

ნონა ოზბეთელაშვილი

თერმოელექტრო დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო  
ამოცანების გამოკვლევა პრიზმატული  
სხეულებისათვის

წარმოდგენელია დოქტორის აკადემიური ხარისხის  
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო  
თებერვალი, 2015

© ნონა ოზბეთელაშვილი, 2015

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერი ვადასტურებთ, რომ გავაცანით ნონა ოზბეთელაშვილის მიერ შესრულებულ სადოქტორო ნაშრომს დასახელებით «თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა პრიზმატული სხეულებისათვის» და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას სადოქტორო ხარისხის მოსაპოვებლად.

2015წლის 16 თებერვალი

ხელმძღვანელები: \_\_\_\_\_ ტ. მ.დ., პროფესორი

დავით გორგიძე

\_\_\_\_\_ ფ.მ.მ. კ., აკადემიური დოქტორი,

პროფესორი ზურაბ ციციშვილი

რეცენზენტები: \_\_\_\_\_ ფ.მ.მ. დ., პროფესორი

მურმან კუბლაშვილი

\_\_\_\_\_ ტ. მ.დ., პროფესორი

თამაზ ობგაძე

ხარისხის უზრუნველყოფის სამსახურის უფროსი,

პროფესორი: \_\_\_\_\_/მარინა ჯავახიშვილი/

# საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2015

ავტორი: ნონა ოზბეთელაშვილი

დასახელება: თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის ზოგიერთი

სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა

პრიზმატული სხეულებისათვის

ფაკულტეტი: „სამშენებლო“

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: 2015 წლის 16 თბერვალს

ინდივიდუალური პროვინებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემოთმოყვანილი დასახელების ნაშრომის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

\_\_\_\_\_/ნონა ოზბეთელაშვილი/

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებულ საავტორო უფლებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

## *მიძღვნა*

*ნაშრომს ვუძღვნი ჩემს საყვარელ ოჯახს. მათი თანადგომა და სრული გაგება მუდამ მამხნევებდა დისერტაციის მისაყვანად ლოგიკურ დასასრულამდე.*

## რეზიუმე

მყარი დეფორმადი ტანის მექანიკის განვითარების თანამედროვე ეტაპისათვის დამახასიათებელია ზოგადი თეორიული პრობლემების კვლევისა და შესწავლის პროცესის მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი ინჟინრული ამოცანების ამოხსნასთან. ნახსენები გამოყენებითი ინჟინრული ამოცანები წარმოიშვებიან ამა თუ იმ ნაგებობის ან კონსტრუქციის პროექტირებისას. წარმოდგენილი დისერტაციისათვისაც არის დამახასიათებელი კავშირი თეორიულ კვლევასა და გამოყენებითი ამოცანების ამოხსნებს შორის.

დრეკადობის თეორიის ძირითადი დებულებები, ამოცანები და მეთოდები უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობდნენ და თამაშობენ სხვადასხვა კონსტრუქციების სიმტკიცეზე გაანგარიშების მეთოდების ჩამოყალიბებასა და განვითარების საქმეში. ამ განვითარების ისტორიულ გზაზე შეიძლება თვალი გავადევნოთ ორ პერიოდს. პირველი პერიოდი დაიწყო XVIII საუკუნის ბოლოს და XIX საუკუნის დასაწყისში, ჟ.ლ. ლაგრანჟისა და ჟ. ფურიეს ფუნდამენტალური ნაშრომებიდან. ცვლადთა განცალგების მეთოდით, მათ შესძლეს უმარტივესი არეებისათვის, ე.წ. კანონიკური არეებისათვის – წრისთვის, კვადრატისთვის, ცილინდრისთვის, სფეროსთვის სასაზღვრო ამოცანების მთელი რიგი ამოხსნების მიღება. ამ მეთოდის შემდგომი განვითარება უკავშირდება მის გამოყენებას უფრო რთული დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნას და ამონახსნების წარმოდგენას ჰარმონიული და ბიჰარმონიული ფუნქციების მეშვეობით. ასეთი წარმოდგენები შემოთავაზებული იყო ვ. კელვინის და პ. ტაიტის, მ.ჯ. ბუსინესკის, ბ. გალერკინის, პ. პაპკოვიჩის გ. ნოიბერის და სხვათა მიერ.

ფურიეს მეთოდის განვითარების მეორე მიმართულებას წარმოადგენს მისი გამოყენება უფრო რთული კონფიგურაციის სხეულებისათვის მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში. აქ უნდა აღინიშნოს პ. შიფის, პ. პაპკო-

ვიჩის, ა. ლურიეს, ვ. გრინჩენკოს, ი. პოდელჩუკის და სხვათა ნაშრომები.

დრეკადობის თეორიის ერთ ერთი ნაწილია სივრცითი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები. როგორც ზემოთ იყო თქმული და ამას კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, სივრცით ამოცანებს პრაქტიკულად გამოიყენებენ სამშენებლო კონსტრუქციების და მანქანების დეტალების სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას, ფუძე-საძირკვლების პროექტირებისას და ა.შ.

ახალი კომპოზიციური მასალების შექმნამ და მშენებლობაში, ზუსტ და უზუსტეს მანქანათმშენებლობაში მათმა ფართოდ გამოყენებამ, მკვლევარების წინაშე დასვა ამოცანა ანიზოტროპული, კერძოდ ტრანსტროპული (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული) სხეულებისათვის დამუშავებულიყო თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების ცვლადთა განცალების მეთოდით ანალიზური ანუ ზუსტი ამოხსნის ეფექტური მეთოდები. მართალია, რომ როგორც ზემოთ იყო თქმული, ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენება შეზღუდულია იმით, რომ იგი გამოიყენება მხოლოდ კანონიკური სახის არეებისათვის, მაგრამ მას მაინც დიდი ღირებულება აქვს. მისი გამოყენებისას უფრო ღრმად და სრულად იჩენს თავს თერმოელექტროდრეკადი ველის დამახასიათებელი თვისებები, ხოლო ამონახსნის აგებისას მათემატიკურ პროცედურებს შეიძლება მიეცეს ზუსტი ფიზიკური ინტერპრეტაცია. გარდა ამისა, ზუსტი ამოხსნა ერთადერთი მსაჯულია სხვადასხვა მიახლოებითი მეთოდების შედარებებისას და მათი ეფექტურობის განსაზღვრისას. ამიტომ თერმოელექტროდრეკადობის სხვადასხვა სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ცვლადთა განცალების მეთოდით ამოხსნას (იგულისხმება მრავალფენიანი მართკუთხა პარალელეპიპედის, წრიული ცილინდრული სხეულების თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა), რომელიც მოყვანილია სადისერტაციო ნაშრომში აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა. აგრეთვე უნდა აღინიშნოს ისიც,

რომ მნიშვნელოვანია როგორც ახალი მეთოდების დამუშავება, ასევე უკვე არსებული მეთოდების სრულყოფა და ამიტომაც ეს საკითხი ყოველთვის იყო და დარჩება აქტუალურ ამოცანად.

წარმოდგენილი ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში პრიზმატული სხეულებისათვის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელის შექმნა. მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც სათანადო სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებთან ერთად აღწერს სამგანზომილებიანი პრიზმატული სხეულების დრეკად წონასწორობას.

ამ მიზნის მისაღწევად ნაშრომში დასმულია და ამოხსნილია შემდეგი ამოცანები:

ა) ტრანსვერსალურად-იზოტროპული მართკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით;

ბ) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო პარალელეპიპედის თემოელექტროდრეკადი წონასწორობა;

ამ ამოცანების საფუძველზე დამუშავებულია შემდეგი ალგორითმები:

ოპტიმალური წონის ანუ ოპტიმალური სისქის ფილის გაანგარიშებისათვის ;

მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს შებრუნებული ამოცანის გადასაწყვეტად. ამისათვის დამუშავებულია შესაბამისი ალგორითმი.

## ABSTRAKT

For development of modern stages of stable, deformable , mechanical body is characteristic common theoretical problem researches and tight contact between studying process and usable engineering task solving. Mentioned applied engineering tasks are originated during designing this or that building or construction. Also for represented thesis is typical contact between theoretical researches and applied problem solutions.

The main statutes of elasticity theory, tasks and methods play the most important roles in method formation of strength calculation for some various constructions and in work development. During the historical evolution we can point out two main periods. First period began at the end of the XVIII century and at the beginning of XIX century , from the fundamental labours of J.L Lagrange and J.Furie. By separation of variables methods they achieved the simplest areas, known as Canonical areas- circle's, square's, cylinder's, sphere's border tasks' whole row of solutions. The afterward development of this method is attached to its usage for solving more difficult differential equations and representation of solutions by harmonic and biharmonic functions. Such kind of representations were offered by V.Kelvin , P. Tahiti , M.J. Businessk , B. Galerkin , P. Papkovich , G. Noeber and others.

The second direction of Furie's developing method is based on usage of curve coordination system for more difficult configuration bodies. Here must be mentioned P. Siff, P. Papkovich, A. Lurie, V. Grinchenko, I. Podelchuk and labours of others . One of the consisting parts of elasticity theory is spatial boundary contact problems. As it was said before and we mention it once again, spatial problems practically are used in building constructions and during calculations of mechanical detail strength, base-foundation designing and etc.

Creation of new compositional materials and usage of them in exact machinery building , made an anisotropic (transropic, transversal-isotropic) task for investigators. The task was about bodies which needed to be treated by the thermo



electric resilience theory and by the method of spatial tasks' separation of variables and analytical (exact) solution effective methods. It's true that the usage of separation of variables methods is limited because it can be used only in canonical types of areas, but it still has a big value. During it's usage we can notice thermo electric resilience field's characteristic features. During solution designing The physical interpretation can be given a precise mathematical procedures. Besides exact solution is one and only judge while comparing various approximate methods by their efficiency. So thermo electro resilience's various boundary-contact problem solution by separation of variables methods (understood as multilayered rectangular parallelepipedon's, circular cylinder bodies' thermo electro resilience balance ), which is shown in dissertation has practical meaning. Also it has to be mentioned that the treatment of the new methods is as important as improving known ones, because of that, this topic was and will always be urgent problem.

The purpose of this represented labour is to create mathematical model of tense-stained prismic bodies in generalized cylindrical coordinations. Differential equation system represnets mathematical model, which describes appropriate boundary and boundary-contact conditions and three-dimensional prismic body's resilience balance.

In this labour, the problems are given and solved to reach the goal.

The problems are:

a)Transversally-isotropic rectangular tile's bending task considering thermal field;

b)In cylindrical coordination system coordinate parallelepipedon thermo elctro resilience balance;

The following algorithms are cultivated and based on these problems:

- For tile's optimum weight (optimum thickness) calculation;
- Given calculations may be used for solving inversed problems.

According to this, there is deveoped appropriate algorithm.

## შინაარსი

ნახაზების ნუსხა .....	12
მადლობის გზავნილი.....	13
შესავალი.....	14

### თავი I.

თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა განზოგადებულ  
ცილინდრულ კოორდინატებში

§ 1.1. ზოგადი მიმოხილვა .....	23
§ 1.2. ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში .....	31
§ 1.3. კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ექვივალენტობა. რეგულარული ამოხსნა.....	40
§ 1.4. განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა .....	43

### თავი 2.

თერმოდრეკადობის ზოგიერთი ამოცანა მართკუთხა კოორდინატთა  
სისტემა

§ 2.1. წონასწორობის განტოლებები. სასაზღვრო ამოცანების დასმა .....	46
§ 2.2. თერმოდრეკადი წონასწორობის განტოლებები და სასაზღვრო პირობები.....	53
§ 2.3 სქელი ფილის და სპეციალური სახის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით.....	60
§ 2.4 თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით.....	80
§ 2.5. მრავალფენიანი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით .....	84

### თავი 3.

სუსტად ტრასტროპული ცილინდრული სხეულების

თერმოდრეკადი წონასწორობა

§ 3.1 ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები ცილინდრულ კოორდინატებში.....	90
§ 3.2. კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ექვივალენტობა. რეგულარული ამოხსნა	98
§ 3.3. განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.....	101
§ 3.4. სქელი ტრანსვერსალურად- იზოტროპული ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობა.....	103
დასკვნები .....	108
დამოწმებული ლიტერატურა.....	110

## ნახაზების ნუსხა

- ნახაზი 1. ცილინდრული ზედაპირი (პარაბოლური ცილინდრი).
- ნახაზი 2. ცილინდრული ზედაპირი (ელიფსური ცილინდრი).
- ნახაზი 2ა. ჰიპერბოლური ცილინდრული ზედაპირი.
- ნახაზი 2ბ. პარაბოლური ცილინდრული ზედაპირი.
- ნახაზი 3. ღრუიანი ელიფსური ცილინდრი.
- ნახაზი 4. ჰიპერბოლური ცილინდრი.
- ნახაზი 5. განზოგადებული ცილინდრული კოორდინატთა სისტემა. მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედი.
- ნახაზი 6. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის სქელი ფილა.
- ნახაზი 7. ხუთფენიანი სქელი ფილა.
- ნახაზი 8.
- ნახაზი 9. წრიული ცილინდრული კოორდინატთა სისტემა.
- ნახაზი 10. სქელი ფილა (ცილინდრული პანელი).
- ნახაზი 11. მატრიცის სახე.

## მადლობის გზავნილი

ამ ნაშრომის მომზადებაში მრავალ პირს აქვს მიღებული მონაწილეობა ინტელექტუალური, მეცნიერული, მორალური თუ ტექნიკური თვალსაზრისით. მათი მეგობრული განწყობა და უანგარო დახმარება უდიდესი პატივია ჩემთვის.

განსაკუთრებულ მადლიერებას გამოვხატავ ჩემი სამეცნიერო ხელმძღვანელების პროფესორების დავით გორგიძის და ზურაბ ციციშვილის მიმართ, რომელთა ყოველდღიური ყურადღების, მზრუნველობისა და ფასდაუდებელი შენიშვნების, ასევე ხანგრძლივი საუბრების საფუძველზე შესაძლებელი გახდა ნაშრომის საბოლოო სტრუქტურისა და შინაარსის ჩამოყალიბება.

სასიამოვნო მოვალეობად მიმაჩნია გულწრფელი მადლობა გადავუხადო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის პროფესორ-მასწავლებლებს გულწრფელი ყურადღებისა და მუდმივი ინტერესის გამო.

## შესავალი

### ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

**კვლევის ობიექტი და საგანი.** კვლევის ობიექტია პრიზმატული სხეულები, ხოლო საგანი – პრიზმატული სხეულების დამაბუდეფორმირებელი მდგომარეობის მათემატიკური მოდელირება.

**თემის აქტუალობა.** დრეკადობის თეორიის ძირითადი დებულებები, ამოცანები და მეთოდები უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობდნენ და თამაშობენ სხვადასხვა კონსტრუქციების სიმტკიცეზე გაანგარიშების მეთოდების ჩამოყალიბებასა და განვითარების საქმეში. ამ განვითარების ისტორიულ გზაზე შეიძლება თვალი გავადევნოთ ორ პერიოდს. პირველი პერიოდი დაიწყო XVIII საუკუნის ბოლოს და XIX საუკუნის დასაწყისში, ჟ.ლ. ლაგრანჟისა და ჟ. ფურიეს ფუნდამენტალური ნაშრომებიდან. ცვლადთა განცალების მეთოდით, მათ შესძლეს უმარტივესი არეებისათვის, ე.წ. კანონიკური არეებისათვის – წრისთვის, კვადრატისთვის, ცილინდრისთვის, სფეროსთვის სასაზღვრო ამოცანების მთელი რიგი ამოხსნების მიღება. ამ მეთოდის შემდგომი განვითარება უკავშირდება მის გამოყენებას უფრო რთული დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნას და ამონახსნების წარმოდგენას ჰარმონიული და ბიჰარმონიული ფუნქციების მეშვეობით. ასეთი წარმოდგენები შემოთავაზებული იყო ვ. კელვინის და პ. ტაიტის, მ.ჯ. ბუსინესკის, ბ. გალერკინის, პ. პაპკოვიჩის გ. ნოიბერის და სხვათა მიერ.

ფურიეს მეთოდის განვითარების მეორე მიმართულებას წარმოადგენს მის გამოყენებას უფრო რთული კონფიგურაციის სხეულებისათვის მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში. აქ უნდა აღინიშნოს პ. შიფის, პ. პაპკოვიჩის, ა. ლურიეს, ვ. გრინჩენკოს, ი. პოდელჩუკის და სხვათა ნაშრომები.

დრეკადობის თეორიის ერთ ერთი ნაწილია სივრცითი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები. დრეკადობის თეორიის განვითარების თანამედროვე ეტაპისათვის დამახასიათებელია ზოგადი თეორიული პრო-

ბლემების კვლევისა და შესწავლის პროცესის მჭიდრო კავშირი გამოყენებითი ინჟინერული ამოცანების გადაწყვეტასთან. კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ სივრცით ამოცანებს პრაქტიკულად გამოიყენებენ სამშენებლო კონსტრუქციების და მანქანების დეტალების სიმტკიცეზე გაანგარიშებისას, ფუმე-საძირკვლების პროექტირებისას და ა.შ.

ახალი კომპოზიციური მასალების შექმნამ და მშენებლობაში, ზუსტ და უზუსტეს მანქანათმშენებლობაში მათმა ფართოდ გამოყენებამ, მკვლევარების წინაშე დასვა ამოცანა ანიზოტროპული, კერძოდ ტრანსტროპული (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული) სხეულებისათვის დამუშავებულიყო თერმოელექტროდრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების ცვლადთა განცალების მეთოდით ანალიზური ანუ ზუსტი ამოხსნის ეფექტური მეთოდები. მართალია, რომ როგორც ზემოთ იყო თქმული, ცვლადთა განცალების მეთოდიდს გამოყენება შეზღუდულია იმით, რომ იგი გამოიყენება მხოლოდ კანონიკური სახის არეებისათვის, ე.ი. არეებისათვის, რომლებიც შემოსაზღვრული არიან ამა თუ იმ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით, მას მაინც დიდი ღირებულება აქვს. მისი გამოყენებისას უფრო ღრმად და სრულად იჩენს თავს თერმოელექტროდრეკადი ველის დამახასიათებელი თვისებები, ხოლო ამონახსნის აგებისას მათემატიკურ პროცედურებს შეიძლება მიეცეს ზუსტი ფიზიკური ინტერპრეტაცია. გარდა ამისა, ზუსტი ამოხსნა ერთადერთი მსაჯულია სხვადასხვა მიახლოებითი მეთოდების შედარებებისას და მათი ეფექტურობის განსაზღვრისას. ამიტომ თერმოელექტროდრეკადობის სხვადასხვა სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ცვლადთა განცალების მეთოდით ამოხსნას (იგულისხმება მრავალფენიანი მართკუთხა პარალელეპიპედის, წრიული ცილინდრული სხეულების თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა), რომელიც მოყვანილია სადისერტაციო ნაშრომში აქვს პრაქტიკული მნიშვნელობა. აგრეთვე უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ მნიშვნელოვანია როგორც ახალი მეთოდების დამუშავება, ასევე უკვე არსებული

მეთოდების სრულყოფა და ამიტომაც ეს საკითხი ყოველთვის იყო და დარჩება აქტუალურ ამოცანად.

**ნაშრომის მიზანი.** სადისერტაციო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენს განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში პრიზმატული სხეულებისათვის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელის შექმნა. მათემატიკურ მოდელი წარმოადგენს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც სათანადო სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებთან ერთად აღწერს სამგანზომილებიანი პრიზმატული სხეულების დრეკად წონასწორობას.

ამ მიზნის მისაღწევად ნაშრომში დასმულია და ამოხსნილია შემდეგი ამოცანები:

- ა) ტრანსვერსალურად-იზოტროპული მართკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით ;
- ბ) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო პარალელეპიპედის თემოელექტროდრეკადი წონასწორობა;

ამ ამოცანების საფუძველზე დამუშავებულია შემდეგი ალგორითმები:

ოპტიმალური წონის ანუ ოპტიმალური სისქის ფილის გაანგარიშებისათვის;

მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს შებრუნებული ამოცანის გადასაწყვეტად. ამისათვის დამუშავებულია შესაბამისი ალგორითმი.

**კვლევის მეთოდები.** სადისერტაციო ნაშრომის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძვლად გამოყენებულია მათემატიკური ფიზიკის განტოლებები, ცვლადთა განცალების მეთოდი, სპეციალური ფუნქციების თეორია, მწკრივების თეორია.

**სამეცნიერო სიახლე.** სადისერტაციო ნაშრომის შედეგების მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს მოდელების, მეთოდების დამუშავებაში. განზოგადებულ კოორდინატთა სისტემაში აგებულია დრეკადობის



თეორიის ამოცანათა კლასისათვის ზოგადი ამონახსნი  $C^3(\Omega)$  კლასში ( $C^3(\Omega)$  წარმოადგენს  $\Omega$  არეში სამჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა კლასს), რომელიც ამ ტიპის სხეულებისათვის, სათანადო სასაზღვრო პირობების დროს, სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ეფექტურად აგების საშუალებას იძლევა. გადაადგილებები და ძაბვები გამოისახებიან მწკრივების სახით. მწკრივებში შემავალი კოეფიციენტები ცხადი სახით წარმოიდგინებიან სათანადო ფურიეს კოეფიციენტების საშუალებით.

მიღებული შედეგები გამოიყენება პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად, რომლებსაც დიდი მნიშვნელობა აქვთ სხვადასხვა სამშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშებისას, მანქანათამშენებლობაში და ა.შ.

**ნაშრომის პრაქტიკული მნიშვნელობა.** მიღებული შედეგების პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ ნაშრომში განხილული ნაწილობრივი ჩამაგრებები I. *არაბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი (თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა).* II. *არაბრტყელი წახნაგი ებჯინება აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს. ცხადია, რომ სხეულის ზედაპირის ფორმა სავსებით იდენტურია არაბრტყელი წახნაგის, რადგანაც არაბრტყელი წახნაგის ყველა წერტილი უნდა ეხებოდეს სხეულის გლუვი ზედაპირის შესაბამის წერტილებს. სხვანაირად პირველ შემთხვევაში წახნაგის წერტილებს არ შეუძლიათ გადაადგილება ზედაპირის მხების გასწვრივ, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. მეორე შემთხვევაში წერტილებს არ შეუძლიათ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გადაადგილება, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის მხების გასწვრივ. ასეთი მიდგომა გვხვდება სამშენებლო კონსტრუქციებში, ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებში, მანქანათამშენებლობაში და ა.შ. კერძოდ, პირველი ტიპის ჩამაგრებით შეიძლება სამშენებლო კონსტრუქციების სახსრული (თავისუფალი) დაყრდნობის, მსუბუქი შემავსებლით სქელი ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის და ა.შ მოდელირება.*

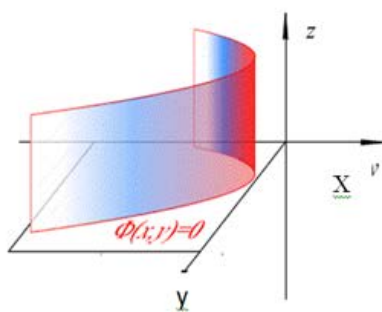
არანაკლებ მნიშვნელოვანია მეორე ტიპის ჩამაგრება. კერძოდ, ამ შემთხვევაში შესაძლებელია გლუვი შტამპისა და დრეკადი სხეულის კონტაქტის მოდელირება ან კიდევ ეგრეთ წოდებული სამშენებლო კონსტრუქციების სრიალა ჩამაგრების მოდელირება. ერთი სიტყვით, პირველი და მეორე ჩამაგრების პრაქტიკული მნიშვნელობა არა ნაკლებია ვიდრე, მაგალითად კონსტრუქციის ხისტი ჩამაგრება და ისინი უფრო ხშირად გამოიყენება.

დისერტაციის სტრუქტურული ერთეულების შინაარსი ასეთია:

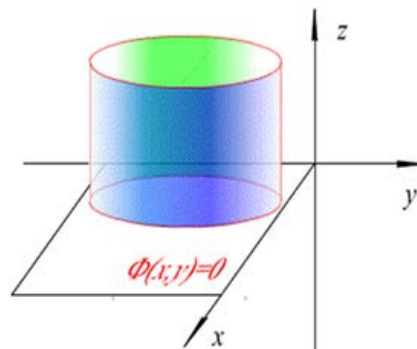
*შესავალში* წარმოდგენილია ნაშრომის მიზანი, დასაბუთებულია განსახილველი ამოცანების აქტუალობა, მოცემულია ნაშრომის სტრუქტურა და ძირითადი ნაწილების მოკლე შინაარსი.

*განვიხილოთ საკვალიფიკაციო ნაშრომი შინაარსი თავების მიხედვით.*

*პირველი თავის პირველი პარაგრაფი მიმოხილვითი ხასიათისაა. მოცემულია იმ ნაშრომთა კრიტიკული ანალიზი, რომლებიც უშუალოდაა დაკავშირებული დისერტაციაში განხილულ საკითხებთან. მოცემულია ამოცანის დასმა.*



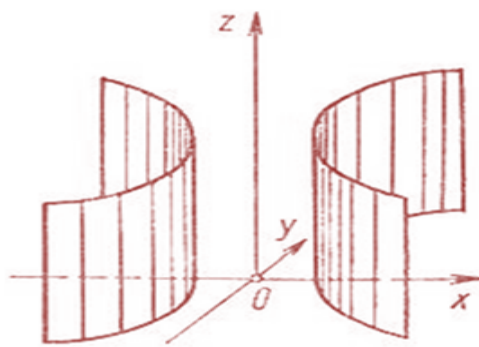
ნახ.1. ცილინდრული ზედაპირი.  
(პარაბოლური ცილინდრი)



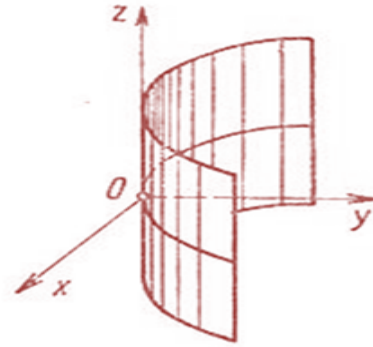
ნახ. 2. ცილინდრული ზედაპირი.  
(ელიფსური ცილინდრი)

*პირველი თავის მეორე პარაგრაფი ეძღვნება განზოგადებული ცილინდრული კოორდინატთა სისტემით შემოსაზღვრული საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულების დრეკად წონასწორობას( ნახ.–*

ები 1;2;3,4). ამავ პარაგრაფში განსაზღვრულია სასაზღვრო ამოცანების ის კლასი, რომელიც შემდგომ შეისწავლება მთელ ნაშრომში, განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში განიხილება მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედის თერმო-ელექტრო დრეკადი



2ა.



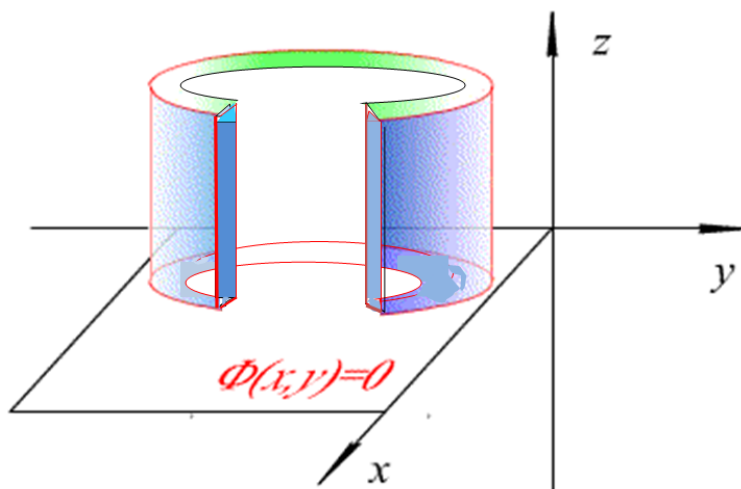
2ბ

ნახ. 2ა. ჰიპერბოლური ცილინდრული ზედაპირი;

2ბ. პარაბოლური ცილინდრული ზედაპირი.

წონასწორობა.

დრეკადი სხეული ტრანსვერსალურად იზოტროპულია ( ტრანსტროპული სიმეტრიის სიბრტყედ მიღებულია  $z = const$  სიბრტყეები).

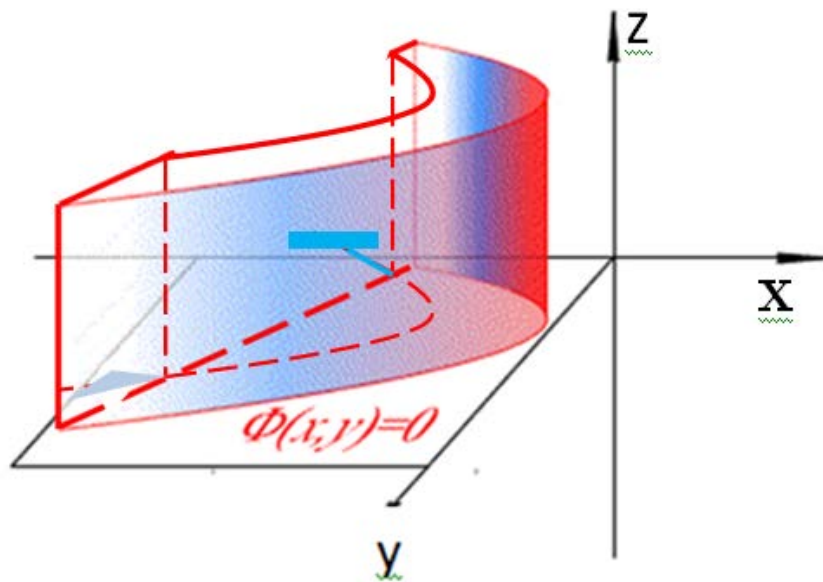


ნახ. 3. ღრუიანი ელიფსური ცილინდრი

პიპედის ზედა და ქვედა ფუძეებზე ( $z=0$  და  $z=z_1$  სიბრტყეებზე) ტემპერატურული და ელექტრულ შემოფოთებასთან ერთად შეიძლება მოცემული იყოს როგორც ძაბვები, ასევე გადაადგილებები ან მათი კომბინაცია. გვერდით ზედაპირებზე

ზე კი მოცემულია სპეციალური სახის ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები.

მიღებულია ლამეს განტოლებების ანალოგიური სისტემა, რომელიც ჰუკის კანონთან ერთად ქმნის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრელ განტოლებათა სისტემას. მოცემულია გვერდით წახნაგებზე სასაზღვრო პირობების ტექნიკური ინტერპრეტაცია. მეორე პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია რეგულარული ამოხსნის განსაზღვრება.  $u$ ,  $v$  და  $w$  ფუნქციებით განსაზღვრულ ამოხსნას ვუწოდოთ რეგულარული, თუ  $u$ ,  $v$  და  $w$  არიან სამჯერ უწყვეტად წარმოებადია  $\bar{H}$  არეში, სადაც  $\Pi$  არის მრუდწირული პარალელეპიპედის შიგა არე  $\rho = \rho_j$  და  $\alpha = \alpha_j$



ნახ. 4. ჰიპერბოლური ცილინდრი

(გვერდითი) საზღვრების ჩათვლით. პარალელეპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეზე, ე.ი. როცა  $z = z_j$  ისინი წარმოიდგინებინ თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით (ფურიეს მწკრივი შტურმ-ლიუვილის გარკვეული ამოცანების საკუთრივი ფუნქციების სახით). გარდა ამისა, პარალელეპიპედის გვერდით წახნაგებზე ( $\rho = \rho_j, \alpha = \alpha_j$ ) კმაყოფილდება წონასწორობის განტოლებები. ამავე პარაგრაფში მტკიცდება კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ექვივალენტობა. მესამე პარაგრაფში მიღებულია დრეკადი ველის ყველა

კომპონენტის ფუნქციონალური წარმოდგენა ფუნქციების საშუალებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$\Delta_2 \Psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \varphi \right] - \frac{c_3 e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = 0,$$

$$\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3 e_3}{c_1 c_4} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0.$$

სადისერტაციო ნაშრომის მეორე თავში, რომელიც ხუთი პარაგრაფისაგან შედგება, ეძღვნება სქელი ტრანსვერსალურად-იზოტროპული ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობის პოვნას. პირველ პარაგრაფში მოყვანილია ტრანსტროპული (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული) ფილისათვის თერმოელექტრო დრეკადობის წონასწორობის განტოლებები სხვადასხვა სახით და განსახილავ სასაზღვრო ამოცანათა კლასის განმსაზღვრელი სასაზღვრო პირობები. მეორე პარაგრაფში სქელი ფილისათვის მიღებულია თერმოდრეკადობის წონასწორობის განტოლებები, მოყვანილია ზუსტი ამონახსნები, მოცემულია სასაზღვრო ამოცანების დასმა. შემდეგ, მესამე პარაგრაფში, რომელიც ყველაზე ვრცელია და მნიშვნელოვანია ნაშრომში, სქელი ფილისათვის განხილულია სპეციალური სახის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით. მეოთხე პარაგრაფში განხილულია თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილისათვის ღუნვის ანალოგიური ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით. მეხუთე პარაგრაფში განხილულია მრავალფენიანი სქელი ფილა. კერძოდ, ხუთფენიანი ფილისათვის მიღებული მეთოდით ამოხსნილია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა.

მესამე თავი, რომელიც ორი პარაგრაფისაგან შედგება, ეხება სასაზღვრო ამოცანებს ცილინდრული სხეულებისათვის თერმოდრეკადი წონასწორობის პოვნას. იგულისხმება, რომ სხეული შემოსაზღვრულია ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით.

ნაშრომში განხილული ამოცანები ზოგიერთი საინჟინრო ამოცანების ამოხსნის საშუალებას იძლევა. მაგალითად, ნავთობის შესანახი რეზერვუარების, ფუძე-საძირკველში ჩადებული სქელი ფილების დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობას. დასკვნაში მოყვანილია ნაშრომის ძირითადი შედეგები.

**ნაშრომის აპრობაცია.** ნაშრომის ძირითადი შედეგები განხილული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სემინარებზე და საერთაშორისო სიმპოზიუმზე.

**გამოქვეყნებული შრომები.** დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია 6 ნაშრომი.

**სამუშაოს სტრუქტურა და მოცულობა.** ნაშრომი შედგება შესავლისა და 3 თავისაგან, შეიცავს 118 ნაბეჭდ გვერდს, 13 ნახაზს. ლიტერატურის ჩამონათვალი შეიცავს 97 დასახელებას 10 გვერდზე.

**დასაცვად გასატნი შედეგები.** დასაცვად გაიტანება შემდეგი ამოცანები:

- ა) ტრანსვერსალურად-იზოტროპული მართკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა თერმული ველის გათვალისწინებით;
  - ბ) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო პარალელეპიპედის თემოელექტროდრეკადი წონასწორობა;
- ამ ამოცანების საფუძველზე დამუშავებულია შემდეგი ალგორით-

მები:

ოპტიმალური წონის ანუ ოპტიმალური სისქის ფილის გაანგარიშებისათვის;

მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს შებრუნებული ამოცანის გადასაწყვეტად. ამისათვის დამუშავებულია შესაბამისი ალგორითმი.

## თავი I.

### თერმოელექტრო დრეკადი წონასწორობა განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში

#### §1.1. ზოგადი მიმოხილვა

დრეკადობის თეორიის ძირითადი მიზანია სხეულზე გარე დატვირთვის შედეგად მასში აღძრული შიგა ძალების და დეფორმაციის განსაზღვრა, ანუ სხვანაირად იგი ამყარებს კავშირს მყარი ტანის დამაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობასა და გარე ძალებს (დატვირთვებს) შორის. მექანიკური მოწყობილობებით შეიძლება გაიზომოს ის ძალები, რომლებსაც შეუძლიათ სხეულში გამოიწვიონ კინემატიკური მახასიათებლების ცვლილებები, ანუ სხვა სიტყვებით გადაადგილებები და გარკვეული სიგრძეების ცვლილებებს.

დრეკადობის თეორიას საფუძვლად დაედო ცდისეული ფაქტები, თანაც ისეთი ფაქტები, რომელთა დროსაც მხოლოდ ფიზიკური მახასიათებლები გაიზომებოდა. ეს მახასიათებლები მონაწილეობენ მოდელის აღმწერ განტოლებებში და ხშირად ამ განტოლებებს მდგომარეობის განტოლებებსაც უწოდებენ. განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს მექანიკური მოვლენის მათემატიკურ მოდელს. ამგვარად დრეკადობის თეორია შესაძლებელია მივაკუთვნოთ ფენომენოლოგიურ მეცნიერებათა რიცხვს.

დრეკადობის თეორიას, ისევე როგორც ნებისმიერ მექანიკურ დისციპლინას საფუძვლად უდევს რამდენიმე ძირითადი სამუშაო ჰიპოთეზა ანუ სხვანაირად რამდენიმე ძირითადი პრინციპები და შეთანხმებები.

დრეკადობის თეორია ხშირად ჰყოფენ ორ ძირითად ნაწილად:

1. დრეკადობის მათემატიკურ თეორიად ;
2. გამოყენებითი დრეკადობის თეორიად.

დრეკადობის მათემატიკურ თეორია არ იყენებს არავითარ დეფორმაციულ ჰიპოთეზებს. მიღებულ განტოლებებს ხსნის ზუსტი ან ისეთი მიახლოებითი მეთოდებით, რომლებიც საშუალებას იძლევა

ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ ზუსტ ამოხსნას. დრეკადობის გამოყენებით თეორიას გარდა იმ ჰიპოთეზებისა, რომლებიც საფუძვლად უდევს მათემატიკურ თეორიას დამატებით გამოიყენებს სხვა ჰიპოთეზებსაც, როგორცაა მაგალითად, ბრტყელი ველის ჰიპოთეზა ან ნორმალურების ჰიპოთეზა ფირფიტებისა და გარსების თეორიაში და ა.შ.

დრეკადობის თეორიის ამოცანას ორი ძირითადი დასმა აქვს:

პირდაპირი, როდესაც იგულისხმება, რომ მოცემულია გარე დატვირთვები, ან საზღვრის წერტილების გადაადგილებები, ან მათი კომბინაციები. სხეულის ყველა შიგა წერტილში უნდა განისაზღვროს ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები, ანუ სხეულის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა.

შებრუნებული დასმისას მოცემულად ითვლება ძაბვები, ან გადაადგილებები, ან დეფორმაციები და უნდა განისაზღვროს დანარჩენი სიდიდეები, მათ შორის ის ძალებიც რომლებიც იწვევენ მოცემულ დამაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობას. ეს ამოცანა განსაკუთრებით ადვილად გადაწყდება, თუ მოცემულია გადაადგილებები. თუკი მოცემულია ძაბვები ან დეფორმაციები, მაშინ უნდა ვაინტეგრით კომის დამოკიდებულებები, რაც აგრეთვე არ წარმოადგენს სირთულეს და ამის შემდეგ განისაზღვრება სხეულის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა.

შევნიშნოთ, შესაძლებელი რომ ყოფილიყო გადაადგილების ვექტორის კომპონენტების მოცემის ყველა შესაძლო ვარიანტის ამოწურვა, მაშინ ჩვენ შევძლებდით ყოველი ვარიანტისთვის შესაბამის გარე დატვირთვის დადგენას და იმ ვარიანტის განსაზღვრასაც, რომელიც შესაბამეა მოცემულ დატვირთვას. ცხადია, მაშინ დრეკადობის თეორიის პირდაპირი ამოცანის ამოხსნის აუცილებლობაც მოიხსნებოდა. მაგრამ ნებისმიერი სამი ფუნქციის ყველა ვარიანტის მოცემის ამოწურვა, იმ შემთხვევაშიც კი, როცა არე საკმაოდ შემოსაზღვრულია, სამწუხაროდ, შეუძლებელია. ამიტომ ძირითადად გვიწევს პირდაპირი ამოცანის ამო-



ხსნა. ამ ამოცანის ამოხსნის ზოგადი მეთოდი კი ჯერჯერობით არ არის შემუშავებული.

მიუხედავად იმისა, რომ დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების კვლევა ჯერ კიდევ XIX საუკუნეში დაიწყო, საკმაოდ დიდი ხნის განმავლობაში კლასიკური დრეკადობის თეორიის მეთოდები საკმარის არ იყო მკაცრი და საკმარისად სრული სივრცითი სასაზღვრო ამოცანების გადასაწყვეტად. ამჟამად მდგომარეობა არსებითად შეიცვალა და ცნობილია ამ ამოცანების კვლევის სხვადასხვა მეთოდები. მიღებულია მრავალი მნიშვნელოვანი შედეგები. ეს შედეგები ასახულია სხვადასხვა მონოგრაფიებში. მაგალითისათვის, შეიძლება დავასახელოთ ფიკერას[1], ს. დეფორმოზის[2], ს. მიხლინის[3] ცნობილ მონოგრაფიები, სადაც თეორიის აგება ხდება დიფერენციალურ განტოლებათა განზოგადებულ ამოხსნათა თანამედროვე თეორიის (ჰილბერტის სივრცის მეთოდები, ვარიაციული მეთოდები) დახმარებით. კლასიკური მექანიკის მეთოდების ბუნებრივ განვითარებას წარმოადგენს მრავალგანზომილებიანი სინგულარული პოტენციალებისა და სინგულარულ განტოლებათა თეორია. ეს მეთოდები საშუალებას იძლევა გამოკვლეული იქნეს თეორიისა და გამოყენებისათვის მნიშვნელოვანი შემთხვევები. ისინი თავმოყრილია ვ. კუპრადის, თ. გეგელიას, მ. ბაშელეიშვილის და თ. ბურჭულაძის მონოგრაფიაში[4]. სივრცით ამოცანებს ეძღვნება აგრეთვე ა. ალექსანდროვის და ი. სოლოვევის[5], ა. გუზის[6] და ი. ნემიშის[7], მ. კოლტუნოვის, ი. ვასილევის და ვ. ჩერნიხის[8], ი. პოდლიჩუკის[9], ა. ულიტკოს[10] მონოგრაფიები.

სამგანზომილებიანი დრეკადობის თეორიის ცალკეული მიმართულებით განვითარების შესახებ დაწერილია ვრცელი მიმოხილვითი ნაშრომები : ბ. აბრამიანისა და ა. ალექსანდროვის[11], გ. ნოიბერის [12] და გ.ჰანის [13], ა. ლურიეს[14] და სხვების მიერ. განსაკუთრებულ ყურადღებას იმსახურებს ა. კალანდიას[15], გ. მანჯავიძის[16], ბ. პროკოპოვის[17] და ი. უფლიანდის [18] მიმოხილვითი სტატიები. ამ სტატიებში

ჩატარებულია ღრმა ანალიზი წრფივი დრეკადობის თეორიის ძირითადი მეთოდებისა და მნიშვნელოვანი შედეგების შესახებ. ზემოთ მოხსენებულ მიმართულებებს ეყრდნობა მძლავრი თანამედროვე მიახლოებითი მეთოდები – სასრული ელემენტების მეთოდი (ზენკევიჩის [19], პოსტნოვის და ხარხურიძის [20]), სასზღვრო ელემენტების მეთოდი საფუძვლიანად არის განხილული კრუზის და რიცოს [21] ნაშრომში, ბენჯერისა და ბატერფიდის მონოგრაფიაში [22]. რაც შეეხება სასრულ სხვაობიან მეთოდებს, ამ მეთოდის გარშემო აუარებალი ლიტერატურის დასახელება შეიძლება. თანამედროვე მძლავრმა გამოთვლითმა ტექნიკამ შესაძლო გახადა ამ მეთოდების გამოყენება დრეკადობის მათემატიკური თეორიასა და გამოყენებითი დრეკადობის თეორიის მრავალი საინტერესო პრობლემის გადასაჭრელად.

დრეკადობის თეორიაში. როგორც იზოტროპული, ასევე ანიზოტროპული, კერძოდ კი, ტრანსვერსალურად-იზოტროპული სხეულებისათვის მნიშვნელოვან როლს თამაშობს წონასწორობის განტოლებების ამონახსნების ზოგადი წარმოდგენები. ამასთან ხშირად ამტკიცებენ, თითქოს ასეთი წარმოდგენები უწყოფოა, რადგან გამოყენებული ფუნქციებით გამოსახული სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება რთულდება. მაგრამ საკოორდინატო სისტემის სათანადო შერჩევისას ზოგადი წარმოდგენები წარმოადგენს ეფექტურ და მიზანშეწონილ ხერხს. უფრო მეტიც, დრეკადობის თეორიის ეფექტური და ანალიზური ამოხსნების უმეტესი რაოდენობა მიღებულია სწორედ ამ ზოგადი ამონახსნების დახმარებით. ამჟამად „ზოგადი წარმოდგენებით“ საკმაოდ ხშირად სარგებლობენ, განსაკუთრებით კი დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების ამოხსნისას. მართლაც, ამ საკითხისადმი მრავალი ნაშრომი არის მიძღვნილი. ევროპელი მეცნიერების [23]-[25], [26]-[32],[12], [34], [35], რუს მეცნიერთა ნაშრომები [36], [37], [38], [39],[40],[41], [42]-[46], უკრაინული მექანიკისთა ნაშრომები [47], [48],[ 49]. რაც შეეხება ქართველი მათემატიკოსებისა და მექანიკოსების ნაშრომებს, მათ შესახებ ინფორმაცია მოყვანილია მონოგრაფიებში [50] და [4].

1948 წელს ელიოტმა ამოხსნა დრეკადობის თეორიის ღერძსიმეტრიული ამოცანა ტრანსვერსალურად-იზოტროპული (ტრანსტროპული) სხეულისათვის ორი ფუნქციის დახმარებით, რომლებიც მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებებს აკმაყოფილებდნენ[76]. ეს ამოხსნები შემდეგ სხვა ავტორებმაც გამოიყენეს კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად. ასე მაგალითად ბაბლოიანმა [77],[78]. [79]-[80] ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანები უსასრულო ტრანსტროპული ცილინდრისათვის, როდესაც მის ცილინდრულ ზედაპირზე მოცემულია სპეციალური სახის დატვირთვები. ამასთან გეომეტრიული და დრეკადი სიმეტრიის ღერძები ერთმანეთს ემთხვევა. ს. ლეხნიცკიმ თავის წიგნში შემოგვთავაზა ტრანსტროპული ბრუნვითი სხეულის ღერძსიმეტრიული დეფორმაციის თეორია[43]. ამ თეორიით ისარგებლა C. V. Yoaganand -მ და ამოხსნა ამოცანა უსასრულო ცილინდრისათვის, რომლის გვერდითი ზედაპირი თავისუფალია დატვირთვისაგან, გარდა 2l სიგანის ზოლისა, სადაც მოცემულია მუდმივი რადიალური გადაადგილება[81].

Byrnes-მა და Arcer-მა[82] იზოტროპული მასალებისათვის ამოხსნის ხერხი [83] განაზოგადეს ტრანსტროპული მასალებისათვის. ამ მეთოდით ამოხსნეს კონკრეტული სასაზღვრო ამოცანა ტრანსტროპული ცილინდრისათვის.

ჩენი ნაშრომში[84] რამდენადმე შეცვალა ელიოტის მიერ მიღებული ზოგად ამონახსნები[76], შემოყვანა რა ახალი ცვლადები და პოტენციალური ფუნქციები, ელიოტის მიერ მიღებული ფუნქციების მაგივრად. რაც შეეხება სასაზღვრო ამოცანებს ცილინდრისათვის, ნახევარსივრცისათვის და ფენისათვის, ისინი ამოხსნილია სხვადასხვა ავტორის მიერ[85]-[87].

ცხადია, რომ ზემოთ მოყვანილი ჩამონათვალი არ არის სრული, ის მხოლოდ ასახავს თუ რამდენადაა აქტუალური ის საკითხები, რომლებსაც განიხილავს ავტორი. უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ ამ ნაშრომებიდან უმეტესობა ეძღვნება უსასრულო სხეულებს.

სივრცითი ამოცანების ამოხსნისას, როგორც უკვე არაერთხელ აღვნიშნეთ, ერთ–ერთი მთავარ მეთოდია ფურიეს ანუ ცვლადთა განცალკეების მეთოდი. იგი დაფუძნებულია თეორემებზე მათემატიკური ფიზიკის განტოლებების ამოხსნების გაშლისა ორთოგონალური ფუნქციების სხვადასხვა სისტემებში. აქ პრაქტიკულად არ გვხვდება ისეთი სისტემები, რომლებიც არ იყვნენ შესაბამისი შტურმ-ლიუვილის ამოცანის საკუთრივი ფუნქციები.

ფურიეს მეთოდს, როგორც წესი, გამოიყენებენ საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულების დრეკად – დეფორმირებული მდგომარეობის კვლევისას. ცხადია, რომ ამ საკოორდინატო სისტემებში შესაძლებელი უნდა იყოს შესაბამის განტოლებებში ცვლადების განცალკეება. ეს მეთოდი განსაკუთრებულად ეფექტურად გამოიყენება იმ შემთხვევაში, როდესაც საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულის საზღვრის ნაწილზე მოცემულია ერთგვაროვანი პირობები. ფურიეს მეთოდის გამოყენებისას ხშირად სარგებლობენ წონასწორობის განტოლებების ზოგადი ამონახსნებით პაკოვიჩ - ნოიბერის ფორმით. ეს ფორმა ემყარება გადაადგილების ვექტორის დაშლას სოლენოიდალურ და პოტენციალურ ველებად(იხ. ვ. ნოვაკი [50]). ამ ამონახსნში მონაწილეობენ ჰარმონიული ფუნქციები. თავად ამონახსნი მოცემულია სპეციალური ფუნქციების, მწკრივებისა და ინტეგრალების (ანუ ფაქტიურად კვლავ მწკრივების) სახით. თუ ამ მწკრივების კოეფიციენტები გამოითვლება ცხადი სახით, მაშინ ასეთ ამონახსნებს ეწოდება ზუსტი ამონახსნები. იმ ამოცანების კლასის დასადგენად, სადაც ვლუბულობთ ზუსტ ამონახსნებს დიდი მნიშვნელობა აქვს ამონახსნთა სტრუქტურას, რომელიც თავის მხრივ დამოკიდებულია განმსაზღვრელ განტოლებათა სახეზე, სხეულის ფორმაზე, სასაზღვრო ამოცანის ტიპზე, დატვირთვებისა და ფორმების სიმეტრიაზე და დრეკადი ველის დაშლას ხელსაყრელ ინგრედიენტებად.

ასე მაგალითად, პაკოვიჩ -ნეიბერის ზოგადი ამონახსნები, რომელსაც ხშირად იყენებენ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა

სისტემაში იზოტროპიულ შემთხვევაში, მიიღება წონასწორობის განტოლებების ე.წ. დივერგენციულ-როტორულ ფორმიდან[33]. დივერგენციისა და გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებში ჩაწერილი წონასწორობის განტოლებების სისტემა წარმოადგენს კომი-რიმანის განზოგადებულ სისტემას, რომელიც, კერძო წარმოებულისანი განტოლებათა აზრით, შესწავლილია ა. ბიწაძის[56] მიერ. მიუხედავად ამისა ამ სისტემით მყარი დეფორმირებადი სხეულების მექანიკაში მომუშავე მკვლევარები საკმაოდ დიდი ხნის განმავლობაში უშუალოდ არ სარგებლობდნენ. ამ სისტემას იყენებენ ა. ულიტკო[9], ი. პოდლიჩუკი[8] ბ. ნულერი[52]. კერძოდ ა. ულიტკომ ამოხსნა ამოცანები ნახევარსივრცისათვისა და უსასრულო ფენისათვის. ი. პოდლიჩუკი აგებს რა ზოგად ამონახსნებს, მათი დახმარებით ხსნის სასაზღვრო ამოცანებს სამგანზომილებიანი სხეულებისათვის (ელიფსოიდი, პარაბალოიდისათვის და ა.შ.). ბ. ნულერი უწოდებს რა თავის მეთოდს უბნობრივ-ერთგვაროვან ამოხსნათა მეთოდს, მას გამოიყენებს მაშინ, როდესაც სხეულის გვერდით ზედაპირებზე გვაქვს სხვადასხვა სახის შერეული პირობები, ხოლო ტორსებზე. - ნებისმიერი პირობები.

დრეკადობის თეორიის ამოცანების კვლევისას და ამონახსნების აგებისას დიდი მნიშვნელობა ენიჭება გარკვეულ სიმეტრიებს. ვგულისხმობთ, როგორც სხეულის ფორმის, ასევე გარე შემოფოთებების სიმეტრიას. გ. ბირკჰოფი თავის წიგნში[97] უწყვეტი გარემოს მექანიკის ძირითად ჰიპოტეზებს მიაკუთვნებს შემდეგ პრინციპს: ზემოქმედების სიმეტრია განაპირობებს ეფექტის სიმეტრიას. ამ პრინციპს მრავალი მკვლევარი იყენებს, ასე მაგალითად, იბ. [50], ე. ნიკოშინი[53], გ. შაპირო [54]. გ. ბეიკერი და მ. პავლოვიჩი[55] გარე დატვირთვის სიმეტრია-ანტისიმეტრიის თვისებების გამოყენებით ამოხსნა ამოცანა ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის. ამვე დროს ისინი გაკვირვებით აღნიშნავენ, რომ გამოიყენეს ხერხი, რომელიც მათიემ გამოიყენა და მიღებული შედეგები გამოაქვეყნა 1890 წელს[56]. მას შემდეგ კი თითქმის ასმა წელმა გაიარა და ეს ხერხი არავის არ გამოუყენებიაო.

ამ საკითხებს ბუნებრივად უკავშირდება ამონახსნების სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული გაგრძელების საკითხები გარკვეული არიდან. 1964 წელს ე. ობოლაშვილი გამოაქვეყნა შრომა [57], რომელშიც მის მიერ დამტკიცებულია თეორემა იზოტროპიულ შემთხვევაში ლამეს სისტემის რეგულარული ამონახსნის სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული გაგრძელების შესახებ და ამ თეორემის გამოყენების შედეგად ამოხსნა სასაზღვრო ამოცანები ნახევარსივრცისა და მეოთხედი სივრცისათვის. ამ თეორემაში სასაზღვრო ზედაპირი, რომელზედაც დასმული უნდა იყოს სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები, წარმოადგენს სიბრტყის ნაწილს. თავად პირობები კი ერთგვაროვანია. პირველ შემთხვევისთვის მოცემულია, რომ გადაადგილების ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ტენზორის მხები კომპონენტებია ნულის ტოლი. მეორე შემთხვევაში კი ნულის ტოლია ძაბვის ტენზორის ნორმალური კომპონენტი და გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელები. ოთხი ავტორის მონოგრაფიაში[4], მას უწოდებენ დრეკადობის თეორიის მესამე და მეოთხე ძირითადი ამოცანები. ანიზოტროპული სხეულებისათვის ისინი შეისწავლა მ. ბაშელიშვილმა[58]. ბრტყელი იზოტროპული სხეულებისათვის ანალიზურ ფუნქციათა მეთოდით ამოხსნა დ. შერმანმა[59]. ერთი კერძო სახის ამოცანა არაერთგვაროვანი სხეულისათვის ამავე მეთოდით ამოხსნა ზ. სირამემ[60].

სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების სისტემური გამოყენება პირველად ნ. ხომასურიძემ დაიწყო. ჯერ კიდევ მის ადრეულ შრომებში (გასული საუკუნის 60-70 -ან წლებში) უკვე ჩანს, რომ ის სისტემატურად იყენებს ამ პირობებს სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად ფირფიტებისა და გარსებისათვის[62]-[65]. 1983 წელს ნ. ხომასურიძემ გამოაქვეყნა შრომა[66]. ამ ნაშრომში მან, დეკარტის, ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატთა სისტემაში ტრანსტროპული სხეულების წონასწორობის განტოლებებისათვის მიიღო ზოგადი ამონახსნების წარმოდგენები. მანამდე ნ. ხომასურიძემ იზოტროპული სხეულებისათვის სხვადასხვა ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემებში მიიღო დივერგენციული-

როტორული ფორმა წონასწორობის განტოლებების. ააგო მათი ზოგადი ამონახსნები და გამოიყენა სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოსახსნელად [67]-[70]. დრეკადი ველის კომპონენტების ფუნქციონალური წარმოდგენები აიგება სამი ჰარმონიული ფუნქციის საშუალებით ისეთი სახით, რომ ზემოთ ხსენებულ საკოორდინატო სისტემების ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულებისათვის დასმული სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ერთი კლასისათვის მიიღო სრული ამოხსნა. ამ კლასის ამოცანებისათვის არსებითია, რომ საკოორდინატო პარალელეპიპედის ექვსი ზედაპირიდან ოთხზე მოცემული იყოს სიმეტრიულად ან ანატისიმეტრიულად გაგრძელების პირობები, ხოლო მრუდწირული ზედაპირის შემთხვევაში დივერგენციული-როტორული სახის სასაზღვრო პირობები. [71] ნაშრომში ნ. ხომასურიძის მეთოდი განზოგადებულია ელექტროდრეკადობის თეორიის წონასწორობის განტოლებებისათვის.

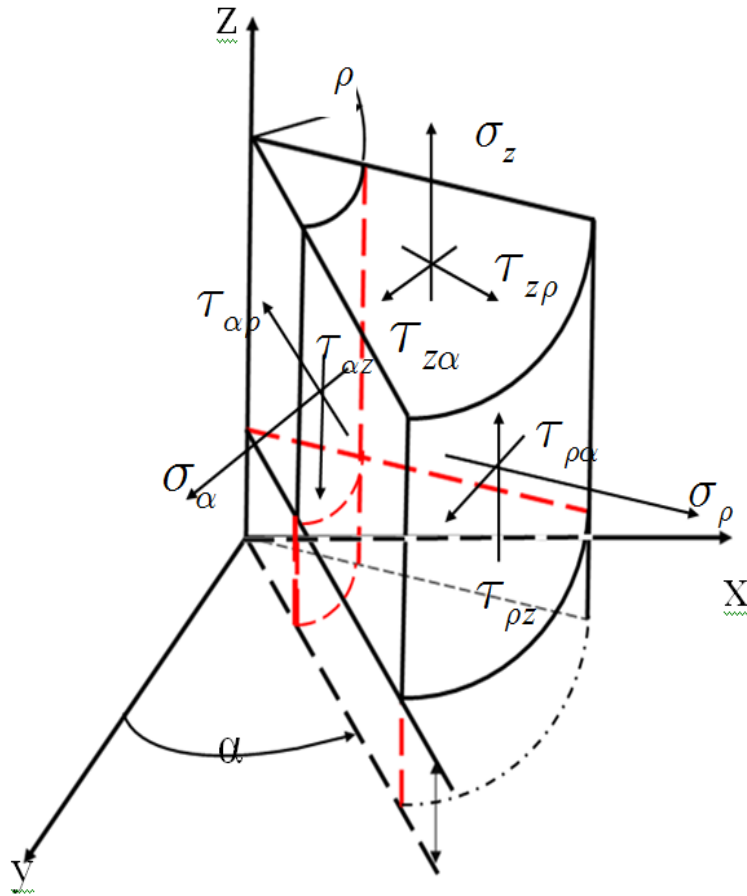
**§ 12. ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატებში**

**შესავალი.** იზოტროპული ერთგვაროვანი ფენის დრეკადი წონასწორობა ჯერ კიდევ ლამემ და კლაპეირონმა განიხილა. შემდგომ კვლევებში ხდებოდა ერთი მხრივ ამ ავტორების მიერ მიღებული ამოხსნების გამარტივება, მეორე მხრივ კი მათი განზოგადოება. ამ საკითხისადსმი მიძღვნილ ამოცანათა საკმაოდ დიდი ჩამონათვალი მოყვანილია მონოგრაფიებში [10], [18].

ყველა მითითებულ შრომებში უმეტეს შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნები აიგებოდა ორმაგი ინტეგრალური გარდაქმნის ფორმულების დახმარებით იზოტროპული ფენისთვის ტემპერატურული შეშფოთების გაუთვალისწინებლად. ამ თავის პირველ ორ თავში ფურიეს მეთოდის და ორმაგი მწკრივების, დახმარებით აგებულია თერმოელექტროდრეკადობის [48], [90],[91] სტატიკური სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნები  $\bar{\Pi} = \{(\rho, \alpha, z) \in R : \rho_o < \rho < \rho_1; \alpha_o < \alpha <$

$\langle \alpha, 0 < z < z_1 \rangle$  მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედისათვის (ფაქტობრივად, მრუდწირულ საკოორდინატო პარალელეპიპედში, იგულისხმება საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეული), სადაც  $\rho, \alpha, z$  – განზოგადებული ცილინდრული კოორდინატებია

( $\rho, \alpha$  – ორთოგონალური კოორდინატებია სიბრტყეზე, ხოლო  $z$  – წრფივი კოორდინატია). შემდგომ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ  $z = 0$  და



ნახ.5. განზოგადებული ცილინდრული კოორდინატების სისტემა.

მრუდწირული საკოორდინატი პარალელეპიპედი

$z = z_1$  ზედაპირებზე ტემპერატურულ და ელექტრულ შემფოთებასთან ერთად შეიძლება მოცემული იყოს როგორც ძაბვები, ასევე გადადგილებები ან მათი კომბინაცია. გვერდით  $(\rho = \rho_0, \rho = \rho_1, \alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_1)$  ზედაპირებზე კი მოცემულია სპეციალური სახის ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. აქვე შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ განხილულ სასაზღვრო ამოცანებში, როდეს-



საც ზედაპირი არის სიბრტყე სპეციალური სახის პირობა გარდაიქმნება მესამე სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის სასაზღვრო პირობად. თუ სხეული მრავალფენოვანია, მაშინ  $z = const$  საკონტაქტო ზედაპირებია. შემდგომ ვიგულისხმებთ, რომ დრეკადი სხეული ან მრავალფენიანი სხეულის ფენები ტრანსტოპულია (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული). აქვე აღვნიშნოთ, რომ ტრანსტროპული ეწოდება სხეულს, რომლის დრეკადი თვისებები მოცემული ღერძისა და მისი ნებისმიერი პერპენდიკულარული მიმართულებით განსხვავებულია, ხოლო აღნიშნული ღერძის ნებისმიერ მართობულ სიბრტყეში არ არის დამოკიდებული მიმართულების არჩევაზე. ამ უკანასკნელს სიბრტყეს იზოტროპიის სიბრტყე ეწოდება და ჩვენს შემთხვევაში  $z = const$  – იზოტროპიის სიბრტყე.

ამგვარად, ამ თავში განხილული იქნება (მიუხედავად იმისა, რომ სხეულის გვერდით ზედაპირებზე სპეციალური სახის ერთგვაროვანი პირობებია) უსასრულო ფენის დრეკადი წონასწორობის ამოცანის განზოგადება მისი ამოხსნის მეთოდის გამარტივების გზით [72]. გამარტივება მიიღწევა იმის გამო, რომ 1) სასაზღვრო და საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემული კლასიკური პირობების ექვივალენტური პირობების შეცვლით ; 2) ორმაგი ინტერალური გარდაქმნების მაგივრად ორმაგი მწკრივების გამოყენება.

ამოხსნათა ეფექტურობის შესახებ შეიძლება შემდეგი აზრი გამოვთქვათ: თუ მოცემულ არეში ცვლადთა განცალების მეთოდით (ფურიეს მეთოდით) შეიძლება ეფექტურად აიგოს ლაპლასის განტოლების ამოხსნა, მაშინ ასეთივე ეფექტურობით, ამავე არეში და ამავე მეთოდით შეიძლება განისაზღვროს აღნიშნული სხეულების თერმოელექტრო დრეკადი წონასწორობა.

$\rho, \alpha, z$  საკორდინატო სისტემის ლამეს კოეფიციენტებია [92]:

$$h_\rho = h_\alpha = h = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2}, \quad h_z = 1$$

და

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial y}{\partial \rho} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) = 0,$$

სადაც  $x, y$  – დეკარტის კოორდინატებია.

თერმოელექტროდრეკადობის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე [29], [30]:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial(h\sigma_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{h} \frac{\partial(h^2\tau_{\rho\alpha})}{\partial \alpha} + h^2 \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \rho} \sigma_\alpha = 0, \\ b) \quad & \frac{\partial(h\sigma_\alpha)}{\partial \alpha} + h^2 \frac{\partial\tau_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial(h^2\tau_{\alpha\rho})}{\partial \rho} - \frac{\partial h}{\partial \alpha} \sigma_\rho = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} c) \quad & h^2 \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial(h\tau_{\rho z})}{\partial \rho} + \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial \alpha} = 0, \\ & \frac{1}{h^2} \frac{\partial(hD_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial(hD_\alpha)}{\partial z} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1) განტოლებები – განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ჩაწერილი ჩვეულებრივი დრეკადი წონასწორობის განტოლებებია. (2.2) განტოლებები კი ელექტროსტატიკის განტოლებებია. ამ განტოლებებში  $\sigma_\rho, \sigma_\alpha, \sigma_z$ –მახვის ნორმალური მდგენალებია,  $\tau_{\rho\alpha}, \tau_{\rho z}, \tau_{\alpha z}$  –მახვის მხები მდგენელებია.  $D_\rho, D_\alpha, D_z$  – ელექტრული  $\bar{D}$  ინდუქციის ვექტორის მდგენელები  $\rho, \alpha, z$  საკოორდინატო წირების მხებების გასწვრივ.

გადაადგილებებსა და მახვებს შორის კავშირს ანუ ჰუკის კანონს (მას ზოგი ავტორი ფიზიკურ კანონსაც უწოდებს) განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე [91]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= c_1 \varepsilon_{\rho\rho} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\rho\rho} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_z &= c_3 (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T, \\ \tau_{\alpha z} &= c_4 \varepsilon_{\alpha z} - e_3 E_\alpha, \quad \tau_{\rho z} = c_4 \varepsilon_{\rho z} - e_3 E_\rho, \quad \tau_{\rho\alpha} = c_5 \varepsilon_{\rho\alpha}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$D_\rho = e_3 \varepsilon_{\rho z} + \varkappa_1 E_\rho, \quad D_\alpha = e_3 \varepsilon_{\alpha z} + \varkappa_1 E_\alpha,$$

$$D_z = e_1(\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + e_2 \varepsilon_{zz} + \varkappa_2 E_z.$$

$\varepsilon_{\rho\rho}, \varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\rho\alpha} = \varepsilon_{\alpha\rho}, \varepsilon_{\rho z} = \varepsilon_{z\rho}, \varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{\alpha z}$  – დეფორმაციის

ტენზორის კომპონენტებია;  $E_\rho, E_z, E_\alpha$  – ელექტრული  $\vec{E}$  ველის ვექტორის კომპონენტებია და  $\varphi$  ელექტრული პოტენციალით ასე გამოისახება  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  [90].  $c_i$  ( $i=1,2,3,4,5$ ) – მუდმივი ელექტრული ველისას გაზომილი დრეკადობის მუდმივებია;  $e_j$  ( $j=1,2,3$ ) – პიეზოელექტრული მუდმივებია;  $\varkappa_1, \varkappa_2$  – მუდმივი დეფორმაციების დროს დიელექტრული გამტარობის მუდმივებია;  $\beta_{10} = [2(c_1 - c_5)\beta_1 + c_3\beta_3], \beta_{20} = [2c_3\beta_1 + c_2\beta_2]$   $\beta_1, \beta_2$  – იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  ღერძის გასწვრივ წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებია [28]. სხეულში  $T$  ტემპერატურა აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\Delta_2 T + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

და შესაბამის სასაზღვრო პირობებს.  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  – სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  – გასწვრივ;

$\Delta_2 = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)$ ; გავითვალისწინოთ, რომ დეკარტის მართკუთხა

$x, y, z$  კოორდინატთა სისტემაში  $h = 1$ , ხოლო  $\frac{\partial}{\partial \rho}$  შეიცვლება  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \alpha}$  კი

$\frac{\partial}{\partial y}$ ; წრიულ  $r, \alpha, z$  ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ოპერაცია

$\frac{\partial}{\partial \rho}$  შეიცვლება  $r \frac{\partial}{\partial r}$  [72].

გადაადგილებებსა და დეფორმაციებს შორი კავშირს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial(hu)}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{\partial(hv)}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial(hw)}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{\alpha z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{\rho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{\rho\alpha} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{v}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right),$$

სადაც  $u, v, w$  – გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია  $\rho, \alpha, z$   
საკოორდინატო წირების მხებების გასწვრივ.

თუ გავითვალისწინებთ (2.3) და (2.5) ტოლობებს, მაშინ (2.1) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით [72], [36]:

$$a) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_3}{c_1} K + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial(h\tau_{z\rho})}{\partial \rho} + \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial \alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T \right),$$

$$b) \frac{\partial K}{\partial \rho} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial(h\tau_{z\rho})}{\partial z} = 0, \quad (2.7)$$

$$c) \frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial z} = 0,$$

$$d) \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial(h\tau_{z\alpha})}{\partial \rho} - \frac{\partial(h\tau_{z\rho})}{\partial \alpha} \right) - c_4 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{c_5} B \right) = 0,$$

სადაც

$$a) K = c_1 \left[ \frac{\partial(hu)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hv)}{\partial \alpha} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \beta_{10} T,$$

$$b) B = c_5 \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial(hv)}{\partial \rho} - \frac{\partial(hu)}{\partial \alpha} \right], \quad (2.8)$$

$$d) \tau_{z\alpha} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + e_3 \frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

აღსანიშნავია, რომ (1.7d) წარმოადგენს იგივეობას [72].

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$a) B_\rho = c_4 \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial(hv)}{\partial z} \right],$$

$$b) B_\alpha = c_4 \frac{1}{h} \left[ \frac{\partial(hu)}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \rho} \right], \quad (2.9)$$

$$c) B_z = c_5 \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial(hv)}{\partial \rho} - \frac{\partial(hu)}{\partial \alpha} \right],$$

$$\tilde{K} = c_1 \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial(hu)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hv)}{\partial \alpha} \right] + (c_3 + 2c_4) \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned} a) \tau_{z\alpha} &= B_\rho + 2c_4 \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = -B_\rho + \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + e_3 \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}, \\ b) \tau_{z\rho} &= B_\alpha + 2c_4 \frac{1}{h} \frac{\partial(hw)}{\partial \rho} + e_3 \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = -B_\alpha + 2c_4 \frac{\partial u}{\partial z} + e_3 \frac{1}{h} \frac{\partial \phi}{\partial \rho}, \\ c) \tau_{\rho\alpha} &= B_z - 2c_5 \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \rho} v + 2c_5 \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = -B_z - 2c_5 \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \rho} u + 2c_5 \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \rho}, \end{aligned}$$

მაშინ (1.1) წონასწორობის განტოლებები ასე ჩავწეროთ:

$$\begin{aligned} a) \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial(hB_\alpha)}{\partial \rho} + \\ + \frac{1}{h^2} \frac{\partial(hB_\rho)}{\partial \alpha} = \frac{\beta_{20} c_1 - (c_3 + 2c_4)}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{(c_3 + 2c_4)e_1 - c_1 e_2}{c_1} \times \\ \times \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_3 \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha^2} \right), \\ b) \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho} - \frac{\partial B_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial(hB_\alpha)}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} = 0, \\ c) \frac{\partial B_z}{\partial \rho} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial(hB_z)}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \alpha \partial z} = 0, \\ d) \frac{\partial(hB_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(hB_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2(h^2 B_z)}{\partial z^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.11d) ტოლობაც აგრეთვე წარმოადგენს იგივეობას.

ქვემოთ მოგვყავს ის სასაზღვრო პირობები, რომლებიც შემდგომ განსაზღვრავენ განსახილავი სასაზღვრო ამოცანების კლასს. მათ შემდეგი სახე აქვთ. ამისათვის განვიხილოთ თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედი. მას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, უკავია არე:

$$\bar{\Pi} = \{(\rho, \alpha, z) \in R : \rho_0 < \rho < \rho_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; 0 < z < z_1\}$$

სასაზღვრო პირობებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\begin{aligned} \text{როცა } \rho = \rho_j : \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{z\rho} = 0, \quad B = 0, \quad D_\rho = 0, \quad \text{ან} \quad (2.12) \\ b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } \alpha = \alpha_j : \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{z\alpha} = 0, \quad B = 0, \quad D_\alpha = 0, \quad \text{ან} \quad (2.13) \\ b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j : \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = F_{j1}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \quad b) \quad T = F_{j2}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \Theta_j T = F_{j3}(\rho, \alpha), \quad (2.14) \end{aligned}$$

$$\text{როცა } z = z_j : \quad a) \quad j = F_{j4}(r, \mathbf{a}), \quad \text{ან} \quad b) \quad D_z = F_{j5}(r, \mathbf{a}); \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j : \quad a) \quad \sigma_z = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\rho} = F_{j7}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\alpha} = F_{j8}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \\ b) \quad w = f_{j1}(\rho, \alpha), \quad hu = f_{j2}(\rho, \alpha), \quad hv = f_{j3}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \quad (2.16) \\ c) \quad \sigma_z = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad hu = f_{j2}(\rho, \alpha), \quad hv = f_{j3}(\rho, \alpha), \quad \text{ან} \\ d) \quad w = F_{j6}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\rho} = F_{j7}(\rho, \alpha), \quad h\tau_{z\alpha} = F_{j8}(\rho, \alpha). \end{aligned}$$

აქ  $j = 0, 1$ . ამასთან  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ .  $F_{jl}(\rho, \alpha)$ ,  $f_{jl}(\rho, \alpha)$  ფუნქციებზე დადებულ პირობებზე ქვემოთ გვექნება ლაპარაკი; აქ აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ისინი აკმაყოფილებენ პარალელეპიპედის წიბოებზე შეთანხმებულობის პირობებს. ასე მაგალითად,

რამდენიმე სიტყვა ზემოთ მოყვანილ მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედის (შემდგომ გამოვიყენოთ აბრევიატურა „მსპ“) ექვს საერთოდ, რომ ვთქვათ არაბრტყელ წახნაგებზე სასაზღვრო პირობების და ფიზიკური მოდელის შესახებ. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, როგორია მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედის დამაბული–დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელი.

ნაშრომში განხილული ამოცანების ფიზიკური მოდელი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

*ვიპოვოთ ორთოგონალური მრუდწირული საკორდინატო პარალელეპიპედის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა, როდესაც მის ორ პარალელურ წახნაგზე გარდა თერმული და ელექტრული ველისა, აგრეთვე მოცემულია ზედაპირული შეშფოთება ძაბვების, გადაადგილებების ან მათი კომბინაციის სახით, ხოლო დანარჩენი წახნაგები ნაწილობრივ ჩამაგრებულია და თერმო-ელექტროიზოლირებულია ან ტემპერატურა ნულის ტოლია.*

*ნაწილობრივ ჩამაგრებაში იგულისხმება, რომ ამ წახნაგებზე სრულდება შემოთმოყვანილი (2.12) და (2.13) სასაზღვრო პირობები. ამ სასაზღვრო პირობების ტენიკური ინტერპრეტაცია კი შემდეგნაირია: 1) ან არაბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი ( თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა) 2) ან არაბრტყელი წახნაგი ებჯინება აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს. ცხადია, რომ სხეულის ზედაპირის ფორმა სავსებით იდენტურია არაბრტყელი წახნაგის, რადგანაც არაბრტყელი წახნაგის ყველა წერტილი უნდა ეხებოდნენ სხეულის გლუვი ზედაპირის შესაბამის წერტილებს. სხვანაირად პირველ შემთხვევაში წახნაგის წერტილებს არ შეუძლიათ გადაადგილება ზედაპირის მხების გასწვრივ, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. მეორე შემთხვევაში წერტილებს არ შეუძლიათ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გადაადგილება, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის მხების გასწვრივ.*

*მართლაც, რადგან არა ბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი (თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა), ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , ან  $u = 0$ ,  $w = 0$ , ან  $u = 0$ ,  $v = 0$ . აქედან  $K = 0$ .*

*მეორე შემთხვევაში, რადგან სხეული აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს, ამიტომ გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენე-*

ლი ნულის ტოლია, ხოლო აბსოლუტური სივსევის გამო  $B = 0, \tau_{z\rho} = 0$ ,  
 ან  $B = 0, B = 0, \tau_{z\alpha} = 0$  ან  $\tau_{z\rho} = 0, \tau_{z\alpha} = 0$ .

პირველი და მეორე ტიპის ნაწილობრივი ჩამაგრებები გვხვდება სამშენებლო კონსტრუქციებში, ჰიდრიტექნიკურ ნაგებობებში, მანქანათა-მშენებლობაში და ა.შ. კერძოდ, პირველი ტიპის ჩამაგრებით შეიძლება სამშენებლო კონსტრუქციების სახსრული (თავისუფალი) დაყრდნობის, მსუბუქი შემავსებლით სქელი ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის და ა.შ მოდელირება. არანაკლებ მნიშვნელოვანია მეორე ტიპის ჩამაგრება. კერძოდ, ამ შემთხვევაში შესაძლებელია გლუვი შტამპისა და დრეკადი სხეულის კონტაქტის მოდელირება ან კიდევ ეგრეთ წოდებული სამშენებლო კონსტრუქციების სრიალა ჩამაგრების მოდელირება. ერთი სიტყვით პირველი და მეორე ჩამაგრების პრაქტიკული მნიშვნელობა არა ნაკლებია ვიდრე, მაგალითად კონსტრუქციის ხისტი ჩამაგრება და ისინი უფრო ხშირად გამოიყენება.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ რაც უფრო მცირეა ცილინდრული სასაზღვრო  $\rho = \rho_j$  ზედაპირის სიმრუდე, მით უფრო მცირეა განსხვავება (2. 12a). (2.13b) პირობების შესაბამისი,

$$\begin{aligned}
 a) \quad & u = 0, \quad \tau_{\alpha\rho} = 0, \quad \tau_{z\rho} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \quad D_\rho = 0 \quad \text{და} \\
 b) \quad & \sigma_\rho = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

პირობებისაგან, როცა  $\rho = \rho_j$ . (2.12a). (2.12b) პირობები ექვივალენტურია (2.17a) და (2.17b) პირობებისა იმ შემთხვევაში, როდესაც  $\rho = \rho_j$  - სიბრტყეა.

### § 1.3. კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტობა. რეგულარული ამოხსნა

წონასწორობის განტოლებები ზემოთ მიღებული ფორმა და სასაზღვრო პირობების სპეციალური კლასი საშუალებას იძლევა მივიღოთ (2.6)-(2.7) სისტემის სრული ამოხსნა. უფრო მეტიც, რომ შევძლოთ ამ ნაშრომში დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად ფურიეს



მეთოდი ხელსაყრელია მივიღოთ (2.16) სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტური პირობები, რომელიც წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით.

$$\begin{aligned}
 z = z_j : a) \quad \sigma_z = F_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(h\tau_{z\rho}, h\tau_{z\alpha}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha), \\
 \Gamma_2(h\tau_{z\alpha}, h\tau_{z\rho}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha); \\
 b) \quad w = f_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(hu, hv) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha), \\
 \Gamma_2(hv, hu) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha); \\
 c) \quad w = f_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(h\tau_{z\rho}, h\tau_{z\alpha}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha), \\
 \Gamma_2(h\tau_{z\alpha}, h\tau_{z\rho}) = \tilde{F}_j(\rho, \alpha); \\
 d) \quad \sigma_z = F_j(\rho, \alpha), \quad \Gamma_1(hu, hv) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha), \\
 \Gamma_2(hv, hu) = \tilde{f}_j(\rho, \alpha),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

სადაც  $\Gamma_1(g_1, g_2) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial \rho} + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \right)$ ,  $\Gamma_2(g_2, g_1) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial \rho} - \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \right)$ , ამასთან

$g_1 = h\tau_{z\rho}$  ან  $g_1 = hu$ ,  $g_2 = h\tau_{z\alpha}$  ან  $g_2 = hv$ . მივიღოთ, რომ ფუნქციები  $\tilde{F}_j(\rho, \alpha)$  და  $\tilde{f}_j(\rho, \alpha)$  თვითონ, ხოლო  $F_j(\rho, \alpha)$ ,  $f_j(\rho, \alpha)$  და  $\sigma_z(\rho, \alpha)$  წარმოიდგინებინათ თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით (ფურიეს მწკრივი შტურმ-ლიუვილის გარკვეული ამოცანების საკუთრივი ფუნქციების სახით). ეს ფაქტი აღვნიშნოთ ასე  $(u, v, w) \in C_0^3(\Pi)$ . ჩვენი მიზანია მივიღოთ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამოხსნა. ამიტომ, ჩამოვყალიბოთ, თუ რა გვესმის რეგულარული ამოხსნის ცნებაში.

(2.7)-(2.8) სისტემის  $u, v$  და  $w$  ფუნქციებით განსაზღვრულ ამოხსნას ვუწოდოთ რეგულარული, თუ  $u, v$  და  $w$  არიან სამჯერ უწყვეტად წარმოებადი  $\mathbb{H}$  არეში, სადაც  $\mathbb{H}$  არის  $\Pi$  მრუდწირული პარალელეპიპედის შიგა არე  $\rho = \rho_j$  და  $\alpha = \alpha_j$  საზღვრების ჩათვლით. პარალელეპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეზე, ე.ი., როცა  $z = z_j$  ისინი წარმოიდგინებინათ თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით (ფურიეს მწკრივი შტურმ-ლიუვილის გარკვეული ამოცანების

საკუთრივი ფუნქციების სახით). გარდა ამისა, პარალელეპიპედის გვერდით წახნაგებზე ( $\rho = \rho_j, \alpha = \alpha_j$ ) კმაყოფილდება წონასწორობის განტოლებები.

ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ (2.15) და (3.1) სასაზღვრო პირობები ეკვივალენტურია. ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ  $\Pi = \{(\rho, \alpha) \in R : \rho_0 < \rho < \rho_1, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1\}$  არეში შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\frac{\partial g_1}{\partial \rho} + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \rho} - \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = 0; \quad (3.2)$$

$$\text{როცა } \rho = \rho_j: \quad a) \quad g_2 = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \rho} = 0 \quad \text{სხ} \quad b) \quad g_1 = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \rho} = 0; \quad (3.3)$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_j: \quad a) \quad g_1 = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{სხ} \quad b) \quad g_2 = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \rho} = 0. \quad (3.4)$$

კელდიშ-სედოვის თეორემის[39] თანახმად, (3.2), (3.3),(3.4) სასაზღვრო ამოცანას, გარდა სასაზღვრო ამოცანებისა (3.2), (3.3 a),(3.4b) და (3.2), (3.3b), (3.4 a), აქვს შემდეგი ამოხსნა

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0.$$

რაც შეეხება (3.2), (3.3 a), (3.4 b) სასაზღვრო ამოცანას, მას აქვს შემდეგი სახი ამოხსნა

$$g_1 = g_{10} = const, \quad g_2 = 0. \quad (3.5)$$

ხოლო (3.2), (3.3 b), (3.4 a) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა კი ასე წარმოიდგინება:

$$g_1 = 0, \quad g_2 = g_{20} = const. \quad (3.6)$$

ამ შემთხვევაში (2.6), (2.7), (2.4), (2.14), (2.12 a), (2.13 b), (3.1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას უნდა დაემატოს ამოხსნა

$$hu = 0, \quad w = 0, \quad hw = b_1 + \frac{b_2}{c_4} z, \quad (3.7)$$

ხოლო (2.6), (2.7), (2.4), (2.14), (2.12 b), (2.13 a), (3.1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას კი უნდა დაემატოს ამოხსნა

$$h v = 0, \quad w = 0, \quad hu = b_3 + \frac{b_4}{c_4} z. \quad (3.8)$$

ამრიგად ეკვივალენტობა დამტკიცდა.

#### § 14. განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.

განმსაზღვრელ განტოლებათა მისაღებად (2.7) სისტემის მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებები გავაწარმოთ შესაბამისად  $\rho$ -თი,  $\alpha$ -თი და  $z$ -თი და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\Delta_2 B + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{სადაც } \Delta_2 = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right).$$

წარმოვადგინოთ  $B$  შემდეგი სახით:

$$B = \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} \quad (4.2)$$

სადაც  $\Psi_0$  აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta_2 \Psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3)$$

შემდგომში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ასეთი წარმოდგენა შეიძლება მივიღოთ ზოგადობის შეუზღუდავად.

შევიტანოთ  $B$  გამოსახულება (2.7) –ს მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial z} \left( h \tau_{z\rho} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \alpha \partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial z} \left( h \tau_{z\alpha} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \rho \partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( h \tau_{z\alpha} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \rho \partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h \tau_{z\rho} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \alpha \partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით არსებობს ისეთი  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}$  ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2}, \\
h\tau_{z\rho} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \rho \partial z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \alpha \partial z}, \\
h\tau_{z\alpha} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \alpha \partial z} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \rho \partial z}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

შევიტანოთ წინა გამოსახულება (2.8) –ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left( hu - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( w - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( w - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( hv + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} \right) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \rho} \left( hv + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( hu - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

აქაც სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი  $\Psi_2$  ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned}
w &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \varphi, \\
hv &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \rho}, \\
hu &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

თუ (4.5) და (4.7)–ს შევიტანოთ (2.7), (2.8)–ში, მივიღებთ  $\Psi_2$ –ს და  $\Psi_3$ –ს ფუნქციების განსასაზღვრავად სისტემას

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \varphi \right] \right\} &= \frac{c_3 e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \\
+ \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, & \tag{4.8}
\end{aligned}$$

$$\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z_2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3 e_3}{c_1 c_4} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0.$$

ვანტეგროთ (4.8) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება  $z$ –ით. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \varphi \right] - \frac{c_3 e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = f(\rho, \alpha), \quad (4.9)$$

$$\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z_2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3 e_3}{c_1 c_4} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0,$$

სადაც  $f(\rho, \alpha)$  არის ინტეგრების შედეგად გაჩენილი ნებისმიერი ფუნქცია.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ზოგადობის შეუზღუდავად  $f(\rho, \alpha)$  შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ. მართლაც (4.3) და (4.9) შეადგენენ სისტემას, რომლის ზოგადი ამოხსნა წარმოიდგინება, როგორც შესაბამის ერთგვაროვანი სისტემის ზოგად ამოხსნას დამატებული რაიმე კერძო ამოხსნა. ვეძებთ ეს კერძო ამოხსნა ასეთი სახით:

$$\varphi_1^* = 0, \quad \varphi_2^* = \chi^*, \quad \varphi_3^* = -\frac{1}{2c_4} \chi^*, \quad \text{სადაც } \Delta_2 \chi^* = f(\rho, \alpha). \quad \text{მარტივად მოწმდება,}$$

რომ იგი მართლაც (4.9) –ის ამოხსნაა, ხოლო თუ გავითვალისწინებთ (4.7)–ს, მივიღებთ, რომ ამ ამოხსნის შესაბამისი გადაადგილების ვექტორის მდგენელები  $u^* = v^* = w^* = 0$ . მაშასადამე,  $f(\rho, \alpha)$  შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ და საბოლოოდ დრეკადი ველის განმსაზღვრელი სისტემა:

$$\Delta_2 \Psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = 0,$$

$$\Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{e_3}{c_4} \varphi \right] - \frac{c_3 e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = 0, \quad (4.10)$$

$$\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z_2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3 e_3}{c_1 c_4} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{e}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0.$$

## თავი 2.

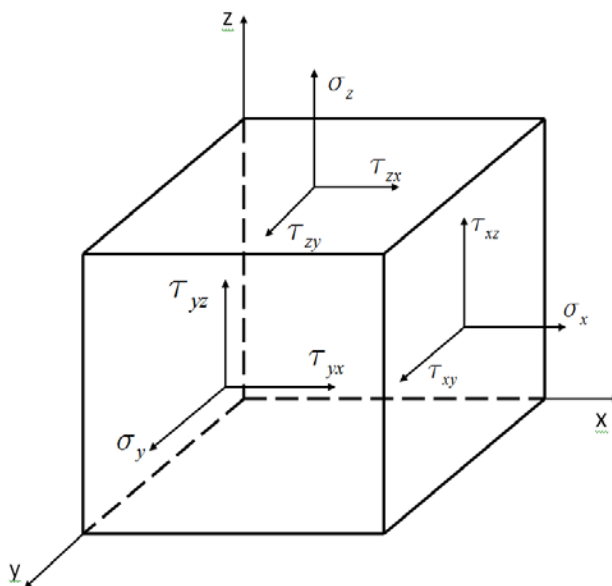
### თერმოელექტროდრეკადობის ზოგიერთი ამოცანა მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში

§ 2.1. წონასწორობის განტოლებები. სასაზღვრო ამოცანების დასმა  
დეკარტის მართკუთხა კოორდინატა სისტემაში განვიხილოთ  
საკოორდინატო პარალელებიპედის თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა.

განსახილავ სხეულს უკავია შემდეგი არე

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R: 0 \leq x \leq x_1; 0 \leq y \leq y_1; 0 \leq z \leq z_1\}.$$

თერმოელექტრო დრეკადი სხეული არის ტრანსვერსალურად  
იზოტროპული (ტრანსტროპული სიმეტრიის სიბრტყედ მივიღოთ  
 $z = const$  სიბრტყე) უწინარეს ყოვლისა გამოვიყოს სასაზღვრო ამოცანების ის  
სპეციალური კლასი, რომელსაც შემდგომში განვიხილავთ. პარალელებიპე-



ნახ. 6. მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის სქელი ფილა  
დის ზედა და ქვედა ფუძეზე ( $z = 0$  და  $z = z_1$  სიბრტყეებზე) მოცემულია ან  
ძაბვები, ან გადაადგილებები, ან მათი კომბინაცია. გვერდით ზედაპირზე

( $x=0, x=x_1, y=0, y=y_1$ ) მოცემულია სპეციალური ტიპის ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, ე.წ. ამონახსნის სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები.

თუ უგულებელვყოფთ მოცულობით ძალებს, ტრანსტროპული სხეულის, თერმოელექტრო დრეკადი წონასწორობა აღიწერება შემდეგი განტოლებებით [89], [90]:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ b) \quad & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} c) \quad & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0, \\ & \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1.1) განტოლებები – დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ჩაწერილი ჩვეულებრივი დრეკადი წონასწორობის განტოლებებია. (1.2) განტოლებები კი ელექტროსტატიკის განტოლებებია. ამ განტოლებებში  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ –ძაბვის ნორმალური მდგენელებია,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – ძაბვის მხები მდგენელებია.  $D_x, D_y, D_z$  – ელექტრული  $\vec{D}$  ინდუქციის ვექტორის მდგენელები  $x, y, z$  საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ.

დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის კავშირს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აქვს შემდეგი სახე [89]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_1 \varepsilon_{xx} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{yy} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_y &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{xx} + c_1 \varepsilon_{yy} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_z &= c_3 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T, \\ \tau_{yz} &= c_4 \varepsilon_{yz} - e_3 E_y, \quad \tau_{xz} = c_4 \varepsilon_{xz} - e_3 E_x, \quad \tau_{xy} = c_5 \varepsilon_{xy}, \\ D_x &= e_3 \varepsilon_{xz} + \varepsilon_1 E_x, \quad D_y = e_3 \varepsilon_{yz} + \varepsilon_1 E_y, \\ D_z &= e_1 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + e_2 \varepsilon_{zz} + \varepsilon_2 E_z, \end{aligned} \quad (1.3)$$

სადაც  $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz}$  – დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებია ;  $E_x, E_y, E_z$  – ელექტრული  $\vec{E}$  ველის ვექტორის კომპონენტებია და  $\varphi$  ელექტრული პოტენციალით ასე გამოისახება  $\vec{E} = -grad \varphi$  [90].  $c_i, (i=1,2,3,4,5)$  – მუდმივი ელექტრული ველისას გაზომილი დრეკადობის მუდმივებია;  $e_j, (j=1, 2, 3)$  – პიეზოელექტრული მუდმივებია;  $\alpha_1, \alpha_2$  – მუდმივი დეფორმაციების დროს დიელექტრული გამტარობის მუდმივებია;  $\beta_{10} = [2(c_1 - c_5) \beta_1 + c_3 \beta_3], \beta_{20} = [2c_3 \beta_1 + c_2 \beta_2], \beta_1, \beta_2$  იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  ღერძის გასწვრივ წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებია[28]. სხეულში  $T$  ტემპერატურა აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\Delta_2 T + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით.  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  –სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  – გასწვრივ;

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

გადაადგილებებსა და დეფორმაციებს შორი კავშირს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

სადაც  $\vec{U}(u, v, w)$  – გადაადგილების ვექტორია.

თუ გავითვალისწინებთ (1.3) და (1.5) ტოლობებს, მაშინ (1.1) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით [72]:



$$\begin{aligned}
a) & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
b) & \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \\
c) & \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\
d) & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \rho} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z} = 0,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
a) & K = c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
b) & B = c_5 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
c) & \tau_{zx} = c_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
d) & \tau_{zy} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

აღსანიშნავია, რომ (1.6d) წარმოადგენს იგივეობას.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
a) & B_x = c_4 \left[ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right], \\
b) & B_y = c_4 \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right], \\
c) & B_z = c_5 \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right],
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\tilde{K} = c_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + (c_3 + 2c_4) \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{1.9}$$

და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned}
a) & \tau_{zy} = B_x + 2c_4 \frac{\partial v}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y} = -B_x + \frac{\partial w}{\partial y} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\
b) & \tau_{zx} = B_y + 2c_4 \frac{\partial w}{\partial x} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x} = -B_y + 2c_4 \frac{\partial u}{\partial z} + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\
c) & \tau_{xy} = B_z + 2c_5 \frac{\partial u}{\partial y} = -B_z + 2c_5 \frac{\partial v}{\partial y},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

მაშინ (1.1) წონასწორობის განტოლებები ასე ჩავწერთ:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{c_3 + 2c_4}{c_1} \frac{\partial \tilde{K}}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \\
& - \frac{\partial B_y}{\partial \rho} + \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\beta_{20} c_1 - (c_3 + 2c_4)}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} + \\
& + \frac{(c_3 + 2c_4) e_1 - c_1 e_2}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - e_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \\
b) \quad & \frac{\partial \tilde{K}}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0, \\
c) \quad & \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{K}}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} + e_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0, \\
d) \quad & \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{c_4}{c_3} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

(111d) აქაც აგრეთვე წარმოადგენს იგივეობას.

ქვემოთ მოგვყავს ის სასაზღვრო პირობები, რომლებიც შემდგომ განსაზღვრავენ განსახილავი სასაზღვრო ამოცანების კლასს. მათ შემდეგი სახე აქვთ ამისათვის განვიხილოთ თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა საკოორდინატო პარალელეპიპედი. მას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, უკავია არე:

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R: 0 \leq x \leq x_1; 0 \leq y \leq y_1; 0 < z < z_1\}$$

განვიხილოთ  $\Pi$  საკოორდინატო პარალელეპიპედის თერმოელექტრო დრეკად წონასწორობას შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\text{როცა } x = x_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad D_x = 0, \quad \text{ახ} \tag{1.12}$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0.$$

$$\text{როცა } y = y_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad D_y = 0, \quad \text{ახ} \tag{1.13}$$

$$b) T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = 0$$

$$\text{როცა } z = z_j: \quad a) \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) T = F_{j2}(x, y), \quad \text{ან} \quad (1.14)$$

$$c) \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y),$$

$$\text{როცა } z = z_j: \quad a) \phi = F_{j4}(x, y), \quad \text{ან} \quad b) D_z = F_{j5}(x, y). \quad (1.15)$$

$$\text{როცა } z = z_j: \quad a) \sigma_z = F_{j6}(x, y), \quad \tau_{zx} = F_{j7}(x, y), \quad \tau_{zy} = F_{j8}(x, y), \quad \text{ან} \quad (1.16)$$

$$b) w = f_{j1}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y), \quad \text{ან}$$

$$c) w = F_{j6}(x, y), \quad \tau_{zx} = F_{j7}(x, y), \quad \tau_{zy} = F_{j8}(x, y), \quad \text{ან}$$

$$d) \sigma_z = F_{j6}(x, y), \quad u = f_{j2}(x, y), \quad v = f_{j3}(x, y).$$

აქ  $j = 0, 1$ . ამასთან  $z_0 = 0$ , - მოცემული მუდმივებია.

$F_{j1}(x, y), f_{j1}(x, y)$  ფუნქციებზე დადებულ პირობებზე ქვემოთ გვექნება ლაპარაკი; აქ აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ისინი აკმაყოფილებენ პარალელეპედის წიბოებზე შეთანხმებულობის პირობებს.

რამდენიმე სიტყვა ზემოთ მოყვანილ საკორდინატო პარალელეპედის ექვს წახნაგებზე სასაზღვრო პირობების და ფიზიკური მოდელის შესახებ სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, როგორია საკორდინატო პარალელეპედის დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელი. ნაშრომში განხილული ამოცანების ფიზიკური მოდელი შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ:

*ვიპოვოთ ორთოგონალური საკორდინატო პარალელეპედის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა, როდესაც მის ორ პარალელურ წახნაგზე გარდა თერმული და ელექტრული ველის, აგრეთვე მოცემულია ზედაპირული შეშფოთება ძაბვების, გადაადგილებების ან მათი კომბინაციის სახით, ხოლო დანარჩენი წახნაგები ნაწილობრივ ჩამაგრებულია და თერმო-ელექტროიზოლირებულია ან ტემპერატურა ნულის ტოლია.*

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (1.12), (1.13) პირობები ეკვივალენტურია ე.წ. III და IV სასაზღვრო ამოცანების ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების [4]. ჯერ განვიხილოთ (1.12a) და (1.13a) პირობები.

როცა  $x = x_j$ , მაშინ  $u(x_j, y, z) = 0$ , ამიტომ  $\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x=x_j} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{x=x_j} = 0$ ; ასევე

$K = 0$  ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $\left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{x=x_j} = 0$ , აქედან

$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=x_j} = 0$ , ამიტომ  $\left. \tau_{xy} \right|_{x=x_j} = 0$ , მაშასადამე,  $x = x_j$  წახნაგებზე, გვაქვს  $u = 0$ ,

$\tau_{xy} = 0$  და  $\tau_{xz} = 0$ , ე.ი გადაადგილების ნორმალური მდგენელი და ძაბვის მხები კომპონენტები ნულის ტოლია. ეს კი არის სწორედ ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, რომლებიც, ე. ობოლაშვილის თეორემის ძალით [57] წარმოადგენენ  $x = x_j$  წახნაგზე სიმეტრიით გაგრძელების პირობებს. პირუკუ, თუ  $u = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$  და  $\tau_{xz} = 0$ , მაშინ  $u = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$  და  $K = 0$ . ამით ეკვივალენტურობა დამტკიცებულია. სიტყვა-სიტყვით დამტკიცდება ამ პირობებისა და III ერთგვაროვანი პირობის ეკვივალენტურობა  $y = y_j$  წახნაგებზე.

ახლა განვიხილოთ (1.12b) და (1.13b) პირობები. როცა  $x = x_j$ ,

და  $v(x_j, y, z) = 0$ ,  $w(x_j, y, z) = 0$ , მაშინ  $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x=x_j} = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{x=x_j} = 0$ ,  $\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=x_j} = \left. \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{x=x_j} = 0$

. აქედან  $\left. \sigma_x \right|_{x=x_j} = K - 2c_s \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x=x_j} = 0$ . ე.ი. გვაქვს  $\sigma_x = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ . ეს კი IV

ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობაა. ე. ობოლაშვილის თეორემის ძალით ეს ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობაა. ადვილი საჩვენებელია,

რომ თუ  $\sigma_x = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ , მაშინ  $\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x=x_j} = 0$ , ე.ი.  $K = 0$ . აქაც

ისევე როგორც წინა შემთხვევაში დამტკიცდება ამ პირობის და IV ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობის ეკვივალენტობა  $y = y_j$

წახნაგებზე.

ამგვარად, დამტკიცდა, რომ მოცემული სასაზღვრო პირობები პარალელეპიპედის გვერდით წახნაგებზე ეკვივალენტურია, შესაბამისად, III და IV ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებისა. თუ როგორია ამ სასაზღვრო პირობების ტექნიკური ინტერპრეტაცია, ამის შესახებ ზემოთ უკვე იყო თქმული.

## § 2.2. თერმოდრეკადი წონასწორობის განტოლებები და სასაზღვრო პირობები

ამ და შემდეგ პარაგრაფებში განვიხილავთ სქელი ფილის თერმოდრეკად წონასწორობას. პირველ რიგში აღვნიშნოთ, რომ ფილა ტრანსტროპულია (ტრანსვერსალურ-იზოტროპული). თერმული ველი სტაციონალურია. მასზე არ მოქმედებს ელექტრული ველი. (1.7) –(1.8) გამოსახულებები გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
 b) \quad & \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \\
 c) \quad & \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\
 d) \quad & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial \rho} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial B}{\partial z} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
 a) \quad & K = c_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
 b) \quad & B = c_5 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
 c) \quad & \tau_{zx} = c_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$d) \tau_{zy} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

წონასწორობის განტოლებების მიღებული ფორმა და სასაზღვრო ამოცანების გამოყოფილი სპეციალური კლასი საშუალებას იძლევა მივიღოთ ზემოთ მოყვანილი სისტემის სრული ამოხსნა. ამოხსნებისათვის მიღებული წარმოდგენები აიგებიან ისეთი ფუნქციების საშუალებით, რომლებიც წარმოადგენენ რაც შეიძლება მარტივი და ცნობილი განტოლებების ამოხსნებს.

განვმარტოთ, თუ რას ვგულისხმობთ (2.1)-(2.2) სისტემის რეგულარულ ამოხსნაში. სისტემის  $u, v$  და  $w$  ფუნქციებით განსაზღვრულ ამოხსნას ეწოდება რეგულარული, თუ  $u, v$  და  $w$  არიან სამჯერ უწყვეტად წარმოებადი  $\bar{\Pi}$  არეში, სადაც  $\bar{\Pi}$  არის მართკუთხა პარალელეპიპედის შიგა არე  $x = x_j$  და  $y = y_j$  საზღვრების ჩათვლით. პარალელეპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეებზე ( $z = z_j$  წახნაგებზე) ისინი წარმოიდგინებიან თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით. გარდა ამისა, ვინაიდან გვერდით წახნაგებზე გვაქვს სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები, მათზე სრულდება წონასწორობის განტოლებები. ამ ფაქტს ასე აღვნიშნავთ :  $(u, v, w) \in C_0^3(\Pi)$ .

გავაწარმოთ (2.1) –ის მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებები შესაბამისად  $x$ -ით,  $y$ -ით,  $z$ -ით და მიღებული გამოსახულებები შევკრიბოთ. გვექნება

$$\Delta_2 B + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0, \quad (2.3)$$

სადაც  $\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

წარმოვადგინოთ  $B$  შემდეგი სახით

$$B = \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

სადაც  $\varphi_1$  აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta_2 \varphi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0. \quad (2.5)$$

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ასეთი წარმოდგენა მივიღოთ ზოგადობის შეუზღუდავად.

შევიტანოთ (2.4) გამოსახულება (2.1) –ის მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებებში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(-K)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{xz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z} \right) &= 0 \\ -\frac{\partial(-K)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tau_{yz} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tau_{yz} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{xz} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z} \right) = 0$$

სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით არსებობს ისეთი  $\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$  ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y \partial z} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial z} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z}$$

(2.7) შევიტანოთ (2.2)–ში, მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( w - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( w - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( v + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = 0$$

აქაც სრული დიფერენციალის არსებობის ძალით, არსებობს ისეთი  $\bar{\varphi}_3$  ფუნქცია, რომ

$$u = \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial x} + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial x} - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$w = -\frac{\partial \bar{\varphi}_3}{\partial z} + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $\varphi_3 = \bar{\varphi}_3 - \frac{1}{2c_4} \varphi_2$ , მაშინ გვექნება

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$w = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}$$

თუ შევიტანთ (2.7)-ს და (2.8)-ს (2.1a)-ში და (2.2a)-ში, მაშინ  $\varphi_2$  და  $\varphi_3$  ფუნქციების განსასაზღვრავად მივიღებთ სისტემას

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta_2 \varphi_2 + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T \right) = 0 \quad (2.11)$$

$$\Delta_2 \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \varphi_2 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0$$



ვანტეგროთ ამ სისტემის პირველი განტოლება  $z$ -ით. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, რომელიც არ მოგვყავს, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_1 c_4} \Delta_2 \varphi_2 + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \Delta_2 \varphi_3 - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} T = \\ = \frac{c_3}{c_2} f(x, y) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_1 c_4} \Delta_2 \varphi_3 + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{2c_1 c_4} \Delta_2 \varphi_2 + \frac{\beta_{10}}{c_1} T = \\ = -\frac{c_3 + 2c_4}{2c_1 c_4} f(x, y) \end{aligned}$$

$f(x, y)$  არის ინტეგრების შედეგად მიღებული ნებისმიერი ფუნქცია. ვაჩვენოთ, რომ ზოგადობის შეუზღუდავად  $f(x, y)$  შეიძლება ნულის ტოლად მივიღოთ. (2.5) და (2.12) განტოლებები შეადგენენ სისტემას, რომლის ზოგადი ამოხსნა წარმოიდგინება, როგორც შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგად ამოხსნას დამატებული რაიმე კერძო ამოხსნა. ვეძებოთ ეს კერძო ამოხსნა შემდეგი სახით:  $\varphi_1^* = 0$ ,  $\varphi_2^* = \chi^*$ ,  $\varphi_3^* = -\frac{1}{2c_4} \chi^*$ ,  $T^* = 0$ , სადაც

$\Delta_2 \chi^*(x, y) = f(x, y)$ . ადვილი საჩვენებელია, რომ იგი (2.12)-ის ამოხსნაა, ხოლო თუ გავითვალისწინებთ (2.9)-ს, ვნახავთ, რომ ამ ამოხსნის შესაბამისი გადაადგილების ვექტორის მდგენელები  $u^* = v^* = w^* = 0$ . მაშასადამე  $f(x, y)$  შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ და საბოლოოდ თერმოდრეკადი ველის განმსაზღვრელი სისტემაა:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \varphi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_2 c_4} \Delta_2 \varphi_2 + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_2} \Delta_2 \varphi_3 - \\ - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_2} T = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_2 c_4} \Delta_2 \varphi_3 + \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{2c_2 c_4} \Delta_2 \varphi_2 + \frac{\beta_{10}}{c_2} T = 0.$$

თუ მივიღებთ შემდეგ აღნიშვნებს

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{c_1 c_2 - c_3^2 - 2c_3 c_4}{2c_2 c_4}, & \gamma_2 &= \frac{c_1 c_2 - (c_3 + 2c_4)^2}{2c_2 c_4}, & \gamma_3 &= \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_2}, \\ \gamma_4 &= \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_2}, & \gamma_5 &= \frac{\beta_{10}}{c_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

მაშინ წინა სისტემა ასეც შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\Delta_2 \varphi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \gamma_1 \Delta_2 \varphi_2 + \gamma_3 \Delta_2 \varphi_3 - \gamma_4 T = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \gamma_1 \Delta_2 \varphi_3 + \gamma_2 \Delta_2 \varphi_2 + \gamma_5 T = 0.$$

შემოვიღოთ ფუნქციები [72]

$$\varphi_2 = \gamma_3 \Phi_2, \quad \varphi_3 = \Phi_3 + a \gamma_3 \Phi_2 \quad (2.16)$$

სადაც

$$a = \begin{cases} \sqrt{-\gamma_1 / \gamma_2}, & \text{თუ } \gamma_1 > 0, \\ i\sqrt{-\gamma_1 / \gamma_2}, & \text{თუ } \gamma_2 > 0, i = \sqrt{-1}. \end{cases}$$

შევიტანოთ (2.16) გამოსახულება (2.15)-ში და გავითვალისწინებთ რომ  $T = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}$ , მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ, რომ:

$$\begin{aligned}
\Delta_2 \varphi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= 0, \\
\Delta_2 \tilde{T} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{1}{\gamma_1 - a\gamma_3} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \Delta_2 \Phi_3 &= \frac{\gamma_4 - a\gamma_5}{\gamma_1 - a\gamma_3} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\
\frac{1}{\gamma_1 + a\gamma_3} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \Delta_2 \Phi_2 - \frac{1}{\gamma_1^2 - \gamma_2\gamma_3} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_1\gamma_5 - \gamma_3\gamma_4}{\gamma_3(\gamma_1^2 - \gamma_2\gamma_3)} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

5. ხომასურიძეს [72]  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$  მუდმივების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის აგებული აქვს (2.17) სისტემის ზოგადი ამონახსნები. მიღებულია, რომ  $\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$ -ით აღნიშნული აქვს ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგ განტოლებებს ამონახსნებს:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_1 + a\gamma_3} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \Delta_2 \tilde{\Phi}_2 &= 0, \\
\frac{1}{\gamma_1 - a\gamma_3} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \Delta_2 \tilde{\Phi}_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

ამასთან  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$  მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის  $\varphi_1$  ფუნქციას აქვს შემდეგი სახით

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( A_{1mn} e^{-\tilde{p}_1 z} + B_{1mn} e^{\tilde{p}(z-z_1)} \right) \bar{\varphi}_{mn}(x, y), \tag{2.19}$$

სადაც  $\tilde{p}_1 = \sqrt{c_5/c_4} \cdot p_1(m, n)$ , ხოლო  $A_{1mn}$  და  $B_{1mn}$  მუდმივებია.

$\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$  ფუნქციებისთვის გვექნება

$$\Phi_2 = \tilde{\Phi}_2 + G_1 \Phi_3 + G_3 T; \quad \Phi_3 = \tilde{\Phi}_3 + G_1 T,$$

სადაც

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\gamma_4 - a\gamma_5}{1 - \lambda_0(\gamma_1 - a\gamma_3)}, \quad G_2 = -\frac{1}{2a\gamma_3}, \\
G_3 &= \frac{\gamma_3 G_1 + \gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3(\gamma_1 - a\gamma_3)[1 - \lambda_0(\gamma_1 + a\gamma_3)]}. \\
\Delta_2 \varphi_1 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= 0 \\
\Delta_2 \Phi_3 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\
\Delta_2 \Phi_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ხოლო ამოხსნას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} T, \\
\Phi_2 &= \tilde{\Phi}_2 + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_1^2} z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}.
\end{aligned}$$

$\varphi_1$ ,  $\tilde{\Phi}_2$ ,  $\tilde{\Phi}_3$  ფუნქციებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ დრეკადი ველის ყველა კომპონენტი. (2.17) და (2.18) განტოლებათა სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ ზემოთ დასახელებული ფუნქციების განსაზღვრა ვთქვათ ფურიეს მეთოდით, არ განსხვავდება ჰარმონიული ფუნქციების განსაზღვრიდან. და ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჩვენი შემთხვევის შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების კლასისათვის თერმოდრეკადობის ამოცანების ამოხსნა იგივე სიძნელისაა, რაც დირიხლეს ან ნეიმანის ამოცანების ამოხსნა ლაპლასის განტოლებებისათვის.

### § 2.3 სქელი ფილის და სპეციალური სახის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით

წინა თავში და ამ თავის პირველ ორ პარაგრაფში ვნახეთ, რომ  $\varphi_1$  ფუნქცია განისაზღვრება დამოუკიდებლად. ეს კი იმის შედეგია, რომ  $B$  - თვის ცალკე მიიღება განმსაზღვრელი განტოლება და შესაბამისი სასაზღვრო პირობებიც.

ამ შემთხვევაში გვექნება ისეთი დაძეხული-დეფორმირებული მდგომარეობა, რომელიც მთლიანად აღიწერება ერთი  $\varphi_1$  ფუნქციით. მას შეესაბამება ნულის ტოლი სოლენოიდალური ველი, ე.ი.  $\text{div}\vec{U}=0$  და. ამასთან ყველგან სხეულში  $w=0$ . აქედან ვღებულობთ, რომ  $K=0$ . თუ ამ ველს გამოვყოფთ ძირითადი ველიდან, მაშინ დაგვრჩება ველი, რომლისთვისაც  $\text{div}\vec{U} \neq 0$ ,  $w \neq 0$ , მაგრამ  $B=c_4\omega_z=0$ , ე.ი.  $\text{rot}\vec{U}$ -ს მდგენელი  $z$  - ს გასწვრივ ნულია. ასეთ ველს, ე.ი. როცა ვექტორი მიმართულია იმ ზედაპირის მხებ სიბრტყეში, რომელიც მართობულია  $z$  ღერძის უწოდებენ განზოგადებულ-პარალელურს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ველი დაშლილია ორი ველის ჯამად: პირველი ეთანადება სოლენოიდალურ განზოგადებულ პარალელურ ველს, ხოლო მეორე - ხასიათდება განზოგადებულ პარალელური ბრუნვის ვექტორით. შემდგომ, ჩვენ სწორედ დაწვრილებით განვიხილავთ მეორე შემთხვევას და ამჯერად მას გამოვიყენებთ ზემოთ აღნიშნული მეთოდით ტრანსტროპული მართკუთხედი ფორმის სქელი ფილის ღუნვის ამოცანის ამოსახსნელად.

ამისათვის კი (2.1) სისტემაში  $B=0$  ფუნქცია მივიღოთ ნულად, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ განვიხილავთ ისეთ ველს, როცა გადაადგილების ვექტორის  $z$  ღერძის პარალელური კომპონენტი ნულის ტოლია, ანუ  $\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ . ამ ველისთვის გადაადგილების ვექტორის როტორის  $z$  მდგენელი იგივეურად ნულის ტოლია მთელ არეში და მას უწოდებენ განზოგადებული პარალელური გადაადგილების ვექტორის როტორის მქონე ველს.

წონასწორობის განტოლებები ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial K}{\partial z} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
b) \quad & \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \\
c) \quad & \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \\
d) \quad & \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით არსებობს ისეთი  $\frac{\partial \phi_2}{\partial z}$  ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}, \\
\tau_{xz} &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z \partial x}, \\
\tau_{yz} &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z \partial y}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

შევიტანოთ (3.2)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{c_4} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial z}, \\
\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{c_4} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y \partial z}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

აქედან მარტივი გარდაქმნებისა და ისევ სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით, არსებობს, ისეთი ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \phi_3 + \frac{1}{2c_4} \phi_2 \right), \\
v &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \phi_3 + \frac{1}{2c_4} \phi_2 \right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$w = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi_3 + \frac{1}{2c_4} \varphi_2 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

სადაც  $\varphi_2$  და  $\varphi_3$  ფუნქციები შემდეგი სისტემის ამონახსნებია

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \gamma_1 \Delta_2 \varphi_2 + \gamma_3 \Delta_2 \varphi_3 - \gamma_4 T &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \gamma_1 \Delta_2 \varphi_3 + \gamma_2 \Delta_2 \varphi_2 + \gamma_5 T &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ზუსტად იგივე მსჯელობით, როგორც გვერდითა წინა პარაგრაფში, თუ მივიღებთ შემდეგ აღვნიშვნებს  $\varphi_2 = \gamma_3 \Phi_2$ ,  $\varphi_3 = \Phi_3$ , მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{aligned} \Delta_2 \bar{F} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta_2 \Phi_3 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}, \\ \Delta_2 \Phi_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_1^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

ახლა ავაგოთ (2.6) სისტემის ამოხსნა და გავითვალისწინოთ, რომ  $\bar{F}$ -ს აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} \bar{F} = \bar{F}_0 + \bar{F}_1 &= \frac{t_0}{2} (z^2 - \lambda_0 x^2) + \frac{t_1}{6} \left( z^3 - \frac{3\lambda_0}{2} z x^2 \right) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^8 (A_{Tmn} e^{-p_T z} + \\ &+ B_{Tmn} e^{-p_T(z-z_1)}) \psi_{mn}(x, y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

აღვნიშნოთ  $\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$ -ით ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებებს

$$\begin{aligned} \Delta_2 \tilde{\Phi}_3 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta_2 \tilde{\Phi}_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\Phi_2$  და  $\Phi_3$  -თვის გვექნება

$$\Phi_3 = \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_4} \tilde{T}, \quad ,$$

$$\Phi_2 = \tilde{\Phi}_2 + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z}$$

საბოლოოდ  $\varphi_2$  და  $\varphi_3$  – თვის გვექნება

$$\varphi_2 = \gamma_3 \Phi_2 = \gamma_3 \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z},$$

$$\varphi_3 = \Phi_3 = \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \tilde{T} \quad (3.9)$$

ქვემოთ მოვიყვანოთ ფილისათვის დრეკად – დეფორმირებული ველის კომპონენტების წარმოდგენები  $\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$  ფუნქციების საშუალებით

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \tilde{T} + \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + \frac{\gamma_3}{4c_4 \gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial x \partial z} + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}, \\ v &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \tilde{T} + \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{\gamma_3}{4c_4 \gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \tilde{T} + \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} - \left( \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} - 1 \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} - \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_4}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}, \\ K &= -\gamma_3 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \gamma_3 \left( \frac{1}{2\gamma_1^2} z \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right), \\ \tau_{xz} &= \gamma_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \tilde{\Phi}_2 \right) + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z \partial x}, \\ \tau_{yz} &= \gamma_3 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \tilde{\Phi}_2 \right) + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z \partial y}, \end{aligned} \quad (3.12)$$



$$\begin{aligned}
\sigma_x = & -\gamma_3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} \right) + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} - \\
& - 2c_5 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y \partial z} \right) \\
\sigma_y = & -\gamma_3 \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{1}{2\gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} \right) + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \\
& - 2c_5 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial x \partial z} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x \partial z} \right), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & 2c_5 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial y \partial z} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} z \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y \partial z} \right) = \\
= & \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left( \frac{\gamma_3}{2c_4} \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi}_3 + \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} z \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial z} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z} \right),
\end{aligned}$$

სადაც  $\gamma_1, \gamma_3$  ცნობილი მუდმივებია და მოცემული (2.14) ფორმულებით; შევადგინოთ შესაბამისი კომპონენტები ძაბვებისათვის:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = & 0, \tag{3.14} \\
\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = & -\gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\gamma_1^2} z \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right)
\end{aligned}$$

და გადაადგილებებისათვის

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = & 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = & - \left( \frac{\gamma_4}{\gamma_1} z \frac{\partial^3 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^3} + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_3}{\partial z^2} + \gamma_4 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

მსგავსად იმ მსჯელობისა, რომელიც გვქონდა პირველ თავში მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების მისაღებად, აქაც შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი სახის სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{aligned} \text{როცა } x = x_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad \text{ახ} \\ b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } y = y_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad \text{ახ} \\ b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \quad \text{ახ} \quad b) \quad T = F_{j2}(x, y), \quad \text{ახ} \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j: a) \quad \sigma_z = F_j(x, y), \quad \Gamma_1(\tau_{zx}, \tau_{zy}) = \tilde{F}_j(x, y), \quad \Gamma_2(\tau_{zy}, \tau_{zx}) = \tilde{F}_j(x, y); \\ b) \quad w = f_j(x, y), \quad \Gamma_1(u, v) = \tilde{f}_j(x, y), \quad \Gamma_2(v, u) = \tilde{f}_j(x, y); \\ c) \quad w = f_j(x, y), \quad \Gamma_1(\tau_{zx}, \tau_{zy}) = \tilde{F}_j(x, y), \quad \Gamma_2(\tau_{zy}, \tau_{zx}) = \tilde{F}_j(x, y); \\ d) \quad \sigma_z = F_j(x, y), \quad \Gamma_1(u, v) = \tilde{f}_j(x, y), \quad \Gamma_2(v, u) = \tilde{f}_j(x, y), \end{aligned} \quad (3.19)$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ სასაზღვრო პირობების და სრულად ჩავატარებთ ცვლადთა განცალგებას, მაშინ  $\tilde{\Phi}_2$ ,  $\tilde{\Phi}_3$  და  $\tilde{T}$  -სთვის მივიღებთ :

$$\tilde{\Phi}_2 = b_{21} + b_{22}z + b_{23} \left( z^2 - \frac{r^2}{2} \right) + \sum_0^\infty \sum_0^\infty \Phi_{2mn}(z) \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi}{x_1} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{y_1} y\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi}{x_1} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{y_1} y\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi}{x_1} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{y_1} y\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi}{x_1} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{y_1} y\right) \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}_3 = b_{31} + b_{32}z + b_{33}\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right) + \sum_0^\infty \sum_0^\infty \Phi_{3mn}(z) \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\bar{T} = \frac{t_0}{2}(z^2 - \lambda_0 x^2) + \frac{t_1}{6}\left(z^3 - \frac{3\lambda_0}{2}zx^2\right) + \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^8 T_{mn}(z) \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi}{x_1}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{y_1}y\right) \end{cases}.$$

სადაც  $\Phi_{jmn}(z) = \Phi_{jmn} e^{pz} + \Phi_{jmn} e^{-pz}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$Tmn(z) = A_{Tmn} e^{-pz} + B_{Tmn} e^{-p_T(z-z_1)}$$

ზემოთ მოყვანილ ფორმულებში ტრიგონომეტრიული ნაწილის პირველი სტრიქონი შეესაბამება გვერდით წახნაგებზე (3.17a), (3.18a) სასაზღვრო პირობებს, მეორე სტრიქონი – (3.17b), (3.18b), ხოლო მესამე და მეოთხე სტრიქონები კი შერეულ სასაზღვრო პირობებს.

მიღებულ ამოხსნას ვუწოდოთ რეგულარული ამოხსნა, თუ  $u, v, w \in C^3(\bar{D})$ -ს, ფილის გვერდით წახნაგებზე მოცემულია ამონახსნის სიმეტრიული, ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები, ანუ (3.16b), ან (3.17b), წყვილ-წყვილად პარალელურ გვერდებზე–სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები., ხოლო ზედა და ქვედა ფუძეებზე ზემოთ მოყვანილი მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობები.

ვთქვათ, რომ ფილის გვერდით წახნაგებზე მოცემულია (3.16b), (3.17b), სასაზღვრო პირობები, მაშინ (3.20) პოლინომიური წევრების

კოეფიციენტები ნულის ტოლია, ხოლო ტრიგონომეტრიულ წევრებთან მდგომი  $\Phi_{jmn} (j = 2, 3)$  კოეფიციენტები განისაზღვრება ალგებრულ განტოლებათა სისტემიდან, რომლის მატრიცის განზომილება  $4 \times 4$ . ამ სისტემის განტოლებების მარჯვენა მხარეები წარმოადგენენ  $z = z_j$  წახნაგებზე მოცემული სასაზღვრო ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტებს.

იმ შემთხვევაში თუ ფილის გვერდით წახნაგზე მოცემულია სიმეტრიის ანუ (3.16 b), (3.17a) პირობები, მაშინ პოლინომიური წევრებისათვის მივიღებთ  $b_{21} = b_{31} = 0$ ,  $b_{33} = -2\gamma_1\gamma_2 b_{23}$ , და საბოლოოდ  $\tilde{\Phi}_2$  და  $\tilde{\Phi}_3$  ფუნქციების წარმოდგენის პოლინომურ ნაწილს ექნება სახე

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{20} &= b_{22}z + b_{23} \left( z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \\ \tilde{\Phi}_{30} &= b_{22}z - 2\gamma_1\gamma_2 b_{23} \left( z^2 - \frac{r^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც ზედა ან ქვედა ფუძეზე მოცემულია გადაადგილებები, მაშინ  $b_{ij}$  კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრება სასაზღვრო პირობებიდან. როდესაც მოცემულია ძაბვები, მაშინ  $b_{23}$  განისაზღვრება დატვირთვის ნაკრები ვექტორის ნულთან ტოლობის პირობიდან, ხოლო  $b_{22}$  – განუსაზღვრელი დარჩება, რაც შეესაბამება ხისტ გადაადგილებას  $z$  ღერძის გასწვრივ.

შეგნიშნოთ, რომ შესაძლებელია მიღებულ მწკრივეში წევრების კოეფიციენტების განმსაზღვრელი ალგებრული განტოლებების უფრო გამარტივება. ამისათვის საჭიროა, რომ ფილის ზედა და ქვედა ფუძეებზე მოცემული იყოს ერთნაირი სახის სასაზღვრო პირობები, ე.ი. მოცემული იყოს ან მარტო ძაბვები, ან მარტო გადაადგილებები, ან გადაადგილების ნორმალური მდგენელი და ძაბვის მხები მდგენელები, ან ძაბვის ნორმალური მდგენელი და გადაადგილების მხები მდგენელები (სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, ამ შემთხვევაში მოცემულია  $III_0$  და  $IV_0$  სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი სასაზღვრო პირობები). ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები: ფილის

ზედა და ქვედა ფუძეზე მოცემულია ძაბვები, ხოლო გვერდით წახნაგებზე—სიმეტრიის პირობები. ე.ი. მოცემულია:

$$\text{როცა } z = z_j (j=1,2): \quad \sigma_z = F_j(x, y), \quad \tau_{zx} = F_j(x, y), \quad \tau_{zy} = F_j(x, y), \quad T = F_{j2}(x, y);$$

$$\text{როცა } x = x_j (j=1,2): \quad u = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\text{როცა } y = y_j (j=1,2): \quad v = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

აქ მივიღოთ, რომ  $z_2 = -z_1$  და  $z_1 = z_1$ .

მოცემული სასაზღვრო ამოცანა წარმოვადგინოთ როგორც ორი სასაზღვრო ამოცანის სუპერპოზიცია:

პირველ სასაზღვრო ამოცანაში ზედა ფუძეზე, ე.ი., როცა  $z_1 = z_1$  მოცემულია პირობები:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{F_{11} + F_{01}}{2} = F_1^{(1)}, \\ \tau_{zx} &= \frac{F_{12} - F_{02}}{2} = F_2^{(1)}, \\ \tau_{zy} &= \frac{F_{13} - F_{03}}{2} = F_3^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

ხოლო  $z_2 = -z_1$ -ზე

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{F_{11} + F_{01}}{2} = F_1^{(1)}, \\ \tau_{zx} &= -\frac{F_{12} - F_{02}}{2} = -F_2^{(1)}, \\ \tau_{zy} &= -\frac{F_{13} - F_{03}}{2} = -F_3^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

მეორე სასაზღვრო ამოცანაში, როცა  $z_1 = z_1 - s$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{F_{11} - F_{01}}{2} = F_1^{(2)}, \\ \tau_{zx} &= \frac{F_{12} + F_{02}}{2} = F_2^{(2)}, \\ \tau_{zy} &= \frac{F_{13} + F_{03}}{2} = F_3^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ხოლო  $z_2 = -z_1$ -ზე

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\frac{F_{11} - F_{01}}{2} = -F_1^{(2)}, \\ \tau_{zx} &= \frac{F_{12} + F_{02}}{2} = F_2^{(2)}, \\ \tau_{zy} &= \frac{F_{13} + F_{03}}{2} = F_3^{(2)}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

(2.19c) და (2.19d) პირობები წარმოადგენს ამოხსნის უწყვეტად გაგრძელების (სიმეტრიულად და ანტისიმეტრიულად) პირობებს, ამიტომ პირველი ამოცანა ტოლფასია შემდეგი ამოცანისა: რადგან ფილის  $z=0$  წახნაგზე მოცემელია სიმეტრიულად გაგრძელების (2.19c) პირობა, ხოლო გვერდებზე ერთგვაროვანი სიმეტრის ან ანტისიმეტრიის პირობები, ფილის პირით სიბრტყეებზე კი ძაბვები, ამიტომ ამოცანის ამონახსნი უწყვეტად გაგრძელდება  $z=0$  სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულად. ამასთან  $z=-z_1$ -ზე გვექნება (3.23) ტიპის პირობები. მეორე ამოცანის ეკვივალენტურ ამოცანაში  $z=0$  მოცემული უნდა იყოს ანტისიმეტრიის გაგრძელების (3.19d) ერთგვაროვანი პირობები. ამ შემთხვევაში ამონახსნი გრძელდება ანტისიმეტრიულად და  $z=-z_1$ -ზე გვაქვს (3.25) ტიპის პირობები.

საბოლოოდ, შეგვიძლია განვიხილოთ ასეთი სასაზღვრო ამოცანა:

$$\text{როცა } x = x_i : u=0, \quad B=0, \quad \tau_{zx} = 0,$$

$$\text{როცა } y = y_i : v=0, \quad B=0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad (3.26)$$

$$\text{როცა } z = 0 : w=0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0,$$

$$\text{როცა } z = z_1 : \sigma_z = F_{11}(x,y), \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = F_{13}(x,y), \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = F_{12}(x,y).$$

რადგან ყველა გვერდით წახნაგზე სრულდება სიმეტრიულად გაგრძელების პირობა, ამიტომ  $\tilde{\Phi}_2$ ,  $\tilde{\Phi}_3$  და  $\tilde{T}$  ფუნქციებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_2 &= b_{22}z + b_{23} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{1mn} e^{\tilde{p}z} + A_{2mn} e^{-\tilde{p}z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} (A_{1m} e^{\tilde{p}_1 z} + A_{2m} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{12} e^{\tilde{p}_1 z} + A_{2n} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
\tilde{\Phi}_3 &= b_{22}z - 2\gamma_1 \gamma_4 b_{23} \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{1mn} e^{\tilde{p}z} + B_{2mn} e^{-\tilde{p}z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} (B_{1m} e^{\tilde{p}_1 z} + B_{2m} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (B_{12} e^{\tilde{p}_1 z} + B_{2n} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\
\bar{F} &= \frac{t_0}{2} (z^2 - \lambda_0 x^2) + \frac{t_1}{6} \left( z^3 - \frac{3\lambda_0}{2} z x^2 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (T_{1mn} e^{\tilde{p}z} + T_{2mn} e^{-\tilde{p}z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} (T_{1m} e^{\tilde{p}_1 z} + T_{2m} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (T_{1n} e^{\tilde{p}_1 z} + T_{2n} e^{-\tilde{p}_1 z}) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\text{სადაც } \tilde{p} = \sqrt{\gamma_1 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}, \quad \tilde{p}_1 = \sqrt{\gamma_1 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2}, \quad \tilde{p}_2 = \sqrt{\gamma_1 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2}.$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ფილის გვერდით წახნაგებზე გვაქვს ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები ანუ სრულდება (3.17b) პირობა, ე.ი. მოცემულია

$$x = 0, a: \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

$$(3.28)$$

$$y = 0, b: \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0.$$

რაც შეეხება ფილის პირით ზედაპირებს, მასზე მოქმედებს გარე დატვირთვები. კერძოდ, როცა

$$z = h: \quad \tau_{zx} = f_1^+(x, y), \quad \tau_{zy} = f_2^+(x, y), \quad \sigma_z = f_3^+(x, y), \tag{3.29}$$

ხოლო

$$z = -h: \quad \tau_{zx} = f_1^-(x, y), \quad \tau_{zy} = f_2^-(x, y), \quad \sigma_z = f_3^-(x, y). \tag{3.30}$$

გავითვალისწინოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი სასაზღვრო ამოცანა შეგვიძლია დავყოთ ორ უფრო მარტივ სასაზღვრო ამოცანად. ამისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$q_1 = \frac{1}{2}(f_1^+ - f_1^-), \quad q_2 = \frac{1}{2}(f_2^+ - f_2^-), \quad q_3 = \frac{1}{2}(f_1^- + f_1^-), \quad q_4 = \frac{1}{2}(t_1^- + t_1^-) \tag{3.31}$$

$$s_1 = \frac{1}{2}(f_1^+ + f_1^-), \quad s_2 = \frac{1}{2}(f_2^+ + f_2^-), \quad s_3 = \frac{1}{2}(f_3^- - f_3^+), \quad s_4 = \frac{1}{2}(t_3^- - t_3^+) \quad (3.32)$$

და ცალ-ცალკე უნდა ამოვხსნათ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა:

$$z = \pm h: \quad \tau_{zx} = \pm q_1, \quad \tau_{zy} = \pm q_2, \quad \sigma_z = q_3, \quad \tilde{T} = \pm q_4 \quad (3.33)$$

$$z = \pm h: \quad \tau_{zx} = s_1, \quad \tau_{zy} = s_2, \quad \sigma_z = \pm s_3, \quad \tilde{T} = \pm s_4. \quad (3.34)$$

(3.33) სასაზღვრო ამოცანაში  $z=0$  სიბრტყის მიმართ გვაქვს სიმეტრიული დატვირთვა, ხოლო (3.34)-ში კი ამავე სიბრტყის მიმართ ანტისიმეტრიული დატვირთვა. პირველი ამოცანის შემთხვევაში  $u$  და  $v$  გადაადგილებები  $z=0$  სიბრტყის მიმართ ლუწი ფუნქციებია, ხოლო  $w$  კი კენტი ფუნქციაა, ამიტომ ეს სიბრტყე წარმოადგენს სიმეტრიული გაგრძელების სიბრტყეს და მასზე  $w=0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . მაშასადამე, ეს სიბრტყე იჭიმება ან იკუმშება.

მეორე ამოცანაში  $u$  და  $v$  გადაადგილებები  $z=0$  სიბრტყის მიმართ კენტი ფუნქციებია, ხოლო  $w$  კი ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ ეს სიბრტყე წარმოადგენს ანტისიმეტრიული გაგრძელების სიბრტყეს და მასზე  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ . მაშასადამე, ამ შემთხვევაში სიბრტყე განიცდის ღუნვას. თუ მოცემული პირობებიდან გადავალთ მოდიფიცირებულ სასაზღვრო პირობებზე, ამით არაფერი შეცვლება, რადგან

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial f_1^\pm}{\partial x} + \frac{\partial f_2^\pm}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0.$$

პირობებიც შეიძლება დავშალოთ  $z=0$  სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულ და ანტისიმეტრიულ პირობებად.

განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა: ფილის გვერდით წახნაგებზე მოცემულია ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები, ხოლო



$z = \pm h$ :  $\tau_{xy}^* = \tau_{yx}^* = 0$ ,  $\sigma_z = \pm f_3(x, y)$ ,  $\tilde{T} = t(x, y)$ . ამ ამოცანის ამოსახსნელად მოვიქცეთ შემდეგნაირად. ვთქვათ ფილა „გაჭრილია“  $z = 0$  სიბრტყის მიმართ და განვიხილოთ მისი დრეკადი წონასწორობა (ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის გამო ამის გაკეთება შეგვიძლია). ფილის გვერდით წახნაგებზე და ფუძეზე იგივე სასაზღვრო პირობები გვაქვს, ხოლო  $z = 0$  სიბრტყეზე მოვითხოვთ ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობების შესრულება:

$$z = 0: u = 0, \quad v = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad T = 0. \Leftrightarrow u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \tilde{T} = 0.$$

ამონახსნის ანტისიმეტრიით გაგრძელების თეორემის თანხმად კი აქედან მივიღებთ ამოხსნას მთელი ფილისათვის.

$\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  და  $\tilde{T}$  ფუნქციებს შესაბამისად ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \\ \Phi_3(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{3mn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \\ T(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tmn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ სასაზღვრო პირობები კმაყოფილდება როგორც ფილის გვერდით წახნაგებზე, ასევე  $z = 0$  სიბრტყეზე.  $A_{2mn}$ ,  $A_{3mn}$ ,  $A_{Tmn}$  კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის დავშალოთ  $f_3(x, y)$ ,  $T(x, y)$  ფუნქცია ორმაგ ტრიგონომეტრიულ მწკრივად და გავუტოლოთ შესაბამის კოეფიციენტები ერთმანეთს. ამისათვის შევადგინოთ შესაბამისი გამოსახულებები როგორც  $S_z$ -თვის, ასევე  $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$ -თვის.

$$\sigma_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^2 e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}z A_{2mn} + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1^2} \tilde{p}^3 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}z \frac{\gamma_3}{2\gamma_1^2} z A_{3mn} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} p_t^2 e^{-p_t h} A_{r_{mn}} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^3 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}z A_{2mn} + \left( \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^3 ch\tilde{p}z + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^4 z sh\tilde{p}z \right) e^{-\tilde{p}h} A_{3mn} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} p_t^3 e^{-p_t h} A_{r_{mn}} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right)$$

$$f_3^+(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{3mn} \bullet \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right),$$

ღა

$$f_{3mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_3^+(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dx dy;$$

$$T(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \bullet \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right),$$

ღა

$$T_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b T(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) dx dy;$$

$$A_{r_{mn}} = \frac{1}{e^{-p_t h} sh p_t h} T_{mn}, \quad p_t = \lambda_0^{0.5} p(m, n)$$

$z = h$  მნიშვნელობების ჩასმის შემდეგ, მივიღებთ

$$\sigma_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^2 e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}h A_{2mn} + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1^2} \tilde{p}^3 e^{-\tilde{p}h} hch\tilde{p}h A_{3mn} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1 - \lambda_0\gamma_1} p_t^2 e^{-p_t h} A_{Tmn} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^3 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h A_{2mn} + \left( \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^3 ch\tilde{p}h + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^4 hsh\tilde{p}h \right) e^{-\tilde{p}h} A_{3mn} + \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1 - \lambda_0\gamma_1} p_t^3 e^{-p_t h} A_{Tmn} \right] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$$

კოეფიციენტების გატოლების შემდეგ, ვღებულობთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას  $\tilde{p}$ -ს ყოველი მნიშვნელობისათვის:

$$\frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^2 e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}h A_{2mn} + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1^2} \tilde{p}^3 e^{-\tilde{p}h} hch\tilde{p}h A_{3mn} = f_{3mn} + \eta_{mn}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\gamma_3}{2\gamma_1} \tilde{p}^3 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h A_{2mn} + \frac{\gamma_3}{2\gamma_1^2} \tilde{p}^3 (ch\tilde{p}h + h\tilde{p}sh\tilde{p}h) e^{-\tilde{p}h} A_{3mn} = \eta_{mn}$$

სადაც  $\eta_{mn} = \frac{\gamma_4\lambda_0 + \beta_{10}\gamma_3}{1 - \lambda_0\gamma_1} p_t^2 e^{-p_t h} A_{Tmn}$ . წინა სისტემა ასეთი სახით

გადავწეროთ

$$2\gamma_1 e^{-\tilde{p}h} sh\tilde{p}h A_{2mn} + h\tilde{p} e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h A_{3mn} = \frac{1}{\gamma_3 \tilde{p}^2} (f_{3mn} + \eta_{mn}), \quad (3.37)$$

$$2\gamma_1 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h A_{2mn} + (ch\tilde{p}h + h\tilde{p}sh\tilde{p}h) e^{-\tilde{p}h} A_{3mn} = \frac{1}{\gamma_3 \tilde{p}^3} \eta_{mn}$$

ამ სისტემიდან მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$0 \cdot A_{2mn} + \tilde{p} e^{-\tilde{p}h} \left( \tilde{p}h - \frac{1}{2} sh2\tilde{p}h \right) A_{3mn} = \frac{1}{\gamma_3 \tilde{p}^3} (f_{3mn} \tilde{p} ch\tilde{p}h + \eta_{mn} (\tilde{p} ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)),$$

$$2\gamma_1 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h A_{2mn} + (ch\tilde{p}h + h\tilde{p}sh\tilde{p}h) e^{-\tilde{p}h} A_{3mn} = \frac{1}{\gamma_3 \tilde{p}^3} \eta_{mn}$$

და კოეფიციენტების მასშტაბირების შემდეგ სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$0 \cdot A_{2mn} + \frac{e^{-\tilde{p}h}}{\tilde{p}h} \left( (\tilde{p}h)^2 - \frac{1}{2} \tilde{p}hsh2\tilde{p}h \right) A_{3mn} = \frac{1}{\gamma_3 \tilde{p}} (f_{3mn} \tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn} (\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)), \quad (3.38)$$

$$2\gamma_1 e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h A_{2mn} + (ch\tilde{p}h + h\tilde{p}sh\tilde{p}h) e^{-\tilde{p}h} A_{3mn} = \frac{1}{\gamma_3 \tilde{p}^3} \eta_{mn}$$

ამ სისტემის დეტერმინანტი  $\Delta = \frac{e^{-\tilde{p}h}}{\tilde{p}h} \left( (\tilde{p}h)^2 - \frac{1}{2} \tilde{p}hsh2\tilde{p}h \right)$  და არ უდრის ნულს  $\tilde{p}$ -ს არცერთი სასარული მნიშვნელობისათვის. თუ გადავალთ ზღვარზე, რისი უფლებაც გვაქვს რადგან სისტემის დეტერმინანტი არის შესაბამისი მატრიცის ელემენტების უწყვეტი ფუნქცია და (3.38) სისტემის ყველა კოეფიციენტი შემოსაზღვრული სიდიდეებია, მაშინ სისტემის დეტერმინანტის ზღვარი უდრის  $-1/4$ .

$$A_{2mn} = \frac{\eta_{mn} e^{-\tilde{p}h} (2\tilde{p}h - sh2\tilde{p}h) - 2\tilde{p}^2 (ch\tilde{p}h - \tilde{p}hsh\tilde{p}h) [f_{3mn} \tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn} (\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)]}{2\gamma_1 \gamma_3 \tilde{p}^3 [2\tilde{p}h - sh2\tilde{p}h] e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h},$$

$$A_{3mn} = \frac{2[f_{3mn} \tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn} (\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)]}{\gamma_3 h [2\tilde{p}h - sh(2\tilde{p}h)] e^{-\tilde{p}h}}$$

თუ კოეფიციენტების ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ  $\Phi_2$  და  $\Phi_3$  გამოსახულებებში, მაშინ გვექნება

$$\Phi_2(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{mn} e^{-\tilde{p}h} (2\tilde{p}h - sh2\tilde{p}h) - 2\tilde{p}^2 (ch\tilde{p}h - \tilde{p}hsh\tilde{p}h) [f_{3mn} \tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn} (\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)]}{2\gamma_1 \gamma_3 \tilde{p}^3 [2\tilde{p}h - sh2\tilde{p}h] e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h} \square$$

$$\square sh\tilde{p}z \square \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \square \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[f_{3mn} \tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn} (\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)]}{\gamma_3 \tilde{p} [2\tilde{p}h - sh(2\tilde{p}h)] e^{-\tilde{p}h}} sh\tilde{p}z \bullet \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \square \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right),$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ მიღებული მწკრივები აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია არეში. მართლაც,  $A_{2mn}$  და  $A_{3mn}$ -ს კოეფიციენტებისათვის აბსოლუტური მნიშვნელობებისათვის გვექნება შემდეგი შეფასებები

$$|A_{2mn}| \leq \frac{4\gamma_1^2 (1 + \tilde{p}h)}{\gamma_3 \tilde{p}^3} |f_{3mn}|,$$

$$|A_{3mn}| = \frac{8\gamma_1^2 |f_{3mn}|}{\gamma_3 \tilde{p}^3}$$

ამასთან რეგულარობის პირობების მოთხოვნიდან გამომდინარეობს, რომ  $|f_{3mn}| < \frac{c_4}{\tilde{p}^3}$ , ამიტომ მოძებნება ისეთი დადებითი მუდმივები, რომ

$$|A_{2mn}| \leq \frac{A_0}{\tilde{p}^5}, \quad |A_{3mn}| \leq \frac{B_0 8\gamma_1^2}{\tilde{p}^6}$$

მიღებული შეფასებების გათვალისწინებით ადვილი საჩვენებელია, რომ მიღებული მწკრივები ექსპონენციალურად კრებადია  $\tilde{p}$ -ში, ხოლო ზედა და ქვედა ფუძეებზე აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი. მეტიც ყველაზე ცუდ შემთხვევაშიც კი  $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$  ჯამისთვის, იმავე შეფასებების გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ მონახება ისეთი დადებითი მუდმივი  $c_0$ , რომ თანაბრად კრებადი რიცხვითი მწკრივი  $\sum \sum \frac{c_0(1 + \tilde{p})}{\tilde{p}^2}$  არის განსახილველი მწკრივის მაჟორანტი, ამიტომაც ეს მწკრივიც ზედა და ქვედა ფუძეზე აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია ყველა სხვა შემთხვევაშიც.

ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ გვერდით წახნაგებზე შეიძლება მოცემული იყოს სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები. განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა სრულდებოდა სიმეტრიული გაგრძელების პირობა. ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, ე.ი., როცა მოცემულია ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები. კერძოდ, მოცემულია

$$\text{როცა } z = \frac{h}{2}: \quad \sigma_z = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0, \quad T = F_{j_2}(x, y);$$

$$z = \frac{h}{2}: \quad \sigma_z = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0, \quad T = F_{j_2}(x, y);$$

$$\text{როცა } x = x_j (j=1,2): \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad T = 0$$

$$\text{როცა } y = y_j (j=1,2): \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad T = 0.$$

როგორც წინა შემთხვევაში, ამ შემთხვევაშიც  $z=0$  სრულდება ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობა. ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ  $z=0$ -ზე გაჭრილი ფილა და მისთვის განვიხილოთ შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\text{როცა } z = \frac{h}{2}: \quad \sigma_z = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0, \quad T = F_{j_2}(x, y);$$

$$z=0: \quad \sigma_z = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = 0;$$

$$\text{როცა } x = x_j (j=1,2): \quad \sigma_x = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T = 0$$

$$\text{როცა } y = y_j (j=1,2): \quad \sigma_y = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad T = 0.$$

$\Phi_2$  და  $\Phi_3$  ფუნქციებს ექნებათ ისეთივე სახე როგორც ჰქონდათ წინა შემთხვევაში, კერძოდ

$$\Phi_2(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{3mn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

და  $A_{2mn}$ ,  $A_{3mn}$  კოეფიციენტების განსასაზღვრელად გვექნება შემდეგი ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 2\gamma_1 e^{-\bar{p}h} ch\bar{p}h A_{2mn} + (ch\bar{p}h + \bar{p}hsh\bar{p}h) e^{-\bar{p}h} A_{3mn} = \frac{2\gamma_1^2}{\gamma_3 \bar{p}^3} f_{3mn} \\ 2\gamma_1 e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}h A_{2mn} + \bar{p}h e^{-\bar{p}h} ch\bar{p}h A_{3mn} = 0 \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$A_{2mn} = \frac{\eta_{mn} e^{-\tilde{p}h} (2\tilde{p}h - sh2\tilde{p}h) - 2\tilde{p}^2 (ch\tilde{p}h - \tilde{p}hsh\tilde{p}h) [f_{3mn}\tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn}(\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)]}{2\gamma_1\gamma_3\tilde{p}^3 [2\tilde{p}h - sh2\tilde{p}h] e^{-\tilde{p}h} ch\tilde{p}h},$$

$$A_{3mn} = \frac{2[f_{3mn}\tilde{p}ch\tilde{p}h + \eta_{mn}(\tilde{p}ch\tilde{p}h - sh\tilde{p}h)]}{\gamma_3 h [2\tilde{p}h - sh(2\tilde{p}h)] e^{-\tilde{p}h}} f_{3mn}.$$

ცხადია, რომ ზუსტად ისეთივე მსჯელობით, რომლითაც დავასაბუთეთ წინა შემთხვევაში მწკრივების კრებადობა, აქაც შეგვიძლია იგივე გავიმეოროთ.

### დასკვნა

როგორც ვხედავთ, განხილული სასაზღვრო ამოცანები მათემატიკურად სავსებით ანალოგიური არიან. მაგრამ მექანიკური თვალსაზრისით კი მეტად ყურადსაღებია. პირველ შემთხვევაში განხილული ამოცანა წარმოადგენს სახსრულად დაყრდნობილი სქელი ფილის ნორმალური დატვირთვით გამოწვეულ ღუნვის ამოცანას, როდესაც ფილაზე მოქმედებს თერმული ველი. მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში, ფილის  $z=0$  შუა ზედაპირის ყოველი წერტილი განიცდის მხოლოდ ჩაღუნვას. ეს არის მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც  $z = \pm \frac{h}{2}$  სიბრტყეებზე მოქმედებს ანტისიმეტრიული ნორმალური დატვირთვა. სულ სხვა სურათი გვაქვს მაშინ, როდესაც  $z = \frac{h}{2}$  მოცემულია ნორმალური დატვირთვა, ხოლო  $z = -\frac{h}{2}$  კი თავისუფალია დატვირთვისაგან. როგორც ზემოთ ვნახეთ სასაზღვრო ამოცანა შესაძლებელია დაიყოს ორ ამოცანად: სიმეტრიული და ანტისიმეტრიული დატვირთვებით. ამ ამოცანებიდან, მეორე გვაძლევს ღუნვის ანალოგიურ ამოცანას, ხოლო პირველი, რადგან შუა ზედაპირზე გადადგილების ვექტორის არანულოვანი  $\mathbf{u}$  და  $\mathbf{v}$  მდგენელების გამო, წარმოადგენს კუმშვა – გაჭიმვის ანალოგიას. სქელი ფილის ჩაღუნვის ეფექტი შეუძლია მოგვცეს გარკვეული სახის მხებ დატვირთვასაც, როცა ნორმალური დატვირთვა არა გვაქვს.

§2.4 თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით

განვიხილოთ სქელი ფილა, რომლის ოთხივე გვერდით წახნაგზე მოცემულია შემდეგი პირობები

$$\begin{aligned} x=0,a: \sigma_x=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad T=0; \\ y=0,b: \sigma_y=0, \quad u=0, \quad w=0, \quad T=0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

აქ  $x_1$  და  $y_1$ -ის ნაცვლად გამოვიყენებთ აღნიშვნებს  $a$  და  $b$  -ს. როგორც ვხედავთ ფილის გვერდებზე მოცემულია ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები. ძაბვის ნორმალური მდგენელების ნულთან ტოლობა ნიშნავს, რომ ამ გვერდებზე მღუნავი მომენტები და ნორმალური ძალები ნულია. ტექნიკურად ეს პირობები შემდეგნაირად შეიძლება განხორციელდეს: ფილა უნდა ეყრდნობოდეს მის კიდეებზე განლაგებულ საგორავებს. საგორავებს არ შეუძლიათ ღერძის გასწვრივ გასრიალება.

ფილის ზედა ფუძეზე მოქმედებს განივი დატვირთვა, რომელიც ორივე კოორდინატის მიმართ იცვლება სინუსოიდალური კანონით

$$p = p_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4.2)$$

მის ქვედა ფუძეზე მოცემულია ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობა

$$\sigma_z = 0, \quad u = 0, \quad w = 0. \quad (4.3)$$

$\Phi_2$  და  $\Phi_3$  ფუნქციებისათვის გამოვიყენოთ წინა პარაგრაფში მიიღებული მწკრივების მხოლოდ პირველი წევრები

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= t_1 shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \Phi_2(x, y, z) &= A_1 shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \Phi_3(x, y, z) &= A_2 shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (4.4)$$



სადაც  $p = \sqrt{\gamma_1 \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \right]}$ ,  $t_1, A_1, A_2$  – უცნობი კოეფიციენტებია.

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, მიღებული ალგებრულ განტოლებათა სისტემიდან განვსაზღვრავთ  $t_1, A_1, A_2$  კოეფიციენტებს.

$$t_1 = \frac{T_{mn}}{shp_T h}$$

$$A_1 = -\frac{2\gamma_1(chph + phshph)}{\gamma_3 p^2 (shph \square chph - ph) chph} p_{11} - \frac{\gamma_1^2 p_t^3 \eta (phch^2 ph - pshphchph - p^2 hsh^2 ph)}{\gamma_3 p^3 (shph \square chph - ph)} t_1 \quad (4.5)$$

$$A_2 = -\frac{2\gamma_1^2 chph}{\gamma_3 p^2 (shph \square chph - ph)} p_{11} - \frac{\gamma_1^2 p_t^3 (1-p) \eta sh2ph}{\gamma_3 p^3 (shph \square chph - ph)} t_1.$$

სადაც

$$\eta = \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1}. \quad (4.6)$$

თუ მიღებულ გამოსახულებებს ჩავსვამთ (4.4) – ში, მივიღებთ:

$$T(x, y, z) = \frac{T_{mn}}{shp_T h} shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \left( -\frac{2\gamma_1(chph + phshph)}{\gamma_3 p^2 (shph \square chph - ph) chph} p_{11} - \frac{\gamma_1^2 p_t^3 \eta (phch^2 ph - pshphchph - p^2 hsh^2 ph)}{\gamma_3 p^3 (shph \square chph - ph)} t_1 \right) shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.7)$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \left( -\frac{2\gamma_1^2 chph}{\gamma_3 p^2 (shph \square chph - ph)} p_{11} - \frac{\gamma_1^2 p_t^3 (1-p) \eta sh2ph}{\gamma_3 p^3 (shph \square chph - ph)} t_1 \right) shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

მივიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{T_{mn}}{shp_T h}, \quad \eta_1 = -\frac{2\gamma_1(chph + phshph)}{\gamma_3 p^2 (shph \square chph - ph) chph} p_{11}, \\
\eta_2 &= -\frac{\gamma_1^2 p_i^3 \eta (phch^2 ph - pshphchph - p^2 hsh^2 ph)}{\gamma_3 p^3 (shph \square chph - ph)} t_1 \\
\eta_3 &= -\frac{2\gamma_1^2 chph}{\gamma_3 p^2 (shph \square chph - ph)} p_{11}, \quad \eta_4 = -\frac{\gamma_1^2 p_i^3 (1-p) \eta sh2ph}{\gamma_3 p^3 (shph \square chph - ph)} t_1.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

მაშინ (4.7) ფორმულები ასეთ სახეს მიღებს:

$$\begin{aligned}
T(x, y, z) &= t_1 shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\
\Phi_2(x, y, z) &= (\eta_1 + \eta_2) shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\
\Phi_3(x, y, z) &= (\eta_3 + \eta_4) shpz \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

მიღებული გამოსახულებები ჩავსვათ წინა პარაგრაფის (3.9) და (3.10) ფორმულებში, მაშინ მივიღებთ დამაბულ – დეფორმირებლი ველის ყველა კომპონენტს. კერძოდ, კი  $w$  –სთვის გვექნება

$$\begin{aligned}
w &= \left[ \frac{\gamma_3}{c_4} (\eta_1 + \eta_2) + \left( \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} - 1 \right) (\eta_3 + \eta_4) + t_1 \right] pchpz + \\
&\quad + \frac{\gamma_3 p^2}{2c_4 \gamma_1} (\eta_3 + \eta_4) shpz \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{b} y \right)
\end{aligned}$$

ახლა განვიხილოთ დამაბულ–დეფორმირებული მდგომარეობა ფილის  $z=0$  შუა სიბრტყეში (8) ფორმულებიდან ჩანს, რომ

$$u = 0, v = 0, D = 0, \sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = 0,$$

$$w = \left[ \frac{\gamma_3}{c_4} (\eta_1 + \eta_2) + \left( \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} - 1 \right) (\eta_3 + \eta_4) + t_1 \right] pchpz \square \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) \sin \left( \frac{\pi}{b} y \right)$$

მაქსიმალური ჩაღუნვა გვექნება  $z=0$  სიბრტყეზე წერტილში

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2};$$

$$w = \left[ \frac{\gamma_3}{c_4} (\eta_1 + \eta_2) + \left( \frac{\gamma_3}{2c_4 \gamma_1} - 1 \right) (\eta_3 + \eta_4) + t_1 \right] p$$

ამ სიბრტყეზე

$$\tau_{xz} = \left[ \frac{\gamma_3(\eta_3 + \eta_4)}{2\gamma_1} \frac{\pi p}{a} + \frac{\pi p \gamma_3(\eta_1 + \eta_2)}{a} + \frac{\pi p t_1}{a} \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \right] \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right),$$

$$\tau_{yz} = \left[ \frac{\gamma_3(\eta_3 + \eta_4)}{2\gamma_1} \frac{\pi p}{b} + \frac{\pi p \gamma_3(\eta_1 + \eta_2)}{b} + \frac{\pi p t_1}{b} \frac{\gamma_4 \lambda_0 + \beta_{10} \gamma_3}{1 - \lambda_0 \gamma_1} \right] \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} y\right),$$

შევნიშნოთ, რომ როგორც  $\sigma_x$  და  $\sigma_y$  მდუნავ ძაბვების გამოსახულებებიდან ჩანს, ყოველ  $z = z_1$  კვეთაში, მათ მაქსიმუმი ექნებათ  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ ; წერტილებში, ხოლო მხები ძაბვები იმ კვეთებში, რომლებიც გადიან ფილის ცენტრში ნულის ტოლია.

განვიხილოთ კიდევ ერთი შემთხვევა. ზედა ფუძეზე მოცემულია ნორმალური დატვირთვა, ხოლო მხები დატვირთვა ისეთია, რომ  $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$ . ქვედა ფუძეზე, როგორც წინა ამოცანაში მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობა. ე.ი. ფილისათვის გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$z = h: \sigma_z = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = s_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0;$$

$$z = 0: \sigma_z = 0, \quad u = 0, \quad v = 0.$$

უკვე განხილული შემთხვევის მსგავსად, აქაც მივიღებთ  $T$ ,  $\Phi_2$  და  $\Phi_3$  ფუნქციებისათვის შესაბამის გამოსახულებებს და დამაბულ – დეფორმირებული ველის კომპონენტებს კი ექნებათ ანალოგიური სახე.

თუ აქაც განვიხილავთ შუა სიბრტყეს და მის დამაბულ – დეფორმირებულ მდგომარეობას, ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, იმაში, რომ მაქსიმალური ჩაღუნვა გვექნება  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$  წერტილში.

## დასკვნა

სქელი ფილების თეორია იზოტროპული სხეულებისათვის, რომელიც დაფუძნებულია დრეკადობის თეორიის წინასწორობის განტოლებებზე და სენ – ვენანის პირობებზე, პირველად აგებული იყო მიჩელის მიერ და შემდგომ დაწვრილებით განიხილა ლიავმა თავის მონოგრაფიაში[33]. ამ ამოცანების მათემატიკური სირთულეების გამო საჭირო გახდა სქელი ფილების გაანგარიშების ტექნიკური თეორიების შექმნა. ასეთია, მაგალითად, რეისნერ – ბილეს, ვ. ვლასოვის თეორიები. ამ თეორიებში მხედველობაში მიღებულია, რომ მხები  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy}$  –მაბევებისათვის წინასწარ (აპრიორი) მიღებულია პარაბოლური განაწილების კანონი  $z$  ცვლადის მიმართ. თავად ფილა ითვლება, რომ ბრტყელ დაძაბულ მდგომარეობაში იმყოფება და სრულდება შემდეგი პირობები  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xz} \neq 0$ ,  $\tau_{yz} \neq 0$ . ამასთან შუა ზედაპირის გეომეტრიული ზომები არ იცვლება და მიღებულია ფიზიკური ჰიპოთეზა ნორმალის ელემენტის შესახებ. ზემოთ განხილული შემთხვევებში მიღებული ზუსტი ამონახსნები საშუალებას იძლევა ამ თეორიების დაზუსტებაში, უფრო სწორედ რომ ვთქვათ, ერთმანეთთან შედარებაში ითამაშონ გარკვეული წილი. მხოლოდ უნდა გავითვალისწინოთ და ამას უნდა მიექცეს ყურადღება, რომ აუცილებლად ზედა და ქვედა ფუძეებზე მოცემულია ანტისიმეტრიული დატვირთვა, რადგან მხოლოდ ამ შემთხვევაში სამგანზომილებიან თეორიაში გვექნება შუა ზედაპირი თავისუფალი.

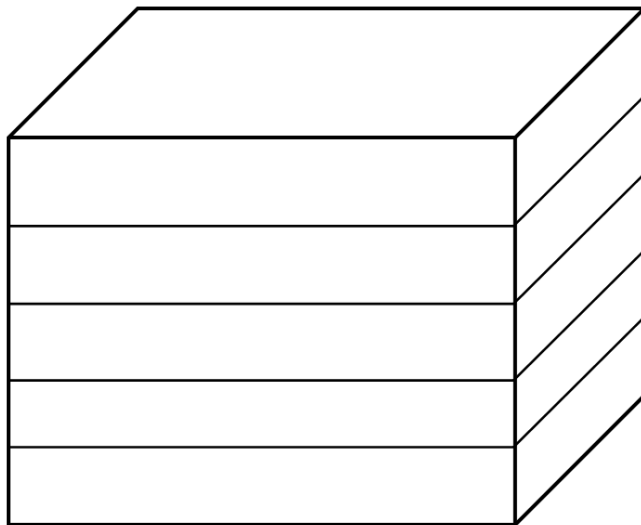
### §2.5. მრავალფენიანი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით

ამ პარაგრაფში განვაზოგადებთ ზემოთ განხილულ ამოცანებს მრავალფენიან სქელი ფილებისათვის. ფილას აქვს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმა. შემდგომ, როდესაც ვიტყვით პარალელეპიპედს ყოველთვის ვიგულისხმებთ ფილას.

ვთქვათ, ფილას უკავია  $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq x_1, 0 \leq y \leq y_1, 0 \leq z \leq z_1\}$  არე და მრავალფენიანია  $z$  ღერძის გასწვრივ. ისევე როგორც წინა პარაგრაფში, ვიგულისხმებთ, რომ ფილის ყოველი შრე ტრანსვერსალურად იზოტროპულია, რომელთა საერთო იზოტროპიის ღერძია  $z$ - ღერძი. მივიღოთ, რომ  $\Omega$  არის  $\Omega_i$  პარალელეპიპედების გაერთიანება, კერძოდ

$$\Omega_i = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq x_1, 0 \leq y \leq y_1, 0 \leq z \leq z_i\},$$

სადაც  $i = \overline{1, N}$ ,  $z_N = h$ ,  $z_0 = 0$ . შევნიშნოთ, რომ  $i$ -თი აღნიშნულია შრის ნომერი და შრეები დანომრილია ქვემოდან ზევით. თითოეულ ფილას აქვს



ნახ.7. ხუთფენიანი სქელი ფილა

თავისი დრეკადი მახასიათებლები და სითბური კოეფიციენტები. ამასთან, ფილისათვის მიღებული გვაქვს, რომ განზოგადებულად პარალელური გადაადგილების ვექტორი ნულის ტოლია, ე.ი.  $B = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . ფილის გვერდით წახნაგებზე, ყველა ფენისთვის, მივიღოთ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

$$\begin{aligned} \text{როცა } x = x_j: \quad & a) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad B = 0, \quad \text{ს6} \\ & b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } y = y_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad B = 0, \quad \text{ახ} \quad (5.2) \\ b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial y} = F_{j1}(x, y), \quad \text{ახ} \quad b) \quad T = F_{j2}(x, y), \quad \text{ახ} \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \Theta_j T = F_{j3}(x, y), \quad (5.3) \end{aligned}$$

ფენებს შორის  $z = z_i$  სიბრტყეებზე მოცემულია ხისტი კონტაქტის პირობები:

$$\begin{aligned} w^i = w^{i+1}, \quad \sigma_z^i = \sigma_z^{i+1}. \\ \frac{\partial u^i}{\partial x} + \frac{\partial u^i}{\partial y} = \frac{\partial u^{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial u^{i+1}}{\partial y}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^i}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^i}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}^{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{i+1}}{\partial y}, \end{aligned}$$

ფილის პირით ზედაპირებზე შეიძლება მოცემული იყოს სასაზღვრო პირობები როგორც ძაბვებში, ასევე გადაადგილებებში (ცხადია, რომ მოცემული პირობები შეგვიძლია შევცვალოთ ექვივალენტური მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობებით). ზოგადობის დაურღვევლად, მხოლოდ და მხოლოდ სიმარტივისათვის განვიხილოთ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ხუთფენიანი ფილისთვის. ამ ფილისათვის სრულდება ყველა ის მოთხოვნა რომელიც ზემოთ არის მოყვანილი, მხოლოდ ზედა და ქვედა ფუძეებზე მოცემულია სიმეტრიული ან ანტისიმეტრიული დატვირთვები. თუ

$$\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq x_1, 0 \leq y \leq y_1, -h \leq z \leq h\}$$

მაშინ  $\Omega$  არის შემდეგი ხუთი ფენის გაერთიანება:

$$\Omega_1 = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq z_1\},$$

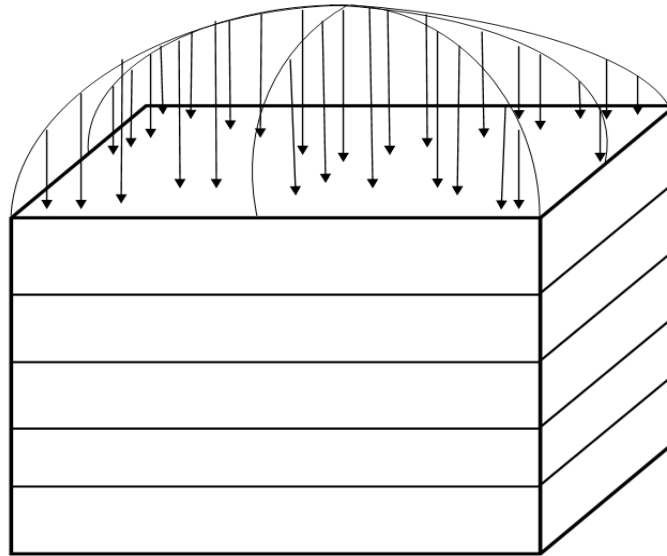
$$\Omega_2 = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z_1 \leq z \leq z_2\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z_2 \leq z \leq z_3\},$$

$$\Omega_4 = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z_3 \leq z \leq z_4\},$$

$$\Omega_5 = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, z_4 \leq z \leq h\},$$

როგორც წინა პარაგრაფში, მოცემული ამოცანა შეიძლება დაიყოს ორ ამოცანად; გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ , როცა



ნახ.8.

$$z = \pm h: T = t(x, y), \quad \sigma_z = f_1^\pm(x, y), \quad \tau_{zx} = f_2^\pm(x, y), \quad \tau_{zy} = f_2^\pm(x, y),$$

მაშინ მესამე ფენის შუა სიბრტყე განიცდის ღუნვას, ე.ი. ზედაპირზე შესრულდება ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობა. ამიტომ შეგვიძლია ამოცანა განვიხილოთ სამი ფენისათვის. ე.ი. გვაქვს შემდეგი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა: ვიპოვოთ სამფენოვანი ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობა, თუ სრულდება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{aligned} x=0, a: \quad & \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad B = 0, \\ y=0, b: \quad & \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad B = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
z = 0: \quad & T = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad u = 0, \quad v = 0; \\
z = h: \quad & T = t(x, y), \quad \sigma_z = f_1(x, y), \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = f_2(x, y) \\
& \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 0; \\
z = z_i: \quad & \sigma_z^{(i)} = \sigma_z^{(i+1)}, \quad w^{(i)} = w^{(i+1)}, \\
& \frac{\partial \tau_{zy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{zy}^{(i+1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}^{(i+1)}}{\partial y}, \\
& \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial u^{(i+1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(i+1)}}{\partial y}, \\
& T^{(i)} = T^{(i+1)};
\end{aligned} \tag{5.5}$$

ფრჩხილებში ჩასმული ინდექსი მიუთითებს ფენის ნომერს. ცხადია, რომ  $i$  დებულობს 1 და 2 მნიშვნელობებს. რომ ვიპოვოთ მრავალფენიანი სქელი ფილის დრეკადი წონასწორობა, ამისათვის  $i$ -ური ფენისათვის, მსგავსად ზემოთ განხილული ამოცანებისა, ფილის გვერდით წახნაგებზე მოცემული სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, ვაგებთ გამოსახულებებს  $\tilde{\Phi}_2$ ,  $\tilde{\Phi}_3$  და  $\tilde{T}$  ფუნქციებსთვის. მათ შესაბამისად ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
\Phi_2^{(i)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2mn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \bullet \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \\
\Phi_3^{(i)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{3mn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \bullet \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \\
T^{(i)}(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tmn} e^{-\bar{p}h} sh\bar{p}z \bullet \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

სადაც

$$\psi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

ამის შემდეგ ზემოთ მოყვანილი მეთოდოლოგიით შევადგენთ დრეკადი ველის კომპონენტებს (2.14), (2.15) სასაზღვრო და საკონტაქტო პირობების შესასრულებლად ( $z = 0$  სიბრტყეზე, როგორც მოცემული (2.16)



გამოსახულებებიდან ჩანს, ავტომატურად სრულდება). ზუსტად ისეთივე მსჯელობით, როგორც გვექონდა წინა პარაგრაფში უცნობი კოეფიციენტებისათვის, ყოველი ფიქსირებული  $m$  და  $n$  -თვის მივიღებთ ექვს უცნობიან ალგებრულ განტოლებათა სისტემას. ისევე, როგორც წინა შემთხვევებშიც, აქაც შესაძლებელია მიღებული სისტემის ამოხსნადობისა, შესაბამისი მწკრივების კრებადობისა საკითხების დამტკიცება.

### თავი III.

## თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა ცილინდრულ კოორდინატებში

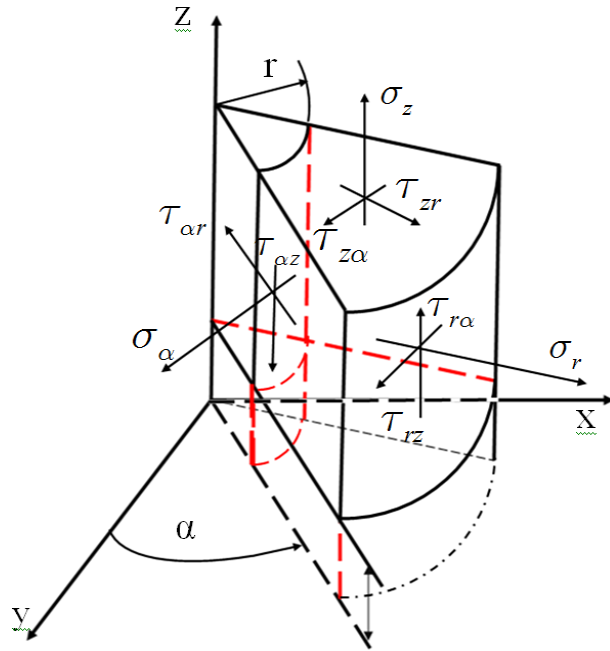
### §3.1. ძირითადი განტოლებები, სასაზღვრო პირობები ცილინდრულ კოორდინატებში

შესავალი. იზოტროპული ერთგვაროვანი ფენის დრეკადი წონასწორობა ჯერ კიდევ ლამემ და კლაპეირონმა განიხილა. შემდგომ კვლევებში ხდებოდა ერთი მხრივ ამ ავტორების მიერ მიღებული ამოხსნების გამარტივება, მეორე მხრივ კი მათი განზოგადოება. ამ საკითხისადსმი მიძღვნილ ამოცანათა საკმაოდ დიდი ჩამონათვალი მოყვანილია მონოგრაფიებში [10], [18].

ყველა მითითებულ შრომებში უმეტეს შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნები აიგებოდა ორმაგი ინტეგრალური გარდაქმნის ფორმულების დახმარებით იზოტროპული ფენისთვის ტემპერატურული შეშფოთების გაუთვალისწინებლად. ამ თავის პირველ ორ თავში ფურციეს მეთოდის და ორმაგი მწკრივების, დახმარებით აგებულია თერმოელექტროდრეკადობის[89] სტატიკური სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნები  $\Pi = \{(r, \alpha, z) \in R : r_0 < r < r_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; z_0 < z < z_1\}$  მრუდწირული საკოორდინატო პარალელეპიპედისათვის (ფაქტობრივად,

მრუდწირულ საკოორდინატო პარალელეპიპედში, იგულისხმება საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეული), სადაც  $r, \alpha, z$  – ცილინდრული კოორდინატებია. შემდგომ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ  $z=0$  და  $z=z_1$  ზედაპირებზე ტემპერატურულ და ელექტრულ შეშფოთებასთან ერთად შეიძლება მოცემული იყოს როგორც ძაბვები, ასევე გადადგილებები ან მათი კომბინაცია. გვერდით ( $r = r_0, r = r_1, \alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_1$ ) ზედაპირებზე კი მოცემულია სპეციალური სახის ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები. აქვე შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ განხილულ სასაზღვრო

ამოცანებში, როდესაც ზედაპირი არის სიბრტყე სპეციალური სახის პირობა გარდაიქმნება მესამე სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის სასაზღვრო პირობა



ნახ.9. წრიული ცილინდრული კოორდინატა სისტემა

ობად. თუ სხეული მრავალფენიანია, ნახ.9. ცილინდრულ კოორდინატა სისტემა მაშინ  $z = const$  საკონტაქტო ზედაპირებია. შემდგომ ვიგულისხმებთ, რომ დრეკადი სხეული ან მრავალფენიანი სხეულის ფენები ტრანსტროპულია (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული). აქვე აღვნიშნოთ, რომ ტრანსტროპული ეწოდება სხეულს, რომლის დრეკადი თვისებები მოცემული ღერძისა და მისი ნებისმიერი პერპენდიკულარული მიმართულებით განსხვავებულია, ხოლო აღნიშნული ღერძის ნებისმიერ მართობულ სიბრტყეში არ არის დამოკიდებული მიმართულების არჩევაზე. ამ სიბრტყეს იზოტროპიის სიბრტყე ეწოდება და ჩვენს შემთხვევაში  $z = const$  – იზოტროპიის სიბრტყეა.

ამგვარად, ამ თავში განხილული იქნება (მიუხედავად იმისა, რომ სხეულის გვერდით ზედაპირებზე სპეციალური სახის ერთგვაროვანი პირობებია) უსასრულო ფენის დრეკადი წონასწორობის ამოცანის განზო-

გადება მისი ამოხსნის მეთოდის გამარტივების გზით[72]. გამარტივება მიიღწევა იმის გამო, რომ 1) სასაზღვრო და საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემული კლასიკურ პირობებს ეკვივალენტური პირობებით შეცვლით ; 2)ორმაგი ინტეგრალური გარდაქმნების მაგივრად ორმაგი მწკრივების გამოყენება მოხდება.

ამოხსნათა ეფექტურობის შესახებ შეიძლება შემდეგი აზრი გამოვთქვათ: თუ მოცემულ არეში ცვლადთა განცალების მათოდით (ფურიეს მეთოდით) შეიძლება ეფექტურად აიგოს ლაპლასის განტოლების ამოხსნა, მაშინ ასეთივე ეფექტურობით, ამავე არეში და ამავე მეთოდით შეიძლება განისაზღვროს აღნიშნული სხეულების თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა.

1. განვიხილოთ წრიულ ცილინდრულ  $r, \alpha, z$  კოორდინატთა სისტემის  $(0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty)$  საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული ტრანსტროპული სხეულის თერმოდრეკადი წონასწორობა.

ჩვენს მიერ განსახილავ სქელ ფილას უკავია არე:

$$\Omega = \{0 \leq r_0 < r < r_1, 0 < \alpha < \alpha_1, 0 < z < z_1\},$$

ამიტომ ასეთ სხეულებს შეიძლება ვუწოდოთ მრუდწირული საკოორდინატო პარალელებიპედი (ნახ ). იზოტროპიის სიბრტყედ მივიღოთ  $z = const$  სიბრტყე.

თერმოელექტროდრეკადობის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე [88], [89]:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\alpha}{r} = 0, \\ b) \quad & \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\alpha}}{r} = 0, \\ c) \quad & \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r D_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \tag{1.2}$$

(1.1) განტოლებები – ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში ჩაწერილი ჩვეულებრივი დრეკადი წონასწორობის განტოლებებია. (1.2) განტოლებები კი ელექტროსტატიკის განტოლებებია. ამ განტოლებებში  $\sigma_r, \sigma_\alpha, \sigma_z$  – ძაბვის ნორმალური მდგენალებია,  $\tau_{r\alpha}, \tau_{rz}, \tau_{\alpha z}$  – ძაბვის მხები მდგენელებია.  $D_r, D_\alpha, D_z$  – ელექტრული  $\vec{D}$  ინდუქციის ვექტორის მდგენელებია  $r, \alpha, z$  საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ.

გადაადგილებებსა და ძაბვებს შორის კავშირს ანუ ჰუკის კანონს (მას როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ზოგი ავტორი ფიზიკურ კანონს უწოდებს) ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე [90]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_1 \varepsilon_{rr} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{rr} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - e_1 E_z - \beta_{10} T, \\ \sigma_z &= c_3 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - e_2 E_z - \beta_{20} T,\end{aligned}\quad (1.3)$$

$$\tau_{\alpha z} = c_4 \varepsilon_{\alpha z} - e_3 E_\alpha, \quad \tau_{rz} = c_4 \varepsilon_{rz} - e_3 E_r, \quad \tau_{r\alpha} = c_5 \varepsilon_{r\alpha},$$

$$D_r = e_3 \varepsilon_{rz} + \varepsilon_1 E_r, \quad D_\alpha = e_3 \varepsilon_{\alpha z} + \varepsilon_1 E_\alpha,$$

$$D_z = e_1 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + e_1 \varepsilon_{zz} + \varepsilon_2 E_z.$$

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\alpha} = \varepsilon_{\alpha r}, \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr}, \varepsilon_{z\alpha} = \varepsilon_{\alpha z}$  – დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებია;  $E_r, E_z, E_\alpha$  – ელექტრული  $\vec{E}$  ველის ვექტორის კომპონენტებია და  $\varphi$  ელექტრული პოტენციალით ასე გამოისახება  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  [88].  $c_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  – მუდმივი ელექტრული ველისას გაზომილი დრეკადობის მუდმივებია;  $e_j, (j = 1, 2, 3)$  – პიეზოელექტრული მუდმივებია;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – მუდმივი დეფორმაციების დროს დიელექტრული გამტარობის მუდმივებია;  $\beta_{10} = [2(c_1 - c_5) \beta_1 + c_3 \beta_3], \beta_{20} = [2c_3 \beta_1 + c_2 \beta_2], \beta_1, \beta_2$  – იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$  ღერძის გასწვრივ წრფივი სითბური გაფართოების კოეფიციენტებია [48]. სხეულში  $T$  ტემპერატურა აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \alpha^2} + \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.4)$$

და შესაბამის სასაზღვრო პირობებს.  $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ;  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  სითბოგამტარე-

ბლობის კოეფიციენტებია იზოტროპიის სიბრტყეში და  $z$ - გასწვრივ;

გადაადგილებებსა და დეფორმაციებს შორი კავშირს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{z\alpha} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

სადა  $u, v, w$ -გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია  $r, \alpha, z$

საკორდინატო ღერძების გასწვრივ.

თუ გავითვალისწინებთ (1.3) და (1.5) ტოლობებს, მაშინ (1.1)

სისტემა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით [91], [92]:

$$\begin{aligned} a) & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \\ & + \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\ b) & r \frac{\partial K}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial z} = 0, \\ c) & \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{z\alpha}}{\partial z} = 0, \\ d) & \frac{\partial (r \tau_{z\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \alpha} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial (r B)}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

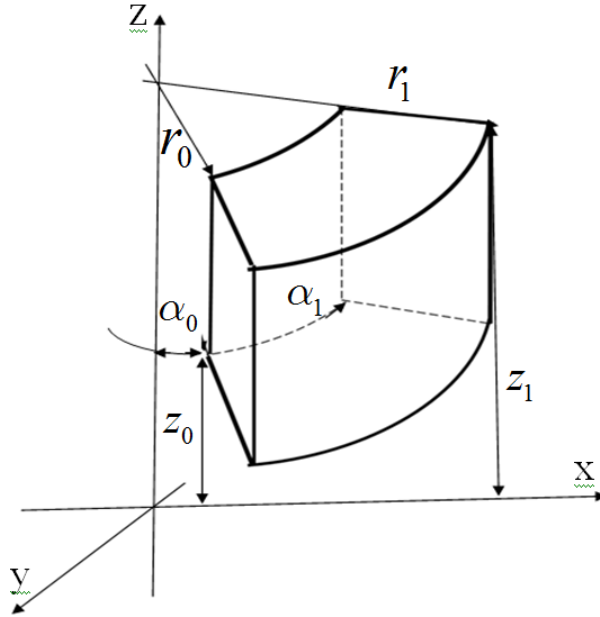
სადაც

$$\begin{aligned} a) & K = c_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} + e_1 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \beta_{10} T, \\ b) & B = c_5 \left[ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right], \\ c) & \tau_{rz} = c_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + e_3 \frac{\partial \phi}{\partial r}, \\ d) & \tau_{z\alpha} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + e_3 \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

აღსანიშნავია, რომ (1.7d) წარმოადგენს იგივეობას [91].

ქვემოთ მოგვყავს ის სასაზღვრო პირობები, რომლებიც შემდგომ განსაზღვრავენ განსახილავი სასაზღვრო ამოცანების კლასს. ამისათვის განვიხილოთ თერმოელექტროდრეკადი წონასწორობა ცილინდრული საკოორდინატო პარალელეპიპედის. მას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, უკავია არე:

$$\bar{\Pi} = \{(r, \alpha, z) \in R: r_0 < r < r_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; 0 < z < z_1\}.$$



ნახ.10. სქელი ფილა (ე.წ. ცილინდრული პანელი)

სასაზღვრო პირობებს შემდეგი სახე აქვთ:

$$\text{როცა } r = r_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad u = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad B = 0, \quad D_r = 0, \quad \text{სხ} \quad (1.8)$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0.$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad v = 0, \quad \tau_{z\alpha} = 0, \quad B = 0, \quad D_\alpha = 0, \quad \text{სხ} \quad (1.9)$$

$$b) \quad T = 0, \quad K = 0, \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \phi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{როცა } z = z_j: \quad a) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = F_{j1}(r, \alpha), \quad \text{სხ} \quad b) \quad T = F_{j2}(r, \alpha), \quad \text{სხ} \\ c) \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \Theta_j T = F_{j3}(r, \alpha), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\text{როცა } z = z_j: \quad a) \phi = F_{j4}(r, \alpha), \quad \text{ან} \quad b) D_z = F_{j5}(r, \alpha). \quad (1.11)$$

$$\text{როცა } z = z_j: \quad a) \sigma_z = F_{j6}(r, \alpha), \quad \tau_{zr} = F_{j7}(r, \alpha), \quad \tau_{z\alpha} = F_{j8}(r, \alpha), \quad \text{ან} \\ b) w = f_{j1}(r, \alpha), \quad u = f_{j2}(r, \alpha), \quad v = f_{j3}(r, \alpha), \quad \text{ან} \quad (1.12)$$

$$c) \sigma_z = F_{j6}(r, \alpha), \quad u = f_{j2}(r, \alpha), \quad v = f_{j3}(r, \alpha), \quad \text{ან}$$

$$d) w = F_{j6}(r, \alpha), \quad \tau_{zr} = F_{j7}(r, \alpha), \quad \tau_{z\alpha} = F_{j8}(r, \alpha).$$

აქ  $j = 0, 1$ . ამასთან  $z_0 = 0$ , - მოცემული მუდმივებია.

$F_{jl}(r, \alpha)$ ,  $f_{jl}(r, \alpha)$  ფუნქციებზე დადებულ პირობებზე ქვემოთ გვექნება ლაპარაკი; აქ აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ისინი აკმაყოფილებენ პარალელეპიპედის წიბოებზე შეთანხმებულობის პირობებს.

რამდენიმე სიტყვა ზემოთ მოყვანილ ცილინდრული საკორდინატო პარალელეპიპედის (შემდგომ გამოვიყენოთ აბრევიატურა „ცსპ“) ექვს საერთოდ, რომ ვთქვათ არაბრტყელ წახნაგებზე სასაზღვრო პირობების და ფიზიკური მოდელის შესახებ. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, როგორია ცილინდრული საკორდინატო პარალელეპიპედის დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობის მათემატიკური მოდელი.

ნაშრომში განხილული ამოცანების ფიზიკური მოდელი შეიძლება ასე ჩამოვაცალიბოთ:

*ვიპოვოთ ცილინდრული საკორდინატო პარალელეპიპედის დამაბული-დეფორმირებული მდგომარეობა, როდესაც მის ორ პარალელურ წახნაგზე გარდა თერმული ველის აგრეთვე მოცემულია ზედაპირული შეშფოთება ძაბვების, გადაადგილებების ან მათი კომბინაციის სახით, ხოლო დანარჩენი წახნაგები ნაწილობრივ ჩამავრებულია და თერმო-ელექტრო იზოლირებულია ან ტემპერატურა ნულის ტოლია.*

ნაწილობრივ ჩამავრებაში იგულისხმება, რომ ამ წახნაგებზე სრულდება ზემოთმოყვანილი (1.8) და (1.9) სასაზღვრო პირობები. ამ სასაზღვრო პირობების ტექნიკური ინტერპრეტაცია შემდეგნაირია: 1) ან არაბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი ( თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა) 2) ან არაბრტყელი



წახნაგი ებჯინება აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს. ცხადია, რომ სხეულის ზედაპირის ფორმა სავსებით იდენტურია არაბრტყელი წახნაგის, რადგანაც არაბრტყელი წახნაგის ყველა წერტილი უნდა ეხებოდეს სხეულის გლუვი ზედაპირის შესაბამის წერტილებს. სხვანაირად პირველ შემთხვევაში წახნაგის წერტილებს არ შეუძლიათ გადაადგილება ზედაპირის მხების გასწვრივ, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. მეორე შემთხვევაში წერტილებს არ შეუძლიათ ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ გადაადგილება, მაგრამ თავისუფლად გადაადგილდებიან ზედაპირის მხების გასწვრივ.

მართლაც, რადგან არაბრტყელ წახნაგზე დაკრულია უჭიმადი და უკუმშვადი გარსი (თუ წახნაგი ბრტყელია, მაშინ მასზე დაკრულია ფირფიტა), ამიტომ შეგვიძლია მივიღოთ, რომ  $v = 0$ ,  $w = 0$ , ან  $u = 0$ ,  $w = 0$ , ან  $u = 0$ ,  $v = 0$ . აქედან  $K = 0$ .

მეორე შემთხვევაში, რადგან სხეული ებჯინება აბსოლუტურად გლუვ და ხისტ სხეულს, ამიტომ გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელი ნულის ტოლია, ხოლო აბსოლუტური სიგლუვის გამო  $B = 0$ ,  $Z_p = 0$  ან  $B = 0$ ,  $\tau_{z\alpha} = 0$  ან  $\tau_{zr} = 0$ ,  $\tau_{z\alpha} = 0$ .

პირველი და მეორე ტიპის ნაწილობრივი ჩამაგრებები გვხვდება სამშენებლო კონსტრუქციებში, ჰიდრიტექნიკურ ნაგებობებში, მანქანათმშენებლობაში და ა.შ. კერძოდ, პირველი ტიპის ჩამაგრებით შეიძლება სამშენებლო კონსტრუქციების სახსრული (თავისუფალი) დაყრდნობის, მსუბუქი შემავსებლით სქელი ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის და ა.შ. მოდელირება. არანაკლებ მნიშვნელოვანია მეორე ტიპის ჩამაგრება. კერძოდ, ამ შემთხვევაში შესაძლებელია გლუვი შტამპისა და დრეკადი სხეულის კონტაქტის მოდელირება ან კიდევ ეგრეთ წოდებული სამშენებლო კონსტრუქციების სრიალა ჩამაგრების მოდელირება. ერთი სიტყვით პირველი და მეორე ჩამაგრების

პრაქტიკული მნიშვნელობა არა ნაკლებია ვიდრე, მაგალითად კონსტრუქციის ხისტი ჩამაგრება და ისინი უფრო ხშირად გამოიყენება.

დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ რაც უფრო მცირეა ცილინდრული სასაზღვრო  $r = r_j$  ზედაპირის სიმრუდე, მით უფრო მცირეა განსხვავება (1.8a). (1.8b) პირობების შესაბამისი,

$$\begin{aligned} a) \quad & u = 0, \quad \tau_{ar} = 0, \quad \tau_{zr} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad D_r = 0 \quad \text{და} \\ b) \quad & \sigma_r = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad T = 0, \quad \varphi = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

პირობებისაგან, როცა  $r = r_j$ . (1.8a). (1.9b) პირობები ექვივალენტურია (1.17a) და (1.17b) პირობებისა იმ შემთხვევაში, როდესაც  $r = r_j$  - სიბრტყეა.

### § 3.2. კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ექვივალენტობა. რეგულარული ამოხსნა

წონასწორობის განტოლებების ზემოთ მიღებული ფორმა და სასაზღვრო პირობების სპეციალური კლასი საშუალებას იძლევა მივიღოთ (1.6)-(1.7) სისტემის სრული ამოხსნა. უფრო მეტიც, რომ შევძლოთ ამ ნაშრომში დასმული სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად ფურიეს მეთოდი. ხელსაყრელია მივიღოთ (1.12) სასაზღვრო პირობების ექვივალენტური პირობები, რომელიც წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით.

$$\begin{aligned} a) \quad & \sigma_z = F_{i1}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}) = F_{i2}(r, \alpha), \quad \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}) = F_{i3}(r, \alpha), \\ b) \quad & w = f_{i1}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(u, v) = f_{i2}(r, \alpha), \quad \Gamma_2(u, v) = f_{i3}(r, \alpha), \\ c) \quad & w = f_{i1}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}) = F_{i2}(r, \alpha), \quad \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}) = F_{i3}(r, \alpha), \\ d) \quad & \sigma_z = F_{i1}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(u, v) = f_{i2}(r, \alpha), \quad \Gamma_2(u, v) = f_{i3}(r, \alpha), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{სადაც } \Gamma_1(g_1, g_2) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial g_1}{\partial \rho} + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \right), \quad \Gamma_2(g_2, g_1) = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial \rho} - \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \right),$$

ამასთან  $g_1 = h\tau_{z\rho}$  ან  $g_1 = hu$ ,  $g_2 = h\tau_{z\alpha}$  ან  $g_2 = hv$ . მივიღოთ, რომ ფუნქციები  $\tilde{F}_j(r, \alpha)$  და  $\tilde{F}_j(r, \alpha)$  თვითონ, ხოლო  $F_j(r, \alpha)$ ,  $\tilde{f}_j(r, \alpha)$  და  $\tilde{f}_j(r, \alpha)$  წარმოიდგინებიან თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით (ფურიეს მწკრივი შტურმ-ლიუვილის გარკვეული ამოცანების საკუთრივი ფუნქციების სახით). ეს ფაქტი აღვნიშნოთ ასე  $C_0^3(\Omega)$ .

ჩვენი მიზანია მივიღოთ სასაზღვრო ამოცანების რეგულარული ამოხსნა. ამიტომ, ჩამოვაცალიბოთ, თუ რა გვესმის რეგულარული ამოხსნის ცნებაში.

(1.6)-(1.7) სისტემის  $u, v$  და  $w$  ფუნქციებით განსაზღვრულ ამოხსნას ვუწოდოთ რეგულარული, თუ  $u, v$  და  $w$  არიან სამჯერ უწყვეტად წარმოებადი  $\Pi$  არეში, სადაც  $\Pi$  არის  $\Pi$  მრუდწირული პარალელეპიპედის შიგა არე  $r = r_j$  და  $\alpha = \alpha_j$  საზღვრების ჩათვლით. პარალელეპიპედის ზედა და ქვედა ფუძეზე, ე.ი., როცა  $z = z_j$  ისინი წარმოიდგინებიან თავიანთი პირველი და მეორე რიგის წარმოებულებთან ერთად აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიეს მწკრივების სახით (ფურიეს მწკრივი შტურმ-ლიუვილის გარკვეული ამოცანების საკუთრივი ფუნქციების სახით). გარდა ამისა, პარალელეპიპედის გვერდით წახნაგებზე ( $r = r_j, \alpha = \alpha_j$ ) კმაყოფილდება წონასწორობის განტოლებები.

ჩვენ ზემოთ აღვნიშნეთ, რომ (1.12) და (2.1) სასაზღვრო პირობები ექვივალენტურია. ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$\Pi = \{(r, \alpha) \in R : r_0 < r < r_1, \alpha_0 < \alpha < \alpha_1\}$  არეში შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\frac{\partial g_1}{\partial r} + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial r} - \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = 0; \quad (2.2)$$

$$\text{როცა } r = r_j: \quad a) \quad g_2 = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial r} = 0 \quad \text{ან} \quad b) \quad g_1 = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial r} = 0; \quad (2.3)$$

$$\text{როცა } \alpha = \alpha_j: \quad a) \quad g_1 = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{ან} \quad b) \quad g_2 = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} = 0. \quad (2.4)$$

კელდიშ-სედოვის თეორემის[94] თანახმად, (2.2), (2.3),(2.4) სასაზღვრო ამოცანას, გარდა სასაზღვრო ამოცანებისა (2.2), (2.3a),(2.4b) და (2.2), (2.3b), (2.4a), აქვს შემდეგი ამოხსნა

$$g_1=0, \quad g_2=0.$$

რაც შეეხება (2.2), (2.3a), (2.4b) სასაზღვრო ამოცანას, მას აქვს შემდეგი სახი ამოხსნა

$$g_1 = g_{10} = \text{const}, \quad g_2 = 0, \quad (2.5)$$

ხოლო (2.2), (2.3b), (2.4a) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა კი ასე წარმოიდგინება:

$$g_1=0, \quad g_2 = g_{20} = \text{const} \quad (2.6)$$

ამ შემთხვევაში (1.6), (1.7), (1.4), (1.14), (1.12 a), (1.13b), (2.1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას უნდა დაემატოს ამოხსნა

$$u = 0, \quad w = 0, \quad rw = b_1 + \frac{b_2}{c_4} z, \quad (2.7)$$

ხოლო (1.6), (1.7), (1.4), (1.14), (1.12b), (1.13 a), (2.1) სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნას კი უნდა დაემატოს ამოხსნა

$$v = 0, \quad w = 0, \quad ru = b_3 + \frac{b_4}{c_4} z. \quad (2.8)$$

ამრიგად ექვივალენტობა დამტკიცდა.

### § 3.3. განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.

განმსაზღვრელ განტოლებათა მისაღებად (1.7) სისტემის მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებები გავაწარმოთ შესაბამისად  $\rho$ -თი,  $\alpha$ -თი და  $z$ - თი და შევკრიბოთ, მივიღებთ

$$\Delta_2 B + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

სადაც  $\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$ .

წარმოვადგინოთ  $B$  შემდეგი სახით:

$$B = \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} \quad (3.2)$$

სადაც  $\Psi_0$  აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta_2 \Psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} = 0 \quad (3.3)$$

შევიტანოთ  $B$  გამოსახულება (1.7) –ს მეორე, მესამე და მეოთხე განტოლებებში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \tau_{zr} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \alpha \partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial K}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial z} \left( r \tau_{z\alpha} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \tau_{z\alpha} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( r \tau_{zr} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \alpha \partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით არსებობს ისეთი  $\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}$  ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2}, \\ \tau_{zr} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r \partial z} + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \alpha \partial z}, \\ \tau_{z\alpha} &= \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \alpha \partial z} - \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

შევიტანოთ წინა გამოსახულება (1.8) –ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left( u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( w - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( w - \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( v + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right) &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial r} \left( v + \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( u - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \alpha} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

აქაც სრული დიფერენციალის არსებობის თეორემის ძალით, არსებობს ისეთი  $\Psi_2$  ფუნქცია, რომ

$$\begin{aligned}
w &= - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \\
v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) - \frac{1}{c_5} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}, \\
u &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_5} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

თუ (3.5) და (3.7)–ს შევიტანთ (1.7), (1.8)–ში, მივიღებთ  $\Psi_2$ –ს და  $\Psi_3$ –ს ფუნქციების განსასაზღვრავად სისტემას

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[ - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} + \frac{1}{2c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right] \right\} &= \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T &= 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ვინტეგრით (3.8) განტოლებათა სისტემის პირველი განტოლება  $z$ -ით. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ

$$\Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{2c_1 c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} = f(r, \alpha), \tag{3.9}$$

$$\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T = 0.$$

სადაც  $f(r, \alpha)$  არის ინტეგრების შედეგად გაჩენილი ნებისმიერი ფუნქცია.

ზუსტად ისევე როგორც წინა თავებში ზოგადობის შეუზღუდავად  $f(r, \alpha)$  შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ და საბოლოოდ დრეკადი ველის განმსაზღვრელ სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Psi_0 + \frac{c_4}{c_5} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial z^2} &= 0, \\ \Delta_2 \Psi_1 - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{2c_1 c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{c_1 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \quad (3.10) \\ \Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} + \frac{c_3}{2c_1 c_4} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\beta_{10}}{c_1} T &= 0. \end{aligned}$$

### § 3.4. სქელი ტრანსვერსალურად-იზოტროპული ფილის თერმოდრეკადი წონასწორობა

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ სქელ ტრანსტროპულ (ტრანსვერსალურად-იზოტროპული) ფილას, რომელსაც უკავია

$$\bar{\Pi} = \{(r, \alpha, z) \in R: r_0 < r < r_1; \alpha_0 < \alpha < \alpha_1; 0 < z < z_1\} \quad \text{არე. როგორც}$$

ვხედავთ, ფილა შემოსაზღვრულია ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემის ზედაპირებით. ე.ი. შემდეგ, ასეთ ფილას ვუწოდებთ ცილინდრულ პარალელებიპედს. გვერდით ზედაპირებზე მოცემულია ანტისიმეტრიული გაგრძელების პირობები ანუ მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები[97]:

$$r = r_i: u = 0, \quad \tau_{zr} = 0, \quad B = 0, \quad T = 0;$$

როცა (4.1)

$$\alpha = \alpha_i: v = 0, \quad \tau_{z\alpha} = 0, \quad B = 0, \quad T = 0.$$

ხოლო ფილის პირით ზედაპირებზე ( $z = z_i$ ) მოცემულია:

$$\sigma_z = F_{i1}(r, \alpha), \quad \tau_{zr} = F_{i2}(r, \alpha), \quad \tau_{z\alpha} = F_{i3}(r, \alpha), \quad T = T(r, \alpha),$$

ამ პირობების ნაცვლად განვიხილავთ შემდეგ ეკვივალენტურ პირობებს

$$\sigma_z = F_{i1}(r, \alpha), \quad \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}) = F_{i2}(r, \alpha), \quad \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}) = F_{i3}(r, \alpha),$$

რაც შეეხება  $\Gamma_1$  და  $\Gamma_2$  დიფერენციალურ ოპერატორებს, მათ აქვთ შემდეგი სახე :

$$\Gamma_1(g_1, g_2) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial g_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial g_2}{\partial \alpha} \right),$$

$$\Gamma_2(\tau_{rz}, \tau_{z\alpha}) = \left( \frac{\partial g_2}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial g_1}{\partial \alpha} \right).$$

ვგულისხმობთ, რომ ფილაზე ელექტრული ველი არ მოქმედებს, ამიტომ (1.3) ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} \sigma_r &= c_1 \varepsilon_{rr} + (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - \beta_{10} T, \\ \sigma_\alpha &= (c_1 - 2c_5) \varepsilon_{rr} + c_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + c_3 \varepsilon_{zz} - \beta_{10} T, \\ \sigma_z &= c_3 (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\alpha\alpha}) + c_2 \varepsilon_{zz} - \beta_{20} T, \\ \tau_{\alpha z} &= c_4 \varepsilon_{\alpha z}, \quad \tau_{rz} = c_4 \varepsilon_{rz}, \quad \tau_{r\alpha} = c_5 \varepsilon_{r\alpha}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

შესაბამისად გეომეტრიულ განტოლებებს ექნებათ ასეთი სახე :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_{z\alpha} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial \alpha}.$$

განვიხილავთ ისეთ დრეკად ველს, როდესაც გადაადგილების ვექტორის როტორის  $B_z = c_5 \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)$  მდგენელი მთელ არეში იგივეურად ნულის ტოლია. მაშინ წონასწორობის განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\alpha}{r} = 0, \\ b) \quad & \frac{\partial \tau_{\alpha r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\alpha}}{r} = 0, \\ c) \quad & \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ხოლო



$$\begin{aligned}
a) & \frac{c_3}{c_1} \frac{\partial^2 K}{\partial z^2} + \frac{c_1 c_2 - c_3^2}{c_1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{zr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{z\alpha}}{\partial\alpha} = \frac{c_3 e_1 - c_1 e_3}{c_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \\
& + \frac{c_3 \beta_{20} - c_3 \beta_{10}}{c_1} \frac{\partial T}{\partial z}, \\
b) & r \frac{\partial K}{\partial r} + \frac{\partial(r\tau_{zr})}{\partial z} = 0, \\
c) & \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tau_{z\alpha}}{\partial z} = 0, \\
d) & \frac{\partial(r\tau_{z\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial\alpha} = 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
a) & K = c_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{u}{r} \right] + c_3 \frac{\partial w}{\partial z} - \beta_{10} T, \\
b) & \tau_{zr} = c_4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\
c) & \tau_{z\alpha} = c_4 \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \right).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

გადაადგილების ვექტორის  $u$ ,  $v$  და  $w$  კომპონენტები  $\Psi_1$  და  $\Psi_2$  ფუნქციების საშუალებით ასე გამოვსახოთ:

$$\begin{aligned}
w &= - \frac{\partial}{\partial z} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right) + \frac{1}{c_4} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}, \\
v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right), \\
u &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \Psi_2 + \frac{1}{2c_4} \Psi_1 \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

თუ შევიტანთ (3.7)-ს (3.5a) და (3.6a)-ში, მაშინ მივიღებთ  $\Psi_1$  და  $\Psi_2$  ფუნქციების განსასაზღვრავად სისტემას

$$\begin{aligned}
\Delta_2 \bar{F} + \lambda_0 \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial z^2} &= 0, \\
\Delta_2 \Psi_2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_4}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}, \\
\Delta_2 \Psi_1 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} &= \frac{\gamma_1 \gamma_5 - \gamma_3 \gamma_4}{\gamma_3 \gamma_1^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\text{სადაც } \Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}.$$

ყოველივე ამის შემდეგ, თითქმის ყველაფერი მეორდება ისევე, როგორც წინა პარაგრაფებში და  $\tilde{T}$ ,  $\Psi_1$  და  $\Psi_2$  ფუნქციებისთვის გვექნება

$$\Psi_1(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{1mn} e^{-\tilde{\rho}h} sh\tilde{\rho}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \alpha\right) \Psi_{mn}(r),$$

$$\Psi_2(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{3mn} e^{-\tilde{\rho}h} sh\tilde{\rho}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \alpha\right) \Psi_{mn}(r)$$

$$\tilde{T}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{Tmn} e^{-\tilde{\rho}h} sh\tilde{\rho}z \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha_1} \alpha\right) \tilde{T}_{mn}(r),$$

$$\text{სადაც } \Psi_{mn}(r) = N_m(\mu_n r_0) J_m(\mu_n r) - J_m(\mu_n r_0) N_m(\mu_n r),$$

$$\tilde{T}_{mn}(r) = N_m(\tilde{\mu}_n r_0) J_m(\tilde{\mu}_n r) - J_m(\tilde{\mu}_n r_0) N_m(\tilde{\mu}_n r).$$

$J_m(\mu_n r), N_m(\mu_n r), J_m(\tilde{\mu}_n r), N_m(\tilde{\mu}_n r)$ -ბესელის პირველი და მეორე გვარის ფუნქციებია[95].  $m = \frac{\pi \bar{m}}{\alpha_1}$ ,  $\bar{m} = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\mu_n, \tilde{\mu}_n$  შესაბამისი

ტრანსცედენტული განტოლებების  $n$ -ნომრიანი ამონახსნი.

(4.2) და (4.3) ფორმულების დახმარებით შევადგენთ გამოსახულებებს

$\sigma_z, \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}), \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha})$ -თვის. ამის შემდეგ სასაზღვრო ზედაპირებზე მოცემულ ფუნქციებს დავშლით ფურიე-ბესელის მწკრივებად და გავუტოლებთ სასაზღვრო ზედაპირზე ჩაწერილ  $\sigma_z, \Gamma_1(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha}), \Gamma_2(\tau_{zr}, \tau_{z\alpha})$

გამოსახულებებს. ამის შედეგად უცნობი კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას კვაზიდიაგონალური მატრიცით, რომელიც მეექვსე რიგის  $\Lambda_m$  დიაგონალური ბლოკებისაგან შედგება. ამ სისტემის მატრიცას შესაბამის გარდაქმნებისა და მასშტაბირების შემდეგ აქვს ასეთი სახე

$$\begin{pmatrix} \times & \times & & & & \\ \times & \times & & & & \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}$$

ნახ.11. მატრიცის სახე

$A_{1mn}, A_{2mn}, \tilde{T}_{mn}$  კოეფიციენტების განსაზღვრის შემდეგ მტკიცდება, რომ

მიღებული მწკრივები თანაბრად და აბსოლუტურად კრებადია  $\bar{\Pi}$  არეში; ამგვარად ფილისათვის ამოხსნილია დასმული სასაზღვრო ამოცანა. უნდა აღინიშნოს ისიც, რომ შემოთავაზებული მეთოდით შესაძლებელი განხილული იყოს სხვა სასაზღვრო ამოცანები.

## დასკვნები. ზოგადი თეორიული და პრაქტიკული შედეგები

სადისერტაციო ნაშრომში სხვადასხვა გეომეტრიის სამგანზომილებიანი სასრული პრიზმატული სხეულებისათვის აგებული მათემატიკური მოდელის საფუძველზე შემოთავაზებულია სასაზღვრო ამოცანების შესწავლის და ანალიზის მეთოდები. ამ საკითხების გადასაწყვეტად დისერტაციაში ამოხსნილია შემდეგი ძირითადი ამოცანები:

1. განზოგადებულ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში, ამა თუ იმ სისტემის საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულებისათვის მიღებულია მათემატიკური მოდელი. მრუდწირული პარალელეპიპედისათვის, რომელზეც გარე შემფოთებების გარდა მოქმედებს სტაციონალური ტემპერატურული და ელექტრული ველი მათემატიკური მოდელის ასაგებად გამოყენებულია ნ. ხომასურიძის მეთოდი.
2. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მიღებული მათემატიკური მოდელი მართკუთხა პარალელეპიპედისათვის, როდესაც მის ორ მოპირდაპირე წახნაგზე არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, ხოლო დანარჩენ წახნაგებზე კი სიმეტრიის ან ანტისიმეტრიის პირობები საშუალებას იძლევა ზუსტი ამოხსნების მიღებისა.
3. დამტკიცებულია კლასიკური და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების ეკვივალენტობა. მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობები ამარტივებს შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას.
4. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის სქელი ტრანსტროპული ფილისათვის მიღებულია განმსაზღვრელ განტოლებათა სისტემა.
5. სქელი ფილისათვის განხილულია სპეციალური სახის ამოცანები. კერძოდ განხილულია ფილის ღუნვის ანალოგიური ამოცანები. ნაჩ-

ვენებია, რომ სპეციალური სახის დატვირთვებისათვის სქელი ფილისათვის გვაქვს ღუნვის ანალოგია.

სქელი ფილისათვის განხილული სასაზღვრო ამოცანებისათვის მექანიკური შინაარსით მიღებულია მექანიკური თვალსაზრისით ყურადსაღები შედეგი—გარკვეული სახის მხები დატვირთვებისათვის, ნორმალური დატვირთვის გარეშეც, ადგილი აქვს სქელი ფილის ჩაღუნვის ეფექტს.

6. მიღებული ამოხსნები შეიძლება გამოყენებული იყოს უსასრულო დრეკადი ფენისათვის. მხოლოდ ერთი პირობით, რომ ფენის ზედა და ქვედა სასაზღვრო სიბრტყეებზე მოცემული გარე შეშფოთებები ხასიათდებიან გარკვეული პერიოდულობით.

7. თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილისათვის განხილულია ღუნვის ანალოგიური ამოცანები.

8. მიღებული მეთოდი განზოგადებულია მრავალფენიანი სქელი ფილებისათვის. კერძოდ, განხილულია და მიღებულია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ხუთფენიანი ფილისათვის.

9. ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში საკოორდინატო ზედაპირებით შემოსაზღვრული სხეულისათვის მიღებული მათემატიკური მოდელი განმსაზღვრელი განტოლებებისა და მოდიფიცირებული სასაზღვრო პირობების გამოყენების საშუალებას იძლევა.

10. სისტემური გამოყენება სიმეტრიის და ანტისიმეტრიის პირობების, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შეცვლა მოდიფიცირებული პირობებით, წონასწორობის განტოლებების დივერგენტულ—როტორული ფორმით, სასაზღვრო ამოცანების წარმოდგენა ორი სასაზღვრო ამოცანის სუპერპოზიციის სახით ამარტივებს მათ გადაწყვეტას.

## დამოწმებული ლიტერატურა

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. „Мир“, Москва, 1974.
2. Dafermos C. N. ON the Existence and Asymptotic Stability of Solutions of the Equations of Linear Thermoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968, 19, №4, pp. 241–271.
3. Михлин С. Т. Вариационные методы в математической физике. „Наука“, Москва, 1970.
4. Купрадзе В. Д., Геглия Т. Г., Башелеишвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. „Наука“, Москва, 1970.
5. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Одна форма решения пространственных осесимметричных задач теории упругости при помощи функций комплексного переменного и решения этих задач для сферы. *Прикл. математика и механика*, 1962, 26, № 6.
6. Гузь О. М. Про один метод розв'язування тривимірних лінійних задач механіки суцільного середовища для неканонічних областей. *Доп. АН УРСР. Сер. А.* 1970. № 4.
7. Немиш Ю. Н. О приближенном решении пространственных задач теории упругости для трансверсально - изотропной среды. *Прикладная механика*, 1969, 5, № 8.
8. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. „Высшая школа“, Москва, 1975.
9. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. „Наукова думка“, Киев, 1979.

10. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функции в пространственных задачах теории упругости. „Наукова думка“, Киев, 1979.
11. Абрамян Б. Л., Александров А. Я. Осесимметричные задачи теории упругости. В кн.: Механика твердого тела. „Наука“, Москва, 1966.
12. Neuber Н. Technische Mechanik. Zweiter Teil: Elastostatik und Festigkeitslehre. Berlin, Springer.1971
13. Хан Х. Теория упругости. „Мир“, Москва, 1988.
14. Лурье А.И. Теория упругости. „Мир“, Москва, 1970.
15. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. „Наука“, Москва, 1970.
16. Манджавидзе Г. Ф. Граничные задачи линейного сопряжения и некоторые их приложения. ТГУ, Тбилиси, 1970.
17. Нейбер Г. Концентрация напряжений. Гос. издат. тех-теор. литературы. Москва-Ленинград,1947.
18. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. „Наука“, Ленинград, 1967.
19. Зенкевич О. Метод конечных элементов в механике.,„Мир“, Москва, 1975
20. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград, 1975.
21. Круз Т., Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений. „Мир“, Москва, 1974.
22. Бенерджи П., Баттерфилд Р., Метод граничных элементов в прикладных науках. „Мир“, Москва, 1984.

23. Aquaro G., Sul calcolo delle deformazioni di unto strato sferico elastic. Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. fis., mat. e natur. Sez. 1, 1949, 7, № 2.
24. Chree C., The Equations of an Izotropic Elastic in Polar and Cylindrical Coordinates, Their solution and Application. Trans. Cambridge Philos. Soc., 1889, № 14
25. Dougall J. An analytical Theory of the Equilibrium of an Izotropic Elastic Plate. Trans. Roy. Soc. Edinburg, 1904, № 41.
26. Lam e G., Clapeyron E., Memoire sur l'equilibre interieur des corps solides homogenes. J. riene und angew. Math., 1831, 7, №1/12.
27. Morgan A., Stress distributions within solids bounded by one or two cones. Z. angew. Math. und Phis., 1957, 7, №2.
28. Strenberg E., Eubanks R.A., Sadowsky M. A., On the Axisymmetric Problem of Elasticity Theory for a Region Bounded by Two Concentric Spheres. New York. Proc. 1-st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1952.
29. Strenberg E., Muki R. Steady-state Termal Stresses in an Elastic Cone. Z. angew. Math. and Phis., 1960, 11, №6.
30. Tedone O. Saggio di una teoria generale delle equazioni elastico per un corpo izotropo. Ann. Mat. pura ed appl., 1904, 10, ser. 3a.
31. Tedone O. Sull' equilibrio di un corpo limitato do un cino di rotazione. Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. fis.,mat. e natur. Sez. 1, 1905, 14, № 5.
32. Tedone O., Timpe A. SWpezielle Ausfuehrungen zur Statik elastisher Korper. In: Encyklopedie Math. Wiss. Leipzig: Teubner, 1907, Bd 4.
33. Ляв А. Матматическая теория упругости. Онти, Москва-Ленинград, 1935.
34. Снедон И.Н., Берри Д. С. Класическая теория упругости. Гос.издат.ф.-м. литературы, Москва,1961.
35. Безухов Н. И. Основы теории упругости, платичности и ползучести. „Высшая школа“, Москва, 1968.



36. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двухсвязных областей. Издат. сиб. отд. АН СССР, Новосибирск, 1962.
37. Будаков Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. „Наука“, Москва, 1972.
38. Демидов С. М. Теория упругости. „Высшая школа“, Москва, 1979.
39. Кантарович Л. В., Крылов В. Н. Приближенные методы высшего анализа. „Физматгиз“, Москва-Ленинград, 1962.
40. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. „Высшая школа“, Москва, 1970.
41. Лебедев П. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. Гос. издат. тех.-теор. литературы, Москва, 1955.
42. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, Москва, 1947.
43. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропных тел. „Наука“, Москва, 1977.
44. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. Из-во МГУ, Москва, 1976.
45. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГТТИ, Москва, 1955.
46. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. „Наукова думка“, Киев, 1985.
47. Подилчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. „Наукова думка“, Киев, 1984.
48. Коваленко А. Д. Основы термоупругости, „Наукова думка“, Киев, 1970.
49. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории

- упругости. „Наука“, Москва, 1966.
50. Новацкий В. Теория упругости. „Мир“, Москва, 1975.
51. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. „Наука“, Москва, 1966.
52. Нулер Б. Н. Об однородных решениях теории упругости и соотношении и ортогональности М. А. Шири. (Семинар „Механика деформируемого твердого тела“ под руководством А. И. Лурье) , МТТ, № 2, 1968.
53. Никошин В. С. Задачи теории упругости для неоднородных сред. ВЦ АН СССР, Москва, 1976.
54. Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. „Наука“, Москва, 1966.
55. Бейкер Г., Павлович М.
56. Mathien E/ Theorie de L'elasticite' dts corps solides/. Seconde partie, Paris: Gauthier-Villars, 1890.
57. Оболашвили Е. Н. Эффективное решение некоторых пространственных задач теории упругости. Rev. Roumanie Math. Pures Appl. , № 8, 1966.
58. Башелейшвили М. О. Об одном способе решения третьей и четвертой граничных задач смещения анизотропного упругого тела. Сообщ. АН ГССР, 34, 2, 1964
59. Шерман Д. И. Об одной задаче теории упругости со смешанными однородными условиями. ДАН СССР, т. 114, №4, 1957.
60. Сирадзе З.Ш. Третья граничная задача плоской теории упругости для неоднородных тел. Сообщения АН ГССР, 120, №2, 1985.
61. Хомасуридзе Н. Г. К расчету пологих сферических оболочек. Сообщения АН ГССР, т. , №1, Тбилиси, 1968.

62. Хомасуридзе Н. Г. К преобразованию и решению уравнений пологой круговой сферической оболочки. Сообщения АН ГССР, т. 52 , №2, Тбилиси, 1968.
63. Хомасуридзе Н. Г. О некоторых граничных задачах пологих сферических оболочек. Сообщения АН ГССР, т. 55 , №2, Тбилиси, 1969.
64. Хомасуридзе Н. Г. О граничных условиях типа линии симметрии и антисимметрии для оболочек. Сообщения АН ГССР, т. 60, №1, Тбилиси, 1970.
65. Хомасуридзе Н. Г., Горгидзе Д. А., Жвания И. М. Решение некоторых граничных задач изгиба пластин по технической и уточненной теориям. Труды Института прикладной математики ТГУ „Исследования некоторых уравнений математической физики“, Тбилиси, 1972.
66. Хомасуридзе Н. Г. О решении трехмерных граничных задач безмоментной и моментной теорий упругости. Труды Института прикладной математики ТГУ „Исследования некоторых уравнений математической физики“, Тбилиси, 1972.
67. Хомасуридзе Н. Г. Неотопределенные формы общих решений в теории упругости. Труды Института прикладной математики ТГУ „Исследования некоторых уравнений математической физики“, Тбилиси, 1976.
68. Хомасуридзе Н. Г., Горгидзе Д. А. Общие решения уравнений упругого равновесия для трансформных тел в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Труды Грузинского политехнического института , №9 (279), Тбилиси, 1984.
69. Хомасуридзе Н. Г., Силадзе З.Ш. Об общих представлениях решений для некоторых специально неоднородных плоскодеформированных упругих тел. Труды Института прикладной математики ТГУ „Вопросы прикладной механики“, Выпуск 29, Тбилиси, 1988.

70. Хомасуридзе Н. Г. Решение некоторых граничных задач теории упругости суперпозицией других граничных задач. Аннотации докладов 4-ой международной конференции по дифференциальным уравнениям и их применениям, БНР, Руссе, 13-19 август, 1989.
71. Хомасуридзе Н. Г., Хомасуридзе И. Н. Термоупругое равновесие слабо трансформных многослойных цилиндрических тел. Труды международного симпозиума по проблемам механики сплошных сред. Грузинский технический университет, Тбилиси, 1997.
72. Khomasuridze N. Thermoelastic equilibrium of bodies in generalized cylindrical coordinates. *Georgian Mathematical Journal*, 1998, v.5, №6.
73. Gorgidze D., Ramishvili I., Ozbetelashvili N. Boundary and Boundary-contact problems of Thermo-Electroelasticity in a Spherical Coordinate System. *Applied Mathematics and Mechanics Transactions*, Georgian Technical University, Tbilisi, 2012.
74. Горгидзе Д. А., Сирадзе З. Ш., Озбетелашвили Н. Б. Термоупругое равновесие толстой трансверсально – изотропной плиты. *Строительство*, №4(31), 2013.
75. Озбетелашвили Н. Б., Цицкишвили З. А. Термоупругое равновесие толстой трансверсально – изотропной плиты в цилиндрической системе координат. *Georgian Engineering News*, №1(vol. 69), 2014.
76. Elliott H. A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal anisotropic crystals. *Proc. of the Cambridge philos. soc/ 44*, part 4, 1948.
77. Баблоян Ф. Ф. Об одной задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала. *Изв. АН Ар. ССР, ф.-м.н.* 14, № 4, 1961.
78. Баблоян Ф. Ф. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала. *Изв. АН Ар. ССР, ф.-м.н.* 14, № 4, 1961.
79. Hasano Hideaki, Tsuchiya Hiroyuki, Matsumoto Hiroyuko, Nakahara Ichiro, *trans. Jap. Soc. "Match. Eng"*. A47, № 418, 1981. (Трансверсаль-

но-изотропный полый цилиндр под действием кольцевой радиальной нагрузки)

80. Kasano Hideaki, Matsumoto Hiroyuki, Nakahara Ichiro. A transversally isotropic circular cylinder under concentrated loads. 'Bull. JSME', 23, № 176, 1980.
81. Yogananda C. V. Transversely isotropic cylinders under shrink fits. "Z. angew. Math. und Mech. 50, № 11, 1970.
82. Byrnes F. E., Archer R. R. Orthogonality relations for the end problem for transversally isotropic cylinders. "AIAA Journal", 13, № 3, 1975.
83. Fama M. E., Duncan. Radial eigenfunctions for the elastic circular cylinder. "Quart. J. Math. and Appl. Math", 25, № 4, 1972.
84. Chen W.T. On some problems in transversely isotropic elastic materials. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs. NWA/APM-26 9pp.cll,1965.
85. Ghosh P. R. Torsion of a large thick composite plate under shearing forces applied on two opposite faces, having transverse isotropy. Rev. roumaine sci. techn. Ser. mec.appl.13, № 6, 1968.
86. Mehta Joginder Kumar. The distribution of Thermal stresses around a crack in a semi-infinite elastic solid of transversely isotropic material. Arch. mech. stosowanej, 18, № 6, 1966.
87. Mehta Joginder Kumar. Stress distribution in a thick plate having transverse isotropy. J. Sci. and Engng. Res., 12, №1, 1968.
88. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. „Наука“, Москва, 1986.
89. Партон В. З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. „Наука“, Москва, 1988.
90. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Электроупругость. „Наукова думка“, Киев, 1989.

91. Горгидзе Д. А. Математические модели пьезокерамических элементов систем управления. „Мецниереба“, Тбилиси, 1989.
92. Бермант А. Ф. Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. Физматгиз, Москва, 1958.
93. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т.2. „Наука“, Москва.1967
94. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т.3. „Наука“, Москва.1967.
95. Лаврентьев М.А., Шабат В.В. Методы теории функции комплексного переменного. „Наука“, Москва.1987.
96. Биркгоф Г. Гидротехника. Из-тво иностранной лит., Москва. 1963.
97. ოზბეთელაშვილი ნ. თავისუფლად დაყრდნობილი სქელი ფილის ღუნვის ამოცანები თერმული ველის გათვალისწინებით.Georgian Engineering Newus, № 4(vol.72)2014.