთიერთკავშირი, ასევე მათი კავშირი მაქსიმალურ იდეალებთან R^N-ში. ამ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა, შესაძლებელია უფრო დიდი განზოგადოების ხარისხის შემოღება და N-ის მაგივრად ნებისმიერი I უსასრულო სიმრავლის განხილვა, ჩვენი კონსტრუქციები ასეთი განზოგადებით არსებითად არ იცვლებიან.

დავიწყოთ იმით, რომ ნებისმიერ $R^N\left(R^I\right)$ ფუნქციას ეთანადება სიმრავლე $P(I)$-დან (ანუ I-ს ქვესიმრავლე), რომელიც მოიცემა ამ ფუნქციის “ნულების” ამოკრეფით I სიმრავლიდან. კერძოდ, $z(s)=\{i\in I|\ s(i)=0\}\subset I$. აქედან გავიხსენოთ, რომ არაცარიელი $\mathsf{F}\subset P(I)$-ს ფილტრი ეწოდება, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $\varnothing\notin \mathsf{F}$;
2. $J,K\in \mathsf{F} \Rightarrow J\cap K\in \mathsf{F}$;
3. თუ $J\subseteq K\in P(I)$ და $J\in \mathsf{F} \Rightarrow K\in \mathsf{F}$.

ამ განსაზღვრების გათვალისწინებით, თუ ავიღებთ ნებისმიერ საკუთრივ $B\in R^I$ იდეალს და განვიხილავთ მასში შემავალი ყოველი ელემენტის

ნულების სიმრავლეებისგან შემდგარ სიმრავლეს, მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ასეთი F_I წარმოადგენს ფილტრს I-ზე. დავამტკიცოთ ეს!

ჯერ ავიღოთ პირობა 1. იდეალი B არაცარიელია. თუ მას გააჩნია $s \in B$ ელემენტი ისეთი, რომ $z(s)=\varnothing$, მაშინ შეგვიძლია განვსაზღვროთ $t: I \to R$ შემდეგნაირად $t(i)=\dfrac{1}{s(i)}$, მაშინ $t \times s = 1$ და B-ს იდეალობიდან გამომდინარე $1 \in B$, რაც B-ს საკუთრივობის გამო შეუძლებელია.

დავამტკიცოთ ახლა თვისება 2. ავიღოთ $s,t \in B$, მაშინ s^2+t^2 ასევე ეკუთვნის B-ს და, ამასთან, $z\left(s^2+t^2\right)=z(s)\cap z(t)$, რაც ამტკიცებს თვისება 2-ს.

თვისება 3-თვის ავიღოთ ისევ $s \in B$ და $K \subseteq I$ ისეთი, რომ $z(s) \subset K$ და, ვთქვათ, t წარმოადგენს $I \setminus K$-ს მახასიათებელ ფუნქციას, მაშინ $s \times t \in B$, რადგან B იდეალია. ამასთან, $z(t \cdot s)=K$ (რადგან t არის $I \setminus K$-ს მახასიათებელ ფუნქცია, ანუ K-ზე, $t(i)=0$). ეს ამტკიცებს თვისება 3-ს.

ასეთივე მეთოდებით შესაძლებელია შებრუნებული კონსტრუქციის აგებაც. კერძოდ, თუ მოცემული F ფილტრი $\mathsf{F} \subset P(I)$-ს, შეიძლება აიგოს მისი შესაბამისი იდეალი B_{F}. B_{F} ფუნქციათა სიმრავლე მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$B_{\mathsf{F}}=\left\{s: I \mapsto R \,\middle|\, z(s) \in \mathsf{F}\right\} \subseteq R^I .$$

ვაჩვენოთ, რომ ასე განსაზღვრული ფუნქციათა სიმრავლე იდეალია.

პირველ რიგში გვაქვს:

$$z(s+t) \supseteq z(s) \cap z(t)$$

ანუ თუ გვაქვს $s,t \in B_{\mathsf{F}}$ ასევე გვაქვს $s+t \in B_{\mathsf{F}}$. ასევე

$$z(s \times t) \supseteq z(s)$$

ანუ, თუ გვაქვს $s \in B_{\mathsf{F}}$ და $t \in R^I \Rightarrow s \times t \in B_{\mathsf{F}}$. (აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ $\lambda \in R$ შემთხვევაში $z(\lambda s)=z(s)$.) ეს სამი თვისება გვაძლევს B_{F}-ის იდეალობას. ცხადია, B_{F} საკუთრივია ანუ $B_{\mathsf{F}} \neq R^I$. რადგან ნებისმიერი

$s \in B_{\mathsf{F}} \Rightarrow z(s) \neq \varnothing$ არაცარიელია ფილტრის 1 თვისებიდან გამომდინარე. ასევე, თუ გვაქვს B_1, B_2 ორი იდეალი R^I-დან და, თუ F_1, F_2 მათი შესაბამისი ფილტრებია, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\text{თუ } B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \mathsf{F}_1 \subseteq \mathsf{F}_2, \text{ მაშინ } \mathsf{F}_1 \subseteq \mathsf{F}_2 \Rightarrow B_1 \subseteq B_2.$$

ასევე არ არის ძნელი დასანახი, რომ ზემოთ მოცემული კონსტრუქციის იტერაცია ახალს არაფერს გვაძლევს, ანუ

$$B \to \mathsf{F}_B \to B_{\mathsf{F}_B} = B, \tag{2}$$

$$\mathsf{F} \to B_{\mathsf{F}} \to F_{B_{\mathsf{F}}} = \mathsf{F}. \tag{3}$$

ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ $s \in R^I$-თვის

$$s \in B \Leftrightarrow z(s) \in \mathsf{F}_B \Leftrightarrow s \in B_{\mathsf{F}_B}$$

და თანაც $J \subseteq I$-თვის გვაქვს

$$J \in \mathsf{F}_{B_{\mathsf{F}}} \Leftrightarrow J = z(s) \text{ რომელიმე } s \in B_{\mathsf{F}}\text{-თვის},$$

ხოლო $s \in R^I$-თვის გვაქვს ექვივალენტური პირობა $s \in B_{\mathsf{F}} \Leftrightarrow z(s) \in \mathsf{F}$.

ამ ყველაფრიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ყოველი იდეალი R^I-დან არის B_{F} ტიპის, სადაც F არის I-ზე მოცემული ფილტრი. ასევე ყოველი ფილტრი I-ზე არის F_B ტიპის ფილტრი, სადაც B იდეალია R^I-დან.

გადავიდეთ ახლა მაქსიმალურ იდეალებსა და ფილტრებს შორის არსებულ კავშირზე.

ფილტრები, ულტრაფილტრები და იდეალები

გავიხსენოთ, რომ ულტრაფილტრი ეწოდება მაქსიმალურ საკუთრივ ფილტრს, ანუ U ფილტრი I-ზე ულტრაფილტრია, თუ ნებისმიერი საკუთრივი F ფილტრისთვის I-ზე

$$\mathsf{U} \subseteq \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{U} = \mathsf{F}.$$

ულტრაფილტრებს შორის შეგვიძლია განვასხვავოთ ორი ტიპის სტრუქ-ტურა. კერძოდ, ულტრაფილრს ეწოდება **ფიქსირებული**, თუ არსებობს ისეთი $i \in I$, რომ $\{i\} \in \mathsf{U}$, ანუ

$$U = \left\{ J \subseteq I \,\middle|\, i \in \mathsf{J} \right\}.$$

ყველა დანარჩენ ულტრაფილტრებს ვუწოდებთ **თავისუფალს** (აქ უნდა აღინიშნოს, რომ თავისუფალი ულტრაფილტრების არსებობა გამომდინარე-ობს შერჩევის აქსიომიდან, დამტკიცება [3].

პირველ რიგში ვნახოთ რას მივიღებთ, თუ იდეალებისა და ფილტრების დამაკავშირებელი კონსტრუქციის აგებისას გამოვიყენებთ ფიქსირებულ ულტრაფილტრს. აქ სიმარტივისთვის შეგვიძლია ისევ ვიგულისხმოთ, რომ $N = I$, მაშინ ულტრაფილტრის დამაფიქსირებელი $i = n \in N$ და $\mathsf{U} = \left\{ L \subseteq N \,\middle|\, n \in L \right\}$, ანუ I_{U} ამ შემთხვევაში გვაძლევს

$$I_{\mathsf{U}} = \left\{ s = \left\langle s_1, s_2, \ldots \right\rangle \in R^N \,\middle|\, s_n = 0 \right\}, \tag{4}$$

მაშინ R^N / I_{U} გაფაქტორება ისევ R სიმრავლეს ემთხვევა, რადგან ყოველი R^N / I_{U} კლასი სრულად ხასიათდება n-ზე მიღებული რიცხვითი მნიშვნე-ლობით და, ამრიგად, R^N / I_{U} ახალს არაფერს გვაძლევს. აქედან გამომდინა-რე, ვხედავთ, რომ ფიქსირებული ულტრაფილტრები ჩვენი კონსტრუქციის-თვის არ გამოდგება და, ამრიგად, თავისუფალ ულტრაფილტრებზე უნდა გადავიდეთ.

შემდგომი კონსტრუქციებისთვის დაგვჭირდება ულტრაფილტრების ერთი მნიშვნელოვანი თვისება. კერძოდ, დამტკიცებულია (იხ. 5), რომ F ფილტრი ულტრაფილტრია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ნებისმიერი $J \subseteq I$ გვაქვს ან $J \in \mathsf{F}$ ან $I \setminus J \in \mathsf{F}$. (ცხადია, ჩვეულებრივ ფილტრებში ეს ასე არ არის.ასევე შეიძლება გვოქნდეს $J \notin \mathsf{F}$ ან $I \setminus J \notin \mathsf{F}$, მაგრამ არა $J \in I$ და $I \setminus J \in \mathsf{F}$, რადგან ამ შემთხვევაში გვექნებოდა $J \cap I \setminus J = \varnothing \in \mathsf{F}$, რაც შე-უძლებელია.)

ულტრაფილტრების ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ულტრაფილტრების ალტერნატიული დახასიათება. კერძოდ, U ულტრაფილტრია, თუ

$$\forall J_1,\dots,J_n \subseteq I\,,$$

$$\forall J_1 \cup \dots \cup J_n \in \mathrm{U} \Rightarrow \exists i, \quad J_i \in \mathrm{U}\,.$$

დავამტკიცეოთ ეს თვისება ულტრაფილტრებისთვის. (ცხადია, თუ ეს თვისება გვაქვს, მაშინ $J_1 = J$ და $J_2 = I \setminus J$ შემთხვევაში $J \cup I \setminus J \in \mathrm{U} \Rightarrow J \in \mathrm{U}$ ან $I \setminus J \in \mathrm{U}$.)

ვთქვათ, არცერთი i-თვის არ გვაქვს $J_i \in U$, მაშინ ულტრაფილტრობიდან გამომდინარე გვაქვს $I \setminus J_i \in \mathrm{U}$ ყველა i-თვის ანუ

$$\left(I \setminus J_1\right) \cap \dots \cap \left(I \setminus J_n\right) \in \mathrm{U} \tag{6}$$

და აქედან $\left(I \setminus J_1 \cap \dots \cap J_n\right) \in \mathrm{U}$, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება.

ახლა შეგვიძლია დავუბრუნდეთ R^N / I_{U} კონსტრუქციას. ავიღოთ $\omega = \langle 1,2,3,\dots \rangle \in R^N$ მიმდევრობა, მაშინ $[\omega] = \omega + I_n \in R^N / I_{\mathrm{U}}$. ვაჩვენოთ, რომ $[\omega] \neq {}^*r$ ყოველი $r \in R$-თვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ არსებობს $r \in R$ ისეთი, რომ $[\omega] = {}^*r$, მაშინ $\omega - \langle r,r,r,\dots \rangle \in I_{\mathrm{U}}$, მაშინ $\left\{ n \in N \middle| \, n = r \right\} \in \mathrm{U}$, მაგრამ ეს სიმრავლე ან ცარიელია ან ერთელემენტიანი.ორივე შემთხვევაში გვაქვს წინააღმდეგობა U-ს ულტრაფილტრობასთან, რაც ამტკიცებს ჩვენთვის მნიშვნელოვან დებულებას, რომ თავისუფალი U-თვის R^N / I_{U} R-ს არ ემთხვევა. აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ $R \mapsto R^N / I_{\mathrm{U}}$. სტანდარტული ჰომომორფიზმი ინექციაა. ეს იქიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ რომელიმე $r \neq 0$, გვექნებოდა ${}^*r = 0 \in R^N / I_{\mathrm{U}}$, მაშინ$\langle r,r,\dots \rangle \in I_{\mathrm{U}}$, რაც I_{U}-ის იდეალობას ეწინააღმდეგება $\left(\langle r,r,\dots \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{r},\frac{1}{r},\dots \right\rangle = \langle 1,1,\dots \rangle \right)$. საბოლოოდ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ U თავისუფალი ულტრაფილტრისთვის

1. R^N / I_{U} უფრო ფართოა, ვიდრე R;

2. R^N/I_{U} ველია (ეს I_{U} იდეალის მაქსიმალურობიდან გამომდინარეობს).

შენიშვნა 1. აქვე შეიძლება აღინიშნოს, რომ, თუ I სასრული სიმრავლეა, მაშინ ტრივიალურად ყველა ულტრაფილტრი ფიქსირებულია და, ამრიგად, ვიღებთ $R^I/I_{\mathrm{U}} = R$, ანუ ჩვენთვის სასურველი სტრუქტურის ასაგებად I უსასრულო უნდა იყოს.

ზომები

ახლა შეგვიძლია განვიხილოთ ულტრაფილტრები იდეალებსა და N-ზე განსაზღვრულ ზომებს შორის არსებული კავშირი. ისევე როგორც ადრე, მსჯელობებში არაფერი იცვლება, თუ N -ის ნაცვლად ნებისმიერ უსასრულო I-ს განვიხილავთ.

ავიღოთ ნებისმიერი თავისუფალი ულტრაფილტრი U (I-ზე), მაშინ მასთან ასოცირებულია $\mu_{\mathrm{U}} : P(I) \to \{0,1\}$ მოცემული შემდეგნაირად $J \in P(I)$-თვის

$$\mu_{\mathrm{U}}(J) = 1, \text{ თუ } J \in \mathrm{U}$$

და

$$\mu_{\mathrm{U}}(J) = 0, \text{ თუ } J \notin \mathrm{U}.$$

ასეთ ფუნქციას ეწოდება “სასრულად ადიტიური ორმნიშვნელოვანი ზომა”. ინტუიტიურად $\mu_{\mathrm{U}}(J) = 1$ ნიშნავს, რომ J “დიდი” ან “მნიშვნელოვანია”, ხოლო $\mu_{\mathrm{U}}(J) = 0$ ნიშნავს, რომ J “მცირე” ან “უმნიშვნელოა”.

U ულტრაფილტრის თავისუფლობის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ μ_{U} არაატომურია; კერძოდ, ნებისმიერი $i \in I$-თვის $\{i\} \notin \mathrm{U}$, და $\mu_{\mathrm{U}}(\{i\}) = 0$ და ასევე, რა თქმა უნდა, გვაქვს $\mu_{\mathrm{U}}(I) = 1$, ანუ ზომა არატივიალურია. სასრული ადიტიურობისთვის საკმარისია აღვნიშნოთ, რომ, თუ $J, K \subseteq I$ და $J \cap K = \varnothing$, მაშინ შეუძლებელია $\mu_{\mathrm{U}}(I) = \mu_{\mathrm{U}}(K) = 1$, რადგან ამ

შემთხვევაში ორივე J და $K \in \mathsf{U}$ და, აქედან, $J \cap K \neq \varnothing$, რაც წინააღმდეგობას გვაძლევს.

ასევე შეგვიძლია ავაგოთ შებრუნებული კონსტრუქცია. კერძოდ, ავიღოთ სასრულად ადიტიური, არაატომური, არატრივიალური ორმნიშვნელოვანი ზომა $\mu : P(I) \to \{0,1\}$, მაშინ შესაბამისი ულტრაფილტრი განისაზღვრება შემდეგნაირად $\mathsf{U}_\mu = \{J \subseteq I \mid \mu(J) = 1\}$. დავამტკიცოთ, რომ ეს მართლაც ულტრაფილტრია. ცხადია, $\varnothing \notin \mathsf{U}$, რადგან $\mu(\varnothing) = 0$. ასევე $I \in \mathsf{U}$, რადგან $\mu(I) = 1$. ავიღოთ $J, K \in \mathsf{U}_\mu$, მაშინ შეუძლებელია $J \cap K \notin \mathsf{U}_\mu$, რადგან ამ შემთხვევაში გვექნებოდა

$$\mu(J \cap K) = 0$$

და

$$\mu(J \cup K) = \mu(J \setminus K) + \mu(J \cap K) + \mu(K \setminus J) = 1 + 0 + 1 = 2, \quad (7)$$

რაც შეუძლებელია. ამრიგად, $J \cap K \in \mathsf{U}_\mu$. ასევე μ-ს განსაზღვრებიდან გამომდინარე შეუძლებელია ერთდროულად $\mu(J) = 0$ და $\mu(I \setminus J) = 0$ (გვექნებოდა $\mu(I) = 0$), რაც გვაჩვენებს, რომ U_μ ულტრაფილტრია. რადგან μ არაატომურია, U_μ ულტრაფილტრი თავისუფალია.

ისევე, როგორც ფილტრებისა და იდეალების შემთხვევაში, კონსტრუქციის იტერაცია ახალს არაფერს გვაძლევს,

$$\mathsf{U} \to \mu_{\mathsf{U}} \to \mathsf{U}_{\mu_{\mathsf{U}}} = \mathsf{U},$$
$$\mu \to \mathsf{U}_\mu \to \mu_{\mathsf{U}_\mu} = \mu.$$

ახლა ავიღოთ N-ზე თავისუფალი ულტრაფილტრი U და მასთან ასოცირებული მაქსიმალური იდეალი I_{U}. გვაქვს ფაქტორ-სტრუქტურა

$${}^*R = R^N / I_{\mathsf{U}},$$

რომელიც R სტანდარტულ ნამდვილ რიცხვთა ველის გაფართოებას წარმოადგენს. როგორც ვიცით, R^N / I_{U} ფაქტორ-სტრუქტურის შემადგენელ ელემენტებს, R^N-ზე განსაზღვრული ექვივალენტობის კლასები წარმოადგენენ.

ახლა μ_{U} ზომის გამოყენებით შეგვიძლია ეს ექვივალენტობა განვსაზღვროთ როგორც “თითქმის ყველგან” იდენტურობა.

ავიღოთ ორი ელემენტი R^N-დან, $s,t \in R^N$, $s = \langle s_1, s_2, \ldots \rangle$, $t = \langle t_1, t_2, \ldots \rangle$, მაშინ, როგორც ვიცით, $t - s \in I_{\mathrm{U}} \Leftrightarrow \{ n \in N \mid s_n = t_n \} \in \mathrm{U}$. ამ შემთხვევაში, რადგან N სიმრავლესთან გვაქვს საქმე, R^N-ის ელემენტები შეგვიძლია მიმდევრობებადაც ჩავთვალოთ. თუ ახლა U-სთან ასოცირებულ μ_{U} ზომას განვიხილავთ, მაშინ შეგვიძლია ექვივალენტობის განმარტება ასე ჩამოვაყალიბოთ: $t \cong s$ თითქმის ყველგან N-ზე μ_{U} ზომის აზრით ანუ მათი განსხვავებულობის სიმრავლის μ_{U} ზომა ნულის ტოლია.

ტოლობიდან შეგვიძლია სხვა მიმართებებზეც გადავიდეთ და, ვთქვათ, რომ $t \le s$, თუ ეს უტოლობა სრულდება “თიTქმის ყველგან” N-ზე μ_{U} ზომის აზრით, ანუ $\Leftrightarrow \{ n \in N \mid s_n \le t_n \} \in \mathrm{U}$.

კოფილტრები

ახლა შეგვიძლია დამატებით განვიხილოთ ფილტრის ორადული კონსტრუქცია, რომელსაც ხშირად “იდეალს” უწოდებენ, მაგრამ ამ შემთხვევაში კო-ფილტრი უფრო მოხერხებულია, რადგან ტერმინოლოგიურად R^I-ს იდეალთან აღრევის ნაკლები შესაძლებლობა გვაქვს. ინტუიციურად ეს ორი სტრუქტურა (ფილტრი და კო-ფილტრი) “დიდ” და “პატარა” სიმრავლეებს ესადაგება. ამიტომაც, რა თქმა უნდა, გვაქვს $\varnothing \notin \mathrm{F}$ და $I \in \mathrm{F}$, თანაც, თუ გვაქვს $J \in \mathrm{F}$ (ანუ J “დიდია”), მაშინ მით უმეტეს $J \subseteq K \in \mathrm{F}$. იგივე შეიძლება ითქვას ორადულ კონსტრუქციაზეც ოღონდ იქ პირიქით “პატარა” სიმრავლეებზე ვლაპარაკობთ. განვსაზღვროთ ეს კონსტრუქცია.

$\mathrm{G} \subseteq P(I)$ ეწოდება **კ ო ფ ი ლ ტ რ ი**, თუ

1. $I \notin \mathrm{G} \neq \varnothing$;
2. $J, K \in \mathrm{G} \Rightarrow J \cup K \in \mathrm{G}$;
3. $J \subseteq K \in \mathrm{G} \Rightarrow J \in \mathrm{G}$.

ამ ორი ტიპის (ფილტრი/კო-ფილტრი) სტრუქტურას შორის გვაქვს შემდეგი სახის ორადულობა:

$$\mathsf{F} \text{ ფილტრია } I\text{-ზე} \Leftrightarrow \mathsf{G} = \left\{ I \setminus J \,\middle|\, J \in \mathsf{F} \right\} \text{ კო-ფილტრია } I\text{-ზე}.$$

ულტრაფილტრის ორადული კონცეპტი ამ შემთხვევაში ე. წ. **მარტივი** კო-ფილტრი იქნება, რომელიც ისევე როგორც ულტრაფილტრების შემთხვევაში მაქსიმალური შესაძლო კო-ფილტრს წარმოადგენს. ან V კო-ფილტრი მარტივია, თუ

$$\mathsf{V} \subseteq \mathsf{G} \Rightarrow \mathsf{V} = \mathsf{G}.$$

ორადობა ამ შემთხვევაში ულტრაფილტრებისთვის და მარტივი კოეფიციენტებისთვის შემდეგი სახის დამოკიდებულებას გვაძლევს

$$\mathsf{V} = P(I) \setminus \mathsf{U} \text{ და } \mathsf{U} = P(I) \setminus \mathsf{V}$$

ასეთი ერთმანეთის ორადული ფოლტრი/კო-ფილტრის მაგალითი შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს:

$$P_\infty(I) = \left\{ J \subseteq I \,\middle|\, I \setminus J \text{ სასრულია} \right\} - \text{ფილტრი},$$

$$P_F(I) = \left\{ J \subseteq I \,\middle|\, J \text{ სასრულია} \right\} - \text{კო-ფილტრი}.$$

ასეთ ფილტრს ხშირად **ფრეშეს ფილტრს** უწოდებენ. ცხადია, რომ ნებისმიერი თავისუფალი ულტრაფილტრისთვის გვაქვს $P_\infty(I) \subseteq \mathsf{U}$.

წრფივი დალაგება $^*R$-ზე

ახლაშეგვიძლია გადავიდეთ $^*R$-ზე სრული დალაგების აგებაზე. ავიღოთ $x^*, y^* \in {}^*R = R^N / I_\mathsf{U}$, მაშინ გვაქვს $s,t \in R^N$ ისეთი, რომ $x^* = [s]$, $y^* = [t]$, $s = \langle s_1, s_2, \ldots \rangle$, $t = \langle t_1, t_2, \ldots \rangle$. განვსაზღვროთ

$$x^* \le y^* \Leftrightarrow \left\{ n \in N \,\middle|\, s_n \le t_n \right\} \in \mathsf{U} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s \le t \text{ (თითქმის ყველგან } \mu_\mathsf{U} \text{ აზრით).} \qquad (8)$$

გასაგებია, რომ, რადგან იგივე კლასიდან აღებული s', t' ელემენტები თითქმის ყველგან (μ_U ზომის აზრით) ემთხვევიან s-ს და t-ს, ამიტომ

უტოლობა ასევე შესრულდება და, ამრიგად, ჩვენი განსაზღვრება კორექტულია. ვაჩვენოთ ახლა, რომ ასე შემოტანილი $x^* \le y^*$ ${}^*R$-ზე სავსებით დალაგებულ სიმრავლედ აქცევს, ანუ ნებისმიერი ${}^*x$-თვის და ${}^*y$-თვის $x^* \le y^*$ ან $x^* \ge y^*$. პირველ რიგში აღვნიშნოთ, რომ $\le$ რეფლექსურია, შემდეგ ამ მიმართებისთვის გვაქვს ტრანზიტულობა, ანუ, თუ გვაქვს $x^* \le y^* \le z^*$, $x^* = [s]$, $y^* = [t]$, $z^* = [v]$, მაშინ გვაქვს $x^* \le z^*$. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ, თუ $s = \langle s_1, s_2, \dots \rangle \le t = \langle t_1, t_2, \dots \rangle$ თითქმის ყველგან და $t = \langle t_1, t_2, \dots \rangle \le \langle v_1, v_2, \dots \rangle$ თითქმის ყველგან, მაშინ $\langle s_1, s_2, \dots \rangle \le \langle v_1, v_2, \dots \rangle$ თითქმის ყველგან. რადგან უკანასკნელი უტოლობა პირველი ორი რიგის ვერიფიკაციის სიმრავლეების თანაკვეთაზე მაინც შესრულდება, რაც U-ს ულტრაფილტრობიდან გამომდინარე სასურველ შედეგს გვაძლევს. ასევე $\le$ ანტისიმეტრიულია და, ამრიგად, ნაწილობრივ დალაგებას წარმოადგენს. ვაჩვენოთ ახლა, რომ ასე დალაგებული ${}^*R$ სავსებით დალაგებულია. ავიღოთ $x^*, y^* \in R$, $x^* = [s]$, $y^* = [t]$, $s = \langle s_1, s_2, \dots \rangle$, $t = \langle t_1, t_2, \dots \rangle$, მაშინ ან გვაქვს $x^* \le y^*$ ან, თუ ასეთ უტოლობას ადგილი არ აქვს, გვაქვს$\{n \in N | \ s_n \le t_n\} \notin \mathsf{U}$,მაგრამ ამ შემთხვევაში U ულტრაფილტრობიდან გამომდინარე გვაქვს $\{n \in N | \ s_n > t_n\} \in \mathsf{U}$ და, ამრიგად, $x^* \ge y^*$.

მსგავსი მსჯელობები ამტკიცებს, რომ მიღებული დალაგება თავსებადია R^* ველის სტრუქტურასთან ან R^* დალაგებულ ველს წარმოადგენს. და ბოლოს, არ არის რთულიდასანახი, რომ $R \mapsto R^*$ ჩადგმა დალაგებას ინარჩუნებს, რადგან $r \le q$, $r \to [\langle r, r, \dots \rangle]$, $q \to [\langle q, q, \dots \rangle]$ და ამ შემთხვევაში უტოლობა შესრულებულია მთელ N-ზე ანუ

$$r \le q \ \ R\text{-ში} \Leftrightarrow q^* \le r^* \ \ R^*\text{-ში}.$$

ამრიგად, მოვახდინეთ $\le$ უტოლობის გავრცობა R-დან R^*-ზე. მსგავსი მსჯელობები ადგილი აქვთ უფრო ზოგად შემთხვევაში. კერძოდ,ნებისმიერი n-ადგილიანი მიმართებისთვის. განვიხილოთ ეს შემთხვევა.

ავიღოთ R განსაზღვრული n-ადგილიანი მიმართება P. მისი გადატანა ${}^*P$ მიმართება R^*-ზე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად $P \subseteq \left({}^*R\right)^n$ და გვაქვს ${}^*P\left(s^1,\dots,s^n\right)$. იმ შემთხვევაში, თუ $P\left\langle s_j^1,\dots,s_j^n\right\rangle$ სრულდება თითქმის ყველგან $j \in N$ ანუ

$$\left\{ j \in N \middle| \ P\left\langle s_j^1,\dots,s_j^n\right\rangle\right\} \in \mathrm{U}$$

$\le$-თვის ჩატარებული მსჯელობების მსგავსად ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება კორექტულია, ანუ ის არ არის დამოკიდებული $\left[s^j\right]$ კლასის სხვა წარმომადგენელი t^j ანუ

$$\left[\left\langle t_1^j, t_2^j,\dots\right\rangle\right] = \left[\left\langle s_1^j, s_2^j,\dots\right\rangle\right],$$

მაშინ გვაქვს

$$B^j = \left\{ j \in N \middle| \ s_j^i \equiv t_j^j\right\} \in \mathrm{U}. \tag{9}$$

ყოველი $1 \le i \le n$-თვის ასევე გვაქვს

$$A = \left\{ j \in N \middle| \ P\left\langle s_j^1,\dots,s_j^n\right\rangle\right\} \in \mathrm{U} \tag{10}$$

და აქედან $A \cap B^1 \cap \dots \cap B^n \in \mathrm{U}$. $P\left\langle t_j^1,\dots,t_j^n\right\rangle$ თითქმის ყველგან და განმარტების კორექტულობა დამტკიცებულია. ფუნქციების გადატანა არსებითად არ განსხვავდება მიმართების გადატანისგან, რადგან როგორც ცნობილი ფუნქცია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მიმართების კერძო შემთხვევა. ანუ n-ცვლადიანი ფუნქცია D-დომეინზე $f : D \subseteq R^n \to R$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $n+1$ ადგილიანი მიმართება, ანუ მოცემული $r_1, r_2,\dots,r_{n+1} \in R$-თვის

$$P\left\langle r_1,\dots,r_n,r_{n+1}\right\rangle \Leftrightarrow f\left(r_1,\dots,r_n\right) = r_{n+1}, \tag{11}$$

მაშინ როგორც ადრე $\left(s^1,\dots,s^n,s^{n+1}\right) \in \left({}^*R\right)^{n+1}$, $s^j = \left[\left\langle s_1^j, s_2^j,\dots\right\rangle\right]$, $1 \le j \le n+1$, და f ფუნქციისთვის გვექნება ექვივალენტურობა, რომელიც ${}^*f$ განსაზღვრავს

$${}^*f\left(s^1,\dots,s^n\right) = s^{n+1} \Leftrightarrow f\left(s_j^1,\dots,s_j^n\right) = s_j^{n+1} \text{ თითქმის ყველგან } j \in N\text{-ზე.}$$

ამ ადგილიდან დაწყებული შეგვიძლია გავაიგივოთ $r \in R$ ნამდვილი რიცხვი თავის წარმომადგენელ $r^* \in R^*$-თან და, ამრიგად, ჩავთვალოთ, რომ $R \subseteq {}^*R$ ქვესიმრავლეა, ეს შესაძლებელია, რადგან, როგორც ვიცით, გვაქვს ინექციური ჰომომორფიზმი $(\ )^* : R \to {}^*R$. R-ზე განსაზღვრული $+$, $\times$ ოპერაციები უპრობლემოდ გადადის ${}^*R$-ში, ზემოთ აღწერილი მეთოდი გამოყენებით. ასევე $\leq$ დალაგებაც, როგორც ვნახეთ გადადის ${}^*R$-ში ანუ R-ის მთელი სტრუქტურა სრულად გადაიტანება ${}^*R$. თუ ახლა P მიმართებას ავიღებთ ერთადგილიანი მიმართებიდან, მაშინ, როგორც ცნობილია, ასეთი მიმართება ექვივალენტურია R სიმრავლის გარკვეული ქვესიმრავლის $A \subseteq R$, რომელიც მოცემულია შემდეგნაირად

$$P\langle r\rangle \Leftrightarrow r \in A \quad \forall r \in R. \tag{12}$$

ამ კერძო შემთხვევისთვისაც მიმართების გადატანა ანალოგიურადაა მოცემული და გვაქვს

$${}^*A = \left\{ s = \left[\langle s_1, s_2, \ldots \rangle\right] \in {}^*R \,\middle|\, s_j \in A \quad \text{თითქმის ყველგან} \quad j \in N \text{ - ზე} \right\}.$$

მეორეს მხრივ, რადგანაც R-ის ელემენტები გავაიგივეთ მათ სახეებთან ${}^*R$-ში, გვაქვს $A \subseteq R \subseteq {}^*R$ და, ამრიგად, A წარმოადგენს ${}^*R$-ის ქვესიმრავლეს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ $A_* = \left\{ {}^*r = r \,\middle|\, r \in A \right\} \subset {}^*R$ აღნიშვნა. არ არის ძნელი დასანახი, რომ

1. $A_* \subseteq {}^*A$;
2. $A_* = {}^*A \Leftrightarrow A$ სასრულია.

დამტკიცება.

1. ცხადია.

2. ავიღოთ $A_* = {}^*A$, რაც ნიშნავს, რომ $A_* \subseteq A_*$, მაშინ ყოველი $s = \langle s_1, s_2, \ldots \rangle \in {}^*R$-თვის, ${}^*A$-ს განმარტებით, გვაქვს $r \in A$ ისეთი, რომ $s_j = r$ თითქმის ყველგან $j \in N$-თვის. აქედან A სასრულია U-ს თავისუფალი ულტრაფილტრობის ძალით და პირიქით, თუ $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ სასრულია,

მაშინ ავიღოთ $s=\left[\langle s_1,s_2,\dots\rangle\right]$, $s_j\in A$, თითქმის ყველგან $j\in N$, $\left\{j\in N\middle|\ s_j\right\}\in \mathrm{U}$. აქედან

$$\left\{j\in N\middle|\ s_j=a_1\right\}\cup\cdots\cup\left\{j\in N\middle|\ s_j=a_n\right\}\in \mathrm{U}, \qquad (13)$$

რაც U-ს ულტრაფილტრობის გამოყენებით გვაძლევს $\left\{j\in N\middle|\ s_j=a_i\right\}\in \mathrm{U}$ ერთ-ერთი i-თვის $(1\le i\le n)$. ეს ცხადია ნიშნავს, რომ $s=a_i\in A_*$. აქ შეიძლება დავამატოთ, რომ იმ შემთხვევაში, თუ A უსასრულოა, ყოველთვის შეიძლება შეირჩეს წყვილ-წყვილად განსხვავებული ელემენტებისგან შემდგარი უსასრულო მიმდევრობა $a_1,a_2,\ldots\in A$, მაშინ გვაქვს $a=\left[\langle a_1,a_2,\dots\rangle\right]\in {}^*A$. იმისათვის, რომ ეს ელემენტი A_*-შიც შედიოდეს, უნდა მოიძებნოს ისეთი r, რომ $a_j=r$ თითქმის ყველგან $j\in N$, მაგრამ a_j წყვილ-წყვილად განსხვავებული არიან და U ულტრაფილტრი თავისუფალია (არ შეიცავს ერთელემენტიან სიმრავლეს), ამიტომ $a\in {}^*A$ და $a\notin A_*$ ანუ $a\in {}^*A\setminus A_*={}^*A\setminus A$ (რადგან R ჩავდგით ${}^*R$-ში). ამ სიტუაციის კონკრეტული მაგალითის მოსაყვანად შეგვიძლია ავიღოთ $A=N$, $a=\omega=\left[\{1,2,\dots\}\right]$, მაშინ გვაქვს $\omega\in {}^*N\setminus N_*={}^*N\setminus N$. ასევე შეიძლება ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ავიღოთ ჩაკეტილი $[a,b]\subset$ ინტერვალი, მაშინ გვაქვს

$${}^*A={}^*\left[{}^*a,{}^*b\right]=\left\{x\in {}^*R\middle|\ \ {}^*a\le x\le {}^*b\right\}=[a,b]\ {}^*R\text{-დან.} \qquad (14)$$

მსგავსი მდგომარეობა გვაქვს ნახევრად ღია ან ღია შემოსაზღვრული ინტერვალებისთვის.

იმ შემთხვევაში, თუ ჩვენი ინტერვალი შემოსაზღვრული არ არის, მაგალითად, $[a,+\infty)\subset R$, მაშინ გვაქვს $A=\left\{x\in R\middle|\ a\le x\right\}$. ეს მოგვცემს ${}^*A=\left\{x\in {}^*R\middle|\ \ {}^*a\le x\right\}=[a,+\infty]$ ინტერვალია ${}^*R$-ზე. ამ შემთხვევაში $+\infty$ გულისხმობს ${}^*R$-ის დადებით საზღვარს, რაც ბევრად მეტია, ვიდრე R-ის დადებითი ნაწილი, მაგალითად, ის შეიცავს ω-ს და ა. შ. აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ${}^*R$ არ არის სრული დედეკინდის კვეთების აზრით და არ არის ლოკალურად კომპაქტური ალგებრული ტოპოლოგიის მატარებელი,

მაგრამ ამას შემდგომი განხილვებისთვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ ექნება.

ამრიგად, ყოველივე ზემოთქმულიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ, თუ გვაქვს რაიმე P მიმართება R-ზე, მაშინ მისი გადატანა ${}^*P$ ${}^*R$-ზე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მიმართების გაფართოება, და ასევე ფუნქციებისთვის ${}^*f$ ფუნქცია ${}^*A$ დომეინით შეიძლება განვიხილოთ, როგორც A დომეინის მქონე f ფუნქციის გაფართოება.

უფრო ზუსტად, ავიღოთ n-ადგილიანი P მიმართება R და $\langle r_1, r_2, \dots \rangle \in R^n$, მაშინ

$$P\langle r_1, \dots, r_n \rangle \Leftrightarrow {}^*P\langle r_1, \dots, r_n \rangle .$$

ასევე, თუ $f : D \subseteq R^n \to R$ n-ცვლადიანი ფუნქციაა, მაშინ $\langle r_1, \dots, r_n, r_{n+1} \rangle \in R^{n+1}$-თვის, გვაქვს

$$f\left(r_1, \dots, r_n\right) = r_{n+1} \Leftrightarrow {}^*f\left(r_1, \dots, r_n\right) = r_{n+1} .$$

ასევე შეგვიძლია გავიხსენოთ, რომ ნებისმიერი მიმართება P შეიძლება გაიგივდეს თავის მახასიათებელ χ_P ფუნქციასთან; კერძოდ,

$$\chi_P\left(\alpha_1, \dots, \alpha_n\right) = \begin{cases} 1, & \text{თუ გვაქვს } P\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle, \\ 0 & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მაშინ P-თვის გვაქვს n-ადგილიანი მიმართება

$${}^*\left(\chi_P\right) = \chi_{\left({}^*P\right)} .$$

მართლაც, ამ ტოლობის მარცხენა მხარისთვის გვაქვს $n+1$-ადგილიანი მიმართება $Q \subseteq R^{n+1}$ ისეთი, რომ $\chi_P\left(r_1, \dots, r_n\right) = r_{n+1} \Leftrightarrow Q\langle r_1, \dots, r_n, r_{n+1} \rangle$, ანუ Q მიმართებას აგილი აქვს

$$\text{როცა } P\langle r_1, \dots, r_n \rangle \text{ და } r_{n+1} = 1$$

ან

$$\text{როცა } P'\langle r_1, \dots, r_n \rangle \text{ და } r_{n+1} = 0$$

(აქ P' არის P მიმართების უარყოფას აღნიშნავს $P' = R^n \setminus P$).

ავიღოთ $\left(s^1,\dots,s^n,s^{n+1}\right)\in\left({}^*R\right)^{n+1}$, სადაც $s^j=\left[\left\langle s_1',s_2',\dots\right\rangle\right]$, მაშინ

$$^*\left(\chi_P\right)\left(s^1,\dots,s^n\right)=s^{n+1}\Leftrightarrow {}^*Q\left\langle s^1,\dots,s^n,s^{n+1}\right\rangle.$$

ასევე გვაქვს

$$\chi_{\left({}^*P\right)}\left(s^1,\dots,s^n\right)=1\Leftrightarrow {}^*P\left\langle s^1,\dots,s^n\right\rangle,$$

რაც გვაძლევს $^*\left(\chi_P\right)=\chi_{\left({}^*P\right)}$.

მსგავსი მსჯელობები შესაძლებელია სიმრავლეებზე განსაზღვრული ოპერაციებისთვის. კერძოდ, შეგვილიძლია დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი $A_1,\dots,A_n\subseteq R$

$$^*\left(A_1\cup\cdots\cup A_n\right)={}^*A_1\cup\cdots\cup{}^*A_n$$

ან

$$^*\left(A_1\cap\cdots\cap A_n\right)={}^*A_1\cap\cdots\cap{}^*A_n.$$

დავიწყოთ იმით, რომ

$$A\subseteq B\subseteq R\Rightarrow {}^*A\subseteq{}^*B\subseteq{}^*R$$

ანუ

$$A_1\cup\cdots\cup A_n\supseteq A_1\Rightarrow {}^*\left(A_N\right)\supseteq{}^*A_1$$

და ასევე ყოველი i-თვის. გვაქვს

$$^*\left(A_1\cup\cdots\cup A_n\right)\supseteq{}^*A_i\Rightarrow{}^*\left(A_1\cup\cdots\cup A_n\right)\supseteq{}^*A_1\cup\cdots\cup{}^*A_n$$

იგივე მსჯელობით გვაქვს $^*\left(A_1\cap\cdots\cap A_n\right)={}^*A_1\cap\cdots\cap{}^*A_n$. ავიღოთ ახლა $s=\left[\left\langle s_1,s_2,\dots\right\rangle\right]\in{}^*\left(A_1\cup\cdots\cup A_n\right)$, $s_j\in A_1\cup\cdots\cup A_n$ თითქმის ყველგან $j\in N$ ანუ

$$\bigcup_{1\le i\le n}\left\{j\in N\middle|\quad j\in A_i\right\}=\left\{j\in N\middle|\quad j\in A_1\cup\cdots\cup A_n\right\}\in\mathsf{U}$$

რაც U-ს ულტრაფილტრობის ძალით გვაძლევს $\left\{j\in N\middle|\quad j\in A_i\right\}\in\mathsf{U}$ ერთ-ერთი i-თვის $\left(1\le i\le n\right)$. ეს ნიშნავს, რომ $s\in A_i$-ს და პირველი ტოლობა სიმრავლეებისთვის დამტკიცებულია.

თანაკვეთის შემთხვევაში ავიღოთ ისევ $s \in {}^*A_1 \cap \cdots \cap {}^*A_n$, მაშინ უკვე ყოველი i-თვის $(1 \le i \le n)$ გვაქვს $\{ j \in N | \quad j \in A_i \} \in \mathrm{U}$ და, რადგანაც U ფილტრია, გვაქვს

$$\{ j \in N | \quad j \in A_1 \cap \cdots \cap A_n \} = \bigcap_{1 \le i \le n} \{ j \in N | \quad j \in A_i \} \in \mathrm{U}, \qquad (15)$$

რაც ასრულებს დამტკიცებას.

ყოველი ზემოთქმული გვაჩვენებს, რომ შესაძლებელი P მიმართების ან f ფუნქციის “გადატანა” შესაბამის ${}^*P$-ზე და ${}^*f$-ზე, რომლებიც უკვე ${}^*R$-ზეა განსაზღვრული. ამის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვილაპარაკოთ P-სა და f-ის გაფართოებაზე, რადგან გვაქვს $R \subseteq {}^*R$ ჩადგმა. ამ შემთხვევაში გაფართოება გადატანით არის მიღებული.

2.შედეგები და მათი განსჯა

2.1. სატურაცია; შინაგანი სიმრავლეები

ახლა განვიხილოთ არასტანდარტული ანალიზისთვის მნიშვნელოვანი **სატურაცის** ცნება.

დავიწყოთ მაგალითით. განვიხილოთ ღია $\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $n\in N$, $n\geq 1$, ინტერვალები. ასეთ ინტერვალებს გააჩნიათ "სასრული თანაკვეთადობის" თვისება, ანუ მათი სასრული რაოდენობის თანაკვეთა არაცარიელია, და თანაც

$$\bigcap_{1\leq n<\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing,$$

ანუ ყველა ასეთი ინტერვალის თანაკვეთა ცარიელია. მეორეს მხრივ, თუ განვიხილავთ შესაბამის ინტერვალებს ${}^*R$-ში, მათ ასევე გააჩნიათ "სასრული თანაკვეთადობის" თვისება და თანაც სტანდარტული შემთხვევისგან განსხვავებით

$$\bigcap_{1\leq n<\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\mathrm{mon}(0)\cap\left\{s\in{}^*R\,\middle|\;\; s>0\right\}\neq\varnothing,$$

სადაც $\mathrm{mon}(0)$-ით აღვნიშნავთ უსასრულოდ მცირეების ანუ 0-თან უსასრულო სიახლოვეში მყოფი ელემენტების სიმრავლეს ${}^*R$-დან. შესაძლებელია ამ მაგალითის განზოგადება, ამისთვის დაგვჭირდება განმარტება.

განმარტება. $A\subseteq{}^*R$ ქვესიმრავლეს ეწოდება შინაგანი, თუ არსებობს ქვესიმრავლეთა $A_i\subseteq R$, $i\in N$, მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$A=\left\{\left[\left\langle s_1,s_2,\cdots\right\rangle\right]\,\middle|\;\left\{i\in N\,\middle|\;\; s_i\in A_i\right\}\in\mathrm{U}\right\}. \tag{16}$$

ცხადია, თუ $A={}^*B$ რაიმე $B\subseteq R$-თვის, მაშინ A შინაგანია. ასეთებია ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ${}^*\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ ინტერვალები. ავიღოთ ახლა

$${}^*R\supseteq A_0\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$$

არაცარიელ შინაგან სიმრავლეთა მიმდევრობა, მაშინ გვაქვს

$$\bigcap_{n\in N}A_n\neq\varnothing.$$

დავამტკიცოთ ეს.

რადგან ყოველი A_n სიმრავლე შინაგანობისთვის მოიძებნება სიმრავლის შინაგანობის განმარტებაში მოცემული თვისების დამაკმაყოფილებელი $A_{n,i} \subseteq R$ უსასრულო მიმდევრობა

$$\left\{ i \in N \middle| \quad A_{n,i} \neq \varnothing \right\} \in \mathsf{U},$$

თანაც გვაქვს $A_n \supseteq A_{n+1}$ და, აქედან,

$$\left\{ i \in N \middle| \quad A_{n,i} \supseteq A_{n=1,i} \right\} \in \mathsf{U},$$

ამიტომ ყოველი $m \in N$ -თვის გვაქვს

$$B_m = \left\{ i \in N \middle| \quad A_{n,0} \supseteq \cdots \supseteq A_{n,m} \neq \varnothing \right\} \in U$$

????

$$\left\{ i \in N \middle| \quad A_{0,i} \supseteq \cdots \supseteq A_{m,i} \neq \varnothing \right\} \in U.$$

ასევე ცხადია

$$B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots,$$

მაშინ $s_i \in R$ მიმდევრობა შემდეგნაირად შეგვიძლია ავაგოთ, ყოველი $i \in B_0$-თვის ავიღოთ

$$m_i = \max \left\{ m \in N \middle| \quad m \leq i, \quad i \in B_m \right\}.$$

ეს განმარტება კორექტულია, რადგან ტოლობის მარჯვენა მხარეს მოცემული სიმრავლე არაცარიელია. რა თქმა, უნდა, გვაქვს $i \in B_{m_i}$, მაშინ ავიღოთ $s_i \in A_{i,0} \cap \cdots \cap A_{i,m_i}$ და თუ i ისეთია, რომ $i \neq B_0$, მაშინ s_i იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი R-დან, მაშინ ყოველი $n \in N$ -თვის გვაქვს

$$\left\{ i \in N \middle| \quad n \leq i \right\} \cap B_n = \left\{ i \in N \middle| \quad s_i \in A_{n,i} \right\}.$$

აქედან გამომდინარე $s = \langle s_0, s_1, s_2, \ldots \rangle$ გააჩნია ის თვისება, რომ ყოველი $i \in N$ -თვის

$$\left\{ i \in N \middle| \quad s_i \in A_{n,i} \right\} \in \mathsf{U}.$$

ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ, რადგანაც U ულტარფილტრია $\left\{ i \in N \middle| \ n \leq i \right\} \in \mathsf{U}$. ეს და $B_n \in \mathsf{U}$ ერთად გვაძლევს ზემოთ მოყვანილ მიკუთვნებას, რომელიც თავის მხრივ იძლევა $[s] \in \bigcap_{n \in N} A_n$, რაც ამტკიცებს

ჩვენს დებულებას შინაგანი სიმრავლეების ერთმანეთში რეგულარული მიმდევრობის არაცარიელობის შესახებ.

$^*R$ სიმრავლის ამ თვისებას ხშირად “თვლადი სატურაციის” თვისებას უწოდებენ. მისი ზოგიერთი შედეგი შეიძლება პრობლემატურად მოგვეჩვენოს, მაგალითად, შემდეგი დებულება პრობლემურია $^*R$-ზე ზომათა თეორიის თვალსაზრისით.

დებულება. ავიღოთ S შინაგანი სიმრავლეებისგან შემდგარი σ-ალგებრა $^*R$-ზე და $E_n \in S$ ზრდად სიმრავლეთა მიმდევრობა. მაშინ არსეობს ისეთი $m \in N$, რომ

$$\bigcup_{n \in N} E_n = E_m$$

და, ამრიგად, $E_n = E_m$, თუ $n \in N$, $n \geq m$.

დამტკიცება. ავიღოთ $E = \bigcup_{n \in N} E_n$, მაშინ დაშვების თანახმად $E \in S$ σ-ალგებრას ანუ E შინაგანიცაა. ავიღოთ $A_n = E \setminus E_n$ მიმდევრობა ცხადია, A_n ისევ შინაგანი სიმრავლეებია და თანაც

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots,$$

მაშინ, თუ $A_n \neq \varnothing$ ყოველი $n \in N$-თვის გვაქვს

$$\bigcap_{n \in N} A_n \neq \varnothing \text{ (სატურაციიდან გამომდინარე),}$$

მაგრამ, მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\bigcap_{n \in N} A_n = \bigcap_{n \in N} \left(E \setminus E_n\right) = \varnothing.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა, რომელიც ამტკიცებს დებულებას.

მიღებული დებულება იმ შედეგს გვაძლევს, რომ $^*R$-ზე შინაგანი სიმრავლეებისგან შემდგარი σ-ალგებრები σ-ალგებრის ტრივიალურ შემთხვევას წარმოადგენს, რადგანაც ასეთი სიმრავლეებისგან შეუძლებელია შევადგინოთ მკაცრად ზრდადი უსასრულო სიმრავლეების მიმდევრობა.ადვილი დასანახია ამასთან, რომ A, B შინაგანი სიმრავლეებისთვის $A \cup B$,

$A \cap B$ და $A \setminus B$ სიმრავლეებიც შინაგანია. რაც შეეხება შინაგანი სიმრავლეების ზომას, გვაქვს შემდეგი დებულება.

დებულება. თუ $A \subseteq {}^*R$ შინაგანი სიმრავლეა, მაშინ ის ან სასრულია ან არათვლადი.

დამტკიცება. ავიღოთ A სიმრავლე უსასრულო და თვლადი. მაგალითად, $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, მაშინ, თუ A შინაგანია $A \setminus B$-ც შინაგანია ნებისმიერი შინაგანი B-თვის და თანაც ყველა სასრული სიმრავლე (ტრივიალურად) შინაგანია. აქედან $A_n = A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in N$, მიმდევრობა შინაგანია და გვაქვს

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots.$$

მაგრამ $\bigcap_{n \in N} A_n = \varnothing$ და ვიღებთ წინააღმდეგობას. ამრიგად, მივიღეთ, რომ უსასრულო შემთხვევაში შინაგანი სიმრავლე არათვლადია.

ამ პარაგრაფის ბოლოს შეგვიძლია მოვიყვანოთ ულტრაფილტრებთან დაკავშირებული ერთი თეორემა. ამისათვის ავიღოთ უსასარულო I სიმრავლე, რომლის კარდინალობა აღვნიშნოთ K-ით. ვიცით, რომ ყოველი F ფილტრი I-ზე არის $P(I)$-ს ქვესიმრავლე, ანუ

$$\mathsf{F} \subseteq P(I).$$

აქედან გამომდინარე, ფილტრების და ასევე ულტრაფილტრების სიმრავლის კარდინალობა არ შეიძლება აღემატებოდეს 2^{2^K}-ს. როგორც ირკვევა ფილტრების თეორიიდან ულტრაფილტრების რაოდენობა სულ ყოველთვის ამ **მაქსიმალურ** კარდინალობას იძლევა, ანუ ნებისმიერი K კარდინალობის I-თვის, გვაქვს 2^{2^K} ულტრაფილტრი. შემოვიღოთ შემდეგი

განმარტება. I იყოს უსასრულო სიმრავლე K კარდინალობით და U იყოს ულტრაფილტრი I-ზე, მაშინ U-ს ეწოდება **ერთგვაროვანი**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $J \in \mathsf{U}$-თვის გვაქვს $card(J) = K$.

ცხადია, მხოლოდ **თავისუფალი** ულტრაფილტრი შეიძლება იყოს ერთგვაროვანი. ულტრაფილტრებისთვის დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ყოველი უსასრულო I-თვის $card(I)=K$, გვაქვს 2^{2^K} ერთგვაროვანი ულტრაფილტრი I-ზე (იხ. 27).

ეს თეორემა საკმაოდ ძლიერი შედეგია და გვაჩვენებს, რომ ნებისმიერი სიმრავლისთვის ულტრაფილტრების რაოდენობა "საკმარისია" და მით უმეტეს ის "საკმარისია" არასტანდარტული ანალიზისთვის საჭირო კონსტრუქციების ასაგებად.

2.2. გადატანა

ჩვენ ავაგეთ ${}^*R = R^N / I_n$ ნამდვილ რიცხვითა ველის გაფართოება, და ვნახეთ R-ის სტრუქტურის ${}^*R$-ზე "გადატანის" მაგალითები. მთლიანობაში ამგვარი "გადატანა" დაკავშირებულია არა იმდენად R-ისა და ${}^*R$-ის კონკრეტულ სტრუქტურასთან, არამედ "გადატანის მექანიზმთან", რომელიც მათემატიკური ლოგიკის მეთოდების გამოყენებით იგება. ამ კონსტრუქციის აგების რამდენიმე განსხვავებული ვარიანტი არსებობს, ჯერ განვიხილოთ უფრო მარტივი ვერსია, რომელიც მათემატიკური ლოგიკის საფუძვლების გამოყენებას ჯერდება. ამისთვის განვსაზღვროთ რამდენიმე საჭირო სტრუქტურა.

განსაზღვრება. მარტივი სისტემა ეწოდება ნებისმიერ სტრუქტურას, რომელსაც შემდეგი ფორმა აქვს

$$\hat{S} = \Big(S, \big(p_i \big|\ i \in I\big), \big(f_j \big|\ j \in J\big)\Big),$$

სადაც S არაცარიელი სიმრავლეა, $P_i \subseteq S^{n_i}$ არის n_i ადგილიანი მიმართება S-ზე, $f_j : D_j \to S$ არის m_j ადგილიანი ფუნქცია, $D_j \subseteq S^{m_j}$ დომეინით და მნიშვნელობებით S-ში.

შენიშვნა. ასეთი განმარტების თანახმად, ჩვენს მიერ აგებული ორივე R და ${}^{*}R$ სტრუქტურა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მარტივი სისტემა. კერძოდ,

$$\hat{R} = \left(R, (=, \leq), (+, \times) \right),$$
$${}^{*}\hat{R} = \left({}^{*}R, (=, \leq), (+, \times) \right).$$

ამ შემთხვევაში R-ს და ${}^{*}R$-ს განვიხილავთ როგორც დალაგებული რგოლის (ველის) მაგალითს, მოგვიანებით ვნახავთ, რომ ორივე სტრუქტურისთვის შესაძლებელია ბევრად მეტი მიმართების და ფუნქციის განხილვა R-სა და ${}^{*}R$-ზე.

ყოველი მარტივი სისტემა $\hat{S}$-თან ასოცირებული მარტივი L_S ენა შემდეგნაირად შემოიღება. $L_{\hat{S}}$-ის **ანბანი** შედგება სიმბოლოების შემდეგი კატეგორიებისგან:

1. ლოგიკური კავშირები $\wedge$ და $\rightarrow$ (რომლებიც აღნიშნავენ "და" და "გამომდინარეობს" ლოგიკურ ოპერაციებს, შეგვიძლია ასევე შემოვიტანოთ $\vee$ და $\neg$ ("ან", "არა") კავშირები ან სტანდარტულად განვიხილოთ ეს კავშირები როგორც $\wedge$-გან და $\rightarrow$-გან მიღებული კავშირები).
2. კვანტორის სიმბოლო $\forall$ (ან $\forall$, $\exists$) "ყველასთვის" და "არსებობს".
3. სამი ტიპის ფრჩხილი $[\ ]$, $(\ )$, $\langle\ ,\ \rangle$.
4. ცვლადების აღმნიშვნელი სიმბოლოები x, y, z.

ეს კატეგორიები საერთოა ყველა მარტივი სისტემისთვის, ხოლო შემდეგი სამი კატეგორია დამოკიდებულია კონკრეტული სისტემა $\hat{S}$-ზე.

5. მუდმივი სიმბოლოები: ყოველი $s \in S$ შეგვიძლია დავაფიქსიროთ მისი სახელი $\underline{S}$.
6. მიმართების სიმბოლოები: ყოველი P_i-თვის მისი დასახელება $\underline{P}_i$.
7. ფუნქციონალური სიმბოლოები: ყოველი f_j-თვის მისი დასახელება $\underline{f}_j$.

შენიშვნა. აქ არსეობს გარკვეული დუბლირება მიმართების სიმბოლოსა და გახაზული მიმართების სიმბოლოს შორის, რომელიც სინტაქსისა და სემატიკის დუალიზმთან არის დაკავშირებული. შემდეგში ამ დუბლირებას იგნორირებას გავუკეთებთ და $\underline{P}_i$-ის მაგივრად დავწერთ პირდაპირ P_i, ანუ აღარ დავწერთ $\underline{+}$, $\underline{\times}$ და ა. შ.

შემდეგი ნაბიჯი, რა თქმა უნდა, არის შემოღებული $L_{\hat{S}}$ ენის **ინტერპრეტაცია** ანუ თანადობის აგება $L_{\hat{S}}$ ენასა და $\hat{S}$ სტრუქტურას შორის. ცხადია, ერთი და იგივე ენას, ზოგადად, შეიძლება სხვადასხვა ინტერპრეტაცია გააჩნდეს, ანუ ნებისმიერი n-ადგილიანი მიმართების ან ფუნქციურ სიმბოლოს შესაძლებელია მიენიჭოს სხვადასხვა n-ადგილიანი მიმართების ან ფუნქციის სემანტიკური მნიშვნელობა.

$L_{\hat{S}}$ ენასთან მიმართებაში ასევე შემოგვაქვს შემდეგი განმარტებები:

სიტყვა ეწოდება $L_{\hat{S}}$ ანბანის ელემენტებისგან შემდგარ სასრულ მიმდევრობას.

თერმი არის სიტყვა, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად:

1. ნებისმიერი კონსტანტის ან ცვლადი სიმბოლოებისგან შემდგარი ერთადგილიანი სიტყვა თერმია;
2. თუ $\underline{f}$ n-ადგილიანი ფუნქციის დასახელებაა და $\tau^1,\dots,\tau^n$ $\underline{f}\left(\tau^1,\dots,\tau^n\right)$თერმია.

თერმს , რომელიც არ შეიცავს ცვლად სიმბოლოებს **მუდმივი თერმი** ეწოდება.

ახლა შეგვიძლია განვმარტოთ $L_{\hat{S}}$ ენის მარტივი გამონათქვამები. მათ განვმარტავთ შემდეგნაირად:

1. ატომური გამონათქვამი მოიცემა როგორც $\underline{P}\left\langle\tau^1,\dots,\tau^n\right\rangle$, სადაც $\underline{P}$ არის n-ადგილიანი სიმბოლო, ხოლო $\tau^1,\dots,\tau^n$ არის n-ცალი თერმი.
2. შედგენილი გამონათქვამი მოიცემა შემდეგი სახის ზოგადი ფორმულით

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k} \underline{P}_i\left\langle \xi_i\right\rangle \longrightarrow \bigwedge_{1\le j\le l} \underline{Q}_j\left\langle \chi_j\right\rangle\right],$$

სადაც $\underline{P}_i$ და $\underline{Q}_j$ n_i და m_j-ადგილიანი მიმართებისთვის ξ_i და χ_j აღნიშნავენ n_i და m_j ცალ თერმს $\tau_i^1,\ldots,\tau_i^{n_i}$ ან $\tau_j^1,\ldots,\tau_j^{m_j}$.

შენიშვნა. გამონათქვამი ზოგადად მათემატიკური ლოგიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნებაა. ამ შემთხვევაში მნიშვნელოვანია გავაიგივოთ განსხვავება გამონათქვამსა და ჩვეულებრივ ფორმულას შორის. მაგალითად, ფორმულაა, რომელიც კვანტირის დამატებით შეგვიძლია გამონათქვამად ვაქციოთ $\left(\forall x\right)\left[x^2+1>0\right]$. ეს გამონათქვამი ფორმულისგან იმით განსხვავდება, რომ მის შემთხვევაში შეგვიძლია ჭეშმარიტება/მცდარობაზე ვილაპარაკოთ. რასაც, ზოგადად, ფორმულებისთვის ადგილი არ აქვს. ნებისმიერი ინტერპრეტაციის მიზნად სწორედ გამონათქვამების ჭეშმარიტება/მცდარობის დაფიქსირება შეგვიძლია ჩავთვალოთ.

ახლა განვსაზღვროთ $L_{\hat{S}}$ ენის ინტერპრეტაციის ცნება.

$L_{\hat{S}}$ ენის ინტერპრეტაცია განისაზღვრება ინდუიქციური მეთოდით მარტივ

$$\hat{S}=\Big(S,\left(p_i\middle|\ i\in I\right),\left(f_j\middle|\ j\in J\right)\Big) \tag{17}$$

სისტემაზე შემდეგნაირად:

1. კონსტანტა $\underline{s}$, რომელიც წარმოადგენს $s\in S$ ელემენტის სახელს ინტერპრეტირდება ამ ელემენტით. ცხადია, ასეთი ინტერპრეტაცია შესაძლებელია.
2. $\underline{f}\left(\tau^1,\ldots,\tau^n\right)$ თერმი **უშვებს ინტერპრეტაციას** იმ შემთხვევაში, თუ ყველა $\tau^1,\ldots,\tau^n$ თერმი ინტერპრეტირებულია შესაბამისი $s^i\in S$ ელემენტით და თანაც $\left(s^1,\ldots,s^n\right)$ n-ეული ეკუთვნის f-ის დომეინს, სადაც f არის n-ცვლადიანი ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს $\underline{f}$-ის n-ცვლადიანი ფუნქციის სახელის ინტერპრეტა-

ციას. მაშინ $\underline{f}\left(\tau^1,\dots,\tau^n\right)$ თერმის ინტერპრეტაცია არის $f\left(s^1,\dots,s^n\right)$ ფუნქციის მნიშვნელობა, ანუ არის S -ის ელემენტი $f\left(s^1,\dots,s^n\right)\in S$.

3. ატომური გამონათქვამი $\underline{P}\left\langle\tau^1,\dots,\tau^n\right\rangle$ უშვებს ინტერპრეტაციას, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $\tau^1,\dots,\tau^n$ ტერმი ინტერპრეტი-რებულია და $\underline{P}$ – n-ადგილიანი მიმართების სახელს გააჩნია P– n-ადგილიანი მიმართებით მოცემული ინტერპრეტაცია.

გამონათქვამი ჭეშმარიტია, თუ ის უშვებს ინტერპრეტაციას და თანაც $P\left\langle s^1,\dots,s^n\right\rangle$ ჭეშმარიტია, ანუ $\left(s^1,\dots,s^n\right)$ ელემენტები P მიმართებაში არიან ერთმანეთთან, სადაც P $\overline{P}$ სახელის ინტერპრეტაციაა. შესაძლებელია, რა თქმა უნდა, P მიმართებას ამ ელემენტებზე არ ჰქონდეს ადგილი, ან ატომური გამონათქვამი საერთოდ არ უშვებდეს ინტერპრეტაციას. ორივე შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\underline{P}\left\langle\tau^1,\dots,\tau^n\right\rangle$ გამონათქვამის ჭეშმა-რიტებას ადგილი არ აქვს.

და ბოლოს, შედგენილი გამონათქვამი

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\left\langle\xi_i\right\rangle\longrightarrow\bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\left\langle\chi_j\right\rangle\right] \tag{18}$$

უშვებს ინტერპრეტაციას, თუ ყოველი $P_i\left\langle\xi_i\right\rangle$ და $Q_j\left\langle\chi_j\right\rangle$ უშვებს ინტერპრე-ტაციას $x_1,\dots,x_n$ ცვლადების გარკვეული კონსტანტებით შეცვლისას. ეს გა-მონათქვამი ჭეშმარიტია, თუ არ არსებობს კონსტანტების ჩასმა ისეთი, რომ ამ ჩასმისას $P_i\left\langle\xi_i\right\rangle$ იყოს ჭეშმარიტი და ერთი მაინც $Q_j\left\langle\chi_j\right\rangle$ – მცდარი.

ახლა მოვიყვანოთ ასეთი ინტერპრეტაციის მაგალითი. ამისთვის ავი-ღოთ მარტივი სისტემა

$$\hat{R}=\left(R,P,F\right),$$

სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, P – R-ზე მოცემული ყველა სას-რულ ადგილიან მიმართებათა სიმრავლე, F შესაბამის ფუნქციათა სიმრავ-ლეა. (რა თქმა უნდა, ასევე გვაქვს ${}^*\hat{R}=\left({}^*R,{}^*P,{}^*F\right)$ მარტივი სისტემაა, მაგ-

რამ ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ჯერ $\hat{R}$ განვიხილოთ.) ამ სისტემისთვის გვაქვს შესაბამისი სტანდარტული $L_{\hat{R}}$-ენა, რომელიც მათემატიკაში ნამდვილ რიცხვებთან მიმართებაში გამოიყენება და მისი სტანდარტული ინტერპრეტაცია. ავიღოთ $L_{\hat{R}}$ რაიმე გამონათქვამი, მაგალითად,

$$\forall x \left[\left(\sqrt{x} > -1 \right) \longrightarrow \left(\sqrt{x} \geq 0 \right) \right].$$

ეს გამონათქვამი ინტერპრეტირებადია $x \geq 0$-თვის და ამ შემთხვევაში ორივე $\sqrt{x} > -1$ და $\sqrt{x} \geq 0$ ერთდროულად ჭეშმარიტია. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\forall x$-კვანტორის განსაზღვრის არე – დადებითი რიცხვები, რომელიც არაპირდაპირი გზით არის მოცემული. აქ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ მარტივი ენა შეიძლება შეიცავდეს მხოლოდ ერთ $\forall$ კვანტორს ან მასთან ერთად $\exists$ არსებობის კვანტორსაც. ეს ორი შემთხვევა არსებითად ექვივალენტურია, მაგრამ, თუ ენაში არსებობის კვანტორი არ გვაქვს, მაშინ არსებობის კვანტორის შემცველი გამონათქვამების გადაწერას მხოლოდ $\forall$-კვანტორის მეშვეობით გამონათქვამში გარკვეული სახის ცვლილებების შეტანას მოითხოვს.

მაგალითად, ავიღოთ ჭეშმარიტი გამონათქვამი

$$(\forall x)(\forall y) \quad \left[\left(\underline{R}\langle x \rangle \wedge x \neq 0 \right) \longrightarrow (x \cdot y) = 1 \right].$$

თუ ენაში მხოლოდ $\forall$-კვანტორი გვაქვს, მაშინ ზემოთ მოცემული გამონათქვამი, მარტივი ენით რომ გამოვთქვათ, უნდა შემოვიღოთ σ ფუნქცია

$$\sigma : \left(R \setminus \{0\} \right) \to R$$

ისეთი, რომ $\sigma(x) = \dfrac{1}{\alpha}$ ყოველი $x \in R \wedge x \neq 0$-თვის. ამ ფუნქციას ენაში გააჩნია $\underline{\sigma}$ აღნიშვნა. მაშინ ზემოთ მოცემული გამონათქვამი შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\forall x \left[\left(\underline{R}\langle x \rangle \wedge x \neq 0 \right) \longrightarrow \left(x \cdot \underline{\sigma}(x) = 1 \right) \right].$$

ასეთი ტიპის ფუნქციებს, რომლებიც არსებობის კვანტორის შემცველი გამონათქვამების გადაწერისას გამოიყენება. მათლოგიკაში **სკოლემის ფუნქციები** ეწოდებათ.

ყოველივე ზემოთქმულის გამოყენებით ახლა შეგვიძლია დავაზუსტოთ ჩვენს მიერ გამოყენებული R-დან ${}^*R$-ზე მოცემული გადატანის ცნება. ინდუქციურად შემოვიღოთ გადატანის შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება.

1. **კონსტანტები.** თუ I წარმოადგენს $r \in R$ ნამდვილი რიცხვის დასახელებას $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ $L_{{}^*\hat{R}}$-ის იქნება $r = {}^*r \in {}^*R$ დასახელება.
2. **მიმართებები.** თუ $\underline{P}$ წარმოადგენს $L_{\hat{R}}$-ში მოცემულ $P - R$-ზე მოცემული n-ადგილიანი მიმართების დასახელებას, მაშინ ${}^*\underline{P}$ იქნება $L_{{}^*\hat{R}}$-დან აღებული n-ადგილიანი ${}^*P$ მიმართების დასახელება.
3. **ფუნქციები.** თუ $\underline{f}$ წარმოადგენს $L_{\hat{R}}$-დან აღებულ დასახელებას f ფუნქციისთვის, მაშინ ${}^*\underline{f}$ იქნება $L_{{}^*\hat{R}}$-დან აღებული ${}^*f$ ფუნქციის დასახელება.
4. **თერმები.** თუ τ წარმოადგენს ცვლადს ან კონსტანტას, მაშინ მისი გადატანა მოიცემა ${}^*T = T$-ით, ანუ ზემოთ მოცემული კონსტანტების გადატანას ვაფართოებთ ცვლადებისთვის. თუ $\tau = f\left(\tau_1,\ldots,\tau_n\right)$ თერმი $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ მისი გადატანა $L_{{}^*R}$-ზე იქნება ${}^*\tau = {}^*\underline{f}\left({}^*\tau_1,\ldots,{}^*\tau_n\right)$.
5. **ატომური გამონათქვამები.** თუ $\Phi = \underline{P}\left\langle\tau_1,\ldots,\tau_n\right\rangle$ არის ატომური გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ მისი გადატანა იქნება
$$ {}^*\Phi = {}^*\underline{P}\left\langle {}^*\tau_1,\ldots,{}^*\tau_n\right\rangle $$
გამონათქვამი $L_{{}^*\hat{R}}$-დან.
6. **შედგენილი გამონათქვამი.** თუ
$$ \Phi = \forall\left(x_1\right)\cdots\forall\left(x_n\right)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}\underline{P}_i\left\langle\xi_i\right\rangle \longrightarrow \bigwedge_{1\le j\le l}\underline{Q}_j\left\langle\chi_j\right\rangle\right] $$
არის შედგენილი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-დან, მაშინ
$$ {}^*\Phi = \left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\bigwedge_{1\le i\le k}{}^*\underline{P}_i\left\langle{}^*\xi_i\right\rangle \longrightarrow \bigwedge_{1\le j\le l}{}^*\underline{Q}_j\left\langle{}^*\chi_j\right\rangle\right] $$

არის შესაბამისი გამონათქვამი $L_{^*\hat{R}}$-დან (აქ ყოველი $\xi_i = \left\langle \tau_i^1, \ldots, \tau_i^{n_i} \right\rangle$ თერმების ჩასმას ξ_i ცვლადებში, შეესაბამება ${}^*\xi_i = \left\langle {}^*\tau_i^1, \ldots, {}^*\tau_i^{n_i} \right\rangle$ ჩასმა, და ასევე χ_j შემთხვევაშიც).

ეს ასრულებს განმარტებას R-დან ${}^*R$-ზე "გადატანისთვის".

ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი, რომელიც გვაჩვენებს ასეთი "გადატანის" ზოგადობას და თანაც არატრივიალურობას. ავიღოთ მარტივი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-დან

$$(\forall x)(\forall y) \ \left[\left(\underline{R}\langle x\rangle \wedge \underline{R}\langle y\rangle \right) \longrightarrow \left(x + y = y + x \right) \right],$$

სადაც $\underline{R}\langle x\rangle$ და $\underline{R}\langle y\rangle$ ნიშნავს, რომ x, y ნამდვილი რიცხვებია (ანუ აკმაყოფილებენ ტრივიალურ ერთადგილიან მიმართებას), გასაგებია, რომ ეს გამონათქვამი R-ზე შეკრების კომუტატურობას გამოხატავს. განმარტების თანახმად, ამ გამონათქვამის გადატანა იქნება

$$(\forall x)(\forall y) \ \left[\left({}^*\underline{R}\langle x\rangle \wedge {}^*\underline{R}\langle y\rangle \right) \longrightarrow \left(x + y = y + x \right) \right],$$

სადაც ${}^*\underline{R}$ არის $\underline{R}$ ერთადგილიანი მიმართების, ანუ ყოველი $s \in {}^*R$-თვის გვაქვს ${}^*\underline{R}\langle s\rangle$. ცხადია, გადატანილი გამონათქვამი ჭეშმარიტია ${}^*\hat{R}$ სისტემაში, რადგან ${}^*R$-ზე შეკრება კომუტატურია.

ახლა ვნახოთ, როგორც გადაიტანება R-ის არქიმედულობის პირობა.

არქიმედულობა $\exists$-ით კვანტორით გამდიდრებული $L_{\hat{R}}$-ის საშუალებით შემდეგნაირად შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

$$(\exists u)(\forall x)(\exists n) \ \left[\left(\underline{R}_+\langle u\rangle \wedge \underline{R}_+\langle x\rangle \wedge \underline{N}\langle n\rangle \right) \longrightarrow \left(x \le n \times u \right) \right], \qquad (19)$$

სადაც $\underline{R}_+\langle u\rangle$ რიცხვის დადებითობას გამოხატავს, $\underline{N}\langle n\rangle$ გამოხატავს n რიცხვის ნატურალობას, $n \ge 1$.

ეს გამონათქვამი შეიძლება არსებობის $\exists$-კვანტორის გარეშეც ჩაიწეროს. ამისთვის შევცვალოთ u ცვლადი 1 კონსტანტით, მივიღებთ

$$(\forall x) \ \left[\left(\underline{R}_+\langle x\rangle \right) \longrightarrow \left(x \le \underline{\sigma}(x) \times 1 \right) \right]$$

რომელიც ასევე $L_{\hat{R}}$-ში მარტივ გამონათქვამს წარმოადგენს. გადატანის შემდეგ მივიღებთ

$$(\forall x)\quad \left[\left({}^{*}\underline{R}_{+}\langle x\rangle\right)\longrightarrow\left(x\leq{}^{*}\underline{\sigma}(x)\times 1\right)\right].$$

ეს გამონათქვამი ჭეშმარიტია ${}^{*}\hat{R}$-ში. მაგრამ დებულება, რომელიც $\hat{R}$-დან ${}^{*}\hat{R}$-ში გადატანის შემდეგ მივიღეთ, არ შეიძლება ჩაითვალოს ${}^{*}R$ ველის არქიმედულობის პირობად, რადგან გადატანისას $\underline{N}$ რიცხვის ნატურალურობის პირობა იცვლება ${}^{*}\underline{N}$ პირობით, რომელიც რიცხვს N-ში ყოფნის ნაცვლად მის ბევრად უფრო ფართო ${}^{*}N$-ში ყოფნას მოითხოვს. ხოლო არქიმედულობის დროს გვინდა, რომ $x\leq n\times 1$ შესრულდეს სტანდარტული ნატურალური n-თვის. ეს მაგალითი აჩვენებს, რომ ჩვენს მიერ განმარტებულ გადატანას არატრივიალური ხასიათი აქვს. გადატანისას $\hat{R}$-ში ჭეშმარიტი გამონათქვამიდან ${}^{*}\hat{R}$-ში ჭეშმარიტი გამონათქვამი მივიღეთ, მაგრამ ჩვენი ინტუიციიდან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ გამონათქვამის აზრი შეიცვალა. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ არატრივიალურია არასტანდარტული ანალიზის შემდეგი თეორემა.

თეორემა. თუ Φ არის მარტივი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-ში და ის ჭეშმარიტია მარტივ $\hat{R}$ სისტემაში სტანდარტული ინტერპრეციისას, მაშინ ${}^{*}\Phi$ მარტივი გამონათქვამი $L_{{}^{*}\hat{R}}$-დან ჭეშმარიტია სისტემა ${}^{*}\hat{R}$-ში სტანდარტული ინტერპრეტაციისას.

ამ თეორემის დამტკიცება იხ. [19]. აქ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ჩვენს მიერ შემოტანილი გადატანის მარტივი ვერსია ორმხრივია ან გვაქვს არა მარტო Φ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში $\Rightarrow {}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ში, არამედ $L_{\hat{R}}$-ში $\Leftrightarrow$ ${}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ში. მაგალითად, თუ გვაქვს Φ, რომელიც ყალბია $L_{\hat{R}}$-ის სტანდარტული ინტერპრეტაციისას, მაშინ ($L_{\hat{R}}$-ის $\neg$ უარყოფითი გაფართოებისთვის) გვაქვს $\neg\Phi$ ჭეშმარიტია, მაშინ ${}^{*}(\neg\Phi)$ ასევე ჭეშმარიტია ${}^{*}\hat{R}$-ში

ინტერპრეტაციისას, ანუ ${}^{*}\Phi$-ის ჭეშმარიტება Φ გამონათქვამის ჭეშმარიტებასაც უნდა ნიშნავდეს, რადგან ${}^{*}\Phi$ და ${}^{*}(\neg\Phi)$ ერთდროულად ჭეშმარიტი ვერ იქნება. მაგრამ, რა თქმა უნდა, პრობლემები გვექმნება $L_{\hat{R}}$ ენის ზედმეტი სიმარტივის შენარჩუნების შემთხვევაში და ასევე გადატანის თეორემის უფრო ზოგადი შემთხვევისთვისაც გვექნება Φ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში $\Rightarrow {}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში, მაგრამ ამ გამომდინარეობის შებრუნების მცდელობა პრობლემატურია, რადგან $L_{*\hat{R}}$ ენა $L_{\hat{R}}$-თან შედარებით უფრო მეტ გამონათქვამებს შეიცავს და, ამრიგად, გადატანის შებრუნება შეიძლება ზოგჯერ აზრიანი არ იყოს.

ახლა ვნახოთ როგორ შეიძლება გამოვიყენოთ ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული თეორემა.

შემოვიღოთ $L_{\hat{R}}$-ში დამატებით Σ გამონათქვამი

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\left[\underset{1\le i\le k}{\wedge}\underline{P}_i\langle\xi_i\rangle\longleftrightarrow\underset{1\le j\le l}{\wedge}\underline{Q}_j\langle x_j\rangle\right].$$

ეს გამონათქვამი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $L_{\hat{R}}$ მარტივი ენის ორი გამონათქვამი

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\left[\underset{1\le i\le k}{\wedge}\underline{P}_i\langle\xi_i\rangle\longleftrightarrow\underset{1\le j\le l}{\wedge}\underline{Q}_j\langle x_j\rangle\right]$$

და

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\left[\underset{1\le j\le l}{\wedge}\underline{Q}_j\langle x_j\rangle\longleftrightarrow\underset{1\le i\le k}{\wedge}\underline{P}_i\langle\xi_i\rangle\right].$$

ცხადია, $L_{*\hat{R}}$-თვისაც შესაძლებელია მსგავსი მოდიფიკაცია. გადატანისას Σ გამონათქვამის გადატანას განვიხილავთ, როგორც ორი გამონათქვამის გადატანას, რა თქმა უნდა, თუ Σ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ის სტანდარტული ინტერპრეტაციისას ${}^{*}\Sigma$ ჭეშმარიტია $L_{*\hat{R}}$-ის სტანდარტულ ინტერპრეტაციაში.

ახლა, ყოველივე ზემოთქმულის გამოყენებით, ვცადოთ დავამტკიცოთშემდეგი დებულება:

დებულება. თუ $A_1,\ldots,A_n\subseteq R$, მაშინ

1. $^{*}\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = {}^{*}A_1 \cup \cdots \cup {}^{*}A_n$;

2. $^{*}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = {}^{*}A_1 \cap \cdots \cap {}^{*}A_n$.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$. გვაქვს ერთადგილიანი მიმართებები $\hat{R}$-ში $A\langle x\rangle$, $A_1\langle x\rangle, \ldots, A_n\langle x\rangle$. ეს მიმართებები გამოხატავენ მიკუთვნებებს. $x \in A$, $x \in A_1, \ldots x \in A_n$. L_R გვაქვს შემდეგი სახის ჭეშმარიტი გამონათქვამი

$$(\forall x) \quad \left[\underline{A}\langle x\rangle \longleftrightarrow \left(\underline{A}_1\langle x\rangle \wedge \cdots \wedge \underline{A}_n\langle x\rangle\right)\right].$$

აქედან გადატანის საშუალებით მივიღებთ

$$(\forall x) \quad \left[{}^{*}\underline{A}\langle x\rangle \longleftrightarrow \left({}^{*}\underline{A}_1\langle x\rangle \wedge \cdots \wedge {}^{*}\underline{A}_n\langle x\rangle\right)\right],$$

რაც ამტკიცებს დებულების მეორე პირობას, საიდანაც გამომდინარე პირველი ტოლობა შეგვიძლია უკვე დე მორგანის კანონების გამოყენებით დავამტკიცოთ

$$x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n \Leftrightarrow x \in \left(A_1' \cap \cdots \cap A_n'\right)'. \tag{20}$$

აქ B' აღნიშნავს B სიმრავლის დამატებას R-ში. ამ ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია. დებულების პირველი პირობის დამტკიცება მეორე პირობაზე დავიყვანოთ.

ეს დამტკიცება მნიშვნელოვნად განსხვავდება ჩვენს მიერ ამ დებულების იმ დამტკიცებისგან, რომელიც იყენებდა ულტრაფილტრების, მაქსიმალური იდეალების თვისებებს და ა. შ. ამ შემთხვევაში ვიყენებთ მხოლოდ გადატანის თეორემას და მისი საშუალებით მნიშვნელოვნად ვამარტივებთ დამტკიცებას. ვნახოთ კიდევ ერთი მაგალითი.

დებულება. თუ P არის n-ადგილიანი მიმართება R-ზე და χ_P მისი მახასიათებელი ფუნქციაა, მაშინ

1. ${}^{*}P$ წარმოადგენს P გაფართოებას;

2. $^{*}\left(\chi_P\right) = \chi_{\left({}^{*}P\right)}$;

3. $^{*}\left(P'\right)=\left({}^{*}P\right)'$.

დამტკიცება. პირველი პირობის დამტკიცებისთვის ავიღოთ $r_1,\ldots,r_n \in R$, მაშინ $\underline{P}$ განმარტებით

$$P\langle r_1,\ldots,r_n\rangle \Leftrightarrow \underline{P}\langle r_1,\ldots,r_n\rangle.$$

აქედან გადატანით გვაქვს ${}^{*}\underline{P}\langle r_1,\ldots,r_n\rangle$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ში. ეს ამტკიცებს პირველ პირობას. მეორე პირობისთვის გვაქვს

$$\chi_P\left(r_1,\ldots,r_n\right)=1 \Leftrightarrow P\langle r_1,\ldots,r_n\rangle,$$
$$\chi_P\left(r_1,\ldots,r_n\right)=0 \Leftrightarrow P'\langle r_1,\ldots,r_n\rangle.$$

აქ ისევ P' წარმოადგენს P-ს დამატებას. აქედან გვაქვს გამონათქვამები

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\underline{\chi}_P\left(x_1,\ldots,x_n\right)=1 \Leftrightarrow \underline{P}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\right],$$
$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\underline{\chi}_P\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \Leftrightarrow P'\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\right]$$

ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ში. გადატანით ვიღებთ

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[{}^{*}\left(\underline{\chi}_P\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right)=1 \Leftrightarrow {}^{*}\underline{P}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\right],$$
$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[{}^{*}\left(\underline{\chi}_P\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \Leftrightarrow {}^{*}\left(P'\right)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\right]$$

გამონათქვამების ჭეშმარიტებას $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ში, ანუ $s^1,\ldots,s^n \in {}^{*}R$-თვის გვაქვს

$${}^{*}\left(\chi_P\right)\left(s^1,\ldots,s^n\right)=1 \Leftrightarrow {}^{*}P\langle s^1,\ldots,s^n\rangle,$$
$${}^{*}\left(\chi_P\right)\left(s^1,\ldots,s^n\right)=0 \Leftrightarrow \left({}^{*}P\right)'\langle s^1,\ldots,s^n\rangle$$

და თანაც ადრე დამტკიცებულის (იხ. ?????) თანახმად, გვაქვს

$$\chi_{\left({}^{*}P\right)}\left(s^1,\ldots,s^n\right)=1 \Leftrightarrow {}^{*}P\langle s^1,\ldots,s^n\rangle,$$
$$\chi_{\left({}^{*}P\right)}\left(s^1,\ldots,s^n\right)=0 \Leftrightarrow \left({}^{*}P\right)'\langle s^1,\ldots,s^n\rangle,$$

რაც ამტკიცებს მეორე პირობას.

მესამე პირობისთვის გვაქვს ჭეშმარიტი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-ში

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[\underline{\chi}_P\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \Leftrightarrow \underline{P}'\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\right],$$

რომელიც გადატანის შემდეგ გვაძლევს

$$\left(\forall x_1\right)\cdots\left(\forall x_n\right)\ \left[{}^*\left(\underline{\chi}_P\right)\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \Leftrightarrow {}^*\left(\underline{P}'\right)\left\langle x_1,\ldots,x_n\right\rangle\right]$$

ანუ გვაქვს $s^1,\ldots,s^n \in R$-თვის

$$^*\left(\chi_P\right)\left(s^1,\ldots,s^n\right)=0 \Leftrightarrow \left({}^*P\right)'\left\langle s^1,\ldots,s^n\right\rangle$$

და, ამრიგად, მეორე პირობის გამოყენებით

$$\chi_{\left({}^*P\right)}\left(s^1,\ldots,s^n\right)=0 \Leftrightarrow \left({}^*P\right)'\left\langle s^1,\ldots,s^n\right\rangle.$$

აქედან,

$$\chi_{\left(\left({}^*P\right)'\right)}\left(s^1,\ldots,s^n\right)=0 \Leftrightarrow \left({}^*P'\right)\left\langle s^1,\ldots,s^n\right\rangle.$$

რაც გვაძლევს

$$\chi_{\left(\left({}^*P\right)'\right)}\left(s^1,\ldots,s^n\right)=1 \Leftrightarrow \left({}^*P\right)'\left\langle s^1,\ldots,s^n\right\rangle. \tag{21}$$

რაც ამტკიცებს მესამე პირობას.

დებულება. თუ f არის n-ცვლადიანი ფუნქცია დომეინით R^n-ზე და მნიშვნელობებით R-ში, მაშინ $^*f$ არის n-ცვლადიანი ფუნქცია დომეინით $\left({}^*R\right)^n$-ში და მნიშვნელობებით $^*R$-ში, თანაც

1. $^*f$ წარმოადგენს f-ის გაფართოებას;
2. $\text{Dom}\left({}^*f\right)={}^*\left(\text{Dom } f\right)$;
3. $\text{Range}\left({}^*f\right)={}^*\left(\text{Range } f\right)$.

დამტკიცება.

1. ამ შემთხვევაში გამომდინარეობს წინ დამტკიცებული დებულებიდან, რადგან f ფუნქცია მიმართების კერძო შემთხვევად შეგვიძლია განვიხილოთ.

2. ავიღოთ ისევ $n+1$-ადგილიანი P მიმართება ასოცირებული f ფუნქციასთან, ანუ გვაქვს

$$\left(r_1,\ldots,r_n\right)\in \text{Dom } f \Leftrightarrow P\left\langle r_1,\ldots,r_n, f\left(r_1,\ldots,r_n\right)\right\rangle.$$

აქედან გვაქვს ჭეშმარიტი გამონათქვამი $L_{\hat{R}}$-ში

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\quad \left[\underline{\mathrm{Dom}\ f}\left\langle x_1,\ldots,x_n\right\rangle \Leftrightarrow \underline{P}\left\langle x_1,\ldots,x_n, f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right\rangle\right],$$

რომლისგანაც გადატანის შემდეგ ვიღებთ

$$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\quad \left[{}^*\left(\mathrm{Dom}\ f\right)\left\langle x_1,\ldots,x_n\right\rangle \Leftrightarrow {}^*\underline{P}\left\langle x_1,\ldots,x_n, {}^*f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right\rangle\right].$$

ეს ნიშნავს, რომ $s^1,\ldots,s^n \in R$-თვის ჭეშმარიტია ${}^*\hat{R}$-ში

$$\left(s^1,\ldots,s^n\right)\in {}^*\left(\mathrm{Dom}\ f\right) \Leftrightarrow {}^*P\left\langle s^1,\ldots,s^n, {}^*f\left(s^1,\ldots,s^n\right)\right\rangle,$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\left(s^1,\ldots,s^n\right)\in \mathrm{Dom}\ {}^*f \Leftrightarrow {}^*P\left\langle s^1,\ldots,s^n, {}^*f\left(s^1,\ldots,s^n\right)\right\rangle,$$

ანუ

$${}^*\left(\mathrm{Dom}\ f\right)=\mathrm{Dom}\ {}^*f .$$

მნიშვნელობათა არისთვის ავიღოთ ჯერ $n=1$ ერთცვლადიანი ფუნქციების შემთხვევა, განვსაზღვროთ სკოლემის $\psi : \mathrm{Range}\ f \to \mathrm{Dom}\ f$ ფუნქცია ისე, რომ

$$f\left(\psi\left(b\right)\right)=b,\quad b\in \mathrm{Range}\ f ,$$

მაშინ გვაქვს $L_{\hat{R}}$-ში ჭეშმარიტი გამონათქვამები

$$\begin{gathered}(\forall x)(\forall y)\quad \left[\underline{f}\left(x\right)=y\longrightarrow\left(\mathrm{Range}\ f\right)\left\langle y\right\rangle\right],\\ (\forall y)\quad \left[\left(\mathrm{Range}\ f\right)\left\langle y\right\rangle\longrightarrow \underline{f}\left(\psi\left(y\right)\right)=y\right].\end{gathered}$$

გადატანით ვიღებთ

$$\begin{gathered}(\forall x)(\forall y)\quad \left[{}^*\underline{f}\left(x\right)=y\longrightarrow\left({}^*\left(\mathrm{Range}\ f\right)\right)\left\langle y\right\rangle\right],\\ (\forall y)\quad \left[\left({}^*\left(\mathrm{Range}\ f\right)\right)\left\langle y\right\rangle\longrightarrow {}^*\underline{f}\left(\psi\left(y\right)\right)=y\right].\end{gathered}$$

ამ გამონათქვამებიდან პირველი გვაძლევს

$$\mathrm{Range}\ {}^*f \subseteq {}^*\left(\mathrm{Range}\ f\right),$$

ხოლო მეორე კი – შებრუნებულ ჩართვას. არ არის რთული მსგავსი არგუ-მენტაციის გავრცობა $n\geq 1$ შემთხვევაზე.

ანალოგიური მეთოდებით შეიძლება დამტკიცდეს მსგავსი დებულება უსასრულო გაერთიანება/თანაკვეთებისთვის. კერძოდ,

$$\bigcup_{i\in I} {}^*A_i \subseteq {}^*\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right), \quad \bigcap_{i\in I} {}^*A_i \supseteq {}^*\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \tag{22}$$

და f , g ფუნქციების დომეინი, მნიშვნელობათა არისთვის

$${}^*(f+g) = {}^*f + {}^*g, \quad {}^*(f\times g) = {}^*f \times {}^*g, \quad {}^*|f| = |{}^*f|$$

(აქ ფუნქციების ჯამისა და ნამრავლისთვის მათი დომეინების თანაკვეთა გამოიყენება).

2.3. არასტანდარტულ ნამდვილთა ველის სტრუქტურა

როგორც ვნახეთ R-დან ${}^*R$-ზე გადასვლისას ადგილი აქვს რამდენიმე სახის გაფართოებას. კერძოდ, ყოველი $x\in R$-თვის ვიღებთ მასთან უსასრულო სიახლოვეში მყოფ არასტანდარტული ნამდვილი რიცხვების უსასრულო რაოდენობას, და თანაც ვიღებთ "'უსასრულოდ დიდ" არასტანდარტულ რიცხვებს დადებით და ასევე უარყოფითი შემთხვევისთვის. დავაზუსტოთ ახლა ${}^*R$-ის ეს თვისებები.

განსაზღვრება. $s\in {}^*R$-დან ეწოდება **უსასრულოდ მცირე**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $r\in R$-თვის, $r>0 \Rightarrow |s|\le r$.

უსასრულოდ მცირეების სიმრავლე აღინიშნება $\mathrm{mon}(0)$-ით, ანუ სხვანაირად ვიტყვით, რომ უსასრულოდ მცირეები შეადგენენ $0\in R$-ის **მონადას**. აქვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ნებისმიერი $s\in R$ ნამდვილი რიცხვის მონადა. კერძოდ, ვიტყვით, რომ $\mathrm{mon}(s) = s + \mathrm{mon}(0)$. რიცხვს $s\in {}^*R$ ვუწოდებთ სასრულს, თუ არსებობს $r\in R$, $r>0$, ისეთი, რომ $|s|\le r$. $\mathrm{Gal}(0)$-ით აღვნიშნავთ ყველა სასრული რიცხვების სიმრავლეს ${}^*R$-ში. ვიტყვით, რომ სასრული რიცხვები 0-ის გალაქტიკას წარმოადგენენ. ასევე $s\in {}^*R$-თვის

გვაქვს $\mathrm{Gal}(s) = s + \mathrm{Gal}(0)$. რიცხვს $s \in {}^*R$ ეწოდება უსასრულო, თუ ყოველი $r \in R$-თვის, $r > 0$, გვაქვს $|s| \geq r$. მაგალითის სახით შეგვიძლია მოვიყვანოთ

$$\varepsilon = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\rangle\right] \in \mathrm{mon}(0)$$

არანულოვანი დადებითი უსასრულოდ მცირე და

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon} = \left[\langle 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \rangle\right] \in {}^*R \setminus \mathrm{Gal}(0)$$

დადებითი უსასრულოდ დიდი რიცხვი.

ამ განმარტებებში დასაზუსტებელია მოდულის ცნება, რომელიც სტან-დარტულის გაფართოებას წარმოადგენს, მაგრამ, მანამდე განვიხილოთ ახ-ლად განმარტებული $\mathrm{mon}(0)$-ისა და $\mathrm{Gal}(0)$-ის ზოგიერთი თვისება. გვაქვს

1. $\mathrm{mon}(0) \cap R = \{0\}$, $\mathrm{mon}(0) \cup R \subset \mathrm{Gal}(0) \subset {}^*R$ თანადობა
$$s \in \left({}^*R \setminus \mathrm{Gal}(0)\right) \mapsto \frac{1}{s} \in \left(\mathrm{mon}(0) \setminus \{0\}\right)$$
ბიექციაა;
2. $\mathrm{mon}(0)$ და $\mathrm{Gal}(0)$ წარმოადგენენ ${}^*R$-ის ქვერგოლებს და ასევე ალ-გებრებს R-ზე;
3. $\mathrm{mon}(0)$ იდეალია $\mathrm{Gal}(0)$-ში;
4. $x, y \in R$ და $x \neq y$, მაშინ
$$\left(x + \mathrm{mon}(0)\right) \cap \left(y + \mathrm{mon}(0)\right) = \varnothing;$$
5. $\mathrm{Gal}(0) = \bigcup_{r \in R} \left(r + \mathrm{mon}(0)\right)$;
6. არსებობს ალგებრების ერთადერთი სურექციული $\mathrm{st} : \mathrm{Gal}(0) \to R$ ჰომომორფიზმი, რომელსაც **სტანდარული ნაწილის აღება** ეწოდება, გვაქვს:
   a) $s - \mathrm{st}(s) \in \mathrm{mon}(0)$, თუ $s \in \mathrm{Gal}(0)$;
   b) $\mathrm{st}(s) = s \Leftrightarrow s \in R$;
   c) $\mathrm{st}(s) = 0 \Leftrightarrow s \in \mathrm{mon}(0)$, თუ $s, t \in \mathrm{Gal}(0)$;

d) $\operatorname{mon}(s)=\operatorname{mon}(t) \Leftrightarrow \operatorname{st}(s)=\operatorname{st}(t)$;

7. $\operatorname{Gal}(0)=\operatorname{mon}(0)+R$ და თანადობა

$$r \in R \mapsto r+\operatorname{mon}(0) \in \operatorname{Gal}(0) / \operatorname{mon}(0)$$

წარმოადგენს რგოლების იზომორფიზმს R-ზე და $\operatorname{Gal}(0) / \operatorname{mon}(0)$ იზომორფულები არიან როგორც რგოლები და ასევე როგორც ველები;

8. თუ მოცემულია ჰაუსდორფული ტოპოლოგია $\operatorname{Gal}(0)$-ზე ისეთი, რომ $(a;b)=\left\{s \in {}^{*}R \mid a<s<b\right\}$ ინტერვალები ამ ტოპოლოგიაში ღიაა, მაშინ ასეთი ტოპოლოგიის შეზღუდვა R-ზე დისკრეტულ ტოპოლოგიას იძლევა.

ეს იქედან გამომდინარეობს, რომ $r \in R$-თვის ამ ტოპოლოგიაში არსებობს ღია ინტერვალი $(r-\varepsilon; r+\varepsilon)$, სადაც ε უსასრულოდ მცირეა. ასეთი ინტერვალის თანაკვეთა R-თან იძლევა წერტილოვან $\{r\}$ სიმრავლეს.

ახლა ${}^{*}R$-ზე მოდულთან დაკავშირებული რამდენიმე საკითხი დავაზუსტოთ.

ლემა. არასტანდარტული მოდულის $|\ |: {}^{*}R \mapsto {}^{*}R$ ფუნქციისთვის, რომელიც წარმოადგენს სტანდარტულ იმოდეულის გაფართოებას გადატანის მეშვეობით, გვაქვს შემდეგი თვისებები:

1. $|s| \geq 0$, $s \in {}^{*}R$;
2. $s \in {}^{*}R$-თვის გვაქვს
   a) $|s|=0 \Leftrightarrow s=0$;
   b) $|s|=s \Leftrightarrow s \geq 0$;
   c) $|s|=-s \Leftrightarrow s \leq 0$;
3. $|s+t| \leq |s|+|t|$, $|s \times t| \leq |s| \times |t|$, $s,t \in {}^{*}R$.

დამტკიცება. გავიხსენოთ, რომ წინადადება

$$(\forall r) \quad [|r|=0 \longleftrightarrow r=0]$$

ჭეშმარიტია. $L_{\hat{R}}$-ში გადატანით მივიღებთ პირველ პირობას. მეორე პირობიდან გამომდინარეობს პირველი პირობა, ხოლო მეორედან მეორეს დანარჩენი დებულებები. მსგავსი მეთოდით მიიღება აგრეთვე მესამე პირობა.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ $s,t \in {}^*R$ **უსასრულოდ ახლოს** არიან ერთმანეთთან, თუ $t-s \in \mathrm{mon}(0)$. ამ შემთხვევაში ვწერთ $s \approx t$. $s,t \in {}^*R$ **სასრულ სიახლოვეში** არიან, თუ $t-s \in \mathrm{Gal}(0)$. ამ შემთხვევაში ვწერთ $s \square t$.

ცხადია,

$$\mathrm{mon}(0) = \left\{ s \in {}^*R \middle| \; s \approx 0 \right\},$$
$$\mathrm{Gal}(0) = \left\{ s \in {}^*R \middle| \; s \square 0 \right\}.$$

ასევე $s \approx t \Rightarrow s \square t$ ყველა $s,t \in {}^*R$-თვის ვხედავთ, რომ $\approx$ და $\sqcup$ მიმართებები თანხვედრაში არიან რგოლის სტრუქტურასთან ${}^*R$-ზე, ანუ $s,t,u,v \in {}^*R$-თვის გვაქვს $s \approx t$ და $u \approx v$, მაშინ $s+u \approx t+v$, $s-u \approx t-v$ და $s \times u \approx t \times v$. მეტიც, თუ გვაქვს $u \not\approx 0$ და აქედან $v \not\approx 0$, მაშინ $\frac{s}{u} \approx \frac{t}{v}$. მსგავს პირობებს აკმაყოფილებს ასევე $\sqcup$ მიმართება.

სტანდარტულინაწილის არების ოპერაცია ასევე აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

- თუ $s,t \in \mathrm{Gal}(0)$ და $\mathrm{st}(t) \neq 0$, მაშინ

$$\mathrm{st}\left(\frac{s}{t}\right) = \frac{\mathrm{st}(s)}{\mathrm{st}(t)}; \tag{23}$$

- თუ $s \le t \Rightarrow \mathrm{st}(s) \le \mathrm{st}(t)$.

ყოველივე ამის გათვალისწინებით $\mathrm{Gal}(0)$-ის სტრუქტურა და, განსაკუთრებით, R-სა და $\mathrm{Gal}(0)$-ს შორის არსებული ურთიერთმიმართება გასაგები ხდება.

რაც შეეხება ${}^*R$ მთლიან სტრუქტურას, შეგვიძლია ვივარუდოთ, რომ ${}^*R$ მთლიანი სტრუქტურა წარმოადგენს ${}^*R$-თვის მარჯვნიდან და მარცხნიდან $\mathrm{Gal}(0)$-ის მსგავსი სტრუქტურის დამატებას, ზუსტ პასუხს ამ შეკითხვაზე იძლევა შემდეგი დებულება.

დებულება. ${}^*R$ წარმოადგენს $\mathrm{Gal}(0)$-ის წყვილ-წყვილად განსხვავებული კოპიოების არათვლად გაერთიანებას, მისი მთლიანი კარდინალობა არ აღემატება კონტინუს, ანუ

$$ {}^*R = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(s^{\lambda} + \mathrm{Gal}(0)\right), \tag{24} $$

სადაც Λ არათვლადია, მაგრამ კარდინალობით არაუმეტეს კონტინუმისა $s^{\lambda} \in {}^*R$ და ყოველი $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$, $s^{\mu}-s^{\lambda}\notin \mathrm{Gal}(0)$.

დამტკიცება. არათვლადობა. დავუშვათ, რომ ამ კოპიოების რაოდენობა თვლადია, მაშინ ავიღოთ ყოველი კოპიოსთვის თითო წარმომადგენელი $s^1, s^2, \ldots \geq 0$ და ${}^*R$ დადებითი ნაწილის შესაბამისი

$$ \left\{ s\in{}^*R \,\middle|\, s\geq 0 \right\} = \bigcup_{n\in\mathrm{N}}\left(s^{n} + \mathrm{Gal}(0)\right) \tag{25} $$

დაშლა გვაქვს ყოველი n-თვის

$$ s^n = \left[\left\langle s_1^n, s_2^n, \ldots \right\rangle\right] \in {}^*R $$

მაშინ ავაგოთ $s = \left[\left\langle s_1, s_2, \ldots \right\rangle\right]$ შემდეგნაირად

$$ \begin{aligned} & s_1 \geq 1 + s_1^1, \\ & s_2 \geq 2 + s_2^1 + s_2^2, \\ & s_3 \geq 3 + s_3^1 + s_3^2 + s_3^2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & s_n \geq n + s_n^1 + s_n^2 + \cdots + s_n^n. \end{aligned} $$

მიღებული s არ ეკუთვნის დაშლის არცერთ კლასს (დავუშვათ, რომ $s \in \left(s^n + \mathrm{Gal}(0)\right)$), გარკვეული n-თვის, მაშინ $s - s^n \in \mathrm{Gal}(0)$ ანუ არსებობს $r\in R$, $r>0$, ისეთი, რომ $\left|s-s^n\right|<r$. ეს ნიშნავს, რომ $\left|s_j - s_j^n\right| \leq r$ თითქმის

ყველგან $j \in N$, მაგრამ s-ის კონსტრუქციიდან გვაქვს, რომ $j \geq n$-თვის $\left|s_j - s_j^n\right| \geq j$, რაც გვაძლევს წინააღმდეგობას, ანუ ამ კლასების რაოდენობა არათვლადია. ის ფაქტი, რომ კლასების რაოდენობის კარდინალობა არ აღემატება კონტინუს, ${}^*R$-ის კარდინალობიდან გამომდინარეობს.

აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ დებულება და ${}^*R$-ის დალაგებულობა $\mathrm{Gal}(0)$ კოპიოების დალაგებასაც იძლევა. ამ დალაგების თვისებების დასადგენად დავამტკიცოთ შემდეგი დებულება.

დებულება. $\mathrm{Gal}(0)$ კოპიოების არათვლადი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ გაერთიანებაში (რომლისთვისაც შედგება ${}^*R$) $\mathrm{Gal}(0)$-ის ნებისმიერ ნებისმიერ ორ კოპიოს შორის თვლადი რაოდენობა კოპიოებია მოთავსებული.

დამტკიცება. ავიღოთ $\lambda, \mu \in \Lambda$ ისეთი, რომ $s^\lambda < s^\mu$. ცხადია, გვაქვს $s = \dfrac{s^\lambda + s^\mu}{2} \in {}^*R$, ანუ არსებობს ისეთი $\nu \in \Lambda$, რომ $s \in s^\nu + \mathrm{Gal}(0)$, ანუ $\left|s - s^\nu\right| \leq r$ გარკვეული $r \in R$-თვის, $r > 0$, მაგრამ $s^\nu \notin s^\lambda + \mathrm{Gal}(0)$. რადგან სხვანაირად გვექნებოდა $\left|s^\nu - s^\lambda\right| \leq r_1$,

$$\left|s^\mu - s^\lambda\right| = 2\left|\frac{s^\lambda + s^\mu}{2} - s^\lambda\right| = 2\left|s - s^\lambda\right| \leq 2\left(\left|s - s^\nu\right| + \left|s^\nu - s^\lambda\right|\right) \leq 2\left(r + r_1\right).$$

რაც წინააღმდეგობაში მოდის λ-სა და μ-ს შესაბამისი კლასების წყვილ-წყვილად თანაუკვეთობასთან. ასევე მივიღებთ, რომ

$$s^\nu \notin s^\mu + \mathrm{Gal}(0) \Rightarrow s^\lambda < s^\nu < s^\mu.$$

დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ორ კლასს შორის, ახალი კლასის ჩასმაა შესაძლებელი, რაც საკმარისია იმისთვის, რომ ამ კლასებს შორის თვლადი რაოდენობა კლასი იყოს.

მიღებული დებულებიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები.

შედეგი.

1. არ არსებობს $\mathrm{Gal}(0)$-ის კოპიო, რომელიც უშუალოდ მოსდევს სასრულ არასტანდარტულ რიცხვთა სიმრავლეს.

2. $\mathrm{Gal}(0)$ არასტანდარტულ სასრულ რიცხვთა სიმრავლეს არ გააჩნია სუპრემუმი და ინფიმუმი.

3. $\mathrm{mon}(0)$ არ გააჩნია სუპრემუმი და ინფიმუმი.

4. Z^* არასტანდარტულ მთელ რიცხვთა სიმრავლე არათვლადია.

დამტკიცება.

1. გამომდინარეობს ზემოთ დამტკიცებული დებულებიდან.

2. გამომდინარეობს შედეგის პირველი პირობიდან.

3. გამომდინარეობს შედეგის მეორე პირობიდან და დებულებაში მოცემული ბიექციიდან.

4. ავიღოთ $s \in {}^*R$, მაშინ არსებობს $t \in {}^*Z$ ისეთი, რომ $s - t \in \mathrm{Gal}(0)$ ანუ, თუ გვაქვს $s = [\langle s_1, s_2, \ldots \rangle]$, მაშინ შეგვიძლია ავიღოთ $t = [\langle t_1, t_2, \ldots \rangle]$, სადაც t_n იქნება s_n-ის მთელი ნაწილი. აქედან გამომდინარე, არსებობს ისეთი $\lambda \in \Lambda$, რომ $t^\lambda \in {}^*Z$ და $t^\lambda \in s^\lambda + \mathrm{Gal}(0)$. მაგრამ ჩვენი თანაუკვეთი სიმრავლეების გაერთიანება არათვლადია, ეს ამტკიცებს მეოთხე პირობას.

ახლა ვნახოთ რა შედეგები შეგვიძლია მივიღოთ ${}^*R$-ის ტოპოლოგიური სტრუქტურისთვის.

დებულება. ავიღოთ ნებისმიერი $A \subseteq R$, $A \neq \varnothing$. მაშინ

1. A ღიაა R-ში $\Leftrightarrow \mathrm{mon}(r) \in {}^*A \ \forall \ r \in A$-თვის.

2. A ჩაკეტილია R-ში $\Leftrightarrow \mathrm{st}(s) \in A$, თუ $s \in {}^*A \cap \mathrm{Gal}(0) \ \forall \ r \in A$-თვის.

3. A კომპაქტურია R-ში $\Leftrightarrow \left({}^*A \subseteq \mathrm{Gal}(0) \text{ და } \mathrm{st}(s) \in A \text{ თუ } s \in {}^*A\right)$.

დამტკიცება.

1. ვთქვათ, A არ არის ღია, მაშინ არსებობს $r \in A$ ისეთი, რომ მის ყოველ მიდამოს გააჩნია თანაკვეთა $R \setminus A$-თან, მაშინ ყოველი $n \in N$-თვის ავიღოთ

s_n ისეთი, რომ $\left|r-s_n\right|<\dfrac{1}{n+1}$. შევადგინოთ $s=\left[\left\langle s_1,s_2,\ldots\right\rangle\right]$, გვაქვს $s\notin {}^*A$ და თანაც $s\in\operatorname{mon}\left(r\right)$. პირიქით, თუ გვაქვს A ღიაა, მაშინ ავიღოთ $r\in A$. ავიღოთ r-ის მიდამო $V\subseteq A$-ში გვაქვს $\operatorname{mon}\left(r\right)\subseteq {}^*V\subseteq {}^*A$. რაც ამტკიცებს პირველ პირობას.

2. ავიღოთ $s=\left[\left\langle s_1,s_2,\ldots\right\rangle\right]\in {}^*A\cap\operatorname{Gal}\left(0\right)$ და $r=\operatorname{st}\left(s\right)\notin A$, მაშინ $r-s\in\operatorname{mon}\left(0\right)$, თანაც $s_n\in A$ ყოველი $n\in N$-თვის. აქედან r არის A-თვის დაგროვების წერტილი ან A არ არის ჩაკეტილი, და პირიქით, პირველი პირობიდან გამომდინარე საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $r\in R\setminus A$. გვაქვს $\operatorname{mon}\left(r\right)\subseteq {}^*\left(R\setminus A\right)={}^*R\setminus{}^*A$, ანუ $\operatorname{mon}\left(r\right)\cap{}^*A=\varnothing$, თუ $r\in R\setminus A$. ავიღოთ $s\in\operatorname{mon}\left(r\right)\cap{}^*A$ და $r\in R\setminus A$. გვაქვს $\operatorname{st}\left(s\right)\in A$, მაგრამ $s\in\operatorname{mon}\left(r\right)$ ნიშნავს, რომ $\operatorname{st}\left(s\right)=r$, რაც წინააღმდეგობაა, ანუ გვაქვს მეორე პირობა.

3. თუ გვაქვს $A\subseteq R$, მაშინ ${}^*A\subseteq\operatorname{Gal}\left(0\right)$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ A შემოსაზღვრულია. ახლა გამოვიყენოთ მეორე პირობა.

როგორც ვხედავთ R-ის ლოკალური და გლობალური სტრუქტურები ერთმანეთთან მჭიდრო ურთიერთკავშირში არიან.

ახლა განვიხილოთ ეს კავშირები. გავიხსენოთ, რომ გვაქვს ბიექცია

$$s\in\left({}^*R\setminus\operatorname{Gal}\left(0\right)\right)\mapsto\frac{1}{s}\in\left(\operatorname{mon}\left(0\right)\setminus\left\{0\right\}\right).$$

როგორც ვნახეთ, ${}^*R$-ის გლობალური სტრუქტურა მოცემულია

$${}^*R=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(s^\lambda+\operatorname{Gal}\left(0\right)\right).$$

ასევე $\operatorname{Gal}\left(0\right)$-თვის გვაქვს

$$\operatorname{Gal}\left(0\right)=\bigcup_{\mathrm{r}\in\mathrm{R}}\left(r+\operatorname{mon}\left(0\right)\right).$$

ამ ორი ტოლობის გამოყენებით ვიღებთ

$$\left(\bigcup_{\mathrm{r}\in\mathrm{R},\,\lambda\in\Lambda_0}\left(r+s^\lambda+\operatorname{mon}\left(0\right)\right)\right)\in s\mapsto\frac{1}{s}\in\left(\operatorname{mon}\left(0\right)\setminus\left\{0\right\}\right)\tag{26}$$

და ასევე

$$s \in \left(\mathrm{mon}(0) \setminus \{0\}\right) \mapsto \frac{1}{s} \in \left(\bigcup_{r \in R,\, \lambda \in \Lambda_0} \left(r + s^{\lambda} + \mathrm{mon}(0) \right) \right), \tag{27}$$

სადაც $\Lambda_0 = \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$, $\lambda_0 \in \Lambda$ და $s^{\lambda_0} \in \mathrm{Gal}(0)$. ეს ბიექციები წარმოადგენენ, სტანდარტულ შემთხვევაში, ძალიან მარტივი $s \mapsto \dfrac{1}{s}$ თანადობის განზოგადოებას სტანდარტულ შემთხვევაში, რა თქმა უნდა, გვაქვს

$$r \in \left(R \setminus (-1;1)\right) \mapsto \frac{1}{r} \in \left([-1;1] \setminus \{0\}\right)$$

და

$$r \in \left([-1;1] \setminus \{0\}\right) \mapsto \frac{1}{r} \in \left(R \setminus (-1;1)\right)$$

სიმრავლეები, რომლებიც არ წარმოადგენენ სტანდარტული სიმრავლების გადატანას.

ვნახეთ, რომ R-ის ნებისმიერი ქვესიმრავლე $A \subseteq R$ შეიძლება გადავიტანოთ ${}^*A \subseteq {}^*R$-ის ქვესიმრავლედ. ახლა შევნიშნოთ, რომ ${}^*R$-ს გააჩნია ქვესიმრავლეები, რომლებიც არ წარმოადგენენ არანაირი სტანდარტული ქვესიმრავლის გადატანას. მოვიყვანოთ ასეთი ქვესიმრავლეების რამდენიმე მაგალითი.

1. პირველ რიგში ტრივიალურად თვითონ R სიმრავლე, თუ მას განვიხილავთ როგორც ${}^*R$ ქვესიმრავლეს არ გააჩნია ${}^*A$ ტიპის სიმრავლე არცერთი $A \subset R$-თვის (მართლაც, ვთქვათ, არსებობს A ისეთი, რომ $R = {}^*A$, მაშინ, თუ A შემოსაზღვრულია ზემოდან, გვაქვს $A \subseteq \{r \in R \mid r \subseteq a\}$ და გამონათქვამი

$$(\forall x) \quad \left[\underline{A}\langle x \rangle \longrightarrow x \le a\right]$$

ჭეშმარიტია, მაგრამ გადატანის პრინციპიდან გვაქვს

$$(\forall x) \quad \left[{}^*\underline{A}\langle x \rangle \longrightarrow x \le a\right]$$

ჭეშმარიტია $L_{^*\hat{R}}$-ში, მაგრამ ჩვენი დაშვებით $R = {}^*A$, რაც მოგვცემდა $R \subseteq (-\infty; a]$ – წინააღმდეგობა. იმ შემთხვევაში კი, თუ A არ არის შემოსაზღვრული ზემოდან, ავიღოთ მიმდევრობა $a_n \in A$ ისეთი, რომ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, მაშინ გვაქვს $a = [\langle a_1, a_2, \ldots \rangle] \in {}^*A$, მაგრამ $a \notin \mathrm{Gal}(0)$ და, ამგვარად, $a \notin R$. მსგავსი მსჯელობები გვაჩვენებს, რომ N და Z სიმრავლეებიც არ არიან ${}^*A$ სახის.

ასევე $\mathrm{mon}(0)$ და $\mathrm{Gal}(0)$ სიმრავლეები არ არიან ${}^*A$ სახის არცერთი $A \subseteq R$-თვის. დავუშვათ საპირისპირო, $\mathrm{mon}(0) = {}^*A$, მაშინ გვაქვს $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{mon}(0)$ და, ამიტომ $A = \{0\}$, მაგრამ ${}^*\{0\} \neq \mathrm{mon}(0)$. $\mathrm{Gal}(0)$-ის შემთხვევა მსგავსად გაირჩევა. ასევე ${}^*N/N$, ${}^*Z/Z$ და ${}^*R/R$ სიმრავლეთაგან არცერთი არ არის ${}^*A$ სახის $A \subseteq R$-თვის. დავუშვათ, მაგალითად, ${}^*N/N = {}^*A$ რაიმე $A \subseteq R$-თვის. ავიღოთ $a \in \mathrm{Gal}(0)$. მსგავსი მსჯელობა გვაქვს ${}^*Z/Z$-ს და ${}^*R/R$-თვის.

მიღებულიშედეგების გამოყენებით უკვე შეგვიძლია ვნახოთ როგორ გამოიყენება არასტანდარტული ანალიზი. ჩვეულებრივი მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთ საკითხთან მიმართებაში. ავიღოთ ნამდვილ რიცხვთა $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა R-დან. ეს მიმდევრობა შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $x : N \mapsto R$ ფუნქცია, $x(n) = x_n$ ყოველი $n \in N$-თვის. გადატანის გამოყენებით ვიღებთ ფუნქციას

$$^*x : {}^*N \mapsto {}^*R,$$

რომელიც შეგვიძლია ჩავთვალოთ x_n მიმდევრობის “გაფართოებად”.

დებულება. გვაქვს $\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow$ ყოველი $n \in {}^*N/N$-თვის $x_n(n) \approx l$, ანუ ყოველი არასტანდარტული n-თვის ${}^*X_n$ უსასრულოდ ახლოს უნდა იყოს l ზღვართან.

აქ ვხედავთ, რომ სტანდარტული დებულების ექვივალენტურიარასტან-დარტული დებულება თითქოს არაფერს ამბობს სტანდარტულ n რიცხ-ვებზე და მხოლოდ გარკვეულ არასტანდარტულ მოთხოვნას აყენებს, მაგ-რამ, რა თქმა უნდა, ეს არასტანდარტული მოთხოვნა იმპლიციურად შეიცავს გარკვეულ სტანდარტულ შედეგებს, სხვანაირად მსგავსი დებულებების გამოთქმა შეუძლებელი იქნებოდა.

დამტკიცება. ავიღოთ $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, როგორც მათემატიკური ანალიზი-დან ვიცით, ეს ნიშნავს, რომ

$$\forall \varepsilon \in R, \quad \varepsilon > 0,$$
$$\exists\, m \in N, \quad \forall\, n \in N,$$

და

$$n \geq m, \quad |l - x_n| \leq \varepsilon .$$

შევარჩიოთ რაიმე მცირე $\varepsilon > 0$, მაშინ გარკვეული m-თვის გამონათქვამი:

$$\forall n \ \left[\left(\left(\underline{N}\langle n\rangle\right) \wedge (n \geq m)\right) \longrightarrow \left(|l - x_n| \leq \varepsilon\right)\right] \tag{28}$$

ჭეშმარიტია L_R, აქედან გადატანით ვიღებთ გამონათქვამს

$$\forall n \ \left[\left(\left({}^*N\langle n\rangle\right) \wedge (n \geq m)\right) \longrightarrow \left(\left|l - {}^*x(n)\right| \leq \varepsilon\right)\right] \tag{29}$$

ჭეშმარიტს $L_{{}^*\hat{R}}$-ში. აქედან

$$|l - x_n| \leq \varepsilon, \quad n \in {}^*N/N ,$$

და, რადგანაც, ε შევარჩიეთ ყოველგვარი შეზღუდვის გარეშე გვაქვს $x_n \approx l$ ყოველი არასტანდარტული n-თვის და, პირიქით, თუ არ გვაქვს (სტანდარ-ტული აზრით) $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, მაშინ არსებობს ε ისეთი, რომ

$$\forall\, m \in N, \quad \exists\, n \in N, \quad n \geq m,$$
$$|l - x_n| \geq \varepsilon,$$

ანუ გვაქვს სკოლემის$\psi : N \to N$ ფუნქცია, $\psi(m) \geq m$ ისეთი, რომ

$$\forall m \quad \left[N\langle m\rangle \longrightarrow \left(\left|l - x_{\psi(m)}\right| \geq \varepsilon\right)\right]$$

გამონათქვამი ჭეშმარიტია, აქედან გადატანით

$$\forall m \quad \left[{}^{*}\underline{N}\langle m\rangle \longrightarrow \left(\left| l - {}^{*}x_{\left({}^{*}\psi(m)\right)} \right| \geq \varepsilon \right) \right] \tag{30}$$

ჭეშმარიტია, რაც ნიშნავს, რომ არ გვაქვს $x_n \approx l$ არასტანდარტულ შემთხვევაში.

მსგავს მდგომარეობას ვაწყდებოით შემდეგ დებულებაშიც.

დებულება. თუ $(x_n)_{n\in N}$ შემოსაზღვრული მიმდევრობაა $\Leftrightarrow$ $x_n \in \mathrm{Gal}(0)$, $n \in {}^{*}N/N$ -თვის.

დამტკიცება. თუ x_n შემოსაზღვრული მიმდევრობაა, მაშინ არსებობს $L \in N$, $L > 0$, ისეთი, რომ

$$(\forall n) \quad \left[\underline{N}\langle n\rangle \longrightarrow |x_n| \leq L \right]$$

ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$ -ში. მაშინ გადატანით გვაქვს

$$(\forall n) \quad {}^{*}\left[\underline{N}\langle n\rangle \longrightarrow |x_n| \leq L \right]$$

ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$ -ში, რაც ნიშნავს, რომ

$$x_n \in \mathrm{Gal}(0) \text{ ყოველი } n \in {}^{*}N \text{ -თვის}$$

და, პირიქით, თუ x_n არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს სკოლემის $\psi : N \to N$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\psi(n) \geq n$ ყოველი n-თვის და

$$(\forall n) \quad \left[\underline{N}\langle n\rangle \longrightarrow \left|x_{\psi(n)}\right| \geq n \right]$$

ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$ -ში. მაშინ გადატანით გვაქვს

$$(\forall n) \quad {}^{*}\left[\underline{N}\langle n\rangle \longrightarrow \left|x_{{}^{*}\psi(n)}\right| \geq n \right]$$

ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$ -ში და, აქედან, არ გვაქვს შემოსაზღვრულობა არასტანდარტულ შემთხვევაში.

ვნახოთ კიდევ ერთი მსგავსი დებულება.

დებულება. ნამდვილი $l \in R$ რიცხვი მიმდევრობის ზღვრული წერტილია $\Leftrightarrow x_n \approx l$ რაიმე $n \in {}^*N/N$ -თვის.

დამტკიცება. ავიღოთ x_n მიმდევრობის ზღვრული $l \in R$ წერტილი, მაშინ გვაქვს

$$\forall \varepsilon \in R, \quad \varepsilon > 0\text{-თვის}$$

და

$$\forall m \in N, \quad \exists\, n \in N, \quad n \geq m,$$
$$\left|l - x_n\right| \leq \varepsilon,$$

ანუ არსებობს სკოლემის $\psi : R_+ \times N \to N$ ფუნქცია (აღვნიშნოთ $R_+ = (0;+\infty)$) ისეთი, რომ $\psi(\varepsilon, n) \geq n$ და გამონათქვამი

$$(\forall \varepsilon)(\forall n) \ \left[\left(R_+\langle \varepsilon \rangle \wedge \underline{N}\langle n \rangle\right) \longrightarrow \left|l - x_{\psi(\varepsilon,n)}\right| \leq \varepsilon\right]$$

ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$ -ში. მაშინ გადატანით გვაქვს

$$(\forall \varepsilon)(\forall n) \ \left[\left({}^*R_+\langle \varepsilon \rangle \wedge {}^*\underline{N}\langle n \rangle\right) \longrightarrow \left|l - x_{{}^*\psi(\varepsilon,n)}\right| \leq \varepsilon\right]$$

ავიღოთ $\varepsilon \in \mathrm{mon}(0)^*(R_+)$, $n \in {}^*N/N$, და $n = {}^*\psi(\varepsilon, m)$. მაშინ $n \geq m$, ანუ $n \in {}^*N/N$ და $\left|l - x_n\right| \leq \varepsilon$, რაც მოითხოვებოდა დებულებით და, პირიქით, თუ l არ არის x_n მიმდევრობის დაგროვების წერტილი, მაშინ არსებობს $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$, და $m \in N$ ისეთი, რომ გამონათქვამი

$$(\forall n) \ \left[\left(\left(\underline{N}\langle n \rangle\right) \wedge (n \geq m)\right) \longrightarrow \left|l - x_n\right| \geq \varepsilon\right]$$

ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$ -ში. მაშინ გადატანით გვაქვს

$$(\forall n) \ \left[\left(\left({}^*\underline{N}\langle n \rangle\right) \wedge (n \geq m)\right) \longrightarrow \left|l - x_n\right| \geq \varepsilon\right]$$

ჭეშმარიტია $L_{{}^*\hat{R}}$ -ში. რაც ასრულებს დებულების დამტკიცებას.

როგორც ამ დებულებების დამტკიცებისას ვნახეთ, ბევრი არასტანდარტული კონცეფტი გარკვეული აზრით ეტანადება ჩვენს ინტუიციურ წარმოდგენებს სტანდარტულ შემთხვევაში. მაგალითად, ზღვარი ნიშნავს, რომ

“უსასრულობაში” მიმდევრობა ზღვრული მნიშვნელობისგან “თითქმის” არ განსხვავდება და ა. შ. ეს გარკვეულ წარმოდგენას გვაძლევს იმ გამოყენება-ზე, რომელიც არასტანდარტულ ანალიზს სტანდარტული პრობლემის გა-დაჭრისას შეიძლება ჰქონდეს.

თავის ბოლოს შევაჯამოთ აქამდე ჩამოყალიბებული შედგები. ჩვენ ჩა-მოვაყალიბეთ ორი ტიპის გადასვლა სტანდარტული ანალიზიდან არასტან-დარტულ ანალიზზე:

1. სხვადასხვა ტიპის მათემატიკური კონსტრუქციების გადატანა R-დან R^*-ზე და $R \to R^*$ ჩადგმის აგება.
2. $L_{\hat{R}}$ ენის გამონათქვამების გადატანა $L_{^*\hat{R}}$ ენაში, რაც გარდაქმნის R სტრუქტურაზე გამოთქმულ დებულებას $^*R$ სტრუქტურაზე გამოთ-ქმულ დებულებაზე.

ყველაზე ეფექტური მეთოდი აღმოჩნდა ამ ორი “გადატანის” კომბინი-რება და დამტკიცებებში ხან ერთის გამოყენება და ხან მეორის. გავიხსენოთ ამ გადატანების ზოგადი სქემა.

R ველის გაფართოებისთვის, როგორც გვახსოვს, გამოვიყენეთ შემდეგი ჩადგმა

$$r \in R \xrightarrow{^*(\,)} {^*r} = \left[\left\langle r, r, r, \ldots \right\rangle\right] \in {^*R}\,.$$

P n-ადგილიანი მიმართებისთვის შემოვიღეთ $^*P$ n-ადგილიანი მიმარ-თება $^*R$ სტრუქტურაზე განსაზღვრული შემდეგნაირად: $\left(s^1, \ldots, s^n\right) \in \left({^*R}\right)^n$. თუ არის n-ეული ისეთი, რომ $s^i = \left[\left\langle s_1^i, s_2^i, \ldots \right\rangle\right]$, $1 \le i \le n$, მაშინ

$$^*P\left\langle s^1, \ldots, s^n \right\rangle \Leftrightarrow \left\{ j \in N \middle|\ \ P\left\langle s_i^1, \ldots, s_i^n \right\rangle \right\} \in \mathsf{U}\,, \tag{31}$$

სადაც U არის $^*R$-ის კანონიკური ულტრაფილტრი.

ეს ორი განსაზღვრება საკმარისია მათემატიკური სტრუქტურების გადატანისთვის, რაც შეეხება გამონათქვამების გადატანას, მოვიყვანეთ ასეთი გადატანის გამარტივებული ვერსია. ამისთვის შემოვიღეთ “მარტივი

ენის" $L_{\hat{S}}$-ის ცნება "მარტივი სისტემა" $\hat{S}$-თვის და ეს განმარტება გამოვიყენოთ ჩვენთვის საინტერესო მარტივ

$$\hat{R} = \left(R, P, F\right) \text{ და } {}^{*}\hat{R} = \left({}^{*}R, P, F\right)$$

სისტემაზე სალაპარაკოდ. ამგვარად, მივიღეთ $L_{\hat{R}}$ ენიდან $L_{{}^{*}\hat{R}}$ ენაში გამონათქვამების გადატანა. შემოვიღეთ ასეთი გადატანის ჯერ ატომურ გამონათქვამებზე განსაზღვრით და შემდეგ მისი განვრცობით შედგენილ გამონათქვამებზე. ამრიგად, მივიღეთ ენიდან ენაზე განსაზღვრული

$$\Phi \in L_{\hat{R}} \xrightarrow{{}^{*}(\,)} {}^{*}\Phi \in L_{{}^{*}\hat{R}}$$

ფუნქცია, სადაც Φ და ${}^{*}\Phi$ გამონათქვამებია შესაბამის ენებში.

ასეთი ტიპის გადატანისთვის ჩამოვაყალიბეთ "გადატანის თეორემა", რომელიც ამტკიცებდა, რომ

ყოველი $\Phi \in L_{\hat{R}}$ მარტივი ენის გამონათქვამისთვის Φ ჭეშმარიტია $L_{\hat{R}}$-ის კანონიკურ მოდელში $\Rightarrow$ ${}^{*}\Phi$ ჭეშმარიტია $L_{{}^{*}\hat{R}}$-ის კანონიკურ მოდელში.

როგორც ვნახეთ, ეს კონსტრუქცია საშუალებას გვაძლევს სწრაფად მივიღოთ ბევრი მნიშვნელოვანი შედეგი:

არასტანდარტულ ანალიზში და ასევე ეს შედეგები გამოვიყენოთ სტანდარტული პრობლემების გადაჭრისას.

ზოგადად, არასტანდარტული მეთოდების გამოყენების სფერო არ შემოისაზღვრება R-დან ${}^{*}R$-ზე გაფართოებით და პრობლემების გადატანით, არამედ მას გააჩნია ფართო გამოყენება და შეიძლება განივრცოს მათემატიკის სხვადასხვა სფეროზე, ისეთებზე, როგორც ფუნქციონალურ ანალიზი, ალბათობის თეორია, ტოპოლოგია და სხვა. მაგრამ, რა თქმა უნდა, ასეთი გავრცობისთვის საჭიროა გადატანის თეორემის იმაზე ბევრად უფრო ძლიერი ვარიანტი, ვიდრე აქამდე მოვიყვანეთ. ასეთი გაძლიერებული ვარიანტისთვის არ არის საკმარისი ჩვენს მიერ განხილული "მარტივი სტრუქტურებით" შემოფარგვლა, არამედ საჭიროა მათემატიკური კონსტრუქცია, რო-

მელსაც "სუპერ სტრუქტურა" ეწოდება. მაგრამ, ვიდრე არასტანდარტულიანალიზის გაძლიერებულ ვერსიას განვიხილავთ, ვნახოთ R-თან დაკავშირებული კიდევ რამდენიმე კონსტრუქციის აგებაში არასტანდარტული მეთოდების გამოყენება.

ავიღოთ ამჯერად R ნამდვილი რიცხვების ველის ნაცვლად Q რაციონალური რიცხვების ველი. ისევე, როგორც R-ის შემთხვევაში, გვექნება

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[rr, "{}^*(\,)"] \arrow[dr] & & {}^*Q = Q^N/M \\
& Q^N \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

დიაგრამა, სადაც ინექციური ${}^*(\ )$ ჩადგმა მოცემულია

$$r \in Q \longrightarrow {}^*r = \left[\langle r, r, \ldots \rangle\right] = \langle r, r, \ldots \rangle + M \in {}^*Q = Q^N / M$$

სახით. ისევე როგორც ${}^*R$-ის და R-ის შემთხვევაში გვაქვს უსასრულოდ მცირე, სასრული და უსასრულო ელემენტები, რომლებსაც აღვნიშნავთ $\mathrm{mon}_{\mathrm{Q}}(0)$ და $\mathrm{Gal}_{\mathrm{Q}}(0)$, შესაბამისად. მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ Q R-გან განსხვავებით **არ არის სრული** და, ამრიგად, სტანდარტული ნაწილის აღების ოპერაცია ამ შემთხვევაში R-გან განსხვავდება. როგორც ვნახავთ, ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\mathrm{st} : \mathrm{Gal}_{\mathrm{Q}}(0) \to R$$

ჰომომორფიზმი ისეთი, რომ $s - \mathrm{st}(s) \in \mathrm{mon}_{\mathrm{Q}}(0)$ $s \in \mathrm{Gal}_{\mathrm{Q}}(0)$-თვის, ანუ საბოლოო ჯამში გვაქვს $R \cong \mathrm{Gal}_{\mathrm{Q}}(0) / \mathrm{mon}_{\mathrm{Q}}(0)$ იზომორფიზმი, რაც შესაძლოა ნამდვილი რიცხვების აგების ყველაზე ბუნებრივ მეთოდს წარმოადგენს

3. სუპერსტრუქტურები

3.1. საწყისი ცნებები

ახლა შემოვიტანოთ სუპერსტრუქტურის საჭირო ცნება არასტანდარტული ანალიზის გაძლიერებული ვარიანტისთვის. ამჯერად აღარ შემოვი-

ფარგლებით მხოლოდ R-ის არასტანდარტული გაფართოების შესწავლით. ავიღოთ ნებისმიერი X სიმრვლე (ზოგადად, საინტერესო შემთხვევებში გვექნება $R \subseteq X$, მაგრამ ამას განმარტებისთვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ აქვს). განვსაზღვროთ ინდუქციით

$$\begin{aligned} &V_0(X) = X, \\ &V_{n+1}(X) = V_n(X) \cup P(V_n(X)), \quad n \in N, \end{aligned} \tag{32}$$

სადაც $P(Y)$ ნებისმიერი Y სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთ სიმრავლეს წარმოადგენს, მაშინ **სუპერსტრუქტურას** X**-ზე** ვუწოდებთ თვლად გაერთიანებას

$$V(X) = \bigcup_{n \in N} V_n(X).$$

ცხადია, ნებისმიერი X-სა და Y-თვის თუ გვაქვს $X \subset Y$, ასევე გვაქვს $V(X) \subset V(Y)$. კიდევ გვაქვს

$$\begin{aligned} &X = V_0(X) \subseteq V_1(X) \subseteq \cdots \subseteq V_n(X) \subseteq \cdots \subseteq V(X), \\ &X = V_0(X) \in V_1(X) \in \cdots \in V_n(X) \in \cdots \in V(X), \\ &X = V_0(X), V_1(X), \ldots, V_n(X), \ldots, V(X) \in V(X). \end{aligned}$$

X-ის ელემენტებს ვუწოდებთ **ინდივიდუმებს** და ვთვლით, რომ ისინი **სუპერსტრუქტურის შიგნით** სიმრავლეები არ არიან, ანუ

$$x \in X, \quad y \in V(X) \Rightarrow y \notin x,$$

$V(X)$ ელემენტებს, ზოგადად, **ერთობლიობებს** ვუწოდებთ. ცხადია, ინდივიდუმებიც ერთობლიობების კერძოს შემთხვევას წარმოადგენს. ნე-ბისმიერი $n \in N$-თვის ერთობლიობებს $V_{n+1}(X) / V_n(X)$-ში ვუწოდებთ $n+1$ -რანგის ერთობლიობებს, ხოლო $V_n(X) / V_{n-1}(X)$-ს – n-რანგის ერთობლიო-ბებს.

სუპერსტრუქტურის ცნება ცდილობს ასახოს მათემატიკაში ჩვეულებ-რივი სიტუაცია, როცა X სიმრავლესთან მიმართებაში, მისი სტრუქტურის შესატყვისი მათემატიკური თეორიის აგებისას, ვლაპარაკობთ არა მარტო მის ელმენტებზე, არამედ ქვესიმრავლეებზე, ქვესიმრავლეთა სიმრავლეებ-

ზე და ა. შ. ასეთ შემთხვევაში $V\left(X\right)$ იქნება უმცირესი სიმრავლე, რომელიც X -თან დაკავშირებული მათემტიკური მსჯელობისას შემოტანილ ელემენ-ტებს მოიცავს.

ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებაში შემოვიტანეთ შეზღუდვა $X\cap P\left(X\right)=\varnothing$. შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ ასეთი შეზღუდვა ეწინააღმდე-გება მათემატიკაში, კერძოდ, R ნამდვილი რიცხვებისთვის შექმნილ ზოგი-ერთ სიტუაციას; მაგალითად, როგორც ვიცით, **დედეკინდის კვეთა** არის $A,B\subset Q\subset R$ ქვესიმრავლეთა წყვილი ისეთი, რომ $A\cup B=Q$ და ყო-ველი $a\in A$-თვის, $b\in B$-ტვის გვაქვს $a<b$. ამ კვეთიდან შემდეგ გადავ-დივართ იდენტიფიკაციაზე $x=\left\{A,B\right\}$, $x\in R$, ანუ თითქოს $R\cap P\left(P\left(R\right)\right)\neq\varnothing$, მაგრამ, ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ გვაქვს არა იდენტობა $x=\left\{A,B\right\}$, არამედ ურთიერთცალსახა თანადობა $x\longleftrightarrow\left\{A,B\right\}$ (A, B – dedekind) და, ამრიგად, $x\neq\left\{A,B\right\}$, ანუ თუ სუპერ-სტრუქტურის ნული რანგის სიმრავლე $V_0=R$-ის, მაშინ ზემოხსენებული ნამდვილი რიცხვის იდენტიფიკაცია დედეკინდის კვეთასთან არ გვჭირდე-ბა, რადგან R უკვე გაგვაჩნია, როგორც დსწყისი სტრუქტურა, ხოლო, თუ საწყისი სტრუქტურაა Q, მაშინ ნამდვილ არარაციონალი რიცხვები შეგვიძ-ლია განვიხილოთ როგორც $V\left(Q\right)$ სუპერსტრუქტურის რანგი 2-ის ერთობ-ლიობები და ამ შემთხვევაშიც არანაირი წინააღმდეგობა არ წარმოიშობა. რა თქმა უნდა, ჩვეულებრივ მათემატიკაში არ მოგვეთხოვება თვლადად-უსას-რულო რაოდენობის რანგების სტრქუტურების აგება. ჩვეულებრივ შემთხვე-ვაში საქმე შემოისაზღვრება რამდენიმე საწყისი რანგის სტრუქტურით, მაგ-რამ აქ შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ მიღებული სუპერსტრუქტურის კარდი-ნალობა არც ისე დიდია, როგორც შეიძლება მოველოდეთ. ზოგადად, ცხა-დია, კონსტრუქციიდან არ გამომდინარეობს $V\left(X\right)\in V\left(X\right)$ და თანაც $A\subseteq V\left(X\right)$ არ გამომდინარეობს , რომ $A\in V\left(X\right)$. ავიღოთ $a\in X$, მაშინ

$$A=\left\{a,\{a\},\{\{a\}\},\ldots\right\},$$

გვაქვს $A \subseteq V(X)$, მაგრამ არა $A \in V(X)$, რადგან A-ს ყოველი "მომდევნო" ელემენტი ამ შემთხვევაში ერთით უფრო მაღალი რანგის სტრუქტურას ეკუთვნის და, ამრიგად, არცერთი n-თვის არ გვექნება $A \in V_n(X)$. ამ სიტუ-აციიდან გამომდინარე შეგვიძლიაშემოვიღოთ ე. წ. **შემოსაზღვრული რანგის პირობა**, ანუ ყოველი $A \subseteq V(X)$-თვის

$$A \in V(X) \Leftrightarrow A \subseteq V_n(X) \text{ რაიმე } n \in N\text{-თვის.}$$

რა თქმა უნდა, გვაქვს ამ პირობის შებრუნებული პირობაც, ანუ

$$A \in V(X) \setminus X \Rightarrow A \subseteq V(X).$$

ეს ნიშნავს, რომ სუპერსტრუქტურის ელემენტები ან ინდივიდუმები ან ქვესიმრავლეები არიან. სუპერსტრუქტურაში გვაქვს ასევე ტრანზიტულო-ბაც, ანუ:

$$a \in A \in V(X) \Rightarrow a \in V(X). \tag{33}$$

შემდეგი იმპლიკაციები ასევე ჭეშმარიტია ნებისმიერ სუპერსტრუქტურაში

$$\begin{aligned} &a \in A \subseteq V(X) \Rightarrow a \in V(X), \\ &B \subseteq A \in V(X) \Rightarrow B \in V(X), \\ &B \subseteq A \subseteq V(X) \Rightarrow B \subseteq V(X). \end{aligned}$$

სუპერსტრუქტურის ასეთ განმარტებასთან მიმართებაში შეიძლება წარ-მოიშვას შეკითხვა, არის თუ არა ჩვენს მიერ შემოტანილი ცნება საკმარისად "ფართო" და შეიძლება თუ არა მის ფარგლებში ვილაპარაკოთ ჩვეულებრივ მათემატიკურ ცნებებზე, როგორც ფუნქცია, მიმართება და ა. შ. ამ შეკითხვაზე საპასუხოდ შეგვიძლია მაგალითის სახით შემოვიღოთ კარტე-ზიანული პროდუქტის განმარტება ისეთი სახით, რომ ის სუპერსტრუქტუ-რის ელემენტი აღმოჩნდეს. ავიღოთ ჯერ ორფაქტორიანი კარტეზიანული პროდუქტის შემთხვევა. გავიხსენოთ, რომ დალაგებული წყვილი $\langle x, y\rangle$ შეგ-ვიძლია განვსაზღვროთ

$$\langle x, y\rangle = \{x, \{x, y\}\}.$$

აქედან, განმარტებებიდან თუ გვაქვს $x, y \in V_n(X)$, მაშინ $\langle x, y\rangle \in V_{n+2}(X)$. წყვილის ასეთი განმარტება კორექტულია, რადგან

$$\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x = u \ \& \ \ y = v,$$

მაშინ $A, B \in V_n(X)$ ქვესიმრავლეებისთვის შეგვიძლია შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$A \times B = \left\{\langle x, y\rangle \middle| \ x \in A, \ \ y \in B\right\}$$

სახით და აქედან გვაქვს

$$A \times B \subseteq V_{n+2}(X), \quad A \times B \subseteq V_{n+3}(X),$$

ანუ ეს ნიშნავს, რომ A, B სიმრავლეების კარტეზიანული პროდუქტი $n+3$ რანგის სიმრავლეა.

თუ ახლა გვინდა ორზე მეტი სიმრავლის პროდუქტის განსაზღვრა ჯერ შემოვიღოთ $x_1, \ldots, x_m$ დალაგებული m-ეულის ცნება; კერძოდ,

$$\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \left\{\langle 1, x_1\rangle, \ldots, \langle m, x_m\rangle\right\},$$

სადაც $x_1, \ldots, x_m \in V(X)$, მაშინ ისევ გვაქვს

$$\langle x_1, \ldots, x_m\rangle = \langle y_1, \ldots, y_m\rangle \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m.$$

აქედან m-ცალი სიმრავლის კარტეზიანულ პროდუქტს განვსაზღვრავთ

$$A_1 \times \cdots \times A_m = \left\{\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \middle| \ x_1 \in A_1, \ldots, x_m \in A_m\right\} \in V(X)$$

სახით.

ვხედავთ, რომ კარტეზიანული პროდუქტის განსაზღვრა სუპერსტრუქტურაზე სირთულეს წარმოადგენს. ამასთან, თუ გვაქვს სიმრავლეებისთვის განსაზღვრული კარტეზიანული პროდუქტი, ასევე გვაქვს მიმართებები და ფუნქციები, რომლებიც როგორც ვიცით შეგვიძლია კარტეზიანული პროდუქტის ქვესიმრავლეებად ჩავთვალოთ. ბინარული მიმართების შემთხვევაში გვაქვს $P \subseteq A_1 \times A_2$, მაშინ

$$\mathrm{Dom}(P) = \left\{a_1 \in A_1 \middle| \ \ \langle a_1, a_2\rangle \in P\right\} \text{ რაიმე } \ a_2 \in A_2\text{-თვის},$$

$$\mathrm{Range}(P) = \left\{a_2 \in A_2 \middle| \ \ \langle a_1, a_2\rangle \in P\right\} \text{ რაიმე } \ a_1 \in A_1\text{-თვის}$$

და B_1, B_2 $(B_1 \subseteq A_1,\ B_2 \subseteq A_2)$ სიმრავლეებისთვის განვსაზღვრავთ

$$P[B_1]=\{b_2\in A_2|\ \ \langle b_1,b_2\rangle\in P\ \text{რაიმე}\ b_1\in A_1\},$$
$$P^{-1}[B_2]=\{b_1\in A_1|\ \ \langle b_1,b_2\rangle\in P\ \text{რაიმე}\ b_2\in A_2\}.$$

ვხედავთ, რომ, თუ $A_1,A_2\in V_n(X)$ არის n-რანგის სიმრავლეებია, მაშინ $P\subseteq A_1\times A_2$ შემთხვევაში $\mathrm{Dom}(P)\in V_{n+1}(X)$ რანგისაა. იგივე შეიძლება ითქვას Rang, $P[B_1]$, $P[B_2]$ სიმრავლეებზეც.

ფუნქციები, როგორც ვიცით, მიმართების კერძოს შემთხვევას წარმოადგენენ და, ამრიგად, მათი შემოტანა სუპერსტრუქტურაში მიმართების შემოტანისგან არ განსხვავდება. მაგალითისთვის შეგვიძლია შემოვიტანოთ X სიმრავლის ელემენტების $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა. განვსაზღვროთ ის როგორც $N\times X$ პროდუქტის ქვესიმრავლე. აქ ვთვლით, რომ საწყისი X სიმრავლე შეიცავს N-ს, როგორც თავის ქვესიმრავლეს კარტეზიანული პროდუქტის შემოტანილი განმარტებიდან ვიღებთ, რომ $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა არის $V(X)$ სუპერსტრუქტურის ელემნტი 3 რანგით.

შენიშვნა. ვიცით, რომ, ზოგადად, კარტეზიანული ნამრავლი შეიძლება ასევე განისაზღვროს ფუნქციების გამოყენებით (ამ შემთხვევაში საწყისად ვიღებთ ფუნქციის ცნებას), მაშინ გვაქვს

$$\prod_{i\in I}A_i=\left\{f:I\to\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\middle|\ \ f(i)\in A_i,\ \ i\in I\right\}\subseteq I\times\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right). \qquad (34)$$

თუ ახლა ჩავთვლით, რომ არსებობს $n\in N$ ისეთი, რომ ყოველი $i\in I$-თვის $A_i\subseteq V_n(X)$-ში, მაშინ, თუ ამასთან ერთად $I\subseteq V_n(X)$, გვექნება

$$\prod_{i\in I}A_i\subseteq V_{n+2}(X),\ \ \prod_{i\in I}A_i\subseteq V_{n+3}(X). \qquad (35)$$

რაც ნიშნავს, რომ ასეთ პროდუქტს $n+3$-რანგი ექნება. სირთულეს არ წარმოადგენს სუპერსტრუქტურებთან დაკავშირებული შემდეგი დებულებების დამტკიცებაც:

1. $V_{n+1}(X)=X\cup P(V_n(X))$;
2. $a_1,\dots,a_m\in V_n(X)\Rightarrow\{a_1,\dots,a_m\}\subset V_{m+1}(X)$;
3. $A_1,\dots,A_m\in V_n(X)\setminus X\Rightarrow A_1\cup\dots\cup A_m\in V_n(X)$;

4. $A \subseteq B \in V_n(X) \Rightarrow A \in V_{n+1}(X)$;

5. $A \in V_n(X) \setminus X \Rightarrow P(A) \in V_{n+2}(X)$;

6. $a \in A \in V_{n+1}(X) \Rightarrow a \in V_n(X)$;

7. $A \in V_{n+1}(X), \quad A \cap X = \varnothing \Rightarrow \bigcup_{B \in A} B \in V_n(X)$

და ბოლოს, თუ $A_i \in V_n(X) \setminus X$ და $i \in I$, მაშინ

8. $\bigcup_{i \in I} A_i \in V_n(X)$.

ახლა შემოვიღოთ სუპერსტრუქტრის შესაბამისი L_X ენა.

L_X სუპერსტრუქტრის აღმწერი ენა შედგება შემდეგი კატეგორიის სიმბოლოებისგან:

1. ლოგიკური კავშირების სიმბოლოები $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ როგორც ჩვეულებრივ გამოხატავენ “არა”, “და”, “ან”, “გამომდინარეობს”, “მაშინ და მხოლოდ მაშინ”;
2. კვანტორების სიმბოლოებს $\forall$, $\exists$ “ყველასთვის” და “არსებობს”;
3. ფრჩხილებს $[\ \ ]$, $(\ \ )$, $\langle\ \ \rangle$;
4. თვლად რაოდენობა ცვლად სიმბოლოებს $x, y, \ldots$;
5. ტოლობის სიმბოლო “$=$”“უდრის”;
6. პრედიკატურ სიმბოლოს $\in$ – “მიკუთვნება”;
7. კონსტანტების სიმბოლოებს $\underline{a}$ ყოველი $a \in V(X)$-თვის.

L_X ენის ფორმულები განისაზღვრება ინდუქციით შემდეგნაირად:

1. $x \in y$;

$x = y$;

$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in Y$;

$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = y$;

$\langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x \rangle \in Y$;

$\langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x \rangle = y$

ატომური ფორმულებია. აქ $x_1,\ldots,x_n$, x, y ცვლადი ან კონსტანტა სიმბოლოებია.

2. თუ Φ, Ψ ფორმულებია L_X-ში, მაშინ $\neg\Phi$, $\Phi\wedge\Psi$, $\Phi\vee\Psi$, $\Phi\to\Psi$, $\Phi\leftrightarrow\Psi$ ასევე ფორმულებია.
3. თუ Φ ფორმულაა L_X-ში და x ისეთი ცვლადია, რომ Φ არ შეიცავს $(\forall x\in z)\Psi$ ან $(\exists\, x\in z)\Psi$ ტიპის ფორმულებს არცერთი Ψ-თვის Φ-ში, მაშინ

$$(\forall x\in y)\Phi \text{ და } (\exists\, x\in y)\Phi$$

ასევე ფორმულებია L_X-ში.

და ბოლოს, განვსაზღვროთ L_X ენის გამონათქვამები. იმისათვის, რომ ჩამოვაყალიბოთ გფამონათქვამის განსაზღვრება, დაგვჭირდება რამდენიმე დამატებითი განსაზღვრება.

ვიტყვით, რომ X ცვლადი კვანტორის მოქმედების ქვეშ არის მოქცეული, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ x მხოლოდ $(\forall x\in y)\Psi$ ან $(\exists\, x\in y)\Psi$ ტიპის ფორმულების გავლით შედის Φ-ში. რა თქმა უნდა, შესაძლებელია, რომ x ცვლადი ფორმულის ერთ ნაწილში იყოს კვანტორის მოქმედების ქვეშ, ხოლო მეორეში არ იყოს. ასე, მაგალითად,

$$\Phi=\left[(\forall x\in y)(x>1)\right]\wedge x\in z$$

ფორმულაში x ცვლადი ფორმულის პირველ ნაწილში მოქცეულია კვანტორის მოქმედების ქვეშ, ხოლო მეორეში – არა. ამ შემთხვევაში (თუ ცვლადი კვანტორის მოქმედების ქვეშ არ არის მოქცეული) ვიტყვით, რომ ცვლადი თავისუფალია ფორმულაში ან ფორმულის ნაწილში.

გამონათქვამს ვუწოდებთ ისეთ ფორმულას, რომელიც არ შეიცავს თავისუფალ ცვლადებს არც ერთ თავის ნაწილში. აქ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ადრე შემოტანილი “მარტივი ენის” განსაზღვრებიდან განსხვავებით, ატომური ფორმულები ამ განსაზღვრების მიხედვით არ წარმოადგენს გამონათქვამებს, მეორეს მხრივ, გამონათქვამების ნებისმიერი კომბინაცია,

რომელიც მხოლოდ ლოგიკური კავშირების მეშვეობითიგება, ტრივიალურად ისევ გამონათქვამს წარმოადგენს.

აქვე შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ არათავისუფალი ანუ “ზმული” ცვლადი ფორმულაში შეიძლება შეიცვალოს სხვა ცვლადით ისე, რომ ფორმულის აზრი ამის გამო არ შეიცვალოს, ოღონდ ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიჩინოთ სიფრთხილე ისე, რომ “ახალი” ცვლადი არ დაემთხვეს არცერთ “ძველ” ზმულ ცვლადს ფორმულაში. მაგალითად, მარტივ ფორმულაში

$$\left[(\exists\, x \in a)(x = b)\right] \wedge (x = c).$$

შეგვიძლია ზმული x ცვლადი შევცვალოთ y ცვლადით და მიღებული ფორმულა იქნება

$$\left[(\exists\, y \in a)(y = b)\right] \wedge (x = c),$$

რომელიც წინა ფორმულისგან არსებითად არ განსხვავდება.

შენიშვნა.

1. L_X -ის ასე შემოტანილ განსაზღვრებაში ვთვლით, რომ $V(X)$ სუპერსტრუქტურის **ყოველი** ობიექტისთვის არსებობს შესაბამისი კონსტანტა, რაც ნიშნავს რომ კონსტანტების რაოდენობა ენაში უსასრულოა და თანაც არათვლადი, არსებითი მნიშვნელობა ამ ფაქტს მსჯელობებში არ აქვს.
2. ადრე განმარტებულ მარტივ ენასთან შედარებით L_X უფრო რთული კონსტრუქციაა, მაგრამ ზოგიერთი მომენტი პირიქით, უფრო გამარტივებულია. მაგალითად, აღარ შემოგვაქვს თერმები და ა. შ. ამის გამო ზოგიერთი დებულების ჩანაწერი L_X ენაში შეიძლება უფრო გართულებულად გამოიყურებოდეს, ვიდრე შესაბამისი ჩანაწერი მარტივ ენაში.

შემდგომში ხშირად გამოვტოვებთ $\underline{a}$ ჩანაწერში კონსტანტებისთვის ქვედა ხაზს და დავწერთ უბრალოდ a -ს. ახლა გადავიდეთ L_X ენის ინტერპრეტაციის განმარტებაზე, $V(X)$ სუპერსტრუქტურაში. დავიწყოთ იმით, რომ

ყოველი კონსტანტა სიმბოლო, რომელიც შეესაბამება ობიექტ $a \in V(X)$ სუ-პერპროდუქტიდან ინტერპრეტირდება ამ ობიექტის მეშვეობით.

ატომური ფორმულები, რომლებიც მხოლოდ კონსტანტებს შეიცავენ, ეძ-ლევათ ჭეშმარიტი/მცდარი ინტერპრეტაცია იმის მიხედვით, თუ რა მიმარ-თება არსებობს მისი კონსტანტების შესაბამის ობიექტებს შორის. კერძოდ, $a \in b$, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in b$, $\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, c \rangle \in b$ ატომურ ფორმულებზე ვიტყვით, რომ ისინი ჭეშმარიტი არიან, თუ ადგილი აქვს მიკუთვნების მი-მართებას შესაბამის ობიექტებს შორის და მცდარი საპირისპირო შემთხვევა-ში.

$a = b$, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = b$, $\langle \langle a_1, \ldots, a_n \rangle, c \rangle = b$ ფორმულებზე ვიტყვით, რომ ისინი ჭეშმარიტია, თუ ადგილი აქვს იგივობას შესაბამისი ობიექტურობის-თვის და მცდარია საპირისპირო შემთხვევაში.

შედგენილი გამონათქვამებისთვის, თუ Φ და Ψ გამონათქვამებია L_X-ში ვიტყვით, რომ $V(X)$-ში მათი ინტერპრეტაციისას

$\neg\Phi$ ჭეშმარიტია $\Leftrightarrow$ Φ მცდარია,

$\Phi \wedge \Psi$ ჭეშმარიტია $\Leftrightarrow$ Φ ჭეშმარიტია და Ψ ჭეშმარიტია,

$\Phi \vee \Psi$ ჭეშმარიტია $\Leftrightarrow$ ერთი მაინც Φ-დან და Ψ-დან ჭეშმარიტია,

$\Phi \to \Psi$ ჭეშმარიტია, თუ არ გვაქვს Φ ჭეშმარიტი და Ψ მცდარი.

$\Phi \leftrightarrow \Psi$ ჭეშმარიტია, თუ ან ორივე Φ, Ψ ჭეშმარიტია ან ორივე მცდარია.

ახლა ავიღოთ $\Phi(X)$ ფორმულა, რომელიც ერთადერთ თავისუფალ x ცვლადს შეიცავს, მაშინ $(\forall x \in b)\Phi(x)$ ფორმულა ჭეშმარიტია. თუ b-ს ყოვე-ლი ელემენტის შესაბამისი კონსტანტა $a \in b$-თვის გვაქვს $\Phi(a)$ ჭეშმარი-ტია. ფორმულა $(\exists x \in b)\Phi(x)$ ჭეშმარიტია, თუ არსებობს ისეთი კონსტანტა a თავისი შებამისი ობიექტით b-დან, $a \in b$, ისეთი, რომ $\Phi(a)$ ჭეშმარიტია.

მიღებული განმარტების მეშვეობით გვინდა ჩამოვაყალიბოთ გადატანის ცნება სუპერსტრუქტურებისთვის. ამ შემთხვევაში, თუ X სიმრავლესთან

ასოცირებული მისი შესაბამისი არასტანდარტული გაფართოება X^*, მაშინ $V(X)$ სუპერსტრუქტურასთანაც ასოცირებულია $V({}^*X)$ სუპერსტრუქტურა და გვაქვს ${}^*(\ ): V(X) \to V({}^*X)$ თანადობა, რომელსაც მონომორფიზმს ვუწოდებთ (რადგან ${}^*(\ )$ მოქმედებს როგორც ჩადგმა – მონომორფიზმი კატეგორიათა თეორიის ტერმინი, რომელიც Set-კატეგორიაზე ინექციურ ფუნქციას შეესაბამება).

საბოლოო ჯამში ვიღებთ თანადობების შემდეგ დიაგრამას:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\subseteq"'] & {}^*X \arrow[d, "\subseteq"] \\ V(X) \arrow[r, "{}^*(\,)"'] & V({}^*X) \end{tikzcd}$$

ამ დიაგრამასთან დაკავშირებით, უნდა აღინიშნოს, რომ $X \subseteq {}^*X$ ბუნებრივად იძლევა $V(X) \subseteq V({}^*X)$ სუპერსტრუქტურების ჩადგმას, მაგრამ ${}^*(\ )$ თანადობა ამ ჩადგმისგან განსხვავდება. მაგალითად, ვნახეთ, რომ R-ისა და ${}^*R$-ის შემთხვევაში

$$R \supseteq A \longrightarrow {}^*A \subseteq {}^*R\,.$$

${}^*A$ დაემთხვევა A-ს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა A სასრული სიმრავლეა და თანაც არასტანდარტული ანალიზისთვის არ არის საინტერესო თანადობა, რომელიც შემდეგი დიაგრამით მოიცემა

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & {}^*X \arrow[d] \\ V(X) \arrow[r] & {}^*V(X) \end{tikzcd}$$

რადგან ${}^*V(X)$ არანაირად არ ემთხვევა $V({}^*X)$ და მხოლოდ უკანასკნელის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს ($V(X) \not\in V(X)$, ამიტომ ${}^*V(X) \not\in V({}^*X)$, ანუ არ არის არასტანდარტული ერთობლიობა).

ახლა განვსაზღვროთ მონომორფიზმი ორი $V(X)$ და $V(Y)$ სუპერსტრუქტურისთვის. აქ X და Y სიმრავლეები ავიღოთ ისე, რომ $X \cap Y \supseteq R$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა.

ინექციურ თანადობას $V(X) \xrightarrow{{}^*()} V(Y)$ ეწოდება მონომორფიზმი, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1. ${}^*\varnothing = \varnothing$;
2. $a \in X,\quad n \in N \;\Rightarrow\; {}^*a \in Y,\quad {}^*n = n$;
3. $n \in N$ -თვის გვაქვს

$$a \in V_{n+1}(X) \setminus V_n(X) \;\Rightarrow\; {}^*a \in V_{n+1}(Y) \setminus V_n(Y); \tag{36}$$

4. ყოველი $n \in N$ -თვის გვაქვს

$$b \in a \in {}^*V_{n+1}(X) \;\Rightarrow\; b \in {}^*V_n(X). \tag{37}$$

შესაბამისი L_X და L_Y ენებისთვის გვაქვს გადატანის პირობა:

Φ ჭეშმარიტია L_X ინტერპრეტაციაში $\Leftrightarrow$ ${}^*\Phi$ ჭეშმარიტია L_Y ინტერპრეტაციაში.

აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ გადატანის მოთხოვნა ძალიან ძლიერი მოთხოვნაა სუპერსტრუქტურებისთვის, თუ ასეთ გადატანას ადგილი აქვს ორ სუპერსტრუქტურას შორის, მაშინ აქედან ადვილად მიიღება ბევრი მნიშვნელოვანი შედეგი. კერძოდ, ნებისმიერი მონომორფიზმისთვის გვექნება შემდეგი შედეგები:

ავიღოთ $a_1, \dots, a_n \in V(X)$, მაშინ გვაქვს

1. ${}^*\{a_1, \dots, a_n\} = \{{}^*a_1, \dots, {}^*a_n\}$;
2. ${}^*\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle {}^*a_1, \dots, {}^*a_n \rangle$;
3. ${}^*\left(\bigcup_{1 \le i \le n} a_i \right) = \bigcup_{1 \le i \le n} {}^*a_i$, ${}^*\left(\bigcap_{1 \le i \le n} a_i \right) = \bigcap_{1 \le i \le n} {}^*a_i$;
4. ${}^*(a_1 \times \dots \times a_n) = {}^*a_1 \times \dots \times {}^*a_n$;
5. $a \in b \Leftrightarrow {}^*a \in {}^*b$;
6. $a = b \Leftrightarrow {}^*a = {}^*b$;

7. $a \subseteq b \Leftrightarrow {}^*a \subseteq {}^*b$;

8. თუ გვაქვს $P(a_1,\dots,a_n)$, მაშინ გვაქვს ${}^*P({}^*a_1,\dots,{}^*a_n)$;

9. ${}^*\mathrm{Dom}(P) = \mathrm{Dom}({}^*P)$; ${}^*\mathrm{Range}(P) = \mathrm{Range}({}^*P)$;

10. თუ გვაქვს $f : a \to b$, მაშინ გვაქვს ${}^*f : {}^*a \to {}^*b$ და ${}^*(f(c)) = {}^*f({}^*c)$, $c \in a$-თვის.

11. f ბიექციაა $\Leftrightarrow$ ${}^*f$ ბიექციაა;

12. ${}^*P(a) \subseteq P({}^*a)$.

დამტკიცება.

1. აღვნიშნოთ $b = \{a_1,\dots,a_n\}$, მაშინ, ცხადია, $b \in V(X)$. გამოვიყენოთ გადატანა შემდეგი გამონათქვამებისთვის $\forall(x \in b)\ [x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n]$, $a_1 \in b,\dots,a_n \in b$. ამ გამონათქვამებზე გადატანის გამოყენება გვაძლევს გამონათქვამებს

$$(\forall x \in {}^*b)\ [x = {}^*a_1 \vee \dots \vee x = {}^*a_n],\ {}^*a_1 \in {}^*b,\dots,{}^*a_n \in {}^*b,$$

რაც ამტკიცებს პირველ პირობას.

მეორედან მეშვიდე პირობის ჩათვლით მსგავსი მსჯელობებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ. მერვე პირობა გამომდინარეობს მეშვიდედან. მეცხრე პირობის დასამტკიცებლად ავიღოთ გამონათქვამი

$$(\forall x \in a)\ [(x \in \mathrm{dom}\, P) \longleftrightarrow (\exists\, y \in b)[P\langle x, y\rangle]].$$

ეს გამონათქვამი $V(X)$-ში განსაზღვრავს $\mathrm{dom}\, P$-ს, გადატანის შემდეგ მივიღებთ

$$(\forall x \in {}^*a)\ [(x \in {}^*\mathrm{dom}\, P) \longleftrightarrow (\exists\, y \in {}^*b)[{}^*P\langle x, y\rangle]],$$

რაც გვაძლევს ${}^*\mathrm{dom}\, P = \mathrm{dom}\, {}^*P$. იგივე მსჯელობა გამოიყენება $\mathrm{Range}\, P$-ს შემთხვევაშიც.

მეათე პირობისთვის ${}^*f : {}^*a \to {}^*b$ გამომდინარეობს მერვედან. რადგან ფუნქცია მიმართების კერძოს შემთხვევად შეგვიძლია ჩავთვალოთ ერთა-

დერთი რაც ამ შემთხვევაში უნდა ვაჩვენოთ, არის ${}^{*}f$ -ის ფუნქციობა, მივი-ღებთ

$$(\forall x \in a)(\forall y \in b)(\forall z \in b) \ \left[f\langle x, y\rangle \wedge f\langle x, z\rangle \longrightarrow (y = z)\right] \qquad (38)$$

გამონათქვამის გადატანით. ეს გამონათქვამი ამტკიცებს, რომ f ფუნქციაა, გადატანის შემდეგ მივიღებთ

$$\left(\forall x \in {}^{*}a\right)\left(\forall y \in {}^{*}b\right)\left(\forall z \in {}^{*}b\right) \ \left[{}^{*}f\langle x, y\rangle \wedge {}^{*}f\langle x, z\rangle \longrightarrow (y = z)\right], \qquad (39)$$

რაც ${}^{*}f$ ფუნქციობას ნიშნავს. ზოგადად, თუ $c \in a$ და $f(c) = d \in b$, მაშინ გვაქვს გამონათქვამი $f(c) = d$, გადატანით ${}^{*}f\left({}^{*}c\right) = {}^{*}d$, რაც ნიშნავს, რომ

$${}^{*}\left(f(c)\right) = {}^{*}d = {}^{*}f\left({}^{*}c\right).$$

11. დავამტკიცოთ ჯერ $\Rightarrow$ იმპლიკაცია. გამონათქვამი

$$(\forall x \in a)(\forall y \in a) \ \left[\left(f(x) = f(y)\right) \longrightarrow (x = y)\right]$$

ჭეშმარიტია, რადგან f იმპლიკაციაა. გადატანით ვიღებთ

$$\left(\forall x \in {}^{*}a\right)\left(\forall y \in {}^{*}a\right) \ \left[\left({}^{*}f(x) = {}^{*}f(y)\right) \longrightarrow (x = y)\right]$$

რაც ${}^{*}f$ -ის იმპლიკაციის თვისებას ნიშნავს. ანალოგიურად, სურექციულო-ბისთვის გვაქვს

$$(\forall y \in b)(\forall x \in a) \ \left[f(x) = y\right]$$

და გადატანით ვიღებთ

$$\left(\forall y \in {}^{*}b\right)\left(\forall x \in a^{*}\right) \ \left[{}^{*}f(x) = y\right].$$

${}^{*}f$ სურექციულია და, ამრიგად (რადგან ინექციურობა უკვე დავამტკიცეთ) ბიექციაა. ანალოგიური მსჯლეობებით და იმის გამოყენებით, რომ ჩვენს მიერ განმარტებული გადატანა ექვივალენტობაა “$\Leftarrow$” იმპლიკაციასთაც მი-ვიღებთ.

12. გამონათქვამი

$$\left(\forall b \in P(a)\right) \ [b \subseteq a]$$

ტრივიალურად ჭეშმარიტია, გადატანით ვიღებთ

$$\left(\forall b \in {}^*P(a)\right)\ \left[b \subseteq {}^*a\right]$$

ჭეშმარიტ გამონათქვამს.

შემოვიტანოთ კიდევ ერთი აღნიშვნა, ყოველი $A \in V(X) \setminus X$ -თვის

$${}^*A_{\infty} = {}^*A \setminus A$$

${}^*A_{\infty}$ -ზე შეგვიძლია ვიფიქროთ, როგორც A-ს **არასტანდარტულ ნაზრდზე**. ზოგადად, გვაქვს $A \subseteq {}^*A$, რადგან საწყისი სუპერსტრუქტურა ჩადგმულია არასტანდარტულ სუპერსტრუქტურაში.

3.2. ულტრახარისხები

ულტრახარისხების აგება

ახლა ვნახოთ როგორ მიიღება R-დან ${}^*R$-ზე გადასვლა, როგორც მონომორფიზმის კერძო შემთხვევა, განვმარტეთ $\hat{R} = (R, P, F)$ და ${}^*\hat{R} = (R, P, F)$ "მარტივი სისტემები". ამ შემთხვევაში გვაქვს $X = R$, ${}^*X = {}^*R$ და ასევე ${}^*(\ \ ) : R \to {}^*R$, რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ${}^*(\ \ ) : X \to {}^*X$, ანუ "გადატანის" შეზღუდვა X სიმრავლეზე. $\hat{R}$-ზე განსაზღვრული h ადგილიანი P მიმართებისთვის გვაქვს $P \subseteq R^n$-ში, აქედან $P \subseteq X^n$ და, ამრიგად, სუპერსტრუქტურებზე განმარტებული სიმრავლეების "გადატანა" გამოდგება P-ს გადატანისთვისაც. ასევე შეგვიძლია ვიმსჯელოთ, თუ $f \in F$ ფუნქციასთან გვაქვს საქმე.

შევეცადოთ დავაზუსტოთ ჩვენს მიერ შემოტანილი სტრუქტურული გადატანა ულტრაფილტრების გამოყენებით.

ავიღოთ ნებისმიერი $R \subseteq X$ -ში და ინდექსთა უსასრულო I სიმრავლე (მარტივი კონსტრუქციების შემთხვევებში შეგვიძია ჩავთვალოთ, რომ I ემთხვევა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, $I = N$) განვსაზღვროთ თანადობა

$$V(X) \in S \mapsto \Pi S = S^I = \{a \mid a : I \to S\}.$$

თუ, კერძოდ, S ინდივიდუმია სუპერსტრუქტურად, ანუ $S \in X$, მაშინ S^I ემთხვევა მუდმივ $i \in I \to S$ ფუნქციას, რომელიც მოცემულ ინდივიდუმს იღებს, როგორც თავის ერთადერთ მნიშვნელობას. დავაფიქსიროთ I სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეზე თავისუფალი U ულტრაფილტრი, მაშინ ულტრაფილტრების მეშვეობით შეგვიძლია განვმარტოთ $\approx_{\mathsf{U}}$ ექვივალენტობა S^I ტიპის ელემენტებზე

$$a \approx_{\mathsf{U}} b \Leftrightarrow \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathsf{U}.$$

აქედან ვიღებთ $S^I = \Pi S$ სიმრავლის გაფაქტორებას ვწერთ

$$\Pi_{\mathsf{U}} S = \Pi S / \approx_{\mathsf{U}} .$$

ამ სიმრავლეს S -ის **ულტრახარისხს** ვუწოდებთ. ყოველი $A \in \Pi S$ -თვის დავწერთ $[a]$ ულტრახარისხის შესაბამისი კლასისთვის, ანუ გვაქვს თანადობა

$$a \in \Pi S \mapsto [a] \in \Pi_{\mathsf{U}} S.$$

${}^*X$, რომელიც წარმოადგენს X -ის არასტანდარტულ გაფართოებას, მოიცემა, როგორც

$${}^*X = \Pi_{\mathsf{U}} S.$$

გასაგებია, რომ ასეთი კონსტრუქცია ადრე აგებული R და ${}^*R$-ის განზოგადებას წარმოადგენს. გავიხსენოთ, რომ $V_0(X) = X$ და შემოვიტანოთ კიდევ ერთი აღნიშვნა $V_{-1}(X) = \varnothing$, მაშინ გვაქვს

$$\Pi^0_{\mathsf{U}} V(X) = \bigcup_{n \in N} \Pi_{\mathsf{U}} \left(V_n(X) \setminus V_{n-1}(X) \right) \qquad (40)$$

შემოსაზღვრული ულტრახარისხი სუპერსტრუქტურებისთვის.

შევნიშნოთ, რომ $\Pi^0_{\mathsf{U}} V(X)$ სიმრავლის ყოველი $[a]$ ელემენტისთვის გვაქვს $n \in N$ ისეთი, რომ $a(i) \in V_n(X) \setminus V_{n-1}(X)$ ყოველი $i \in I$ -თვის.

ახლა განვსაზღვროთ თანადობა

$$e : V(X) \to \Pi^0_{\mathsf{U}} V(X)$$

ნებისმიერი $a \in V(X)$-თვის ვიღებთ $e(a)=[\hat{a}]$, სადაც $\hat{a}: I \to V(X)$. რაც ნიშნავს, რომ, თუ $a \in V_n(X) \setminus V_{n-1}(X)$ გარკვეული $n \in N$-თვის, მაშინ $e(a) \in \Pi_{\mathrm{U}}(V_n(X) \setminus V_{n-1}(X))$. გასაგებია, რომ e-ს ჩვენს მიერ შემოტანილი ჩადგმის ტიპის თანადობების ბუნებრივი განზოგადებაა. e-თან ერთად უნ-და შემოვიტანოთ ასევე **მოსტოვსკის თანადობა**. ის განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$M:\Pi_{\mathrm{U}}^{0} V(X) \to V\left({}^{*}X\right)$$

თანადობა განვსაზღვროთ ინდუქციური მეთოდით. ჯერ შევნიშნოთ, რომ

$$\Pi_{\mathrm{U}}^{0}\left(V_0(X) \setminus V_{-1}(X)\right)=\Pi_{\mathrm{U}} X={}^{*}X .$$

განვსაზღვროთ M მოსტოვსკის თანადობა ${}^{*}X$-ზე, როგორც იდენტობა

$$[a] \in {}^{*}X \longrightarrow M([a])=[a] \in {}^{*}X$$

(აქ, რა თქმა უნდა, $[a] \in {}^{*}X$ ნიშნავს, რომ $a: I \to X$ და $[a]=\{b: I \to X \mid b \approx_{\mathrm{U}} a\}$).შემდეგ, ზოგადი a-თვის, ანუ იმ შემთხვევაში, თუ $[a] \in \Pi_{\mathrm{U}}(V_{n+1}(X) \setminus V_n(X))$ რომელიმე $n \in N$-თვის, განვსაზღვრავთ

$$M([a])=\left\{M([b]) \mid [b] \in_{\mathrm{U}} [a];\ [b] \in \Pi_{\mathrm{U}}\left(V_m(X) \setminus V_{m-1}(X)\right),\ 0 \leq m<n\right\}.$$

აქ $[a],[b] \in \Pi_{\mathrm{U}}^{0} V(X)$ სუპერსტრუქტურის ელემენტებისთვის $[b] \in_{\mathrm{U}} [a]$ გვესმის იმ აზრით, რომ $\{i \in I \mid b(i) \in a(i)\} \in \mathrm{U}$.

მოსტოვსკის თანადობა, რა თქმა უნდა, განსაზღვრულია იმ კერძო შემთხვევაშიც, როცა $I=N$, $X=R$. ამ შემთხვევაში ${}^{*}R=\Pi_{\mathrm{U}} R=\Pi_{\mathrm{U}} X=\Pi_{\mathrm{U}}\left(V_0(X) \setminus V_{-1}(X)\right)$-ზე M მოსტოვსკის თანადობა ჩვეულებრივი იდენტობაა. ავიღოთ

$$[a] \in \Pi_{\mathrm{U}}\left(V_1(X) \setminus V_0(X)\right)=\Pi_{\mathrm{U}} P(X)=\Pi_{\mathrm{U}}(P(R)).$$

ეს ნიშნავს, რომ $a: I \to P(R)$ და $a(i)=A_i \subseteq R$ ყოველი $i \in I$-თვის, $M([a])$-თვის მივიღებთ

$$M([a]) = \{M([b]) \mid [b] \in_{\cup} [a],\ [b] \in \Pi_{\cup} X = {}^*R\} =$$
$$= \{[b] \in {}^*R \mid \{i \in I \mid b(i) \in A_i\} \in \cup\}.$$

თუ ამ შემთხვევაში, კერძოდ, ავიღებთ ისეთ $[a] \in \Pi_{\cup} P(R)$, $a(i) \in A$, ფიქსირებულ სიმრავლეს, მაშინ გვექნება $[a] = e(A) = [\hat{A}]$ და M თანადობისთვის გვექნება

$$M(e(A)) = \{[b] \in {}^*R \mid \{i \in I \mid b(i) \in A\} \in \cup\} = {}^*A. \tag{41}$$

ამ შემთხვევაში ვხედავთ, რომ თუმცა $e(A) = [\hat{A}] \neq {}^*A$, მაინც, საბოლოოდ, e და M თანადობების კომპოზიციით გვაქვს

$$M(e(A)) = {}^*A \subseteq {}^*R,$$

რაც მოსტოვსკის თანადობის გამოყენების შედეგია.

არ არის რთული იმის დამტკიცება, რომ მოსტოვსკის თანადობისთვის ჭეშმარიტია შემდეგი დებულება.

დებულება. მოცემულ X, e და M თანადობებისთვის გვაქვს:

1. e და M თანადობების ინექციურობის თვისება;
2. e თანადობას $V_{n+1}(X) \setminus V_n(X)$-ის ელემენტი $\Pi_{\cup}(V_{n+1}(X) \setminus V_n(X))$-ის ელემენტში გადაჰყავს, ხოლო M თანადობას $\Pi_{\cup}(V_{n+1}(X) \setminus V_n(X))$-ის ელემენტი $V_{n+1}({}^*X) \setminus V_n({}^*X)$-ის ელემენტში;
3. ნებისმიერი $a, b \in V(X)$-თვის გვაქვს
$$a \in b \Leftrightarrow e(a) \in_{\cup} e(b)$$
და ნებისმიერი $[a], [b] \in \Pi_{\cup}^0 V(X)$-თვის გვაქვს
$$[a] \in_{\cup} [b] \Leftrightarrow M([a]) \in M([b]);$$
4. $e(X) = [\hat{X}]$, $M([\hat{X}]) = M(e(X)) = {}^*X$;

5. ავიღოთ $[a],[b]\in\Pi_{\mathsf{U}}^{0}V(X)$ და განვსაზღვროთ $c:I\to V(X)$, $c_i=\{a_i,b_i\}$, როცა $i\in I$, მაშინ $[c]\in\Pi_{\mathsf{U}}^{0}V(X)$ და

$$M([c])=\{M([a]),M([b])\}.$$

6. თუ $a\in V_n(X)\setminus V_{n-1}(X)$ რაიმე $n\in N$-თვის და $[b]\in{}_{\mathsf{U}}e(a)$, მაშინ $[b]\in{}_{\mathsf{U}}e(V_{n-1}(X))$.

დამტკიცებისთვის იხ. [15].

დასასრულს, e და M თანადობების გამოყენებით, შეგვიძლია განვსაზღვროთ $(*)$ თანადობა სუპერსტრუქტურებს შორის. ეს თანადობა შეგვიძლია შემოვიტანოთ, როგორც e და M თანადობების კომპოზიცია, ანუ

$$(*)=M^{0}e:V(X)\xrightarrow{e}\Pi_{\mathsf{U}}^{0}\xrightarrow{M}V(^{*}X). \qquad (42)$$

იმის დამტკიცება, რომ მიღებული თანადობა მართლაც მონომორფიზმია ხდება გადატანის თვისებების გამოყენებით. კერძოდ, გადატანის განზოგადებული თეორემის, ე. წ. ლოსის თეორემის გამოყენებით.

თეორემა (ლოსი, 1954). თუ L_X-ში მოცემულია $\psi(x_1,\ldots,x_n)$, სადაც $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ამ ფორმულის თავისუფალ ცვლადთა სიმრავლეა, მაშინ ყოველი $[a]_1,\ldots,[a]_n\in\Pi_{\mathsf{U}}^{0}V(X)$-თვის გვაქვს

$$^{*}\psi(M([a_1]),\ldots,M([a_n]))\ \text{ჭეშმარიტია}\ L_{^{*}X}\text{ - ში}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{i\in I|\ \ \psi(a_1(i),\ldots,a_n(i))\ \text{ჭეშმარიტია}\ L_X\text{ - ში}\}\in\mathsf{U}.$$

დამტკიცება იხ. [4].

$(*)$ მონომორფიზმით და ლოსის თეორემით ვასრულებთ არასტანდარტული გადატანის განზოგადებას სუპერსტრუქტურებისთვის.

გაფართოებები

ლოსის თეორემა იძლევა არასტანდარტული ანალიზისთვის გადამწყვეტი გადატანის მექანიზმს. გასაგებია, რომ არასტანდარტული სტრუქტურების არატრივიალურობისთვის გადამწყვეტია ${}^*X$ გაფართოების საკუთრივობა, ანუ $X \subseteq {}^*X$, $X \neq {}^*X$. ეს, ზოგადად, შესაძლებელია ნებისმიერ X უსასრულო შემთხვევაში. ვნახეთ, რომ R-ის შემთხვევაში მართლაც გვქონდა $R \subseteq {}^*R$, $R \neq {}^*R$. ამ შემთხვევაში I ინდექსების სიმრავლე იყოს N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, $I = N$. გავიხსენოთ, რომ R-ის შემთხვევაში ამ ფაქტს გადამწყვეტი მნიშვნელობა არ ჰქონდა, ანუ ნებისმიერი I-თვის $\left[R^I\right]$ სტრუქტურა იქნებოდა R-ის საკუთრივი გაფართოება. კერძოდ, $I = N$ შემთხვევაში "საკუთრივი" არასტანდარტული ელემენტისთვის ავიღეთ, მაგალითად, $[\omega]: N \to R$ ასახვა, სადაც $n \in N$, $\omega(n) = n \in R$. მსგავსი კონსტრუქცია ზოგადი I-სა და X-თვის მოითხოვს ω-ს აგებას ისე, რომ $\omega: I \to X$ და $\{i \in I | \ \omega(i) = x\} \notin \mathsf{U}$ ყოველი $x \in X$-თვის. აქ პრობლემა იმაშია, რომ I-ის კარდინალობა შეიძლება X-ის კარდინალობას იმდენად აღემატებოდეს, რომ $\{i \in I | \ \omega(i) = x\}$ სიმრავლეები "დიდი" სიმრავლეები აღმოჩნდნენ. განვიხილოთ ეს პრობლემა უფრო დეტალურად. ამისთვის, ჯერ შემოვიტანოთ "ჰიპერსასრული" სიმრავლის ცნება. ყოველი Y სიმრავლისთვის აღვნიშნოთ $P_F(Y)$-ით Y-ის ყველა სასრულ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე. ცხადია, თუ $A \in V_{n+1}(X) \setminus X$, მაშინ $P_F(A) \in V_{n+2}(X)$ და გვაქვს

$$A \in V(X) \setminus X \longrightarrow {}^*P_F(A) \in V({}^*X)$$

ასახვა, რომელსაც ვიღებთ $A \to P_F(A)$ და ჩვენს მიერ აგებული $(*)$ მონომორფიზმის კომბინირებით. თუ A სასრული სიმრავლეა, მაშინ $P_F(A) = P(A)$ და

$${}^*P_F(A) = \{{}^*B | \ B \subseteq A\} = {}^*P(A)$$

სიმრავლე ასევე სასრულია. აქედან გამომდინარე A-ს უსასრულო შემთხვევა უნდა განვიხილოთ. ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\left\{ {}^*B \middle| \quad B \subseteq A, \quad B \text{ სასრულია} \right\} \subseteq {}^*P_F\left(A\right) \subseteq {}^*P\left(A\right) \subseteq P\left({}^*A\right)$$

და ასევე გვაქვს

$$B \subseteq A \in V\left(X \setminus X\right) \Rightarrow {}^*P_F\left(B\right) \subseteq {}^*P_F\left(A\right).$$

განსაზღვრება. ნებისმიერ $A \in V\left(X\right) \setminus X$ -თვის ${}^*P_F\left(A\right)$ სიმრავლეს ვუწოდებთ ${}^*A$-ს ჰიპერსასრული ქვესიმრავლეების სიმრავლეს.

ლემა. $V\left({}^*X\right)$-ის ჰიპერსასრული ქვესიმრავლეების სიმრავლე მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$\bigcup_{A \in V(X) \setminus X} {}^*P_F\left(A\right) = \bigcup_{n \in N} {}^*P_F\left(V_n\left(X\right)\right) \subseteq {}^*V\left(X\right) = \bigcup_{n \in N} {}^*V_n\left(X\right) \subseteq V\left({}^*X\right). \qquad (43)$$

დამტკიცება. თუ $A \in V\left(X\right) \setminus X$, მაშინ გვაქვს $A \in V_{n+1}\left(X\right)$ რაიმე $n \in N$ -თვის. ავიღოთ ასეთ n-ს შორის უმცირესი, მაშინ ასევე გვაქვს $A \subseteq V_n\left(X\right)$. აქედან

$$P_F\left(A\right) \subseteq P_F\left(V_n\left(X\right)\right),$$

რაც ნიშნავს, რომ

$${}^*P_F\left(A\right) \subseteq {}^*P_F\left(V_n\left(X\right)\right).$$

ეს გვაძლევს ლემის პირველი ტოლობის $\subseteq$ მხარეს. $\supseteq$ ჩართვაც გვაქვს, რადგან $V_n\left(X\right) \in V\left(X\right) \setminus X$, ეს იძლევა ლემაში მოცემულ ტოლობას.

შენიშვნა.

1. გასაგებია, რომ ნებისმიერი სასრული $A \in V\left(X\right) \setminus X$ ჰიპერსასრულიც არის, ასეთ შემთხვევაში გვაქვს $A \in P\left(A\right) = P_F\left(A\right)$ და თანაც როგორც ვიცით სასრული სიმრავლეებისთვის გვაქვს $A = {}^*A$, ანუ $A \in {}^*P_F\left(A\right)$.
2. ზოგადად, A-ს ჰიპერსასრულობიდან არ გამომდინრეობს, რომ ნებისმიერი A-ს ქვესიმრავლე $B\left(B \subseteq A\right)$ ჰიპერსასრულია.

მაგალითად, როგორც ვნახავთ, თუ გვაქვს $k \in {}^*N_\infty$, მაშინ

$$K = \left\{ l \in {}^*N \middle| \quad l \le k \right\}$$

ჰიპერსასრულია, მაგრამ N სიმრავლე ჰიპერსასრული არ არის.

დავამტკიცოთ K ტიპის სიმრავლის ჰიპერსასრულობა. ავიღოთ $\bar{N}$ ყველა ისეთ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეები, რომ $n \in N$ -თვის გვქონდეს $\left\{ m \in N \middle| \quad m \le n \right\}$, მაშინ $\bar{N} \subseteq P_F(N)$, ანუ ${}^*\bar{N} \subseteq {}^*P_F(N)$, მივიღებთ

$$K = \left\{ l \in {}^*N \middle| \quad l \le k \right\} \in {}^*\bar{N}.$$

მართლაც, გვაქვს

$$\begin{gathered} (\forall A \in V(X)) \\ \left[A \in \bar{N} \longleftrightarrow (\exists\, n \in N)(\forall x \in X) \quad \left[x \in A \longleftrightarrow \left[(x \in N) \wedge (x \le n) \right] \right] \right] \end{gathered}$$

გამონათქვამი. ამ გამონათქვამის გადატანით მივიღებთ

$$\begin{gathered} (\forall A \in^* V(X)) \\ \left[A \in^* \bar{N} \longleftrightarrow (\exists\, n \in^* N)(\forall x \in^* X) \quad \left[x \in A \longleftrightarrow \left[(x \in^* N) \wedge (x \le n) \right] \right] \right], \end{gathered}$$

რაც ნიშნავს, რომ

$${}^*V(X) = \bigcup_{n \in N} {}^*V_n(X). \tag{44}$$

ცხადია, $\bar{N} \in V_2(X)$, აქედან ${}^*\bar{N} \in {}^*V_2(X) \subseteq {}^*V(X)$ ანუ გადატანილი გამონათქვამიდან გვაქვს

$$\left\{ e \in {}^*N \middle| \quad e \le k \right\} \in {}^*\bar{N} \subseteq {}^*P_F(A). \tag{45}$$

ახლა ავიღოთ რაიმე ჰიპერსასრული $B \in {}^*P_F(V_n(X))$ სიმრავლე, სადაც $n \in N$, მაშინ არსებობს $K = \left\{ l \in {}^*N \middle| \quad l \le k \right\}$ ჰიპერსასრული, სადაც $k \in {}^*N_\infty$ და $\beta \in K \to B$ ბიექცია ისეთი, რომ $B \in {}^*V_{n+3}(X)$, ანუ ჰიპერსასრული B შეიძლება გადაიწეროს $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$ სახით, სადაც $b_l = \beta(l)$, $0 \le l \le k$.

შენიშვნა. რადგან k ავიღეთ ${}^*N_\infty$-დან , ასეთი ჩანაწერი არ იძლევა არა თუ B-ს სასრულობას, არამედ ის B-ს თვლადობასაც კი არ ნიშნავს.

მიუხედავად ამისა, ასეთი ჩანაწერი მაინც გამართლებულია, რადგან $0 \leq l \leq k$ სეგმენტი სავსებით დალაგებული სიმრავლეა.

ამ დებულების დამტკიცებაც გადატანის მეშვეობით არის შესაძლებელი ავიღოთ სტანდარტული ჭეშმარიტი გამონათქვამი

$$\left(\forall B \in P_F\left(V_n\left(X\right)\right)\right)\left(\exists k \in N\right)\left(\exists \beta \in V_{n+3}\left(X\right)\right)$$
$$\left[\beta : \left\{l \in N \middle| \ l \leq k\right\} \longrightarrow B \text{ ბიექციაა}\right].$$

გადატანით მივიღებთ გამონათქვამს, რომელიც ადასტურებს ჩვენს დებულებას.

ახლა შეგვიძლია ლკაცრად განვსაზღვრფოთ “სტანდარტული” და “არასტანდარტული” ელემენტის ცნებები, რომელზსაც აქამდე ინტუიციის დონეზე ვიყენებდით.

განსაზღვრება. $a \in V\left(X\right)$ ელემენტს და $V\left({}^*X\right)$ სიმრავლის ისეთ a' ელემენტებს, რომელთათვისაც არსებობს $b \in V\left(X\right)$ ისეთი, რომ $a' = {}^*b$, ვუწოდებთ **სტანდარტულ** ელემენტებს. ყველა სხვა სახის ელემენტს $V\left({}^*X\right)$ სიმრავლიდან ვუწოდებთ **არასტანდარტულს**.

სტანდარტული და არასტანდარტული ობიექტების ამ განსაზღვრებაში გასარკვევად მოვიყვანოთ ერთი მაგალითი. ვთქვათ, $\overline{I}$ არის R-ის ყველა ჩაკეტილ შემოსაზღვრულ ინტერვალთა სიმრავლე, მაშინ $A \in \overline{I}$-თვის გვაქვს ჭეშმარიტი გამონათქვამები:

$$\left(\forall A \in \overline{I}\right)\left(\exists\, a, b \in R\right)\left(\forall x \in R\right) \ \left[x \in A \longleftrightarrow a \leq x \leq b\right],$$
$$\left(\forall a, b \in R\right)\left(\exists\, A \in \overline{I}\right)\left(\forall x \in R\right) \ \left[x \in A \longleftrightarrow a \leq x \leq b\right].$$

$*$-გადატანით მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამებს

$$\left(\forall A \in {}^*\overline{I}\right)\left(\exists\, a, b \in {}^*R\right)\left(\forall x \in {}^*R\right) \ \left[x \in A \longleftrightarrow a \leq x \leq b\right],$$
$$\left(\forall a, b \in {}^*R\right)\left(\exists\, A \in {}^*\overline{I}\right)\left(\forall x \in {}^*R\right) \ \left[x \in A \longleftrightarrow a \leq x \leq b\right].$$

აქედან გამომდინარე, გვაქვს $\left[a, b\right]$ ინტერვალის გადატანა

$${}^*\left[a, b\right] = \left[a, b\right] \subset {}^*R,$$

სადაც

$$\left[a,b\right]=\left\{x\in {}^{*}R\middle|\quad a\le x\le b\right\}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ, თუ განვიხილავთ არასტანდარტულ $\left[a,b\right]$ ინტერვალს, როგორც $V\left(R\right)$ სუპერსტრუქტურის ელემენტს, მაშინ ის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრების აზრით **სტანდარტულ** ელემენტს წარმოადგენს.

განსაზღვრება. $V\left({}^{*}X\right)$ სუპერსტრუქტურას **გაფართოება** ეწოდება, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $A\in V\left(X\right)\setminus X$ არსებობს $B\in {}^{*}P_{F}\left(A\right)$ ისეთი, რომ

$$a\in A\Rightarrow a^{*}\in B.$$

შენიშვნა. ეს განსაზღვრება უფრო გასაგები ხდება, თუ გავიხსენებთ ჰიპერსასრული სიმრავლეების შემთხვევაში შექმნილ სიტუაციას.

გავიხსენოთ, რომ ყოველი ჰიპერსასრული სიმრავლე ექვივალენტურია (ბიექციურია) $\left\{l\in {}^{*}N\middle|\quad l\le k\right\}$ ჰიპერსასრული სიმრავლის (სადაც $k\in {}^{*}N_{\infty}$). ამ შემთხვევაში გვქონდა $N\subset\left\{l\in {}^{*}N\middle|\quad l\le k\right\}$.

ჩვენს მიერ მოცემული განსაზღვრება მოითხოვს, რომ მსგავს გარემოებას ადგილი ჰქონდეს $V\left(X\right)$-ის ყოველი სიმრავლისთვის.

ახლა ავაგოთ U თავისუფალი ულტრაფილტრი უსასრულო I სიმრავლისთვის ისეთი, რომ $V\left({}^{*}X\right)$ სუპერსტრუქტურა გაფართოების განსაზღვრებას აკმაყოფილებდეს. ავიღოთ X ისეთი, რომ $R\subseteq X$, მაშინ I სიმრავლე შეგვიძლია ავიღოთ, მაგალითად,

$$I=\left\{J\subseteq V\left(X\right)\middle|\quad J\ne\varnothing,\quad J\ \text{სასრულია}\right\}.$$

ასეთი I, რა თქმა უნდა, დამოკიდებულია X-ზე. ასევე ყოველი $a\in V\left(X\right)$

$$a\in I\Leftrightarrow\exists\, b\in V\left(X\right)\setminus X:\ a\in P_{F}\left(b\right),\ a\ne\varnothing.$$

ასეთი a-თვის აღვნიშნოთ $I_{a}=\left\{b\in I\middle|\quad a\subseteq b\right\}$. ასე განსაზღვრული I-თვის

$$\mathsf{F} \equiv \left\{ J \subseteq I \middle| \ \exists a \in I : \ I_a \subseteq J \right\}$$

სიმრავლე ფილტრია I-ზე და თანაც ისეთი, რომ $I \setminus \{a\} \in \mathsf{F}$, თუ $a \in I$.

დავამტკიცოთ, რომ ეს მართლაც ასეა.

ავიღოთ $A, B \in \mathsf{F}$, მაშინ არსებობენ $a, b \in I$ ისეთი, რომ $I_a \subseteq A$, $I_b \subseteq B$. აქედან

$$A \cap B \supseteq I_a \cap I_b \supseteq I_{a \cup b}$$

და $a \cup b \in \mathsf{F}$, ანუ F აკმაყოფილებს ფილტრის თანაკვეთის პირობას. გაფართოების პირობა ამ შემთხვევაში ტრივიალურად დაკმაყოფილებულია, რაც ნიშნავს, რომ F ფილტრია. თუ ახლა ავიღებთ $a \in I$, მაშინ მოიძებნება $b \in I$ ისეთი, რომ $a \cap b = \varnothing$. რაც ნიშნავს, რომ $a \notin I_b$ და $I_b \subseteq I \setminus \{a\}$ და აქედან $I \setminus \{a\} \in \mathsf{F}$.

თუ ახლა F-ს გავაფართოვებთ I-ზე U ულტრაფილტრამდე, მაშინ U თავისუფალი ულტრაფილტრი უნდა იყოს. მართლაც, თუ საპირისპიროა ჭეშმარიტი და არსებობს $i \in I$ ისეთი, რომ $\mathsf{U} = \left\{ J \subseteq I \middle| \ i \in J \right\}$, მაშინ ყოველი $F \in \mathsf{F}$ ასევე ეკუთვნის U-ს და, ამრიგად, $i \in F$, რაც ეწინააღმდეგება F-ის თვისებებს.

ასე აგებული U-სა და I-თვის ჭეშმარტია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. $V\left({}^{*}X\right)$ წარმოადგენს $V\left(X\right)$-ის გაფართოებას.

დატკიცება იხ. [1].

გაფართოებების არსებობის თეორემის პირველი დამტკიცება, რომელიც ა.რობინსონმა მიიღო, ამ თეორემის გვიანდელი დამტკიცებებისგან განსხვავებული იყო და იყენებდა არასტანდარტული ანალიზისთვის მნიშვნელოვან ზოგიერთ ცნებას. კერძოდ, სასრულად დაკმაყოფილებადი მიმართების ცნებას.

განსაზღვრება. ბინარულ P მიმართებას ეწოდება **სასრულად დაკმაყოფილებადი** მისი დომეინის A სიმრავლეზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი სასრული $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ სიმრავლისთვის არ-

სებობს $y \in \mathrm{rang}\ P$ ისეთი, რომ ყოველი i-თვის, $1 \le i \le n$, $\langle x_i, y \rangle \in P$. მიმართებას ეწოდება სასრულად დაკმაყოფილებადი, თუ $A = \mathrm{domein}\ P$.

მაგალითისთვის შეგვიძლია მოვიყვანოთ $<$, $\le$ ბინარული მიმართებები N-ზე. ცხადია, რომ მათთვის სასრულად დაკმაყოფილებადი პირობა შესრულებულია. ეს ცნება მნიშვნელოვანია გაფართოებებისთვის, რადგან შესაძლებელია დავამტკიცოთ შემდეგი ორი დებულების ექვივალენტობა:

1. $V\left({}^*X\right)$ არის $V\left(X\right)$-ის გაფართოებას.
2. ყოველი სასრულად დაკმაყოფილებადი P-თვის არსებობს $y \in \mathrm{rang}\ P$ ისეთი, რომ $\left\langle {}^*x, b \right\rangle \in {}^*P$, თუ $x \in \mathrm{domein}\ P$.

ამ განსაზღვრების გამოყენებით ასევე შესაძლებელია დავამტკიცოთ, რომ ყოველი უსასრულო სიმრავლე სუპერსტრუქტურიდან გაფართოებულ სუპერსტრუქტურაში გადატანისას არასტანდარტულ ელემენტებს შეიძენს. ამ დამტკიცებებში გამოიყენება კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ცნება.

განმარტება. $A \in V\left(X\right)$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\overline{S}$ სიმრავლეს ეწოდება **ამომწურავი** A-თვის, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\forall B \in P_F\left(A\right)$, $\exists\, S \in \overline{S}$ ისეთი, რომ $B \subseteq S$.

ამ გაფართოებებთან მიმართებაში მტკიცდება შემდეგი დებულება.

დებულება. თუ $\overline{S}$ ამომწურავია $A \in V\left(X\right)$-თვის და მოცემულია $V\left(X\right)$-ის $V\left({}^*X\right)$ გაფართოება, მაშინ $\exists\, \Sigma \in {}^*S \subseteq V\left({}^*X\right)$ ისეთი, რომ $\left\{ {}^*a \,\middle|\, a \in A \right\} \subseteq \Sigma$.

ეს დებულება საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ A სიმრავლის ელემენტების რაიმე P-თვისება, მისი ჭეშმარიტობის დამტკიცებით $\overline{S}$ ამომწურავი ქვესიმრავლეებისთვის.

ახლა ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით შეგვიძლია განვიხილოთ “შინაგანი” და “გარეგანი” სიმრავლის ცნება სუპერსტრუქტურებისთვის. გავიხსენოთ ჩვენს მიერ გამოყენებული “გადატანის” მეთოდი. ვიწყებდით იმით, რომ ვწერდით სტანდარტულ $\Phi \in L_X$ გამონათქვამს. შემდეგ $*$-გადატანის მეშვეობით ვწერდით $^*\Phi$-გამონათქვამს $L_{^*X}$-ში. ამ გამონათქვამის ჭეშმარიტობას ვამტკიცებდით $L_{^*X}$-ში და, აქედან, გადატანის პრინციპის გამოყენებით ვასკვნიდით Φ-ს ჭეშმარიტობას L_X-ში.

აქედან გამომდინარე, ჩვენი მეთოდის გამოყენებისთვის მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ რომელი $\Psi \in L_{^*X}$ გამონათქვამი $L_{^*X}$-დან შეიძლება განვიხილოთ როგორც L_X-ის Φ-გამონათქვამის გადატანა, ანუ გვაინტერესებს ისეთი Ψ, რომ

$$\Psi = {}^*\Phi, \text{ სადაც } \Phi \in L_X .$$

ცხადია, $L_{^*X}$-ში ყველა გამონათქვამი ასეთი ფორმით ვერ გამოისახება. ასე, მაგალითად, Ψ-ში ნებისმიერი კონსტანტა უნდა იყოს L_X-ში არსებული კონსტანტის გადატანა, ანუ $\exists\, a \in V(X)$ ისეთი, რომ $^*a$ ექვივალენტურია Ψ-ში შემავალი კონსტანტის. აქედან გამომდინარე Ψ-ში არსებული კონსტანტა სიმბოლოები უნდა ჩავწეროთ, როგორც $*$-გადატანილი სტანდარტული კონსტანტები, ანუ კვანტორების შემთხვევაში გვაქვს

$$(\forall x \in A),\ (\forall x \in {}^*A),\ (\exists\, x \in A),\ (\exists\, x \in {}^*A) \tag{46}$$

ფორმულები, რომლებშიც $A \in V(X)$. ეს ნიშნავს, რომ Ψ შეიცავს სუპერსტრუქტურის მხოლოდ ისეთ b ელემენტებს, რომ რაიმე $a \in V(X)$-თვის გვაქვს $b \in {}^*a$. ამ მოსაზრებებიდან გამომდინარე გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება. $V(^*X)$ სუპერსტრუქტურის b ელემენტს ეწოდება **შინაგანი**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს $a \in V(X)$ ისეთი, რომ $b \in {}^*a$, სხვანაირად b ელემენტს **გარეგანი** ეწოდება.

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია გამონათქვამები დავყოთ სამ კატეგორიად:

1. გამონათქვამს ვუწოდებთ სტანდარტულს, თუ მასში შემავალი ყველა სიმბოლო სტანდარტულია.
2. გამონათქვამს ვუწოდებთ შინაგანს, თუ ყველა სიმბოლო სტანდარტული ან შინაგანია.
3. გამონათქვამი გარეგანია, თუ ის შეიცავს გარეგანი ელემენტების შესაბამის სიმბოლოებს.

ეს კატეგორიები შემოვიღეთ შინაგანი და სტანდარტული ელემენტების განსხვავებიდან გამომდინარე.

ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a \in V\left({}^{*}X\right)\text{-სტანდარტული } \Leftrightarrow a = {}^{*}b \text{ რაიმე } b \in V\left(X\right)\text{-თვის,}$$

$$a \in V\left({}^{*}X\right)\text{-შინაგანი } \Leftrightarrow a = {}^{*}b \text{ რაიმე } b \in V\left(X\right)\text{-თვის.}$$

აქ ჩვენს მიერ შემოტანილი ელემენტის ცნება წარმოადგენს სტანდარტული ელემენტის ცნების განზოგადებას, ანუ ყოველი სტანდარტული ელემენტი მასთან ერთდ შინაგანიც არის (ზოგადად,შებრუნებული დებულება არ არის ჭეშმარიტი, ანუ ელემენტის შინაგანობიდან მისი სტანდარტულობა არ გამომდინარეობს). მართლაც, ავიღოთ სტანდარტული a ისეთი, რომ $a = {}^{*}b$ რაიმე $b \in V\left(X\right)$-თვის. მაშინ გვაქვს $b \in \left\{b\right\} \in V\left(X\right)$ და გადატანის შემდეგ ${}^{*}b \in {}^{*}\left\{b\right\}$, ანუ გვაქვს $a \in {}^{*}\left\{b\right\}$.

შინაგანობის თვისებას ტრანზიტულობაც გააჩნია, ანუ, თუ a შინაგანია და $b \in a$, მაშინ b-ც შინაგანი ელემენტია.

თეორემა. $V\left({}^{*}X\right)$ სუპერსტრუქტურის შინაგან ელემენტთა სიმრავლე ემთხვევა ${}^{*}V\left(X\right)$ სიმრავლეს, რომელიც მოცემულია შემდეგი ტოლობით:

$${}^{*}V\left(X\right) = \bigcup_{n \in N} {}^{*}V_n\left(X\right)$$

დამტკიცება. ავიღოთ შინაგანი ელემენტი $A \in V\left({}^*X\right)$. განმარტებით არსებობს ისეთი $B \in V\left(X\right)$, რომ $A \in {}^*B$. ვიცით, რომ $B \in V_{n+1}\left(X\right) \setminus V_n\left(X\right)$ რომელიმე n-თვის. ეს ნიშნავს, რომ $B \subseteq V_n\left(X\right)$, ანუ ${}^*B \subseteq {}^*V_n\left(X\right)$, საიდანაც $A \in {}^*V_n\left(X\right)$ და, პირიქით, თუ $A \in {}^*V\left(X\right)$, მაშინ $A \in {}^*V_n\left(X\right)$ რაიმე $n \in N$-თვის. ამასთან გვაქვს $V_n\left(X\right) \in V\left(X\right)$, რაც აჩვენებს A-ს შინაგანობას.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ჰიპერსასრული ელემენ-ტი შინაგანია, მაგრამ საპირისპირო დებულება, ზოგადად, ჭეშმარიტი არ არის, ანუ არსებობს შინაგანი არა ჰიპერსასრული ელემენტები. თავის მხრივ, ჰიპერსასრულობიდან არ გამომდინარეობს სტანდარტულობა. ამის საჩვე-ნებლად ავიღოთ $\left\{l \in {}^*N \middle| \ l \le k\right\}$, სადაც $k \in {}^*N_\infty$. ეს სიმრავლე ჰიპერსასრუ-ლია. ვაჩვენოთ, რომ ის არასტანდარტულია. მართლაც, ვთქვათ, არსებობს ისეთი $A \in V\left(X\right)$, რომ $\left\{l \in {}^*N \middle| \ l \le k\right\} = {}^*A$, მაშინ

$$A \subseteq {}^*A = \left\{l \in {}^*N \middle| \ l \le k\right\} \subset {}^*N \subset {}^*X ,$$

$A \in V_1\left({}^*X\right)$ და გვაქვს

$$a \in A \Rightarrow a \in V_0\left({}^*X\right) = {}^*X \cap V\left(X\right) = X .$$

აქედან

$$A \subseteq X \cap {}^*N \subseteq N$$

და თანაც A უსასრულოა, ანუ A არის N-ის უსასრულო ქვესიმრავლე. $(*)$ - მონომორფიზმის განმარტებიდან გვაქვს

$$\begin{aligned} {}^*A &= M\left(e(A)\right) = M\left(\left[\hat{A}\right]\right) = \\ &= \left\{M\left([b]\right) \middle| \ [b] \in \Pi_{\mathsf{U}} X = {}^*X, \ \ [b] \in {}_{\mathsf{U}}\left[\hat{A}\right]\right\} = \left\{[b] \middle| \ [b] \in {}_{\mathsf{U}}\left[\hat{A}\right]\right\}. \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ

$${}^*A = \left\{[b] \middle| \ b : I \to V\left(X\right), \ \ \left\{i \in I \middle| \ b(i) \in A\right\} \in \mathsf{U}\right\}.$$

ახლა გავიხსენოთ, რომ $k \in {}^*A$ არის ${}^*A$ სიმრავლის უდიდესი ელემენ-ტი. ავიღოთ $b : I \to V(X)$ ისეთი, რომ $k = [b]$, მაშინ $\{i \in I |\ b(i) \in A\} \in \mathrm{U}$. განვსაზღვროთ $c : I \to V(X)$ შემდეგნაირად

$$c(i) = \begin{cases} a(i), & \text{თუ } b(i) \in A, \\ b(i), & \text{თუ } b(i) \notin A \end{cases}$$

აქ $a(i) \in A$ ისეთია, რომ $a(i) > b(i)$, რაც შესაძლებელია, რადგან A უსას-რულოა და, ამრიგად, არ არის შემოსაზღვრული. მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $[c] \in {}^*A$, $[c] \in N$ და $[c] > k$, რაც ეწინააღმდეგება k-ს უდიდესობის თვი-სებას.

შინაგან სიმრავლეებთან დაკავშირებით კეისლერმა დაამტკიცა შემდეგი თეორემა.

თეორემა (კეისლერი [1980]). თუ გვაქვს შინაგანი $\Phi(x)$, სადაც x ერთადერთი თავისუფალი ცვლადია და $A \in {}^*V(X)$ შინაგანი სიმრავლე, მაშინ

$$\{x \in A |\ \Phi(x) \text{ ჭეშმარიტია}\} \tag{47}$$

სიმრავლე შინაგანია.

დამტკიცება იხ. [3].

ასევე შინაგანი სიმრავლეებისთვის დამტკიცებულია შემდეგი დებულე-ბები:

1. თუ A და B შინაგანი სიმრავლეებია, მაშინ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ სიმრავლეებიც შინაგანია.
2. თუ $A \in V(X) \setminus X \Rightarrow \left\{a \in P({}^*A) \middle|\ a \text{ შინაგანია}\right\} = {}^*P(A)$.
3. თუ $K \subseteq {}^*Z$ არაცარიელი შინაგანი სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზე-მოდან, მას უდიდესი ელემენტი აქვს, ხოლო თუ ქვემოდან – უმცი-რესი.

4. N, Z, R, Q, ${}^*N_\infty$, ${}^*Z_\infty$, ${}^*R_\infty$, ${}^*R^+ = \left\{ s \in {}^*R \middle| \; s > 0 \right\}$, ${}^*R_\infty^+$, $\mathrm{mon}(0)$, $\mathrm{Gal}(0)$ გარეგანი სიმრავლეებია.

შინაგანი სიმრავლის ცნება ასევე მნიშნელოვანია $*$-გადატანის შემთხვევაში. კერძოდ, $V(X)$-დან $V({}^*X)$-ში განსაზღვრულ ${}^*(\;)$ მონომორფიზმს ვუწოდებთ **წვდომადს**, თუ

$$\forall A, B \in V(X) \setminus X, \quad \forall\, f : A \to {}^*B, \tag{48}$$

არსებობს შინაგანი $g : {}^*A \to {}^*B$ ისეთი, რომ $f(a) = g({}^*a)$, თუ $a \in A$.

თვლად წვდოპმადობაზე ვილაპარაკეთ იმ შემთხვევაში, თუ წვდომადობა სრულდება მხოლოდ თვლადი სიმრავლეებისთვის. დამტკიცებულია, რომ ${}^*(\;)$ მონომორფიზმი წვდომადია ნებისმიერი $X \supseteq R$ შემთხვევაში (იხ. [23]).

მთლიანობაში შინაგანი სიმრავლეების და ${}^*(\;)$ მონომორფიზმის თვისებების გამოყენებით მტკიცდება შინაგანი ფორმულების რიგი მნიშვნელოვანი თვისებები, კერძოდ,

1. თუ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in N$-თვის, არსებობს $k \in {}^*N_\infty$ ისეთი, რომ $\Phi(n)$ ჭეშმარიტია ყოველი $n \in {}^*N$-თვის, $n \le k$.
2. თუ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in {}^*R^+ \setminus {}^*R_\infty^+$-თვის, მაშინ არსებობს $k \in {}^*N_\infty$ ისეთი, რომ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in {}^*R^+$-თვის, $x \le k$.
3. თუ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in {}^*N_\infty$, მაშინ არსებობს $k \in N$ ისეთი, რომ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in {}^*N$-თვის, $x \ge k$.
4. თუ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in {}^*R_\infty^+$-თვის, მაშინ არსებობს $k \in N$ ისეთი, რომ $\Phi(x)$ ჭეშმარიტია ყოველი $x \in {}^*R^+$-თვის, $x \ge k$.

ასევე, ამ თვისებების გამოყენებით, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ, თუ $A \subseteq {}^*R$ შინაგანი სიმრავლეა, მაშინ

$$N \subseteq A \Rightarrow A \cap {}^*N_\infty \neq \varnothing,$$

$$N_\infty \subseteq A \Rightarrow A \cap N \neq \varnothing,$$

$$\mathrm{mon}(0) \cap {}^*R^+ \subseteq A \Rightarrow A \cap R^+ \neq \varnothing.$$

ასევე, თუ $n \in {}^*N \mapsto s_n \in {}^*R$ შინაგანი მიმდევრობაა, $s_n \in \mathrm{mon}(0)$ $\forall n \in N$ -თვის, მაშინ არსებობს $\omega \in {}^*N_\infty$ ისეთი, რომ, თუ $n \leq \omega$ შესაბამისი $s_n \in \mathrm{mon}(0)$.

4 . არასტანდარტული ანალიზი და ველთა თეორია

ველის ნორმირებები

ნორმირება ეწოდება $\varphi : K \to \mathrm{R}^+$ ფუნქციას K ველიდან R^+ არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ისეთს, რომ

1. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) > 0$, როცა $a \neq 0$;
2. $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$;
3. $\varphi(a+b) \geq \varphi(a) + \varphi(b)$.

ასეთი ველის მაგალითად შეგვიძლია ავიღოთ Q რაციონალურ რიცხვთა ველი, სადაც φ ნორმა შემოტანილია, როგორც ჩვეულებრივი მოდულის ფუნქცია, ანუ

$$\varphi(a) = |a|.$$

ნორმირების მაგალითია აგრეთვე “ტრივიალური” ნორმირება $\varphi(a) = 1$, როცა $a \neq 0$ $\varphi(0) = 0$.

კარგად ნაცნობი ნორმირებების გარდა, არსებობს სხვა ტიპის ნორმებიც. მაგალითად, ავიღოთ ისევ $\mathbb{Q}$ რაციონალურ რიცხვთა ველი და p მარტივი რიცხვი, მაშინ ყოველი $a \neq 0$-თვის გვაქვს $a = \frac{s}{t} p^n$, სადაც s, t არის p-თან ურთიერთმარტივი მთელი რიცხვები, მაშინ

$$\varphi_p(a) = p^{-n} \quad \text{და} \quad \varphi_p(a) = 0$$

განსაზღვრავს φ_p ნორმას $\mathbb{Q}$-ზე. მესამე თვისების ნაცვლად უფრო ძლიერ თვისებას აქვს ადგილი, კერძოდ,

$3'$. $\varphi_p(a+b) \leq \max(\varphi_p(a), \varphi_p(b))$.

ასეთ ნორმირებას p-**ადიური ნორმირება** ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეზე.

p-ადიური ნორმირების განმარტება შეგვიძლია განვაზოგადოთ. ავიღოთ D მთელობის დომეინი (რგოლი ნულის გამოყოფების გარეშე) და K მის წილადთა ველი, D-ს ნებისმიერი p მარტივი იდეალი, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. p-ს ხარისხები $p, p^2, \ldots$ განსხვავებულია და არ არსებობს D-ს ელემენტი, რომელიც ერთდროულად p-ს ყველა ხარისხს ეკუთვნის (ანუ $\bigcap_{n \geq 1} p^n = \varnothing$).
2. თუ a იყოფა p^{α}-ზე, მაგრამ არა $p^{\alpha+1}$-ზე და b იყოფა p^{β}-ზე, მაგრამ არა $p^{\beta+1}$-ზე, მაშინ ab იყოფა $p^{\alpha+\beta}$-ზე, მაგრამ არა $p^{\alpha+\beta+1}$-ზე.

ასეთი თვისებების შემთხვევაში D-ზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\varphi : D \to \mathbb{R}^+$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\varphi(a) = e^{-\alpha} \quad (a \neq 0) \quad \text{და} \quad \varphi(\overline{0}) = 0 .$$

აქ α არის p იდეალის ხარისხი, რომელიც a-ს ჰყოფს (რა თქმა უნდა, ეს ხარისხი შეიძლება 0-იც იყოს), e ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, $\overline{0}$ არის D დომეინის ნული. ასე განსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება განვავრცოთ D-ს წილადთა ველზე შემდეგი ფორმულით

$$\varphi\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}. \quad (49)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთი განსაზღვრება კორექტულია და მიღებული φ ფუნქცია K ველის ნორმირებას წარმოადგენს. ეს განსაზღვრება წარმოადგენს p-ადიური ნორმირების ბუნებრივ განზოგადებას.

p-ადიური ნორმირება წარმოადგენს ე. წ. არა არქიმედული ნორმირების მაგალითს.

ვიტყვით, რომ φ ნორმირება K ველზე **არა არქიმედულია**, თუ K ველის $\overline{1}$-ერთიანი ნებისმიერს სასრულ ჯამებზე განსაზღვრული φ ნორმის მნიშვნელობათა არე შემოსაზღვრულია ზემოდან, ანუ არსებობს $c \in \mathrm{R}^{+}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $n \in N$-თვის $\varphi\left(n \cdot \overline{1}\right) < c$. სხვა შემთხვევაში (თუ ასეთი c არ არსებობს) ვიტყვით, რომ ნორმირება **არქიმედულია**. არქიმედული ნორმირების მაგალითია ჩვეულებრივი $|a|$ მოდული Q-ზე, $a \in \mathrm{Q}$, ხოლო არა არქიმედულის p-ადიური ნორმირება ადვილი დასამტკიცებელია. ნებისმიერი არარქიმედული φ ნორმირებისთვის გვაქვს

$3''$. $\varphi(a+b) \le \max\left(\varphi(b),\varphi(b)\right)$.

ნორმირებებისთვის ხშირად შემოაქვთ ნორმის ტრანსფორმაცია ლოგარითმული ფუნქციის მეშვეობით. კერძოდ, თუ გვაქვს φ ნორმირება K ველზე ვწერთ

$$\omega(a) = -\log\varphi(a) \text{ ყოველი } a \in K\text{-თვის.}$$

ასე განმარტებულ ω-ს **ლოგარითმული ნორმირება** ეწოდება, φ-ის თვისებებიდან გამომდინარე ის აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1. თუ $a \neq 0$, $\omega(a) \in \mathrm{R}^{+}$;
2. $\omega(0)=\infty$, სადაც ∞ არის R-თვის დამატებული ელემენტი თვისებებით:

$$\forall\, a \in \mathrm{R} \qquad \begin{cases} \infty \pm a = \infty \\ a \pm \infty = \infty \end{cases},$$

თუ $a \neq 0$, მაშინ $\begin{cases} \infty \cdot a = \infty \\ a \cdot \infty = \infty \end{cases}$;

3. $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$;

4. $\omega(a+b) \geq \min(\omega(a), \omega(b))$.

ორ φ და ψ ნორმირებას ვუწოდებთ ექვივალენტურს, თუ K ველზე მათ მიერ წარმოქმნილი ტოპოლოგიები ერთმანეთს ემთხვევა, ანუ ყოველი a_n მიმდევრობისთვის K-დან გვაქვს $\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n) = 0$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lim_{n\to\infty} \psi(a_n) = 0$. K ველზე მოცემული ნებისმიერ ექვივალენტური ნორმების წყვილისთვის არსებობს $\varepsilon \in R^+$ ისეთი, რომ $\psi(a) = (\psi(a))^\varepsilon$ ყოველი $a \in K$-თვის. ცხადია, თუ ორი ნორმა ასეთ კავშირშია ერთმანეთთან, მაშინ ისინი ექვივალენტურებიც არიან.

ოსტროვსკიმ დაამტკიცა შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ოსტროვსკი [1934]). Q რაციონალურ რიცხვთ ველის ნებისმიერი არატრივიალური ნორმირება იქნება ან $\varphi(a) = |a|^\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$, ჩვეულებრივი მოდულით ნორმირების ექვივალენტური, ან $\varphi(a) = \varphi_p(a)^\sigma$ p-ადიური ნორმირების ექვივალენტური (აქ p მარტივი რიცხვია, ხოლო σ – დადებითი ნამდვილი რიცხვი).

ოსტროვსკიმ შემდეგ დაამტკიცა, რომ Σ ალგებრულ რიცხვთა ველის ნებისმიერი არქიმედული ნორმირება შეიძლება მივიღოთ Σ-ს ჩადგმით, R ნამდვილ ან C კომპლექსურ რიცხვთა ველებში, და φ ნორმირების მოცემით, როგორც $\varphi(a) = |a|^e$, $0 < e \leq 1$, ანუ ჩადგმის შედეგად მიღებული რიცხვის მოდულის e ხარისხში აყვანის ოპერაციის შესრულებით. აქვე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ნორმირებას ეწოდება **დისკრეტული**, თუ მისი მნიშვნელობათა დომეინის მულტიპლიკაციური ჯგუფი ციკლურია. დისკრეტული ნორმირების მაგალითია, კერძოდ, p-ადიური ნორმირება Q-ზე და ასევე p-ადიური ნორმირების განზოგადებული შემთხვევა.

თეორემა [5]. თუ α ალგებრული რიცხვია ${}^*K$ არასტანდარტული ველიდან და თანაც $|\alpha|$ სასრულია ${}^*K$ ყველა შესაძლო არქიმედულ ნორმირებისთვის, მაშინ α სტანდარტულია, $\alpha \in K$.

დამტკიცება. არქიმედული ნორმირება, როგორც ვიცით, მიიღება ${}^*K$ -ს ჩადგმით ${}^*\mathrm{C}$ -ველში და შემდეგ ${}^*\mathrm{C}$ -ზე მოდულის ფუნქციის გამოყენებით. ავიღოთ α -ს $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ შეუღლებულები ${}^*\mathrm{C}$ -ველში ჩადგმისას, $|\alpha|$ სასრულობიდან გამომდინარე ყველა $\left|\alpha^{(1)}\right|, \left|\alpha^{(2)}\right|, \ldots, \left|\alpha^{(n)}\right|$ სასრულია. ავიღოთ ამ რიცხვების b სუპრემუმი და $s_1, \ldots, s_n$ ფუნდამენტური სიმეტრიული ფუნქციები. ეს ფუნქციებისასრულია $\left|\alpha^{(1)}\right|, \left|\alpha^{(2)}\right|, \ldots, \left|\alpha^{(n)}\right|$ -ზე და

$$|s_k| \le \binom{n}{k} b .$$

აქედან, s_k სასრული რაციონალური რიცხვებია ${}^*\mathrm{Q}$ -ში, რაც ნიშნავს, რომ ისინი სტანდარტულია.

განვიხლოთ პოლინომი

$$f(x) = x^n - s_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n .$$

ეს სტანდარტული პოლინომია, რომლის ფესვები ასევე სტანდრტულია. α ერთ-ერთი ამ ფესვთაგანია და, აქედან გამომდინარე, α -ც სტანდარტულია.

ალგებრულ ფუნქციათა ველების ნორმირებები და არასტანდარტული ანალიზი

ახლა ავიღოთ ${}^*\mathrm{Q}$ არასტანდარტული რაციონალური მოდელი. ცხადია, რომ ნებისმიერი α არასტანდარტული რაციონალური რიცხვი ტრანსცენდენტულია Q რაციონალურ რიცხვთა ველის მიმართ. ამიტომ Q -ს გაფართოება α -ელემენტით არის ერთდროულად ${}^*\mathrm{Q}$ -ის ქვეველი და თანაც იზომორფულია Q კოეფიციენტებიანი ალგებრულ ფუნქციათა ველის. როგორც

ვნახეთ Q-ს ნორმირება შესაძლებელია ან მარტივი რიცხვის (მარტივი იდეალის) მეშვეობით ან ჩვეულებრივი არქიმედული ნორმირებით. არასტანდარტული ანალიზი ამ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს $\mathbb{Q}$-ს ნორმირებისას გამოვიყენოთ არასტანდარტული მარტივი რიცხვი (იდეალი), რაც $\mathbb{Q}$-ს p-ადიურ ნორმირებებს ორ კლასად ჰყოფს. კერძოდ, არასტანდარტული ან სტანდარტული მარტივის გამოყენების მიხედვით, შეგვიძლია ვილაპარაკოთ პირველი ან მეორე ტიპის ნორმირებებზე, არქიმედულ ნორმირებას ამ შემთხვევაში მესამე ტიპის ნორმირებას ვუწოდებთ.

A-თი აღვნიშნოთ ალგებრულ ფუნქციათა ველი კოეფიციენტებით $\mathbb{Q}$-დან. ვნახავთ, რომ $^*\mathbb{Q}$ ველის არასტანდარტული ნორმირება წარმოქმნის A ველის (რომელიც, როგორც ვნახეთ, $^*\mathbb{Q}$-ს ქვეველს წარმოადგენს) სტანდარტულ ნორმირებას, მეტიც A-ს ყველა სტანდარტული ნორმირება შეიძლება ასე წარმოვქმნათ.

ზოგადად, ეს დებულება ჭეშმარიტია არა მარტო $\mathbb{Q}$-სა და $^*\mathbb{Q}$-ის შემთხვევაში, არამედ ნებისმიერი $\mathbb{Q} \subset K$ რაციონალური ალგებრული გაფართოებისთვის და შესაბამისი $^*K$ არასტანდარტული მოდელისთვის (რომელიც აიგება როგორც ადრე თავისუფალი ულტრაფილტრის მეშვეობით).

აქაც, ნორმირება მოიცემა ან არასტანდარტული მარტივი იდეალით ან სტანდარტული მარტივი იდეალით ან “ჩვეულებრივი” არქიმედული ნორმირების გამოყენებით (პირველი, მეორე, მესამე ტიპის ნორმირებები). ახლა ვნახოთ როგორ შეიძლება ამ დებულების დამტკიცება. ავიღოთ $^*K$-ველი და მასზე პირველი ტიპის ნორმირება, ამ შემთხვევაში p იყოს არასტანდარტული მარტივი $^*K$-დან . $\nu_p x$-ით აღვნიშნოთ $x \in {^*K}$ ელემენტის რიგი p-ს მიმართ. $\nu_p x \in {^*X}$. A ალგებრულ ფუნქციათა ველისთვის (კოეფიციენტებით K-დან) ავიღოთ ის შემთხვევა, როცა ν_p არ არის ტრივიალურად ნული მთელს $A \setminus \{0\}$-ზე (როგორც ვიცით, $A \subset {^*K}$ და ამიტომ ν_p განსაზღვრულია A-ზე). ავიღოთ ისეთი $\alpha \in A$, რომ $\nu_p \alpha > 0$ და β იყოს A-ს ნებისმიერი

სხვა ელემენტი, $\beta \neq \alpha$, $\beta \neq 0$. ვაჩვენოთ, რომ $\frac{\nu_p \beta}{\nu_p \alpha}$ სტანდარტულია. მართლაც, $\alpha, \beta \in A$ და ამიტომ β ვერ იქნება ტრანსცენდენტული $K(\alpha)$-ს მიმართ (აქ $\alpha \notin K$, რადგან p არასტანდატულია და $\nu_p x = 0$ ყოველი $x \in K \setminus \{0\}$-თვის). აქედან გამომდინარე, არსებობს $f(x, y) \in K[x, y]$ პოლინომი

$$f(x, y) = \sum c_{ij} x^i y^j$$

არანულოვანი კოეფიციენტებით K-დან ისეთი, რომ $f(\alpha, \beta) = 0$. მაშინ არსებობს ამ პოლინომის ორი მონომიალი $c_{ij} x^i y^j$ და $c_{kl} x^k y^l$ ისეთი, რომ

$$\nu_p \left(c_{ij} \alpha^i \beta^j \right) = \nu_p \left(c_{kl} \alpha^k \beta^l \right).$$

აქ ორივე c_{ij} და c_{kl} K ველს ეკუთვნიან და ამიტომ $\nu_p c_{ij} = \nu_p c_{kl} = 0$ და აქედან

$$(i-k) \nu_p \alpha = (l-j) \nu_p \beta .$$

ამ შემთხვევაში $l - j \neq 0$ (რადგან, თუ $l - j = 0$, მაშინ $i - k \neq 0$ და $\nu_p \alpha = 0$, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება). ეს ნიშნავს, რომ

$$\nu_p \beta = \frac{i-k}{l-j} \nu_p \alpha ,$$

ანუ $\nu_p \beta$ მიიღება $\nu_p \alpha$-ს სტანდარტულ რაციონალურ რიცხვზე გამრავლებით. ახლა ავიღოთ

$$\omega_p x = \frac{\nu_p x}{\nu_p \alpha} .$$

მივიღეთ $\omega_p : A \to \mathbb{Q}$ ფუნქცია რაციონალურ რიცხვთა ველში, რომელიც გვაძლევს A-ს დისკრეტულ ნორმირებას, მნიშვნელობებით $\mathbb{Q}$-ში. ეს ნორმირება ინდუცირებულია ν_p ნორმირების მიერ და, ამრიგად, პირველი ტიპის არასტანდარტული ნორმირებისთვის მივიღეთ სტანდარტული ნორმირება A-ზე.

ახლა განვიხილოთ მეორე ტიპის ნორმირება. ამჯერად p ავიღოთ სტანდარტული მარტივი იდეალი K-დან და გავაფართოვოთ ის ${}^*K$-ზე. ასევე

ჩავთვალოთ, რომ სიტუაცია არატრივიალურია და, რადგან p სტანდარტულია, ამჯერად გვაქვს $\alpha \in A \setminus \{0\}$ ისეთი, რომ $\nu_p \alpha$ უსასრულოა (სიმარტივისთვის ჩავთვალოთ, რომ დადებითად უსასრულო). ავიღოთ β ელემენტი A-დან. როგორც ადრე არსებობს $f(x, y)$ პოლინომი ისეთი, რომ $f(\alpha, \beta) = 0$. აქედან ისევ გვაქვს $\nu_p\left(c_{ij}\alpha^i \beta^j\right) = \nu_p\left(c_{kl}\alpha^k \beta^l\right)$, მაშინ ვიღებთ

$$(i-k)\nu_p \alpha = (l-j)\nu_p \beta + \left(\nu_p c_{kl} - \nu_p c_{ij}\right).$$

$l-j$ ისევ არანულოვანია (რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში $\nu_p \alpha$ სასრულია) და შეგვიძლია ტოლობა გადავწეროთ

$$\frac{\nu_p \beta}{\nu_p \alpha} = \frac{i-k}{l-j} + \frac{\nu_p c_{ij} - \nu_p c_{kl}}{(l-j)\nu_p \alpha} \tag{50}$$

სახით. მ,არჯვენა მხარეს ჯამის მეორე კომპონენტა ამ ტოლობაში უსასრულოდ მცირეა (რადგან მრიცხველი სასრულია, ხოლო მნიშვნელი უსასრულო). ეს ნიშნავს, რომ $\frac{i-k}{l-j}$ წარმოადგენს $\frac{\nu_p \beta}{\nu_p \alpha}$-ს სტანდარტულ ნაწილს. ავიღოთ

$$\omega_p \beta = {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p \beta}{\nu_p \alpha}\right) = \frac{i-k}{l-j}$$

და $\omega_p x$ გვაძლევს A-ზე ინდუცირებულ ნორმას მნიშვნელობებით სტანდარტულ რაციონალ რიცხვებში. არ არის რთული იმის შემოწმება, რომ ω_p აკმაყოფილებს ნორმის თვისებებს ν_p-ს ნორმის თვისებებიდან გამომდინარე. ავიღოთ, მაგალითად, გვაქვს

$$\omega_p(\beta\gamma) = {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p(\beta\gamma)}{\nu_p(\alpha)}\right) = {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p(\beta)+\nu_p(\gamma)}{\nu_p(\alpha)}\right) = {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p(\beta)}{\nu_p(\alpha)}\right) + {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p(\gamma)}{\nu_p(\alpha)}\right) = \omega_p \beta + \omega_p \gamma.$$

თუ გვაქვს $\omega_p(\beta+\gamma)$, მაშინ ასეთივე მსჯელობით

$$\omega_p(\beta+\gamma) = {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p(\beta+\gamma)}{\nu_p \alpha}\right)$$

და თუ გვაქვს, მაგალითად, $\nu_p\beta \le \nu_p\alpha$, რაც ნიშნავს, რომ $\omega_p\beta \le \omega_p\gamma$, გვექნება

$$^{\circ}\left(\frac{\nu_p\left(\beta+\gamma\right)}{\nu_p\alpha}\right) \ge {}^{\circ}\left(\frac{\nu_p\beta}{\nu_p\alpha}\right) = \omega_p\beta$$

და აქედან

$$\omega_p\left(\beta+\gamma\right) = \omega_p\left(\beta\right).$$

და ბოლოს, არქიმედული ნორმირებებისთვის ასეთი ნორმირებები მოიცემა მოდულის ფუნქციის მეშვეობით, თუ $^*K$-ს ჩავდგამთ $^*\mathbb{C}$ არასტანდარტული კომპლექსური რიცხვების ველში (რა თქმა უნდა, ასეთი ნორმა "არქიმედულია" არასტანდარტული აზრით, ანუ იყენებს $^*N$ არასტანდარტული ნატურალების არსებობის ფაქტს).

ვთქვათ, $|x|$ არ არის სასრული ყველგან A-ზე (სხვა შემთხვევაში სტანდარტულ ნორმასთან გვაქვს საქმე) და აქედან, თუ გავითვალისწინებთ ნორმის თვისებებს შებრუნებული ფუნქციებისთვის, უსასრულოდ მცირეა A-ს რაიმე ელემენტისთვის. ავიღოთ $\alpha \in A$ ისეთი, რომ $|\alpha|$ უსასრულოდ მცირეა, მაშინ $\alpha \notin K$. ავიღოთ ისევ $\beta \in A$ და $f\left(x,y\right)$ პოლინომი ისეთი, რომ $f\left(\alpha,\beta\right)=0$. ავიღოთ $c_{ij}x^iy^j$ ისეთი, რომ $\left|c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|$-მ მიიღოს უდიდესი მნიშვნელობა მონომიალებს შორის, მაშინ ნებისმიერი სხვა $c_{kl}\alpha^k\beta^l$-თვის

$$\left|\frac{c_{kl}\alpha^k\beta^l}{c_{ij}\alpha^i\beta^j}\right| \le 1,$$

და თანაც ეს თანაფარდობა არ შეიძლება იყოს უსასრულოდ მცირე ყველა ასეთი თერმისთვის, რადგან ამ შემთხვევაში $\dfrac{\left|f\left(\alpha,\beta\right)-c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}{\left|c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}$ იქნებოდა უსასრულოდ მცირე, მაგრამ $f\left(\alpha,\beta\right)=0$ და

$$\frac{\left|f\left(\alpha,\beta\right)-c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|}{\left|c_{ij}\alpha^i\beta^j\right|} = 1,$$

ანუ არსებობს $c_{kl}\alpha^k\beta^l$ მონომიალი, რომლისთვისაც $\left|\frac{c_{kl}\alpha^k\beta^l}{c_{ij}\alpha^i\beta^j}\right|$ არ არის უსას-

რულოდ მცირე და, ამრიგად, მისი ლოგარითმი სასრულია

$$\ln\left|c_{kl}\right|-\ln\left|c_{ij}\right|+\left(k-i\right)\ln\left|\alpha\right|+\left(l-j\right)\ln\left|\beta\right|=-\mu \quad \left(\mu\geq 0\right).$$

ამ ჯამში პირველი ორი ლოგარითმი სასრულია და შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left(k-i\right)\ln\left|\alpha\right|+\left(l-j\right)\ln\left|\beta\right|=\nu ,$$

სადაც ν სასრულია და $\ln\left|\alpha\right|$ უსასრულოა, მაშინ

$$\frac{\ln\left|\beta\right|}{\ln\left|\alpha\right|}=\frac{i-k}{l-j}+\frac{\nu}{\left(l-j\right)\ln\left|\alpha\right|}.$$

აქ მარჯვენა მხარის მეორე წევრი უსასრულოდ მცირეა. თუ ახლა ავიღებთ $\frac{\ln\left|\beta\right|}{\ln\left|\alpha\right|}$ სტანდარტულ ნაწილს, გვექნება

$$^{\circ}\left(\frac{\ln\left|\alpha\right|}{\ln\left|\beta\right|}\right)=\frac{i-k}{l-j}. \tag{51}$$

ისევე, როგორც ადრე გავუტოლოთ ეს სტანდარტული რაციონალური რიცხვი $\omega\beta$-ს, მივიღებთ $\omega\beta$-ნორმას ნებსმიერი β-თვის A-დან.

დასკვნა

ერთი შეხედვით არასტანდარტული ანალიზის კავშირი მათემატიკურ ლოგიკასთან და აქედან გამომდინარე მისი ზედმეტად “ფორმალისტური” მეთოდები პრობლემას ქმნიან მისი გამოყენებისათვის “ჩვეულებრივ” მათემატიკაში. მაგრამ არ უნდა დაგვავიწყდეს რომ მიუხედავათ მისი გენეზისი თავისებურებების არასტანდარტულ ანალიზში, განსაკუთრებით მის საწყის ვერსიაში, საქმე გვაქვს ნამდვილ რიცხვთა ველის მოდელთან რომელიც სუფთა ალგებრული თვალსაზრისით ჩვეულებრივ ნულ-მახასიათებლიან ველს წარმოადგენს. აქედან გამომდინარე მისი გამოყენება “ჩვეულებრივ” მათემატიკაში, და კერძოთ ველთა თეორიის ზოგიერთ საკითხთან მიმართებაში სავსებით შესაძლებელია. ვნახეთ, რომ არასტანდარტული ნამდვილი რიცხვის, სტანდარტული ნამდვილების ველის მიმართ ტრანსცედენტულობის გამოყენებით, შესაძლებელია ნამდვილთა ზოგიერთი არასტანდარტული გაფართოების გაიგივება ალგებრულ ფუნქციათა ველთან და, აქედან გამომდინარე, სტანდარტული ნორმების ინდუცირება არასტანდარტული “შინაგანი” ნორმების მეშვეობით.

ასეთ ალგებრული ურთიერთქმედება სტანდარტულ და არასტანდარ-ტულ მოდელებს შორის მცირე ნაწილია იმ შესაძლებლობების, რომლებსაც არასტანდარტულია ანალიზი“გადატანის” პრინციპის გამოყენების გარეშეც კი იძლევა. ამრიგად, სავსებით შესაძლებელია არასტანდარტული ანალი-ზის გამოყენების სფეროს შემდგომი გაფართოება “ჩვეულებრივ”მათემატი-კაში, რაც მათემატიკის და მათემატიკური ლოგიკის ურთიერთქმედების სფეროს მნიშვნელოვანი გაფართოების შესაძლებლობაზე მიგვითითებს.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Robinson, A., Nonstandard Analysis, North-Holland, 1966 (2nd revised edition in 1974, 3rd edition in 1996, Princeton University Press).
2. *M. Machover, J. Hirschfeld* (1969), Lectures on non-standard analysis. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 94 *Springer-Verlag, Berlin-New York.*
3. Chang, C.C., and H.J. Keisler, Model Theory, North-Holland, 1978.
4. Łoš, J., Quelques remarques, theorèmes, et problèmes sur les classes definissables d’algebras, in: Skolem et al., eds., Mathematical interpretations of formal systems, North-Holland, 1955, 98–113.
5. *B. L. van der Waerden* (1967), Algebra. Teil II. Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Fünfte Auflage. Heidelberger Taschenbücher, Band 23 *Springer-Verlag, Berlin-New York* (in German).
6. *W. A. J. Luxemburg and A. Robinson* (Eds.) (1972), Contributions to non-standard analysis. *A collection of papers based on lectures given at the Symposium on Non-standard Analysis, Oberwolfach*, July 19 – July 25, 1970. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 69. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London.*

7. *E. Weiss* (1963), Algebraic number theory. *McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-San Francisco-Toronto-London*.
8. *H. Rasiowa, R. Sikorski* (1963), The mathematics of metamathematics. *Monografie Matematyczne,* Tom 41 *Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw*.
9. *S. MacLane* (1971), Categories for the working mathematician. *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 5. *Springer-Verlag, New York-Berlin*.
10. *P. Freyd* (1972), Bull. Austral. Math. Soc. 7, 1-76.
11. L. L. Esakia (1979), On the theory of modal and superintuitionistic systems. (Russian) *Logical inference (Moscow, 1974)*, 147-172, *"Nauka",Moscow*.
12. Heath T.L., The Works of Archimedes, with the Method of Archimedes, Dover Publications, 1912, chapter VII.
13. Euler, L., Introduction ad Analysin Infinitorum, 1748.
14. Luxemburg, W.A.J., What is Nonstandard Analysis?, American Mathematical Monthly, 80, 1973, 38–67.
15. Cauchy, A.L., Course d'analyse de l'´ecole royale polytechnique, 1821.
16. Lakatos, Imre, Cauchy and the Continuum: The Significance of Non-standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics, The Mathematical Intelligencer, 1978, 151–161.
17. Robinson, A., Non-standard analysis, Proceedings Royal Academy, Amsterdam, Series A, 64, 1961, 432–440.
18. Hahn, H., Über die nichtarchimedische Groszensysteme, S.-B. Wiener Akademie, Math.-Natur. Kl. 116, Abt. IIa, 1907, 601–655.
19. Skolem, T., Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels ¨ endlich order abzahlbare unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariabelen, Fund. Math. 23, 1933, 150–161,
20. Hewitt, E. Rings of real-valued continuous functions I, Trans. Amer. Math. Soc. 64, 1948, 45–99.
21. Laugwitz, D., and C. Schmieden, Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung, Mathematische Zeitschrift 69, 1958, 01–39.

22. Luxemburg, W.A.J., Nonstandard Analysis, Lectures on A. Robinson's theory of infinitesimal and infinitely large numbers, Caltech Bookstore, 1962.
23. Nelson, E., Internal set theory, Bull. Amer. Math. Soc. 83, 1977, 1165–1193.
24. Robert, A., Nonstandard Analysis, Wiley, 1988.
25. Diener, F., et G. Reeb, Analyse Non Standard, Hermann, 1989. 143-144.
26. Chwistek, L., Über die Hypothesen der Mengenlehre, Mathematische Zeitschrift 25, 1926, 439–473.
27. Chwistek, L., The Limits of Science, translated from the Polish, Routledge Kegan Paul, 1948.
28. Beeson, M.J., Foundations of Constructive Mathematics, Springer, 1985.
29. Bishop, E., and D. Bridges, Constructive Analysis, Springer, 1985.
30. Beth, E.W., The Foundation of Mathematics, North-Holland, 1965.
31. Beth, E.W., Mathematical Thought, Reidel, 1965, chapter V.
32. Heyting, A., Intuitionism, An Introduction, North-Holland, 1966.
33. Potter, M.D., Sets: An Introduction, Clarendon Press, 1990.
34. Keisler, H.J., Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach, Prindle, Weber Schmidt, 1986.
35. Berg, I.P. van den, en T. Sari, Inleiding tot de infinitesimaalrekening, (Introduction to the infinitesimal calculus; Lecture Notes, University of Groningen, 1988; private communication; in Dutch).
36. Berg, I.P. van den, Nonstandard Asymptotic Analysis, Lecture Notes in Mathematics, nr. 1249, Springer, 1987.
37. Koudjeti, F., Elements of External Calculus with an Application to Mathematical Finance, thesis, University of Groningen, 1995.
38. Dunford, N., J.T. Schwartz, Linear Operators, part I, Interscience, 1957.
39. ალ. კლიმიაშვილი, დ. კიკნაძე, კ. კამკამიძე, მაღალი ძაბვის ამომრთველებისათვის სარემონტო პერიოდების პროგნოზირება, ჰიდროინჟინერია, #1-2 (13-14), თბილისი, 2012;

40. Al. Klimiashvili, Construction of Monadic Heyting Algebra in any Logos, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბე, ტომი 8, #3, 2014;
41. ალ. კლიმიაშვილი, ონოს სამეულის სტრუქტურის აგება ნებისმიერ ლოგიკაში, ჰიდროინჟინერია, #1-2 (19-20), თბილისი, 2015;
42. Al. Klimiashvili, Algebraic Function Field's and Non-standard Analysis, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბე, #3, 2015;
43. ალ. კლიმიაშვილი, არასტანდარტული ანალიზი და ალგებრულ ფუნქციატა ველები, სტუ–ს 85 საერთაშორისო სტუდენტური კონფერენცია, თბილისი, 2015.