საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მურმან კინწურაშვილი

ჰაარის ნულ-სიმრავლეთა წარმომქმნელებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივნისი, 2015

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

კომპიუტერული ინჟინერიის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. გოგი ფანცულაია

რეცენზენტები: ---------------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის ”------” ----------------, --------- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის -----------------------

----------------------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის

სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2015 წელი

ავტორი: კინწურაშვილი მურმანი

დასახელება: ”ჰაარის ნულ-სიმრავლეთა წარმომქმნელებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ“

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

რეზიუმე

ნაშრომში ”ჰაარის ნულ-სიმრავლეთა წარმომქმნელებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ“ განხილულია ”ჰაარის ნულ სიმრავლეთა ზოგადი თეორიის ზოგიერთი ასპექტი და მათი ზოგიერთი გამოყენება.

ნაშრომში განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ის ძირითადი ცნებები და დამხმარე დებულებები, რომლებიც არსებითად გამოიყენება აღნიშნულ კვლევებში.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა ჰაარის ნულ სიმრავლეთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ძირითადი მახასიათებელი პარამეტრების ძალდებული შეფასებების კლასის სტრუქტურის შესწავლას. კერძოდ, განიხილება ამოცანა, რატომაა რომ ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა მაქსიმალური დასაჯერობის ნულ ჰიპოთეზის ტესტის საშუალებით.

მოყვანილია იაკობ კოენის [Cohen, Jacob., The Earth Is Round (p < .05), *American Psychologist*, **49 (12)**(1994), 9971003] და ჯან ნუნალის [Nunnally, Jum., The place of statistics in psychology, *Educational and Psychological Measurement*, **20 (4)** (1960), 641-650] მოსაზრებების მართებულობის დასაბუთება წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის მაგალითზე. კერძოდ, ჰაარის ნულ სიმრავლეების ტექნიკის, კერძოდ “გავრცელების“ ტერმინებში ახსნილია თუ რატომაა ნულ ჰიპოთეზა უარყოფილი ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის. აღნიშნული ამოცანის გადასაჭრელად შემოღებულია სუბიექტური და ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა ცნებები და ნაჩვენებია, რომ წრფივი ერთგანზომილებიანი სტოქასტური მოდელის შემთხვევაში, როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი, უსასრულო შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის სუბიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას. განიხილება [Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire G-powers of shift-measures on R, *Ukrainian Mathematical Journal,* v. 65, issue 4 (2013), 470–485] ნაშრომში აგებული სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას იმ შემთხვევაშიც, როცა თეთრი ხმაურისათვის არ არსებობს პირველი რიგის მომენტი. აქ არსებითად გამოიყენება [0,1] ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტექნიკა. ჰაარის ემბივალენტობის ერთი საკმარისი პირობის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ ეს სტატისტიკა წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

[G.Pantsulaia, On a certain partition of the non-locally compact Abelian Polish group R^{∞}, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 149 (2009), 75–86]

ნაშრომში აგებული R^{∞} სივრცის ჰაარის ემზივალენტებად დახლეჩის საშუალებით წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში აგებულია სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება იმ შემთხვევაში, როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი. ამავე მოდელში ნაჩვენებია, რომ ყოველთვის არის შესაძლებელი სასარგებლო სიგნალის სუბიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებულ შეფასების ისეთი მოდიფიკაცია, რომელიც წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

ნაშრომის გარკვეული ნაწილი ეთმობა უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგებას უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდებით. არსებითად გამოიყენება უსასრულო შერჩევათა R^{∞} სივრცის ისეთი მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩის აგება, რომლის ყოველი ელემენტი ჰაარის ემზივალენტია. გამოიყენება კონკრეტული სეპარაბელური ბანახის სივრცეების სპეციფიკური თვისებები ანალოგიური დახლეჩის ასაგებად. აქ არსებითად გამოიყენება კონკრეტულ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში კომპაქტების სტრუქტურული თვისებები(მაგალითად, არცელას თეორემა, კოლმოგოროვის თეორემა, ჰილბერტის თეორემა, რისის თეორემა და სხვა).

აღნიშნულ ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები:

- უსასრულო განზომილებიანი სეპარაბელური ტოპოლოგიური ვექტორული V სივრცის უნივერსალურად ზომადი X სიმრავლე არის ჰაარის ემზივალენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ჰაარის ნულ-სიმრავლეების μ წარმომქნელისათვის ერთდროულად სრულდება შემდეგი ორი პირობა $\mu(x) > 0$ და $\mu(V \setminus X) > 0$;
- უარყოფითად არის გაცემული პასუხი ტეფერ გილის ერთ შეკითხვაზე თუ რამდენადაა შესაძლებელი უსასრულო განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის ზომების აღწერა ლებეგის ზომის კერძო ანალოგების ტერმინებში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს ამავე სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის ზომა λ და ხარაზიშვილი-იამასაკის ზომა μ, ისეთი რომ შესრულდეს ტოლობა $(\forall X)(X \in \mathrm{B}(B) \to \lambda(X) = \int_X e^{-\pi\|x\|^2} d\mu(x))$.
- ჰაარის ემზივალენტის ცნების საშუალებით წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში შემუშავებულია ერთი მიდგომა, რომელიც საშუალებას იძლევა სასარგებლო სიგნალის ყველა უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებებათა კლასის დაყოფას სუბიექტურ და ობიექტურ შეფასებებად;
- როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი, წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში დამტკიცებულია, რომ

უსასრულო შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის სუბიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

- უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდების გამოყენებით აგებულია უსასრულო შერჩევათა R^{∞} სივრცის მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად.
- R^{∞} სივრცის ჰაარის ებვივალენტებად დახლეჩის გამოყენებით წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში მოცემულია სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა აგების არაეფექტური კონსტრუქცია.
- შემუშავებულია ეფექტური მეთოდი წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა ასაგებად.
- ზოგიერთი ბანახის სივრცის სპეციფიკური თვისებების გამოყენებით უნივერსალურად ზომადი სიმრავლისათვის დადგენილია საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს მის ჰაარის ემზივალენტობას. ეს მეთოდი გამოიყენება ამავე სივრცეების ჰაარის ემზივალენტებად მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩების ასაგებად

Abstract

In the thesis “On generators of shy-sets and some of their applications” there are considered some topics of the theory of Haar-nul sets and some of their applications.

There are considered such main notions and auxiliary statements from the set theory, measure theory, probability theory, mathematical statistics, mathematical analysis and functional analysis, which are applied essentially in these investigations.

The main part of the thesis is devoted in studying the structure of well-founded estimates of characteristic parameters of stationary statistical structures.In particular, there is considered a question asking why is the null hypothesis rejected for “almost every” infinite sample by some hypothesis testing of maximal reliability.

There are given the confirmation Jacob Cohen [Cohen, Jacob., The Earth Is Round ($p < .05$), *American Psychologist*, **49 (12)**(1994), 9971003] and Jum Nunnally [Nunnally, Jum.,The place of statistics in psychology, *Educational and Psychological Measurement*, **20 (4)** (1960), 641-650] conjectures by the example of one-dimensional stochastic model. In particular, by using the technique of the theory of Haar null sets, it is explained why the null hypothesis is sometimes rejected for “almost every” infinite sample by some hypothesis testing of maximal reliability. In order to resolve this problem there are introduced notions of subjective and objective infinite-sample well-founded(consistent) estimates and it is shown that in the linear one-dimensional stochastic model when expectation of the white noice exists, an infinite-sample average is a subjective infinite-sample well-founded estimate of a useful signal. It is considered an estimate constructed in [Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire G-powers of shift-measures on R, *Ukrainian Mathematical Journal,* v. 65, issue 4 (2013), 470–485] which is an infinite-sample well-founded estimate of the useful signal in the linear one-dimensional stochastic model when expectation of the white noice does not exist.

This approact uses the technique of uniformly distributed (on the interval [0,1]) real-valued sequences. By using a certain sufficient condition under which a set is Haar ambivalent, it is proved that this estimate is an objective infinite-sample well-founded estimate of the useful signal in the same model.

By using the partition of the space R^∞ into Haar ambivalents, constructed in [G.Pantsulaia, On a certain partition of the non-locally compact Abelian Polish group R^∞, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 149 (2009), 75–86] , an example of an objective infinite-sample well-founded estimate of a useful signal is constructed in the linear one-dimensional stochastic model when expectation of the white noice does not exist. By using this approach it is demonstrated that an arbitrary subjective infinite-sample well-founded estimate has a modification which is objective.

Main part of the thesis is devoted to construction of infinite-sample well-founded estimates by using methods of infinite combinatorics. There is used a construction of the maximal(in the sense of cardinality) partition of infinite sample space R^{∞} into Haar ambivalents. There are used specific properties of infinite-dimensional Banach spaces for a construction of analogous partitions.

We use structural properties of compact sets in some separable Banach spaces (Artcela theorem, Colmogorov theorem, Hilbert theorem, Riss theorem and so on) In the present thesis the following results are obtained:

- It is proved that an universally measurable set X in a infinite-dimensional Polish topological vector space V is Haar ambivalent if and only if for an arbitrary generator of shy sets μ in V the following two conditions $\mu(x) > 0$ and $\mu(V \setminus X) > 0$ hold true simultaneously;
- It answered negatively Tepper Gill's question asking whether there is possible to describe Gaussian measures in terms of partial analogs of the Lebesgue measure in infinite-dimensional separable Banach spaces. In particular, it is established that there does not exist Gaussian measure λ and Yamasaki-Kharazishvili measure μ, such that

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(B) \to \lambda(X) = \int_X e^{-\pi\|x\|^2} d\mu(x)) .$$

- By virtue the notion of the Haar ambivalent a certain approach is introduced in the case of a linear one-dimensional stochastic model which allows us a possibility to partitate the class of all infinite-sample well-founded estimates into subjective and objective estimates;
- It is proved that when there exists an expectation for a white noice in the linear one-dimensional stochastic model, then an infinite-sample average is a subjective infinite-sample well-founded estimate of a useful signal.
- By virtue methods of infinite combinatorics it is constructed a maximal (in the sense of cardinality) partition of the infinite-sample space R^{∞} into Haar ambivalents;
- By using a partition of the space R^{∞} into Haar ambivalents, it is given non-effective constructions of objective and strong objective infinite-sample well-founded estimates of a useful signal in the linear one-dimensional stochastic model;
- It is elaborated an effective method for a construction of objective and strong objective infinite-sample well-founded estimates of a useful signal in the linear one-dimensional stochastic model;.
- By using specific properties of some Banach spaces, for a universally measurable set it is established a sufficient condition under which this set is Haar ambivalent. This approach is used for a construction of maximal (in the sense of cardinality) partitions into Haar ambivalents of these spaces.

შინაარსი

შესავალი... 12

თავი I. ძირითადი კონცეფციები 22

თავი II. ჰაარის ნულ სიმრავლეების წარმომქნელები 23

2.1. shy- სიმრავლეები და მათი თვისებები 43

2.2. shy- სიმრავლეთა გენერატორები 47

2.3 shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორები პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში... 53

2.4. ხარაზიშვილის shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორისათვის ტეფერ გილის მიერ დასმული ერთი ამოცანის შესახებ 58

2.5. კვაზიფიტურობის პრობლემა გაუსის shy-სიმრავლეთა გენერატორებისათვის……….. 61

2.6 ჰაარის ემბივალენტის დახასიათება shy- სიმრავლეთა გენერატორების ტერმინებში... 63

თავი III. ძვრა-ზომათა N-ხარისხების ოჯახის განცალებადობის შესახებ R^{∞} სივრცეში ....……………………….……….... 66

3.1. ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახები 66

3.2 ზოგიერთი დამხმარე ცნება და დებულება 68

თავი IV. ჰაარის ემბივალენტის გამოყენება წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო-შერჩევითი ძალდებული შეფასებების კლასიფიკაციისათვის .. 79

4.1 შესავალი 79

4.2 რატომაა რომ ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა მაქსიმალური დასაჯერობის ნულ ჰიპოთეზის ტესტის საშუალებით ?.. 81

თავი V. სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა მაგალითები წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში 89

5.1. შესავალი... 89

5.2. ფუნქციონალური ანალიზის, ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება 90

5.3. ამორჩევის აქსიომის საშუალებით წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგება, როცა $\Theta = R$ 97

5.4. წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ობიექტური და ძლერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია, როცა $\Theta = [0,1]$ 98

5.5. სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული სტატისტიკის ერთი კონსტრუქციის შესახებ წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა $\Theta = R$ 101

თავი VI. არა-SHY - სიმრავლეობის ერთი საკმარისი პირობის შესახებ ბანახის ზოგიერთ კლასიკურ სივრცეში 103

6.1. შესავალი 103

6.2. ზოგიერთი დამხმარე ცნება და ფაქტი ზომის თეორიიდან და ფუნქციონალური ანალიზიდან 105

6.3. ძირითადი შედეგები 135

თავი VII. წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ჰაარის ემბივალენტთა ოჯახების მაგალითები ზოგიერთ კლასიკურ ბანახის სივრცეში 147

7.1. წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ჰაარის ემბივალენტთა ოჯახის ერთი მაგალითის შესახებ $C^{\infty}[0,1]$ სივრცეში.. 138

7.2 l^{∞} სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად 140

7.3. $C_{\infty}(R)$ სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად.. 141

7.4. $l^{\infty}(T)$ სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად.. 143

დასკვნები.. 145

გამოყენებული ლიტერატურა 149

მადლიერება

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელს პროფესორ გოგი ფანცულაიას მნიშვნელოვანი რჩევებისა და გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

შესავალი

ნაშრომი ეხება ჰაარის აზრით ნულ-სიმრავლეთა წარმომქმნელების თეორიის აქტუალურ საკითხებს და მათ ზოგიერთ გამოყენებას სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში.

საკვლევი პრობლემის აღწერა. კარგადაა ცნობილი, რომ ინფორმაცია ”ალბათობით ერთი”, მთელ რიგ შემთხვევებში, არის მეტად ღარიბი რაც შეიძლება ჩაითვალოს არათავსებადი სტატისტიკური გადაწყვეტილებების მიღების ერთ-ერთ ძირითად მიზეზად. მართლაც.

ვთქვათ, $\mathbf{V}$ წარმოადგენს უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეს და m წარმოადგენს ბორელის სიგმა-სასრულ (კერძოდ, ალბათურ) ზომას $\mathbf{V}$-ზე.

მოდით გავაანალიზოთ, თუ რა სახის ინფორმაციას იძლევა შემდეგი წინადადება:

“**$\mathbf{V}$ სივრცის m თითქმის ყველა ელემენტი აკმაყოფილებს** P **პირობას”,** სადაც P აღნიშნავს რაიმე წინადადებას, რომელიც გამოთქმულია $\mathbf{V}$ სივრცის ელემენტების ტერმინებში.

უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ყოველი სიგმა-სასრული ბორელის ზომა m თავმოყრილია $\mathbf{V}$-ში კომპაქტურ $\{F_k : k \in N\}$ ქვესიმრავლეთა თვლად გაერთიანებაზე და არსებობს ისეთი ვექტორი $e \in B$, რომ ამ ვექტორით წარმოქმნილი $L = L(e)$ წრფის ყოველი ტრანსლიატის $\cup\{F_k : k \in N\}$ სიმრავლესთან თანაკვეთა შეიცავს არაუმეტეს ერთ წერტილს. შესაბამისად, $\cup\{F_k : k \in N\}$ არის ეგრეთ წოდებული shy-სიმრავლე; ამასთან დაკავშირებით, იხილეთ:

[B.R. Hunt, T. Sauer, J.A. Yorke, *Prevalence: A Translation-Invariant “Almost Every” On Infinite-Dimensional Spaces,* Bulletin of the American Mathematical Society (New Series), vol. 27, n. 2, 1992, pp.217–238],

სადაც ეს ცნება არის შემოტანილი და განხილული.

ამგვარად, m ზომის მატარებელი (მზიდი) შეიძლება განხილულ იქნას როგორც “ზედაპირი” e ვექტორის მიმართულებით, რომელიც მის

ზომადობასთან ერთად გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, ზემოთაღნიშნული წინადადებით გადმოცემული ინფორმაცია, საზოგადოდ, შეიძლება იყოს ძალიან მწირი (რა თქმა უნდა, თუ m არის **V**-ზე განსაზღვრული არანულოვანი სიგმა-სასრულო ბორელის ზომა). ამ მიზეზის გამო, ძალიან ხშირად სხვადასხვა სისტემების ყოფაქცევის შესწავლა უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ **V** სივრცეზე განსაზღვრული სიგმა-სასრულო ბორელის ზომის ტერმინებში არ არის დამაკმაყოფილებელი და ის საჭიროებს მის შეცვლას აღნიშნულ სივრცეებში "მცირე" (ზომის თვალსაზრისით) სიმრავლეთა კონცეფციის უფრო ფაქიზი ანალიზით. ამ გარემოებებს აუცილებლად მივყავართ ზომის თეორიის "ნული ზომის'' და "თითქმის ყველგან'' ტერმინების გადახედვისა და მოდიფიკაციისაკენ. ასეთი გადახედვა და მოდიფიკაცია შესაძლებელია განხორციელდეს გარკვეული სპეციფიკური ბორელის ზომების განხილვით, რომლებიც არ არიან კონცენტრირებული სასრულო-განზომილებიანი ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეების ღარიბ (ამა თუ იმ თვალსაზრისით) სიმრავლეებზე ან ბორელის ალბათურ ზომათა გარკვეული ოჯახების საშუალებით. ამ გარემოებას თავის დროზე ყურადღება მიაქციეს ქრისტენსენმა (1973), ჰანტმა, საუერმა და იორკემ (1992), დიოტლიმ (1992) და სხვა კარგად ცნობილმა მათემატიკოსებმა. მსგავსად სასრულ-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეში "ლებეგის ზომის მიმართ თითქმის ყველგან" კონცეფციისა, მათ მიერ უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ-ვექტორულ სივრცეებში შემოტანილი *"გავრცელება"* არის ძვრების მიმართ ინვარიანტული. აღნიშნულ სივრცეებში სპეციფიკური ზომის არ არსებობის მიუხედავად, მათი ცნება *"გავრცელება"* არის განსაზღვრული კომპაქტური მზიდის მქონე ბორელის ალბათური ზომების ტერმინებში და ის წარმოადგენს shy - სიმრავლის, ან რაც იგივეა, ჰაარის ნულ სიმრავლის დამატებას. უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში ტერმინი *"გავრცელება"* არის უფრო მისაღები ვიდრე ცნებები *"ღია და მკვრივი"* ან *"უნივერსალური"* როცა სასურველია ფუნქციათა გარკვეულ კლასში რაიმე თვისების გარშემო

ალბათური შედეგის ჩამოყალიბება. იმის გამო, რომ shy--სიმრავლის, ან რაც იგივეა, ჰაარის ნულ სიმრავლის ცნება არსებით როლს თამაშობს *"გავრცელების"* განსაზღვრაში, ამიტომ თავის დროზე დაისვა საკითხი თუ რომელი ზომა წარმოადგენს shy--სიმრავლეთა გენერატორს, ან რაც იგივეა, ჰაარის ნულ სიმრავლეების წარმომქნელს რის ქვეშაც იგულისხმება ისეთი ბორელი ზომა რომლის მიმართაც ყოველი ნულ ზომადი ბორელის ქვესიმრავლე იმავდროულად წარმოადგენს shy-სიმრავლეს. შევნიშნოთ, რომ პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცეებისათვის *shy-სიმრავლეთა გენერატორის ცნება* პირველად შემოტანილი იყო გ.ფანცულაიას მიერ [25] ნაშრომში. იმავე ნაშრომში მოცემული იყო მათი ზოგიერთი საინტერესო გამოყენება. სახელდობრ, ნაჩვენები იყო რომ პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებზე განსაზღვრული *shy*--სიმრავლეთა გენერატორების კლასი შეიცავს სპეციფიკურ ზომებს, რომლებიც ნატურალურად წარმოქმნიან ადრე *„ბრმად"* შემოტანილ *shy*--სიმრავლეთა კლასის ქვეკლასებს. უფრო მეტიც, ნაჩვენები იყო რომ ასეთი ზომები(σ-სასრული ზომებისაგან განსხვავებით) ფლობენ საინტერესო, ზოგჯერ მოულოდნელ, გეომეტრიულ თვისებებს.

[1] ნაშრომში, პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის შემთხვევაში, პირველად იქნა შემოტანილი ეგრეთწოდებული ჰაარის *ემბივალენტის* ცნება, რომელიც მეტად სასარგებლო აღმოჩნდა ანალიზის მთელი რიგი საკითხების კვლევისას. ამიტომ მეტად აქტუალურია საკითხი იმის შესახებ შესაძლებელია თუ არა ჰაარის *ემბივალენტობის* დახასიათება პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული *shy*--სიმრავლეთა გენერატორების კლასის ტერმინებში.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ გარკვეულ მსჯელობას, რომელიც მიუთითებს ჰაარის ემბივალენტის ცნების მნიშვნელობაზე ობიექტური სტატისტიკების ცნების შემოტანისას.

კარგადაა ცნობილი, რომ დაკვირვებადი ზოგიერთი (ფიზიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური და სხვა) შემთხვევითი პროცესის რიცხვითი

მახასიათებლები არ იცვლება დროის დინების მიუხედავად. ასეთი პროცესები აღიწერებიან ეგრეთ წოდებული სტაციონარული სტოქასტური პროცესებით (იხილეთ [17]), ხოლო ამ პროცესებით წარმოქმნილ შესაბამის ალბათურ ზომებს უწოდებენ სტაციონარულ ალბათურ ზომებს.

ვთქვათ, $\boldsymbol{\Theta}$ არის ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილი უსასრულო-განზომილებიანი ტოპოლოგიური $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ვექტორული სივრცის ვექტორული ქვესივრცე.

ინფორმაციის გადაცემის მათემატიკურ თეორიაში განხილვის ობიექტია შემდეგი ერთ-განზომილებიანი წრფივი სტოქასტური სისტემა

$$(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}} = (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}} + (\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}}, \tag{1}$$

სადაც $(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}} \in \boldsymbol{\Theta}$ არის სასარგებლო სიგნალი, $(\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}}$ არის $(\boldsymbol{\Omega},\mathbf{F},\mathbf{P})$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა (ეგრეთ წოდებული "თეთრი ხმაური") და $(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}}$ არის გარდაქმნილ სიგნალთა მიმდევრობა. ვთქვათ, $\boldsymbol{\mu}$ არის $\mathbf{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ალბათური ზომა, რომელიც წარმოქმნილია $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{1}}$ შემთხვევითი სიდიდით. მაშინ ალბათური $\boldsymbol{\mu}$ ზომის $\mathbf{N}$-ხარისხი $\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{N}}$ ემთხვევა "თეთრი ხმაურით" განსაზღვრულ ალბათურ ზომას, ე.ი.

$$(\forall \mathbf{X})(\mathbf{X} \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}) \to \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{N}}(\mathbf{X}) = \mathbf{P}(\{\boldsymbol{\omega} : (\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}))_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}} \in \mathbf{X}\})),$$

სადაც $\mathbf{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ აღნიშნავს $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$-სივრცის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრას.

ინფორმაციათა გადაცემის თეორიის ძირითადი დაშვებაა, რომ ბერის ზომა λ, განსაზღვრული გარდაქმნილი $(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}}$ ხმაურით, ემთხვევა $\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{N}}$ ზომის გარკვეულ $(\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{N}})_{\boldsymbol{\theta}_0}$ ძვრას, ე.ი.,

$$(\forall X)(X \in B(R^N) \to \lambda(X) = (\mu^N)_{\theta_0}(X)), \tag{2}$$

სადაც $(\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{N}})_{\boldsymbol{\theta}_0}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{N}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{0}})$ როცა $\mathbf{X} \in \mathbf{B}(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$.

ჩვენ განვიხილავთ კერძო შემთხვევას როცა სასარგებლო სიგნალთა ვექტორულ ქვესივრცეს აქვს შემდეგი სახე

$$\boldsymbol{\Theta} = \{(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta},\cdots) : \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}\}.$$

$\theta \in \mathbf{R}$ პარამეტრისათვის μ_θ^N ზომას ეწოდება μ ზომის θ ძვრის (რომელიც აღინიშნება μ_θ-ით და განისაზღვრება

$$(\forall X)(X \in B(R) \to \mu_\theta(X) = \mu(X - \theta_0))$$

ფორმულით) $\mathbf{N}$-ური ხარისხი.

სამეულს $(\mathbf{R}^N, \mathbf{B}(\mathbf{R}^N), \mu_\theta^N)_{\theta\in\mathbf{R}}$ ეწოდება ერთ-განზომილებიანი წრფივი სტოქასტური (1) სისტემის აღმწერი სტატისტიკური სტრუქტურა.

ვთქვათ, $S(\Theta)$ არის Θ-სიმრავლის წერტილოვანი სიმრავლეებით წარმოქმნილი მინიმალური სიგმა-ალგებრა. $(B(R^\infty), S(\Theta))$-ზომად ასახვას $T : R^N \to \Theta$ ეწოდება θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\mathbf{R}}$ ოჯახისათვის, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \&\ T\ ((x_k)_{k\in N}) = \theta\}) = 1$$

ყოველი $\theta \in \mathbf{R}$ პარამეტრისათვის.

თუ პარამეტრების ოჯახი თვლადია, ე.ი. $\Theta = \{\theta_k : k \in N\}$ და $T : R^N \to \Theta$ არის θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისათვის, მაშინ

$$A_k = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \&T((x_k)_{k\in N}) = \theta_k\}$$

იქნება $H_{0:} : \theta = \theta_k$ ჰიპოთეზის მიღების არე, ხოლო $(A_k)_{k\in N}$ იქნება R^N სივრცის დახლეჩა. ამ შემთხვევაში ბუნებრივად ისმის ამოცანა იმის შესახებ, თუ რამდენადაა შესაძლებელი ჰაარის ნულ სიმრავლეთა თეორიის გამოყენება θ პარამეტრის ”კარგი” შეფასებების კლასის სტრუქტურის შესასწავლად. შევნიშნოთ, რომ შეუძლებელია რომ $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის ყოველი ელემენტი იყოს ჰაარის ნულ სიმრავლე, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში $R^N = \cup_{k\in N} A_k$ წარმოდგენის გამო მივიღებდით, რომ R^N სივრცე წარმოადგენს ჰაარის ნულ სიმრავლეს. ამის გამო ჩვენ ვასკვნით, რომ არსებობს $k_0 \in N$ ისეთი, რომ A_{k_0} არ არის ჰაარის ნულ სიმრავლე. თუ A_{k_0} „გავრცელებაა“, მაშინ ყოველი $A_k (k \neq k_0)$ იქნება ჰაარის ნულ სიმრავლე და ჩვენ აღმოვაჩენთ, რომ პრაქტიკულად „თითქმის ყველა“ შერჩევისათვის მოხდება $H_0 : \theta = \theta_{k_0}$

ჰიპოთეზის მიღება, რის გამოც წინასწარ სრულად უგულებელყოფილია სხვა ალტერნატიული ჰიპოთეზები. სხვა სიტყვებით, θ_{k_0} პარამეტრი სხვა პარამეტრებთან მიმართებაში ჩაყენებულია „პრივილეგირებულ მდგომარეობაში“, რაც მიუთითებს $T : R^N \to \Theta$ სტატისტიკის „სუბიექტურობაზე“. იმისათვის, რომ ამგვარი „სუბიექტურობის“ ფაქტორი იყოს გამორიცხული, საჭიროა რომ A_{k_0} არ წარმოადგენდეს „გავრცელებას“. ამგვარად მივიღეთ, რომ A_{k_0} არ უნდა იყოს ჰაარის ნულ სიმრავლე და არც „გავრცელება“, რაც ნიშნავს, რომ A_{k_0} სიმრავლე უნდა იყოს ჰაარის ემზივალენტი. იმის გამო, რომ არც ერთი პარამეტრი ან უნდა იყოს ჩაყენებული „პრივილეგირებულ“ მდგომარეობაში სხვა პარამეტრთან მიმართებით, ჩვენ ვასკვნით, რომ A_k უნდა იყოს ჰაარის ემზივალენტი ყოველი ნატურალური k რიცხვისათვის. ამიტომ ბუნებრივია, რომ ასეთ სტატისტიკებს ვუწოდოთ „ობიექტური“ სტატისტიკები.

საკვლევი პრობლემის აქტუალობა. დაკვირვებადი სტოქასტური პროცესის განმსაზღვრელი პარამეტრისათვის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ამოცანები და მასთან დაკავშირებული პრობლემები განხილული იყო ჯ. ვონ ნეიმანის (1935), ს. კაკუტანის (1943), ვ. სუდაკოვის (1959), ჯ. ფელდმანის (1966), ი. როზანოვის (1968), ხი დაო ხინგის (1972), ა. სკოროხოდის (1975), ჰ. შიმომურას (1975) და სხვათა ნაშრომებში. ეჭვს არ იწვევს ის გარემოება, ჰაარის ემზივალენტის ცნების საშუალებით ჩვენს მიერ შემუშავებული მიდგომა საშუალებას მოგვცემს ასეთ შეფასებათა კლასში გავმიჯნოთ ერთმანეთისაგან სუბიექტური და ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებები. ამის გამო საკვლევი პრობლემა მეტად აქტუალურია დაკვირვებადი სტაციონარული სტოქასტური პროცესების მახასიათებელი პარამეტრების შეფასების საიმედოობის გაზრდის კუთხით.

საკვლევი პრობლემის პრაქტიკული მნიშვნელობა. ნაშრომში მოყვანილი საკვლევი პრობლემები ფუნდამენტური ხასიათისაა და მისი გამოყენების არეალი საკმარისად ფართოა. ერთის მხრივ, ნაშრომში

წარმოდგენილი თეორიული სახის შედეგები შეიძლება იქნას გამოყენებული როგორც მათემატიკური სტატისტიკის აქტუალური საკითხების შემდგომი კვლევისას, ასევე მათემატიკის აღნიშნული დარგის თანამედროვე კურსის წაკითხვის პროცესში. მეორეს მხრივ, შესაძლებელია აღნიშნული შედეგების წარმატებით გამოყენება იმ ელემენტარული მიზეზის გამო, რომ დაკვირვებადი ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო თუ სხვა შემთხვევითი პროცესების უმრავლესობა წარმოადგენს სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესს.

ახლა ჩვენ მოვიყვანთ ნაშრომის მოკლე დახასიათებას თავებისა და ქვეთავების მიხედვით.

თავი I. ძირითადი კონცეფციები. ამ თავში მოცემულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება.

თავი II. ჰაარის ნულ სიმრავლეების გენერატორები და მათი ზოგიერთი თვისება - შედგება ექვსი ქვეთავისაგან. 2.1 ქვეთავში განხილულია shy- სიმრავლეები პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში და დადგენილია ამ სიმრავლეებისაგან შედგენილი კლასის ზოგიერთი თვისება. 2.2 ქვეთავში განხილულია უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში shy-სიმრავლეთა გენერატორების არსებობისა და ერთადერთობის საკითხები. ასევე, განხილულია shy-სიმრავლეთა გენერატორების ზოგიერთი მაგალითი. 2.3 ქვეთავში განხილულია shy-სიმრავლეთა კვაზი-გენერატორები პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში და დადგენილია, რომ მათ მიერ წარმოქმნილი shy-სიმრავლეთა გენერატორები წარმოადგენენ კვაზი-ფინიტურ ზომებს. 2.4 ქვეთავში მოცემულია ხარაზიშვილის shy-სიმრავლეთა კვაზი-გენერატორისათვის ტეფერ გილის მიერ დასმული ერთი ამოცანის ამოხსნა. 2.5 ქვეთავში განხილულია კვაზიფიტურობის პრობლემა გაუსის shy-სიმრავლეთა გენერატორებისათვის. 2.6 ქვეთავში მოცემულია ჰაარის

ემბივალენტის დახასიათება shy- სიმრავლეთა გენერატორების ტერმინებში. კერძოდ, shy-სიმრავლეთა გენერატორების ტერმინებში მოცემულია ჰაარის ემბივალენტების დახასიათება.

თავი III. ძვრა-ზომათა N-ხარისხების ოჯახის განცალებადობის შესახებ R^{∞} **სივრცეში.** 3.1 ქვეთავში მოცემულია ა. სკოროხოდის მიერ [17] ნაშრომში შემოტანილი კლასიფიკაცია, რომელიც შეეხება (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ორთოგონალურ ოჯახებს. 3.2 ქვეთავში მოყვანილია ზოგიერთი დამხმარე დებულება სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ოჯახების ძლიერად განცალებადობის შესახებ, რომელთა დამტკიცებისას არსებითად გამოიყენება დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი და ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების თვისებები.

თავი IV. ჰაარის ემბივალენტის გამოყენება წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო-შერჩევითი ძალდებული შეფასებების კლასიფიკაციისათვის.

4.1 ქვეთავი ეთმობა უსასრულო შერჩევებისთვის სტატისტიკური გადაწყვეტილების კონცეფციების შემუშავებას და იმის დასაბუთებას, თუ რამდენად არის მართებული იაკობ კოენისა და ჯან ნუნალის მიერ.

- Cohen, Jacob., The Earth Is Round (p <.05), {\it American Psychologist},{\bf 49 (12)}(1994), 997–1003.
- Nunnally, Jum.,}The place of statistics in psychology, Educational and Psychological Measurement, 20 (4)(1960)641–650.

ნაშრომებში მოყვანილი მოსაზრებები ნულ ჰიპოთეზის დასაჯერობის ტესტირების არ არსებობის შესახებ.

4.2 ქვეთავში, იაკობ კოენისა და ჯან ნუნალის მოსაზრებების მართებულობის საჩვენებლად, წრფივ ერთ-ანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში უსასრულო შერჩევითი საშუალოს გამოყენებით აგებულია ნულ ჰიპოთეზის ისეთი ტესტი, რომ I და II გვარის შეცდომების ჯამი ნულის ტოლია და ჰაარის ნულ სიმრავლეთა კონცეფციის საშუალებით ახსნილია

თუ რატომ ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის.

თავი V. სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა მაგალითები წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში.

5.1 ქვეთავი ეთმობა მეხუთე თავში მიღებული შედეგების მოკლე აღწერას.

5.2 მოცემულია ფუნქციონალური ანალიზის, ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება.

5.3 ქვეთავში ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით მოცემულია ერთ-ერთ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების კონსტრუქცია.

5.4 ქვეთავში მოყვანილია ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია.

5.5 ქვეთავში ნაჩვენებია, რომ [36] ნაშრომში აგებული შეფასება წარმოადგენს ობიექტურ შეფასებას.

თავი VI. არა-SHY - სიმრავლეობის ერთი საკმარისი პირობის შესახებ ბანახის ზოგიერთ კლასიკურ სივრცეში.

6.1 ქვეთავში განხილულია მის მიერ [20] ნაშრომში დასმული ამოცანა, რომელიც გულიხმობს ბანახის სივრცის სპეციფიკური თვისებების გამოყენებით იმის ჩვენებას, რომ ყოველი უსასრულო-განზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

6.2 ქვეთავში მოყვანილია იმ ფაქტის დამტკიცება, რომ პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ბორელის ალბათური ზომა თავმოყრილია კომპაქტების თვლად გაერთიანებაზე; დამტკიცებულია, რომ თუ სეპარაბელურ ბანახის X-სივრცის S ქვესიმრავლე შეიცავს ყოველი კომპაქტური ქვესიმრავლის რაიმე ტრანსლიატს (ძვრას), მაშინ ის არ არის shy-სიმრავლე; განხილულია აგრეთვე ჰაუსდორფის, არცელას, ჰილბერტის, რისის, კოლმოგოროვისა და სხვათა თეორემები, რომლებიც შეეხება სიმრავლის კომპაქტურობის პირობის დადგენას სხვადასხვა სეპარაბელურ ბანახის სივრცეში.

6.3 ქვეთავში ბანახის სივრცის სპეციფიკური თვისებების გამოყენებით დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ სიმრავლის არა-shy-სიმრავლეობას.

თავი VII. ზოგიერთი კლასიკური ბანახის სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად.

7.1 ქვეთავში აგებულია $C^{\infty}[0,1]$ ბანახის სივრცის ქვესიმრავლეთა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) Φ=$\{A_J : J \subseteq N\}$ ოჯახი, ისეთი რომ ყოველი $J \subseteq N$ ქვესიმრავლისათვის კმაყოფილდება შემდეგი პირობები:

(i) $A_{J_1} \bigcap A_{J_2} = \varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq N$-თვის;

(ii) Φ ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემბივალენტი;

(iii) Card(Φ)=c, სადაც c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს.

ამ ოჯახის გამოყენებით ნაჩვენებია, რომ უსასრულო-განზომილებიანი ბანახის სივრცე $\boldsymbol{C^{\infty}[0,1]}$ არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

7.2 ქვეთავში ნაჩვენებია, რომ უსასრულო-განზომილებიანი არასეპარაბე-ლური ბანახის სივრცე l^{∞} ასევე არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

7.3 ქვეთავში ნაჩვენებია, რომ არსებობს $C_{\infty}(R)$-სივრცის ისეთი დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად, რომლის სიმძლავრე $2^{\aleph_0}$ კარდინალური რიცხვის ტოლია.

7.4 ქვეთავში, არაზომადი კარდინალური T რიცხვის შემთხვევაში, აგებულია ღია სფეროების ოჯახი Φ=$\{A_J : J \subseteq T\}$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული $j_1, j_2 \subseteq T$ ქვესიმრავლისათვის;

(ii) Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემბივალენტი;

(iii) Card(Φ)=$2^{card(T)}$;

ამ ოჯახის გამოყენებით აგებულია ბანახის $l^{\infty}(T)$ სივრცის მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად.

ძირითადი შედეგები ასახულია შემდეგ ნაშრომებში: [27], [28], [29]. მოხსენებები მიღებული შედეგების გარშემო გაკეთდა შემდეგ კონფერენ-ციებზე: [22],[23].

თავი I. ძირითადი კონცეფციები

მოცემულ თავში ჩვენ განვიხილავთ სიმრავლეთა თეორიის, ზოგადი ტოპოლოგიისა და ზომის თეორიის ზოგიერთ ცნებებსა და დამხმარე დებულებებს. ჩვენ მათ სისტემატურად გამოვიყენებთ ჩვენს შემდგომ კვლევებში.

ZF-სიმბოლო აღნიშნავს ეგრეთ წოდებულ ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორიას, რომელიც წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ფორმალურ სისტემას. ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებებია სიმრავლეები და მათ შორის მიკუთვნების ბინარული მიმართება $\in$. ZF სისტემა შედგება რამოდენიმე აქსიომისაგან, რომლებიც ახდენენ სიმრავლეთა სხვადასხვა თვისებების ფორმალიზაციას ბინარული $\in$ მიმართების ტერმინებში.

ZFC სიმბოლო აღნიშნავს ცერმელო-ფრენკელის თეორიას ამორჩევის AC აქსიომით. სხვა სიტყვებით, ZFC თეორია არის

$$ZF \,\&\, AC,$$

სადაც AC აღნიშნავს ამორჩევის აქსიომას.

თუ x და X არის ორი სიმრავლე, მაშინ $x \in X$ აღნიშნავს, რომ x მიეკუთვნება X-ს. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ x არის X-ის ელემენტი.

მიმართება $X \subseteq Y$ აღნიშნავს, რომ X არის Y-ის ქვესიმრავლე.

მიმართება $X \subset Y$ აღნიშნავს, რომ X არის Y-ის საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $R(x)$ არის მიმართება დამოკიდებული x-ზე (ან, სხვა სიტყვებით, $R(x)$ არის x ელემენტის თვისება), მაშინ სიმბოლო

$$\{x : R(x)\}$$

აღნიშნავს ყველა იმ x ელემენტთა ერთობლიობას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $R(x)$.

სიმბოლო $\varnothing$, როგორც წესი, აღნიშნავს ცარიელ სიმრავლეს, ე.ი.,

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}.$$

თუ X არის რაიმე სიმრავლე, მაშინ სიმბოლო $P(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს, ე.ი.,

$$P(X) = \{Y : Y \subseteq X\}.$$

$P(X)$ სიმრავლეს ასევე უწოდებენ X სიმრავლის ბულეანს.

ვთქვათ, X და Y არის ორი სიმრავლე. მაშინ :

$X \cup Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების გაერთიანებას;

$X \cap Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების თანაკვეთას;

$X \setminus Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების სხვაობას;

$X \Delta Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების სიმეტრიულ სხვაობას, ე.ი. $X\Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.

ვთქვათ, Ω არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $P(\Omega)$ კი - Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $A_k \in \mathrm{P}(\Omega)$ $(1 \le k \le n)$. $(A_k)_{1\le k\le n}$ სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \mid x \in A_1 \vee \cdots \vee x \in A_n\},$$

სადაც $\vee$ აღნიშნავს დიზიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 1.2. ვთქვათ, $A_k \in \mathrm{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcup_{k\in N} A_k = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots\}.$$

განსაზღვრება 1.3. ვთქვათ, $A_k \in \mathrm{P}(\Omega)$ $(1 \le k \le n)$. სიმრავლეთა სასრული $(A_k)_{1\le k\le n}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \mid x \in A_1 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\},$$

სადაც $\wedge$ აღნიშნავს კონიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 1.4. ვთქვათ, $A_k \in \mathrm{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k \in N}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\bigcap\limits_{k \in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcap_{k \in N} A_k = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots\}.$$

მართებულია დე მორგანის ორადულობის შემდეგი ფორმულები:

1) $\Omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k);$

2) $\Omega \setminus \bigcup\limits_{k \in N} A_k = \bigcap\limits_{A_k} (\Omega \setminus A_k);$

3) $\Omega \setminus \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k);$

4) $\Omega \setminus \bigcap\limits_{k \in N} A_k = \bigcup\limits_{k \in N} (\Omega \setminus A_k).$

განსაზღვრება 1.5. Ω -სიმრავლის ქვესიმრავლეთა A კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\Omega \in \mathrm{A}$;

2) თუ $A, B \in \mathrm{A}$, მაშინ $A \cup B \in \mathrm{A}$ და $A \cap B \in \mathrm{A}$;

3) თუ $A \in \mathrm{A}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \mathrm{A}$.

შენიშვნა 1.1. განსაზღვრება 1.5-ში, მე-2) პირობაში საკმარისია მოვითხოვოთ $A \cup B \in \mathrm{A}$ და $A \cap B \in \mathrm{A}$ პირობებიდან მხოლოდ ერთ-ერთის მართებულობა, ვინაიდან მართებულია შემდეგი სიმრავლურ-თეორიული ტოლობები:

$$A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)),$$

$$A \cap B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)).$$

შენიშვნა 1.2. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω-ს და ჩაკეტილია სასრული რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "$\cap, \cup, \setminus$" მიმართ.

განსაზღვრება 1.6. Ω-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა F -კლასს ეწოდება σ-ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\Omega \in \mathrm{F}$;

2) თუ $A_k \in \mathrm{F}$ $(k \in N)$, მაშინ $\bigcup_{k \in N} A_k . \in \Phi$ და $\bigcap_{k \in N} A_k . \in \Phi$;

3) თუ $A \in \mathrm{F}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \mathrm{F}$.

შენიშვნა 1.3. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω-ს და ჩაკეტილია თვლადი რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების " $\cap,\cup,\setminus$ " მიმართ.

განსაზღვრება 1.7. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathrm{F}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$ (ალბათობის არაუარყოფითობის თვისება);

2) $P(\Omega) = 1$ (ალბათობის ნორმირების თვისება);

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ F -კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ $P(\cup_{k \in N} A_k) = \sum_{k \in N} P(A_k)$ (ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისება).

ვთქვათ, Ω არის არაცარიელი სიმრავლე და F მის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასია. მართებულია შემდეგი დებულება.

ლემა 1.1 [4]. *არსებობს Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა $\sigma(F)$, რომელიც შეიცავს F კლასს და არის მინიმალური ჩართვის თვალსაზრისით იმ σ -ალგებრებს შორის, რომლებიც შეიცავენ F -ს.*

განსაზღვრება 1.8. ვთქვათ, მოცემულია Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ორი კლასი S_1 და S_2. ამასთან, $S_1 \subset S_2$. P_1 და P_2 იყოს შესაბამისად S_1 და S_2 კლასზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციები. P_2 რიცხვით ფუნქციას ეწოდება P_1 რიცხვითი ფუნქციის გაგრძელება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\forall X)(X \in S_1 \to P_2(X) = P_1(X)).$$

განსაზღვრება 1.9. ვთქვათ, A არის არაცარიელი Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრა. A კლასზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathrm{A}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ A -კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\bigcup_{k \in N} A_k. \in \mathrm{A}$, მაშინ

$$P\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right) = \sum_{k \in N} P(A_k).$$

ალბათური სივრცეების აგების ზოგადი მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1.1 (კარათეოდორი)[4]. *ვთქვათ, P არის A ალგებრაზე განსაზღვრული ალბათობა. მაშინ არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას; ამასთან, $\overline{P}$ ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:*

$$(\forall B)(B \in \sigma(\mathrm{A}) \to \overline{P}(B) = \inf\left\{\sum_{k \in N} P(A_k) \mid (\forall k)(k \in N \to A_k \in \sigma(\mathrm{A}))\ \&\ B \subseteq \cup_{k \in N} A_k\right\}.$$

მაგალითი 1.1. A-თი აღვნიშნოთ $[0,1]$ ინტერვალის ყველა ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლის ელემენტები წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანების სახით. ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს $[0,1]$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P([a_k, b_k[) = b_k - a_k$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(A)$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს

P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(A)$ კლასს ეწოდება $[0,1[$ ინტერვალის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $B([0,1$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება $[0,1[$ ინტერვალზე განსაზღვრული ერთ-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა და აღინიშნება b_1 სიმბოლოთი.

სამეულს $([0,1[,\mathrm{B}([0,1[),b_1)$-ს ეწოდება $[0,1[$ სიმრავლესთან ასოცირებული ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე.

მაგალითი 1.2 ვთქვათ, $F: R \to [0,1]$ არის ყოველ წერტილში მარ-ჯვნიდან უწყვეტი ისეთი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \;\&\; \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $F(-\infty) = 0$ და $F(+\infty) = 1$.

ვთქვათ, $\Omega = R \cup (+\infty)$.

A -თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლებიც წარმოიდგინებიან მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრულო ოჯახის გაერთიანებით, ე.ი.

$$\mathrm{A} = \left\{ A \mid A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right\},$$

სადაც $-\infty \le a_i < b_i \le \infty \quad (1 \le i \le n)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვა-ლებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P((a_i, b_i]) = F(b_i) - F(a_i),$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია იმავე სახის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებაზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომე-

ლიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathrm{A})\cap R$ კლასს ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathrm{B}(R)$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ P_F რიცხვით ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X\in \mathrm{B}(R)\rightarrow P_F(X)=\overline{P}(X)),$$

ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განაწილების F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა.

მაგალითი 1.3. ვთქვათ, $(\Omega_i,\mathrm{F}_i,P_i)$ $(1\le i\le n)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეთა სასრულ ოჯახს.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i=1}^{n}\Omega_i=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n)\mid \omega_1\in\Omega_1,\cdots,\omega_n\in\Omega_n\}$$

$A\subseteq\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის მართებულია წარმოდგენა

$$B=\prod_{i=1}^{n}B_i,$$

სადაც $B_i\in\mathrm{F}_i$ $(1\le i\le n)$.

A -ით აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ A წარმოადგენს $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთ აღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n}B_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P_i(B_i)$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბა-თობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თა-

ნახმად არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathrm{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathrm{F}_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{1\le i\le n} F_i$ -ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალ-ბათობათა $(P_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i=1}^{n} P_i$ -ით.

$(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, \prod_{i=1}^{n} F_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$ სამეულს ეწოდება $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

მაგალითი 1.4. ($[0,1]^n$-სა და R^n-ზე განსაზღვრული n-განზო-მილებიანი ბორელის კლასიკური ზომები).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = [0,1] \ \ (1 \le i \le n)$,

ბ) $\mathrm{F}_i = \mathrm{B}([0,1]) \ \ (1 \le i \le n)$,

გ) $P_i = b_1 \ \ (1 \le i \le n)$.

მაშინ $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, \prod_{i=1}^{n} F_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბთან ასოცირებული n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i=1}^{n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა.

b_n-ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in B(R^n) \to b_n(X) = \sum_{h\in Z^n} \prod_{i=1}^{n} P_i([0,1[^n \cap (X-h))),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა, განსაზღვრული R^n-ზე.

მაგალითი 1.5. ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახი არის განსაზღ-ვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)\left(1 \le i \le n \ \& \ x \in R \to F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, \prod_{i=1}^{n} F_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$ ალბათურ

სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან R^n სივრცესთან ასოცირებული n-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე.

$\prod_{1\le i\le n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან ევკლიდეს R^n სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური n-განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_n-ით.

მაგალითი 1.6 . ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა უსასრულო ოჯახია.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა

$$\prod_{i\in I}\Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i,\ i\in I\}.$$

$A\subseteq \prod_{i\in I}\Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის არსებობს ინდექსთა სასრული $(i_k)_{1\le k\le n}$ მიმდევრობა და $(\mathrm{F}_{i_k})_{1\le k\le n}$ σ-ალგებრების ისეთი ელემენტები $(B_{i_k})_{1\le k\le n}$, რომ მართებულია წარმოდგენა

$$B = \{(\omega_i)_{i\in I} : (\omega_i\in\Omega_i,\ i\in I\setminus \cup_{k=1}^{n}\{i_k\})\,\&\,(\omega_i\in B_i,\ i\in \cup_{k=1}^{n}\{i_k\})\}.$$

A -თი აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ A წარმოადგენს $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P(B) = \prod_{k=1}^{n} P_{i_k}(B_{i_k}),$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა

$\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathrm{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathrm{F}_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I} F_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I} P_i$-ით.

სამეულს $(\prod_{i=I}\Omega_i, \prod_{i=I} F_i, \prod_{i=I} P_i)$ ეწოდება $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

მაგალითი 1.6 (უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{i\in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = [0,1]$ $(i \in N)$,

ბ) $\mathrm{F}_i = \mathrm{B}([0,1])$ $(i \in N)$,

გ) $P_i = b_1$ $(i \in N)$.

მაშინ, $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N} F_i, \prod_{i\in N} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i\in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება b_N-ით.

მაგალითი 1.7 (გაუსის ზომა - "თეთრი ხმაური"). ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{i\in N}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)\left(i \in N \;\&\; x \in R \rightarrow F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N} F_i, \prod_{i\in N} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცესთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე, სადაც $\Omega_i = R, \mathrm{F}_i = \mathrm{B}(R)$ $(i \in N)$. $\prod_{i\in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას

ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_N -ით, ხოლო $\prod_{i\in N} F_i$ σ-ალგებრას ეწოდება R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathrm{B}(R^N)$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 1.8 (იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა [25]). ვთქვათ, ყოველი $i \in N$ ინდექსისათვის, p_i არის $[a_i, b_i]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და $\Delta = \prod_{i\in N}[a_i, b_i]$. $Z^{(N)}$ ჯგუფი განვსაზღვროთ პირობით

$$Z^{(N)} := \{(z_k)_{k\in N} : z_k \in Z \,\&\, (\exists n_{(z_k)_{k\in N}} \in N)(\forall k > n_{(z_k)_{k\in N}} \to z_k = 0)\},$$

სადაც Z აღნიშნავს მთელ რიცხვთა სიმრავლეს.

ν_Δ ზომას, განსაზღვრულს $\mathrm{B}(R^N)$ σ-ალგებრაზე შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(R^N) \to \nu_\Delta(X) = \sum_{(z_k)_{k\in N} \in Z^{(N)}} \prod_{k\in N} p_k(X - ((b_k - a_k)z_k)_{k\in N}),$$

ეწოდება იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა.

თუ X არის სიმრავლე, მაშინ $card(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის სიმძლავრეს. ზოგჯერ $card(X)$-ს ეძახიან X სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს.

ω არის პირველი უსასრულო კარდინალური(ორდინალური) რიცხვი. კერძოდ, ω არის

$$N = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

ყველა ნატურალურ რიცხვთა კარდინალური რიცხვი.

ω_1 არის პირველი არათვლადი კარდინალური (ორდინალური) რიცხვი. შევნიშნოთ, რომ ω_1 შეიძლება გავაიგივოთ ყველა თვლად ორდინალურ რიცხვთა სიმრავლესთან.

სხვადასხვა ორდინალური რიცხვები აღინიშნებიან შემდეგი ასოებით

$$\alpha, \beta, \gamma, \xi, \cdots.$$

ვთქვათ, α არის ორდინალური რიცხვი. ჩვენ ვიტყვით, რომ α არის ზღვრული ორდინალი, თუ

$$\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}.$$

ზღვარითი α ორდინალის კონფინალურობა არის უმცირესი ორდინალი ξ რომლისთვისაც არსებობს ორდინალთა ოჯახი

$$\{\alpha_\iota : \iota < \xi\},$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\alpha_\iota < \alpha \ (\iota < \xi),$$

$$\alpha = \sup\{\alpha_\iota : \iota < \xi\}.$$

α ზღვარითი ორდინალის კონფინალობა აღინიშნება $cf(\alpha)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ ყოველი ზღვარითი ორდინალური α რიცხვისათვის სრულდება პირობა

$$cf(\alpha) \leq \alpha.$$

α ზღვარით ორდინალს ეწოდება რეგულარული, თუ

$$cf(\alpha) = \alpha.$$

α ზღვარით ორდინალს ეწოდება სინგულარული, თუ

$$cf(\alpha) < \alpha.$$

მაგალითად, ω და ω_1 არიან რეგულარული ორდინალები და ω_ω არის სინგულარური ორდინალი.

თუ k არის რაიმე უსასრულო კარდინალური რიცხვი, მაშინ k^+ აღნიშნავს უმცირესს კარდინალურ რიცხვს იმ კარდინალთა შორის, რომლებიც აღემატებიან k-ს. მაგალითად,

$$\omega^+ = \omega^1, \ \omega_2 = (\omega_1)^+, \cdots.$$

კონტინუუმ ჰიპოთეზა (შემოკლებულად, CH) არის გამონათქვამი $c = \omega_1$.

გიოდელმა აჩვენა რომ $(ZFC)\&(CH)$ თეორია არის თავსებადი კონსტრუქტიულ უნივერსუმში (იხილეთ [19]). მეორეს მხრივ, კოენმა [9] აჩვენა რომ თეორია

$$(ZFC)\&(\neg CH)$$

ასევე არის თავსებადი. შესაბამისად CH არის დამოუკიდებელი ZFC თეორიისაგან.

კონტინუუმ ჰიპოთეზის ძლიერ ფორმას წარმოადგენს განზოგადოებული კონტინუუმ ჰიპოთეზა GCH, რომელიც არის გამონათქვამი

$$(\forall k > \omega)(2^k = k^+).$$

გიოდელმა ასევე აჩვენა, რომ $(ZFC) \& (GCH)$ თეორია ასევე თავსებადია კონსტრუქციულ უნივერსუმში (იხ. [19]).

ვთქვათ, X და Y ორი სიმრავლეა. მათი დეკარტული $X \times Y$ ნამრავლის ნებისმიერ $G \subseteq X \times Y$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული მიმართება X და Y სიმრავლეებს შორის. თუ $X = Y$, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ G წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას X ბაზისურ სიმრავლეზე.

დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომა (DC) არის შემდეგი წინადადება:

თუ G წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას არაცარიელ X ბაზისურ სიმრავლეზე და X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს ამავე სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ $(x, y) \in G$, მაშინ არსებობს ამ სიმრავლის ელემენტთა ისეთი თვლადი $x_1, x_2, \cdots$ მიმდევრობა, რომ $(x_n, x_{n+1}) \in G$ ყოველი ნატურალური $n \in N$ რიცხვისათვის.

ცხადია, რომ დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომა (DC) წარმოადგენს ამორჩევის აქსიომის სუსტ ფორმას, რომელიც სავსებით საკმარისია კლასიკური მათემატიკის ისეთი დარგებისათვის, როგორიცაა სასრულ-განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის გეომეტრია, ნამდვილი ღერძის მათემატიკური ანალიზი, ლებეგის ზომის თეორია და ა.შ.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი ცნება, რომელიც არის აუცილებელი დეტერმინირების აქსიომის (AD) ჩამოსაყალიბებლად.

ყოველი $A \subseteq W^{\omega}$ ქვესიმრავლე განსაზღვრავს G_A ტიპის თამაშს I და II მოთამაშეს შორის შემდეგნაირად:

I მოთამაშე წერს a_0 ნატურალურ რიცხვს. II მოთამაშე უყურებს a_0 ნატურალურ რიცხვს და წერს a_1 ნატურალურ რიცხვს. ამის შემდეგ, I მოთამაშე უყურებს a_0, a_1 ნატურალურ რიცხვებს და წერს a_3 ნატურალურ რიცხვს და ა.შ. უსასრულოდ. ზღვარში მიიღება ნატურალურ რიცხვთა

უსასრულო მიმდევრობა $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$. *თუ ეს მიმდევრობა ეკუთვნის* A *სიმრავლეს, მაშინ იგებს I მოთამაშე; წინააღმდეგ შემთხვევაში მოგებულია II მოთამაშე*.

თამაშის ბევრი სახეობა (ჭადრაკი, შაში და ა.შ.) შეიძლება აღიწეროს ზემოთ მოყვანილი სქემით.

$w^{(w)}$-თი აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სასრული მიმდევრობების სივრცე ცარიელი სიმრავლის ჩათვლით. ეს უკანასკნელი შეიძლება ჩაითვალოს ნული სიგრძის მიმდევრობად.

ფუნქციას $s : w^{(\omega)} \to w$ ეწოდება სტრატეგია G_A ტიპის თამაშისას.

ვთქვათ, $s : w^{(\omega)} \to w$ არის სტრატეგია I მოთამაშისათვის და $t : w^{(\omega)} \to w$ არის სტრატეგია II მოთამაშისათვის.

$s : w^{(\omega)} \to w$ და $t : w^{(\omega)} \to w$ სტრატეგიების შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (s(\varnothing), t(s(\varnothing)), s(s(\varnothing), t(s(\varnothing))) \cdots)$$

$s : w^{(\omega)} \to w$ ფუნქციას ეწოდება მომგებიანი სტრატეგია I მოთამაშისათვის, თუ

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \in A$$

II მოთამაშის ნებისმიერი t სტრატეგიისათვის.

ანალოგიურად, $t : w^{(\omega)} \to w$ ფუნქციას ეწოდება მომგებიანი სტრატეგია II მოთამაშისათვის , თუ

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \notin A$$

I მოთამაშის ნებისმიერი s სტრატეგიისათვის.

G_A ტიპის უსასრულო თამაშს ეწოდება დეტერმინირებული, თუ მხოლოდ ერთისათვის ამ ორი მოთამაშისათვის არსებობს მომგებიანი სტრატეგია.

დეტერმინირების აქსიომა (AD). ყოველი $A \subseteq w^{\omega}$ ქვესიმრავლისათვის, G_A ტიპის უსასრულო თამაში დეტერმინირებულია. მიჩელსკისა და სვერჩკოვსკის კლასიკური შედეგი ყალიბდება შემდეგნაირად:

თეორემა 1.2. ([33]). $\left(ZF\right)\&\left(DC\right)\&\ \left(AD\right)$ *თეორიაში ნამდვილი* R *ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით.*

თქვათ, (E,T) არის ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე (იხილეთ [11]).

$X \subseteq E$ სიმრავლეს ეწოდება არსად მკვრივი (E-ში) თუ $int(cl(X)) = \varnothing$.

$Y \subseteq E$ სიმრავლეს ეწოდება E-ს პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლე, თუ Y წარმოდგენადია $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ სახით, სადაც Y_n $(n \in \omega)$ არის E-ს არსად მკვრივი ქვესიმრავლე.

$Z \subseteq E$ ქვესიმრავლეს ეწოდება E-ს მეორე კატეგორიის ქვესიმრავლე, თუ ის არ არის E-ს პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლე.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კვაზი-კომპაქტური, თუ E-ს ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს E-ს სასრულ ქვედაფარვას.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ჰაუსდორფის თუ ნებისმიერი ორი $x, y \in E$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი ღია G_x და G_y სიმრავლეები, რომ $x \in G_x$, $y \in G_y$ და $G_x \cap G_y = \varnothing$.

E სივრცეს ეწოდება კომპაქტური, თუ ის ერთდროულად არის ჰაუსდორფის სივრცე და კვაზი-კომპაქტური სივრცე.

თეორემა 1.3 (ტიხონოვი). *კვაზი-კომპაქტურ სივრცეთა ნებისმიერი ოჯახის ნამრავლი არის კვაზი-კომპაქტური* (იხილეთ [11]).

თეორემა 1.4 (ბანახი). *ვთქვათ,* E *არის ტოპოლოგიური სივრცე და* $(V_i)_{i\in I}$ *არის ღია პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლეთა ოჯახი. მაშინ, გაერთიანება* $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ *არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე* (იხ. [11]).

თეორემა 1.4-ის უშუალო შედეგს წარმოადგენს

თეორემა 1.5. *ყოველი ტოპოლოგიური სივრცე* E *წარმოიდგინება შემდეგი*

$$E = E_1 \cup E_2$$

გაერთიანების სახით, სადაც E_1 *არის* E*-ს პირველი კატეგორიის ღია სიმრავლე და* E_2 *არის* E*-ს ბერის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

ვთქვათ, (E_1,S_1) და (E_2,S_2) არის ორი ზომადი სივრცე და f არის ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში. ჩვენ ვიტყვით, რომ f არის ზომადი ასახვა თუ

$$(\forall X)(X \in S_2 \to f^{-1}(X) \in S_1).$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ ასახვა $f: E_1 \to E_2$ არის ზომადი იზომორფიზმი E_1-დან E_2-ში თუ f არის ზომადი ბიექცია და შებრუნებული ასახვა f^{-1} აგრეთვე არის ზომადი.

ვთქვათ, E_1 და E_2 არის ორი ტოპოლოგიური სივრცე. ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორი ზომადი სივრცე $(E_1, B(E_1))$ და $(E_2, B(E_2))$, სადაც $B(E_1)$ და $B(E_2)$ აღნიშნავენ შესაბამისად E_1 და E_2 სივრცეების ბორელის σ-ალგებრებს. ვთქვათ, f არის ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში. f ასახვას ეწოდება ბორელის აზრით ზომადი, თუ სრულდება პირობა

$$(\forall X)(X \in B(E_2) \to f^{-1}(X) \in B(E_1)).$$

ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება პოლონური, თუ ის ჰომეომორფულია სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის.

ცხადია, რომ ყოველი კომპაქტური არათვლადი მეტრიკული სივრცე არის პოლონური სივრცე. კერძოდ, კანტორის დისკონტინუუმი $\{0,1\}^{\omega}$ (სადაც $\{0,1\}$ აღჭურვილია დისკრეტული ტოპოლოგიით) არის პოლონური სივრცე. $\omega^{\omega} = N^{\omega}$ სივრცე, სადაც N აღჭურვილი დისკრეტული ტოპოლოგიით, არის ასევე მაგალითი პოლონური სივრცის. არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს იმ ფაქტის დამტკიცება, რომ N^{ω} ჰომეომორფულია R ღერძის ირაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლის.

თეორემა 1.6. *შემდეგი სამი წინადადება ექვივალენტურია:*

1) *ყოველი არაცარიელი პოლონური სივრცე არის* N^{ω} *სივრცის უწყვეტი ანასახი;*

2) *ყოველი არაცარიელი კომპაქტური მეტრიკული სივრცე არის კანტორის* $\{0,1\}^{\omega}$ *დისკონტინუუმის უწყვეტი ანასახი;*

3) *ყოველი სეპარაბელური სივრცე ტოპოლოგიურად შეიძლება ჩაიდგას ჰილბერტის* $[0,1]^{\omega}$ *კუბში.*

ვთქვათ, (E_1, S_1, m_1) და (E_2, S_2, m_2) არის ორი ზომიანი სივრცე. m_1 და m_2 ზომებს ეწოდებათ იზომორფული, თუ არსებობს ზომადი f ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში, რომ შესრულებულია ტოლობა

$$(\forall X)(X \in s_1 \rightarrow m_1(X) = m_2(f(X))).$$

თეორემა 1.7 ([5]) ვთქვათ, E_1 და E_2 არის ორი პოლონური სივრცე აღჭურვილი შესაბამისად m_1 და m_2 დიფუზიური ალბათური ბორელის ზომებით. მაშინ არსებობს ბორელის იზომორფიზმი

$$j : (E_1, B(E_1)) \rightarrow (E_2, B(E_2)),$$

ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $m_1(X) = m_2(j(X))$ ყოველი $X \in B(E_1)$ სიმრავლისათვის.

თეორემა 1.8 (ფუბინი, [13]) . *ვთქვათ,* (E_1, S_1, μ_1) *და* (E_2, S_2, μ_2) *არის ორი ზომადი სივრცე, აღჭურვილი შესაბამისად* μ_1 *და* μ_2 σ*-სასრული ზომებით და ვთქვათ,*

$$(E, S, \mu) = (E_1, S_1, \mu_1) \times (E_2, S_2, \mu_2).$$

ვთქვათ, $f : E \rightarrow R$ *არის* μ*-ინტეგრებადი ფუნქცია. მაშინ:*

1) μ_1*-თითქმის ყველა* $x \in E_1$ *წერტილისათვის ფუნქცია*

$$y \rightarrow f(x, y)\,(y \in E_2)$$

არის μ_2*-ინტეგრებადი;*

2) μ_2*-თითქმის ყველა* $y \in E_2$ *წერტილისათვის ფუნქცია*

$$x \rightarrow f(x, y)\,(x \in E_1)$$

არის μ_1*-ინტეგრებადი;*

3) *ფუნქცია*

$$x \rightarrow \int_{E_2} f(x, y)\, d\mu_2(y)$$

არის μ_1*-ინტეგრებადი და ფუნქცია*

$$y \to \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$$

არის μ_2 *-ინტეგრებადი;*

4) *სრულდება შემდეგი ტოლობა*

$$\int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)$$

$$= \int\int_{E_1\times E_2} f(x,y)d(\mu_1(x)\times\mu_2(y)).$$

შევნიშნოთ, რომ ფუბინის თეორემა შესაძლებელია ჩამოყალიბდეს σ-სასრულო ზომების სასრული ოჯახის ნამრავლისათვის.

ვთქვათ, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა. ფუნქციას, განსაზღვრულს შემდეგი პირობით

$$\nu : S \to \overline{R}$$

ეწოდება მუხტი S-ზე, თუ

ა) $\nu(\varnothing) = 0;$

ბ) $card(ran(\nu) \cap \{-\infty, +\infty\}) \le 1$;

გ) ν არის σ-ადიტიური.

თეორემა 1.9 (ხანი, [13]). *ვთქვათ,* ν *არის* E *სივრცის ქვესიმრავლეთა* S σ*-ალგებრაზე განსაზღვრული მუხტი. მაშინ არსებობს ორი ისეთი* $A \subseteq E$ *და* $B \subseteq E$ *სიმრავლე, რომ:*

1) $A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = E;$

2) $A \in S, \quad B \in S;$

3) *ყოველი* $X \in S$ *სიმრავლისათვის სრულდება* $\nu(A \cap X) \ge 0$ *და* $\nu(B \cap X) \le 0$ *პირობები.*

$\{A, B\}$ სიმრავლეებს ეწოდება E სივრცის ხანის წარმოდგენა ν მუხტის მიმართ.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\nu^+(X) = \nu(X \cap A)\,(X \in S),$$

$$\nu^-(X) = -\nu(X \cap B)\,(X \in S).$$

ადვილია იმის ჩვენება რომ ν^{+} და ν^{-} წარმოადგენენ ჩვეულებრივ ზომებს განსაზღვრულს S σ-ალგებრაზე. ამასთან,

$$\nu = \nu^{+} - \nu^{-}.$$

$|\nu|$ ფუნქცია, განსაზღვრულს პირობით

$$|\nu| = \nu^{+} + \nu^{-}$$

წარმოადგენს S σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ ზომას და მას ეწოდება ν მუხტის ტოტალური ვარიაცია.

ვთქვათ, (E,S,μ) არის ზომიანი სივრცე და ν არის ზომა განსაზღვრული S σ-ალგებრაზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ ν არის აბსოლუ-ტურად უწყვეტი m ზომის მიმართ, თუ

$$(\forall X \in S)(\mu(X) = 0 \to \nu(X) = 0).$$

თეორემა 1.10 (რადონ-ნიკოდიმი, [13]). *ვთქვათ,* (E,S,μ) *არის ზომიანი სივრცე, აღჭურვილი* σ*-სასრულო* μ *ზომით და* ν *არის* σ*-სასრულო ზომა, განსაზღვრული* S σ*-ალგებრაზე. თუ* ν *აბსოლუტურად უწყვეტია* μ *ზომის მიმართ, მაშინ არსებობს ისეთი* μ*-ზომადი ფუნქცია* $f : E \to R$*, რომ შესრულდება შემდეგი პირობა*

$$\nu(X) = \int_X f d\mu..$$

f ფუნქციას ეწოდება ν ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული μ ზომის მიმართ და აღინიშნება $\frac{d\nu}{d\mu}$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, E არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცე და μ არის E-ზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის რადონის ზომა თუ ყოველი $X \in B(E)$ სიმრავლისათვის სრულდება პირობა $\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K$ კომპაქტურია E-ში $\& K \subseteq X$-ზე$\}$.

ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება რადონის, თუ E-ზე განსაზღვრული ბორელის ყოველი σ-სასრული ზომა არის რადონის ზომა.

თეორემა 1.11 (ულამი, [20]). *ყოველი პოლონური ტოპოლოგიური სივრცე E არის რადონის სივრცე.*

ვთქვათ, E არის ბაზისური სივრცე და G არის მის ზომად გარდაქმნათა ჯგუფი. ვთქვათ, D არის E-ს ქვესიმრავლეთა კლასი. ჩვენ ვიტყვით, რომ D არის G-ინვარიანტული, თუ

$$(\forall X)(\forall g)(X \in D \,\&\, g \in G \to g(X) \in D).$$

ვთქვათ, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა და μ არის ზომა განსაზღვრული S კლასზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის G-კვაზიინვარიანტული თუ:

1) S არის G-ინვარიანტული კლასი;

2) μ-ნულ ზომად სიმრავლეთა კლასი $L(\mu)$ ასევე არის G-ინვარიანტული.

თუ მე-2) პირობის ნაცვლად შესრულებულია უფრო ძლიერი პირობა

3) $(\forall X)(\forall g)(X \in S \,\&\, g \in G \to \mu(g(X)) = \mu(X)),$

მაშინ μ ზომას ეწოდება G-ინვარიანტული.

(E, S, G, μ) ოთხეულს ეწოდება ინვარიანტული ზომიანი სივრცე, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) E არის არაცარიელი სიმრავლე;

2) G არის E სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფი;

3) S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G-ინვარიანტული σ-ალგებრა;

4) μ არის S-ზე განსაზღვრული G-ინვარიანტული ზომა.

ვთქვათ, $(G_i)_{i \in I}$ არის ჯგუფთა რაიმე ოჯახი. ვთქვათ, e_i არის $G_i \; (i \in I)$-ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. $(G_i)_{i \in I}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ჯამი აღინიშნება $\sum_{i \in I} G_i$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება პირობით:

$$\sum_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} : (\forall i)(i \in I \to g_i \in G_i \,\&\, card(\{i : g_i \neq e_i\}) < \omega)\}.$$

ფუბინის თეორემით ადვილად მიიღება შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 1.12. *ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე და $(E_i, S_i, G_i, \mu_i)_{i\in I}$ არის ინვარიანტულ (კვაზიინვარიანტულ) ალბათურ სივრცეთა ოჯახი. მაშინ პროდაქტ-ზომა $\prod_{i\in I}\mu_i$ არის $\sum_{i\in I}G_i$-ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ალბათური ზომა.*

ვთქვათ, $(G,.)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი. ასეთი ჯგუფისათვის მართებულია ჰაარის კარგად ცნობილი შედეგი, რომელიც გვამცნობს, რომ ასეთ G ჯგუფზე არსებობს და მასთან ერთადერთი არატრივიალური ინვარიანტული ბორელის ზომა μ (იხ. [13]). კერძოდ, μ ზომა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) μ არის ლოკალურად სასრული ზომა, ე.ი., ყოველი $x \in G$ წერტილისათვის არსებობს ამავე წერტილის ისეთი ღია მიდამო $V(x)$, რომ $\mu(V(x)) < +\infty$;

2) μ არის რადონის ზომა;

3) μ არის $B(G)$-კლასზე განსაზღვრული მარცხნიდან ინვარიანტული ზომა, ე.ი.

$$(\forall X)(\forall g)(X \in B(G) \,\&\, g \in G \to \mu(g \cdot X) = \mu(X)).$$

μ ზომას ეწოდება G-ჯგუფზე განსაზღვრული (მარცხენა) ჰაარის ზომა.

თავი II. ჰაარის აზრით ნულ სიმრავლეების გენერატორები და მათი ზოგიერთი თვისება

2.1. shy- სიმრავლეები და მათი თვისებები

ვთქვათ, V არის წრფივი სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე (ან რაც იგივეა, პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე), რაც ნიშნავს რომ V არის სეპარაბელური ვექტორული სივრცე ნამდვილ ან კომპლექსურ ველზე და შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების ოპერაციები უწყვეტია. $S+h$-ით ჩვენ აღვნიშნავთ V სივრცის S ქვესიმრავლის ტრანსლაციას $h \in V$ ვექტორის გასწვრივ. შემდგომში ზომის ქვეშ ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ V სივრცის ბორელის სიგმა-ალგებრაზე განსაზღვრულ არანულოვან არაუაყოფით ზომებს.

განსაზღვრება 2.1.1 [16]. μ ზომას ეწოდება ტესტური ზომა ბორელის $S \subset V$ სიმრავლისათვის თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა

(i) არსებობს კომპაქტური $U \subset V$ სიმრავლე, რომ $0 < \mu(U) < \infty$;

(ii) $\mu(S+h) = 0$ ყოველი $h \in V$ ელემენტისათვის.

განსაზღვრება 2.1.2 ([16],[1]). $S \subset V$ ბორელის სიმრავლეს ეწოდება ჰაარის ნულ სიმრავლე (ან რაც იგივეა, ბორელის shy-სიმრავლე) თუ მისთვის არსებობს ტესტური ზომა. ზოგადად, V სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება ეწოდება ჰაარის ნულ სიმრავლე (ან რაც იგივეა, shy- სიმრავლე) თუ ის არის ბორელის ჰაარის ნულ სიმრავლის (ან რაც იგივეა, ბორელის shy-სიმრავლის) ქვესიმრავლე. V სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება „გავრცელება“ თუ ის არის shy-სიმრავლის დამატება. V სივრცის ქვესიმრავლეს ეწოდება „ემბივალენტი“ თუ ის არ არის არც shy- სიმრავლე და არც „გავრცელება“.

განსაზღვრება 2.1.3. ([16], გვ. 226) ჩვენ ვიტყვით, რომ $\mathbf{V}$ სივრცის ”თითქმის ყველა” ელემენტი აკმაყოფილებს გარკვეულ თვისებას, თუ $\mathbf{V}$ სივრცის ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტებისათვისაც აღნიშნული თვისება არის მართებული, წარმოადგენს ”გავრცელებას”.

ფაქტი 2.1.1 ([16]) თუ $S \subset V$ არის shy- სიმრავლე, მაშინ მისი ყოველი ქვესიმრავლე ასევე არის shy- სიმრავლე.

ფაქტი 2.1.2 ([16]) ყოველი $S \subset V$ shy- სიმრავლისათვის და ყოველი $r > 0$ დადებითი რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ალბათური ტესტური ზომა, რომლის მატარებლის დიამეტრი r-ზე ნაკლებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, μ არის ტესტური ზომა ბორელის S სიმრავლისათვის. ეს ნიშნავს რომ სრულდება შემდეგი ორი პირობა

(i) არსებობს ისეთი კომპაქტური $U \subset V$ სიმრავლე, რომ $0 < \mu(U) < \infty$;

(ii) $\mu(S+h) = 0$ ყოველი $h \in V$ ელემენტისათვის.

განვიხილოთ $r/2$ რადიუსის მქონე ღია ბირთვების ოჯახი. ცხადია, რომ ის წარმოადგენს $U \subset V$ კომპაქტური სიმრავლის დაფარვას. ამიტომ მოიძებნება ღია ბირთვების სასრული ოჯახი $(B_k)_{1 \le k \le n(U)}$, რომელიც წარმოადგენს $U \subset V$ კომპაქტური სიმრავლის დაფარვას. ეს კი ნიშნავს, რომ მოიძებნება k_0 ($1 \le k_0 \le n(U)$) ისეთი რომ $0 < \mu(B_{k_0} \cap U) < \infty$. განვიხილოთ ზომა λ განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X \in B(V) \to \lambda(X) = \mu(X \cap B_{k_0} \cap U) / \mu(B_{k_0} \cap U)).$$

ცხადია, რომ λ ზომის მატარებელია $B_{k_0} \cap U$ რომლის დიამეტრი $r/2$ რიცხვზე ნაკლებია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ λ წარმოადგენს ტესტურ ალბათურ ზომას ბორელის S სიმრავლისათვის. ცხადია, რომ λ წარმოადგენს ბორელის ალბათურ ზომას. ულამის თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი კომპაქური სიმრავლე F რომ $0 < \lambda(F) < 1$. შევნიშნოთ, რომ

$$(\forall h)(h \in V \to \lambda(X+h) = \mu(X + h \cap B_{k_0} \cap U) / \mu(B_{k_0} \cap U)) \le$$
$$\le \mu(X+h) / \mu(B_{k_0} \cap U)) = 0),$$

რაც ასრულებს ფაქტი 2.1.2-ის დამტკიცებას. $\square$

განსაზღვრება 2.1.3([16]) ვთქვათ, μ და ν არიან ბორელის ზომები V-ზე. ვთქვათ, $\mu \times \nu$ აღნიშნავს ამ ზომების ნამრავლს დეკარტულ $V \times V$ ნამრავლზე, და მოცემული $S \subset V$ ბორელის სიმრავლისათვის

$$S^{\Sigma} = \{(x, y) : (x, y) \in V \times V \ \& \ x + y \in S\}.$$

მაშინ S^{Σ} არის ბორელის სიმრავლე და $\mu * \nu$ ზომას ჩვენ განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$(\forall X)(X \in B(V) \to \mu * \nu(X) = \mu \times \nu(X^{\Sigma})),$$

რომელსაც μ და ν ზომების ნახვევი ეწოდება.

თუ μ და ν ზომები სასრულია, მაშინ ფუბინის თეორემის ძალით ვღებულობთ

$$\mu * \nu(X) = \int_V \mu(X-h)d\nu(h) = \int_V \nu(X-h)d\mu(h).$$

ფაქტი 2.1.3. ([16]) ვთქვათ μ და ν არის სასრული ბორელის ზომები კომპაქტური მატარებლებით. თუ μ არის ტესტური ზომა S ბორელის სიმრავლისათვის, მაშინ $\mu * \nu$ ზომაც ასევე იქნება ტესტური ზომა იმავე სიმრავლისათვის.

დამტკიცება. ვინაიდან μ არის ტესტური ზომა S ბორელის სიმრავლისათვის, ჩვენ ვღებულობთ $\mu(S-h)=0$ ყოველი $h \in V$ ელემენტისათვის. ფუბინის თეორემის ძალით ჩვენ ვღებულობთ

$$\mu * \nu(S) = \int_V \mu(S-h)d\nu(h) = 0.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ μ და ν არიან თავმოყრილი F კომპაქტურ სიმრავლეზე. მაშინ კოლპაქტური იქნება ასევე სიმრავლე $F+F$, საიდანაც ვღებულობთ

$$\mu * \nu(F+F) = \int_F \mu(F+F-h)d\nu(h) = \int_F 1 d\nu(h) = 1.$$

$\square$

ფაქტი 2.1.4. shy-სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება წარმოადგენს shy-სიმრავლეს.

ფაქტი 2.1.4 წარმოადგენს შემდეგი ზოგადი ფაქტის კერძო შემთხვევას.

ფაქტი 2.1.5. shy-სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის გაერთიანება წარმოადგენს shy-სიმრავლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ $S_1, S_2, \cdots$ არის ბორელის shy-სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი, რომელიც შეიცავენ მოცემულ shy-სიმრავლეებს. ვთქვათ, $\mu_1, \mu_2, \cdots$ არიან შესაბამისი ტესტური ალბათური ზომები. ფაქტი 1.2.2-ის

ძალით ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ μ_n თავმოყრილია U_n კომპაქტურ სიმრავლეზე, რომლის დიამეტრი ნაკლებია 2^{-n} რიცხვზე. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ U_n შეიცავს ნულოვან ელემენტს ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის. ამ დაშვებებით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ზომა μ რომელიც წარმოადგენს $\mu_1, \mu_2, \cdots$ ზომების უსასრულო ნახვევს. უფრო ზუსტად, ვთქვათ, $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$ აღნიშნავს $\mu_1, \mu_2, \cdots$ ზომების ნამრავლს უსასრულო დეკარტულ ნამრავლზე $V \times V \times \cdots \equiv V^{\infty}$-ზე, და მოცემული $X \subset V$ ბორელის სიმრავლისათვის

$$X^{\Sigma} = \{(x_n)_{n \in N} : (x_n)_{n \in N} \in V^{\infty} \ \& \sum_{n=1}^{\infty} x_k \in X\}.$$

მაშინ X^{Σ} არის ბორელის სიმრავლე და $\mu_1 * \mu_2 * \cdots$ ზომას ჩვენ განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულით

$$(\forall X)(X \in B(V^{\infty}) \to \mu_1 * \mu_2 * \cdots (X) = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n (X^{\Sigma})),$$

რომელსაც $\mu_1, \mu_2, \cdots$ ზომათა ოჯახის ნახვევი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ტიხონოვის თეორემის ძალით $\prod_{k=1}^{\infty} U_k$ არის V^{∞}-სივრცის კომპაქური ქვესიმრავლე, რომელზეც თავმოყრილია $\prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$ - პროდაქტ-ზომა. მეორეს მხრივ, გადასახვა $T : \prod_{k=1}^{\infty} U_k \to V$, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall (u_k)_{k \in N})((u_k)_{k \in N} \in \prod_{k=1}^{\infty} U_k \to T((u_k)_{k \in N}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k)$$

არის უწყვეტი და $\mu_1 * \mu_2 * \cdots$ ზომა თავმოყრილია $T(\prod_{k=1}^{\infty} U_k)$ სიმრავლეზე, რომელიც ასევე არის კომპაქტური სიმრავლე V სივრცეში.

ჩვენ დაგვრჩა იმის ჩვენება, რომ $\mu_1 * \mu_2 * \cdots$ უსასრულო ნახვევი წარმოადგენს U_n ბორელის ქვესიმრავლისათვის ტესტურ ზომას ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის.

ვინაიდან μ_n არის ტესტური ზომა S_n სიმრავლისათვის, ამიტომ ფაქტი 2.1.3-ის ძალით $\mu_n * \nu_n$ ზომაც ასევე არის ტესტური ზომა S_n სიმრავლისათვის, სადაც $\nu_n = \mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_{n-1} * \mu_{n+1} * \cdots$, მაგრამ მაშინ $\mu_n * \nu_n = \mu_1 * \mu_2 * \cdots$ და ამით ფაქტი 2.1.5 უკვე დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 2.1.3 ([16], ფაქტი 8, გვ.224) თუ $\mathbf{V}$ არის უსასრულო-განზომილებიანი, მაშინ ყოველი კომპაქტური სიმრავლე არის ჰაარის აზრით ნულზომადი.

განსაზღვრება 2.22 ([16], განსაზღვრება 6, გვ.225) ჩვენ ვიტყვით, რომ $\mathbf{V}$ სივრცის სასრულ-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{V}$ არის სინჯი $\mathbf{T} \subset \mathbf{V}$ სიმრავლისათვის თუ $\mathbf{P}$-ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომა წარმოადგენს ტესტურ ზომას რაიმე ბორელის სიმრავლისათვის, რომელიც შეიცავს $\mathbf{T}$ სიმრავლის დამატებას.

ლემა 2.1.4 ([20], ლემა 2, გვ.58) ვთქვათ, $\boldsymbol{\mu}$ არის სრულ სეპარაბელურ ვექტორულ $\mathbf{V}$ სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა. მაშინ არსებობს კომპაქტურ სიმრავლეთა $(\mathbf{F_k})_{\mathbf{k \in N}}$ თვლადი ოჯახი, ისეთი რომ

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{V} \setminus \bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{F_k}) = \mathbf{0}.$$

2.2. shy- სიმრავლეთა გენერატორები

ვთქვათ, V არის წრფივი სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე.

განსაზღვრება 2.2.1. ვთქვათ V არის წრფივი სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე. V სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის არაუარყოფით μ ზომას ეწოდება ჰაარის ნულ სიმრავლეთა ან რაც იგივეა, shy-სიმრავლეთა გენერატორი, თუ μ ზომის მიმართ ნულზომადი ყოველი ბორელის ქვესიმრავლე ამავდროულად არის shy -სიმრავლე.

განსაზღვრება 2.2.2. ვთქვათ V არის წრფივი სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე. V სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის არაუარყოფით μ ზომას ეწოდება კვაზი-ფინიტური თუ არსებობს ისეთი კომპაქტური F სიმრავლე, რომ სრულდება პირობა $0 < \mu(F) < \infty$

ფაქტი 2.2.1. წრფივ სრულ სეპარაბელურ მეტრიკულ V სივრცეზე განსაზღვრული ძვრების მიმართ ინვარიანტული კვაზიფინიტური ბორელის μ ზომა წარმოადგენს shy -სიმრავლეთა გენერატორს.

დამტკიცება. ვინაიდან μ ზომა კვაზი-ფინიტურია, ამიტომ არსებობს ისეთი კომპაქტური F სიმრავლე, რომ სრულდება პირობა $0 < \mu(F) < \infty$.

განვიხილოთ ბორელის ალბათური ზომა λ, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X \in B(V) \rightarrow \lambda(X) = \mu(X \cap U)/\mu(U)).$$

ვაჩვენოთ, რომ λ ზომა წარმოადგენს ტესტურ ზომას μ ზომის მიმართ ნულზომადი ყოველი ბორელის S ქვესიმრავლისათვის. ამ მიმართულებით შევნიშნოთ, რომ λ ზომა თავმოყრილია F კომპაქტურ სიმრავლეზე . შევნიშნოთ ასევე, რომ

$$(\forall h)(h \in V \rightarrow \lambda(S+h) = \mu(S+h \cap U)/\mu(U)) \leq \mu(S+h)/\mu(U)) = 0),$$

რაც ასრულებს ფაქტი 2.2.1-ის დამტკიცებას. □

შენიშვნა 2.2.1. 2.2.1-2.2.3 მაგალითებში განხილული ძვრების მიმართ ინვარიანტული კვაზიფინიტური ბორელის ზომები, ფაქტი 2.2.1-ის ძალით წარმოადგენენ shy -სიმრავლეთა გენერატორებს.

განსაზღვრება 2.2.3. ვთქვათ, K არის V სივრცეზე განსაზღვრულ ზომათა კლასი. ჩვენ ვიტყვით, რომ ზომა $\mu \in$ K ფლობს ერთადერთობის თვისებას ზომათა K კლასში, თუ μ და λ არიან ეკვივალენტური ზომები ყოველი $\lambda \in$ K ზომისათვის.

ვთქვათ, V არის პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. ვთქვათ L არის წრფივი ვექტორული ქვესივრცე V-ში. ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ წრფივი ვექტორული ქვესივრცე F⊂V ისეთი, რომ

$$\mathrm{L} \cap F = \{0\} \text{ და } \mathrm{L}+\mathrm{F}=\mathrm{V}, \qquad (*)$$

სადაც $\{0\}$ აღნიშნავს V-ს ნულოვან ელემენტს.

ჩვენ აღვნიშნავთ $\mathcal{F}$-ით ვექტორული F⊂V ქვესივრცეების ისეთ ოჯახს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (*) პირობას. $L^{\perp}=\tau(\mathcal{F})$სიმრავლეს, სადაც τ

აღნიშნავს ამორჩევის გლობალურ ოპერატორს, ეწოდება ვექტორული L ქვესივრცის წრფივი დამატება V სივრცეში.

ფაქტი 2.2.2. ვთქვათ, V არის პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე. ყოველი არანულოვანი $v_0 \in V$ ელემენტისათვის არსებობს სემიფინიტური კვაზი-ფინიტური გენერატორი λ , ისეთი, რომ

$$\lambda(\{\alpha v_0 : \alpha \in [0,1]\}) = 1$$

და λ არის არა-σ-სრული თუ dim(V)≥ 2.

დამტკიცება. ვთქვათ L_1 არის 1-განზომილებიანი ვექტორული ქვესივრცე განსაზღვრული v_0 ელემენტით . ვთქვათ, μ არის კლასიკური 1-განზომილებიანი ბორელის ზომა, განსაზღვრული L_1=$\{\alpha v_0 : \alpha \in R\}$ ვექტორულ სივრცეზე $\mu(Y) = b_1(X)$ პირობით, სადაც

$$Y = \{\alpha v_0 : \alpha \in X\} \text{ და } X \in B(R).$$

შემოვიტანოთ λ ზომის განსაზღვრა შემდეგნაირად

$$\lambda(X) = \sum_{v \in L^{\perp}_1} \mu((X+v) \cap L_1),$$

ყოველი X∈ $B(V)$ –ელემენტისათვის. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, λ ფუნქციონალის განსაზღვრის კორექტულობა. ვთქვათ, F არის ნებისმიერი ელემენტი $\mathcal{F}$ კლასიდან და ვივარაუდოთ, რომ

$$\lambda_1(X) = \sum_{u \in F} \mu((X+u) \cap L_1)$$

როცა X∈ $B(V)$.

ჩვენ გვაქვს $L_1 + F = L_1 + L_1{}^{\perp}$, რაც ნიშნავს , რომ

$$\cup_{u \in F} (L_1 + u) = \cup_{v \in L_1{}^{\perp}} (L_1 + v) = V$$

ეს უკანასკნელი გულისხმობს, რომ ყოველი $u \in F$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი f(u)∈ $L_1{}^{\perp}$ ელემენტი, რომ

$$L_1 + u = L_1 + \mathrm{f}(u).$$

არ არის რთული ვაჩვენოთ, რომ f არის ინექციური ფუნქცია F-დან $L_1{}^{\perp}$-ში, $f^{-1}: L_1{}^{\perp} \to F$. ამგვარად f წარმოადგენს ბიექციას F და $L_1{}^{\perp}$ ქვესივრცეებს შორის. იმის გამო, რომ არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა ყოველი ოჯახის ჯამი არის ინვარიანტული მათი გადანაცვლებების მიმართ, ყოველი X∈ $B(V)$-ელემენტისათვის ჩვენ ვღებულობთ შემდეგი ტოლობის

$\lambda_1(X) = \sum_{u\in F} \mu((X+u) \cap L_1) = \sum_{f(u)\in f(F)} \mu((X+f(u)) \cap L_1 = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((X+v) \cap L_1) = \lambda(X)$

მართებულობას. უკანასკნელი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ λ ფუნქციონალი არის კორექტულად განსაზღვრული.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ λ არის თვლადად-ადიტიური. ვთქვათ, $(X_k)_{k\in N}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ბორელის სიმრავლეების მიმდევრობა. მაშინ ჩვენ ვღებულობთ

$$\lambda(\cup_{k\in N} X_k) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((((\cup_{k\in N} X_k) + v) \cap L_1) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((\cup_{k\in N} (X_k + v)) \cap L_1) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \sum_{k\in N} \mu((X_k + v) \cap L_1) = \sum_{k\in N} \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((X_k + v) \cap L_1) = \sum_{k\in N} \lambda(X_k)$$

λ ზომა არის კვაზი-ფინიტური. მართლაც, D=[0,1]-თვის ჩვენ გვაქვს

$$\lambda(D) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((D+v) \cap L_1) = \mu((D+0) \cap L_1) = 1$$

λ-ს ზომა არის ძვრების მიმართ ინვარიანტული. მართლაც, ყოველი $h \in V$-თვის ჩვენ გვაქვს შემდეგი წარმოდგენა

$$h = h_1 + h_2,$$

სადაც $h_1 \in L_1$ და $h_2 \in L_1^{\perp}$. ამიტომაც $X \in B(V)$ ელემენტისთვის ჩვენ გვაქვს

$$\lambda(X+h) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((X+h+v) \cap L_1) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((X+h_1+h_2+v) \cap L_1) = \sum_{v\in L_1^{\perp}} \mu((X+h_2+v) \cap L_1) = \sum_{h_2+v\in h_2+L_1^{\perp}} \mu((X+h_2+v) \cap L_1) = \sum_{h_2+v\in L_1^{\perp}} \mu((X+h_2+v) \cap L_1) = \sum_{s\in L_1^{\perp}} \mu((X+S) \cap L_1) = \lambda(X).$$

ფაქტი 2.2.1-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ λ წარმოადგენს shy-სიმრავლეთა გენერატორს.

ვაჩვენოთ, რომ λ არის სემიფინიტური. მართლაც თუ λ(X)> 0, მაშინ არსებობს $g_0 \in L_1^{\perp}$ ისეთი, რომ 0< $\mu((X+g_0) \cap L_1) < \infty$. μ ზომის ქვევიდან რეგულარობის თვისების გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ არსებობს ისეთი კომპაქტური სიმრავლე U⊆ $(X+g_0) \cap L_1$ რომ 0< $\lambda(U) < \infty$. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ λ ზომა არის სემიფინიტური.□

ფაქტი 2.2.3. ვთქვათ, V არის პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე რომლის განზომილება ერთზე მეტია. მაშინ არ არსებობს

ერთადერთობის თვისების მქონე shy-სიმრავლეთა გენერატორი V სივრცეზე განსაზღვრულ shy-სიმრავლეთა გენერატორების კლასში.

დამტკიცება. განვიხილოთ V სივრცის ორი წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი v_0 და v_1 და მათი საშუალებით, ფაქტი 2.2.2-ის დამტკიცებისას გამოყენებული კონსტრუქციით ავაგოთ shy-სიმრავლეთა გენერატორები λ_0 და λ_1. ცხადია, რომ

$$\lambda_0(\{\alpha v_0 : 0 \leq \alpha \leq 1\}) = 1\ ,\ \lambda_1\ (\{\alpha v_0 : 0 \leq \alpha \leq 1\}) = 0,$$

რაც ნიშნავს, რომ λ_0 და λ_1 არ არიან ეკვივალენტური. ეს ნიშნავს, რომ არ არსებობს ერთადერთობის თვისების მქონე shy-სიმრავლეთა გენერატორი V სივრცეზე განსაზღვრულ shy-სიმრავლეთა გენერატორების კლასში. ◻

ფაქტი 2.2.4 უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი shy-სიმრავლეთა გენერატორი არის არა-σ-სასრული.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, λ არის σ სასრული shy-სიმრავლეთა გენერატორი V-ში. მაშინ იარსებებს კომპაქტური სიმრავლეების $\{K_n : n \in N\}$ ისეთი თვლადი ოჯახი, რომ $\lambda(\mathrm{V} \setminus \cup_{n\in N} K_n) = 0$. შევნიშნოთ, რომ ლემა 2.13-ის ძალით კომპაქტური სიმრავლე K_n არის shy-სიმრავლე ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის. მაშინ λ ზომის shy-სიმრავლეთა გენერატორობის თვისებიდან გამომდინარე ჩვენ ვასკვნით, რომ სიმრავლე $\mathrm{V} \setminus \cup_{n\in N} K_n$, რომლის λ -ზომა ნულია, ასევე წარმოადგენს shy სიმრავლეს. ამგვარად მივიღეთ, რომ V, როგორც ორი shy-სიმრავლის გაერთიანება, ასევე წარმოადგენს shy-სიმრავლეს, რაც წინააღმდეგობაა. ამით ჩვენს მიერ დამტკიცებულია, რომ არ არსებობს V სივრცეზე განსაზღვრულ shy-სიმრავლეთა გენერატორების კლასში ერთადერთობის თვისების მქონე shy-სიმრავლეთა გენერატორი. ◻

შენიშვნა 2.2.1. n-განზომილებიანი კლასიკური ბორელის ზომა $R^n(n \geq 2)$-არის σ-სასრული shy-სიმრავლეთა გენერატორის მაგალითი, მაგრამ იგივე სივრცეში არსებობს shy-სიმრავლეთა გენერატორის ისეთი მაგალითი, რომელიც არის არა- σ-სასრული (იხ. ფაქტი 2.2.2).

ვთქვათ, R არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო R^N ყველა ნამდვილი რიცხვთა მიმდევრობების წრფივი ვექტორული სივრცე აღჭურვილი ტიხონოვის ტოპოლოგიით. $B(R^N)$-ით აღვნიშნოთ R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეების σ-ალგებრა.

მაგალითი 2.2.1. ვთქვათ, $\mathcal{R}_1$ არის ყველა ისეთი უსასრულო-განზომილებიანი $\Delta \in B(R^N)$ მართკუთხედების კლასი, რომ

$$\Delta = \prod_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \qquad -\infty < a_i \leq b_i < \infty$$

და

$$0 \leq \prod_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) := \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \infty.$$

ვთქვათ, τ_1 არის $\mathcal{R}_1$-კლასზე შემდეგი ფორმულით

$$\tau_1(\mathrm{R}) = \prod_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$$

განსაზღვრული ფუნქცია. ბეიკერის მიერ [2] ნაშრომში იქნა ნაჩვენები, რომ ფუნქციონალი λ, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\lambda(X) = inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\tau_1(R_j) : R_j \in \mathcal{R}_1 \& X \subseteq \cup^{\infty}{}_{j=1} R_j\right\}$$

X$\in B(R^N)$, არის კვაზიფინიტური ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა R^N-ში. ფაქტი 2.2.1-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ λ არის shy-სიმრავლეთა გენერატორი R^N სივრცეში.

მაგალითი 2.2.2. ვთქვათ, $\mathcal{R}_2$ არის ყველა ისეთი უსასრულო-განზომილებიანი $\Delta \in B(R^N)$ მართკუთხედების კლასი , რომ

$$\Delta = \prod_{i=1}^{\infty} R_i, \ \ R_i \in B(R)$$

და

$$0 \leq \prod_{i=1}^{\infty} m(R_i) := \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} m(R_i) < \infty,$$

სადაც m აღნიშნავს ერთ-განზომილებიან კლასიკურ ლებეგის ზომას R-ზე.

ვთქვათ, τ_2 არის $\mathcal{R}_2$-კლასზე შემდეგი ფორმულით განსაზღვრული

$$\tau_2(\Delta) = \prod_{i=1}^{\infty}\mathrm{m}(R_i)$$

ფუნქცია. ბეიკერის მიერ [3] ნაშრომში იქნა ნაჩვენები, რომ ფუნქციონალი μ, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\mu(X) = inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\tau_2(R_j) : R_j \in \mathcal{R}_2 \& X \subseteq \cup^{\infty}{}_{j=1} R_j\right\}$$

X∈ $B(R^N)$, არის კვაზიფინიტური ძვრების მიმართ ინვარიანტული ბორელის ზომა R^N -ში. ფაქტი 2.2.1 -ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ μ არის shy-სიმრავლეთა გენერატორი R^N სივრცეში.

შენიშვნა 2.2.1. [25, თეორემა 15.2.1 გვ.204] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ shy-სიმრავლეთა გენერატორი μ არის აბსოლუტურად უწყვეტი shy-სიმრავლეთა λ გენერატორის მიმართ და ამასთან λ და μ shy-სიმრავლეთა გენერატორები არ არიან ეკვივალენტური. ეს ფაქტი იძლევა უარყოფით პასუხს ბეიკერის მიერ [3] ნაშრომში დასმულ შეკითხვაზე λ და μ ზომათა ტოლობის შესახებ.

მაგალითი 2.2.3 ([26; თეორემა 7.1 გვ.119]) ვთქვათ, J არის ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის არაცარიელი ქვესიმრავლე. სოლოვეისა და $(ZF)\&(DC)\&(AD)$ მოდელებში დამტკიცებულია, რომ R^J სივრცის ბულეანზე არსებობს ძვრების მიმართ ინვარიანტული ისეთი μ_J ზომა, რომ $\mu_J([0,1[^J)=1$. ფაქტი 2.2.1-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ μ_J არის shy-სიმრავლეთა გენერატორი R^J სივრცეში.

2.3. shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორები პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში

ვთქვათ, μ არის პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა. N(μ)-თი აღვნიშნოთ V სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეების კლასი, რომელთა $\bar{\mu}$-ზომა ნულის ტოლია, სადაც $\bar{\mu}$ აღნიშნავს μ ზომის გასრულებას.

განსაზღვრება 2.3.1. S⊂ V ქვესიმრავლეს ეწოდება μ-shy თუ ის წარმოადგენს ისეთი ბორელის S' სიმრავლის ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\mu(S'+v)=0$ ყოველი $v\in V$ ელემენტისთვის. ყველა μ-shy სიმრავლეების კლასი აღინიშნება S(μ) სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ S(V)=$\cup_\mu$ S(μ). თუ μ ზომას აქვს ატომები, მაშინ S(μ) = $\{\emptyset\}$. ეს ნიშნავს იმას, რომ ალბათური ბორელის ზომები, რომლებიც

განსაზღვრავენ არატრივიალურ shy-სიმრავლეებს, არიან არაატომური ზომები.

ბუნებრივად ისმის შემდეგი

ამოცანა 2.3.1. ვთქვათ, μ არის პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის არაატომური ალბათური ზომა. არსებობს თუ არა ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის shy-სიმრავლეთა კვაზიფინიტური გენერატორი λ, ისეთი, რომ ადგილი ჰქონდეს შემდეგ თანაფარდობას

$$\mathrm{S}(\mu) = N(\bar{\lambda}).$$

შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა არ არის ტრივიალური და გადაწყვეტა დამოკიდებულია μ ზომის სტრუქტურაზე.

განსაზღვრება 2. 3.2. პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრულ კვაზი-ფინიტურ ბორელის μ ზომას ეწოდება გიხმან-სკოროხოდის ზომა, თუ ყოველი h$\in V$ ელემენტისათვის μ ზომის h −ძვრა, μ_h არის ან ორთოგონალური ან ეკვივალენტური μ ზომის.

განსაზღვრება 2.3.3. ვთქვათ, μ არის პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. Q_μ სიმრავლეს, განსაზღვრულს პირობით

$$Q_\mu = \{h \in V: \mu_h \sim \mu\},$$

ეწოდება μ ზომის კვაზიინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრების ჯგუფი.

ცხადია, რომ თუ Q_μ=V, მაშინ μ არის ძვრების მიმართ კვაზიინვარიანტული ზომა.

განსაზღვრება 2.3.4. ვთქვათ, μ არის პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. I_μსიმრავლეს, განსაზღვრულს პირობით

$$I_\mu = \{h \in V: \mu_h = \mu\},$$

ეწოდება μ ზომის ინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრების ჯგუფი.

ცხადია, რომ თუ $I_\mu =$ V, მაშინ μ არის ძვრების მიმართ ინვარიანტული ზომა.

შენიშვნა 2.3.1. ცხადია, რომ $I_\mu \subseteq Q_\mu$ ყოველი μ ზომისათვის. შევნიშნოთ, რომ ყოველი კვაზიფინიტური ბორელის μ ზომა, რომლის–თვისაც სრულდება პირობა $Q_\mu =$ V ან $I_\mu =$ V, წარმოადგენს გიხმან-სკოროხოდის ზომას განსაზღვრულს V სივრცეზე. აქ ბუნებრივად ისმის შეკითხვა არის თუ არა ანალოგიური შედეგი მართებული, როდესაც Q_μ და I_μ არიან ყველგან მკვრივი წრფივი ქვესივრცეები V სივრცეში.

ამ კონტექსტში გიხმანი და სკოროხოდი [Gikhman I.I.; Skorokhod A.V. Teoriya sluchaˇınykh protsessov. Tom I, Izdat.”Nauka”, Moscow, (1971) (in Russian)] ნაშრომში განიხილავდა შემდეგ ამოცანას [იხ.თავი 7 პარაგრაფი2]:

არსებობს თუ არა ჰილბერტის l_2 სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა μ, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) ჯგუფი Q_μ არის ყველგან მკვრივი l_2-ში;

(ii) არსებობს ელემენტი a$\in l_2 \setminus Q_\mu$, ისეთი რომ ზომა μ არ არის ორთოგონალური $\mu^{(a)}$-ზომის, სადაც $\mu^{(a)}(X) = \mu(X-a)$ X$\in B(l_2)$.

გიხმან-სკოროხოდის ამოცანის დადებითი გადაწყვეტა მოხერხდა გაუსის უსასრულო-განზომილებიანი სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცისათვის განვითარებული გაუსის ზომათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით .

[**Pantsulaia, G.** On an invariant Borel measure in Hilbert space. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.* **52** (2004), no. 1, 47--51]

ნაშრომში მოცემული იყო გიხმან-სკოროხოდის აღნიშნული შედეგის გაძლიერება ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ინვარიანტული ბორელის ზომათა თეორიის ტექნიკით. კერძოდ აიგო არანულოვანი σ-სასრული ბორელის μ ზომა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

(i) ჯგუფი I_μ არის ყველგან მკვრივი l_2 სივრცეში;

(ii) არსებობს a $\in l_2 \setminus I_\mu$ ისეთი, რომ ზომა $\mu^{(a)}$ არ არის ორთოგონალური μ ზომის.

განსაზღვრება 2.3.5. პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის კვაზიფინიტურ μ ზომას უწოდებენ shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორს თუ სრულდებაშემდეგი ორი პირობა:

(i) Q_μ არის V სივრცის წრფივი ქვესივრცე;

(ii) არსებობს ისეთი σ-კომპაქტი F, რომ ყოველი u∈ Q_μ და $\upsilon \in Q^{\perp}{}_{\mu} \setminus \{0\}$ ელემენტებისათვის სრულდება ტოლობები

$$\mu(V\backslash(F \cap (F+u))) = 0 \text{ და } \mu\big(F \cap (F+\upsilon)\big) = 0.$$

შენიშვნა 2.3.2. შევნიშნოთ, რომ shy-სიმრავლეთა ყოველი კვაზიგენერატორი არის გიხმან-სკოროხოდის ზომა, მაგრამ საწინააღმდეგო დებულება ყოველთვის არ არის მართებული. მართლაც, განვიხილოთ უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V-სივრცეზე განსაზღვრული shy-სიმრავლეთა რაიმე გენერატორი λ. ცხადია Q_λ= V, რაც ნიშნავს იმას, რომ λ არის გიხმან-სკოროხოდის ზომა. თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ λ არის shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორი, მაშინ იარსებებს σ -კომპაქტური სიმრავლე F ისეთი, რომ $\lambda(V\backslash(F \cap (F+0))) = 0$ რადგანაც 0∈ Q_λ. მაშინ $\lambda(V$\F)=0 და ჩვენ ვასკვნით, რომ V\F∈ $S(V)$. იმის გამო,რომ $F \in S(V)$ (იხ. ლემა 2.13), ჩვენ ვასკვნით, რომ $V = (V$\F)∪ $F \in S(V)$, რაც წინააღმდეგობაა.

ვთქვათ, μ არის პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. G_μ ფუნქციონალი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$G_\mu\,(X) = \sum_{\upsilon \in Q^{\perp}{}_{\mu}} \mu(X+\upsilon)\ ,$$

სადაც X∈ $B(V)$.

თეორემა 2.3.1. μ არის პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. მაშინ G_μ არის shy-სიმრავლეთა გენერატორი V სივრცეში, ისეთი რომ

$$S(\mu) = N(\overline{G_\mu}),$$

სადაც $\overline{G_\mu}$ აღნიშნავს G_μ ზომის გასრულებას.

ამასთან, თუ μ არის shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორი, მაშინ G_μ არის კვაზიფინიტური.

დამტკიცება. (i) ნაბიჯი. ვაჩვენოთ, რომ თუ $G_\mu(X) = 0$, მაშინ $G_\mu(X+h) = 0$ ყოველი $h \in$ V. $h \in$ V-თვის ჩვენ გვაქვს წარმოდგენა $h = h_1 + h_2$, სადაც $h_1 \in Q_\mu$ და $h_2 \in Q^\perp{}_\mu$. ამგვარად

$$G_\mu(X) = 0 <=> \sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu(X+v) = 0 <=> \sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu(X+h_1+v) = 0 <=> \sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu(X+h_1+h_2+v) = 0 <=> \sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu((X+h)+v) = 0 <=> G_\mu(X+h) = 0$$

ნაბიჯი (ii). ვაჩვენოთ, რომ ზომა G_μ არის კვაზიფინიტური თუ μ არის shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორი. მართლაც, ამ შემთხვევაში არსებობს σ-კომპაქტური სიმრავლე F, ისეთი რომ ყოველი u$\in Q_\mu$ და $v \in Q^\perp{}_\mu \setminus \{0\}$ ელემენტებისათვის სრულდება პირობები

$$\mu\big(V\setminus(F\cap(F+u))\big) = 0 \text{ და } \mu\big(F\cap(F+v)\big) = 0.$$

$\mu(V\setminus F) = 0$ პირობის მართებულობიდან გამომდინარეობს ისეთი კომპაქტური U$\subset F$ სიმრავლის არსებობა, რომ 0$< \mu(U) < \infty$. ამგვარად $\mu(U+v) = 0$ ყოველი $v \in Q^\perp{}_\mu \setminus \{0\}$ ელემენტისათვის. მართლაც,

$$\mu(U+v) = \mu\big((U+v)\cap F\big) \le \mu\big((F+v)\cap F\big) = 0.$$

თუ $v \in Q^\perp{}_\mu \setminus \{0\}$. აქედან გამომდინარე

$$G_\mu(U) = \sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu(U+v) = \mu(U+0) = \mu(U),$$

რაც ნიშნავს, რომ G_μ არის კვაზიფინიტური.

ნაბიჯი (iii) ვაჩვენოთ, რომ $S(\mu) = N(\overline{G_\mu})$. ვთქვათ, $X \in S(\mu)$. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ბორელის სიმრავლე X' ისეთი, რომ $X \subseteq$ X' და μ(X'+ $v) = 0$ ყოველი $v \in V$ ელემენტისათვის. უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $\sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu(X'+v) = 0$, რაც ნიშნავს რომ X'$\in N(G_\mu)$ და $X \in N(\overline{G_\mu})$. შებრუნებით, თუ $X \in N(\overline{G_\mu})$, მაშინ იარსებებს ბორელის სიმრავლე X', ისეთი რომ $X \subseteq$ X' და $\sum_{v\in Q^\perp{}_\mu} \mu(X'+v) = 0$. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ μ(X'+ $v) = 0$ ყოველი $v \in Q^\perp{}_\mu$ ელემენტისათვის. ვთქვათ, $h = h_1 + h_2$ არის V სივრცის რაიმე ელემენტი, სადაც $h_1 \in Q_\mu$ და $h_2 \in Q^\perp{}_\mu$. μ(X'+$h_2) = 0$ და $h_1 \in Q_\mu$ პირობიდან ჩვენ ვასკვნით, რომ μ(X'+ $h) = 0$. h ელემენტის ნებისმიერობის გამო ჩვენ ვასკვნით, რომ X'$\in S(\mu)$. ვინაიდან $X \subseteq$ X', ჩვენ ვასკვნით, რომ $X \in S(\mu)$. ◻

შენიშვნა 2.3.3. ადვილი საჩვენებელია, უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეზე აგებული იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა [12] წარმოადგენს shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორს.

2.4. იამასაკი-ხარაზიშვილის shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორისათვის ტეფერ გილის მიერ დასმული ერთი ამოცანის შესახებ

[12] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ ნამრავლი ტოპოლოგიით აღჭურვილ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომის (იხ. მაგალითი 1.8, გვ. 35) დასაშვები ბორელის იზომორფიზმების ჯგუფი საკმაოდ მდიდარია. ხარაზიშვილის მიდგომის საშუალებით დამტკიცებულია, რომ ყოველ პოლონურ ვექტორულ სივრცეზე არსებობს სიგმა-სასრული არატრივიალური ბორელის ზომა, რომელიც ინვარიანტულია ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. ეს შედეგი აძლიერებს შაუდერის ბაზისის მქონე უსასრულო-განზომილებიანი სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებისათვის გილის, ფანცულაიას და ზახარის მიერ მიღებულ მსგავს შედეგს. ნაჩვენებია, რომ უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი სიგმა-სასრული ბორელის ზომა, რომელიც ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას ფიქსირებულ კომპაქტურ სიმრავლეზე და ინვარიანტულია წრფივი ქვესივრცის მიმართ, არ ფლობს ერთადერთობის თვისებას. მარკუშევიჩის ბაზისის მქონე ბანახის სივრცეზე განსაზღვრული ანალოგიური ზომების გასრულებისათვის მსგავსი ამოცანა იხსნება დადებითად. ერთადერთობის ამოცანა გადაწყვეტილია უარყოფითად ბანახის სივრცეზე განსაზღვრული არა-სიგმა-სასრულო სემი-ფინიტური ძვრების მიმართ ინვარიანტული ისეთი ბორელის ზომისათვის, რომელიც ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას სტანდარტულ პარალელეპიპედზე (ე.ი. მარკუშევიჩის ბაზისით განსაზღვრულ პარალელეპიპედზე). დამატებით, ბანახის სივრცეზე აგებულია ისეთი μ ზომის მაგალითი, რომელიც ფლობს ძლიერი ერთადერთობის თვისებას ძვრების მიმართ ინვარიანტულ ისეთ ზომათა კლასში, რომლებიც არიან

განსაზღვრული μ-ზომად სიმრავლეთა კლასზე და რომელთა მნიშვნელობები არაგადაგვარებულ პარალელეპიპედებზე ემთხვევიან მათ მოცულობებს.

ტეფერ გილი განიხილავდა უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრულ იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომებს ლებეგის ზომის კერძო ანალოგებად და აინტერესებდა საკითხი, თუ რამდენად იყო შესაძლებელი ამავე სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის ზომების აღწერა ლებეგის ზომის კერძო ანალოგების ტერმინებში. სხვა სიტყვებით, მას სურდა გარკვეული გაუსის λ ზომისათვის და იამასაკი-ხარაზიშვილის გარკვეული μ ზომისათვის მიეღო შემდეგი ტოლობის

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(B) \to \lambda(X) = \int_X e^{-\pi\|x\|^2} d\mu(x)) .$$

მართებულობა. ამასთან დაკავშირებით, პირადულ მიმოწერაში გ.ფანცულაიასთან ტეფერ გილის მიერ დასმულ იქნა შემდეგი

ამოცანა 2.4.1. არსებობს თუ არა უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრული იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა μ, რომელიც დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$0< \int_B e^{-\pi\|x\|^2} d\mu(x) < +\infty.$$

შენიშვნა 2.4.1. ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის μ ზომას ეწოდება ლოკალურად სასრული თუ ყოველი წერტილისათვის არსებობს მისი ისეთი მიდამო, რომლის μ ზომა სასრულია. [16]-ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ძვრების მიმართ ინვარიანტული არაგადაგვარებული ბორელის ზომა არ არის ლოკალურად სასრული. შემდეგი დებულება გვიჩვენებს, რომ ანალოგიური ფაქტი მართებულია უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი არაგადაგვარებული სიგმა-სასრული ბორელის ზომებისათვის, რომლებიც არიან ინვარიანტული ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცეების მიმართ.

ლემა 2.4.1. უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი არანულოვანი ბორელის ზომა μ,

რომელიც ინვარიანტულია ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ, არ არის ლოკალურად სასრული.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, μ არის ლოკალურად სასრული. თუ გამოვიყენებთ ლოკალურად სასრულობას, მაშინ იარსებებს ისეთი $\delta > 0$, რომ ღია $B(x,\delta)$ ბირთვს, ცენტრით x წერტილში და რადიუსით δ, აქვს სასრული μ ზომა. ვინაიდან B არის უსასრულო-განზომილებიანი, ამიტომ არსებობს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი $\frac{\delta}{4}$ რადიუსის მქონე ღია ბირთვების ისეთი უსასრულო მიმდევრობა $(B_n\left(x_n,\frac{\delta}{4}\right))_{n\in N}$, რომ მცირე ბირთვი $B_n(x_n,\frac{\delta}{4})$ შედის $B(x,\delta)$ ბირთვში. μ ზომის ყველგან მკვრივი (B-ში) ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტულობიდან ჩვენ ვასკვნით ისეთი $(h_n)_{n\in N}$ მიმდევრობის არსებობას, რომ $h_n \in B_n(x_n,\frac{\delta}{8})$ ყოველი $n \in N$ რიცხვისათვის. μ ზომის ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ ინვარიანტულობიდან გამომდინარეობს, რომ $\mu(B(0,\frac{\delta}{8})) > 0$, ვინაიდან B იფარება $B(0,\frac{\delta}{8})$ სიმრავლის ტრანსლაციების თვლადი $\left\{B\left(0,\frac{\delta}{8}\right) + z_n : n \in N\right\}$ ოჯახით, სადაც $(z_n)_{n\in N}$ არის B-ში ყველგან მკვრივი ელემენტების თვლადი მიმდევრობა. პირველად ვაჩვენოთ, რომ $B\left(0,\frac{\delta}{8}\right) + h_n \subseteq B_n(x_n,\frac{\delta}{4})$. ცხადია, რომ

$$B\left(0,\frac{\delta}{8}\right) + h_n = B(h_n,\frac{\delta}{8}), \quad \|x_k - h_k\| < \frac{\delta}{8}$$

და

$$\|y_k - x_k\| \leq \|y_k - h_k\| + \|h_k - x_k\| < \frac{\delta}{8} + \frac{\delta}{8} = \frac{\delta}{4}$$

ყოველი $y_k \in B_n(h_n,\frac{\delta}{8})$ ელემენტისათვის, რაც ნიშნავს, რომ $B_n(h_n,\frac{\delta}{8}) \subseteq B_n(x_n,\frac{\delta}{4})$. ვინაიდან $(B_n\left(x_n,\frac{\delta}{4}\right))_{n\in N}$ არის $B(x,\delta)$ სფეროს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ნაწილების ოჯახი, ჩვენ ვასკვნით, რომ $(B_n(h_n,\frac{\delta}{8})_{n\in N}$ ოჯახიც ასევე არის $B(x,\delta)$ სფეროს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ნაწილების ოჯახი. ვინაიდან ყოველი $B_n(h_n,\frac{\delta}{8})$ სფეროს μ ზომა ტოლია და ამასთან დადებითი, ჩვენ ვღებულობთ წინააღმდეგობას $\mu(B(x,\delta)) < +\infty$ პირობასთან ამით ლემა2.4.1 დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ, B არის უსასრულო-განზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე და μ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრული σ-სასრული არანულოვანი ბორელის ზომა, რომელიც ინვარიანტულია ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\int_B e^{-\pi\|x\|^2}\,d\mu(x) = +\infty.$$

დამტკიცება. ლემა 2.4.1-ის ძალით, ჩვენ ვღებულობთ

$$\int_B e^{-\pi\|x\|^2}\,d\mu(x) \geq \int_{B(0,1)} e^{-\pi\|x\|^2}\,d\mu(x) \geq \int_{B(0,1)} e^{-\pi}\,d\mu(x) = +\infty \times e^{-\pi} = +\infty.$$

□

შედეგი 2.4.1. არ არსებობს უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრული იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა μ, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა $0 < \int_B e^{-\pi\|x\|^2}\,d\mu(x) < +\infty$.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის B სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ხარაზიშვილი-იამასაკის ზომა არის σ-სასრული არანულოვანი ბორელის ზომა, ინვარიანტული ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. თეორემა 2.4.1-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ $\int_B e^{-\pi\|x\|^2}\,d\mu(x) = +\infty$. □

2.5. კვაზიფიტურობის პრობლემა გაუსის shy-სიმრავლეთა გენერატორებისათვის

უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებზე განსაზღვრული ორი ზომის ეკვივალენტურობისა და ორთოგონალურობის ამოცანა განიხილებოდა ბევრი ავტორის მიერ. ამ მიმართულებით, განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია კაკუტანის შედეგი [Kakutani S., On equivalence of infinite product measures. Ann.Math., 1948, v.4, 9,p. 214-224.] იმის შესახებ, რომ თუ μ_i და υ_i არიან Ω_i სიმრავლის ქვესიმრავლეთა L_i σ-ალგებრაზე განსაზღვრული ექვივალენტური ალბათური ზომები, როცა $i = 1,2,\dots\dots$, მაშინ პროდაქტ-ზომები $\prod_{i\in N}\mu_i$ და $\prod_{i\in N}\upsilon_i$ არიან ან ექვივალენტურები ან ორთოგონალურები. მსგავსი დიხოტომია აღმოჩნდა გაუსის სტოქასტური პროცესების შესწავლისას.

ვთქვათ, μ არის გაუსის ზომა განსაზღვრული V სივრცეზე. პასუხი შეკითხვაზე, არის თუა არა G_μ ზომა კვაზიფინიტური, დამოკიდებულია μ-ზომის სტრუქტურაზე. განვიხილოთ უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ V სივრცეზე განსაზღვრული ასეთი ზომის მაგალითი.

მაგალითი 2.5.1. ვთქვათ $e_1, \dots e_k$ არის V-სივრცის წრფივად-დამოუკიდებელი ვექტორების ოჯახი. ვთქვათ,

$$L(e_1, \dots e_k) = span(e_1, \dots e_k).$$

$\lambda_{L(e_1,\dots e_k)}$ -ით აღვნიშნოთ გაუსის ალბათური ზომა $L(e_1, \dots e_k)$-სივრცეზე, განსაზღვრული შემდეგი პირობით:

$$\lambda_{L(e_1,\dots e_k)}(\{t_1e_1 + \cdots + t_ke_k : (t_1, \dots t_k) \in X\}) = \gamma_k(X)$$

სადაც $X \in B(R^k)$ და γ_k არის სტანდარტული k-განზომილებიანი გაუსის ბორელის ზომა R^k-ში.

ცხადია, რომ $\lambda_{L(e_1,\dots e_k)}$ არის shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორი V-ში და $G_{\lambda_{L(e_1,\dots e_k)}}$ არის კვაზიფინიტური გაუსის shy-სიმრავლეთა გენერატორი V-ში ისეთი, რომ

$$S(\lambda_{L(e_1,\dots e_k)}) = N(\bar{G}_{\lambda_{L(e_1,\dots e_k)}})$$

შენიშვნა 2.5.1. ვთქვათ μ_k არის სტანდარტული გაუსის ალბათური ბორელის ზომა განსაზღვრული ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე($k \in N$). ვთქვათ X=R^N და $\mu = \prod_{k\in N} \mu_k$ არის კანონიკური გაუსის ბორელის ალბათური ზომა R^N-ში (იხ. მაგალითი 1.7). კაკუტანის მიერ [Kakutani S., On equivalence of infinite product measures. Ann.Math., 1948, v.4, 9,p. 214-224.] ნაშრომში მიღებული შედეგის თანახმად, $Q_\mu = l_2$, რაც ნიშნავს, რომ μ არის გიხმან-სკოროხოდის ზომა. თეორემა 2. 3.1 ძალით , G_μ არის shy-სიმრავლეთა გენერატორი და $N(\overline{G_\mu})$=S(μ), მაგრამ ჩვენ არ ვიცით, არის თუ არა G_μ კვაზიფინიტური.

შენიშვნა 2.5.2. უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის μ ზომას ეწოდება გაუსის, თუ ნებისმიერი უწყვეტი წრფივი ფუნქციონალი $l_2(x) = (z, x)(z, x \in H)$ არის

ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. (იხ.[Gikhman I.I.; Skorokhod A.V. Teoriya slucha˘ınykh protsessov. Tom I, Izdat.”Nauka”, Moscow, (1971) (in Russian). თავი V, პარაგრაფი 6]). ვერშიკმა [Versik A. M., Duality in the theory of measure in linear spaces (in Russian), Dokl.Akad. Nauk SSSR 170 (1966), 497–500] დაამტკიცა, რომ Q_μ ჯგუფი წარმოადგენს წრფივ ვექტორულ სივრცეს უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ჰილბერტის სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი გაუსის μ ზომისათვის. უფრო ზუსტად, თუ B არის გაუსის μ ზომის კორელაციის ოპერატორი, მაშინ $Q_\mu = B^{\frac{1}{2}}(H)$ (იხ. [Gikhman I.I., Skorokhod A.B., *Introduction to the theory of stochastic processes, Nauka,* Moscow, (1977) (in Russian).]). ფელცმა [Phelps R.R., Gaussian null sets and differentiability of Lippschitz maps on Banach spaces, Pac. J. Math., 77(1978),523-531] ბორელის სიმრავლეს უწოდა გაუსის აზრით ნულ სიმრავლე, თუ ის არ არის ნული უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ჰილბერტის H სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი გაუსის ზომის მიმართ. სიმრავლეს უწოდებენ გაუსის აზრით ნულ სიმრავლეს თუ ის წარმოადგენს ბორელის გაუსის ნულ სიმრავლის ქვესიმრავლეს. გაუსის ნულ სიმრავლეთა ყველა კლასი H-ში აღინიშნება GN(H). თუ Γ აღნიშნავს უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ჰილბერტის H სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის ზომათა კლასს, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$GN(H)=\cap_{\gamma\in\Gamma} N(\bar{G}_\gamma).$$

ამ ტოლობის დამტკიცება შესაძლებელია თეორემა 2. 3.1-ის გამოყენებით. მაგალითი 2.5.1-თან დაკავშირებით ბუნებრივად ისმის შეკითხვა არის თუ არა უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ჰილბერტის H სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი გაუსის ზომა shy-სიმრავლეთა კვაზიგენერატორი.

2.6. ჰაარის ემბივალენტის დახასიათება shy-სიმრავლეთა გენერატორების ტერმინებში

განსაზღვრება 2.6.1. ვთქვათ V არის წრფივი სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე. V სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეს ეწოდება „ჰაარის ემბივალენტი“ თუ ის არ წარმოადგენს არც shy-სიმრავლეს და არც „გავრცელებას“.

შემდეგი ფაქტი შეიცავს ჰაარის ემზივალენტის დახასიათებას shy -სიმრავლეთა გენერატორების ტერმინებში.

ფაქტი 2.6.1. სრული სეპარაბელური ტოპოლოგიური ვექტორული V სივრცის ბორელის X ქვესიმრავლე არის ჰაარის ემზივალენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა shy -სიმრავლეთა ყოველი μ გენერატორისათვის ერთდროულად სრულდება შემდეგი ორი პირობა $\mu(X)>0$ და $\mu(V \setminus X)>0$.

დამტკიცება. **აუცილებლობა.** ვთქვათ, ბორელის X ქვესიმრავლე არის ჰაარის ემზივალენტი და μ არის shy -სიმრავლეთა წარმომქნელია. თუ დავუშვებთ, რომ არ სრულდება პირობა $\mu(X)>0$, მაშინ გვექნება $\mu(X)=0$, რაც ნიშნავს რომ X ქვესიმრავლე არის shy-სიმრავლე. ეს ეწინააღმდეგება პირობას, რომ X ქვესიმრავლე არის ჰაარის ემზივალენტი. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ არ სრულდება პირობა $\mu(V \setminus X)>0$, მაშინ გვექნება $\mu(V \setminus X)=0$, რაც ნიშნავს რომ $V \setminus X$ ქვესიმრავლე არის shy -სიმრავლე. ეს ეწინააღმდეგება პირობას, რომ X ქვესიმრავლე არის ჰაარის ემზივალენტი.

ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ, ბორელის X ქვესიმრავლე არის ისეთი, რომ shy -სიმრავლეთა ყოველი μ წარმომქნელისათვის სრულდება შემდეგი ორი პირობა $\mu(X)>0$ და $\mu(V \setminus X)>0$.

ვაჩვენოთ, რომ X არის ჰაარის ემზივალენტი. თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, მაშინ თეორიულად შესაძლებელია მხოლოდ ორი შემთხვევა:

(i) X ქვესიმრავლე shy -სიმრავლეა;

(ii) X ქვესიმრავლე „გავრცელებაა“.

ვაჩვენოთ, რომ არც ერთი ზემოთ მოყვანილი პირობიდან არაა შესაძლებელი.

შემთხვევა (i). თუ X ქვესიმრავლე shy-სიმრავლეა, მაშინ მისთვის იარსებებს ტესტური ზომა λ. განვიხილოთ ზომა μ განსაზღვრული პირობით

$$(\forall X)(X \in B(V) \to \mu(X) = \sum_{h \in V} \lambda(X+h)).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ μ არის shy-სიმრავლეთა წარმომქნელი და ამ ზომით წარმოქმნილ shy-სიმრავლეთა კლასის ყოველი ელემენტისათვის λ წარმოადგენს ტესტურ ზომას. შევნიშნოთ, რომ $\mu(X)=0$, რაც წინააღმდეგობაა.

შემთხვევა (ii). თუ X ქვესიმრავლე „გავრცელებაა“, მაშინ $V \setminus X$ shy -სიმრავლეა. მაშინ მისთვის იარსებებს ტესტური ზომა λ. განვიხილოთ ზომა μ განსაზღვრული პირობით

$$(\forall X)(X \in B(V) \to \mu(X) = \sum_{h \in V} \lambda(X+h)).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ μ არის shy-სიმრავლეთა წარმომქნელი და ამ ზომით წარმოქმნილ shy-სიმრავლეთა კლასის ყოველი ელემენტისათვის λ წარმოადგენს ტესტურ ზომას. შევნიშნოთ, რომ $\mu(V \setminus X)=0$, რაც წინააღმდეგობაა.

ამით საკმარისობა დამტკიცებულია. $\square$

თავი III. ძვრა-ზომათა N-ხარისხების ოჯახის განცალებადობის შესახებ R^N სივრცეში

ქვეთავი 3.1. ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახები

განვიხილოთ ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახებისათვის.

ა.სკოროხოდის მიერ [17] ნაშრომში შემოტანილი შემდეგი კლასიფიკაცია:

ვთქვათ, (E,S) არის ზომადი სივრცე.

განსაზღვრება 3.1.1. (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახს ეწოდება ორთოგონალური (O), თუ პარამეტრთა I ოჯახის ყოველი ორი განსხვავებული i და j ელემენტისათვის μ_i და μ_j ზომები არიან ორთოგონალურები.

განსაზღვრება 3.1.2. (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახს ეწოდება სუსტად განცალებადი $(W.S)$ თუ არსებობს E სივრცის ზომად ქვესიმრავლეთა ისეთი $(X_i)_{i\in I}$ ოჯახი, რომ

$$(\forall i,j)(i\in I \;\&\; j\in I \to \mu_i(X_j)=\delta(i,j)),$$

სადაც $\delta(i,j)$ აღნიშნავს I სიმრავლის I^2 დეკარტულ კვადრატზე განსაზღვრულ კრონეკერის ფუნქციას.

განსაზღვრება 3.1.3. (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახს ეწოდება ძლიერად განცალებადი $(S.S)$ თუ არსებობს E სივრცის ზომად ქვესიმრავლეთა ისეთი დიზუნქტიური ოჯახი $(X_i)_{i\in I}$, რომ

$$(\forall i)(i\in I \to \mu_i(X_i)=1).$$

განსაზღვრება 3.1.4. ვიტყვით, რომ (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახისათვის არსებობს i პარამეტრის ძალდებული შეფასება $(C.E)$, თუ არსებობს ისეთი ზომადი ასახვა $\tilde{i}:E\to I$, რომ

$$(\forall i)(i\in I \to \overline{\mu}_i(\{x:\tilde{i}(x)=i\})=1).$$

ადვილია შემდეგ იმპლიკაციათა მართებულობის დადგენა:

$$(C.E) \to (S.S) \to (W.S) \to (O).$$

ცნობილია (იხ. [გიმზერ საათაშვილი, სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ (დისერტაცია წარმოდგენილი დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად), საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი-ივნისი-2012. http://www.nplg.gov.ge/dlibrary/collect/0002/000569/PhD%20Thesis%20%28Saatashvilii%29.pdf), რომ შებრუნებული იმპლიკაციები არაა ზოგადად მართებული პოლონური სივრცის Z-ხარისხებზე განსაზღვრული ორთოგონალური სტაციონარული ზომებისათვის.

შენიშვნა 3.3.2. [G.Pantsulaia, On orthogonal families of probability measures, *Trans. GPI*, (1989) 8(350), 106-112 (in Russian)] ნაშრომში დადგენილია, რომ აქსიომათა (ZFC) სისტემაში კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობა ექვი-ვალენტურია წინადადების, რომ ყოველი კონტინუალური სუსტად გან-ცალებადი ოჯახი ალბათური ზომებისა არის ძლიერად განცალებადი.

შემდეგ მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ალბათურ ზომათა ოჯახი შეიძლება იყოს ძლიერად განცალებადი, მაგრამ მისთვის არ არსებობდეს ძალდებული შეფასება.

მაგალითი 3.1.3. $(S.S) \neg\to (C.E)$. ვთქვათ $F : R \to R$ არის უნივერ-სალურად არაზომადი[1] ურთიერთცალსახა ასახვა. $i \in R$ პარამეტრისათვის, λ_i-ით ავღნიშნოთ დირაკის ზომა კონცენტრირებული $f(i)$ წერტილში. და-ვუშვათ $\mu_i = \lambda_i^Z$, როცა $i \in R$. ცხადია, რომ $(\mu_i)_{i \in R}$ არის ძლიერად განცალე-ბადი ოჯახი სტაციონარული ზომებისა R^Z სივრცეზე. ვაჩვენოთ, რომ $(\mu_i)_{i \in R}$ ოჯახისათვის არ არსებობს ძალდებული შეფასება. დავუშვათ საწი-ნააღმდეგო და ვთქვათ, $\tilde{i} : R^Z \to R$ არის ბორელის აზრით ზომადი ფუნქცია, ისეთი რომ

[1] ვთქვათ, K არის $B(B)$ σ–ალგებრაზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა კლასი. $B(B)^{\mu}$–ით აღვნიშნოთ $B(B)$ σ–ალგებრის გასრულება μ ზომით, სადაც $\mu \in K$. $E \subset B$ სიმრავლეს ეწოდება უნივერსალურად ზომადი, თუ $E \in \cap_{\mu \in K} B(B)^{\mu}$.

$$(\forall i)(i \in R \rightarrow \mu_i(\{x : \widetilde{i}\,(x) = i\}) = 1).$$

შევნიშნოთ, რომ $f^{-1}(\{i\}) \in Pr_k(\widetilde{i}^{\,-1}(\{i\}))$ როცა $i \in R$. ვინაიდან $(Pr_k(\widetilde{i}^{\,-1}(\{i\})))_{i \in R}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების ოჯახი და $\bigcup_{i \in R}\{f^{-1}(\{i\})\} = R$, ჩვენ ვასკვნით, რომ $Pr_k(\widetilde{i}^{\,-1}(\{i\})) = f^{-1}(\{i\})$, როცა $i \in R$. შესაბამისად ეს ტოლობა გაგრძელებადია ყოველი $Y \subseteq R$ ქვესიმრავლი-სათვის შემდეგნაირად

$$Pr_k(\widetilde{i}^{\,-1}(Y)) = f^{-1}(Y).$$

ვინაიდან f არ არის უნივერსალურად ზომადი, არსებობს ბორელის აზრით ზომადი სიმრავლე $Y_0 \in \mathrm{B}(R)$ ისეთი, რომ $f^{-1}(Y_0) \notin \Upsilon(R)$. უკანას-კნელი თანაფარდობა ნიშნავს, რომ $Pr_k(\widetilde{i}^{\,-1}(Y_0)) \notin \Upsilon(R)$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $Pr_k(\widetilde{i}^{\,-1})(Y)) \in \Upsilon(R)$, როცა $Y \in \Upsilon(R)$.

ქვეთავი 3.2. ზოგიერთი დამხმარე ცნება და დებულება

შეთანხმება 3.2.1. მომავალში N -ის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ $\{1,2,\cdots\}$ სიმრავლეს.

განსაზღვრება 3.2.1 ([24]). ნამდვილ რიცხვთა $s_1, s_2, s_3, \cdots$ მიმდევრო-ბას (a,b) ინტერვალიდან ეწოდება უნიფორმულად განაწილებული (a,b) ინტერვალზე, თუ ყოველი $[c,d]$ ქვეინტერვალისთვის ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#(\{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n\} \cap [c,d])}{n} = \frac{d-c}{b-a},$$

სადაც # აღნიშნავს მთვლელ ზომას.

შენიშვნა 3.2.1. ასეთი მიმდევრობები შეისწავლება დიოფანტურ მიახ-ლოებათა თეორიაში და მათ აქვთ გამოყენებები მონტე კარლოს ინტეგრება-დობის საკითხებში (იხილეთ, მაგალითად, [14], [15], [35]).

შეთანხმება 3.2.2. ყოველი ნამდვილი r რიცხვისათვის, $< r >$ სიმბო-ლოთი აღინიშნება r რიცხვის წილადი ნაწილი, ე.ი., $< r >= r - [r]$, სადაც $[r]$ აღნიშნავს r -ის მთელ ნაწილს.

მაგალითი 3.2.1 ([24], სავარჯიშო 1.12, გვ. 16). ყოველი ირაციონალური α რიცხვისათვის, მიმდევრობა

$$<0>, <\alpha>, <2\alpha>, <3\alpha> \cdots$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე.

მაგალითი 3.2.2 ([24], მაგალითი 1.13, გვ. 16). მიმდევრობა

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{0}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \cdots$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე.

მაგალითი 3.2.3 ყოველი ირაციონალური α რიცხვისათვის, მიმდევრობა

$$<2\alpha>, <3\alpha>, <5\alpha>, <7\alpha>, <11\alpha>, \cdots$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე. ეს არის ანალიზურ რიცხვთა თეორიის მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც მიღებულ იქნა ვინოგრადოვის მიერ 1935 წელს (იხილეთ [35]).

ვთქვათ, X არის კომპაქტური პოლონური სივრცე და μ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა. ვთქვათ, $\mathrm{B}(X)$ არის X სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სივრცე.

განსაზღვრება 3.2.3 . X სივრცის ელემენტთა $s_1, s_2, s_3, \cdots$ მიმდევრობას ეწოდება μ-ექვიგანაწილებული ან μ-უნიფორმულად განაწილებული X სივრცეზე, თუ ყოველი $f \in \mathrm{B}(X)$ ელემენტისათვის სრულდება ტოლობა

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(s_n) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 3.2.2 ([24], ლემა 2.1, გვ. 199). *ვთქვათ,* $f \in \mathrm{B}(X)$ *და* $\mu_\infty := \mu^\infty$. *მაშინ,* μ_∞ *-თითქმის ყველა* $(s_n)_{n\in N} \in X^\infty$ *მიმდევრობისათვის, სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(s_n) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 3.2.3 ([24], გვ. 199-201). *ვთქვათ,* S *არის* μ *-ექვიგანაწილებულ მიმდევრობების სიმრავლე* X *-სივრცეზე. მაშინ*

(*i*) $\mu_\infty(S)=1$*;*

(*ii*) S *არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;*

(*iii*) S *არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიაში.*

შედეგი 3.2.1. ვთქვათ, ℓ_1 არის ლებეგის წრფივი ზომა (0,1) ინტერვალზე. ვთქვათ, D არის ℓ_1-ექვიგანაწილებულ მიმდევრობების სიმრავლე (0.1)-ზე. მაშინ

(*i*) $\ell_1^\infty(D)=1$;

(*ii*) D არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;

(*iii*) D არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.

განსაზღვრება 3.2.4. ვთქვათ, μ არის R ღერძზე განსაზღვრული ალბათური ბორელის ზომა და F არის მისი განაწილების ფუნქცია. ნამდვილ რიცხვთა $s_1,s_2,s_3,\cdots$ მიმდევრობას ეწოდება μ-ექვიგანაწილებული ან μ-უნიფორმულად განაწილებული R ღერძზე, თუ ყოველი $[a,b]$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ ინტერვალისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#([a,b]\cap\{x_1,\cdots,x_n\})}{n}=F(b)-F(a).$$

ლემა 3.2.4. *ვთქვათ,* $(x_k)_{k\in N}$ *არის* ℓ_1*-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა (0.1)-ზე და* F *არის მკაცრად ზრდადი უწყვეტი ფუნქცია* $\overline{R}=\{-\infty\}\cup R\cup\{+\infty\}$*-ზე ისეთი, რომ* $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ *და* $F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$. *ვთქვათ,* p_F *არის ბორელის ალბათური ზომა* R*-ზე განსაზღვრული განაწილების* F *ფუნქციით. მაშინ* $(F^{-1}(x_k))_{k\in N}$ *არის* p_F*-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა* R *ღერძზე.*

დამტკიცება. ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#([a,b]\cap\{F^{-1}(x_1),\cdots,F^{-1}(x_n)\})}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\#([F(a),F(b)]\cap\{x_1,\cdots,x_n\})}{n}=F(b)-F(a). \qquad \square$$

შედეგი 3.2.2. *ვთქვათ,* F *არის მკაცრად ზრდადი უწყვეტი ფუნქცია* $\overline{R}:=\{-\infty\}\cup R\cup\{+\infty\}$*-ზე, ისეთი, რომ* $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ *და*

$F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, და ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R-ზე განსაზღვრული განაწილების F ფუნქციით. მაშინ R ღერძზე p_F-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების $D_F(\subset R^{\infty})$ სიმრავლისათვის ჩვენ გვაქვს:

(i) $D_F=\{(F^{-1}(x_k))_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in D\}$.

(ii) $p_F^{\infty}(D_F)=1$;

(iii) D_F არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;

(iv) D_F არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.

ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბა-თურ ზომათა ოჯახი. ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის $\overline{\mu}_\theta$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ μ_θ ზომის გასრულება.

განსაზღვრება 3.2.5. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი არის ძლიე-რად განცალებადი, თუ არსებობს $\bigcap_{q\in Q}dom(\overline{m}_q)$ კლასის ელემენტთა $(Z_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი, ისეთი რომ

(i) $\mu_\theta(Z_\theta)=1$;

(ii) $Z_{\theta_1}\cap Z_{\theta_2}=\varnothing$;

(iii) $\cup_{\theta\in\Theta}Z_\theta=E$.

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი კარგად ცნობილი ფაქტი ალბათობის თეორიიდან.

ლემა 3.2.5 (დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი)[32]. *ვთქვათ, $X_1,X_2,\ldots$ არის ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა შემოსაზღვრული საშუალოთი, ე.ი., $E(X_1)=E(X_2)=\cdots=m<\infty$. მაშინ*

$$P(\{\omega:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}X_k(\omega)/n=m\})=1.$$

(0,1) ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობათა თვისებების გამოყენებით მტკიცდება

ლემა 3.2.6. *ვთქვათ, F არის R ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქცია და p_F არის F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა R ღერძზე. ვთქვათ, ყოველი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის, $F_\theta(x) = F(x+\theta)(x \in R)$. მაშინ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta \in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.*

დამტკიცება. ყოველი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის, D_θ-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე p_{F_θ}-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობებისა R^∞ სივრცეში. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < +\infty$ პარამეტრებისათვის სრულდება ტოლობა $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \emptyset$. ყოველი $(x_k)_{k \in N} \in D_{\theta_1}$ მიმდევრობისათვის, ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#((-\infty,0] \cap \{x_1,\cdots,x_n\})}{n} = F_{\theta_1}(0) = F(\theta_1).$$

ანალოგიურად, ყოველი $(x_k)_{k \in N} \in D_{\theta_2}$ მიმდევრობისათვის, ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#((-\infty,0] \cap \{x_1,\cdots,x_n\})}{n} = F_{\theta_2}(0) = F(\theta_2).$$

ვინაიდან F არის მკაცრად ზრდადი ფუნქცია R-ზე, ჩვენ ვღებულობთ $F(\theta_1) < F(\theta_2)$. ეს უკანასკნელი პირობა იწვევს, რომ $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \emptyset$.

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის Y_θ-ით აღვნიშნოთ X_θ სიმრავლის ისეთი F_σ სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $p^\infty_{F_\theta}(Y_\theta) = 1$.

$\theta \in R \setminus \{0\}$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა $Z_\theta = Y_\theta$ და $Z_0 = Y_0 \cup (R^\infty \setminus \cup_{\theta \in R} Z_\theta)$.

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა $L_\theta = \mathrm{B}(Z_\theta) \cup \Pi(R^\infty \setminus Z_\theta)$.

ვთქვათ, $S = \cap_{\theta \in R} L_\theta$. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mathrm{B}(R^\infty) \subseteq S$; მართლაც, დავაფიქსიროთ $X \in \mathrm{B}(R^\infty)$. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის ჩვენ გვაქვს $X = (X \cap Z_\theta) \cup (X \cap (R^\infty \setminus Z_\theta))$.

ვინაიდან

$$X \cap Z_\theta \in \mathrm{B}(Z_\theta)$$

და

$$(X \cap (R^\infty \setminus Z_\theta)) \in \Pi(R^\infty \setminus Z_\theta),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $X \in L_\theta$. შესაბამისად, $X \in \cap_{\theta \in R} L_\theta = S$. ვინაიდან ბორელის სიმრავლე X აღებული იყო ნებისმიერად, ჩვენ ვასკვნით, რომ $\mathrm{B}(R^\infty) \subseteq S$.

როგორც მარტივი შედეგი, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $Z_\theta \in S$, როცა $\theta \in R$. ყოველი $\theta_0 \in R$, ჩვენ გვაქვს

$$\cup_{\theta \in R} Z_\theta = Z_{\theta_0} \cup \cup_{\theta \in R \setminus \{\theta_0\}} Z_\theta.$$

ვინაიდან $Z_{\theta_0} \in \mathrm{B}(Z_{\theta_0})$ და

$$\cup_{\theta \in R \setminus \{\theta_0\}} Z_\theta \in \Pi(R^\infty \setminus Z_\theta),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $\cup_{\theta \in R} Z_\theta \in L_{\theta_0}$. $\theta_0 \in R$ იყო აღებული ნებისმიერად, რაც ნიშნავს რომ

$$\cup_{\theta \in R} Z_\theta \in \cap_{\theta_0 \in R} L_{\theta_0} = S.$$

ცხადია, რომ S, როგორც თანაკვეთა R^∞ სივრცის σ-ალგებრებისა, ასევე არის σ-ალგებრა. შესაბამისად, $R^\infty \setminus \cup_{\theta \in R} Z_\theta \in S$.

ვთქვათ, $\theta_0 \in R$. ვთქვათ,

$$X_{\theta_0} = Z_{\theta_0} \cup (R^\infty \setminus \cup_{\theta \in R} Z_\theta),$$

და $X_\theta = Z_\theta$, როცა $\theta \neq \theta_0$.

ახლა ადვილია იმის შემოწმება, რომ

(i) $X_\theta \in S = \cap_{\theta \in \Theta} dom(\overline{\mu}_\theta)$ როცა $\theta \in R$;

(ii) $\overline{p}^\infty_{F_\theta}(X_\theta) = 1;$

(ii) $X_{\theta_1} \cap X_{\theta_2} = \emptyset;$

(iii) $\cup_{\theta \in \Theta} X_\theta = R^\infty.$

ეს ასრულებს ლემა 3.2.6 -ის დამტკიცებას. $\square$

დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგი დებულების მართებულობას.

ლემა 3.2.7. *ვთქვათ,* F *არის განაწილების ფუნქცია* $\overline{R} := \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$ *-ზე, ისეთი რომ* $\int_R x dF(x) < \infty$ *. ვთქვათ,* p_F *არის ბორელის ალბათური ზომა* R *-ზე განსაზღვრული* F *-ით.* $\theta \in R$ *პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ* F_θ *შემდეგნაირად:*

$$F_\theta(x) = F(x+\theta)(x \in R).$$

მაშინ ძვრა-ზომათა N *-ხარისხების* $(p^{\infty}_{F_\theta})_{\theta \in R}$ *ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.*

დამტკიცება. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის D_θ-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე, განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$D_\theta = \{(x_i)_{i \in N} : (x_i)_{i \in N} \in R^{\infty} \ \& \ \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} Pr_k((x_i)_{i \in N})}{n} = \theta\}) = 1,$$

სადაც Pr_k აღნიშნავს k-ურ პროექციას, განსაზღვრულს შემდეგნაირად $Pr_k((x_i)_{i \in N}) = x_k$.

ლემა 3.2.5-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ $p^{\infty}_{F_\theta}(D_\theta) = 1$ $\theta \in R$ -თვის.

ცხადია, რომ $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $\theta_1, \theta_2 \in R$ პარამეტრებისათვის.

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის Y_θ-ით აღვნიშნოთ X_θ სიმრავლის ისეთი F_σ სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $p^{\infty}_{F_\theta}(Y_\theta) = 1$.

$\theta \in R \setminus \{0\}$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა $Z_\theta = Y_\theta$ და

$$Z_0 = Y_0 \cup (R^{\infty} \setminus \cup_{\theta \in R} Z_\theta).$$

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$L_\theta = \mathrm{B}(Z_\theta) \cup \Pi(R^{\infty} \setminus Z_\theta).$$

ვთქვათ, $S = \cap_{\theta \in R} L_\theta$. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mathrm{B}(R^{\infty}) \subseteq S$; მართლაც, დავაფიქსიროთ $X \in \mathrm{B}(R^{\infty})$. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის ჩვენ გვაქვს

$$X=(X\cap Z_\theta)\cup(X\cap(R^\infty\setminus Z_\theta)).$$

ვინაიდან

$$X\cap Z_\theta\in \mathrm{B}(Z_\theta)$$

და

$$(X\cap(R^\infty\setminus Z_\theta))\in\Pi(R^\infty\setminus Z_\theta),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $X\in L_\theta$. შესაბამისად, $X\in\cap_{\theta\in R}L_\theta=S$. ვინაიდან ბორელის სიმრავლე X აღებული იყო ნებისმიერად, ჩვენ ვასკვნით, რომ $\mathrm{B}(R^\infty)\subseteq S$.

როგორც მარტივი შედეგი, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $Z_\theta\in S$, როცა $\theta\in R$.

ყოველი $\theta_0\in R$, ჩვენ გვაქვს

$$\cup_{\theta\in R}Z_\theta=Z_{\theta_0}\cup\cup_{\theta\in R\setminus\{\theta_0\}}Z_\theta.$$

ვინაიდან $Z_{\theta_0}\in\mathrm{B}(Z_{\theta_0})$ და

$$\cup_{\theta\in R\setminus\{\theta_0\}}Z_\theta\in\Pi(R^\infty\setminus Z_\theta),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $\cup_{\theta\in R}Z_\theta\in L_{\theta_0}$. $\theta_0\in R$ იყო აღებული ნებისმიერად, რაც ნიშნავს რომ

$$\cup_{\theta\in R}Z_\theta\in\cap_{\theta_0\in R}L_{\theta_0}=S.$$

ცხადია, რომ S, როგორც თანაკვეთა R^∞ სივრცის σ-ალგებრებისა, ასევე არის σ-ალგებრა. შესაბამისად, $R^\infty\setminus\cup_{\theta\in R}Z_\theta\in S$.

ვთქვათ, $\theta_0\in R$. ვთქვათ,

$$X_{\theta_0}=Z_{\theta_0}\cup(R^\infty\setminus\cup_{\theta\in R}Z_\theta),$$

და $X_\theta=Z_\theta$, როცა $\theta\neq\theta_0$.

ახლა ადვილია იმის შემოწმება, რომ

(i) $X_\theta\in S=\cap_{\theta\in\Theta}dom(\overline{\mu}_\theta)$ როცა $\theta\in R$;

(ii) $\overline{p}^{\infty}_{F_\theta}(X_\theta)=1;$

$(ii)\ X_{\theta_1} \cap X_{\theta_2} = \varnothing;$

$(iii) \cup_{\theta\in\Theta} X_\theta = R^\infty.$

ეს ასრულებს ლემა 3.2.7-ის დამტკიცებას. □

მაგალითი 3.2.1. ვთქვათ, F არის გაუსის განაწილების ფუნქცია R-ზე $(m,\sigma^2)(m \in R, 0 < \sigma^2 < +\infty)$ პარამეტრებით. მაშინ ლემა 3.2.6-ის (ან ლემა 3.2.7-ის) გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta\in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

მაგალითი 3.2.2. ვთქვათ, F არის პუასონის განაწილების ფუნქცია R-ზე λ პარამეტრით. მაშინ, ლემა 3.2.7-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta\in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალე-ბადი. შევნიშნოთ, რომ ამ შედეგის მართებულობის დადგენა შეუძლებელია ლემა 3.2.6-ის გამოყენებით.

მაგალითი 3.2.3. ვთქვათ, F არის კოშის განაწილების ფუნქცია R-ზე. მაშინ, ლემა 3.2.6-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ ძვრა-ზომათა N-ხა-რისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta\in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი. შევნიშნოთ, რომ ამ შედეგის მართებულობის დადგენა შეუძლებელია ლემა 3.2.7-ის გამო-ყენებით.

განსაზღვრება 3.2.6. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი არის სუსტად განცალებადი, თუ არსებობს $S \subseteq \cap_{\theta\in\Theta} dom(\overline{\mu}_\theta)$ კლასის ელემენტთა $(Z_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი, ისეთი რომ $m_{q_1}(x_{q_2}) = \delta(q_1,q_2)$ $(q_1,q_2 \in Q^2)$, სადაც $\delta(\cdot,\cdot)$ აღნიშნავს Q^2 სიმრავლეზე განსაზღვრულ კრონეკერის ფუნქციას.

მაგალითი 3.2.4. განვსაზღვროთ ალბათურ ზომათა $(m_t)_{t\in]0;1[\bigcup]1;2[}$ ოჯახი შემდეგნაირად: თუ $X \in B([0,1]^2)$, მაშინ

$$m_t(X) = l_1(X \bigcap \{t\}\times[0,1]),$$

როცა $t \in]0,1[$ და

$$m_t(X) = l_1(X \bigcap [0,1]\times\{t\})$$

როცა $t \in]1,2[$ ახლა განვიხილოთ ალბათურ ზომათა ოჯახი $(m_t^N)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$ ცხადია, რომ ის წარმოადგენს $([0,1]^2)^N$ სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ოჯახს. ასევე ცხადია, რომ ეს ოჯახი სუსტად განცალებადია. მართლაც, თუ განვიხილავთ ბორელის სიმრავლეთა $(X_t)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$ ოჯახს, განსაზღვრულს პირობით $X_i = (\{t\} \times [0,1]) \times [0,1]^2)^{N|\{1\}}$ როცა $t \in]0,1[$ და $X_i = ([0,1] \times \{t\}) \times ([0,1]^2)^{N\setminus\{1\}}$ როცა $t \in]1,2[$, მაშინ ცხადია, რომ

$$m_{t_1}^N(X_{t_2}) = \delta(t_1, t_2) \qquad (t_1, t_2 \in ([0,1] \cup]1,2[)^2 .$$ ◻

ლემა 3.2.8. $((ZFC)\,\&\,(CH))$ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი $(m_t^N)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

დამტკიცება. ა.სკოროხოდის ერთი ცნობილი შედეგის თანახმად, კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობიდან გამომდინარეობს, რომ კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე ალბათურ ზომათა ნებისმიერი სუსტად განცალებადი ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი (იხილეთ, [17]). შესაბამისად, $(m_t^N)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$ ოჯახი ძლიერად განცალებადია. ◻

შენიშვნა 3.2.1. ლემა 3.2.8-ის მართებულობა შესაძლებელია დადგინდეს კონტინუუმ ჰიპოთეზაზე უფრო სუსტი, ეგრეთ წოდებული, მარტინის აქსიომით (იხილეთ [Martin D.A., Solovay R.M., Internal Cohen extensions, Ann.Math.Logic, 2 (1970)]). ეს გამომდინარეობს ზ.ზერაკიძის შედეგიდან, რომლის თანახმადაც, მარტინის აქსიომის მართებულობის შემთხვევაში, პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი კონტინუუმის სიმძლავრის ბორელის ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი(იხილეთ [Z. S. Zerakidze, Weakly separable and separable families of probability measures. (Russian) Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 113(1984), No. 2, 273–275]). 4.2.3 მაგალითთან დაკავშირებით ბუნებრივად იბადება შეკითხვა, თუ რამდენად არის შესაძლებელი $(ZF)\,\&\,(DC)$ თეორიის ისეთი თავსებადი გაფართოების აგება, რომელშიც სტაციონარულ ალბათურ

ზომათა $(m_t^N)_{t\in]0;1[\bigcup]1;2[}$ ოჯახი არ იქნება ძლიერად განცალებადი. სასარგებლოა შევნიშნოთ, რომ ალბათურ ზომათა $(m_t)_{t\in]0;1[\bigcup]1;2[}$ ოჯახისათვის მსგავსი ამოცანა წყდება დადებითად. მართლაც, ერთის მხრივ, ჩვენ გვაქვს, რომ

$$m_{t_1}(X_{t_2}) = \delta(t_1, t_2) \quad (t_1, t_2 \in ([0,1]\bigcup]1.2[)^2)$$

რაც ნიშნავს, რომ ალბათურ ზომათა $(m_t)_{t\in]0;1[\bigcup]1;2[}$ ოჯახი სუსტად განცალებადია.

ლემა 3.2.8-ის დამტკიცებაში გამოყენებული სქემით, ჩვენ ვასკვნით, რომ ეს ოჯახი $(ZFC)\,\&\,(CH)$ თეორიაში არის ძლიერად განცალებადი. თუ განვიხილავთ ამავე ოჯახისათვის ძლიერად განცალებადობის ამოცანას სოლოვეის (SM) მოდელში (იხილეთ [Solovay R.M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,Ann.Math.,92, 1970, 1–56]), რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$(SM) = (ZF)\,\&\,(DC)\,\&\,\{$ **ნამდვილი** R **ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით** $\}$, მაშინ პასუხი იქნება უარყოფითი. მართლაც, თუ დაუშვებთ, რომ ალბათურ ზომათა $(m_t)_{t\in]0;1[\bigcup]1;2[}$ ოჯახი სუსტად განცალებადია, მაშინ იარსებებს $[0,1]^2$ სიმრავლის ისეთი დახლეჩა $(Y_t)_{t\in]0;1[\bigcup]1;2[}$, რომ შესრულდება პირობა $m_t(Y_t) = 1$, როცა $t\in]0,1[\bigcup]1,2[$. განვიხილოთ სიმრავლეები A და B, განსაზღვრული შემდეგი პირობებით: $A = \bigcup_{t\in]0,1[} Y_t$, $B = \bigcup_{t\in]1,2[} Y_t$. ეს თანაუკვეთი სიმრავლეები არიან ზომადი ლებეგის აზრით. მეორეს მხრივ ყოველი $A_x = \{(x,y):(x,y)\in A\}$ $(x\in]1,2[)$ კვეთის, ისევე როგორც $B^y = \{(x,y):(x,y)\in B\}$ $(y\in]1,2[)$ კვეთის წრფივი ლებეგის l_1 ზომა ერთის ტოლია. ფუბინის თეორემის თანახმად ვღებულობთ, რომ $l_2(A) = \int_{]0,1[} l_1(A_x)dx = 1$ და $l_2(B) = \int_{]1,2[} l_1(B^y)dy = 1$. ეს ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $l_2(A) + l_2(B) = 1$. $\square$

თავი IV. ჰაარის ემბივალენტის გამოყენება წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო-შერჩევითი ძალდებული შეფასების კლასიფიკაციისათვის

ქვეთავი 4.1. შესავალი

სტატისტიკური ჰიპოთეზის ტესტირების კრიტიციზმი პირველად განხილული იყო შემდეგ ნაშრომებში

- Morrison, Denton; Henkel, Ramon, The Significance Test Controversy, AldineTransaction, 2006.
- Oakes, Michael, Statistical Inference: A Commentary for the Social and Behavioural Sciences, Chichester New York: Wiley, 1986.
- Chow, Siu L., Statistical Significance: Rationale, Validity and Utility, 1997 (ISBN 0-7619-5205-5).
- Harlow, Lisa Lavoie; Stanley A. Mulaik; James H. Steiger,{\it What If There Were No Significance Tests?, Lawrence Erlbaum Associates, 1997
- Kline Rex, Beyond Significance Testing: Reforming Data Analysis Methods in Behavioral Research, Washington, DC: American Psychological Association, 2004.
- McCloskey, Deirdre N.; Stephen T. Ziliak, The Cult of Statistical Significance: How the Standard Error Costs Us Jobs, Justice, and Lives,} University of Michigan Press, 2008.

აღნიშნული ნაშრომები ციტირებულია 300-400 პირველად ლიტერატურაში. ჰიპოთეზათა ტესტირების ფილოსოფიური კრიტიციზმის უმრავლესობა შეიცავს ერთ საერთო თვალთახედვას, რომ მათემატიკური სტატისტიკის თეორია და ტესტირების შედეგები არიან არათავსებადი მთელ რიგ შემთხვევებში. ბევრ განსხვავებულ თეორიულად დაფუძვნებულ მეთოდს მთელ რიგ ძვირად ღირებულ ექსპერიმენტებში მივყავართ აბსურდულ გადაწყვეტილებამდე, რაც წარმოადგენს მათემატიკური სტატისტიკის სპეციალისტების დიდი აღშფოთების საგანს. პრაქტიკულად შეუძლებელია თეორიასა და პრაქტიკას შორის არსებული ყველა ამ სახის

უთანხმოებებისა თუ შეუთავსებლობების ახსნა. აღნიშნულ თავში ჩვენ არ ვაპირებთ ყველა მათგანის განხილვას, რომელიც წარმოადგენს ასეთი კრიტიციზმის საგანს. ჩვენ ვახდენთ ძირითადი ყურადღების ფოკუსირებას ერთ გაურკვევლობაზე, რომელიც დაწვრილებით არის აღწერილი [8], [34] ნაშრომებში.

[8] ნაშრომში იაკობ კოენი აღნიშნავს: *"... don't look for a magic alternative to NHST [null hypothesis significance testing] ... It does not exist." ე.ი.," ნუ შეხედავთ მაგიური ალტერნატივისთვის ნულ ჰიპოთეზის დასაჯერობის ტესტირებას. ის არ არსებობს."*

[34] ნაშრომში ჯან ნუნალმა გამოთქვა შემდეგი მოსაზრება: *"If the decisions are based on convention they are termed arbitrary or mindless while those not so based may be termed subjective. To minimize type II errors, large samples are recommended. In psychology practically all null hypotheses are claimed to be false for sufficiently large samples so ... it is usually nonsensical to perform an experiment with the sole aim of rejecting the null hypothesis".* ***ე.ი. "თუ გადაწყვეტილებები ეყრდნობიან შეთანხმებას მაშინ მათ უწოდებენ ნებისმიერს ან უაზროს, მაშინ როცა წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ შეიძლება ვუწოდოთ სუბიექტური. II რიგის შეცდომების მინიმიზაციისთვის დიდი შერჩევები არის რეკომენდირებული. ფსიქოლოგიაში მიჩნეულია, რომ პრაქტიკულად ყველა ნულ ჰიპოთეზა არის მცდარი... ჩვეულებრივ უაზრობაა ექსპერიმენტის ჩატარება იმ მიზნით რომ უარვყოთ ნულ ჰიპოთეზა."***

აქ ბუნებრივად ისმის შეკითხვა თუ როგორაა შესაძლებელი უსასრულო შერჩევებისთვის სტატისტიკური გადაწყვეტილების კონცეფციების შემუშავება და რამდენად არის მართებული იაკობ კოენისა და ჯან ნუნალის ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებები. მათი მოსაზრებების მართებულობის საჩვენებლად, წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის მაგალითზე ჩვენ განვიხილავთ ნულ ჰიპოთეზის ტესტს ისე, რომ I და II რიგის შეცდომების ჯამი იქნება ნულის ტოლი(ასეთ ტესტებს ჩვენ

ვუწოდებთ მაქსიმალური სანდოობის ტესტებს) და შევეცდებით ავხსნათ თუ რატომაა ასეთი ნულ ჰიპოთეზა უარყოფილი ”თითქმის ყველა” [16] უსასრულო შერჩევისათვის.

4.2 ქვეთავში მოყვანილია იაკობ კოენისა და ჯან ნუნალის ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებების მართებულობის დასაბუთება წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის მაგალითზე. კერძოდ უსასრულო შერჩევითი საშუალოს გამოყენებით ჩვენ ავაგებთ ნულ ჰიპოთეზის ისეთ ტესტს, რომლისთვისაც I და II რიგის შეცდომების ჯამი ნულის ტოლია და ავხსნით, თუ რატომაა ასეთი ნულ ჰიპოთეზა უარყოფილი ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის.

ქვეთავი 4.2 რატომაა რომ ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა მაქსიმალური დასაჯერობის ნულ ჰიპოთეზის ტესტის საშუალებით ?

მაგალითი 4.2.1. განვიხილოთ წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური სისტემა (1) რომლისთვისაც $\mathbf{F}$ არის გაუსის სტანდარტული(ან კოშის) განაწილების ფუნქცია $\mathbf{R}$-ზე. ყოველი $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}$ პარამეტრისათვის დაუშვათ, რომ

$$\mathbf{D}_{\theta} = \{(\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}} : (\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\infty} \ \& \ \overline{\lim}\,\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}((\mathbf{x}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}}) = \theta\}.$$

სადაც $\tilde{T}_n((x_k)_{k\in N}) = \sum_{k=1}^{n} x_k / n$, როცა $(x_k)_{k\in N} \in R^{\infty}$. ლემა 3.2.7 (ან ლემა 3.2.6)-ის ძალით ჩვენ გვაქვს

$$\boldsymbol{\mu}_{\theta}^{\mathbf{N}}(\mathbf{D}_{\theta}) = \mathbf{1}$$

ყოველი $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}$ პარამეტრისათვის. მეორეს მხრივ, ყოველი $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}$ პარამეტრისათვის ლემა 2.1.4-ის ძალით არსებობს კომპაქტურ სიმრავლეთა $(\mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{\theta})_{\mathbf{k}\in\mathbf{N}}$ ოჯახი , ისეთი რომ $\boldsymbol{\mu}_{\theta}^{\mathbf{N}}(\mathbf{R}^{\infty} \setminus \bigcup_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\infty} \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{\theta}) = \mathbf{0}$.

ყოველი $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}$ პარამეტრისათვის პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\mathbf{C}_{\theta} = \mathbf{D}_{\theta} \cap \bigcup_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\infty} \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^{\theta}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $(\mathbf{C}_\theta)_{\theta\in\mathbf{R}}$ არის ბორელის $\mathbf{F}_\sigma$-სიმრავლეთა ისეთი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ოჯახი რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$\mu_\theta^{\mathbf{N}}(\mathbf{C}_\theta) = 1.$$

4.2.1 მაგალითთან დაკავშირებით ჩვენ ვიხილავთ შემდეგ ორ სტატისტიკურ ტესტს.

ტესტი 4.2.1. ($\mathbf{H}_0 : \theta = \theta_0$ ჰიპოთეზისათვის გადაწყვეტილების მიღების წესი)

ნულ ჰიპოთეზა- $\mathbf{H}_0 : \theta = \theta_0$

ალტერნატიული ჰიპოთეზა $\mathbf{H}_1 : \theta \neq \theta_0$

სტატისტიკა $\mathbf{T}((\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}) = \overline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_n((\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}})$

ალტერნატიული კრიტიკული რეგიონი $\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}^\infty \setminus \mathbf{C}_{\theta_0}$.

ტესტი 4.2.2 (თვლადი რაოდენობა ურთიერთგამომრიცხავი $\mathbf{H}_i : \theta = \theta_i (i \in \mathbf{N})$ ჰიპოთეზისათვის გადაწყვეტილების მიღების ტესტი)

$\mathbf{i}$-ური ჰიპოთეზა- $\mathbf{H}_i : \theta = \theta_i (i \in \mathbf{N})$

ალტერნატიული ჰიპოთეზა $\theta \notin \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \theta_i$

სტატისტიკა $\mathbf{T}((\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}}) = \overline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_n((\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbf{N}})$

$\mathbf{H}_i$ ჰიპოთეზის არჩევის არე $\mathbf{U}_i = \mathbf{H}_i$

ალტერნატიული კრიტიკული რეგიონი $\mathbf{V} = \mathbf{R}^\infty \setminus \bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathbf{U}_i$.

ვინაიდან ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta^{\mathbf{N}})_{\theta\in\mathbf{R}}$ არის ძლიერად განცალებადი, ძირითადი (2) დაშვების საფუძველზე ჩვენ ვასკვნით რომ პირველი და მეორე გვარის შეცდომების ჯამი 4.2.1 ტესტისათვის ნულის ტოლია. მიუხედავად ამისა მართებულია შემდეგი.

თეორემა 4.2.1. *ტესტი 4.2.1-ის საშუალებით "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა.*

დამტკიცება. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ რომ ალტერნატიული კრიტიკული რეგიონი $\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}^\infty \setminus \mathbf{C}_{\theta_0}$ არის "გავრცელება", ვინაიდან ის ემთხვევა ყველა იმ

უსასრულო შერჩევების სიმრავლეს რომელთათვისაც ხდება ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა. ვინაიდან $\mathbf{C}_{\theta_0}$ იფარება კომპაქტების $(\mathbf{F}_k^{\theta_0})_{k\in N}$ თვლადი ოჯახით, ლემა 2.1.3-ისა და ფაქტი 2.1.3-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ სიმრავლე $\mathbf{C}_{\theta_0}$, როგორც ბორელის ქვესიმრავლე ჰაარის აზრით ნულ-ზომადი $\bigcup_{k\in N} \mathbf{F}_k^{\theta_0}$ სიმრავლისა ასევე არის ჰაარის აზრით ნულზომადი. შესაბამისად მისი დამატება წარმოადგენს "გავრცელებას". □

ვინაიდან ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta^N)_{\theta\in R}$ არის ძლიერად განცალებადი, ძირითადი (2) დაშვების საფუძველზე ჩვენ ვასკვნით რომ პირველი და მეორე გვარის შეცდომების ჯამი 4.2.2 ტესტისათვის ნულის ტოლია. მიუხედავად ამისა მართებულია შემდეგი.

თეორემა 4.2.2. *ტესტი 4.2.2-ის საშუალებით "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა.*

დამტკიცება. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ რომ ალტერნატიული კრიტიკული რეგიონი $\mathbf{V} = \mathbf{R}^\infty \setminus \bigcup_{i\in N} \mathbf{C}_{\theta_{i_0}}$ არის "გავრცელება", ვინაიდან ის ემთხვევა ყველა იმ უსასრულო შერჩევების სიმრავლეს რომელთათვისაც ხდება $\mathbf{H}_i : \theta = \theta_i (i \in N)$ ჰიპოთეზების უარყოფა. ვინაიდან ყოველი $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$-სთვის $\mathbf{C}_{\theta_i}$ იფარება კომპაქტების $(\mathbf{F}_k^{\theta_i})_{k\in N}$ თვლადი ოჯახით, ლემა 2.1.3-ისა და ფაქტი 2.1.3-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ სიმრავლე $\bigcup_{i\in N} \mathbf{C}_{\theta_i}$, როგორც ბორელის ქვესიმრავლე ჰაარის აზრით ნულ-ზომადი $\bigcup_{i\in N}\bigcup_{k\in N} \mathbf{F}_k^{\theta_0}$ სიმრავლისა ასევე არის ჰაარის აზრით ნულზომადი. შესაბამისად $\mathbf{V}$, როგორც მისი დამატება, წარმოადგენს "გავრცელებას".

შენიშვნა 4.2.1. თეორემები 4.2.1 და 4.2.2 კარგად ხსნიან ჯან ნუნალის მოსაზრების მართებულობას იმის შესახებ, რომ ***"თუ გადაწყვეტილებები ეყრდნობიან შეთანხმებას მაშინ მათ უწოდებენ ნებისმიერს ან უაზროს, მაშინ როცა წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ შეიძლება ვუწოდოთ სუბიექტური. II რიგის შეცდომების მინიმიზაციისთვის დიდი შერჩევები არის რეკომენდირებული. ფსიქოლოგიაში მიჩნეულია, რომ პრაქტიკულად***

ყველა ნულ ჰიპოთეზა არის მცდარი.... ჩვეულებრივ უაზრობაა ექსპერიმენტის ჩატარება იმ მიზნით რომ უარვყოთ ნულ ჰიპოთეზა.”

ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი დამხმარე დებულება.

ლემა 4.2.1. ვთქვათ, D-თი აღვნიშნულია ნამდვილ მნიშვნელობიან ფუნქციათა $(f_k)_{k\in N}$ მიმდევრობის კრებადობის წერტილთა სიმრავლე. მაშინ მისთვის მართებულია შემდეგი წარმოდგენა

$$D = \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{s=n}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{n+s}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\} \qquad (*)$$

დამტკიცება . ვაჩვენოთ, რომ

$$D \subseteq \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{s=n}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{n+s}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\}.$$

ვთქვათ, $x_0 \in D$. მაშინ რიცხვთა მიმდევრობა $f_1(x_0), f_2(x_0), \dots$ იქნება კრებადი, ე.ი.

$$\exists \lim_{k\to\infty} f_k(x_0) <=> (\forall\varepsilon > 0, \exists n_{\varepsilon,}\ n_\varepsilon \in N;\ \forall s \& \forall m, s \ge n_\varepsilon \& m \in N => |f_{s+m}(x_0) - f_s(x_0)| < \varepsilon)$$

კერძოდ, $\varepsilon = \frac{1}{p}$.

$$\forall p, p \in N > 0, \exists n_p,\ n_p \in N => \forall s, \forall m, s \ge n_p \& m \in N => |f_{s+m}(x_0) - f_s(x_0)| \le \frac{1}{p})$$

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$A_p := \cup_{n=1}^{\infty}\cap_{s=n}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{n+m}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\}$$

$$B_n := \cap_{s=n}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{n+m}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\}$$

$$D := \cap_{p=1}^{\infty} A_p = \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

$$x_0 \in \cap_{s=n_p}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{n+m}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\}$$

$$\forall p\ x_0 \in B_{n_p}(p) => (\forall p, x_0 \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n(p))$$

ეს ნიშნავს, რომ $x_0 \in \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty} B_n(p) => x_0 \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n(p)$ $\forall p -$თვის $=> x_0 \in \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty} B_n(p)$

ვაჩვენოთ, რომ $D \supseteq \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{s=n}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{n+s}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\}$.
ვთქვათ, $x_0 \in \cap_{p=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\cap_{s=n}^{\infty}\cap_{m=1}^{\infty}\left\{x: |f_{s+m}(x) - f_s(x)| \le \frac{1}{p}\right\}$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $x_0 \in D$. ვღებულობთ

$$x_0 \in D => (\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon, n_\varepsilon \in N\ => \forall s, \forall m, s \ge n_\varepsilon \& m \in N => |f_{s+m}(x_0) - f_s(x_0)| < \varepsilon)$$

ავიღოთ $\forall\varepsilon > 0$ მაშინ $\exists p_0 \in N$ & $\frac{1}{p_0} < \varepsilon$ $x_0 \in A_{p_0} = \cup_{n_0=1}^{\infty} B_{n_0}(p_0)$

$$\exists n_{p_0}, x_0 \in B_{n_{p_0}}(p_0) \qquad n_\varepsilon := n_{p_0}$$

$|f_{s+m}(x_0) - f_s(x_0)| < \frac{1}{p_0} < \varepsilon.$ ე.ი. თუ x_0 ეკუთვნის $(*)$ ტოლობის მარჯვენა მხარეს, მაშინ ის აგრეთვე ეკუთვნის მის მარცხენა მხარესაც. ◻

თეორემა 4.2.3. ვთქვათ, $\mathbf{T}: \mathbf{R}^\infty \to \mathbf{R}$ არის უსასრულო შერჩევითი საშუალო განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\mathbf{T}((\mathbf{x}_k)_{k\in N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k}{\mathbf{n}}$$

მაშინ "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის სტატისტიკა $\mathbf{T}$ არ არსებობს.

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathbf{S}$ იყოს განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\mathbf{S} = \{(\mathbf{x}_k)_{k\in N} : (\mathbf{x}_k)_{k\in N} \in \mathbf{R}^\infty \,\&\, \text{არსებობს } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k}{\mathbf{n}}\}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\mathbf{S}$ წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს. მართლაც,

თუ $(\mathbf{x}_k)_{k\in N}, (\mathbf{y}_k)_{k\in N} \in \mathbf{S}$ და $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, მაშინ ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k + \beta\sum_{k=1}^{n}\mathbf{y}_k}{\mathbf{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k}{\mathbf{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{\beta\sum_{k=1}^{n}\mathbf{y}_k}{\mathbf{n}} = \alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{x}_k}{\mathbf{n}} + \beta\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{y}_k}{\mathbf{n}},$$

რაც ნიშნავს რომ $\alpha(\mathbf{x}_k)_{k\in N} + \beta(\mathbf{y}_k)_{k\in N} \in \mathbf{S}.$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{S}$ წარმოადგენს $\mathbf{R}^\infty$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეს. ყოველი $\mathbf{i} \in \mathbf{N}$ ინდექსისათვის $\mathbf{Pr}_i$-ით ავღნიშნოთ $\mathbf{i}$-ური პროექცია, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\mathbf{Pr}_i((\mathbf{x}_k)_{k\in N}) = \mathbf{x}_i$$

ყოველი უსასრულო $(\mathbf{x}_k)_{k\in N} \in \mathbf{R}^\infty$ შერჩევისათვის. ყოველი $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ ნატურალური რიცხვისათვის დავუშვათ, რომ $\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Pr}_k / \mathbf{n}$. მაშინ, ერთის მხრივ სიმრავლე ყველა იმ უსასრულო $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\infty$ შერჩევებისა, რომელთათვისაც არსებობს სასრული ზღვარი $\lim_{n\to\infty} \mathbf{S}_n(\mathbf{x})$ ემთხვევა $\mathbf{S}$ სიმრავლეს. მეორეს

მხრივ, თუ ჩვენ მხედველობაში მივიღებთ იმ ფაქტს, რომ $\mathbf{S_n : R^\infty \to R}$ არის უწყვეტი ფუნქცია ყოველი $\mathbf{n \in N}$ ნატურალური რიცხვისათვის და მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\mathbf{S} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{q=n}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\mathbf{x : x \in R^\infty \,\&\, |S_{q+m}(x) - S_q(x)| \le 1/p}\},$$

მაშინ ადვილად დავასკვნით, რომ $\mathbf{S}$ წარმოადგენს $\mathbf{R^\infty}$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეს.

დავუშვათ, $\mathbf{v = (1,2,3,\cdots)}$. ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{v}$ წარმოშობს ისეთ ერთ-განზომილებიან ვექტორულ $\mathbf{L}$ სივრცეს, რომლის ყოველი ტრანსლაცია გადაიკვეთება $\mathbf{S}$ სიმრავლესთან არაუმეტეს ერთ წერტილში. ამით ნაჩვენები იქნება, რომ $\mathbf{L}$ წარმოადგენს ერთ განზომილებიან სინჯს $\mathbf{S}$ სიმრავლისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ იარსებებს ისეთი $\mathbf{(z_k)_{k \in N} \in R^\infty}$ და ორი განსხვავებული ნამდვილი პარამეტრი $\mathbf{t_1, t_2 \in R}$, რომ შესრულდება პირობა $\mathbf{(z_k)_{k\in N} + t_1 v \in S}$ და $\mathbf{(z_k)_{k\in N} + t_2 v \in S}$. ვინაიდან $\mathbf{S}$ ვექტორული სივრცეა, ჩვენ ვასკვნით რომ

$$\mathbf{((z_k)_{k\in N} + t_2 v) - ((z_k)_{k\in N} + t_1 v) = (t_2 - t_1) v \in S}.$$

ვინაიდან $\mathbf{t_1}$ და $\mathbf{t_2}$ განსხვავებული პარამეტრებია, ხოლო $\mathbf{S}$ ვექტორული სივრცეა, ამიტომ $\mathbf{v = (1,2,3,\cdots)}$ ასევე უნდა იყოს $\mathbf{S}$ ვექტორული სივრცის ელემენტი. მაგრამ ეს ასე არაა, ვინაიდან

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty}.$$

ამგვარად, ერთ-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე $\mathbf{L}$ არის სინჯი $\mathbf{R^\infty \setminus S}$ სიმრავლისათვის ვინაიდან $\mathbf{L}$ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომა წარმოადგენს ტესტურ ზომას ბორელის $\mathbf{S}$ სიმრავლისათვის რომელიც შეიცავს $\mathbf{R^\infty \setminus S}$ სიმრავლის დამატებას.

ამით თეორემა **4.2.3** დამტკიცებულია. □

თეორემა 4.2.3-ის დამტკიცებისას გამოყენებული კონსტრუქციით ადვილად მტკიცდება

თეორემა 4.2.4 ვთქვათ, $\mathbf{T = \overline{\lim}\widetilde{T}_n}$ არის უსასრულო შერჩევითი სტატისტიკა, განხილული მაგალითით 4.2.1-ში. მაშინ "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის სტატისტიკა $\mathbf{T}$ არ არსებობს.

შემდეგში ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი დამხმარე დებულება.

თეორემა 4.2.5. ვთქვათ, $\mathbf{T:R^{\infty}\to R}$ არის უსასრულო შერჩევითი სტატისტიკა განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\mathbf{T((x_k)_{k\in N})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sigma\sqrt{n}}},$$

სადაც $\boldsymbol{\sigma>0}$. მაშინ "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის სტატისტიკა $\mathbf{T}$ არ არსებობს.

დამტკიცება. $\mathbf{S}$ განვსაზღვროთ შემდეგი პირობით

$$\mathbf{S=\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^{\infty}\ \&} \text{ არსებობს } \mathbf{\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sigma\sqrt{n}}\}}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $\mathbf{S}$ წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს. მართლაც, თუ $\mathbf{(x_k)_{k\in N},(y_k)_{k\in N}\in S}$ და $\boldsymbol{\alpha,\beta}\in\mathbf{R}$, მაშინ ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\sum_{k=1}^{n}x_k+\beta\sum_{k=1}^{n}y_k}{\sigma\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sigma\sqrt{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\beta\sum_{k=1}^{n}y_k}{\sigma\sqrt{n}}=\alpha\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{\sigma\sqrt{n}}+\beta\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k}{\sigma\sqrt{n}},$$

რაც ნიშნავს რომ $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{(x_k)_{k\in N}}+\boldsymbol{\beta}\mathbf{(y_k)_{k\in N}\in S}$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{S}$ წარმოადგენს $\mathbf{R^{\infty}}$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეს. ყოველი $\mathbf{i\in N}$ ინდექსისათვის $\mathbf{Pr_i}$-ითი ავღნიშნოთ $\mathbf{i}$-ური პროექცია, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$\mathbf{Pr_i((x_k)_{k\in N})=x_i}$$

ყოველი უსასრულო $\mathbf{(x_k)_{k\in N}\in R^{\infty}}$ შერჩევისათვის.

ყოველი $\mathbf{n\in N}$ ნატურალური რიცხვისათვის დავუშვათ, რომ $\mathbf{S_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}Pr_k}{\sigma\sqrt{n}}}$.

მაშინ, ერთის მხრივ სიმრავლე ყველა იმ უსასრულო $\mathbf{x\in R^{\infty}}$ შერჩევებისა, რომელთათვისაც არსებობს სასრული ზღვარი $\mathbf{\lim_{n\to\infty}S_n(x)}$ ემთხვევა $\mathbf{S}$ სიმრავლეს. მეორეს მხრივ, თუ ჩვენ მხედველობაში მივიღებთ იმ ფაქტს, რომ $\mathbf{S_n:R^{\infty}\to R}$ არის უწყვეტი ფუნქცია ყოველი $\mathbf{n\in N}$ ნატურალური რიცხვისათვის და ლემა 5.2.1 -ის ძალით მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\mathbf{S}=\bigcap_{p=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{q=n}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{\infty}\ \&\ |\mathbf{S}_{q+m}(\mathbf{x})-\mathbf{S}_{q}(\mathbf{x})|\le 1/\mathbf{p}\},$$

მაშინ ადვილად დავასკვნით, რომ $\mathbf{S}$ წარმოადგენს $\mathbf{R}^{\infty}$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეს.

დავუშვათ, $\mathbf{v}=(1,2,3,\cdots)$. ვაჩვენოთ, რომ $\mathbf{v}$ წარმოშობს ისეთ ერთ-განზომილებიან ვექტორულ $\mathbf{L}$ სივრცეს, რომლის ყოველი ტრანსლაცია გადაიკვეთება $\mathbf{S}$ სიმრავლესთან არაუმეტეს ერთ წერტილში. ამით ნაჩვენები იქნება, რომ $\mathbf{L}$ წარმოადგენს ერთ განზომილებიან სინჯს $\mathbf{S}$ სიმრავლისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ იარსებებს ისეთი $(\mathbf{z}_k)_{k\in N}\in\mathbf{R}^{\infty}$ და ორი განსხვავებული ნამდვილი პარამეტრი $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{R}$, რომ შესრულდება პირობა $(\mathbf{z}_k)_{k\in N}+\mathbf{t}_1\mathbf{v}\in\mathbf{S}$ და $(\mathbf{z}_k)_{k\in N}+\mathbf{t}_2\mathbf{v}\in\mathbf{S}$. ვინაიდან $\mathbf{S}$ ვექტორული სივრცეა, ჩვენ ვასკვნით რომ

$$((\mathbf{z}_k)_{k\in N}+\mathbf{t}_2\mathbf{v})-((\mathbf{z}_k)_{k\in N}+\mathbf{t}_1\mathbf{v})=(\mathbf{t}_2-\mathbf{t}_1)\mathbf{v}\in\mathbf{S}.$$

ვინაიდან $\mathbf{t}_1$ და $\mathbf{t}_2$ განსხვავებული პარამეტრებია, ხოლო $\mathbf{S}$ ვექტორული სივრცეა, ამიტომ $\mathbf{v}=(1,2,3,\cdots)$ ასევე უნდა იყოს $\mathbf{S}$ ვექტორული სივრცის ელემენტი. მაგრამ ეს ასე არაა, ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{k}}{\sigma\sqrt{\mathbf{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)}{2\sigma\sqrt{\mathbf{n}}}=+\infty.$$

ამგვარად, ერთ-განზომილებიანი ვექტორული სივრცე $\mathbf{L}$ არის სინჯი $\mathbf{R}^{\infty}\setminus\mathbf{S}$ სიმრავლისათვის ვინაიდან $\mathbf{L}$ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომა წარმოადგენს ტესტურ ზომას ბორელის $\mathbf{S}$ სიმრავლისათვის რომელიც შეიცავს $\mathbf{R}^{\infty}\setminus\mathbf{S}$ სიმრავლის დამატებას.

ამით თეორემა **4.2.5** დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 4.2.2 შევნიშნოთ, რომ თეორემები 4.2.3-4.2.5 შეიცავენ საინტერესო ინფორმაციას უსასრულო შერჩევითი სტატისტიკის სტრუქტურის შესახებ, რომელიც გვეხმარება ავხსნათ იაკობ კოენის მოსაზრება იმის შესახებ რომ *არ უნდა შევხედოთ მაგიური ალტერნატივისთვის ნულ ჰიპოთეზის დასაჯერობის ტესტირებას, ვინაიდან ის არ არსებობს.*

თავი V. სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა მაგალითები წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში

ქვეთავი 5.1. შესავალი

ქრისტენსენის მიერ 1972 წელს შემოღებული და 1992 წელს დინამიკური სისტემების თვისებების შესასწავლად ჰანტის, საუერისა და იორკეს მიერ უფრო ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცეებისათვის განზოგადოებული ჰაარის ნულ სიმრავლის ცნება გამოყენებული იყო [27] ნაშრომში უსასრულო შერჩევითი ძალდებული სტატისტიკების თვისებების შესასწავლად. ამ მიდგომის საშუალებით მოხერხდა უსასრულო შერჩევებით განსაზღვრული ძალდებული შეფასებების კლასიფიკაცია სუბიექტურ და ობიექტურ შეფასებების კლასებად. ნაჩვენები იქნა რომ იაკობ კოენისა [8] და ჯან ნუნალის [34] ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებები მართებულია სუბიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებებისათვის წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში. ასევე ნაჩვენები იქნა რომ მათი მოსაზრებები არაა მართებული ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებებისათვის იმავე მოდელში. აქვე აღვნიშნოთ, რომ იმავე ნაშრომში შემოტანილი იყო ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებების ცნება და აგებული იყო ასეთი შეფასების მაგალითი ცერმელოს აქსიომის გამოყენებით. ეს შედეგი გაძლიერებულ იქნა [28] ნაშრომში, სადაც მოცემულ იქნა ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია.

ჩვენს მიერ შესწავლილ იქნა [36] ნაშრომში წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში აგებული სასარგებლო სიგნალის იმ უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების სტრუქტურა, რომელიც აძლიერებს უსასრულო შერჩევით საშუალოს. კერძოდ, ჩვენს მიერ [29] ნაშრომში ნაჩვენები იქნა, რომ ეს სტატისტიკა წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

ამ თავში მოცემულია [27], [28] და [29] ნაშრომებში მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა:

5.2 ქვეთავში მოცემულია ფუნქციონალური ანალიზის, ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება.

5.3-5.5 ქვეთავებში განხილულია სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა მაგალითები წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში :

5.3 ქვეთავში ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში აგებულია სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგება, როცა $\Theta = R$.

5.4 ქვეთავში მოყვანილია წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია, როცა $\Theta = [0,1]$.

5.5 ქვეთავში ნაჩვენებია, რომ [36] ნაშრომში წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის შემთხვევაში აგებული სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება ასევე წარმოადგენს ობიექტურ შეფასებას.

ქვეთავი 5.2. ფუნქციონალური ანალიზის, ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება.

მოცემულ თავში ჩვენ შეგახსენებთ ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკისა და ფუნქციონალური ანალიზის იმ ცნებებსა და დამხმარე დებულებებს, რომელთა საშუალებითაც ხორციელდება ზემოთ აღნიშნული კვლევები.

ვთქვათ $\mathbf{\Theta}$ არის ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილი უსასრულო-განზომილებიანი ტოპოლოგიური $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ ვექტორული სივრცის ვექტორული ქვესივრცე.

ინფორმაციის გადაცემის მათემატიკურ თეორიაში განხილვის ობიექტია შემდეგი ერთ-განზომილებიანი წრფივი სტოქასტური სისტემა

$$(\xi_k)_{k\in N} = (\theta_k)_{k\in N} + (\Delta_k)_{k\in N}\ , \tag{5.2.1}$$

სადაც $(\theta_k)_{k\in N} \in \Theta$ არის სასარგებლო სიგნალი, $(\Delta_k)_{k\in N}$ არის (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა (ეგრეთ წოდებული "თეთრი ხმაური") და $(\xi_k)_{k\in N}$ არის გარდაქმნილ სიგნალთა მიმდევრობა. ვთქვათ, μ არის ალბათური ზომა R ღერძზე განსაზღვრული Δ_1 შემთხვევითი სიდიდით. მაშინ ალბათური μ ზომის N-ხარისხი μ^N ემთხვევა "თეთრი ხმაურით" განსაზღვრულ ალბათურ ზომას, ე.ი.

$$(\forall X)(X \in B(R^N) \to \mu^N(X) = P(\{\omega : (\Delta_k(\omega))_{k\in N} \in X\})),$$

სადაც $B(R^N)$ აღნიშნავს R^N-სივრცის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრას.

ინფორმაციათა გადაცემის თეორიის ძირითადი დაშვებაა, რომ ბერის ზომა λ, განსაზღვრული გარდაქმნილი ხმაურით $(\xi_k)_{k\in N}$, ემთხვევა μ^N ზომის გარკვეულ $(\mu^N)_{\theta_0}$ ძვრას, ე.ი.,

$$(\forall X)(X \in B(R^N) \to \lambda(X) = (\mu^N)_{\theta_0}(X)), \tag{5.2.2}$$

სადაც $(\mu^N)_{\theta_0}(X) = \mu^N(X - \theta_0)$ როცა $X \in B(R^N)$.

ჩვენ განვიხილავთ კერძო შემთხვევას როცა სასარგებლო სიგნალთა ვექტორულ ქვესივრცეს აქვს შემდეგი სახე

$$\Theta = \{(\theta, \theta, \cdots) : \theta \in R\}.$$

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის μ_θ^N ზომას ეწოდება μ ზომის θ ძვრის (რომელიც აღინიშნება μ_θ-ით და განისაზღვრება

$$(\forall X)(X \in B(R) \to \mu_\theta(X) = \mu(X - \theta_0))$$

ფორმულით) N-ური ხარისხი.

სამეულს $(R^N, B(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta\in R}$ ეწოდება ერთ-განზომილებიანი წრფივი სტოქასტური (5.2.1) სისტემის აღმწერი სტატისტიკური სტრუქტურა.

განსაზღვრება 5.2.1. ვთქვათ, $S(\Theta)$ არის Θ-სიმრავლის წერტილოვანი სიმრავლეებით წარმოქმნილი მინიმალური სიგმა-ალგებრა. $(B(R^\infty), S(\Theta))$-

ზომად ასახვას $T:R^N \to \Theta$ ეწოდება ეწოდება $\boldsymbol{\theta}$ პარამეტ-რის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\boldsymbol{\mu}_{\theta}^{\mathbf{N}})_{\theta\in\mathbf{R}}$ ოჯახისათვის, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$\mu_{\theta}^{N}(\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^N \,\&\, T\ ((x_k)_{k\in N})=\theta\})=1$$

ყოველი $\boldsymbol{\theta}\in\mathbf{R}$ პარამეტრისათვის.

ლემა 5.2.1 ([32], კოლმოგოროვის თეორემა). *ვთქვათ,* $X_1, X_2,\ldots$ *არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სასრული მეორე რიგის მომენტით,* b_n *უსასრულობისაკენ კრებად ისეთ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, რომ* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{DX_k}{b_k^2}<\infty$*. მაშინ*

$$p\left(\left[\omega:\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k(\omega)-M(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{b_n}=0\right]\right)=1.$$

კერძოდ, (**დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი**) თუ $X_1, X_2,\ldots$ *არის ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი მიმდევრობა, რომ* $EX_k=m<\infty$*, მაშინ*

$$p(\{\omega:\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}X_k(\omega)/n=m\})=1.$$

კოლმოგოროვის თეორემის, კერძოდ დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გამოყენებით მტკიცდება

ლემა 5.2.2. ([36]) *ვთქვათ,* $\mathbf{F}$ *არის* $\mathbf{R}$ *ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქცია ისეთი რომ* $\int_{\mathbf{R}}\mathbf{x}d\mathbf{F}(\mathbf{x})<\infty$ *და* $\boldsymbol{\mu}$ *არის* $\mathbf{F}$ *ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა* $\mathbf{R}$ *ღერძზე. ვთქვათ, ყოველი* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbf{R}$ *პარამეტრისათვის,*

$$F_{\theta}(x):=F(x+\theta)(x\in R).$$

მაშინ ძვრა-ზომათა $\mathbf{N}$ *-ხარისხების* $(\boldsymbol{\mu}_{\theta}^{\mathbf{N}})_{\theta\in\mathbf{R}}$ *ოჯახისათვის შეფასებები* $\overline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}=\mathbf{inf}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{sup}_{\mathbf{m}\geq\mathbf{n}}\,\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ *და* $\underline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}}=\mathbf{sup}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{inf}_{\mathbf{m}\geq\mathbf{n}}\,\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ *სადაც*

$$\mathbf{T}_{\mathbf{n}}:\mathbf{R}^{\mathbf{n}}\to\mathbf{R}\ \ (\mathbf{n}\in\mathbf{N})$$

ასახვა განსაზღვრული პირობით

$$T_n(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k\,/\,n \qquad (5.2.3)$$

$(\mathbf{x_k})_{1\le k\le n}\in\mathbf{R^n}$ *ელემენტისათვის, წარმოადგენენ* θ *პარამეტრის ძალდებულ შეფასებას* $(\mu_\theta^{\mathbf N})_{\theta\in\mathbf R}$ *ოჯახისათვის.*

ლემა 5.2.3 ([36], თეორემა 4,1, გვ. 483) *ვთქვათ,* $\mathbf F$ *არის* $\mathbf R$ *ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქცია და* $\boldsymbol\mu$ *არის* $\mathbf F$ *ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა* $\mathbf R$ *ღერძზე. ვთქვათ, ყოველი* $\theta\in\Theta:=R$ *პარამეტრისათვის,* $\mathbf{F_\theta(x)=F(x+\theta)(x\in R)}$. *მაშინ ძვრა-ზომათა* $\mathbf N$ *-ხარისხების* $(\mu_\theta^{\mathbf N})_{\theta\in\mathbf R}$ *ოჯახისათვის შეფასებები* $\overline{\lim}\widetilde{\mathbf T}_{\mathbf n}=\inf_{\mathbf n}\sup_{\mathbf{m\ge n}}\widetilde{\mathbf T}_{\mathbf m}$ *და* $\underline{\lim}\widetilde{\mathbf T}_{\mathbf n}=\sup_{\mathbf n}\inf_{\mathbf{m\ge n}}\widetilde{\mathbf T}_{\mathbf m}$ *, სადაც*

$$\mathbf{T_n : R^n \to R \ \ (n\in N)}$$

ასახვა განსაზღვრული პირობით

$$T_n(x_1,\cdots,x_n)=-F^{-1}\Big(\frac{\#((-\infty,0]\cap\{x_1,\cdots,x_n\})}{n}\Big) \qquad (5.2.4)$$

$(\mathbf{x_k})_{1\le k\le n}\in\mathbf{R^n}$ *ელემენტისათვის, წარმოადგენენ* θ *პარამეტრის ძალდებულ შეფასებას* $(\mu_\theta^{\mathbf N})_{\theta\in\mathbf R}$ *ოჯახისათვის.*

მაგალითი 5.2.1. ვთქვათ, $\mu_{(\theta,1)}$ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული $(\theta,1)$ პარამეტრიანი გაუსის წრფივი ზომა. ვთქვათ, $[\cdot]$ აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს. ვინაიდან ნამდვილ რიცხვთა $(\pi\times k-[\pi\times k])_{k\in R}$ მიმდევრობა არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე (იხ. [24], მაგალითი 2.1, გვ. 17), ჩვენ ვასკვნით, რომ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_k)_{k\in N}$ განსაზღვრული პირობით $x_k=F^{-1}(\pi\times k-[\pi\times k])+\theta$ არის $\mu_{(\theta,1)}$ -ექვიდისტრი-ბუტიულად განაწილებული ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე, სადაც F აღნიშნავს ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრულ გაუსის სტანდარტული განაწილების ფუნქციას.

ცხადია, რომ $(x_k)_{k\in N}$ წარმოადგენს (5.2.1) მოდელის ერთ გარკვეულ რეალიზაციას, სადაც $(\Delta_k)_{k\in N}$ არის გაუსის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

ქვემოთ ჩვენ ვინარჩუნებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

(i) n არის ცდათა რაოდენობა;

(ii) T_n არის შეფასება განსაზღვრული (5.2.4) ფორმულით;

(iii) $\bar{X}_n$ არის შერჩევითი საშუალო, განსაზღვრული (5.2.3) ფორმულით;

(iv) θ არის სასარგებლო სიგნალი.

ჩვენ ვიხილავთ (5.2.1) ფორმულით განსაზღვრული წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის სიმულაციას, როცა $\theta = 1$ წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალს. ქვემოთ მოყვანილია Microsoft Excel-ის საშუალებით მიღებული რიცხვითი მონაცემები.

ცხრილი 5.2.1

n	T_n	$\bar{X}_n$	θ	n	T_n	$\bar{X}_n$	θ
50	0.994457883	1.146952654	1	550	1.04034032	1.034899747	1
100	1.036433389	1.010190601	1	600	1.036433389	1.043940988	1
150	1.022241387	1.064790041	1	650	1.03313984	1.036321771	1
200	1.036433389	1.037987511	1	700	1.030325691	1.037905202	1
250	1.027893346	1.045296447	1	750	1.033578332	1.03728633	1
300	1.036433389	1.044049728	1	800	1.03108705	1.032630945	1
350	1.030325691	1.034339407	1	850	1.033913784	1.037321098	1
400	1.036433389	1.045181911	1	900	1.031679632	1.026202323	1
450	1.031679632	1.023083495	1	950	1.034178696	1.036669278	1
500	1.036433389	1.044635371	1	1000	1.036433389	1.031131694	1

შევნიშნოთ, რომ ცხრილი 5.2.1-ის მონაცემები არ ეწინააღმდეგება იმ მოსაზრებას, რომ შეფასებები T_n და $\bar{X}_n$ ერთმანეთს ემთხვევიან და ორივე წარმოადგენს $\theta = 1$ სასარგებლო სიგნალის ძალდებულ შეფასებას, ვინაიდან თეთრი ხმაურის განაწილების ფუნქცია აკმაყოფილებს როგორც ლემა 5.2.2, ასევე ლემა 5.2.3-ის პირობებს.

ქვემოთ ჩვენ ვიხილავთ (5.2.1) ფორმულით განსაზღვრული წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის სიმულაციას, როცა $\theta = 1$ წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალს და თეთრი ხმაურის განაწილების F ფუნქცია არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული კოშის განაწილების ფუნქცია. ქვემოთ მოყვანილია Microsoft Excel-ის საშუალებით მიღებული რიცხვითი მონაცემები.

ცხრილი 5.2.2

n	T_n	$\overline{X}_n$	θ	n	T_n	$\overline{X}_n$	θ
50	1.20879235	2.555449288	1	550	1.017284476	41.08688757	1
100	0.939062506	1.331789564	1	600	1.042790358	41.30221291	1
150	1.06489184	71.87525566	1	650	1.014605804	38.1800532	1
200	1.00000000	54.09578271	1	700	1.027297114	38.03399768	1
250	1.06489184	64.59240343	1	750	1.012645994	35.57956117	1
300	1.021166379	54.03265563	1	800	1.015832638	35.25149408	1
350	1.027297114	56.39846672	1	850	1.018652839	33.28723503	1
400	1.031919949	49.58316089	1	900	1.0070058	31.4036155	1
450	1.0070058	44.00842613	1	950	1.023420701	31.27321466	1
500	1.038428014	45.14322051	1	1000	1.012645994	29.73405416	1

შევნიშნოთ, რომ ცხრილი 5.2.2-ის მონაცემები არ ეწინააღმდეგება იმ მოსაზრებას, რომ შეფასება T_n წარმოადგენს $\theta = 1$ სასარგებლო სიგნალის ძალდებულ შეფასებას, ვინაიდან თეთრი ხმაურის განაწილების ფუნქცია აკმაყოფილებს ლემა 5.2.3-ის პირობებს. ეს მონაცემები გვიჩვენებს ასევე, რომ ჩვენი მცდელობა შევაფასოთ სასარგებლო სიგნალი შერჩევითი $\overline{X}_n$ საშუალოს საშუალებით წარუმატებელია. გამოთვლის შედეგად მიღებული რიცხვითი შედეგები გამოიყურება ბუნებრივად, კოშის წესით განაწილებული თეთრი ხმაურის განაწილების ფუნქცია არ აკმაყოფილებს ლემა 5.2.2-ის პირობებს.

ლემა 5.2.4. ვთქვათ, $J \subseteq N$, სადაც N წარმოადგენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. მაშინ სიმრავლე A_J, განსაზღვრული პირობით $A_J = \{(x_k)_{k \in N} A_J : x_k > 0$ როცა $k \in J$ & $x_k \le 0$ როცა $k \notin J\}$, წარმოადგენს ჰაარის ემბივალენტს.

დამტკიცება. პირველად ვაჩვენოთ, რომ A_J არ წარმოადგენს ჰაარის აზრით ნულზომად სიმრავლეს. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ μ არის ისეთი ბორელის ალბათური ზომა, რომ სრულდება პირობა

$$(\forall (h_k)_{k \in N} : (h_k)_{k \in N} \in R^N \Rightarrow \mu(A_J + (h_k)_{k \in N}) = 0).$$

ვინაიდან μ არის უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ R^N სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა, ამიტომ მოიძებნება ისეთი კომპაქტური სიმრავლე F, რომ შესრულდება

შემდეგი პირობა $\mu(F) > 0$. თუ განვიხილავთ ამ სიმრავლის F_k პროექციას k-ურ საორდინატო R_k ღერძზე, მაშინ ის იქნება კომპაქტური ქვესიმრავლე. ეს ნიშნავს რომ იარსებებს დადებითი რიცხვი H_k ისეთი, რომ $F_k \subseteq [-H_k, H_k]$. განვსაზღვროთ $(h_k^0)_{k \in N}$ შემდეგნაირად: $h_k^0 = H_k + 1$, თუ $k \in J$, და $h_k^0 = -H_k - 1$, თუ $k \in N / J$.

შევნიშნოთ, რომ $F \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} [-H_k, -H_k]$ და

$$F + (h_k^0)_{k \in N} \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} F_k + (h_k^0)_{k \in N} \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} F_k + h_k^0 \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} [-H_k + h_k^0, H_k + h_k^0] \subseteq A_J .$$

ამ ჩართვის გათვალისწინებით ჩვენ ვღებულობთ, რომ

$$\mu(A_J - (h_k^0)_{k \in N}) \geq \mu((F + (h_k^0)_{k \in N}) - (h_k^0)_{k \in N}) \geq \mu(F) > 0,$$

რაც წარმოადგენს წინააღმდეგობას.

იმავე სქემით მტკიცდება, რომ $A_{N/J}$ არ წარმოადგენს ჰაარის აზრით ნულზომად სიმრავლეს.

ვაჩვენოთ, რომ A_J წარმოადგენს ჰაარის ემბივალენტს. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ ის არ წარმოადგენს ჰაარის აზრით ნულზომად სიმრავლეს. ვაჩვენოთ, რომ ის არ წარმოადგენს გავრცელებას. თუ დაუშვებთ საწინააღმდეგოს, მაშინ R^N / A_J უნდა წარმოადგენდეს ჰაარის აზრით ნულზომად სიმრავლეს. ვინაიდან $A_{N/J}$ წარმოადგენს ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეს და $A_{N \setminus J} \subset R^N \setminus A_J$, მაშინ ისიც უნდა იყოს ჰაარის აზრით ნულზომადი. ეს წინააღმდეგობაა და ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 5.2.5([30], თეორემა 1, გვ. 79) არსებობს R^{∞} სივრცის ისეთი დახლეჩა $(\mathrm{C}_t)_{t \in \mathrm{R}}$ რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) $\mathrm{C}_t + \mathrm{R}^{(\mathrm{N})} = \mathrm{C}_t$ ყოველი $t \in \mathrm{R}$ რიცხვისათვის;

ბ) C_t არის ემბივალენტი ყოველი $t \in \mathrm{R}$ რიცხვისათვის;

გ) C_t და Cs სიმრავლეთა თანაკვეთა არის ჰაარის აზრით ნულზომადი სიმრავლე ყოველი განსხვავებული $t, s \in \mathrm{R}$ რიცხვებისათვის;

განსაზღვრება 5.2.2. (5.2.1) ფორმულით განსაზღვრულ სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევით ძალდებულ

$T: R^N \to \Theta$ შეფასებას ეწოდება ობიექტური თუ $T^{-1}(\theta)$ არის ჰაარის ემზივალენტი ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის.

განსაზღვრება 5. 2.3. (5.2.1) ფორმულით განსაზღვრულ სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევით ძალდებულ $T: R^N \to \Theta$ შეფასებას ეწოდება ძლიერად ობიექტური თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

(1) $T^{-1}(\theta)$ არის ჰაარის ემზივალენტი ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის;

(2) ყოველი $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ პარამეტრისათვის მოიძებნება R^N სივრცის ისეთი იზომეტრიული (ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) გარდაქმნა $A_{(\theta_1,\theta_2)}$, რომ $A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2)$ წარმოადგენს ჰაარის ნულ სიმრავლეს.

ქვეთავი 5.3. ამორჩევის აქსიომის საშუალებით წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგება, როცა $\Theta = R$.

შენიშვნა 5.3.1. ვთქვათ, J არის ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე.

ვთქვათ,

$$A_J = \{(x_i)_{i\in N} \mid x_i \geq 0 \text{ როცა } i \in J \ \& x_i < 0 \text{ როცა } i \in N \setminus J\}.$$

$\mathrm{P(N)}$-ით აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის ბულეანი და $H : \mathrm{R} \to P(\mathrm{N})$-ით აღვნიშნოთ რაიმე ბიექცია. დავუშვათ

$$D_\theta = (A_{H(\theta)} \setminus S) \cup S_\theta$$

როცა $\theta \in N$, სადაც S და $(S_\theta)_{\theta\in R}$ განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$S = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \text{ არსებობს სასრული ზღვარი } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k / n\}$$

და

$$S_\theta = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k / n = \theta\},$$

როცა $\theta \in R$.

მაშინ $(D_\theta)_{\theta\in R}$ წარმოადგენს უსასრულო შერჩევათა R^N სივრცის ისეთ დახლეჩას, რომ დახლეჩის ყოველი ელემენტი ჰაარის ემბივალენტია და ყოველი $\theta_1,\theta_2 \in R$ განსხვავებული პარამეტრებისათვის არსებობს ისეთი იზომეტრიული(ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) ასახვა $A_{(\theta_1,\theta_2)} : \mathrm{R}^\infty \to R^\infty$, რომ სიმრავლე $A_{(\theta_1,\theta_2)}(D_{\theta_1})\Delta D_{\theta_2}$ წარმოადგენს ჰაარის აზრით ნულზომად სიმრავლეს. ჩვენ შეგვიძლია $A_{(\theta_1,\theta_2)} : \mathrm{R}^\infty \to R^\infty$ გადასახვა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$A_{(\theta_1,\theta_2)}((x_k)_{k\in N}) = (y_k)_{k\in N},$$

სადაც $y_k = -x_k$ როცა $k \in H(\theta_1)\Delta H(\theta_2)$ და $y_k = x_k$ სხვა შემთხვევაში.

დავუშვათ $\overset{\circ}{T}((x_k)_{k\in N}) = \theta$, როცა $(x_k)_{k\in N} \in D_\theta$. უკვე დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს შემდეგი დებულების დამტკიცება.

თეორემა 5. 3.1. თუ თეთრი ხმაურისათვის სრულდება პირობა $E|\Delta_k| < \infty$ წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, მაშინ $\overset{\circ}{T}$ წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

ქვეთავი 5.4 წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია, როცა $\Theta = [0,1]$.

ყოველი $a \in R$ რიცხვისათვის, $\{a\}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ მისი წილადი ნაწილი.

თეორემა 5.4.1. ვთქვათ, ბორელის ალბათური ზომა λ, განსაზღვრული გარდაქმნილი $(\xi_k)_{k\in N}$ სიგნალით, ემთხვევა $\left(\mu^N\right)_{\theta_0}$ ზომას გარკვეული $\theta_0 \in [0,1]$ პარამეტრისათვის.

ვთქვათ, $T : \mathrm{R}^N \to [0,1]$ არის განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$T((x_k)_{k\in N}) = \{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k / n\} \text{ თუ } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k / n \neq 1,$$

$$T((x_k)_{k\in N}) = 1 \text{ თუ } \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k / n = 1,$$

და

$$T((x_k)_{k\in N}) = \sum_{k\in N}\chi_{(0,+\infty)}(x_k)/2^k \text{ სხვა შემთხვევაში,}$$

სადაც $\chi_{(0,+\infty)}(\cdot)$ აღნიშნავს $(0,+\infty)$ სიმრავლის ინდიკატორ ფუნქციას განსაზღვრულს ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ ძირითადი დაშვების პირობებში $\Theta = [0,1]$-სათვის, T წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას (2) განტოლებით განსაზღვრული წრფივი ერთგანზომილებიანი სტოქასტური სისტემის აღმწერი $(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta\in[0,1]}$ სტატისტიკური სტრუქტურისათვის.

დამტკიცება. ნაბიჯი 1. ვაჩვენოთ, რომ T წარმოადგენს $(\mathrm{B}(R^N), \mathrm{S}([0,1])$-ზომად უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას და $T^{-1}(\theta)$ არის ჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta_k}{2^k} \in [0,1]$ პარამეტრისათვის, სადაც $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta_k}{2^k}$ წარმოადგენს θ რიცხვის წარმოდგენას ორობით სისტემაში.

მართლაც, ჩვენ გვაქვს

$$(\forall\theta)(\theta\in(0,1)\to T^{-1}(\theta) = (B_{H(\theta)}\setminus S)\cup\cup_{z\in Z}S_{\theta+z}),$$

სადაც

$$H(\theta) := J = \{k : k\in N \ \&\theta_k = 1\},$$
$$B_{H(\theta)} = \{(x_k)_{k\in N} : x_k > 0, k\in H(\theta)\ \& \quad x_k \le 0, k\in N\setminus H(\theta)\}$$

და $S_{\theta+z}$ და S განსაზღვრულია შენიშვნა 5.3.1-ით. S მსგავსად $\cup_{z\in Z}S_{\theta+z}$ სიმრავლისა, თეორემა 4.2.3-ის ძალით არის ჰაარის ნულ სიმრავლე და $B_{H(\theta)}$ სიმრავლე, ლემა 2.5.1-ის ძალით არის ჰაარის ემბივალენტი. უკანასკნელი პირობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $T^{-1}(\theta)$ არის ბორელის აზრით ზომადი ჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta\in(0,1)$ პარამეტრისათვის.

შევნიშნოთ, რომ

$$T^{-1}(1)=(\mathrm{B}_{H(1)}\setminus S)\cup S_1=(\mathrm{B}_N\setminus S)\cup S_1$$

და

$$T^{-1}(0)=(\mathrm{B}_{H(0)}\setminus S)\cup\cup_{z\in Z\setminus\{1\}}S_{0+z}=(\mathrm{B}_\varnothing\setminus S)\cup\cup_{z\in Z\setminus\{1\}}S_{0+z},$$

რომლებიც ასევე წარმოადგენენ ბორელის აზრით ზომად ჰაარის ემბივალენტებს.

ახლა უკვე ადვილია იმის ჩვენება, რომ T წარმოადგენს $(\mathrm{B}(R^N),\mathrm{S}([0,1])$-ზომად ასახვას, იმის გამო რომ $\mathrm{B}(R^N)$ არის ჩაკეტილი თვლადი რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების მიმართ და $\mathrm{S}([0,1])$ სიგმა-ალგებრის ყოველი ელემენტი არის $[0,1]$ ინტერვალის თვლადი სიმრავლე ან მისი დამატება ამავე ინტერვალში.

ვინაიდან $S_\theta\subseteq T^{-1}(\theta)$ ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის, ჩვენ ვასკვნით, რომ $\mu_\theta(T^{-1}(\theta))=1$ ასევე ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის, რაც ნიშნავს რომ T წარმოადგენს $(\mathrm{B}(R^N),\mathrm{S}([0,1])$-ზომად უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

ნაბიჯი 2. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ორი განსხვავებული $\theta_1,\theta_2\in[0,1]$ პარამეტრისათვის არსებობს R^N სივრცის ისეთი იზომეტრიული (ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) გარდაქმნა $A_{(\theta_1,\theta_2)}$, რომ სიმრავლე $A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2)$ წარმოადგენს ჰაარის აზრით ნულ-ზომად სიმრავლეს.

ყოველი უსასრულო $(x_k)_{k\in N}\in R^N$ შერჩევისათვის განვსაზღვროთ $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ შემდეგნაირად: $A_{(\theta_1,\theta_2)}((x_k)_{k\in N})=(y_k)_{k\in N}$, სადაც $y_k=-x_k$ როცა $k\in H(\theta_1)\Delta H(\theta_2)$ და $y_k=x_k$ სხვა შემთხვევაში. ადვილია იმის ჩვენება, რომ $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ წარმოადგენს R^N სივრცის იზომეტრიულ (ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) გარდაქმნას.

შევნიშნოთ, რომ

$$A_{(\theta_1,\theta_2)}(\mathrm{T}^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2)\subseteq\cup_{k\in N}\{0\}_k\times R^{N\setminus\{k\}}\cup S.$$

იმის გამო, რომ $\cup_{k\in N}\{0\}_k \times R^{R\setminus\{k\}}$ არის ჰაარის ნულ სიმრავლე მსგავსად S სიმრავლისა, ჩვენ ადვილად ვასკვნით რომ $A_{(\theta_1,\theta_2)}(\mathrm{T}^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2)$ არის ჰაარის ნულ სიმრავლე.

ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. □

ქვეთავი 5.5. სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული სტატისტიკის ერთი კონსტრუქციის შესახებ წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა $\Theta = R$.

თეორემა 5.5.1. ლემა 5.2.3-ის პირობებში, $\overline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{inf_n\, sup_{m\geq n}}\, \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ და $\underline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{sup_n\, inf_{m\geq n}}\, \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ სტატისტიკები წარმოადგენენ სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებებს წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა $\Theta = R$.

დამტკიცება. დამტკიცებას ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ $\overline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{inf_n\, sup_{m\geq n}}\, \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ სტატისტიკისათვის. თეორემის დამტკიცება $\underline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{sup_n\, inf_{m\geq n}}\, \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ სტატისტიკის შემთხვევაში იგივეა.

ლემა 5.2.1-ის თანახმად, ჩვენ ვიცით, რომ $T := \overline{\mathbf{lim}}\widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{n}} = \mathbf{inf_n\, sup_{m\geq n}}\, \widetilde{\mathbf{T}}_{\mathbf{m}}$ წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა $\Theta = R$.

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\{(x_k)_{k\in N} : T\ ((x_k)_{k\in N}) = \theta\}$$

არის ჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta \in \overline{R}$ პარამეტრისათვის. ვთქვათ, $\theta \in \overline{R}$ და $\mathrm{T}((\mathrm{z}_k)_{k\in N}) = \theta.$ დავუშვათ, $J = \{k : \mathrm{z}_k \leq 0\}$ და განვიხილოთ სიმრავლე

$$A_J = \{(y_k)_{k\in N} : y_k \leq 0 \ \text{ როცა } k \in J \ \& y_k > 0 \text{ როცა } \ k \in N \setminus J\}.$$

მაშინ

$$A_J + (\mathrm{z}_k)_{k\in N} \subseteq \{(x_k)_{k\in N} : T((x_k)_{k\in N}) = \theta\} \ .$$

ლემა 5.2.4-ის თანახმად ჩვენ ვიცით, რომ A_J არ არის ჰაარის აზრით ნულზომადი სიმრავლე. ცხადია, რომ $A_J + (z_k)_{k\in N}$ ასევე არ არის ჰაარის

აზრით ნულზომადი სიმრავლე, რაც ზემოთ მოყვანილი ჩართვის გამო ნიშნავს, რომ სიმრავლე $\{(x_k)_{k\in N}:T((x_k)_{k\in N})=\theta\}$ ასევე არ არის ჰაარის აზრით ნულზომადი სიმრავლე. ვინაიდან $\theta_1\neq\theta$ პარამეტრისათვის, იმავე არგუმენტის გამო $\{(x_k)_{k\in N}:T((x_k)_{k\in N})=\theta_1\}$ არ არის ჰაარის აზრით ნულზომადი სიმრავლე და სიმრავლეები

$$\{(x_k)_{k\in N}:T((x_k)_{k\in N})=\theta_1\} \text{ და } \{(x_k)_{k\in N}:T((x_k)_{k\in N})=\theta\}$$

არ თანაიკვეთებიან, რაც გვაძლევს იმის საშუალებას იმის დასკვნის საშუალებას, რომ $\{(x_k)_{k\in N}:T((x_k)_{k\in N})=\theta_1\}$ არის ჰაარის ემბივალენტი.

შევნიშნოთ, რომ ყველა ნულოვანი $H_0:\theta=\theta_0\ (\theta_0\in R)$ ჰიპოთეზის უარყოფის არე ემთხვევა

$$\{(x_k)_{k\in N}:T((x_k)_{k\in N})=-\infty\} \text{ და } \{(x_k)_{k\in N}:T\ ((x_k)_{k\in N})=\infty\}$$

სიმრავლეების გაერთიანებას, რომელიც ასევე არის ჰაარის ემბივალენტი. ამით თეორემა 5.5.1-ის დამტკიცება დასრულებულია. □

შენიშვნა 5.5.1. ბუნებრივად ისმის შემდეგი ამოცანა იმის შესახებ, თუ რომელი უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებები არიან ობიექტურები. შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანის შესწავლა არის მეტად მნიშვნელოვანი იმისათვის, რომ სტატისტიკური დასკვნების გამოტანისას ვისარგებლოთ სასარგებლო სიგნალის მხოლოდ ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებებით რათა თავიდან ავიცილოთ სუბიექტურობის ფაქტორი, რომლის შესახებაც გახშირებულია საუბარი სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიის კრიტიციზმში (იხილეთ, მაგალითად, [8],[34]).

თავი VI. არა-SHY - სიმრავლეობის ერთი საკმარისი პირობის შესახებ ბანახის ზოგიერთ კლასიკურ სივრცეში

ქვეთავი 6.1. შესავალი

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ბანახის ზოგიერთ კლასიკურ სივრცეში shy -სიმრავლეთა σ-იდეალის თვლადი ჯაჭვების პირობას.

ვიტყვით, რომ გავიხსენოთ, რომ ბანახის სივრცის shy -სიმრავლეთა σ-იდეალი ფლობს თვლადი ჯაჭვების პირობას თუ არა- shy -სიმრავლეთა ყოველი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ოჯახი არის არაუმეტეს თვლადი. აბელის პოლონურ ჯგუფში დიოტლიმ

[Dougherty, R., Examples of non-shy sets, Fund. Math. 144 (1994), 73–88]

ნაშრომში დაამტკიცა შემდეგი დებულება.

თეორემა 6.1.1 (დიოტლი). ვთქვათ, G არის პოლონური ჯგუფი, რომელიც აღჭურვილია ინვარიანტული მეტრიკით და არ არის ლოკალურად კომპაქტური. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ერთეულოვანი ელემენტის მიდამო U და G ჯგუფის მკვრივი ქვეჯგუფი G^*, ისეთი, რომ G^* ქვეჯგუფის ყოველი სასრულად წარმოქმნილი F ქვეჯგუფისათვის $\overline{F \cap U}$ არის კომპაქტი მაშინ G ჯგუფის shy-სიმრავლეთა σ-იდეალი არ აკმაყოფილებენ თვლადი ჯაჭვების პირობას.

კეჩრის მიერ

[A.S. Kechris, Classical descriptive set theory, Springer, New York, 1995] ნაშრომში მიღებული შედეგის გამოყენებით, რომელიც შეეხებოდა პოლონურ ჯგუფში ბორელის სელექტორის s:$G\backslash H \to G$ არსებობას H-კოსიმრავლისათვის, სადაც H არის G-ჯგუფის ჩაკეტილი ქვეჯგუფი, დიოტლიმ იმავე ნაშრომში აჩვენა შემდეგი დებულების მართებულობა

თეორემა 6.1.2. *ვთქვათ, $(G,+)$ არის აბელის პოლონური ჯგუფი და H არის მისი ჩაკეტილი ქვეჯგუფი. თუ H ქვეჯგუფის shy -სიმრავლეთა σ-იდეალი არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას, მაშინ არ აკმაყოფილებენ თვლადი ჯაჭვების პირობას, მაშინ G ჯგუფის shy-სიმრავლეთა σ-იდეალიც ასევე არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.*

თეორემა 6.1.2-ის დამტკიცების შემდეგ დიოტლიმ გამოთქვა მოსაზრება, რომ პოლონური ჯგუფი G აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას მხოლოდ მაშინ როცა G არის ლოკალურად კომპაქტური. მოგვიანებით სოლეცკიმ
[Solecki S., On Haar null sets, Fund. Math. 149(3) (1996), 205-210] ამ ამოცანის ნაშრომში გადაწყვიტა შემოაღნიშნული ამოცანა შემდეგნაირად

თეორემა 6.1.3. *ვთქვათ, G არის პოლონური ჯგუფი აღჭურვილი ინვარიანტული მეტრიკით. მაშინ უნივერსალურად ზომად ან ექვივალენტურად, ჩაკეტილ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ოჯახი, რომლის ყოველი ელემენტი არ არის shy-სიმრავლე, არის თვლადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა G არის ლოკალურად კომპაქტური.*

თეორემა 6.1.1-დან გამომდინარეობს, რომ უსასრულო-განზომილე-ბიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას. მიუხედავად ამისა, თეორემა 6.1.1-ის დამტკიცება არის ზოგადი. შის მიერ [31] ნაშრომში დასმულ იქნა შემდეგი

ამოცანა 6.1.1. ბანახის სივრცის თეორიის ტექნიკის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ ყოველი უსასრულო-განზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

მოცემული თავის მთავარი მიზანი არის ამოცანა 6.1.1-ის გადაწყვეტა ზოგიერთი კარგად ცნობილი უსასრულო-განზომილებიანი კლასიკური ბანახის სივრცეებისათვის მათი სპეციფიკური სტრუქტურული თვისებების გამოყენებით.

6.2 ქვეთავში მოყვანილია ზოგიერთი დამხმარე ცნება და ფაქტი ზომის თეორიიდან და ფუნქციონალური ანალიზიდან. 6.3 ქვეთავში განხილულია ქვესიმრავლეთა არა-shy-სიმრავლეობის ერთი საკმარისი პირობა ბანახის $C^{\infty}[0,1], l^{\infty}, C_{\infty}(R)$ სივრცეებში. 6.4 ქვეთავში, ბანახის სივრცეთა სპეციფიკური სტრუქტურული თვისებების გამოყენებით დათვლილია ჰაარის ემბივალენტებად მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩების სიმძლავრეები და როგორც შედეგი,

ნაჩვენებია, რომ ზემოაღნიშნული ბანახის სივრცეები არ აკმაყოფილებენ თვლადი ჯაჭვების პირობას.

ქვეთავი 6.2. ზოგიერთი დამხმარე ცნება და ფაქტი ზომის თეორიიდან და ფუნქციონალური ანალიზიდან

ლემა 6.2.1. პოლონურ G-სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ბორელის ალბათური ზომა არის კონცენტრირებული კომპაქტური სიმრავლეების თვლად გაერთიანებაზე.

დამტკიცება: G-სივრცის სეპარაბელობიდან გამომდინარე ყოველი ნატურალური n-რიცხვისათვის არსებობს $\frac{1}{n}$ რადიუსის მქონე სფეროთა ისეთი თვლადი $(B_{n_j})_{j\in N}$ ოჯახი, რომ G=$\bigcup_{j\in N} B_{n_j}$. ამგვარად G=$\bigcup_{j\in N} \overline{B_{n_j}}$, სადაც $\overline{B_{n_j}}$ არის B_{n_j}-ის ჩაკეტვა. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი რიცხვი k_n, რომ

$$\mu(G\setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} \overline{B_{n_j}}) > 1-\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

ვთქვათ, $X_n = \bigcup_{j=1}^{k_n} \overline{B_{n_j}}$ და K=$\bigcap_{n\in N} X_n$.

$$\mu(G\setminus K)=\mu(G\setminus \bigcap_{n\in N} X_n)=\mu(\cup_{n\in N}(G\setminus X_n))\le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(G\setminus X_n)\le \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon$$

ჩვენ გვჭირდება მხოლოდ ვაჩვენოთ, რომ K არის კომპაქტი. ვთქვათ $\{x_n\}\subseteq K$ არის უსასრულო მიმდევრობა. მაშინ არსებობს n_{j_1}, რომ $K\cap B_{n_{j_1}}=K_1$ შეიცავს $\{x_{n_{k_1}}\}$ უსასრულო წერტილებს $\{x_n\}$-მიმდევრობიდან. ასევე, არსებობს $n_{j_{1_{j_2}}}$, რომ $K_1\cap B_{n_{k_l}}=K_2$ შეიცავს $\{x_{n_{k_l}}\}$ უსასრულო წერტილებს $\{x_{n_{k_1}}\}$-მიმდევრობიდან.

ინდუქციური დაშვებით $\{K_m\}$ სიმრავლეების მიმდევრობა სადაც $K_1\supset K_2\supset\cdots K_m\supset\cdots$ და თითოეული K_m შეიცავს უსასრულო წერტილებს $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან. შევნიშნოთ, რომ დიამეტრი K_m-ის არის ნაკლები ვიდრე $\frac{2}{n}$ და G არის სრული. ასე, რომ $\cap_{m\in N} K_m$ არის ერთადერთი $\{x_n\}$ ქვემიმდევრობა, რომელსაც შეესაბამება ერთი წერტილი. აქედან გამომდინარე K კომპაქტია.

ვთქვათ, ყოველი $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, F_n არის კომპაქტური ქვესიმრავლე G-სი, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\mu(G \backslash F_n) < \frac{1}{n}$. ცხადია, რომ

$$0 \le \mu(G \backslash \cup_{n \in N} F_n) \le \mu(G \backslash F_n) \le \frac{1}{n}.$$

ყოველი n$\in N$, რაც ნიშნავს იმას, რომ $\mu(G \backslash \cup_{n \in N} F_n) = 0$.

ამით ლემა დამტკიცებულია. ◻

შენიშვნა 6.2.1. შეგახსენებთ, რომ სრულ მეტრიკული E-სივრცეს ეწოდება რადონის მეტრიკული სივრცე, თუ მასზე განსაზღვრული ყოველი ბორელის ალბათური μ ზომა არის ქვემოდან რეგულარული, ე.ი., ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი კომპაქტური სიმრავლე C_ε , რომ $\mu(E \backslash C_\varepsilon) < \varepsilon$. ლემა 6.2.1-ის გამოყენებით ადვილია იმის დადგენა, რომ ყოველი პოლონური სივრცე არის რადონის მეტრიკული სივრცე.

შეგახსენებთ, რომ კარდინალურ $\aleph$ რიცხვს ეწოდება ზომადი, თუ მის ქვესიმრავლეთა ბულეანზე შესაძლებელია განისაზღვროს დიფუზიური ალბათური ზომა.

შემდეგი ორი პირობა არის ექვივალენტური:

(ა) ყოველი სრული მეტრიკული სივრცე არის რადონის სივრცე;

(ბ) არ არსებობს ზომადი კარდინალი.

შევნიშნოთ, რომ თუ E არის რადონის მეტრიკული სივრცე და μ ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა, მაშინ ყოველი r> 0 რიცხვისათვის არსებობს F_r კომპაქტი, ისეთი რომ 0$< \mu(F_r) < 1$ და $F_r \subseteq B(x,r)$ გარკვეული $x \in E$ ელემენტისათვის, სადაც $B(x,r)$ აღნიშნავს ჩაკეტილ სფეროს ცენტრით x წერტილში და რადიუსით r. მართლაც, ვინაიდან E არის რადონის მეტრიკული სივრცე, ამიტომ არსებობს კომპაქტური სიმრავლე F ისეთი, რომ $0 < \mu(F) < 1$. თუ განვიხილავთ r რადიუსის მქონე ყველა ღია სფეროს, ცხადია ის იქნება F სიმრავლის დაფარვა. ამიტომ მოიძებნება სასრული ოჯახი $(B(x_k, r))_{1 \le k \le n}$ ისეთი რომ $F \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r)$. ამიტომ მოიძებნება $B(x_{k_0}, r)$, ისეთი რომ

$0<\mu(B(x_{k_0},r)\cap F)<1.$ თუ კვლავ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ E რადონის სივრცეა, ჩვენ ადვილად დავასკვნით ისეთი $F_r\subseteq B(x_{k_0},r)\cap F$ კომპაქტის არსებობას, რომ $0<\mu(F_r)<1$ და $F_r\subseteq B(x_{k_0},r)$.

ამიტომ საკმარისია $x\in E$ ელემენტის როლში ავიღოთ x_{k_0}.

ამ ფაქტის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია მარტივად ვაჩვენოთ, რომ ყოველი არაცარიელი ღია ქვესიმრავლე G რადონის მეტრიკულ E ჯგუფში არის არა-shy-სიმრავლე. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, რომ μ არის ტესტური ზომა G ქვესიმრავლისათვის. r>0 იყოს ისეთი რიცხვი რომლისთვისაც $B(x,r)\subseteq G.$ დამტკიცებული ფაქტის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ r>0 რიცხვისთვის არსებობს წერტილი $x_0\in E$, ისეთი რომ $B(x_0,r)\subseteq E$ ღია ბირთვში არსებობს კომპაქტური სიმრავლე F_r, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს $0<\mu(F_r)<1$ და $F_r\subseteq B(x_0,r)$. პირობითი ალბათური ზომა λ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$\lambda(\mathrm{Y})=\frac{\mu(Y\cap F_r)}{\mu(F_r)},$$

სადაც Y$\in B(E)$.

ყოველი h$\in E$ ელემენტისათვის გვექნება

$$\lambda(hG)=\frac{\mu(hG\cap F_r)}{\mu(F_r)}\leq\frac{\mu(hG)}{\mu(F_r)}=0.$$

ეს ნიშნავს იმას, რომ λ არის G-სიმრავლისათვის ტესტური ზომა. უკანასკნელიდან გამომდინარეობს

$$F_r+(x-x_0)\subseteq B(x_0,r)+(x-x_0)=B(x,r)\subseteq G \text{ და } F_r\subseteq G+(x_0-x).$$

აქედან მივიღებთ $\lambda(G+(x_0-x))\geq\lambda(F_r)>0$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ λ არის ტესტური ზომა G სიმრავლისათვის.

ლემა 6.2.2. სეპარაბელურ ბანახის X-სივრცის ქვესიმრავლე S, რომელიც შეიცავს ყოველი კომპაქტური ქვესიმრავლის რაიმე ტრანსლიატს (ძვრას) არ არის shy-სიმრავლე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, S სიმრავლე არის shy-სიმრავლე. ეს ნიშნავს რომ არსებობს ბორელის ალბათური ზომა μ

ისეთი, რომ $\mu(S+x)=0$ ყოველი $x \in X$ ელემენტისათვის. თანახმად ლემა 6.2.1-ისა და ჩვენი მოცემულობისა, არსებობს კომპაქტური სიმრავლე K და ელემენტი $x \in X$, ისეთი რომ $\mu(K) > 0$ და $K + x \subseteq S$. უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ $K \subseteq S - x$ და $0 < \mu(K) \le \mu(S-x) = 0$, რაც წინააღმდეგობაა და ამით ლემა 6.2.2 დამტკიცებულია. □

გადავიდეთ ახლა სიმრავლის კომპაქტურობის ზოგიერთი პირობის განხილვაზე.

ლემა 5.2.5 (ჰაუსდორფი). იმისათვის, რომ სრული მეტრული X სივრცის M სიმრავლე კომპაქტური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს M სიმრავლის სასრული $\varepsilon-$ქსელი X სივრცეში.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ჯერ აუცილებლობა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ M სიმრავლე კომპაქტურია X სივრცეში, მაგრამ არსებობს ერთი მაინც ისეთი $\varepsilon^* > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც არ არსებობს M სიმრავლის სასრული ε^*-ქსელი X სივრცეში. ავიღოთ ნებისმიერი $x_1 \epsilon M$ელემენტი. მაშინ, M სიმრავლე შეიცავს ერთ ისეთ x_2 ელემენტს მაინც, რომ $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon^*$. ასეთი $x_2 \epsilon \mathrm{M}$ ელემენტი რომ არ არსებობდეს, მაშინ M სიმრავლისათვის იარსებებს ε^*-ქსელი, რომელიც შეიცავს ერთადერთ x_1 ელემენტს. გამოვყოთ ახლა ისეთი $x_3 \epsilon M$ ელემენტი, რომ $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon^*$ და $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon^*$. ცხადია, x_3 ელემენტი რომ არ არსებობდეს, მაშინ M სიმრავლისათვის იარსებებს ε^*-ქსელი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ორ $x_1, x_2 \epsilon M$ ელემენტს. თუ მოყვანილი მსჯელობით გავაგრძელებთ M სიმრავლის ელემენტების გამოყოფას, მივიღებთ უსასრულო $\{x_n\} \subset \mathrm{M}$ მიმდევრობას, რომელსაც შემდეგი თვისებები აქვს:
1) როცა $m \neq n$, მაშინ $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon^*$, 2) ნებისმიერი $\{x_{n_s}\}$ ქვემიმდევრობისათვის, როცა $n_s \neq n_r$, გვაქვს $\rho(x_{n_r}, x_{n_s}) > \varepsilon^*$ ჩვენმა დაშვებამ მიგვიყვანა შემდეგ დასკვნამდე: M სიმრავლეში შესაძლოა გამოვყოთ ელემენტების უსასრულო $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც არ შეიცავს არცერთ კრებად ქვემიმდევრობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ M სიმრავლე არ არის

კომპაქტური, რაც ეწინააღმდეგება ჩვენ დაშვებას. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვიგულისხმოთ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს M სიმრავლის სასრული $\varepsilon -$ქსელი X სივრცეში. საჭიროა ვაჩვენოთ, რომ M სიმრავლე კომპაქტურია. ამისათვის კი საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ როგორიც უნდა იყოს $\{x_n\} \subset M$ მიმდევრობა, შეიძლება მისგან კრებადი მიმდევრობის გამოყოფა.

განვიხილოთ ორი შესაძლო შემთხვევა.

1^0. ვთქვათ, $\{x_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს ტოლი ელემენტების უსასრულო $\bar{x}, \bar{x}, \ldots \epsilon \{x_n\}$ ქვემიმდევრობას. მაშინ $\{\bar{x}\}$ ქვემიმდევრობა კრებადია $\bar{x}$ ელემენტისაკენ და წინადადება ამ შემთხვევაში დამტკიცებულია.

2^0. წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა შეიცავს ჯგუფებს, რომელთა რიცხვი თვლადია და თითოეული ჯგუფი ტოლი ელემენტებისაგან შედგება. იგულისხმება, რომ ყოველი ასეთი ჯგუფი შეიცავს ტოლი ელემენტების სასრულ რიცხვს. ასე რომ არ იყოს, მაშინ საქმე უკვე განხილულ შემთხვევასთან გვექნებოდა. ისიც ცხადია, რომ ზოგიერთი ჯგუფი შეიძლება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან შედგებოდეს. ამ ჯგუფებიდან ავიღოთ თითო-თითო ელემენტი-მივიღებთ თავიდან აღებულ $\{x_n\}$ მიმდევრობის უსასრულო ქვემიმდევრობას, რომელიც სიმარტივისათვის ისევ $\{x_n\}$-ით ავღნიშნოთ. ამ ქვემიმდევრობის ელემენტები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია. ვინაიდან M სიმრავლისათვის არსებობს სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$-ქსელი, ამიტომ არსებობს ჩაკეტილი სფეროების სასრული რიცხვი, რომელთა რადიუსები უდრის $\frac{\varepsilon}{2}$ და, რომლებიც შეიცავენ M სიმრავლის ყველა ელემენტს. ცხადია, ეს სფეროები, კერძოდ, შეიცავენ $\{x_n\}$ მიმდევრობასაც. ვინაიდან სფეროების რიცხვი სასრულია, ამიტომ ერთი მათგანი მაინც, ვთქვათ $\overline{s_1}$, შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს. ავიღოთ ახლა სფეროები, რომელთა ცენტრები არის $\overline{s_1}$ სფეროს სხვადასხვა წერტილები და აქვთ ერთნაირი რადიუსები $\frac{\varepsilon}{2^2}$. ამ სფეროების რიცხვი სასრულია. ისე როგორც ზემოთ, მათგან ერთ-ერთი $\overline{s_2}$

სფერო შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ისეთი ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც $\overline{S_1}$ სფეროში უკვე მოხვდა. ასევე ავაგოთ შემდეგი $\overline{S_3}$ სფერო $\frac{\varepsilon}{2^2}$ რადიუსით. ეს უკანასკნელი შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც წინამავალ $\overline{S_2}$ და $\overline{S_1}$ სფეროებში უკვე შედის. როგორც ვხედავთ, სფეროების $\overline{S_1}$,$\overline{S_2}$, $\overline{S_3}$ აგების მოყვანილი წესი ისეთია, რომ მისი გაგრძელება შესაძლოა უსასრულოდ. მივიღებთ სფეროების უსასრულო $\{\overline{S_n}\}$ მიმდევრობას, რომელშიც $\overline{S_n}$ სფეროს რადიუსი $\frac{\varepsilon}{2^n}$. გარდა ამისა, ყოველი $\overline{S_n}$ შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ელემენტების ისეთ უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც ყველა წინამავალ $\overline{S_k}$ (k< n) სფეროებსაც ეკუთვნის. ახლა $\{\overline{S_n}\}$ მიმდევრობის ყოველი სფეროდან თითო-თითო x_{n_k} ელემენტი ავირჩიოთ. ასე წარმოიქმნება ელემენტების უსასრულო $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა. თუ ვიგულისხმებთ, რომ, როცა k< i, მაშინ $n_k < n_i$, გვექნება $\overline{S_i} \subset \overline{S_k}$. ავიღოთ $\{x_{n_k}\}$ მიმდევრობის ორი ნებისმიერი $x_{n_k} \epsilon \overline{S_k}$ და $x_{n_i} \epsilon \overline{S_i}$ ელემენტი; ცხადია, რომ $x_{n_k} \epsilon \overline{S_k}$ ვინაიდან $\overline{S_k}$ სფეროს დიამეტრი უდრის 2 $\frac{\varepsilon}{2^k}$, ამიტომ $\rho(x_n, x_{n_k}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{k-1}}$. როგორც ჩანს $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან გამოყოფილი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა ფუნდამენტალურია და, ვინაიდან X სივრცე სრულია, ამიტომ იგი კრებადია. ამით ლემა დამტკიცებულია. ◻

როცა M სიმრავლე ემთხვევა X სივრცეს, მაშინ ლემა სამართლიანია X სივრცისათვის.

დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

შედეგი 6.2. 1. სრული მეტრული X სივრცის M სიმრავლის კომპაქტურობისათვის საკმარისია, რომ არსებობდეს კომპაქტური $\varepsilon -$ ქსელი. ამ შემთხვევაში კომპაქტური $\varepsilon -$ ქსელი იქნება M სიმრავლის სასრული 2 $\varepsilon -$ ქსელი.

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ, A$\subset X$ არის M სიმრავლის კომპაქტური $\varepsilon -$ ქსელი. მაშინ ლემა 6.2.3 ძალით A სიმრავლისათვის არსებობს სასრული $\varepsilon -$ ქსელი A_1. A_1 სიმრავლე წარმოადგენს M სიმრავლისათვის 2 $\varepsilon -$ ქსელს.

მართლაც, ვთქვათ, $x\epsilon M$ ნებისმიერი ელემენტია.მისთვის არსებობს ისეთი $a\epsilon A$ ელემენტი, რომ $\rho(x, a) < \varepsilon$. მაგრამ $a\epsilon A$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $a_1\epsilon A_1$ ელემენტი, რომ $\rho(a, a_1) < \varepsilon$. $x \in M, a \in A$ და $a_1 \in A_1$ ელემენტებისათვის გვექნება

$$\rho(x, a_1) \leq \rho(x, a) + \rho(a, a_1) < 2\varepsilon$$

ეს ნიშნავს, რომ როცა M სიმრავლისათვის არსებობს კომპაქტური $\varepsilon -$ ქსელი. მაშინ ამ სიმრავლისათვის არსებობს აგრეთვე სასრული $2\ \varepsilon -$ ქსელიც. ◻

შედეგი 6.2. 2. ყოველი კომპაქტური მეტრიკული X სივრცე სეპარაბელურია.

დამტკიცება. ამის დასამტკიცებლად, განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\varepsilon_n\}$ მიმდევრობა. X სივრცეში ავაგოთ სასრული ε_n-ქსელები. მივიღებთ $A_n \subset X$ სიმრავლეების $\{A_n\}$ მიმდევრობას, რომლის ყოველი A_n სიმრავლე შეიცავს ელემენტების სასრულ რიცხვს: $A_n = \left(a^{(n)}{}_1, \dots, a^{(n)}{}_p\right)$, სადაც p სასრული ნატურალური რიცხვია. განვიხილოთ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ჯამი, რომელიც თვლადი სიმრავლეა. ცხადია, ეს ჯამი ყველგან მკვრივია X სიმრავლეში, ე.ი. X სივრცე სეპარაბელურია.

მაგალითი 6.2.1 ბოლცანოს თეორემის ძალით, ნამდვილ რიცხვთა R_1 სივრცეში ყოველი შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი M სიმრავლე კომპაქტური სიმრავლეა.

მაგალითი 6.2.2. ნამდვილ რიცხვთა R_1 სივრცე არ არის კომპაქტური. მართლაც, ავიღოთ ამ სივრცეში ყველა ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა. ცხადია, არც თვითონ ეს მიმდევრობა და არც რაიმე მისი ქვემიმდევრობა არ არის კრებადი.

მაგალითი 6.2. 3. ევკლიდეს n-განზომილებიანი R_n სივრცე არ არის კომპაქტური. R_n სივრცის ყოველი შემოსაზღვრული M სიმრავლე კომპაქტურია. მართლაც, R_n სივრცეში შეგვიძლია ავიღოთ იმდენად დიდი კუბი K, რომელიც M სიმრავლეს მთლიანად შეიცავს. ამის შემდეგ, კუბი K დავანაწილოთ ისეთ მცირე კუბებად, რომ მათი წიბოების სიგრძე იყოს $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$,

სადაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. ადვილი შესამჩნევია, რომ მცირე კუბების წვეროების ω სიმრავლე სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$- ქსელია K კუბისათვის, ამიტომ ω იქნება სასრული $\frac{\varepsilon}{2}$- ქსელი $M \subset K$ სიმრავლისთვისაც.

მაგალითი 6.2.4. ჰილბერტის კოორდინატული სივრცე l_2 არ არის კომპაქტური. შევნიშნოთ, რომ ამ სივრცეში არსებობს შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც არ არის კომპაქტური. მაგალითად, ავიღოთ l_2 სივრცეში ერთეულოვანი ჩაკეტილი $\overline{S_1}$ სფერო. ამ სფეროს ზედაპირზე ავიღოთ ელემენტების შემდეგი უსასრულო მიმდევრობა: $x_1 = (1,0,0,\dots)$, $x_2 = (0,1,0,\dots)$ ...ამ მიმდევრობის ნებისმიერ x_i და x_j ($i \neq j$) ელემენტებს შორის მანძილი მუდმივია და უდრის $\sqrt{2}$. ცხადია, არც $\{x_n\}$ მიმდევრობა და არც მისი რაიმე ქვემიმდევრობა არ არის კრებადი. ასე, რომ $\bar{S}$ სფერო არ არის კომპაქტური. მიუხედავად ამისა, l_2 სივრცე შეიცავს კომპაქტურ სიმრავლეებსაც. მართლაც, ვთქვათ, $\Omega \subset l_2$ რაიმე სიმრავლეა $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ ელემენტებისა, სადაც $|\omega_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, n=1,2,… ასეთი ω ელემენტების Ω სიმრავლეს l_2 სივრცის ფუნდამენტალური პარალელეპიპედი ეწოდება და აღინიშნება $\mathfrak{Q}$ სიმბოლოთი.

შედეგი 6.2.2. ფუნდამენტალური $\mathfrak{Q}$ პარალელეპიპედი კომპაქტური სიმრავლეა.

დამტკიცება. დასამტკიცებლად ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. შევარჩიოთ ნატურალური N რიცხვი შემდეგი უტოლობით: $\frac{1}{2^N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. განვიხილოთ ისეთი $A \subset \Omega$ სიმრავლე $\omega^* \epsilon \Omega$ ელემენტებისა, რომლებსაც აქვთ შემდეგი სახე: $\omega^*=(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N,} 0,0,\dots)$. ვინაიდან N ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია, ამიტომ A სიმრავლე არის N განზომილებიანი სივრცის შემოსაზღვრული სიმრავლე. განვიხილოთ ნებისმიერი $\omega \epsilon \Omega$ ელემენტი. მანძილი ω და ω^* ელემენტებს შორის იქნება:

$$\rho(\omega, \omega^*) = \{\textstyle\sum_{k=N+1}^{\infty} {\omega^2}_k\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k-2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} + \cdots\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\left\{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots\right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\varepsilon}$$

A სიმრავლე კომპაქტია. ავღნიშნოთ A სიმრავლის სასრული $\sqrt{\varepsilon}$-ქსელი A_1-ით. მაშინ ნებისმიერი $\omega \epsilon \mathfrak{Q}$ ელემენტისათვის შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho(\omega,\omega^*) \leq \rho(\omega^*,\omega) + \rho(\omega^*,\omega_1),$$

სადაც $\omega_1 \epsilon A_1$ არის $\sqrt{\varepsilon}$-ქსელის ის წერტილი, რომლისთვისაც $\rho(\omega^*,\omega_1) \leq \sqrt{\varepsilon}.$ თუ ახლა ზემოთ გამოყვანილი უტოლობით ვისარგებლებთ, მივიღებთ: $\rho(\omega,\omega_1) \leq 2\sqrt{\varepsilon}.$ ამრიგად, A სიმრავლის სასრული $\sqrt{\varepsilon}$-ქსელი A_1, იმავე დროს, არის $\mathfrak{L}$ სიმრავლის სასრული $2\sqrt{\varepsilon}$-ქსელი. ამის გამო, $\mathfrak{L}$ ფუნდამენტალური პარალელეპიპედი კომპაქტური სიმრავლეა. ◻

ზემოთ ვნახეთ, რომ კომპაქტურობა სიმრავლის ელემენტების შინაგანი თვისებაა და არ არის დამოკიდებული მეტრული სივრცის თვისებებზე, რომელსაც ეს სიმრავლე ეკუთვნის. ამის გამო ყოველი კომპაქტი თავისთავად მეტრული სივრცეა და მისი თვისებები შეგვიძლია სხვა სივრცისაგან დამოუკიდებლად შევისწავლოთ. ქვემოთ ჩვენ შევჩერდებით კომპაქტის ზოგიერთი ასეთი თვისების განხილვაზე.

ლემა 6.2.6. ვთქვათ, M სიმრავლე კომპაქტურია მეტრულ X სივრცეში. იმისათვის, რომ M სიმრავლე იყოს კომპაქტი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ M იყოს ჩაკეტილი.

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ M სიმრავლე კომპაქტია, მაგრამ არ არის ჩაკეტილი. ავიღოთ ისეთი $\{x_n\} \subset$ M მიმდევრობა, რომელიც კრებადია $x^* \epsilon$ M ელემენტისაკენ.ცხადია, შეუძლებელია $\{x_n\}$ მიმდევრობა ისეთ ქვემიმდევრობას შეიცავდეს, რომელიც M სიმრავლის რაიმე ელემენტისაკენ იქნება კრებადი. ეს იმას ნიშნავს, რომ M სიმრავლე არ არის კომპაქტი. ამით აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, M კომპაქტურია X სივრცეში და ჩაკეტილია. ვაჩვენოთ, რომ M კომპაქტია. ავიღოთ ნებისმიერი $\{x_n\} \subset$ M მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა შეიცავს კრებად $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობას. ვთქვათ, ამ ქვემიმდევრობის ზღვარითი ელემენტია $x^* \epsilon$ X. ვინაიდან M სიმრავლე ჩაკეტილია, ამიტომ $x^* \epsilon$ M. ეს იმას ნიშნავს, რომ M კომპაქტია და თეორემა დამტკიცებულია. ◻

იმავე გზით, რომლითაც დამტკიცებული იყო ჰაუსდორფის, მტკიცდება შემდეგი

დებულება 6.2.1. იმისათვის, რომ მეტრული M სიმრავლე კომპაქტი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ M იყოს სრული და სრულად შემოსაზღვრული სიმრავლე.

ლემა 6.2.4. იმისათვის, რომ მეტრული X სივრცე კომპაქტი იყოს აუცილებელი და საკმარისია, რომ მისი ყოველი ღია $\{M\alpha\}$ დაფარვა შეიცავდეს სასრულ ქვედაფარვას.

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად ჩავთვალოთ, რომ მეტრული X სივრცე კომპაქტია და $\{M\alpha\}$ არის მისი რაიმე ღია დაფარვა. დავუშვათ, რომ შეუძლებელია $\{M\alpha\}$ დაფარვა შეიცავდეს X სივრცის სასრულ ქვედაფარვას. ვინაიდან X კომპაქტია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს მასში სასრული $\varepsilon -$ ქსელი . შევარჩიოთ ε რიცხვი ასე: $\varepsilon = \frac{1}{n}$, სადაც n=1,2,… მაშინ ყოველი n რიცხვისათვის გვექნება სათანადო $\varepsilon = \frac{1}{n}$-ქსელი, რომლის ელემენტები იყოს $x^{(n)}{}_k$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი დასახელებული n რიცხვისათვის გვექნება შესაბამისი $\varepsilon -$ ქსელის $x^{(n)}{}_1, \dots, x^{(n)}{}_k$ წერტილები. ქსელის ყოველი წერტილის გარშემო ავაგოთ ღია S($x^{(n)}{}_k; \frac{1}{n}$) სფერო და შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი n-სათვის ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$X=\bigcup_{k_n} S(x^{(n)}{}_k; \tfrac{1}{n}) .$$

ჩვენი დაშვების ძალით, ყოველი n რიცხვისათვის არსებობს ერთი მაინც S($x^{(n)}{}_k; \frac{1}{n}$) სფერო, რომლის დაფარვა შეუძლებელი იქნება $M\alpha$ სიმრავლეთა სასრული რაოდენობით. განვიხილოთ ასეთ სფეროთა ცენტრების $x^{(n)}{}_{k_n} \subset X$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა, რომელიც სიმარტივისათვის ისევ $\{x^{(n)}{}_{k_n}\}$-ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ, ამ ქვემიმდევრობის ზღვარითი ელემენტი არის $x^* \epsilon$ X, რომელიც ეკუთვნის $\{M\alpha\}$ დაფარვის რომელიმე ღია $\{M_{\alpha^*}\}$ სიმრავლეს. ცხადია, არსებობს x^* ელემენტის ისეთი სფერული S($x^*; \varepsilon$) მიდამო, რომ S($x^*; \varepsilon$)$\subset M_{\alpha^*}$. ახლა, თუ n ნიშნაკს იმდენად დიდს ავირჩევთ, რომ $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$, მაშინ S($x^{(n)}{}_{k_n}, \varepsilon$) $\subset M_{\alpha^*}$. ეს იმას ნიშნავს, რომ მარტო ერთი M_{α^*}

სიმრავლე ფარავს S($x^{(n)}{}_{k_n}, \frac{1}{n}$) სფეროს. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს პირობის აუცილებლობას.

გადავიდეთ პირობის საკმარისობის დამტკიცებაზე. ახლა უნდა ვიგულისხმოთ, რომ მეტრული X სივრცის ყოველი ღია $\{M\alpha\}$ დაფარვიდან შესაძლოა გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა. ამისათვის სივრცის ყოველი x წერტილის ირგვლივ ავიღოთ ღია სფერული $M_\varepsilon(x)$ მიდამო, სადაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. ყველა $M_\varepsilon(x)$ მიდამო განახორციელებს X სივრცის ღია დაფარვას. პირობის თანახმად, X სივრცე შეიცავს ისეთ ელემენტთა სასრულ $x_1, \dots, x_k$ მიმდევრობას, რომ $M_\varepsilon(x_1), \dots, M_\varepsilon(x_k)$ ღია მიდამოები იქნება აგრეთვე მისი დაფარვა, $x_1, \dots, x_k$ ელემენტები წარმოადგენს სასრულ $\varepsilon -$ ქსელს X სივრცეში. ეს იმას ნიშნავს, რომ X სივრცე სრულად შემოსაზღვრულია.

დავამტკიცოთ ახლა, რომ X სივრცე სრულია. ამისათვის საკმარისია ვუჩვენოთ, რომ ამ სივრცეში ყოველი ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილი სფეროების უსასრულო მიმდევრობის თანაკვეთა ერთადერთი წერტილისაგან შედგება, თუ ამ სფეროების რადიუსების მიმდევრობა ნულისაკენ იკრიბება. ავღნიშნოთ ასეთი სფეროების ერთ-ერთი მიმდევრობა $\{\bar{s}_n\}$-ით. დავუშვათ, რომ მათი თანაკვეთა ცარიელია. მაშინ , ნებისმიერი x ϵ X ელემენტი უნდა ეკუთვნოდეს X\ $\bar{s}_n$ სიმრავლეს,რაც იმას ნიშნავს, რომ X\ $\bar{s}_n$ წარმოადგენს X სივრცის დაფარვას და შეუძლებელია მისგან რაიმე სასრული ქვედაფარვის გამოყოფა. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას. ამრიგად X სივრცე სრულია.

ის ფაქტი, რომ X სივრცე სრულია და სრულად შემოსაზღვრული საკმარისია იმისათვის, რომ იგი იყოს კომპაქტი. □

შენიშვნა 6.2.2. ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე შემდეგი დებულება: იმისათვის, რომ მეტრული X სივრცე კომპაქტი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ სივრცის ყოველი ცენტრირებული ჩაკეტილი სიმრავლეების მიმდევრობას ჰქონდეს არაცარიელი თანაკვეთა.

ლემა 6.2.5. კომპაქტის ყოველი უწყვეტი გადასახვა კომპაქტია, თუ ეს გადასახვა უწყვეტად შებრუნებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, U უწყვეტი გადასახვაა, რომელიც X კომპაქტს გადასახავს მეტრული სივრცის Y=U (X) სიმრავლეში. ავღნიშნოთ U^{-1}-ით შებრუნებული უწყვეტი გადასახვა. განვიხილოთ Y სიმრავლის რაიმე ღია $\{N\alpha\}$ დაფარვა. შემოვიღოთ აგრეთვე აღნიშვნა $\{M\alpha\}=U^{-1}\{N\alpha\}$ და განვიხილოთ სიმრავლეთა $\{M\alpha\}$ სისტემა. როგორც ვიცით, უწყვეტი U^{-1} გადასახვისას ღია $\{N\alpha\}$ სიმრავლის $\{M\alpha\}$ სახე არის ღია სიმრავლე. ამის გამო, სიმრავლეთა $\{M\alpha\}$ სისტემა წარმოადგენს X კომპაქტის ღია დაფარვას. ლემა 6.2.5-ის ძალით, ღია $\{M\alpha\}$ დაფარვიდან შესაძლოა გამოვყოთ სასრული $M_1, \dots, M_k$ ქვედაფარვა. ამ დაფარვას შეესაბამება Y სიმრავლის $N_1, \dots, N_k$ სასრული ქვედაფარვა, სადაც $\{N_i : 1 \le i \le k\} = \{U(M_i) : 1 \le i \le k\}$. ამის გამო Y სიმრავლე იქნება კომპაქტი. $\square$

ლემა 6.2.6. თუ U და U^{-1} გადასახვები განახორციელებენ X და Y კომპაქტების ურთიერთცალსახა გადასახვას შესაბამისად და, თუ X კომპაქტის Y კომპაქტზე გადამსახველი U გადასახვა უწყვეტია X სივრცეზე, მაშინ X და Y ურთიერთჰომეომორფული სივრცეები იქნება.

დამტკიცება. მართლაც, როგორიც უნდა იყოს ჩაკეტილი $M \subset X$ სიმრავლე, წინა თეორემის ძალით, $N=U(M) \subset Y$ სიმრავლე კომპაქტი იქნება. ამის გამო, N ჩაკეტილი სიმრავლეა. ამასთანავე გვაქვს $U^{-1}(N)=M$, ე.ი. ნებისმიერი ჩაკეტილი M სიმრავლის პირველსახე ჩაკეტილი სიმრავლეა. ეს იმას ნიშნავს, რომ U^{-1} უწყვეტია. ამრიგად U და U^{-1} ოპერატორები განახორციელებენ, შესაბამისად, X და Y სივრცეების ურთიერთცალსახა და უწყვეტ გადასახვას. ამიტომ X და Y ურთიერთჰომეომორფული სივრცეებია. $\square$

დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიაში, ვარიაციათა აღრიცხვაში და მათემატიკური ანალიზის სხვა დარგებში ფართო გამოყენება აქვს ისეთ კომპაქტურ სიმრავლეებს, რომელთა ელემენტები გარკვეული კლასის ფუნქციებია. ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ სიმრავლის კომპაქტურობის პირობებს კერძო სახის ზოგიერთ სივრცეში. პირველ ყოვლისა, შევჩერდეთ ამ პირობების შესწავლაზე უწყვეტ ფუნქციათა C[0,1] სივრცეში. წინასწარ შემოვიღოთ რამდენიმე განსაზღვრა.

განვიხილოთ უწყვეტ ფუნქციათა უსასრულო M ⊂ C[0,1] სიმრავლე, რომლის ელემენტები აღვნიშნოთ x(t)ϵM, 0≤ t ≤ 1. ვიტყვით, რომ ფუნქციათა M სიმრავლე ერთობლივ შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს ისეთი დადებითი μ რიცხვი, რომ ნებისმიერი x(t)ϵM ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|x(t)\epsilon M| \le \mu,\ 0\le t \le 1.$$

M სიმრავლეს ეწოდება ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ რიცხვი, რომ როგორიც უნდა იყოს $t_1, t_2 \epsilon [0,1]$, თუ $|t_1 - t_2| < \delta$, ნებისმიერი x(t)ϵM ელემენტისათვის შესრულდება უტოლობა

$$|\, x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

ლემა 6.2.6. (არცელა). იმისათვის, რომ M ⊂ C[0,1] სიმრავლე კომპაქტური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ x(t)ϵM ფუნქციები ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტი იყოს.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ჯერ პირობების აუცილებლობა. ვთქვათ, M კომპაქტური სიმრავლეა C[0,1] სივრცეში. ჰაუსდორფის თეორემის თანახმად, C[0,1] სივრცეში არსებობს უწყვეტ ფუნქციათა სასრული $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ მიმდევრობა, რომელიც M სიმრავლისათვის წარმოადგენს $\frac{\varepsilon}{3}$−ქსელს. აღვნიშნოთ $\mu = sup\,\max_{0\le t\le 1}|x_i(t)|$, i=1,…,n ნებისმიერი x(t)ϵM ფუნქციისათვის არსებობს $\frac{\varepsilon}{3}$−ქსელის ერთი მაინც ისეთი $x_i(t)\epsilon$ C[0,1] ელემენტი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\rho(x, x_i) = \max_{0\le t\le 1}|x(t) - x_i(t)| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

ახლა ნებისმიერი x(t) ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი შეფასება:

$$|x(t)| \le |x_i(t)| + |x(t) - x_i(t)| \le \mu + \frac{\varepsilon}{3} = \mu_1.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ M ერთობლივ შემოსაზღვრული სიმრავლეა.

შევნიშნოთ, რომ $\frac{\varepsilon}{3}$- ქსელის ელემენტები $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ერთობლივ უწყვეტიც არიან [0,1] სეგმენტზე. ამის გამო ყოველი $x_k(t)$ ფუნქციისათვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი δ_k რიცხვი, რომ ყოველი

$t_1, t_2 \epsilon[0,1]$ წყვილისათვის, როცა $|t_2 - t_1| < \delta_k$, შესრულებული იყოს უტოლობა

$$|x_k(t_1) - x_k(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

ვთქვათ, $\delta = min\delta_k$, k=1,2,…,n. ახლა ნებისმიერი x(t)ϵM ფუნქციისათვის, რომლის მანძილი ქსელის $x_i(t)$ ფუნქციამდე $\frac{\varepsilon}{3}$-ზე ნაკლებია, როცა $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \epsilon[0,1]$. გვექნება

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| + |x_i(t_2) - x(t_2)| \leq$$
$$2\max_{0\leq t\leq 1}|x(t) - x_i(t)| + |x_i(t_1) + x(t_2)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ M ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლეა. ამით პირობების აუცილებლობა დამტკიცებულია.

გადავიდეთ თეორემის პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე.

ვთქვათ, ფუნქციათა M სიმრავლე [0,1] სეგმენტზე ერთობლივ შემოსაზღვრულ და ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციებისაგან შედგება. დავამტკიცოთ, რომ ამ პირობებში M სიმრავლისათვის C[0,1] სივრცეში არსებობს სასრული $\varepsilon -$ქსელი. პირობის თანახმად, ყველა t $\epsilon[0,1]$ მნიშვნელობისათვის და ყველა x(t)ϵM ფუნქციისათვის გვაქვს $|\mathrm{x(t)}| \leq \mu$. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. დავყოთ $[0,1]$ მონაკვეთი n თანატოლ ნაწილად. დაყოფის წერტილები იყოს: 0, $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n$. თუ n რიცხვს საკმარისად დიდს ავიღებთ, მაშინ ნებისმიერი x(t)ϵM ფუნქციისათვის შეგვიძლია დავაკმაყოფილოთ უტოლობა:

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq \varepsilon, \text{როცა } |t_2 - t_1| < \frac{1}{n} \text{ და } t_1, t_2 \epsilon[\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] \qquad (6.2.1)$$

ახლა ყოველი x(t)ϵM ფუნქციისათვის $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ სეგმენტზე ავაგოთ ისეთი წრფივი $x_n(t)$ ფუნქცია, რომ $x_n\left(\frac{i}{n}\right) = x(\frac{i}{n})$ (i=0,1,…,n). $x_n = x_n(t)$ განტოლება წარმოადგენს n გვერდიან პოლიგონს, რომელიც ჩახაზულია x=x(t) წირში. $x_n(t)$ ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ M_n −ით და ვუჩვენოთ, რომ M_n ქმნის $\varepsilon -$ქსელს M სიმრავლეში. მართლაც, ყველა t $\epsilon[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ მნიშვნელობისათვის გვექნება:

$$x_n\left(\frac{i}{n}\right) = x\left(\frac{i}{n}\right) \leq x_n(t) \leq x_n\left(\frac{i+1}{n}\right) = x\left(\frac{i+1}{n}\right) \text{ ე.ი.}$$

$$\left|x(t)-x\left(\frac{i}{n}\right)\right| \le |x(t)-x_n(t)| \le \left|x(t)-x\left(\frac{i+1}{n}\right)\right|;$$

აქედან კი, (6.2.1) უტოლობის ძალით, მივიღებთ

$$|x(t)-x_n(t)| \le \varepsilon,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ M_n არის M სიმრავლისათვის $\varepsilon-$ქსელი C[0,1] სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ M_n არის შემოსაზღვრული სიმრავლე n+1 განზომილებიან სივრცეში. ამის გამო M_n კომპაქტური სიმრავლეა. ეს კი საკმარისია იმისათვის, რომ M იყოს კომპაქტური სიმრავლე. ◻

განვიხილოთ X და X_1 კომპაქტები. აღვნიშნოთ C_u სიმბოლოთი სიმრავლე ყველა უწყვეტი U=U(x) ოპერატორისა, რომელიც X კომპაქტს გადასახავს X_1 კომპაქტზე, სადაც $x\epsilon X$, $Ux\epsilon X_1$. შემოვიღოთ C_u სიმრავლეში მანძილის ცნება შემდეგნაირად: თუ $U_1 = U_1(x)$ და $U_2 = U_2(x)$ სადაც $x\epsilon X$ U_1, $U_2 \epsilon X_1$ არის C_u სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტი, მაშინ მათ შორის მანძილი იყოს

$$\rho(U_1,U_2) = \sup_{x\in X} \rho(U_1(x),U_2(x))$$

ამ ტოლობით განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას.

U=U(x) ოპერატორს, რომელიც X კომპაქტს გადასახავს X_1 კომპაქტზე, ვუწოდოთ თანაბრად უწყვეტი ოპერატორი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ელემენტების ნებისმიერი $x_1,x_2\epsilon X$ წყვილისათვის, როცა $\rho(x_1,x_2) < \delta$, შესრულდება უტოლობა $\rho(U_1(x), U_2(x)) < \varepsilon$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ყოველი უწყვეტი ოპერატორი, რომელიც კომპაქტს გადასახავს კომპაქტზე, იმავე დროს თანაბრად უწყვეტი ოპერატორია.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. ვთქვათ, რომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შეუძლებელია მოიძებნოს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $x_1,x_2\epsilon X$ ელემენტების ყველა წყვილისათვის, როცა $\rho(x_1,x_2) < \delta$, შესრულდეს უტოლობა $\rho(U_1(x), U_2(x)) < \varepsilon$ სხვანაირად, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, მოიძებნება ისეთი ორი $x_1,x_2\epsilon X$ ელემენტი, რომ

$\rho(x_1,x_2) < \delta$, მაგრამ ρ($U_1(x)$, $U_2(x)$)≥ ε. ავიღოთ ახლა $\delta_n > 0$ რიცხვების $\{\delta_n\}$ მიმდევრობა, რომ $\lim_{n\to\infty} \delta_n$=0. ყოველი δ_n რიცხვისათვის არსებობს წყვილი ისეთი $x_n, x_n^{'} \in X$ ელემენტებისა, რომ $\rho(x_n,x'_n) < \delta$, მაგრამ $\rho(U(x_n),U(x'_n)) \geq \varepsilon$. განვიხილოთ $\{x_n\}$, $\{x'_n\} \subset X$ მიმდევრობები. ვინაიდან X სივრცე კომპაქტია, ამიტომ $\{x_n\}$ მიმდევრობიდან შეიძლება კრებადი ქვემიმდევრობა გამოვყოთ, რომელიც ისევ $\{x_n\}$-ით აღვნიშნოთ. ვთქვათ, $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x^*) = 0$. ახლა გავიხსენოთ, რომ U ოპერატორი უწყვეტია X სივრცეში და, მაშასადამე, უწყვეტია x^* წერტილზეც. ამის გამო, ადგილი უნდა ჰქონდეს $\lim_{n\to\infty} \rho(U(x_n),U(x^*)) = 0$ და $\lim_{n\to\infty} \rho(U(x'_n),U(x^*)) = 0$ ტოლობებს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას იმის შესახებ, რომ $\rho\big(U(x_n),U(x'_n)\big) \geq \varepsilon$. ამით ჩვენი წინადადება დამტკიცებულია.

განვიხილოთ C_u სიმრავლის ისეთი M ქვესიმრავლე, რომელსაც შემდეგი თვისება ექნება: როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $\rho(x_1,x_2) < \delta$, მაშინ შესრულდება

$$\rho(\, U_1(x)\,,\ U_2(x)) < \varepsilon$$

უტოლობა ყველა $U \epsilon M$ ელემენტისათვის და ყველა $x_1,x_2 \epsilon X$ წყვილისათვის. ამ პირობებში ოპერატორთა M სიმრავლეს ეწოდება ერთობლივ უწყვეტი ოპერატორების ოჯახი.

ლემა 6.2.7. იმისათვის, რომ $M \subset C_u$ სიმრავლე კომპაქტური იყოს C_u სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ M იყოს ერთობლივ უწყვეტი ოპერატორების ოჯახი.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა, რისთვისაც დავუშვათ, რომ M კომპაქტური სიმრავლეა C_u სივრცეში. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. არსებობს ელემენტების სასრული $U_1,\dots,U_n \epsilon M$ მიმდევრობა, რომელიც $\frac{\varepsilon}{3}$ ქსელია M ოჯახისათვის. პირობის თანახმად, ყოველი $U_i(i = 1,2,\dots,n)$ უწყვეტი ოპერატორია და, ზემოთ დამტკიცებული წინადადების ძალით, იგი თანაბრად უწყვეტიც იქნება. ამის გამო $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ელემენტების ყოველი

$x_1, x_2 \epsilon X$ წყვილისათვის, როცა $\rho(x_1, x_2) < \delta$, შესრულდება უტოლობა $\rho(U_i(x_1), U_i(x_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$. ამასთანავე, ნებისმიერი $U \epsilon M$ ელემენტისათვის არსებობს ქსელის ერთი მაინც ისეთი U_i ელემენტი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას $\rho(U, U_i) > \frac{\varepsilon}{3}$. როცა $\rho(x_1, x_2) < \delta$, ვღებულობთ

$$\rho(U_1(x_1), U_2(x_2)) \leq \rho(U_1(x_1), U_i(x_1)) + \rho(U_i(x_1), U_i(x_2)) + \rho(U_i(x_2), U_i(x_2)) < \varepsilon$$

ე.ი. U ოპერატორების M სიმრავლე ერთობლივ უწყვეტი ოჯახია.

დავამტკიცოთ ახლა პირობის საკმარისობა. ამისათვის უნდა ვიგულისხმოთ, რომ M არის ოპერატორების ერთობლივ უწყვეტი ოჯახი. საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ M კომპაქტურია C_u სივრცეში.

განვიხილოთ X კომპაქტის ყველა გადასახვის Ω სიმრავლე X_1 კომპაქტზე. ცხადია $M \subset C_u \subset \mathfrak{L}$. მეტრიკა $\mathfrak{L}$ სიმრავლეში შემოვიღოთ იმავე წესით, როგორც C_u სივრცეში, ე.ი. თუ $V_1(x), V_2(x) \epsilon\ \Omega$ ორი ნებისმიერი ოპერატორია, რომლებიც X კომპაქტს გადასახავს X_1 კომპაქტზე. მაშინ

$$\rho(V_1, V_2) = \sup_{x \in X} \rho(V_1(x), V_2(x)).$$

ავიღოთ X კომპაქტის X_1 კომპაქტზე უწყვეტ გადასახვათა თანაბრად კრებადი $\{U_k(x)\} \subset C_u$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის U^*(x) ზღვარი ისევ უწყვეტი ოპერატორია და X კომპაქტს გადასახავს X_1 კომპაქტზე. ამის გამო U^*(x). ეს იმას ნიშნავს, რომ C_u არის ჩაკეტილი სიმრავლე Ω სიმრავლეში. ამრიგად, თუ დავამტკიცეთ, რომ M სიმრავლე კომპაქტურია Ω სივრცეში, მაშინ M კომპაქტური იქნება ჩაკეტილ C_u სიმრავლეშიც. ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_n \epsilon X$ არის X კომპაქტის $\frac{\delta}{2}$-ქსელი; წარმოვადგინოთ X სიმრავლე ისეთი ω_i (i=1,2,…,n) სიმრავლეების ჯამის სახით. რომელთა თანაკვეთა ცარიელია და ნებისმიერი $\overline{x_1}, \overline{x_2} \epsilon \omega_i$ ელემენტებისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\rho(\overline{x_1}, \overline{x_2}) < \delta$. ასეთი წარმოდგენა X სიმრავლისა შესაძლოა, თუ, მაგალითად, ω_i სიმრავლეების როლში ავიღებთ შემდეგი სახის სიმრავლეებს:

$$\omega_i = S(x_i; \delta) \setminus \cup_{k<i} S(x_k; \delta),$$

სადაც ყოველი S(x_ν; δ) აღნიშნავს ღია სფეროს x_ν ცენტრით და δ რადიუსით. აღვნიშნოთ $U_1, U_2, \ldots, U_m$ −ით X_1 კომპაქტის რაიმე ε − ქსელი . ვთქვათ, ${c^{(i)}}_u$

არის ყველა იმ ოპერატორთა სიმრავლე, რომელთა მნიშვნელობა ω_i სიმრავლეზე მოგვცემს U_i ელემენტს. ასეთ ოპერატორთა რიცხვი სასრულია. ვთქვათ, $U \epsilon M$ ნებისმიერი ელემენტია. ყოველი $x_i \epsilon \{x_k\}\, k = 1, \dots, n$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $U_j \epsilon \{U_j\}$(j=1,…m) ელემენტი, რომ $\rho(U(x_i), U_j) < \varepsilon$. შევარჩიოთ $\mathrm{V} \epsilon c^{(i)}{}_u$ ელემენტი ისე, რომ $\mathrm{V}(x_i) = U_j$, მაშინ, როცა $\mathrm{x} \epsilon \omega_i$, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\rho\big(U(x), V(x)\big) \leq \rho(U(x), U(x_i),) + \rho\big(U(x_i), \mathrm{V}(x_i)\big) + \rho\big(V(x), \mathrm{V}(x_i)\big) < 2\varepsilon.$$

უკანასკნელი *უტოლობა გვიჩვენებს, რომ* $c^{(i)}{}_u$ სიმრავლე წარმოადგენს M სიმრავლის სასრულ 2ε-ქსელს Ω სივრცეში. ამრიგად, M კომპაქტურია და ლემა დამტკიცებულია. ◻

შევისწავლოთ ევკლიდის ორგანზომილებიანი Q სიბრტყის(როგორც ფრეშეს სივრცის) სასრულ არეში მდებარე ყველა წირის სიმრავლის კომპაქტურობის პირობა.

ლემა 6.2.8 (ჰილბერტი). ყველა იმ წრფევად წირთა $M \subset \mathrm{Q}$ სიმრავლე, რომლებიც სიბრტყის სასრულ ნაწილშია მოთავსებული და, რომელთა სიგრძეების სიმრავლე შემოსაზღვრულია, არის კომპაქტური სიმრავლე.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად M სიმრავლის ყოველი ელემენტი დავყოთ n თანატოლი სიგრძის რკალებად და დაყოფის წერტილები ქორდებით შევაერთოთ. მივიღებთ ტეხილების $\mathrm{Q}^{(\mathrm{n})}$ სიმრავლეს. ყოველ $\mathrm{q} \epsilon M$ წირს შეესაბამება თავისი $q_n \epsilon\, \mathrm{Q}^{(\mathrm{n})}$ ტეხილი. ვთქვათ, M სიმრავლის წირების სიგრძეთა სიმრავლე შემოსაზღვრულია K რიცხვით. ვთქვათ, $\mathrm{q} \epsilon M$ ნებისმიერი წირია და $q_n \epsilon\, \mathrm{Q}^{(\mathrm{n})}$ მისი შესაბამისი ტეხილი. ნებისმიერი რკალის და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძე არ აღემატება $\frac{K}{n}$ რიცხვს. ისიც ცხადია, რომ მანძილი q წირის ნებისმიერი რკალის წერტილებსა და ამ რკალის მიმჭიმავი ქორდის წერტილებს შორის არ აღემატება $\frac{2K}{n}$ რიცხვს. Q წირისა და მისი შესაბამი q_n ტეხილის განტოლებები ჩავწეროთ პარამეტრული სახით ისე, რომ q_n ტეხილის წვეროებს, რომლებიც q წირზე მდებარეობენ, შეესაბამებოდეს t პარამეტრის $\frac{i}{n}$ მნიშვნელობანი (i=1,2,…,n). q წირის და q_n ტეხილის პარამეტრული

განტოლებებიდან ისიც მოვითხოვოთ, რომ როცა პარამეტრი t გაირბენს $(\frac{i}{n},\frac{i+1}{n})$ ინტერვალის წერტილებს, მივიღებთ q წირის ერთ რკალს და მის მომჭიმავ ქორდას. მანძილი q წირის და q_n ტეხილის შესაბამ წერტილებს შორის აკმაყოფილებს $\rho(q,q_n)\leq\frac{2K}{n}$ უტოლობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ტეხილების $Q^{(n)}$ სიმრავლე წარმოადგენს M სიმრავლის $\frac{2K}{n}$- ქსელს. ყოველი q_n ცალსახად არის განსაზღვრული მისი წვეროების კოორდინატებით; ამ ტეხილის ყველა წვეროს კოორდინატების რიცხვი კი უდრის 2(n+1). ყველა ეს კოორდინატი თანაბრად შემოსაზღვრულია. ამის გამო $Q^{(n)}$ სიმრავლე კომპაქტურია. ჰაუსდორფის ლემის ძალით, ამ პირობებში M სიმრავლეც კომპაქტური იქნება. $\square$

დამტკიცებული ლემა სამართლიანია მაშინაც, როცა M სიმრავლე ეკუთვნის ევკლიდეს n-განზომილებიან $\mathbb{R}_n$ სივრცეს.

ვთქვათ, $x(t)\epsilon L_p[0,1]$. გავაგრძელოთ x(t) ფუნქცია [0,1] სეგმენტის გარეთ x(t)=0 ტოლობით, როცა $t\notin[0,1]$.

ლემა 6.2.8. ფუნქცია
$$x_\mu(t)=\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}x_{(s)}ds \qquad (6.2.2)$$
ეკუთვნის $L_p[0,1]$ სივრცეს.

($x_\mu(t)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს (6.2.2) ტოლობით, სტეკლოვის ფუნქციას უწოდებენ).

დამტკიცება. პირველ ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $x(t)\,\epsilon L_p[0,1]$, ამიტომ $x(t)\,\epsilon L_1[0,1]$ და , როცა $s\,\epsilon\,[t-\mu,t+\mu]$, მაშინ $x(s)\,\epsilon L_1[t-\mu,t+\mu]$,

ე.ი.
$$\int_0^1|x(t)\,|\,dt<+\infty \text{ და } \int_{t-\mu}^{t+\mu}|x(s)|ds<+\infty,$$
ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ მართებულია უტოლობა:
$$\int_0^1|x_\mu(t)\,|^p\,dt\leq\int_0^1|x(t)\,|^p\,dt\,. \qquad (6.2.3)$$
(6.2.2) ტოლობიდან გვექნება
$$|x_\mu(t)\,|^p=\frac{1}{(2\mu)^p}\left|\int_{t-\mu}^{t+\mu}1.x(s)ds\right|^p. \qquad (6.2.4)$$

ვისარგებლებთ იმით, რომ $1\in L_q(t-\mu,t+\mu)$ და $x(s)\in L_p(t-\mu,t+\mu)$ და გარდავქმნათ ახლა ინტეგრალი ჰელდერის უტოლობით, მივიღებთ

$$\left|\int_{t-\mu}^{t+\mu} 1.x(s)ds\right| \le \left(\int_{t-\mu}^{t+\mu} ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-\mu}^{t+\mu}|x(s)\,|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = (2\mu)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t-\mu}^{t+\mu}|x(s)\,|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(6.2.4) ტოლობიდან გვექნება:

$$\left|x_\mu(t)\,\right|^p \le \frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}|x(s)\,|^p ds.$$

გარდავქმნათ მარჯვენა ნაწილში საინტეგრო ცვლადი $s=t+\xi$ ტოლობით, მივიღებთ:

$$\left|x_\mu(t)\,\right|^p \le \frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}|x(t+\xi)|^p d\xi = \frac{1}{2\mu}\int_0^1\left[\int_{-\mu}^{\mu}|x(t+\xi)|^p\,d\xi\right]dt = \frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\int_0^1|x(t+\xi)|^p dt\right]d\xi. \quad (6.2.5)$$

ახლა თუ ავიღებთ $\eta = t+\xi$ ჩასმას, გვექნება

$$\int_0^1|x(t+\xi)|^p dt = \int_\xi^{1+\xi}|x(\eta)|^p d\eta,$$

და ვინაიდან $x(\eta)$ ფუნქცია $[1,1+\xi]$ სეგმენტზე ნულის ტოლია, ამიტომ

$$\int_\xi^{1+\xi}|x(\eta)|^p d\eta = \int_\xi^1|x(\eta)|^p d\eta\,,$$

ე.ი.

$$\int_0^1|x(t+\xi)|^p d\xi = \int_\xi^1|x(\eta)|^p d\eta.$$

მაგრამ

$$\int_\xi^{1+\xi}|x(\eta)|^p d\eta \le \int_0^1|x(\eta)|^p d\eta\,.$$

ამრიგად,

$$\int_0^1|x(t+\xi)|^p d\xi \le \int_0^1|x(\eta)|^p d\eta,$$

ამ შეფასების გამოყენებით (4.4) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\left|x_\mu(t)\,\right|^p \le \frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}\left[\int_0^1|x(\eta)|^p d\eta\right]d\xi = \int_0^1|x(\eta)|^p d\eta.$$

თუ ვაინტეგრებთ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს t ცვლადით $[0,1]$ სეგმენტზე, გვექნება

$$\int_0^1\left|x_\mu(t)\,\right|^p dt \le \int_0^1|x(\eta)|^p d\eta = \int_0^1|x(t)|^p dt < \infty$$

და ლემა დამტკიცებულია. □

ავიღოთ (6.2.3) უტოლობაში $x(t)=y(t)-z(t)$, მაშინ ცხადია, $x_\mu(t) = y_\mu(t) - z_\mu(t)$ და მივიღებთ

$$\int_0^1 \left|y_\mu(t) - z_\mu(t)\right|^p dt \le \int_0^1 |\mathrm{y(t)} - \mathrm{z(t)}|^p dt.$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$\rho\left(y_\mu, z_\mu\right) \le \rho(y, z). \tag{6.2.6}$$

ლემა 6.2.9 (კოლმოგოროვი). იმისათვის, რომ $\varphi(t)$ ფუნქციათა ოჯახი $\mathrm{M} \subset \mathrm{L_p}[0,1]$ კომპაქტური იყოს $\mathrm{L_p}[0,1]$ სივრცეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი ორი პირობა:

1. *ყოველი* $\varphi(t) \in \mathrm{M}$ ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\left\{\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \le C,$$

სადაც C მუდმივია.

2) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $\mu < \delta$, ნებისმიერი $\varphi(t) \in \mathrm{M}$ ფუნქციისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\rho(\varphi, \varphi_\mu) < \varepsilon.$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობების აუცილებლობა. ვთქვათ, ფუნქციათა M ოჯახი კომპაქტურია. პირველი პირობის აუცილებლობა იქიდან გამომდინარეობს, რომ კომპაქტური M სიმრავლე შემოსაზღვრულია.

დავამტკიცოთ მეორე პირობის აუცილებლობა. ვინაიდან M სიმრავლე კომპაქტურია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $\mathrm{L_p}[0,1]$ სივრცეში არსებობს ამ სიმრავლის სასრული $\frac{\varepsilon}{3}$ ქსელი T. ფუნქციათა თეორიიდან ცნობილია, რომ $\mathrm{L_p}[0,1]$ სივრცის ყოველ $\varphi(t)$ ფუნქციას შეგვიძლია ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ უწყვეტი ფუნქციით. ამასთან მიახლოვება იგულისხმება $\mathrm{L_p}[0,1]$ სივრცის მეტრიკით. ამის გამო T სიმრავლის ელემენტებად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ უწყვეტი ფუნქციები. ვთქვათ, ეს ფუნქციებია: $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$. მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ, თუ $\varphi(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მისი შესაბამი სტეკლოვის ფუნქცია

$$\varphi_\mu(t) = \frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu} \varphi(s) ds,$$

როცა $\mu \to 0$, მიისწრაფვის $\varphi(t)$ ფუნქციისაკენ $\mathrm{L_p}[0,1]$ სივრცის მეტრიკით. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას, გვექნება

$$\varphi_\mu(t) = \frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds = \varphi(\xi), \qquad t-\mu \le \xi \le t+\mu,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ, როცა $\mu \to 0$, მაშინ $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ თანაბრად t∈[0,1] ცვლადის მიმართ. მაგრამ, ამ პირობებში $\varphi_\mu(t) \to \varphi(t)$ საშუალოდაც p მაჩვენებლით.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი $\varphi_k(t) \in T$ ელემენტი. ლემა 6.2.8-ის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\eta_k > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $\mu < \eta_k$, მაშინ

$$\rho((\varphi_k)_\mu, \varphi_k) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

როცა k ნიშნაკი გაირბენს ყველა შესაძლო მნიშვნელობას 1 -დან n-მდე, მივიღებთ $\eta_1, \dots, \eta_n$ რიცხვებს. ვთქვათ, $\eta = min_k \eta_k$; მაშინ $\rho((\varphi_k)_\mu, \varphi_k) < \frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობა შესრულდება ყველა k=1,2,...n მნიშვნელობისათვის.

ვთქვათ, ახლა, $\varphi(t) \in M$ ნებისმიერი ელემენტია. არსებობს ისეთი $\varphi_i(t) \in T$ ფუნქცია, რომ ადგილი ექნება $\rho(\varphi, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ უტოლობას. გამოვიყენოთ $\varphi, \varphi_\mu, \varphi_i, (\varphi_i)_\mu$ ელემენტებზე სამკუთხედის აქსიომა, მივიღებთ

$$\rho(\varphi_\mu, \varphi) \le \rho(\varphi_\mu, (\varphi_i)_\mu) + \rho((\varphi_i)_\mu, \varphi_i) + \rho(\varphi_i, \varphi);$$

მაგრამ (6.2.6.) უტოლობის ძალით, ვღებულობთ

$$\rho(\varphi_\mu, (\varphi_i)_\mu) \le \rho(\varphi_i, \varphi).$$

ამიტომ, როცა $\mu \to 0$, წინა უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\rho(\varphi_\mu, \varphi) \le 2\,\rho(\varphi_i, \varphi) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

და მეორე პირობის აუცილებლობაც დამტკიცებულია.

ლემის პირობების საკმარისობის დასამტკიცებლად, აღვნიშნოთ X_μ-თი ყველა $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციის სიმრავლე. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი ფიქსირებული μ ნიშნაკისათვის X_μ სიმრავლე კომპაქტურია. ჯერ ვუჩვენოთ, რომ X_μ სიმრავლე ერთობლივ უწყვეტი ფუნქციების ოჯახია. მართლაც, ვთქვათ, t,$t_1 \epsilon [0,1]$ ორი ნებისმიერი წერტილია. თანახმად სტეკლოვის ფუნქციის განსაზღვრისა, ნებისმიერი $\varphi(t) \epsilon M$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\left|\varphi_\mu(t_1)-\varphi_\mu(t)\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds - \int_{t_1-\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t-\mu}\varphi(s)ds - \int_{t_1+\mu}^{t_1-\mu}\varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds + \int_{t_1+\mu}^{t-\mu}\varphi(s)ds - \int_{t_1+\mu}^{t_1-\mu}\varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds - \int_{t-\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds - \int_{t_1+\mu}^{t_1-\mu}\varphi(s)ds\right| = \frac{1}{2\mu}\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds - \int_{t-\mu}^{t_1-\mu}\varphi(s)ds\right| \le \frac{1}{2\mu}\left[\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds\right| + \left|\int_{t-\mu}^{t_1-\mu}\varphi(s)ds\right|\right].$$

გამოვიყენოთ უკანასკნელი ორი ინტეგრალის გარდასაქმნელად ჰელდერის უტოლობა, მივიღებთ

$$\left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}\varphi(s)ds\right| \le \left|\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}ds\right|^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} = |t_1-t|^{\frac{1}{q}}\left(\int_{t+\mu}^{t_1+\mu}|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \le |t_1-t|^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$p^{-1}+q^{-1}=1$$

სრულიად ასევე,

$$\left|\int_{t-\mu}^{t_1-\mu}\varphi(s)ds\right| \le |t_1-t|^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ამ ორი უკანასკნელი უტოლობის გამოყენებით, წინა უტოლობიდან მივიღებთ

$$\left|\varphi_\mu(t_1)-\varphi_\mu(t)\right| \le \frac{C}{\mu}|t_1-t|^{\frac{p-1}{p}},$$

სადაც

$$C=\left(\int_0^1|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} \tag{6.2.7}$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციების X_μ სიმრავლე ყოველი ფიქსირებული μ-სთვის ერთობლივ უწყვეტ ფუნქციების ოჯახია.

ახლა დავრწმუნდეთ, რომ X_μ არის $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციების თანაბრად შემოსაზღვრული სიმრავლე. მართლაც, როცა $|t_1-t|<\mu$, მაშინ (6.2.7) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\left|\varphi_\mu(t_1)-\varphi_\mu(t)\right| \le C\mu^{-\frac{1}{p}}.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ μ სიგრძის სეგმენტზე ნებისმიერი $x_\mu(t)$ ფუნქციის რხევა არ აღემატება $C\mu^{-\frac{1}{p}}$ რიცხვს. თუ $\mu>\frac{1}{n}$, მაშინ $x_\mu(t)$ ფუნქციის რხევა არ ღემატება $nC_\mu^{-\frac{1}{p}}$ რიცხვს. ამასთანავე (6.2.3) უტოლობისა და თეორემის პირველი პირობის თანახმად, გვაქვს:

$$\int_0^1 \left|\varphi_\mu(t)\right|^p dt \le \int_0^1 |\varphi(t)|^p dt \le C^p.$$

რაც მხოლოდ მაშინ არის შესაძლებელი, როცა არსებობს ერთი მაინც ისეთი $t_0 \in [0,1]$ მნიშვნელობა, რომ $\left|\varphi_\mu(t_0)\right| \le C$.გარდა ამისა, ვინაიდან რხევა ნებისმიერი $\psi_\mu(t) \in X_\mu$ ფუნქციისა არ აღემატება $nC_\mu^{-\frac{1}{p}}$ რიცხვს, ამიტომ

$$|\varphi(t)| \le \left|\varphi_\mu(t_0)\right| + nC_\mu^{-\frac{1}{p}} \le C + nC_\mu^{-\frac{1}{p}} = C_1.$$

ამრიგად, როცა μ ფიქსირებულია, მაშინ ფუნქციათა X_μ ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრულია $[0,1]$ სეგმენტზე.

არცელას ლემის თანახმად, X_μ სიმრავლე კომპაქტურია თანაბარი კრებადობის აზრით. მაგრამ მაშინ X_μ კომპაქტური იქნება საშუალო კრებადობის აზრითაც p მაჩვენებლით.

ლემის მეორე პირობის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი μ, რომ ყოველი $\varphi(t) \in M$ ელემენტისათვის შესრულდება უტოლობა

$$\rho(\varphi, \varphi_\mu) < \varepsilon.$$

როგორც ვხედავთ X_μ სიმრავლე არის M სიმრავლის ε-ქსელი და, ვინაიდან თვით X_μ კომპაქტურია, ამიტომ M სიმრავლეც კომპაქტური იქნება. ამით კოლმოგოროვის ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 6.2.10 (მ. რისი). იმისათვის, რომ ფუნქციათა M სიმრავლე კომპაქტური იყოს $L_p[0,1]$ სივრცეში, საკმარისია შემდეგი პირობები:

1) ფუნქციათა M სიმრავლე უნდა იყოს თანაბრად შემოსაზღვრული, ე.ი. ყველა $\varphi(t) \in M$ ფუნქციებისათვის შესრულებული უნდა იყოს უტოლობა

$$\left(\int_0^1 |\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}} < C,$$

სადაც C მუდმივია:

2) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის უნდა არსებობდეს ისეთი $\mu > 0$ რიცხვი, რომ M სიმრავლის ყველა ფუნქციისათვის, როცა $|\Delta t| < \mu$ სრულდებოდეს უტოლობა

$$\left\{\int_0^1 |\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\varphi(t)=0$, როცა $t\notin[0,1]$. განვიხილოთ სტეკლოვის ფუნქცია:

$$\varphi_\mu(t)=\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds.$$

ცხადია,რომ ყოველი ფიქსირებული μ რიცხვისათვის X_μ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია $\varphi_\mu(t)$ ფუნქციები, კომპაქტურია $L_p[0,1]$ სივრცეში p მაჩვენებლით საშუალო კრებადობის აზრით.

თუ შემდეგ ცხად უტოლობაში

$$\left|\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}\varphi(s)ds\right|\le\left(\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}|\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$\varphi(s)$ ფუნქციის ნაცვლად შევიტანთ $\varphi(t)-\varphi(s)$ სხვაობას, მივიღებთ:

$$\left|\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}[\varphi(t)-\varphi(s)]ds\right|\le\left(\frac{1}{2\mu}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-\mu}^{t+\mu}|\varphi(t)-\varphi(s)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}[\varphi(t)-\varphi(s)]ds=\varphi(t)-\varphi_\mu(t).$$

წინა უტოლობიდან, როცა მას p ხარისხად ავამაღლებთ, მივიღებთ:

$$|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p\le\frac{1}{2\mu}\int_{t-\mu}^{t+\mu}|\varphi(t)-\varphi(s)|^p ds.$$

აქედან, s=t+Δt ჩასმით, გვექნება:

$$|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p\le\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}|\varphi(t)-\varphi(t+\Delta t)|^p d(\Delta t),$$

საიდანაც, t ცვლადით ინტეგრების შედეგად, მივიღებთ:

$$\int_0^1|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p dt\le\frac{1}{2\mu}\int_{-\mu}^{\mu}d(\Delta t)\int_0^1|\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)|^p dt.$$

თუ გამოვიყენებთ ლემის მეორე პირობას, გვექნება შეფასება:

$$\left(\int_0^1|\varphi(t)-\varphi_\mu(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

ამ უტოლობიდან ვრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი $\varphi(t)\in M$ ფუნქციისათვის არსებობს $\varphi_\mu(t)$ ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის კომპაქტურ X_μ სიმრავლეს. ამასთან ფუნქცია $\varphi_\mu(t)$, გადახრილია $\varphi(t)$ ფუნქციისაგან ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვზე ნაკლები მანძილით. როგორც ვიცით, ამ პირობებში, ფუნქციათა M ოჯახი კომპაქტურია. ◻

განვიხილოთ ფუნქციონალური სივრცე, რომლის ელემენტი x წარმოადგენს [a,b] სეგმენტზე ისეთ $\varphi_i(t)$ უწყვეტი ფუნქციების მიმდევრობას: x=$(\varphi_1(t),\dots,\varphi_k(t),\dots)$, რომლებიც თანაბრად შემოსაზღვრულია რაიმე K რიცხვით: $|\varphi_i(t)|\le$ K. შემდეგში $\varphi_i(t)$ ფუნქციებს ვუწოდოთ x ელემენტის კოორდინატები.

ყველა x ელემენტის სიმრავლეს უწოდებენ C^∞ სივრცეს, რომელშიც მანძილი $x^{(1)}=\left(\varphi_1{}^{(1)}(t),\dots,\varphi_n{}^{(1)}(t),\dots\right)$, $x^{(2)}=\left(\varphi_1{}^{(2)}(t),\dots,\varphi_n{}^{(2)}(t),\dots\right)\epsilon C^\infty$ ელემენტებს შორის განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით:

$$\rho\left(x^{(1)},x^{(2)}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}max\left|\varphi_i{}^{(1)}(t)-\varphi_i{}^{(2)}(t)\right|\quad a\le t\le b.$$

ამ ფორმულით განსაზღვრული მანძილი, როგორც ადვილი შესამჩნევია, დააკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას. ამასთანავე C^∞ სრული სივრცეა.

ლემა 6.2.11. M⊂ C^∞ სიმრავლის კომპაქტურობისათვის საკმარისია, რომ მისი ელემენტების k-ური კოორდინატების სიმრავლე, ნებისმიერი k ნიშნაკისათვის, იყოს კომპაქტური.

დამტკიცება. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის, შეგვიძლია იმდენად დიდი ნატურალური N რიცხვი ავიღოთ, რომ შესრულდეს უტოლობა

$$\mathrm{k}\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon.$$

ახლა განვიხილოთ C^∞ სივრცის იმ x_N ელემენტების M_N სიმრავლე, რომელთა ყველა კოორდინატი, N ნიშნაკიდან დაწყებული, ნულის ტოლია:

$$x_N=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_N(t),0,\dots0,\dots).$$

ვინაიდან, ლემის პირობის ძალით, C^∞ სივრცის ყველა ელემენტის k-ური კოორდინატების სიმრავლე კომპაქტურია, ამიტომ M_N კომპაქტური სიმრავლეა C^∞ სივრცეში. შევაფასოთ x=$(\varphi_1(t),\dots,\varphi_N(t),\varphi_{N+1}(t),\dots)\in M$ და $x_N=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_N(t),0,\dots0,\dots)\in M_N$ ელემენტებს შორის მანძილი. გვაქვს:

$$\rho(x,x_N)=\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}max\,|\varphi_i(t)|\le k\sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon.$$

როგორც ვხედავთ, როგორიც უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი, M⊂ C^∞ სიმრავლისათვის არსებობს ისეთი კომპაქტური M_N სიმრავლე, რომ

მანძილი ნებისმიერი x∈ M ელემენტიდან $x_N \in M_N$ ელემენტამდე აკმაყოფილებს $\rho(x_1,x_N) < \varepsilon$ უტოლობას. ამის გამო M კომპაქტური სიმრავლეა და ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, t ნამდვილი ცვლადია, რომელიც ნამდვილ რიცხვით წრფეზე იცვლება: $-\infty <$ t$< +\infty$. განვიხილოთ ყველა იმ x(t) ფუნქციების M_∞ სიმრავლე, რომლებიც შემოსაზღვრულია $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე. მანძილი $x_1(t), x_2(t) \in M_\infty$ ელემენტებს შორის განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{t \in R} | x_1(t) - x_2(t) | .$$

ასე განსაზღვრული მანძილი აკმაყოფილებს მეტრიკის ყველა აქსიომას და ამ მეტრიკით M_∞ სრული სივრცეა.

შემოვიღოთ თითქმის პერიოდული ფუნქციის განსაზღვრა. იტყვიან, რომ x(t) ფუნქცია თითქმის პერიოდულია $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე, თუ იგი ამ ინტერვალზე უწყვეტია და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\eta = \eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი (a,a+ η) ინტერვალი შეიცავს ისეთ ერთ $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ რიცხვს მაინც, რომლისთვისაც შესრულდება უტოლობა:

$$|x(t+\sigma) - x(t)| \le \varepsilon, \quad -\infty < t < +\infty.$$

σ რიცხვს ეწოდება x(t) ფუნქციის ε-პერიოდი. ცხადია, თითქმის პერიოდულ ფუნქციების სიმრავლე ეკუთვნის M_∞ სივრცეს.

ლემა 6.2.12. იმისათვის, რომ თითქმის პერიოდულ ფუნქციების სიმრავლე $M \subset M_\infty$ კომპაქტური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია სრულდებოდეს შემდეგი ორი პირობა:

1) ფუნქციათა M ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტია $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე;
2) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი $\eta = \eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყოველი (a,a+ η)$\subset (-\infty, +\infty)$ ინტერვალი შეიცავდეს σ რიცხვს, რომელიც ε პერიოდია ყველა x(t)∈ M ფუნქციისათვის.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ჯერ პირობების აუცილებლობა. ვინაიდან, თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა ოჯახი თანაბრად შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტია მთელ $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალზე, ამიტომ 1) პირობის

აუცილებლობის დამტკიცება მოითხოვს მხოლოდ ანალოგიური პირობების აუცილებლობის დამტკიცების განმეორებას არცელას ლემაში.

ვაჩვენოთ 2) პირობის აუცილებლობა. ვინაიდან M სიმრავლე კომპაქტურია, ამიტომ, ერთი მხრივ, არსებობს $\frac{\varepsilon}{3}$-ქსელი:$x_1(t), \dots, x_n(t) \in M$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი x(t)∈ M ელემენტისათვის არსებობს ქსელის ისეთი ერთი $x_i(t)$ ელემენტი მაინც, რომ

$$\rho(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{3};$$

საიდანაც ნებისმიერი t∈$(-\infty, +\infty)$ წერტილისათვის გვაქვს

$$|\mathrm{x(t)} - x_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad (6.2.8)$$

მეორეს მხრივ, მორის თეორემის ძალით, როცა თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა სიმრავლე სასრულია, მაშინ იარსებებს ისეთი $\eta > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი (a,a+ η)⊂ $(-\infty, +\infty)$ ინტერვალი შეიცავს σ რიცხვს, რომელიც ყველა $x_1(t), \dots, x_n(t)$ფუნქციისათვის წარმოადგენს $\frac{\varepsilon}{3}$-პერიოდს:

$$|x_i(t+\sigma) - x_i(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ (\mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{n}). \qquad (6.2.9)$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (6.2.8) და (6.2.9) უტოლობებს, გვექნება:

$$|x(t+\sigma) - x(t)| \leq |x(t+\sigma) - x_i(t+\sigma)| + |x_i(t+\sigma) - x_i(t)| + |x_i(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

აქედან ჩანს, რომ σ რიცხვი არის ნებისმიერი x(t)∈ M ელემენტის ε-პერიოდი და 2) პირობის აუცილებლობის დამტკიცება დამთავრებულია.

გადავიდეთ პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე.ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ 1) და 2) პირობები შესრულებულია. უნდა დავამტკიცოთ, რომ M კომპაქტური სიმრავლეა.

ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. არსებობს ისეთი $\eta = \eta(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყოველი η სიგრძის ინტერვალი შეიცავს ყველა x(t)∈ M ფუნქციისათვის საერთო ε-პერიოდს. ავაგოთ x(t)∈ M ფუნქციის დახმარებით $\overline{x(t)}$ ფუნქცია:

$$\overline{x(t)} = \mathrm{x(t)},$$

როცა $-\eta \leq t \leq \eta$,

$$\overline{x(t)} = x(t - \sigma_n),$$

როცა

$$\{n\,\eta < t \leq (n+1)\eta, n = 1,2,3, \dots \ n\,\eta \leq t < (n+1)\eta, n = -2, -3, ..$$

სადაც σ_n არის ყველა x(t)∈ M ფუნქციის ε-პერიოდი $(n\,\eta,(n+1)\eta)$ ინტერვალში.

აღვნიშნოთ ყველა $\overline{x(t)}$ ფუნქციის სიმრავლე M_ε-ით. ცხადია, რომ ფუნქციათა M_ε ოჯახი [-η,η] სეგმენტზე თანაბრად შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტია. ამის გამო [-η,η] სეგმენტზე M_ε სიმრავლე კომპაქტურია თანაბარი კრებადობის აზრით. $\overline{x(t)}$ ფუნქციების განსაზღვრის ძალით, ვინაიდან t-$\sigma_n \subset [-\eta,\eta]$, ამიტომ ყოველი თანაბრად კრებადი $\{\overline{x_k(t)}\} \subset M_\varepsilon$ მიმდევრობა [-η,η] სეგმენტზე, თანაბრად კრებადი იქნება რიცხვით წრფეზე. ამის გამო, რიცხვით წრფეზე M_ε სიმრავლე კომპაქტურია თანაბარი კრებადობის აზრით, ამასთანავე $\overline{x(t)}$ ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად

$$x(t)-\overline{x(t)}=0,$$

როცა $t\in[-\eta,\eta]$.

$$\overline{x(t)}=x(t-\sigma_n),$$

როცა

$$\{n\,\eta<t\le(n+1)\eta, n=1,2,3,\dots\ n\,\eta\le t<(n+1)\eta, n=-2,-3,..$$

ვინაიდან σ_n არის x(t) ფუნქციის ε-პერიოდი, ამიტომ ნებისმიერი $t\in(-\infty,+\infty)$ წერტილისათვის გვექნება

$$\left|x(t)-\overline{x(t)}\right|<\varepsilon,$$

საიდანაც გამომდინარეობს უტოლობა: $\rho(x,\bar{x})<\varepsilon$. მაშასადამე, M_ε არის M სიმრავლის კომპაქტური ε-ქსელი და ამიტომ ფუნქციათა M ოჯახი კომპაქტურია. ამით ლემა დამტკიცებულია. ◻

ვთქვათ, M⊂ l_p რაიმე სიმრავლეა. მოვიყვანოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობები M სიმრავლის კომპაქტურობისა l_p სივრცეში.

ლემა 6.2.13. l_p სივრცის რაიმე M სიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულებული იყოს შემდეგი პირობები:

1) არსებობს ისეთი დადებითი K მუდმივი, საერთო ყველა $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)\in$ M ელემენტისათვის, რომ

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\le K^p; \qquad (6.2.10)$$

2) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური $N = N(\varepsilon)$ რიცხვი, რომ ყველა $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \text{M}$ ელემენტისათვის სრულდება პირობა:

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^p \leq \varepsilon^p. \tag{6.2.11}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, M სიმრავლე კომპაქტურია. მაშინ, როგორც ვიცით, იგი შემოსაზღვრულია, ე.ი. არსებობს ისეთი K რიცხვი, საერთო ყველა x=$(x_k) \in M$ ელემენტისათვის, რომ

$$\rho\left(x, \theta_{l_p}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K,$$

სადაც θ_{l_p} არის l_p სივრცის ნულოვანი ელემენტი. ამით ლემის 1) პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ ახლა 2) პირობის აუცილებლობა. ვინაიდან M კომპაქტურია, ამიტომ არსებობს ელემენტების ისეთი სასრული $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{n} = \{x^{(i)} = ({x^{(i)}}_k)\}_{i=1}^{n}$ მიმდევრობა, სადაც $x^{(i)} \in l_p$, რომ ნებისმიერი $x = (x_k) \in \text{M}$ ელემენტისათვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის შესრულდება $\rho(x, x^{(i)}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ უტოლობა, სადაც $x^{(i)} \in \{x^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ გარკვეული ელემენტია (i=1,2,…,n). სხვანაირად, გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k - {x^{(i)}}_k\right|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p}. \tag{6.2.12}$$

გარდა ამისა , რადგან $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ მიმდევრობა სასრულია, ამიტომ ყველა მისი ელემენტისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური N=N(ε) რიცხვი, რომ ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\sum_{k=N}^{\infty} \left|{x^{(i)}}_k\right|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p} \quad (i=1,\dots,n). \tag{6.2.13}$$

ახლა კი მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით გვექნება:

$$\left(\sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} \left|x_k - {x^{(i)}}_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=N}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

საიდანაც (6.2.12) და (6.2.13) უტოლობების ძალით, მივიღებთ (6.2.11) უტოლობას.

გადავიდეთ პირობების საკმარისობის დამტკიცებაზე.

საჭიროა დავამტკიცოთ, რომ, როცა შესრულებულია 1) და 2) პირობები, მაშინ M სიმრავლე კომპაქტურია. ვთქვათ, $x = (x_i) \in \text{M}$

ნებისმიერი ელემენტია. აღვნიშნოთ x_N −ით ელემენტი, რომლის პირველი N კოორდინატი იქნება x ელემენტის პირველი N კოორდინატი, ხოლო ყველა დანარჩენი კოორდინატი უდრის ნულს. $x_N = (x_1, \dots, x_N, 0,0, \dots)$ სახის ელემენტების სიმრავლე აღვნიშნოთ M_N-ით. მაშინ, თანახმად (6.2.11) პირობისა, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და $x \in M$ ელემენტისათვის გვაქვს $\rho(x, x_N) \leq \varepsilon$. ეს იმას ნიშნავს, რომ M_N სიმრავლე წარმოადგენს M სიმრავლის ε −ქსელს.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი

$$\{x^k{}_N\}_{k=1}^{\infty} = \{x^k{}_N = (x^k{}_1, x^k{}_2, \dots, x^k{}_N, 0,0 \dots)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{M}_N$$

მიმდევრობა. თანახმად (6.2.11) პირობისა, გვაქვს $|x_i{}^k| \leq K \ \ (i = 1, \dots, N)$. ამის გამო $\{x_N{}^k\}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ისეთი $\{x_N{}^{(k_s)}\}_{k_s=1}^{\infty}$ ქვემიმდევრობა, რომლის ელემენტების პირველ N ადგილზე მყოფი კოორდინატები კრებადია სასრული ზღვრებისაკენ, ხოლო დანარჩენი კოორდინატები კი ნულებია. ვთქვათ $\lim_{k_s \to \infty} x_N{}^{(k_s)} = x_N{}^*$. ცხადია $x_N{}^* \in l_p$. ჩვენ ვხედავთ, რომ M_N სიმრავლის ელემენტების ყოველი უსასრულო მიმდევრობიდან შეიძლება გამოვყოთ l_p სივრცის ელემენტისაკენ კრებადი ქვემიმდევრობა. ამრიგად M_N კომპაქტური სიმრავლეა. მაშასადამე, კომპაქტური იქნება თვით M სიმრავლეც და ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ქვეთავი 6.3. ძირითადი შედეგები

თეორემა 6.3.1. ვთქვათ, $\mathrm{F} \subseteq C[0,1]$ არის ბორელის ქვესიმრავლე, ისეთი რომ ყოველი ერთობლივ შემოსაზღვრული და ერთობლივ უწყვეტი $\mathrm{M} \subseteq C[0,1]$ ქვესიმრავლესთვის არსებობს ელემენტი $h_M \in C[0,1]$, რომლისთვისაც $\mathrm{M} + h_M \subseteq \mathrm{F}$. მაშინ F არ არის shy-სიმრავლე.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, F არის shy-სიმრავლე. მაშინ იარსებებს კომპაქტური სიმრავლე $\mathrm{M} \subseteq C[0,1]$ და $C[0,1]$ სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი ბორელის ალბათური ზომა μ, რომ $0 < \mu(\mathrm{M}) < 1$ და $\mu(F + h) = 0$ ყოველი $h \in C[0,1]$ ელემენტისათვის. ლემა 6.2.6-ის ძალით სიმრავლე M არის ერთობლივ შემოსაზღვრული და

ერთობლივ უწყვეტი. ჩვენი დაშვების თანახმად არსებობს ელემენტი $h_M \in C[0,1]$, ისეთი რომ M+ $h_M \subseteq F$. ამ ჩართვიდან გამომდინარეობს, რომ M$\subseteq F - h_M$ და ჩვენ ვღებულობთ, რომ 0< $\mu(\mathrm{M}) \leq \mu(F - h_M) = 0$, რაც წინააღდეგობაა. □

თეორემა 6.3.2. ვთქვათ, F$\subseteq L_p[0,1]$ არის ბორელის სიმრავლე. ვთქვათ, სიმრავლე M$\subseteq L_p[0,1]$ აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

(i) არსებობს დადებითი რიცხვი C, ისეთი რომ $\|x\|_p <$ C ყოველი $x \in M$ ელემენტისათვის;

(ii) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს დადებითი რიცხვი $\delta = \delta(\varepsilon)$, ისეთი რომ $\|\Phi - \Phi_\mu\|_p < \varepsilon$ ყოველი Φ$\in M$ და $\mu < \delta$ ელემენტებისათვის.

თუ ყოველი ასეთი M$\subseteq L_p[0,1]$ სიმრავლისათვის არსებობს ფუნქცია $h_M(x) \in L_p[0,1]$ ისეთი, რომ M+ $h_M \subseteq F$, მაშინ F არ არის shy-სიმრავლე $L_p[0,1]$-ში.

დამტკიცება. დავუშვათ წინააღმდეგი და ვთქვათ F არის shy-სიმრავლე. მაშინ იარსებებს კომპაქტური სიმრავლე M$\subseteq L_p[0,1]$ და ბორელის ალბათური ზომა μ , ისეთი რომ $0 < \mu(M) < 1$ და $\mu(F + h) = 0$ ყოველი $h \in L_p[0,1]$ ელემენტისათვის. ვინაიდან M კომპაქტური სიმრავლეა, ლემა 6.2.9-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ის აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

(i) არსებობს დადებითი რიცხვი C, ისეთი რომ $\|x\|_p <$ C ყოველი $x \in M$ ელემენტისათვის;

(ii) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს დადებითი რიცხვი $\delta = \delta(\varepsilon)$, ისეთი რომ $\|\Phi - \Phi_\mu\|_p < \varepsilon$ ყოველი Φ$\in M$ და $\mu < \delta$ ელემენტებისათვის.

ჩვენი დაშვების თანახმად არსებობს ელემენტი $h_M \in L_p[0,1]$, ისეთი რომ M+$h_M \subseteq F$. უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ M$\subseteq F - h_M$ და ჩვენ ვღებულობთ, რომ

$$0 < \mu(M) \leq \mu(F - h_M) = 0,$$

რაც წინააღმდეგობაა. □

თეორემა 6.3.3 ვთქვათ, F არის ბორელის ქვესიმრავლე l_p-ში. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი M$\subseteq l_p$ ქვესიმრავლესთვის, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

(i) არსებობს დადებითი რიცხვი C ისეთი, რომ $\|x\| <$ C ყოველი $x=(x_i)_{i\in N}\in M$ ელემენტისთვის,

(ii) ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს დადებითი რიცხვი N=N(ε), ისეთი რომ $\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p \le \varepsilon^p$ ყოველი $x=(x_i)_{i\in N}\in M$ ელემენტისთვის.

არსებობს ელემენტი $h_M \in l_p$, ისეთი რომ M+$h_M \subseteq F$. მაშინ F არის არ არის shy-სიმრავლე l_p-სივრცეში.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ F არის shy-სიმრავლე. მაშინ იარსებებს კომპაქტური სიმრავლე M$\subseteq l_p$ და l_p-სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა μ , ისეთი რომ 0$< \mu(M) < 1$ და $\mu(F+h)=0$ ყოველი h$\in l_p$ ელემენტისათვის. ლემა 6.2.13-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ M სიმრავლე აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას

(i) არსებობს დადებითი რიცხვი C ისეთი, რომ $\|x\|$ <C ყოველი $x=(x_i)_{i\in N}\in M$ ელემენტისთვის,

(ii) ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს დადებითი რიცხვი N=N(ε), ისეთი რომ $\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p \le \varepsilon^p$ ყოველი $x=(x_i)_{i\in N}\in M$ ელემენტისთვის.

ჩვენი დაშვების თანახმად არსებობს ელემენტი $h_M \in l_p$ ისეთი,რომ M+$h_M \subseteq F$. უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ M$\subseteq F - h_M$ და ჩვენ ვღებულობთ

$$0 < \mu(M) \le \mu(F-h_M) = 0$$

პირობის მართებულობას, რაც წინააღმდეგობაა. □

თავი VII. ზოგიერთი კლასიკური ბანახის სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად

ქვეთავი 7.1. $C^{\infty}[0,1]$ ბანახის სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად.

ლემა 7.1.1 ვთქვათ J -არის N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე. სიმრავლე A_j, განსაზღვრული პირობით

$$A_J = \{(x_i(t))_{i\in N} : (x_i(t))_{i\in N} \in C^{\infty}[0,1] \,\&\, x_i(t) \geq 0,$$

თუ $i \in J \,\&\, x_i(t) < 0$, თუ $i \in N \setminus J\}$.მაშინ A_j არ არის shy-სიმრავლე $C^{\infty}[0,1]$-სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, F არის ნებისმიერი კომპაქტი $C^{\infty}[0,1]$-ში. ცხადია, რომ $0 \in C^{\infty}[0,1]$ ელემენტისათვის არსებობს რიცხვი $r > 0$ ისეთი, რომ

$$(\forall (x_i(t))_{i\in N})(\forall_n)\left((x_i(t))_{i\in N} \in F \;\&\; (n \in N) \rightarrow sup_{n\in N} \max_{t\in[0,1]} |x_n(t)| < r\right)$$

ვთქვათ, $h_n(t) = 2r$ თუ $n \in J$ და $h_n(t) = -2r$ თუ $n \in N \setminus J$. ვაჩვენოთ, რომ $F + (h_n) \subseteq A_j$. მართლაც, ყოველი $n \in N$ ელემენტისათვის ჩვენ გვაქვს $\max_{t\in[0,1]} |x_n(t)| < r$, რაც $-r < x_n(t) < +r$ პირობის ეკვივალენტურია. ე.ი. $x(t) = (x_n(t))_{n\in N} \in F$.

ამის გამო ჩვენ ვღებულობთ, რომ $x_n(t) + h_n(t) > 0$, როცა $n \in J$ და $x_n(t) + h_n(t) < 0$, როცა $n \in N \setminus J$ უნიფორმულად ყოველი $x(t) = (x_n(t))_{n\in N} \in$ F ელემენტისათვის. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ F+(h_n) არის A_j-სიმრავლის ქვესიმრავლე და ლემა 6.2.2-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ A_j არის არ არის shy-სიმრავლე $C^{\infty}[0,1]$-სივრცეში. იმის ჩვენება, რომ A_j წარმოადგენს ბორელის სიმრავლეს $C^{\infty}[0,1]$-სივრცეში, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

ამით ლემა 7.1.1 დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 7.1.2. $\Phi = \{A_J : J \subseteq N\}$ ქვესიმრავლეთა ოჯახი, სადაც A_J განსაზღვრულია ლემა 7.1.1-ით ყოველი $J \subseteq N$ ქვესიმრავლისათვის, აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \emptyset$ ყოველი ორი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq N$-თვის;

(ii) Φ ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემზივალენტი;

(iii) Card(Φ)=c, სადაც c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს.

დამტკიცება. (i) ვაჩვენოთ, რომ $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq N$-თვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ J_1 და J_2 არის ორი განსხვავებული ქვესიმრავლე N-ის ისეთი, რომ $A_{J_1} \cap A_{J_2} \neq \varnothing$. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $J_1 \backslash J_2 \neq \emptyset$. ვთქვათ $(h_i)_{i \in N} \in A_{J_1} \cap A_{J_2}$ და $i_0 \in J_1 \backslash J_2$. h_{i_0}-თვის გვაქვს, რომ $h_{i_0} \geq 0$ იმის გამო რომ $(h_i)_{i \in N} \in A_{J_1}$ და $h_{i_0} < 0$ იმის გამო რომ $(h_i)_{i \in N} \in A_{J_1}$. ეს შეუძლებელია და ამით ნაჩვენებია, რომ Φ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეების ოჯახი $C^{\infty}[0,1]$-ში.

(ii) ლემა 6.2.2-ის გამოყენებით Φ-ის ყოველი ელემენტი არის უნივერსალურად ზომადი არა-shy სიმრავლე რაც (i) პირობასთან ერთად გვაძლევს დავასკვნათ, რომ Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემზივალენტი.

(iii) პირობის მართებულობა მიიღება შემდეგნაირად: card(Φ)=card($\{J : J \subseteq N\}) = 2^{\aleph_0}$. $\square$

განვიხილოთ თეორემა 7.1.1-ის ზოგიერთი შედეგი.

შედეგი 6.1.3. არსებობს $C^{\infty}[0,1]$ სივრცის ისეთი დახლეჩა წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ჰაარის ემზივალენტებად, რომლის სიმძლავრე შეადგენს $2^{\aleph_0}$-ს, სადაც $\aleph_0$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრეს.

დამტკიცება: დავაფიქსიროთ $J_0 \subset N$ და განვსაზღვროთ $(B_J)_{J \subseteq N}$ ოჯახი შემდეგნაირად:

$$B_{J_0} = A_{J_0} \cup (C^{\infty}([0,1]) \setminus \cup_{J \in P(N) \setminus \{J_0\}} A_J) \text{ და } B_J = A_J \text{, როცა } J \in P(N) \backslash \{J_0\},$$

სადაც $P(N)$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს. ცხადია, რომ $(B_J)_{J \subseteq N}$ არის $C^{\infty}[0,1]$ სივრცის სასურველი დახლეჩა. $\square$

შედეგი 7.1.2 უსასრულო-განზომილებიანი სეპარაბელური ბანახის სივრცე $C^{\infty}[0,1]$ არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

ქვეთავი 7.2. l^{∞} სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად

ვთქვათ, l^{∞} არის ყველა ნამდვილ-მნიშვნელობიანი მიმდევრობების ბანახის სივრცე $\|.\|_{\infty}$ ნორმით, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\|(x_k)_{k\in N}\|_{\infty} = sup_{k\in N}|x_k|.$$

ლემა 7.2.1. ვთქვათ, J არის ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე. სიმრავლე A_J, განსაზღვრული პირობით

$$A_J = \{(x_i)_{i\in N} : (x_i)_{i\in N} \in l^{\infty} \ \&\ x_i \geq 0 \text{ როცა } i \in J \ \&\ x_i < 0 \text{ როცა}, i \in N \setminus J\}.$$

არის l^{∞}-სივრცის ბორელის ქვესიმრავლე, რომელიც არ არის shy-სიმრავლე.

დამტკიცება: ვთქვათ F არის ნებისმიერი კომპაქტური სიმრავლე l^{∞}-სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი r> 0, რომ სრულდება პირობა

$$\sup_{n\in N} |x_n| < r$$

F სიმრავლის ყოველი $(x_n)_{n\in N}$ ელემენტისათვის. განვსაზღვროთ $(h_n)_{n\in N} \in l^{\infty}$ ელემენტი შემდეგნაირად: $h_n = 2r$ თუ n$\in J$ და $h_n = -2r$, თუ n$\in N\setminus J$.

ვაჩვენოთ, რომ $F + (h_n)_{n\in N} \subset A_J$. მართლაც, $sup_{n\in N}|x_n| < r$ პირობიდან ჩვენ ვღებულობთ $-r < x_n < +r$ ყოველი $x = (x_n)_{n\in N} \in F$-თვის. შევნიშნოთ, რომ მაშინ $x_n + h_n > 0$ როცა n$\in J$ და $x_n + h_n < 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ყოველი $x = (x_n)_{n\in N} \in F$ ელემენტისათვის. იმის გამო, რომ F + $(h_n)_{n\in N}$ არის A_J სიმრავლის ქვესიმრავლე და l^{∞}-სივრცის F კომპაქტური სიმრავლე აღებული იყო ნებისმიერად, ლემა 6.2.2-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ A_J არ არის shy-სიმრავლე. ◻

თეორემა 7.2.2. $\Phi=\{A_J : J \subseteq N\}$ ქვესიმრავლეთა ოჯახი არის l^{∞}-სივრცის ისეთი დახლეჩა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემბივალენტი

(ii) Card(Φ)=$2^{\aleph_0}$.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $\cup_{j\subseteq N} A_j$ წარმოადგენს l^{∞} სივრცის დაფარვას. ვაჩვენოთ, რომ $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \emptyset$ ყოველი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq N$-თვის

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ J_1, J_2 იყოს ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის ისეთი ორი განსხვავებული ქვესიმრავლე, რომ $A_{J_1} \cap A_{J_2} \neq \varnothing$. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $J_1 \setminus J_2 \neq \emptyset$. ვთქვათ $(h_i)_{i \in N} \in A_{J_1} \cap A_{J_2}$ და $i_0 \in J_1 \setminus J_2$. h_{i_0}-თვის ჩვენ მივიღებთ, რომ $h_{i_0} \geq 0$ იმის გამო რომ ასე, რომ $(h_i)_{i \in N} \in A_{J_1}$ და ამასთანავე $h_{i_0} < 0$ იმის გამო რომ $(h_i)_{i \in N} \in A_{J_2}$, რაც შეუძლებელია. ამგვარად ნაჩვენებია რო Φ არის არის l^{∞}-სივრცის დახლეჩა

ლემა 6.2.2-ის გამოყენებით Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი, ისევე როგორც მისი დამატება არის უნივერსალური ზომადი არა-shy სიმრავლე , რაც ნიშნავს რომ Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემზივალენტი.

შევნიშნოთ, რომ

$$\mathrm{card}(\Phi)=\mathrm{card}(\{J : J \subseteq N\}) = 2^{\aleph_0}. \qquad \square$$

თეორემა 7.2.2-ის უშუალო შედეგს წარმოადგენს

შედეგი 7.2.1. უსასრულო-განზომილებიანი არასეპარაბელური ბანახის სივრცე l^{∞} არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

ქვეთავი 7.3. $C_{\infty}(R)$ სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად.

ვთქვათ $C_{\infty}(R)$ აღნიშნავს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრულ ნამდვილ-მნიშვნელობიან შემოსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა უსასრულო-განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეს $\|.\|$ ნორმით, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\|f(x)\| = sup_{x \in R}|f(x)|$$

ყოველი $f \in C_{\infty}(R)$ -ელემენტისათვის.

ლემა 7.3.1. ვთქვათ, J არის მთელ რიცხვთა Z სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლე და $I_z = [z, z+1[$ ყოველი z მთელი რიცხვისათვის. მაშინ სიმრავლე A_J , განსაზღვრული პირობით

$$A_J = \{\varphi : \varphi \in C_{\infty}(R) \,\&\, \varphi(x) \geq 0 \text{ როცა } x \in \cup_{i \in J} I_{4i} \,\&\, \varphi(x) < 0$$

$$\text{როცა } x \in \cup_{i \in Z/J} I_{4i+2}\},$$

არის $C_\infty(R)$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლე, რომელიც არ წარმოადგენს shy-სიმრავლეს.

დამტკიცება. ვთქვათ, M არის $C_\infty(R)$ სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ არსებობს A> 0 ისეთი რომ $sup_{x\in R}|\phi(x)| < \mathrm{A}$ ყოველი $\phi \in \mathrm{M}$ ელემენტისათვის. ახლა განვსაზღვროთ $\cup_{i\in J} I_{4i} \cup I_{4i+2}$ სიმრავლეზე h ფუნქცია შემდეგნაირად: $h(x) = 2r$ თუ $x \in \cup_{i\in J} I_{4i}$ და $h = -2r$ თუ $x \in \cup_{i\in Z/J} I_{4i+2}$. $\bar{h}$ ფუნქციის როლში განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც მიიღება h-ფუნქციიდან წრფივი ინტერპოლაციით.

ცხადია, რომ $\bar{h} \in C_\infty(R)$ და $\mathrm{M} + \bar{h} \subseteq A_j$. ლემა 6.2.2-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ A_J არ წარმოადგენს shy-სიმრავლეს. ამით ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 7.3.2. $C_\infty(R)$ სივრცის ქვესიმრავლეების $\Phi = \{A_J : J \subset Z\}$ ოჯახი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(i) Φ ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ბორელის არა-shy- სიმრავლე.

(ii) $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq Z$

დამტკიცება: (i). ლემა 7.3.1-ის ძალით, Φ ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ბორელის არა-shy- სიმრავლე.

(ii) ვაჩვენოთ, რომ $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq Z$ ქვესიმრავლისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ J_1 და J_2 არის Z-სიმრავლის ორი განსხვავებული ქვესიმრავლე რომელთათვისაც სრულდება $A_{J_1} \cap A_{J_2} \neq \varnothing$ პირობა. ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $J_1 \setminus J_2 \neq \emptyset$. ვთქვათ, რომ $h \in A_{J_1} \cap A_{J_2}$ და $i_0 \in J_1 \setminus J_2$. მაშინ h-სთვის, იმის გამო რომ $h \in A_{J_1}$, ჩვენ გვაქვს რომ $h(x) \geq 0$ როცა x$\in I_{4i_0}$ და ასევე, იმის გამო რომ $h \in A_{J_1}$, ჩვენ გვაქვს რომ $h(x) < 0$ როცა x$\in I_{4i_0}$, რაც წინააღმდეგობაა.

ამგვარად დამტკიცებულია, რომ Φ ოჯახი არის $C_\infty(R)$ სივრცის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი უნივერსალურად ზომადი ქვესიმრავლეების ოჯახი.

□

შედეგი 7.3.1. არსებობს $C_\infty(R)$-სივრცის ისეთი დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად, რომლის სიმძლავრე $2^{\aleph_0}$ კარდინალური რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ $J_0 \subset Z$ და განვსაზღვროთ $(B_J)_{J\subseteq N}$ ოჯახი შემდეგნაირად:

$$B_{J_0} = A_{J_0} \cup (C_\infty(R) / \cup_{J\in P(Z)/\{J_0\}} A_J) \text{ და } B_J = A_J \text{ როცა } J \in P(Z)/\{J_0\},$$

სადაც $P(Z)$ აღნიშნავს მთელ რიცხვთა Z სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს. ცხადია, რომ $(B_J)_{J\subseteq N}$ არის $C_\infty(R)$ სივრცის სასურველი დახლეჩა. □

შედეგი 7.3.2. უსასრულო-განზომილებიანი არასეპარაბელური ბანახის სივრცე $C_\infty(R)$ არ აკმაყოფილებს თვლადი ჯაჭვების პირობას.

ქვეთავი 7.4 $l^\infty(T)$ სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად

ვთქვათ, T არის უსასრულო სიმრავლე და $l^\infty(T)$ არის T სივრცეზე განსაზღვრულ ნამდვილ-მნიშვნელობიან შემოსაზღვრულ ფუნქციათა ბანახის სივრცე $\|.\|_T$ ნორმით, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\|(x_i(t)_{i\in T}\|_T = sup_{i\in T}|x_i|.$$

ლემა 7.4.1. ვთქვათ, T არის უსასრულო სიმრავლე რომლის სიმძლავრე არაზომადი კარდინალური რიცხვია და J მისი ნებისმიერი ქვესიმრავლე. მაშინ სიმრავლე A_J , განსაზღვრული პირობით

$$A_j = B\left(\chi_J, \frac{1}{2}\right) := \{(x_i)_{i\in T} : (x_i)_{i\in T} \in l^\infty(T) \& \|(x_i)_{i\in T} - \chi_J\| < 1/2\}$$

არის არა-shy-სიმრავლე.

დამტკიცება. შენიშვნა 6.2.1-ის ძალით $l^\infty(T)$ არის რადონის მეტრიკული ჯგუფი და A_j არის მისი ღია ქვესიმრავლე, რაც უზრუნველყობს მის არა-shy- ქვესიმრავლეობას. □

თეორემა 7.4.1. ვთქვათ, T არის უსასრულო სიმრავლე რომლის სიმძლავრე არაზომადი კარდინალური რიცხვია. მაშინ ღია სფეროების ოჯახი $\Phi=\{A_j : J \subseteq T\}$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(ii) $A_{J_1} \cap A_{J_2} = \varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq$ T ქვესიმრავლისათვის;

(iii) Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის ჰაარის ემზივალენტი;

(iv) $\mathrm{Card}(\Phi)=2^{card(T)}$.

დამტკიცება. (i) ვაჩვენოთ, რომ $A_{J_1}\cap A_{J_2}=\varnothing$ ყოველი განსხვავებული $J_1, J_2 \subseteq$ T ქვესიმრავლისათვის; დავუშვათ წინააღმდეგი და ვთქვათ J_1და J_2 არის T-სიმრავლის ორი განსხვავებული ქვესიმრავლე, ისეთი რომ $A_{J_1}\cap A_{J_2}\neq\varnothing$. მაშინ გვექნება $h=(h_t)_{t\in T}\in A_{J_1}\cap A_{J_2}$. $\|(h_i)_{i\in T}-\chi_{J_1}\|_T<\frac{1}{2}$ და $\|(h_i)_{i\in T}-\chi_{J_2}\|_T<\frac{1}{2}$ პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\|\chi_{J_1}-\chi_{J_2}\|_T\leq\|(h_i)_{i\in T}-\chi_{J_1}\|_T+\|(h_i)_{i\in T}-\chi_{J_2}\|_T<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

რაც ეწინააღმდეგება პირობას $\|\chi_{J_1}-\chi_{J_2}\|=1$.

(ii) ვინაიდან Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის $l^{\infty}(T)$ სივრცის ღია ქვესიმრავლე, შენიშვნა 6.2.1-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ Φ-ოჯახის ყოველი ელემენტი არის $l^{\infty}(T)$ სივრცის არა-shy- სიმრავლე.

(iii) ცხადია, რომ card (Φ)=card($\{J: J\subseteq T\}$) $=2^{card(T)}$. ◻

შედეგი 7.4.1. თუ T არის უსასრულო სიმრავლე რომლის სიმძლავრე არაზომადი კარდინალური რიცხვია, მაშინ არსებობს $l^{\infty}(T)$ სივრცის დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად, რომლის სიმძლავრე $2^{card(T)}$ კარდინალური რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ $J_0\subset T$ ქვესიმრავლე. ვთქვათ,

$$B_{J_0}=A_{J_0}\cup(l^{\infty}(T)/\cup_{J\in P(T)\setminus J_0}A_J)\quad \text{და}\quad B_J=A_J\ ,\ \text{როცა}\ \ J\in P(Z)\setminus\{J_0\},$$

სადაც P(T) აღნიშნავს T სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს. ცხადია, რომ $\cup_{J\in P(T)\setminus\{J_0\}}A_J$ არის ღია სიმრავლე იმის გამო რომ ის წარმოადგენს ღია სიმრავლეების გაერთიანებას. აქედან გამომდინარე ჩვენ ვასკვნით, რომ B_{J_0} არის $l^{\infty}(T)$ სივრცის ბორელის ქვესიმრავლე. ადვილი საჩვენებელია, რომ $(B_J)_{J\subseteq N}$ ოჯახი წარმოადგენს $l^{\infty}(T)$ სივრცის ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასს, რომელიც აკმაყოფილებს შედეგი 7.4.1-ის ყველა პირობას. ◻

დასკვნები

ნაშრომში "ჰაარის ნულ-სიმრავლეთა წარმომქმნელებისა და მათი ზოგიერთი გამოყენების შესახებ" განხილულია "ჰაარის აზრით ნულ-სიმრავლეთა ზოგადი თეორიის ზოგიერთი ასპექტი და მათი ზოგიერთი გამოყენება.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა ჰაარის ნულ-სიმრავლეთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ძირითადი მახასიათებელი პარამეტრების ძალდებული შეფასებების კლასის სტრუქტურის შესწავლას. კერძოდ, განიხილება ამოცანა, რატომაა რომ "თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა მაქსიმალური დასაჯერობის ნულ ჰიპოთეზის ტესტის საშუალებით.

დისერტანტის დამსახურებად შეიძლება ჩაითვალოს ის ფაქტი, რომ მოხერხდა იაკობ კოენის [Cohen, Jacob., The Earth Is Round (p < .05), *American Psychologist*, **49 (12)**(1994), 9971003] და ჯან ნუნალის [Nunnally, Jum.,The place of statistics in psychology, *Educational and Psychological Measurement*, **20(4)** (1960), 641-650] მოსაზრებების მართებულობის დასაბუთება წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის მაგალითზე. კერძოდ ჰაარის ნულ სიმრავლეების ტექნიკის, კერძოდ "გავრცელების" ტერმინებში ახსნილია თუ რატომაა ნულ ჰიპოთეზა უარყოფილი" თითქმის ყველა" უსასრულო შერჩევისათვის. აღნიშნული ამოცანის გადასაჭრელად შემოღებულია სუბიექტური და ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა ცნებები და ამ ახალი მიდგომის საშუალებით მოხერხდა იმის ჩვენება, რომ წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელის შემთხვევაში, როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი, უსასრულო შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის *სუბიექტურ* უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

ნაშრომის მეცნიერულ სიახლეს წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ მასში პირველადაა გამოყენებული ჰაარის ნულ სიმრავლეების ტექნიკა

სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებების შესასწავლად წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში.

დისერტანტის მიერ განხილულია [Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire *G*-powers of shift-measures on R, *Ukrainian Mathematical Journal*, v. 65, issue 4 (2013), 470–485] ნაშრომში აგებული სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას იმ შემთხვევაშიც, როცა თეთრი ხმაურისათვის არ არსებობს პირველი რიგის მომენტი. აქ არსებითად გამოიყენება [0,1] ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტექნიკა. ემბივალენტობის ერთი საკმარისი პირობის გამოყენებით, დისერტანტის მიერ დამტკიცებულია, რომ ეს სტატისტიკა წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

[G.Pantsulaia, On a certain partition of the non-locally compact Abelian Polish group R^{∞}, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 149 (2009), 75–86]

ნაშრომში აგებული R^{∞} სივრცის ჰაარის ემბივალენტებად დახლეჩის საშუალებით, წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში აგებულია სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება იმ შემთხვევაში, როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი. ამავე მოდელში ნაჩვენებია, რომ ყოველთვის არსებობს სასარგებლო სიგნალის სუბიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებულ შეფასების ისეთი მოდიფიკაცია, რომელიც წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

ნაშრომის გარკვეული ნაწილი ეთმობა უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგებას უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდებით. არსებითად გამოიყენება უსასრულო შერჩევათა R^{∞} სივრცის ისეთი მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩები, რომლის ყოველი

ელემენტი ჰაარის ემბივალენტია. გამოიყენება კონკრეტული სეპარაბელური ბანახის სივრცეების სპეციფიკური თვისებები ანალოგიური დახლეჩის ასაგებად. აქ არსებითად გამოიყენება კონკრეტულ სეპარაბელურ ბანახის სივრცეებში კომპაქტების სტრუქტურული თვისებები (მაგალითად, არცელას თეორემა, კოლმოგოროვის თეორემა, ჰილბერტის თეორემა, რისის თეორემა და სხვა).

აღნიშნულ ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები:

- უსასრულო განზომილებიანი სეპარაბელური ტოპოლოგიური ვექტორული V სივრცის უნივერსალურად ზომადი X სიმრავლე არის ჰაარის ემბივალენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ჰაარის ნულ-სიმრავლეების μ წარმომქნელისათვის ერთდროულად სრულდება შემდეგი ორი პირობა $\mu(X) > 0$ და $\mu(V \setminus X) > 0)$;
- უარყოფითად არის გაცემული პასუხი ტეფერ გილის მიერ დასმულ ერთ შეკითხვაზე, თუ რამდენადაა შესაძლებელი უსასრულო განზომილებიან სეპარაბელურ ბანახის სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის ზომების აღწერა ლებეგის ზომის კერძო ანალოგების ტერმინებში. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს ამავე სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის ზომა λ და იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა μ, ისეთი რომ შესრულდეს ტოლობა

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(B) \to \lambda(X) = \int_X e^{-\pi\|x\|^2} d\mu(x)) .$$

- ჰაარის ემბივალენტის ცნების საშუალებით წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში შემუშავებულია ერთი მიდგომა, რომელიც საშუალებას იძლევა სასარგებლო სიგნალის ყველა უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებებათა კლასის დაყოფას სუბიექტურ და ობიექტურ შეფასებებად;
- როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი, წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში დამტკიცებულია რომ უსასრულო შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის სუბიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

- უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდების (ეგრეთწოდებული ჰაარის ემბივალენტების) საშუალებით აგებულია უსასრულო შერჩევათა R^{∞} სივრცის მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად.
- R^{∞} სივრცის ჰაარის ემბივალენტებად დახლეჩის გამოყენებით წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში მოცემულია სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ და ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა აგების არაეფექტური კონსტრუქცია.
- შემუშავებულია ეფექტური მეთოდი წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა ასაგებად.
- ზოგიერთი ბანახის სივრცის სპეციფიკური თვისებების გამოყენებით უნივერსალურად ზომადი სიმრავლისათვის დადგენილია საკმარისი პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს მის ჰაარის აზრით ემბივალენტობას. ეს მეთოდი გამოიყენება ამავე სივრცეების ჰაარის ემბივალენტებად მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) დახლეჩების ასაგებად

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Balka, Richárd; Buczolich, Zoltán; Elekes, Márton. Topological Hausdorff dimension and level sets of generic continuous functions on fractals. *Chaos Solitons Fractals* **45** (2012), no. 12, 1579--1589. MR3000710
2. Baker, Richard. "Lebesgue measure'' on ${\bf R}\sp \infty$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), no. 4, 1023--1029. MR1062827 **(92c:46051)**
3. Baker, Richard L. "Lebesgue measure'' on $\Bbb R\sp \infty$. II. *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), no.9, 2577--2591 (electronic). MR2054783 **(2005d:28012)**
4. Borovkov, A. A. *Kurs teorii veroyatnosteĭ.* (Russian) [A course in probability theory] *Izdat. "Nauka", Moscow,* 1972. 287 pp. MR0350784 **(50 #3276)**
5. Cichon J., Kharazishvili A., Weglorz B., Subsets of the real line, Wydawnictwo Universytetu Lodszkiero, Lodz (1995).
6. Christensen J.R., Measure theoretic zero sets in infinite dimensional spaces and applications to differentiability of Lipschitz mappings. Actes du Deuxieme Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux (Univ. Bordeaux, 1973), I, pp. 29–39. *Publ. Dep. Math.* (Lyon) **10(2)** (1973), 29–39.
7. Christensen J.R., *Topology and Borel Structure.* Amsterdam:North-Holland Publishing Company (1974).
8. Cohen, Jacob., The Earth Is Round (p < .05), *American Psychologist*, **49(12)**(1994), 997-1003.
9. Cohen P.J., The independence of the continuum hypothesis, Proc. Nat.Acad. Sci., 50 (1963), 1143–1148; 51 (1964), 105–110.
10. Citlanadze E., Bases of mathematic analysis in functional spaces(in Georgian), Tbilisi Uni-versity Press, Tbilisi (1977), 563 p
11. Engelking R., Outline of general topology, PWN, WARSAW. NORTHHOLLAND, AMSTERDAM (1974).
12. Gill, Tepper; Kirtadze, Aleks; Pantsulaia, Gogi; Plichko, Anatolij. Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces.*Funct.Approx. Comment. Math.* **50** (2014), no. 2, 401--419.
13. P.R. Halmos, Measure theory, Princeton, Van Nostrand (1950).
14. Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. Erratum: l'Some problems of diophantine approximation', *Acta Math.* 41 (1916), no. 1, 196.
15. Hardy G. H., Littlewood J. E., Some problems of diophantine approximation. *Acta Math.* 37 (1914), no. 1, 193--239.
16. Hunt B.R., Sauer T., Yorke J.A., Prevalence:A Translation-Invariant "Almost Every" On Infinite-Dimensional Spaces, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, **27(2)** (1992), no. 10, 217–238.
17. Ibramkhallilov I.Sh., Skorokhod A.V., *On well–off estimates of parameters of stochastic processes* (in Russian), Kiev (1980).
18. Jech I., The axiom of choice, North-Holland, Amsterdam (1973).
19. Jech I., Lectures in set theory, Berlin, Springer (1973).
20. Kharazishvili A.B., *Topological aspects of measure theory,* Naukova Dumka, Kiev (1984) (in Russian).

21. Kintsurashvili, Murman. On a certain question of Tepper Gill. *Georgian Int. J. Sci. Technol.* **6** (2014), no. 3, 225--227.
22. Kintsurashvili, Murman. On a certain sufficient condition of non-shyness in some Banach spaces. Tbilisi International Conference on Computer Science and Applied Mathematics, Sokhumi State University, March 21-23, 2015, Tbilisi. http://www.ticcsam.sou.edu.ge
23. მ. კინწურაშვილი, ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევებით განსაზღვრულ ძალდებულ შეფასებათა კლასიფიკაცია ჰაარის ნულ სიმრავლეთა და ”გავრცელების” ტერმინებში, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ) ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის XXVIII გაფართოებული სხდომები , 22-24 აპრილი, 2014.
24. Kuipers L., Niederreiter H., *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney (1974).
25. G.Pantsulaia , On generators of shy sets on Polish topological vector spaces, *New York J. Math.*,14 (2008) , 235 – 261.
26. G.Pantsulaia, Invariant and quasiinvariant measures in infinite-dimensional topological vector spaces. *Nova Science Publishers, Inc., New York,* 2007. xii+234 pp.
27. Pantsulaia G., M.Kintsurashvili, Why is Null Hypothesis rejected for''almost every'' infinite sample by some Hypothesis Testing of maximal reliability?, *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications,* Volume 11, Number 1(2014), 45-70.
28. Pantsulaia G., Kintsurashvili M., An effective construction of the strong objective infinite-sample well-founded estimate, *Proc. A. Razmadze Math. Inst. 166 (2014), 113–119.*
29. Pantsulaia G., Kintsurashvili M., An objective infinite-sample well-founded estimate of a useful signal in one-dimensional linear stochastic model, Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Volume 28(2014), 90-93.
30. Pantsulaia G., On a certain partition of the non-locally compact abelian Polish group $\Bbb {R\sp N}$. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 149 (2009), 75--86 .
31. Shi H., Measure-Theoretic Notions of Prevalence, PH.D. DISSERTATION (UNDERBRIAN S.THOMSON), SIMON FRASER UNIVERSITY, OCTOBER (1997).
32. Shiryaev A.N., Probability (in Russian), *Izd.”Nauka”,* Moscow, 1980
33. Mycielski J., Swierczkowski S., On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness, *Fund.*, 54,(1964), 67-71.
34. Nunnally, Jum., The place of statistics in psychology, *Educational and Psychological Measurement*, **20 (4)** (1960), 641- 650.
35. Vinogradow I., On fractional parts of certain functions. *Ann. of Math.* (2) 37 (1936), no. 2, 448-455.
36. Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire *G*-powers of shift-measures on R, *Ukrainian Mathematical Journal,* v. 65, issue 4 (2013), 470 – 485.