

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

*ხელნაწერის უფლებით*

ნონა ოზბეთელაშვილი

თერმოელექტრო დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების  
გამოკვლევა პრიზმატული  
სხეულებისათვის

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად  
წარდგენილი დისერტაციის  
ავტორეფერატი

თბილისი

2015 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში  
სამშენებლო ფაკულტეტი  
საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობაში ტექნიკური ექსპერტიზის  
დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: **დავით გორგიძე**, ტ.მ.დ., პროფესორი  
**ზურაბ ციციშვილი**, ფ.მ.მ.კ.,  
აკად. დოქტორი, პროფესორი

რეცენზენტები: \_\_\_\_\_ **მურმან კუბლაშვილი**, ფ.მ.მ.დ., პროფესორი

\_\_\_\_\_ **თამაზ ოზგაძე**, ტ.მ.დ., პროფესორი

დაცვა შედგება 2015 წლის თებერვალს, 13 საათზე, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე.

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77, კორპუსი I, აუდიტორია .

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ის ბიბლიოთეკაში,  
დისერტაციის ავტორეფერატის - სტუ-ის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი,  
პროფესორი

\_\_\_\_\_/დემურ ტაბატაძე/

## ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

**თემის აქტუალობა.** დრეკადობის თეორიის ძირითადი დებულებები, ამოცანები და მეთოდები უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობდნენ და თამაშობენ სხვადასხვა კონსტრუქციების სიმტკიცეზე გაანგარიშების მეთოდების ჩამოყალიბებასა და განვითარების საქმეში. ამ განვითარების ისტორიულ გზაზე შეიძლება თვალი გავადევნოთ ორ პერიოდს. პირველი პერიოდი დაიწყო XVIII საუკუნის ბოლოს და XIX საუკუნის დასაწყისში, ჟ.ლ. ლაგრანჟისა და ჟ. ფურიეს ფუნდამენტალური ნაშრომებიდან. ცვლადთა განცალების მეთოდით, მათ შესძლეს უმარტივესი არეებისათვის, ე.წ. კანონიკური არეებისათვის – წრისთვის, კვადრატისთვის, ცილინდრისთვის, სფეროსთვის სასაზღვრო ამოცანების მთელი რიგი ამოხსნების მიღება. ამ მეთოდის შემდგომი განვითარება უკავშირდება მის გამოყენებას უფრო რთული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნას და ამონახსნების წარმოდგენას ჰარმონიული და ბიჰარმონიული ფუნქციების მეშვეობით. ასეთი წარმოდგენები შემოთავაზებული იყო ვ. კელვინის და პ. ტაიტის, მ.ჯ. ბუსინესკის, ბ. გალერკინის, პ. პაპკოვიჩის გ. ნოიბერის და სხვათა მიერ.

ფურიეს მეთოდის განვითარების მეორე მიმართულება არის მისი გამოყენება უფრო რთული კონფიგურაციის სხეულებისათვის მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემის. აქ უნდა აღინიშნოს პ. შიფის, პ. პაპკოვიჩის, ა. ლურიეს, ვ. გრინჩენკოს, ი. პოდელჩუკის და სხვათა ნაშრომები.

დრეკადობის თეორიის ერთ – ერთი ნაწილია სივრცითი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები. დრეკადობის თეორიის განვითარების თანამედროვე ეტაპისათვის დამახასიათებელია ზოგადი თეორიული პრობლემების კვლევისა და შესწავლის პროცესის მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი (საინჟინრო) ამოცანების გადაწყვეტასთან. აღსანიშნავია, რომ სივრცით ამოცანებს პრაქტიკულად გამოიყენებენ სამშენებლო კონ-

სტრუქციების და მანქანების დეტალების სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას, ფუძე-სადირკვლების პროექტირებისას და ა.შ.

ახალი, კომპოზიციური მასალების შექმნამ და მშენებლობაში, ზუსტ და უზუსტეს მანქანათმშენებლობაში მათი ფართოდ გამოყენებისას, მკვლევარების წინაშე დასვა ამოცანა ანიზოტროპული, კერძოდ ტრანსტროპული (ტრანსვერსალურად-ანიზოტროპული) სხეულებისათვის დამუშავებულიყო, თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების, ცვლადთა განცალების მეთოდით ანალიზური ანუ ზუსტი ამოხსნის ეფექტური მეთოდები. მართალია, ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენება შეზღუდულია იმით, რომ იგი გამოიყენება მხოლოდ კანონიკური სახის არეებისათვის, ე.ი. არეებისათვის, რომლებიც შემოსაზღვრული არიან ამა თუ იმ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით, მას მაინც დიდი ღირებულება აქვს. მისი გამოყენებისას უფრო ღრმად და სრულად იჩენს თავს თერმოელექტრო დრეკადი ველის დამახასიათებელი თვისებები, ხოლო ამონახსნის აგებისას მათემატიკურ პროცედურებს შეიძლება მიეცეს ზუსტი ფიზიკური ინტერპრეტაცია. გარდა ამისა, ზუსტი ამოხსნა ერთადერთი მსაჯულია სხვადასხვა მიახლოებითი მეთოდების შედარებებისას და მათი ეფექტურობის განსაზღვრისას. ამიტომ თერმოელექტროდრეკადობის სხვადასხვა სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ცვლადთა განცალების მეთოდით ამოხსნას (იგულისხმება მრავალფენიანი მართკუთხა პარალელეპიპედის, წრიული ცილინდრული სხეულების თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა), რომელიც მოყვანილია სადისერტაციო ნაშრომში აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა. აგრეთვე უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ მნიშვნელოვანია როგორც ახალი მეთოდების დამუშავება, ასევე უკვე არსებული მეთოდების სრულყოფა და ამიტომაც ეს საკითხი ყოველთვის იყო და დარჩება აქტუალურ ამოცანად.

**ნაშრომის მიზანი.** სადისერტაციო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში პრიზმატული სხეულე

ბისათვის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელის შექმნა. მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც სათანადო სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებთან ერთად აღწერს სამგანზომილებიანი პრიზმატული სხეულობის დრეკად წონასწორობას.

ამ მიზნის მისაღწევად ნაშრომში დასმულია და ამოხსნილია შემდეგი ამოცანები:

- ა) ტრანსვერსალურად-იზოტროპული მართკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით ;
- ბ) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო პარალელეპიპედის თემოელექტროდრეკადი წონასწორობა;

ამ ამოცანების საფუძველზე დამუშავებულია შემდეგი ალგორითმები:

ოპტიმალური წონის ანუ ოპტიმალური სისქის ფილის გაანგარიშებისათვის ;

- მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს შებრუნებული ამოცანის გადასაწყვეტად. ამისათვის დამუშავებულია შესაბამისი ალგორითმი.

**კვლევის ობიექტი და საგანი.** კვლევის ობიექტია პრიზმატული სხეულები, ხოლო საგანი – პრიზმატული სხეულების დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება.

**კვლევის მეთოდები.** სადისერტაციო ნაშრომის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძველად გამოყენებულია მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები, ცვლადთა განცალების მეთოდი, სპეციალური ფუნქციების თეორია, მწკრივების თეორია.

**სამეცნიერო სიახლე.** სადისერტაციო ნაშრომის შედეგების მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს მოდელებისა და მეთოდების დამუშავებაში. განზოგადებულ კოორდინატთა სისტემაში აგებულია დრეკადობის თეორიის ამოცანათა კლასისათვის ზოგადი ამონახსნი  $C^3(\Omega)$  კლასში ( $C^3(\Omega)$  წარმოადგენს  $\Omega$  არეში სამჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა კლასს), რომელიც ამ ტიპის სხეულებისათვის, სათანადო სასაზღვრო

პირობების დროს, სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ეფექტურად აგების საშუალებას იძლევა. გადაადგილებები და ძაბვები გამოისახებიან მწკრივების სახით. მწკრივებში შემავალი კოეფიციენტები ცხადი სახით წარმოიდგებიან სათანადო ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების საშუალებით.

მიღებული შედეგები გამოიყენება პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად, რომლებსაც დიდი მნიშვნელობა აქვთ სხვადასხვა სამშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშებისას, მანქანათამშენებლობაში და ა.შ.

**ნაშრომში მიღებული შედეგები თეორიული მნიშვნელობა** ისაა, რომ მათი ერთობლიობა შეიძლება კვალიფიცირებული იქნეს თერმოდრეკადობის თეორიაში ახალ მიდგომად, როცა სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისას სისტემურად გამოიყენება სიმეტრიის და ანტისიმეტრიის პირობები, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შეცვლა მოდიფიცირებული პირობებით, წონასწორობის განტოლებების დივერგენტულ–როტორული ფორმით, სასაზღვრო ამოცანების წარმოდგენა ორი სასაზღვრო ამოცანის სუპერპოზიციის სახით.

**ნაშრომის პრაქტიკული მნიშვნელობა.** მიღებული შედეგების პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, ნაშრომში განხილული ნაწილობრივი ჩამაგრებები (I. *არაბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი (თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა).* II. *არაბრტყელი წახნაგი ებჯინება აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს. ცხადია, რომ სხეულის ზედაპირის ფორმა სავსებით იდენტურია არაბრტყელი წახნაგის, რადგანაც არაბრტყელი წახნაგის ყველა წერტილი უნდა ეხებოდნენ სხეულის გლუვი ზედაპირის შესაბამის წერტილებს. სხვანაირად პირველ შემთხვევაში წახნაგის წერტილებს არ შეუძლიათ გადაადგილება ზედაპირის მხების გასწვრივ, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. მეორე შემთხვევაში წერტილებს არ შეუძლიათ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გადაადგილება, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის მხების გასწვრივ.*) გვხვდება სამშენებლო კონსტრუქციებში,

ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებში, მანქანათამშენებლობაში და ა.შ. კერძოდ, პირველი ტიპის ჩამაგრებით შეიძლება სამშენებლო კონსტრუქციების სახსრული (თავისუფალი) დაყრდნობის, მსუბუქი შემავსებლით სქელი ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის და ა.შ მოდელირება. არანაკლებ მნიშვნელოვანია მეორე ტიპის ჩამაგრება. კერძოდ, ამ შემთხვევაში შესაძლებელია გლუვი შტამპისა და დრეკადი სხეულის კონტაქტის მოდელირება ან კიდევ ეგრეთ წოდებული სამშენებლო კონსტრუქციების სრიალა ჩამაგრების მოდელირება. ერთი სიტყვით, პირველი და მეორე ჩამაგრების პრაქტიკული მნიშვნელობა არა ნაკლებია ვიდრე, მაგალითად, კონსტრუქციის ხისტი ჩამაგრება და ისინი უფრო ხშირად გამოიყენება.

**შედეგების გამოყენების სფერო** განსზღვრულია იმით, რომ მათი გამოყენება რეალურად შესაძლებელია პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად სრულიად სხვადასხვა დარგში. ესენია, მაგალითად, მშენებლობა, ზუსტი მანქანათამშენებლობა და სხვა.

**ძირითადი სამეცნიერო მტკიცებულებების სანდოობა.** სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი სამეცნიერო დებულებები და ჩამოყალიბებული დასკვნების სანდოობა უზრუნველყოფილია იმით, რომ:

- ყველა შედეგი მიღებულია გააზრებული დაშვებებისა და მეთოდების საფუძველზე, რომლებიც დღეს მიჩნეულია სამართლიანად;
- გამოტანილი თეორიული დასკვნები შედარებულია ქართველ და უცხოელ მკვლევართა ცნობილ შედეგებთან.

**ნაშრომის აპრობაცია.** სადისერტაციო ნაშრომის, როგორც ცალკეული, ისე ძირითადი შედეგები მოხსენიებული იქნა სადოქტორო პროგრამით გათვალისწინებულ ორ სემინარზე და საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციაზე. გარდა ამისა, სადისერტაციო ნაშრომის მასალების მიხედვით გამოქვეყნებულია 4 სამეცნიერო შრომა.

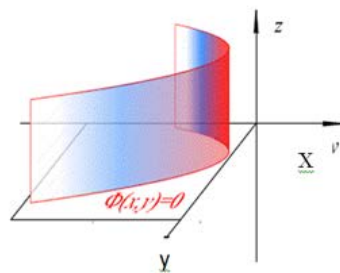
**ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა:** დისერტაციის სტრუქტურა განსაზღვრულია კვლევის დასმული ამოცანებით და დასახული მიზნებით. იგი შედგება შედგება შესავლის, სამი თავისაგან, ძირითადი დასკვნისაგან და გამოყენებული ლიტერატურისაგან. სადისერტაციო ნაშრომი შეიცავს 118 ნაბეჭდ გვერდს, 13 ნახაზს. ლიტერატურის ჩამონათვალი შეიცავს 97 დასახელებას 10 გვერდზე.

დისერტაციის სტრუქტურული ერთეულების შინაარსი ასეთია:

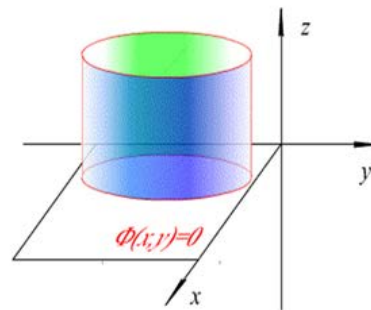
*განვიხილოთ საკვალიფიკაციო ნაშრომის შინაარსი თავების მიხედვით.*

თავის პირველი პარაგრაფი მიმოხილვითი ხასიათისაა. მოცემულია იმ ნაშრომთა კრიტიკული ანალიზი, რომლებიც უშუალოდაა დაკავშირებული დისერტაციაში განხილულ საკითხებთან. მოცემულია ამოცანის დასმა.

*პირველი თავის მეორე პარაგრაფში განსაზღვრულია სასაზღვრო ამოცანების ის კლასი, რომელიც შემდგომ შეისწავლება მთელ ნაშრომში, განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში განიხილება მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედის თერმო-ელექტრო დრეკადი წონასწორობა (ნახა.-ები. 1; 2; 3; 4)*



ნახ.1. ცილინდრული ზედაპირი.  
(პარაბოლური ცილინდრი)



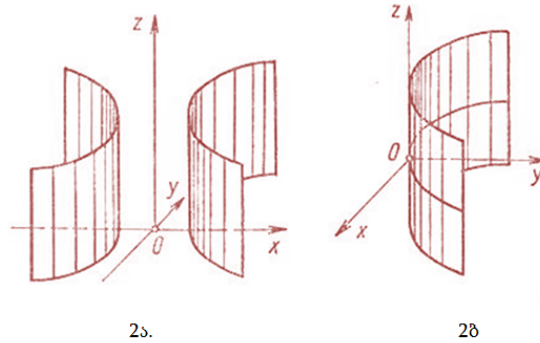
ნახ. 2. ცილინდრული ზედაპირი.  
(ელიფსური ცილინდრი)

მიღებულია ლამეს განტოლებების ანალოგიური სისტემა, რომელიც ჰუკის კანონთან ერთად ქმნის დრეკადი წონასწორობის განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემას.

*სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში, რომელიც ხუთი პარაგრაფისაგან შედგება, ეძღვნება სქელი ტრანსვერსალურად-იზოტროპული ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობის პოვნას. პირველ პარაგრაფში მოყვანილია*

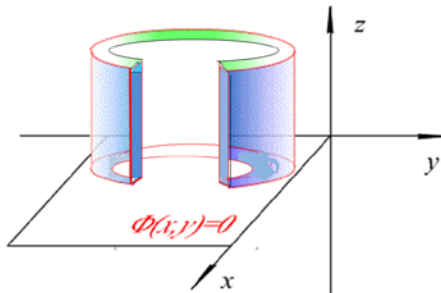


სუსტად ტრანსტროპული (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული) ფილისათვის თერმოდრეკადობის წონასწორობის განტოლებები სხვადასხვა სახით და განსახილავ სასაზღვრო ამოცანათა კლასის განმსაზღვრელი

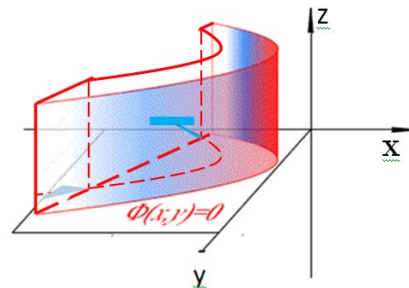


ნახ. 2ა. ჰიპერბოლური ცილინდრული ზედაპირი;  
 2ბ. პარაბოლური ცილინდრული ზედაპირი.

სასაზღვრო პირობები. მეორე პარაგრაფში სქელი ფილისათვის მიღებულია თერმოდრეკადობის წონასწორობის განტოლებები, მოყვანილია ზუსტი ამონახსნები, მოცემულია სასაზღვრო ამოცანების დასმა. შემდეგ, მესამე პარაგრაფში, რომელიც ყველაზე ვრცელია და მნიშვნელოვანია ნაშრომში, სქელი ფილისათვის განხილულია სპეციალური სახის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით.



ნახ. 3. დრუიანი ელიფსური ცილინდრი



ნახ. 4. ჰიპერბოლური ცილინდრი

მეოთხე პარაგრაფში განხილულია თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილისათვის ლუნვის ანალოგიური ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით. მეხუთე პარაგრაფში განხილულია მრავალფენიანი სქელი ფილა. კერძოდ, ხუთფენიანი ფილისათვის მიღებული მეთოდით ამოხსნილია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა.

მესამე თავი, რომელიც ორი პარაგრაფისაგან შედგება, ეხება სასაზღვრო ამოცანებს ცილინდრული სხეულებისათვის თერმოდრეკადი წონასწორობის პოვნას. იგულისხმება, რომ სხეული შემოსაზღვრულია ცილინდრულ

კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით. ნაშრომში განხილული ამოცანები ზოგიერთი საინჟინრო ამოცანების ამოხსნის საშუალებას იძლევა. მაგალითად, ნავთობის შესანახი რეზერვუარების, ფუძე-სადირკველში ჩადებული სქელი ფილების დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობას.

დასკვნაში მოყვანილია ნაშრომის ძირითადი შედეგები.

**დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებული შრომები.** დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია 4 ნაშრომი. მათ შორის ერთი ინგლისურ ენაზე. პუბლიკაციათა ნუსხა მოცემულია ავტორეფერატის ბოლოში.

**პირადი წვლილი.** დასმულ ამოცანათა იდეა და შემოთავაზება ეკუთვნის თემის სამეცნიერო ხელმძღვანელებს. თანაავტორობით გამოქვეყნებულ ყველა ნაშრომში ვარ მთავარი შემსრულებელი.

მე მეკუთვნის ასევე შედეგების ანალიზი და ინტეპრეტაცია, მათი შედარება სხვა ავტორების მიერ (ან სხვა მეთოდებით) მიღებულ შედეგებთან.

## **დისერტაციის ძირითადი შინაარსი**

**შესავალში** დასაბუთებულია სადისერტაციო ნაშრომის ტემის აქტუალობა, ჩამოყალიბებულია კვლევათა მიზნები და ძირითადი ამოცანები, დასაცავად გამოტანილი დებულებები და მათი პრაქტიკული მნიშვნელობა, ასევე განხილულია ცალკეული თავების მოკლე შინაარსი.

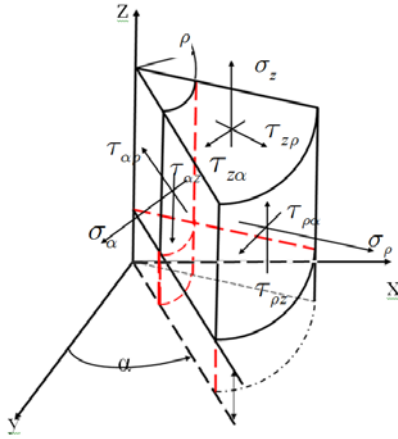
**თავი1.** ამ თავის პირველი პარაგრაფი მიმოხილვითი ხასიათისაა. მოცემულია იმ ნაშრომთა კრიტიკული ანალიზი, რომლებიც უშუალოდაა დაკავშირებული დისერტაციაში განხილულ საკითხებთან. მოცემულია ამოცანის დასმა. სადისერტაციო ნაშრომში ჩამოყალიბებულია და ამოხსნილია შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

- ა) ტრანსვერსალურად-იზოტროპული მართკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით;
- ბ) თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილისათვის ღუნვის ანალოგიური ამოცანები;
- გ) მრავალფენიანი სქელი ფილებისათვის ღუნვის ანალოგიური

ამოცანები;

დ) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო

პარალელეპიპედის თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა;



ნახ.5. განზოგადებული ცილინდრული კოორდინატების სისტემის მრუდწირული საკოორდინატი პარალელეპიპედი

მეორე პარაგრაფში მოყვანილია თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითადი დამოკიდებულებები და წონასწორობის განტოლებები სხვადასხვა ფორმით განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში. განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში განვიხილოთ მრუდწირული საკოორდინა-

ტო პარალელეპიპედი, რომელსაც უკავია

$$\bar{\Pi} = \{(\rho, \alpha, z) \in R : \rho_0 < \rho < \rho_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; 0 < z < z_1\} \text{ არე;}$$

თერმოელექტრო დრეკადობის წონასწორობის განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე :

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial(h\sigma_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{h} \frac{\partial(h^2\tau_{\rho\alpha})}{\partial\alpha} + h^2 \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial\rho} \sigma_\alpha = 0, \\ b) \quad & \frac{\partial(h\sigma_\alpha)}{\partial\alpha} + h^2 \frac{\partial\tau_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial(h^2\tau_{\alpha\rho})}{\partial\rho} - \frac{\partial h}{\partial\alpha} \sigma_\rho = 0, \\ c) \quad & h^2 \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial(h\tau_{\rho z})}{\partial\rho} + \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial\alpha} = 0, \\ & \frac{1}{h^2} \frac{\partial(h D_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial(h D_\alpha)}{\partial z} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

გადაადგილებებსა და ძაბვებს შორის კავშირს ანუ ჰუკის განზოგადებულ კანონს (მას ზოგი ავტორი ფიზიკურ კანონსაც უწოდებს) განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= c_1 \varepsilon_{\rho\rho} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\rho\rho} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \end{aligned}$$

$$\sigma_z = c_3(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2\varepsilon_{zz} - e_2E_z - \beta_{20}T, \quad (2)$$

$$\tau_{\alpha z} = c_4 \varepsilon_{\alpha z} - e_3 E_\alpha, \quad \tau_{\rho z} = c_4 \varepsilon_{\rho z} - e_3 E_\rho, \quad \tau_{\rho\alpha} = c_5 \varepsilon_{\rho\alpha},$$

$$D_\rho = e_3 \varepsilon_{\rho z} + \varepsilon_1 E_\rho, \quad D_\alpha = e_3 \varepsilon_{\alpha z} + \varepsilon_1 E_\alpha,$$

$$D_z = e_1(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + e_2\varepsilon_{zz} + \varepsilon_2 E_z.$$

$\varepsilon_{\rho\rho}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{\rho\alpha} = \varepsilon_{\alpha\rho}$ ,  $\varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho}$ ,  $\varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{\alpha z}$  – დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებია;  $E_\rho$ ,  $E_z$ ,  $E_\alpha$  – ელექტრული  $\vec{E}$  ველის ვექტორის კომპონენტებია და  $\varphi$  ელექტრული პოტენციალით ასე გამოისახება  $\vec{E} = -grad \varphi$  [90].  $c_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) – მუდმივი ელექტრული ველისას გაზომილი დრეკადობის მუდმივებია;  $e_j$ , ( $j=1,2,3$ ) – პიეზოელექტრული მუდმივებია;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – მუდმივი დეფორმაციების დროს დიელექტრული გამტარობის მუდმივებია;  $\beta_{10} = [2(c_1 - c_5)\beta_1 + c_3\beta_3]$ ,  $\beta_{20} = [2c_3\beta_1 + c_2\beta_2]$

$\beta_1, \beta_2$  – იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  ღერძის გასწვრივ წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებია [28]. სხეულში  $T$  ტემპერატურა აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\Delta_2 T + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

და შესაბამის სასაზღვრო პირობებს.  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  – სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  – გასწვრივ;

$\Delta_2 = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)$ ; გავითვალისწინოთ, რომ დეკარტის მართკუთხა  $x, y, z$

კოორდინატთა სისტემაში  $h=1$ , ხოლო  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  შეიცვლება  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \alpha}$  კი  $\frac{\partial}{\partial y}$ ;

წრიულ  $r, \alpha, z$  ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ოპერაცია  $\frac{\partial}{\partial \rho}$

შეიცვლება  $r \frac{\partial}{\partial r}$ .

გადაადგილებებსა და დეფორმაციებს შორი კავშირს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial(hu)}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\partial(hv)}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial(hw)}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{\rho} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\rho\alpha} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{v}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right),$$

სადაც  $u, v, w$  – გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია  $\rho, \alpha, z$  საკოორდინატო წირების მხებების გასწვრივ.

თუ გავითვალისწინებთ (2) და (4) ტოლობებს, მაშინ (1) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით :

$$a) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_3}{c_1} K + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial(h\tau_{z\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T \right),$$

$$b) \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial(h\tau_{z\rho})}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$c) \frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial z} = 0,$$

$$d) \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial \rho} - \frac{\partial(h\tau_{z\rho})}{\partial \alpha} \right) - c_4 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{c_5} B \right) = 0,$$

სადაც

$$a) K = c_1 \left[ \frac{\partial(hu)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hv)}{\partial \alpha} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T,$$

$$b) B = c_5 \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial(hv)}{\partial \rho} - \frac{\partial(hu)}{\partial \alpha} \right], \quad (6)$$

$$d) \tau_{z\alpha} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + e_3 \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}.$$

აღსანიშნავია, რომ (6d) წარმოადგენს იგივეობას.

ქვემოთ მოგვყავს ის სასაზღვრო პირობები, რომლებიც შემდგომ განსაზღვრავენ განსახილავი სასაზღვრო ამოცანების კლასს. ამისათვის განვიხილოთ მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედის  $\bar{\Pi} = \{(\rho, \alpha, z) \in R : \rho_o < \rho < \rho_1; \alpha_o < \alpha < \alpha_1; 0 < z < z_1\}$  თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა.

სასაზღვრო პირობებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\text{როცა } \rho = \rho_j : \quad a) \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{z\rho} = 0, \quad B = 0, \quad D_\rho = 0, \quad \text{აბ} \quad (4)$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0.$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_j: a) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{z\alpha} = 0, \quad B = 0, \quad D_\alpha = 0, \quad \text{ან} \quad (5)$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

$$\text{როცა } z = z_j: a) \frac{\partial T}{\partial \alpha} = F_{j1}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \quad b) \quad T = F_{j2}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \quad (6)$$

$$c) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \Theta_j T = F_{j3}(\rho, \alpha),$$

$$\text{როცა } z = z_j: a) \quad \phi = F_{j4}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \quad b) \quad D_z = F_{j5}(\rho, \alpha). \quad (7)$$

$$\text{როცა } z = z_j: a) \quad \sigma_z = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\rho} = F_{j7}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\alpha} = F_{j8}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \quad (8)$$

$$b) \quad w = f_{j1}(\rho, \alpha), \quad hu = f_{j2}(\rho, \alpha), \quad hv = f_{j3}(\rho, \alpha), \quad \text{ან}$$

$$c) \quad \sigma_z = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad hu = f_{j2}(\rho, \alpha), \quad hv = f_{j3}(\rho, \alpha), \quad \text{ან}$$

$$d) \quad w = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\rho} = F_{j7}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\alpha} = F_{j8}(\rho, \alpha).$$

აქ  $j = 0, 1$ . ამასთან  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ .  $F_{jl}(\rho, \alpha)$ ,  $f_{jl}(\rho, \alpha)$  – მოცემული ფუნქციებია.

ნაშრომში განხილული ამოცანების ფიზიკური მოდელი შეიძლება ასე ჩამოვყალიბოთ:

ვიპოვოთ ორთოგონალური მრუდწირული საკორდინატო პარალელეპიპედის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა, როდესაც მის ორ პარალელურ წახნაგზე გარდა თერმული და ელექტრული ველისა, აგრეთვე მოცემულია ზედაპირული შემფოთება ძაბვების, გადაადგილებების ან მათი კომბინაციის სახით, ხოლო დანარჩენი წახნაგები ნაწილობრივ ჩამაგრებულია და თერმო-ელექტროიზოლირებულია ან ტემპერატურა ნულის ტოლია.

ნაწილობრივ ჩამაგრებაში იგულისხმება, რომ ამ წახნაგებზე სრულდება ზემოთმოყვანილი (3) და (4) სასაზღვრო პირობები. ამ სასაზღვრო პირობების ტექნიკური ინტერპრეტაცია კი შემდეგნაირია: 1) ან არაბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი (თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა) 2) ან არაბრტყელი წახნაგი ებჯინება აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს. ცხადია, რომ სხეულის ზედაპირის ფორმა სავსებით იდენტურია არაბრტყელი წახნაგის, რადგანაც

არაბრტყელი წახნაგის ყველა წერტილი უნდა ეხებოდეს სხეულის გლუვი ზედაპირის შესაბამის წერტილებს. სხვანაირად პირველ შემთხვევაში წახნაგის წერტილებს არ შეუძლიათ გადაადგილება ზედაპირის მხების გასწვრივ, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. მეორე შემთხვევაში წერტილებს არ შეუძლიათ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გადაადგილება, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის მხების გასწვრივ.

პირველი და მეორე ტიპის ნაწილობრივი ჩამაგრებები გვხვდება სამშენებლო კონსტრუქციებში, ჰიდრიტექნიკურ ნაგებობებში, მანქანათმშენებლობაში და ა.შ. კერძოდ, პირველი ტიპის ჩამაგრებით შეიძლება სამშენებლო კონსტრუქციებში სახსრული (თავისუფალი) დაყრდნობის, მსუბუქი შემავსებლით სქელი ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის და ა.შ მოდელირება. არანაკლებ მნიშვნელოვანია მეორე ტიპის ჩამაგრება. კერძოდ, ამ შემთხვევაში შესაძლებელია გლუვი შტამპისა და დრეკადი სხეულის კონტაქტის მოდელირება ან კიდევ ეგრეთ წოდებული სამშენებლო კონსტრუქციების სრიალა ჩამაგრების მოდელირება. ერთი სიტყვით პირველი და მეორე ჩამაგრების პრაქტიკული მნიშვნელობა არა ნაკლებია ვიდრე, მაგალითად კონსტრუქციის ხისტი ჩამაგრება და ისინი უფრო ხშირად გამოიყენება.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ რაც უფრო მცირეა ცილინდრული სასაზღვრო  $\rho = \rho_j$  ზედაპირის სიმრუდე, მით უფრო მცირეა განსხვავება (3.a). (3.b) პირობების შესაბამისი,

$$\begin{aligned}
 a) \quad & u = 0, \quad \tau_{\alpha\rho} = 0, \quad \tau_{z\rho} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \quad D_\rho = 0 \quad \text{და} \\
 b) \quad & \sigma_\rho = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

პირობებისაგან, როცა  $\rho = \rho_j$ . (3.a). (3.b) პირობები ეკვივალენტურია (9a) და (9b) პირობებისა იმ შემთხვევაში, როდესაც  $\rho = \rho_j$  - სიბრტყეა.

წონასწორობის განტოლებების ზემოთ მიღებული ფორმა და სასაზღვრო პირობების სპეციალური კლასი საშუალებას იძლევა მივიღოთ (2)-(3) სისტემის სრული ამოხსნა. უფრო მეტიც, რომ შევძლოთ ამ ნაშრომში

დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად ფურიეს მეთოდი გამოყენება, ხელსაყრელია მივიღოთ (8) სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტური პირობები, რომელიც წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით. როცა

$$\begin{aligned}
 z = z_j : a) \quad & \sigma_z = F_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(h\tau_{z\rho}, h\tau_{z\alpha}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha), \\
 & \Gamma_2(h\tau_{z\alpha}, h\tau_{z\rho}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha); \\
 b) \quad & w = f_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(hu, hv) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha), \\
 & \Gamma_2(hv, hu) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha); \\
 c) \quad & w = f_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(h\tau_{z\rho}, h\tau_{z\alpha}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha), \\
 d) \quad & \sigma_z = F_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(hu, hv) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha), \\
 & \Gamma_2(hv, hu) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_2(h\tau_{z\alpha}, h\tau_{z\rho}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha);
 \end{aligned} \tag{10}$$

სადაც  $\Gamma_1(g_1, g_2) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial \rho} + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \right)$ ,  $\Gamma_2(g_2, g_1) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial \rho} - \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \right)$ , ამასთან

$g_1 = h\tau_{z\alpha}$ , ან  $g_1 = hu$   $g_2 = h\tau_{z\alpha}$  ან  $g_2 = hv$ . მივიღოთ, რომ ფუნქციები

$\square F_j(\rho, \alpha)$  და  $\square f_j(\rho, \alpha)$  თვითონ, ხოლო  $F_j(\rho, \alpha)$ ,  $f_j(\rho, \alpha)$  და  $\tilde{F}_j(\rho, \alpha)$  წარმოიდგინებინათ თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით (ფურიეს მწკრივი შტურმ-ლიუვილის გარკვეული ამოცანების საკუთრივი ფუნქციების სახით). ამ ფაქტს ასე აღვნიშნავთ:  $(u, v, w) \in C_0^3(\Pi)$ . რადგან ჩვენი მიზანია მივიღოთ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამოხსნა, ამიტომ, ჩამოვყალიბოთ რეგულარული ამონახსნის ცნება.

(2)-(3) სისტემის  $u, v$  და  $w$  ფუნქციებით განსაზღვრულ ამონახსნას ვუწოდოთ რეგულარული, თუ  $u, v$  და  $w$  არიან სამჯერ უწყვეტად წარმოებადი  $\square H$  არეში, სადაც  $\square H$  არის  $\Pi$  მრუდწირული პარალელეპიპედის შიგა არე  $\rho = \rho_j$  და  $\alpha = \alpha_j$  საზღვრების ჩათვლით. პარალელეპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეზე, ე.ი., როცა  $z = z_j$  ისინი წარმოიდგინებინათ თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით. სასაზღვრო ამოცანათა კლასისათვის აგებულია შემდეგი ზოგადი ამონახსნი.



$$w = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \phi$$

$$hv = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho},$$

$$hu = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha}.$$

სადაც  $\Psi_0$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  და  $\phi$  აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს

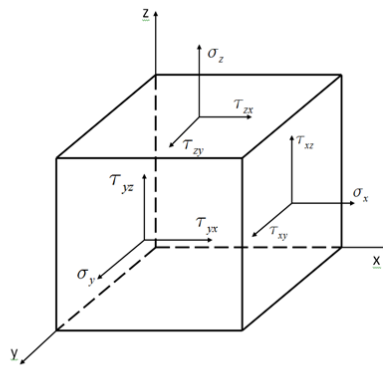
$$\Delta_2 \Psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \phi \right] - \frac{c_3 e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \quad (11)$$

$$\frac{c_3 e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = 0,$$

$$\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3 e_3}{c_1 c_4} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{e}{c} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0.$$

მეორე თავის პირველ ორ პარაგრაფში მოყვანილია თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ძირითადი დამოკიდებულებები და წონასწორობის განტოლებები სხვადასხვა ფორმით. შემდეგ მესამე პარაგრაფში განხილულია სქელი ფილისათვის სპეციალური სახის ამოცანები, ხოლო



ნახ. 6. მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის სქელი ფილა

მეოთხეში ამოხსნილია თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით.

განვიხილავთ სქელი ფილის თერმოდრეკად წონასწორობას. პირველ რიგში აღვნიშნოთ, რომ ფილა ტრანსტროპულია (ტრანსვერსალურ-იზო-

ტროპული). თერმული ველი სტაციონალურია. მასზე არ მოქმედებს ელექტრული ველი. (4) –(5) გამოსახულებები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
 b) \quad & \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \\
 c) \quad & \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\
 d) \quad & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \rho} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z} = 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
 a) \quad & K = c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
 b) \quad & B = c_5 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
 c) \quad & \tau_{zx} = c_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 d) \quad & \tau_{zy} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

წონასწორობის განტოლებების მიღებული ფორმა და სასაზღვრო ამოცანების გამოყოფილი სპეციალური კლასი საშუალებას იძლევა მივიღოთ ზემოთ მოყვანილი სისტემის სრული ამოხსნა. ამოხსნებისათვის მიღებული წარმოდგენები აიგებიან ისეთი ფუნქციების საშუალებით, რომლებიც წარმოადგენენ რაც შეიძლება მარტივი და ცნობილი განტოლებების ამოხსნებს.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა ფილისათვის. (12) სისტემაში  $B=0$  ფუნქცია მივიღოთ ნულად. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ განვიხილავთ ისეთ ველს, როცა გადაადგილების ვექტორის  $z$  ღერძის პარალელური კომპონენტი ნულის ტოლია, ანუ  $\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . ამ ველისათვის გადაადგილების ვექტორის როტორის  $z$  მდგენელი იგივეურად ნულის ტოლია მთელ

არეში და მას უწოდებენ განზოგადებული პარალელური გადაადგილების ვექტორის როტორის მქონე ველს.

წონასწორობის განტოლებები ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
 b) \quad & \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \\
 c) \quad & \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\
 d) \quad & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

ამ სისტემის ზოგად ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right), \\
 v &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right), \\
 w &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},
 \end{aligned} \tag{15}$$

სადაც  $\varphi_2$  და  $\varphi_3$  ფუნქციები შემდეგი სისტემის ამონახსნებია

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \gamma_1 \Delta_2 \varphi_2 + \gamma_3 \Delta_2 \varphi_3 - \gamma_4 T &= 0, \\
 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \gamma_1 \Delta_2 \varphi_3 + \gamma_2 \Delta_2 \varphi_2 + \gamma_5 T &= 0.
 \end{aligned} \tag{16}$$

თუ მივიღებთ შემდეგ აღვნიშვნებს  $\varphi_2 = \gamma_3 \Phi_2$ ,  $\varphi_3 = \Phi_3$ , მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 \bar{\Phi} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} &= 0, \\
 \Delta_2 \Phi_3 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}, \\
 \Delta_2 \Phi_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_1^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

ახლა ავაგოთ (16) სისტემის ამოხსნა და გავითვალისწინოთ, რომ  $\bar{F}$ -ს აქვს შემდეგი სახე

$$\bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1 = \frac{t_0}{2}(z^2 - \lambda_0 x^2) + \frac{t_1}{6}\left(z^3 - \frac{3\lambda_0}{2}zx^2\right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^8 (A_{Tmn} e^{-Prz} + B_{Tmn} e^{-Pr(z-z_1)}) \psi_{mn}(x, y). \quad (18)$$

აღვნიშნოთ  $\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$ -ით ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს

$$\begin{aligned} \Delta_2 \tilde{\Phi}_3 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta_2 \tilde{\Phi}_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$\Phi_2$  და  $\Phi_3$  -თვის გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_4} \tilde{T}, \\ \Phi_2 &= \tilde{\Phi}_2 + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} \end{aligned}$$

საბოლოოდ  $\varphi_2$  და  $\varphi_3$  -თვის გვექნება

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \gamma_3 \Phi_2 = \gamma_3 \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z}, \\ \varphi_3 &= \Phi_3 = \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_4} \tilde{T} \end{aligned} \quad (20)$$

ქვემოთ მოვიყვანოთ ფილისათვის დრეკად – დეფორმირებული ველის გადადგილების ვექტორის კომპონენტების წარმოდგენები  $\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$  ფუნქციების საშუალებით

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1-\lambda_0\gamma_1} \tilde{T} + \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + \frac{\gamma_3}{4c_4\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial x \partial z} + \frac{\gamma_4}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}, \\
v &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1-\lambda_0\gamma_1} \tilde{T} + \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} \right) = \\
&= \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{\gamma_3}{4c_4\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma_4}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1-\lambda_0\gamma_1} \tilde{T} + \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} \right) = \\
&= -\frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} - \left( \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} - 1 \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} - \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_4}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}, \\
K &= -\gamma_3 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\gamma_3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} \right) + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} - \\
&- 2c_5 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y \partial z} \right) \\
\sigma_y &= -\gamma_3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} \right) + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \\
&- 2c_5 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial x \partial z} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x \partial z} \right), \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= 2c_5 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y \partial z} \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_3}{2c_4\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1-\lambda_0\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z} \right),
\end{aligned}$$

სადაც  $\gamma_1, \gamma_3$  - ცნობილი მუდმივი სიდიდეებია.

განვიხილოთ ასეთი სასაზღვრო ამოცანა:

$$\text{როცა } x = x_i : u=0, \quad B=0, \quad \tau_{zx} = 0,$$

$$\text{როცა } y = y_i : v=0, \quad B=0, \quad \tau_{xy} = 0, \tag{24}$$

$$\text{როცა } z = 0 : w=0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0,$$

$$\text{როცა } z = z_1 : \sigma_z = F_{11}(x,y), \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = F_{13}(x,y), \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = F_{12}(x,y).$$

რადგან ყველა გვერდით წახნაგზე სრულდება სიმეტრიულად გაგრძელების პირობა, ამიტომ  $\tilde{\Phi}_2$ ,  $\tilde{\Phi}_3$  და  $\tilde{T}$  ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2 = & b_{22}z + b_{23} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1m} e^{\tilde{p}z} + A_{2m} e^{-\tilde{p}z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m} e^{\tilde{p}_1 z} + A_{2m} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{12} e^{\tilde{p}_1 z} + A_{2n} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3 = & b_{22}z - 2\gamma_1\gamma_4 b_{23} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{1m} e^{\tilde{p}z} + B_{2m} e^{-\tilde{p}z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (B_{1m} e^{\tilde{p}_1 z} + B_{2m} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_{12} e^{\tilde{p}_1 z} + B_{2n} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T} = & \frac{t_0}{2} (z^2 - \lambda_0 x^2) + \frac{t_1}{6} \left( z^3 - \frac{3\lambda_0}{2} z x^2 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (T_{1m} e^{\tilde{p}z} + T_{2m} e^{-\tilde{p}z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (T_{1m} e^{\tilde{p}_1 z} + T_{2m} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (T_{1n} e^{\tilde{p}_1 z} + T_{2n} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \end{aligned}$$

$$\text{სადაც } \tilde{p} = \sqrt{\gamma_1 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}, \quad \tilde{p}_1 = \sqrt{\gamma_1 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2}, \quad \tilde{p}_2 = \sqrt{\gamma_1 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}.$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ფილის გვერდით წახნაგებზე გვაქვს ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები ანუ სრულდება შემდეგი პირობები. ე.ი. მოცემულია

$$\begin{aligned} x=0, a: & K=0, v=0, w=0; \\ y=0, b: & K=0, u=0, w=0. \end{aligned} \quad (26)$$

რაც შეეხება ფილის პირით ზედაპირებს, მასზე მოქმედებს გარე დატვირთვები. კერძოდ, როცა

$$z=h: \quad \tau_{zx} = f_1^+(x, y), \quad \tau_{zy} = f_2^+(x, y), \quad \sigma_z = f_3^+(x, y), \quad (27)$$

$$z=-h: \quad \tau_{zx} = f_1^-(x, y), \quad \tau_{zy} = f_2^-(x, y), \quad \sigma_z = f_3^-(x, y). \quad (28)$$

გავითვალისწინოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი სასაზღვრო ამოცანა შეგვიძლია დავყოთ ორ უფრო მარტივ სასაზღვრო ამოცანად. ამისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$q_1 = \frac{1}{2}(f_1^+ - f_1^-), \quad q_2 = \frac{1}{2}(f_2^+ - f_2^-), \quad q_3 = \frac{1}{2}(f_1^- + f_1^-), \quad q_4 = \frac{1}{2}(t_1^- + t_1^-) \quad (29)$$

$$s_1 = \frac{1}{2}(f_1^+ + f_1^-), \quad s_2 = \frac{1}{2}(f_2^+ + f_2^-), \quad s_3 = \frac{1}{2}(f_3^- - f_3^+), \quad s_4 = \frac{1}{2}(t_3^- - t_3^+) \quad (30)$$

და მაშინ ცალ-ცალკე უნდა ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

$$z = \pm h: \quad \tau_{zx} = \pm q_1, \quad \tau_{zy} = \pm q_2, \quad \sigma_z = q_3, \quad \tilde{T} = \pm q_4 \quad (31)$$

$$z = \pm h: \quad \tau_{zx} = s_1, \quad \tau_{zy} = s_2, \quad \sigma_z = \pm s_3, \quad \tilde{T} = \pm s_4. \quad (32)$$

(31) სასაზღვრო ამოცანაში  $z=0$  სიბრტყის მიმართ გვაქვს სიმეტრიული დატვირთვა, ხოლო (32)- ში კი ამავე სიბრტყის მიმართ ანტისიმეტრიული დატვირთვა. პირველი ამოცანის შემთხვევაში  $u$  და  $v$  გადაადგილებები  $z=0$  სიბრტყის მიმართ ლუწი ფუნქციებია, ხოლო  $w$  კი კენტი ფუნქციაა, ამიტომ ეს სიბრტყე წარმოადგენს სიმეტრიული გაგრძელების სიბრტყეს და მასზე  $w=0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . მაშასადამე, ეს სიბრტყე იჭიმება ან იკუმშება.

მეორე ამოცანაში  $u$  და  $v$  გადაადგილებები  $z=0$  სიბრტყის მიმართ კენტი ფუნქციებია, ხოლო  $w$  კი ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ ეს სიბრტყე წარმოადგენს ანტისიმეტრიული გაგრძელების სიბრტყეს და მასზე  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . მაშასადამე, ამ შემთხვევაში სიბრტყე განიცდის ღუნვას.

როგორც ვხედავთ განხილული სასაზღვრო ამოცანები მათემატიკურად სავსებით ანალოგიური არიან. მაგრამ მექანიკური თვალსაზრისით კი ეს ამოცანები მეტად ყურადსაღებია. პირველ შემთხვევაში განხილული ამოცანა წარმოადგენს სახსრულად დაყრდნობილი სქელი ფილის ნორმალური დატვირთვით გამოწვეულ ღუნვის ამოცანას როდესაც ფილაზე მოქმედებს თერმული ველი. მართლაც, ამ შემთხვევაში, ფილის  $z=0$  შუა ზედაპირის ყოველი წერტილი განიცდის მხოლოდ ჩაღუნვას. ეს არის მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც  $z = \pm \frac{h}{2}$  სიბრტყეებზე მოქმედებს ანტისიმეტრიული ნორმალური დატვირთვა. სულ სხვა სურათს აქვს ადგილი მაშინ, როდესაც  $z = \frac{h}{2}$  მოცემულია ნორმალური დატვირთვა,

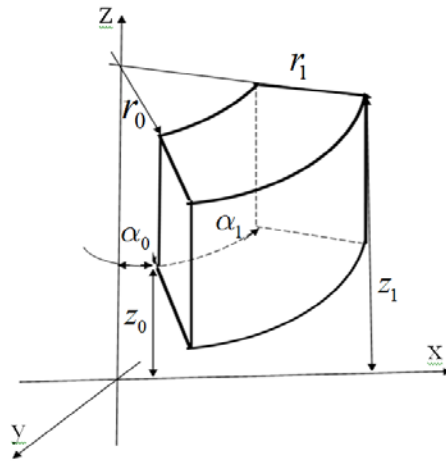
ხოლო  $z = -\frac{h}{2}$  კი თავისუფალია დატვირთვისაგან. ამ შემთხვევაში სასაზღვრო ამოცანა შესაძლებელია დაიყოს ორ ამოცანად: სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული დატვირთვებით. ამ ამოცანებიდან, მეორე გვადლევს ღუნვის ანალოგიურ ამოცანას, ხოლო პირველი, რადგან შუა ზედაპირზე გვაქვს გადადგილების ვექტორის არანულოვანი  $u$  და  $v$  მდგენელები, ამიტომ ის წარმოადგენს კუმშვა – გაჭიმვის ანალოგს. სქელი ფილის ჩაღუნვის ეფექტი შეუძლია მოგვცეს გარკვეული სახის მხებ დატვირთვამაც, როცა ნორმალური დატვირთვა არა გვაქვს.

სქელი ფილების თეორია იზოტროპული სხეულებისათვის, რომელიც დაფუძნებულია დრეკადობის თეორიის წონასწორობის განტოლებებზე და სენ – ვენანის პირობებზე, პირველად აგებული იყო მიჩელის მიერ და შემდგომ დაწვრილებით განიხილა ლიავმა თავის მონოგრაფიაში „Математическая теория упругости“. ამ ამოცანების მათემატიკური სირთულეების გამო საჭირო გახდა სქელი ფილების გაანგარიშების ტექნიკური თეორიების შექმნა. ასთია, მაგალითად, რეისნერ – ბილეს, ვ. ვლასოვის თეორიები. ზემოთ განხილული შემთხვევებში მიღებული ზუსტი ამონახსნები საშუალებას იძლევა ამ თეორიების დაზუსტებაში, უფრო სწორედ რომ ვთქვათ, ერთმანეთთან შედარებაში ითამაშონ გარკვეული წილი. მხოლოდ უნდა გავითვალისწინოთ და ამას უნდა მიექცეს ყურადღება, რომ აუცილებლად ზედა და ქვედა ფუძეებზე მოცემულია ანტისიმეტრიული დატვირთვა, რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაში სამგანზომილებიან თეორიაში გვექნება შუა ზედაპირი თავისუფალი.

III თავში განხილულია სქელი ფილის თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა ცილინდრულ კოორდინატებში. ცნობილია, რომ იზოტროპული ერთგვაროვანი ფენის დრეკადი წონასწორობა ჯერ კიდევ ლამემ და კლაპეირონმა განიხილა. შემდგომ კვლევებში ხდებოდა ერთი მხრივ ამ ავტორების მიერ მიღებული ამონახსნების გამარტივება, მეორე მხრივ კი მათი განზოგადოება.



ყველა მითითებულ შრომებში უმეტეს შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნები აიგებოდა ორმაგი ინტეგრალური გარდაქმნის ფორმულების დახმარებით იზოტროპული ფენისთვის ტემპერატურული შეშფოთების გაუთვალისწინებლად. ამ თავში ფურიეს მეთოდის და ორმაგი მწკრივების, დახმარებით აგებულია თერმოელექტროდრეკადობის სტატიკური სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნები  $\Pi = \{(r, \alpha, z) \in R : r_0 < r < r_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; z_0 < z < z_1\}$  მრუდწირული საკორდინატო პარალელეპიპედისათვის, სადაც  $r, \alpha, z$  – ცილინდრული კოორდინატებია. შემდგომ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ  $z=0$  და  $z=z_1$  ზედაპირებზე ტემპერტულ შეშფოთებასთან ერთად შეიძლება მოცემული



იყოს როგორც ძაბვები, ასევე გადადგილებები ან მათი კომბინაცია. გვერდით ( $r = r_0, r = r_1, \alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_1$ ) ზედაპირებზე კი მოცემულია სპეციალური სახის ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. განხილულ სასაზღვრო ამოცანებში, როდესაც ზედაპირი არის სიბრტყე სპეციალური სახის პირობა გარდაიქმნება მესამე სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის სასაზღვრო პირობად. თუ სხეული მრავალფენოვანია, მაშინ  $z = const$  საკონტაქტო ზედაპირებია. ვგულისხმობთ, რომ დრეკადი სხეული ან მრავალფენიანი სხეულის ფენები ტრანსტოპულია (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული).

ამგვარად, ამ თავში განხილულია (მიუხედავად იმისა, რომ სხეულის გვერდით ზედაპირებზე სპეციალური სახის ერთგვაროვანი პირობებია) უსასრულო ფენის დრეკადი წონასწორობის ამოცანის განზოგადება მისი ამოხსნის მეთოდის გამარტივების გზით. გამარტივება

მიიღწევა იმით, რომ 1) სასაზღვრო და საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემული კლასიკური პირობები შეიცვლება ეკვივალენტური პირობებით; 2) ორმაგი ინტერალური გარდაქმნების მაგივრად გამოყენება ორმაგი მწკრივები.

თერმოდრეკადი წონასწორობა ამ სხეულებისათვის მოიძებნება შემდეგი ზოგადი ამონახსნების დახმარებით

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \\ v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}, \\ u &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (33)$$

სადაც  $\Psi_0, \Psi_1$  და  $\Psi_2$  ფუნქციები შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებია

$$\begin{aligned} \Delta_2 \bar{T} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}, \\ \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_1^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{სადაც } \Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

$\bar{T}, \Psi_1$  და  $\Psi_2$  ფუნქციებისთვის გვექნება

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{1mn} e^{-\bar{\rho}h} sh\bar{\rho}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \alpha\right) \Psi_{mn}(r), \\ \Psi_2(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn} e^{-\bar{\rho}h} sh\bar{\rho}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \alpha\right) \Psi_{mn}(r) \\ \bar{T}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tmn} e^{-\bar{\rho}h} sh\bar{\rho}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \alpha\right) \bar{T}_{mn}(r), \end{aligned}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(r) &= N_m(\mu_n r_0) J_m(\mu_n r) - J_m(\mu_n r_0) N_m(\mu_n r), \\ \bar{T}_{mn}(r) &= N_m(\tilde{\mu}_n r_0) J_m(\tilde{\mu}_n r) - J_m(\tilde{\mu}_n r_0) N_m(\tilde{\mu}_n r). \end{aligned}$$

$J_m(\mu_n r), N_m(\mu_n r), J_m(\tilde{\mu}_n r), N_m(\tilde{\mu}_n r)$ -ბესელის პირველი და მეორე გვარის ფუნქციებია.  $m = \frac{\pi \bar{m}}{\alpha_1}$ ,  $\bar{m} = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\mu_n, \tilde{\mu}_n$  შესაბამისი ტრანსცედენტული განტოლებების  $n$ -ნომრიანი ამონახსნი.

გავიხსენოთ, რომ

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_1 \varepsilon_{rr} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - \beta_{10} T, \\ \sigma_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{rr} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - \beta_{10} T, \\ \sigma_z &= c_3 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - \beta_{20} T,\end{aligned}\tag{35}$$

$$\tau_{\alpha z} = c_4 \varepsilon_{\alpha z}, \quad \tau_{rz} = c_4 \varepsilon_{rz}, \quad \tau_{r\alpha} = c_5 \varepsilon_{r\alpha},$$

და გეომეტრიულ განტოლებებს აქვთ ასეთი სახე :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},\tag{36}$$

$$\varepsilon_{z\alpha} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

მაშინ ამ ფორმულების დახმარებით შევადგენთ გამოსახულებებს  $\sigma_z, \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}), \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha})$ -თვის. ამის შემდეგ სასაზღვრო ზედაპირებზე მოცემულ ფუნქციებს დავშლით ფურიე-ბესელის მწკრივებად და გავუტოლოთ სასაზღვრო ზედაპირზე ჩაწერილ  $\sigma_z, \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}), \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha})$  გამოსახულებებს. ამის შედეგად უცნობი კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას კვაზიდიაგონალური მატრიცით, რომელიც მეექვსე რიგის  $\Lambda_m$  დიაგონალური ბლოკებისაგან შედგება. ამ სისტემის მატრიცას შესაბამის გარდაქმნებისა და მასშტაბირების შემდეგ აქვს ასეთი სახე

$$\begin{pmatrix} \times & \times & & & & \\ \times & \times & & & & \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

ნახ. 7

უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ შემოთავაზებული მეთოდით შესაძლებელი განხილული იყოს სხვა სასაზღვრო ამოცანები. ამგვარად ფილისათვის ამოხსნილია დასმული სასაზღვრო ამოცანა. უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ

შემოთავაზებული მეთოდით შესაძლებელი განხილული იყოს სხვა სასა-  
ზღვრო ამოცანები.

## დასკვნები

### ზოგადი თეორიული და პრაქტიკული შედეგები

სადისერტაციო ნაშრომში სხვადასხვა გეომეტრიის სამგანზომილებიანი სასრული პრიზმატული სხეულებისათვის აგებული მათემატიკური მოდელის საფუძველზე შემოთავაზებულია სასაზღვრო ამოცანების შესწავლის და ანალიზის მეთოდები. ამ საკითხების გადასაწყვეტად დისერტაციაში ამოხსნილია შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, ამა თუ იმ სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულებისათვის მიღებულია მათემატიკური მოდელი. მრუდწირული პარალელეპიპედისათვის, რომელზეც გარე შემფოთებების გარდა მოქმედებს სტაციონალური ტემპერატურული და ელექტრული ველი მათემატიკური მოდელის ასაგებად გამოყენებულია ნ. ხომასურიძის მეთოდი.

1. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მიღებული მათემატიკური მოდელი მართკუთხა პარალელეპიპედისათვის, როდესაც მის ორ მოპირდაპირე წახნაგზე არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებია, ხოლო დანარჩენ წახნაგებზე კი სიმეტრიის ან ანტისიმეტრიის პირობები საშუალებას იძლევა ზუსტი ამოხსნების მიღებისა.

2. დამტკიცებულია კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტობა. მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობები ამარტივებს შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას.

3. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის სქელი ტრანსტროპული ფილისათვის მიღებულია განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.

4. სქელი ფილისათვის განხილულია სპეციალური სახის ამოცანები. კერძოდ განხილულია ფილის ღუნვის ანალოგიური ამოცანები. ნაჩვენებია, რომ სპეციალური სახის დატვირთვებისათვის სქელი ფილისათვის გვაქვს ღუნვის ანალოგია.

სქელი ფილისათვის განხილული სასაზღვრო ამოცანებისათვის მექანიკური შინაარსით მიღებულია მექანიკური თვალსაზრისით ყურადსაღები შედეგი-გარკვეული სახის მხები დატვირთვებისათვის, ნორმალური დატვირთვის გარეშეც, ადგილი აქვს სქელი ფილის ჩაღუნვის ეფექტს.

5. მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს უსასრულო დრეკადი ფენისათვის. მხოლოდ ერთი პირობით, რომ ფენის ზედა და ქვედა სასაზღვრო სიბრტყეებზე მოცემული გარე შემოფოთებები ხასიათდებიან გარკვეული პერიოდულობით.

6. თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილისათვის განხილულია ღუნვის ანალოგიური ამოცანები.

7. მიღებული მეთოდი განზოგადებულია მრავალფენიანი სქელი ფილებისათვის. კერძოდ, განხილულია და მიღებულია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ხუთფენიანი ფილისათვის.

8. ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულისათვის მიღებული მათემატიკური მოდელი იძლევა საშუალებას განმსაზღვრელი განტოლებებისა და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების არსებობისა.

9. სისტემური გამოყენება სიმეტრიის და ანტისიმეტრიის პირობების, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შეცვლა მოდიფიცირებული პირობებით, წონასწორობის განტოლებების დივერგენტულ-როტორული ფორმით, სასაზღვრო ამოცანების წარმოდგენა ორი სასაზღვრო ამოცანის სუპერპოზიციის სახით ამარტივებს მათ გადაწყვეტას.

## **მადლობის გზავნილი**

მადლობას ვუხდით მუდმივი ყურადღების, მზრუნველობის, ფასდაუდებელი შენიშვნების, უაღრესად სასრგბლო რჩევებისა და ხანგრძლივი შინაარსიანი საუბრებისათვის სამეცნიერო ხელმძღვანელებს- პროფესორ დავით გორგიძეს და პროფესორ ზურაბ ციციშვილს.

დიდი მადლიერების გრძნობით მინდა აღვნიშნო საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობაში ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტის უფროსის

პროფესორ თამაზ ბაციკაძის მხარდაჭერა და უაღრესად სასარგებლო დისკუსიები სემინარებზე.

მადლობას ვუხდით მნიშვნელოვანი ტექნიკური დახმარებისათვის პროფესორ დემურ ტაბატაძეს.

## პუბლიკაციები დისერტაციის თემასთან დაკავშირებით

1. *Gorgidze D., Ramishvili I., Ozbetelashvili N.* Bondary and Bondary-contact problems of Thermo-Electroelasticity in a Spherical Coordinate Sistem. Applied Mathematics and Mechanics Transactions, Georgian Technical University, Tbilisi,2012.
2. *Горгидзе Д. А., Сураძე З. Ш., Озбетелашвили Н. Б.* Термоупругое равновесие толстой трансверсально – изотропной плиты. Строительство, №4(31),2013.
3. *Озбетелашвили Н. Б., Цицкишвили З. А.* Термоупругое равновесие толстой трансверсально – изотропной плиты в цилиндрической системе координат. Georgian Engineering News , №1(vol. 69),2014.
4. *ბ. ოზბეთელაშვილი.* თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით. Georgian Engineering News, №4 (vol.72),2014.
5. *ბ. ოზბეთელაშვილი, ი. რამიშვილი.* სამფენიანი ფილის დრეკადი წონასწორობა თერმული ველის გათვალისწინებით. საქართველოს მექანიკოსთა კავშირის მესამე ყოველწლიური კონფერენცია. 19–21 დეკემბერი, 2012, თბილისი.
6. *ბ. ოზბეთელაშვილი.* ტრანატროპული (ტრანსვერსალურად-იზოპტროპული) სქელი ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობა. სტუ-ს სტუდენტთა 81-ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია.

## ABSTRAKT

For development of modern stages of stable, deformable , mechanical body is characteristic common theoretical problem researches and tight conatct between studying

process and usable engineering task solving. Mentioned applied engineering tasks are originated during designing this or that building or construction. Also for represented thesis is typical contact between theoretical researches and applied problem solutions.

The main statutes of elasticity theory, tasks and methods play the most important roles in method formation of strength calculation for some various constructions and in work development. During the historical evolution we can point out two main periods. First period began at the end of the XVIII century and at the beginning of XIX century, from the fundamental labours of J.L. Lagrange and J. Fourier. By separation of variables methods they achieved the simplest areas, known as Canonical areas- circle's, square's, cylinder's, sphere's border tasks' whole row of solutions. The afterward development of this method is attached to its usage for solving more difficult differential equations and representation of solutions by harmonic and biharmonic functions. Such kind of representations were offered by V. Kelvin, P. Tahiti, M.J. Business, B. Galerkin, P. Papkovich, G. Noeber and others.

The second direction of Fourier's developing method is based on usage of curve coordination system for more difficult configuration bodies. Here must be mentioned P. Siff, P. Papkovich, A. Lurie, V. Grinchenko, I. Podelchuk and labours of others. One of the consisting parts of elasticity theory is spatial boundary contact problems. As it was said before and we mention it once again, spatial problems practically are used in building constructions and during calculations of mechanical detail strength, base-foundation designing and etc.

Creation of new compositional materials and usage of them in exact machinery building, made an anisotropic (transropic, transversal-isotropic) task for investigators. The task was about bodies which needed to be treated by the thermo electric resilience theory and by the method of spatial tasks' separation of variables and analytical (exact) solution effective methods. It's true that the usage of separation of variables methods is limited because it can be used only in canonical types of areas, but it still has a big value. During its usage we can notice thermo electric resilience field's characteristic features. During solution designing The physical interpretation can be given a precise mathematical procedures. Besides exact solution is one and only judge while comparing various approximate methods by their efficiency. So thermo electro resilience's various boundary-contact problem solution by separation of

variables methods (understood as multilayered rectangular parallelepipedon's, circular cylinder bodies' thermo electro resilience balance ), which is shown in dissertation has practical meaning. Also it has to be mentioned that the treatment of the new methods is as important as improving known ones, because of that, this topic was and will always be urgent problem.

The purpose of this represented labour is to create mathematical model of tense-stained prismic bodies in generalized cylindrical coordinations. Differential equation system represnets mathematical model, which describes appropriate boundary and boundary-contact conditions and three-dimensional prismic body's resilience balance.

In this labour, the problems are given and solved to reach the goal.

The problems are:

a)Transversally-isotropic rectangular tile's bending task considering thermal field;

b)In cylindrical coordination system coordinate parallelepipedon thermo elctro recilience balance;

The following algorithms are cultivated and based on these problems:

- For tile's optimum weight (optimum thickness) calculation;
- Given calculations may be used for solving inversed problems.

According to this, there is deveped appropriate algorithm.