

ზურაბ აბაშიძე

დრეკად-პლასტიკური შებრუნებული ამოცანები

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
2014 წ.

© საავტორო უფლება ზურაბ აბაშიძე, 2014 წ.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ზურაბ აბაშიძის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „დრეკად-პლასტიური ამოცანები ციკლურად სიმეტრიული ხვრელებით შესუსტებული ბრტყელი ფირფიტებისთვის“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის „ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის“ სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი: 1.07.2014

ხელმძღვანელი: ასოც. პროფ. ფიქრია ლურჯკია

რეცენზენტი: ფიზ. მათ. მეცნიერ. დოქტორი, პროფ. ნუგზარ შავლაყაძე

რეცენზენტი: ფიზ. მათ. მეცნიერ. დოქტორი, პროფ. დაზმირ შულაია

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
2014 წელი

ავტორი: ზურაბ აბაშიძე
დასახელება: დრეკად-პლასტიკური შებრუნებული ამოცანები
ფაკულტეტი: ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების
აკადემიური ხარისხი: დოქტორის აკადემიური ხარისხი
სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პროვინების ან ინსტიტუტების მიერ შემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია დრეკად-პლასტიური ამოცანები უსასრულო და სასრული არეებისათვის, რომლებიც შესუსტებული არიან ხვრელებით. ხვრელების კონტურები იმყოფებიან პლასტიურ მდგომარეობაში და პლასტიურობის არე არ ვრცელდება საზღვრის შიგნით. ფირფიტებს გააჩნიათ სხვადასხვა სახის გამოყენება პრაქტიკული მიზნებისათვის. უმეტეს შემთხვევაში გამოიყენება ხვრელების მქონე ფირფიტები, მაგრამ, სასურველია, ხვრელებმა ფირფიტის სიმტკიცე და ზოგადად საიმედოობა არ შეამციროს. აქედან გამომდინარე მნიშვნელოვანია, ხვრელების კონტურების ფორმის შერჩევა ისე, რომ არ მოხდეს ფირფიტების სიმტკიცის მახასიათებლების შემცირება. მოცემულ ნაშრომში განხილულ ამოცანებში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი საკითხი არის სწორედ ხვრელების უცნობი ან ნაწილობრივ უცნობი საზღვრის მოძებნა.

ორი ერთნაირი ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტის შემთხვევაში პლასტიური არე აღძვრისთანავე მოიცავს მხოლოდ ხვრელის კონტურებს. ასეთი თვისება გააჩნიათ თანაბრადმტკიცე კონტურებს, ე.ი. როცა მთელ კონტურზე ტანგენციალური დაძაბულობა მუდმივია. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ ასახვათა მეთოდების გამოყენებით მოძებნილია კონტურების უცნობი საზღვარი და ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა. განხილულია ასევე უსასრულო ფირფიტა, შესუსტებული კვადრატის ფორმის მქონე ერთნაირი ხვრელებით. ასეთი ფირფიტის დატვირთვის შემთხვევაში ხვრელების წვეროებში დაძაბულობებს უჩნდება განსაკუთრებულობა და ამიტომ შესაძლებელია გაჩნდეს ბზარი. თუ განვიხილავთ ასეთივე ფირფიტას, ასეთივე ხვრელებით შესუსტებულს, მხოლოდ წვეროებში თანაბრადმტკიცე კონტურების მქონე ამონაჭრებით, ძაბვების კონცენტრაცია შეიცვლება. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ ასახვათა გამოყენებით ამოცანა მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანამდე და მოძებნილია ხვრელების ამონაჭრების უცნობი კონტურები და დაძაბული მდგომარეობა.

განხილულია ლუნვის ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის ორი ერთნაირი, წვეროებში ამონაჭრების მქონე ხვრელით. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ ასახვათა გამოყენებით ამოცანა მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანამდე.

ნაშრომში განხილულია ასევე სასრული არის შემთხვევებიც. განხილულია წესიერი მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა, შესუსტებული ციკლურად სიმეტრიულად განლაგებული უცნობი საზღვრის მქონე ხვრელებით. ხვრელები ისეა განლაგებული, რომ თითოეული მათგანის კონტური სიმეტრიულია მრავალკუთხედის აპოთემის მიმართ. სწორედ ციკლურად სიმეტრიულობის გამოყენებით ამოცანა მიიყვანება ასეთივე ამოცანამდე, რომელიც განხილულია არა მთლიანი მრავალკუთხედის, არამედ მისი ერთი ნაწილისათვის. ხვრელების

კონტურები აქაც განიხილება თანაბრადმტკიცე და წარმოქმნილი პლასტიური არე, სწორედ ამის გამო, წარმოქმნისთანავე მოიცავს ხვრელის მთლიან კონტურს. მნიშვნელოვანია ისეთი შემთხვევის განხილვა, როცა პლასტიური არე არ ვრცელდება (ვერ აღწევს) ფირფიტის სიღრმეში, სწორედ ამის გამო დასმულ ამოცანაში პლასტიურობის პირობა მოცემულია მხოლოდ ხვრელის კონტურზე. კონფორმული ასახვის გამოყენებით მრავალკუთხედის ის ნაწილი, რომელზეც დაყვანილ იქნა ამოცანა, გადადის ცალადბმულ არეზე ცნობილი საზღვრით, შემდეგ კი კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა მიიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის. მიღებულია ამოცანის ამოხსნა ცხადი სახით და მოძებნილია ხვრელის უცნობი კონტურის განტოლება.

წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტის შემთხვევაში, ზოგადი შემთხვევისაგან განსხვავებით შესაძლებელი ხდება განვიხილოთ ექვსკუთხედის კიდევ უფრო მარტივი ნაწილი. ამ შემთხვევაშიც ამოცანა მიიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის და მიღებულია ამოცანის ამოხსნა ცხადი სახით და ხვრელის უცნობი კონტურის განტოლება.

ამოხსნილია ამოცანა წესიერი მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია ციკლურად სიმეტრიულად განლაგებული უცნობსაზღვრიანი ხვრელებით. ამ შემთხვევაში უკვე განხილულია ხვრელების სხვა განლაგება, მათი კონტურები სიმეტრიული არიან მოცემული წესიერი მრავალკუთხედის რადიუსების მიმართ. მოცემულ შემთხვევაშიც ციკლურად სიმეტრიულობის გამოყენებით განხილულია მრავალკუთხედის ნაწილი. ხვრელების კონტურები იმყოფებიან პლასტიურ მდგომარეობაში, ისე, რომ პლასტიურობა არ ვრცელდება ფირფიტის სიღრმეში. ამოცანა მიყვანილია რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის. დაწერილია ხვრელის უცნობი კონტურის განტოლება და ნაპოვნია კოლოსოვ-მუსხელიშვილის კომპლექსური პოტენციალები, რომლებიც თავის მხრივ განსაზღვრავენ ფირფიტის დამაბულ მდგომარეობას.

სასრული არის ერთი შემთხვევა, რომელიც განხილულია ნაშრომში წარმოადგენს კვადრატის ფორმის ფირფიტას, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის ხვრელით. იმისათვის, რომ არ გაჩნდეს ბზარები ხვრელის წვეროებში კონტურს აქვს ამონაჭრები და სწორედ საზღვრის ეს ნაწილია საძიებელი. სიმეტრიის გათვალისწინებით ამოცანა მიიყვანება უფრო მარტივი არის შემთხვევაზე, ხოლო შემდეგ კონფორმული ასახვის და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა მიიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის. მიღებულია ამოცანის ამოხსნა ცხადი სახით და ასევე საძიებელი კონტურის განტოლება.

Abstract

In the paper there are discussed the elastic-plastic problems for infinite and finite areas, which are weakened by the holes. The outlines of the holes are in plastic state and the area of plasticity doesn't extend within the boundary. The plates are used in different ways for practical purposes. In most cases plates with holes are used, but preferably the holes shouldn't reduce solidity of the plate and generally its reliability. Hence, it's important to choose the shape of the outlines of the holes in such a way that the characteristic features of solidity of the hole outlines were not reduced. Among the problems discussed in the paper one of the most important issues is to find the unknown or partly known boundary of the holes.

In case of the infinite plate being weakened by two similar holes the plastic area involves only the outlines of the hole just at the point. This kind of property has to the equally solid outlines, i.e. when the tangential strain over the whole outline is constant. Applying the theory of functions of complex variables and the methods of conforming reflections we can find the unknown boundary of the outlines and the strain state of the plate. There is also discussed the infinite plate with the similar holes having the shape of the weakened square. In case of a loading on this kind of plate the strains at the tops of holes become specific and that's why it is possible to appear a crack. If we discuss this kind of plate, weakened by the similar holes, but with the clippings having the equally solid outlines at the tops, the concentration of strain will change. Using the theory of functions of complex variables and conforming reflection the problem is brought to the boundary problem of the theory of analytical functions and we can find the unknown outlines of the clippings of the holes and the strained state.

Furthermore, the problem of bending for the infinite plate is discussed, which is weakened by two similar square holes having the clippings at the tops. Using the theory of functions of complex variables and conforming reflection the problem is brought to boundary problem of the theory of analytical functions

In the paper there is also discussed the cases of the finite area. There is discussed the plate having the shape of a regular polygon, which is weakened by the holes having the unknown boundary deployed cyclic symmetrically. The holes are deployed in such a way that the outline of each of them is symmetrical to the apothem of the polygon. Applying cyclic symmetry the problem is brought to the similar problem which is discussed not for the whole polygon but for one of its parts. The outlines of the holes are discussed here too. Due to above mentioned, the equally solid and derived plastic area involves the whole outline of the hole just at the time of emergence. It is important to discuss the case when the plastic area can't reach the depth of the plate, that's why in the problem the condition for the plasticity is shown only on the outline of the hole. By applying the conforming reflection on the part of the polygon, on which the problem was brought down to, it goes to one-sided tied area by the known boundary, and then applying the methods of the theory of functions

of complex variable the problem is brought down to Riemann-Hilbert problem for the unit radius circle. The problem is obtained to be solved in explicit form and the equation of the unknown outline of the hole is found.

In case of the plate having the form of hexagon, in contrast to the general case, it becomes possible to discuss more simple part of the hexagon. As in the previous case the problem is brought to the Riemann-Hilbert problem for the one unit radius circle and explicit solution of the problem and the equation of the unknown outline of the hole are obtained.

There is solved the problem for the plate having the form of the regular hexagon which is weakened by the holes with unknown boundary deployed cyclically symmetrically. In this case there has already been discussed the other deployment of the holes, their outlines are symmetrical to the radiuses of given regular polygon. In the given case applying the cyclic symmetry there is discussed the part of the polygon. The outlines of the holes are in the plastic state in such a way that the plasticity doesn't reach the depth of the plate. The problem is brought to the Riemann –Hilbert problem for the one unit radius circle. There is written the equation of the unknown outline of the hole and found Kolosov-Muskhelishvili complex potentials which define the strained state of the plate.

The finite area is one case discussed in the paper which is the plate having the form of square, which is weakened by the hole having the form of a square. In order the clippings on the tops of the hole not to appear, the outline has the slot and we have to find exactly this slot. Taking the symmetry into account the problem is brought to the case of more simple area, and afterwards applying the methods of conforming reflection and the theory of complex variable functions the problem is brought to Riemann-Hilbert problem for the one unit radius circle. Explicit way of solving the task and the equation of the unknown outline is obtained.

შინაარსი

ნახაზების ნუსხა	9
შესავალი	10
თავი I... ზოგიერთი დამხმარე საკითხი და დებულება	17
1.1. დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი ფორმულა	17
1.2. ფირფიტის ღუნვა	20
თავი II. დრეკად-პლასტიური ამოცანები უსასრულო ფირფიტებისთვის	24
2.1. დრეკად-პლასტიური ამოცანა ორი ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტისათვის	24
2.2. დრეკად-პლასტიური ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის მქონე, წვეროებში მომრგვალებული ორი ერთნაირი ხვრელით	33
2.3. ღუნვის ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის მქონე, წვეროებში მომრგვალებული ორი ერთნაირი ხვრელით	53
თავი III. დრეკად-პლასტიური ამოცანები მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტებისთვის	64
3.1. დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ერთი დრეკად-პლასტიური ამოცანის შესახებ	64
3.2. წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტის შემთხვევა	78
3.3. კვადრატის ფორმის მქონე ფირფიტა შესუსტებულია კვადრატის ფორმისვე ხვრელით	80
3.4. დრეკად-პლასტიური ამოცანა წესიერი n კუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია n ერთნაირი ხვრელით	95
ზოგადი დასკვნები და შედეგები	109
გამოყენებული ლიტერატურა	110
ავტორის მიერ გამოქვეყნებული შრომები	114

ნახაზების ნუსხა

ნახ. 1.	ორი ერთნაირი ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტა	25
ნახ. 2.	კონფორმული ასახვისას ერთმანეთის შესაბამისი არეები	28
ნახ. 3.	კვადრატის ფორმის ხვრელებით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტა	34
ნახ. 4.	წესიერი მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა	65
ნახ. 5.	z სიბრტყის D არე და ζ სიბრტყის D_1 არე	69
ნახ. 6.	წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა	78
ნახ. 7.	კვადრატის ფორმის ფირფიტა, კვადრატის ფორმის ხვრელით	81
ნახ. 8.	ფირფიტის ნაწილი და კონფორმული ასახვისას მისი ანასახი	87
ნახ. 9.	წესიერი მრავალკუთხედი რადიუსებზე განლაგებული ხვრელებით	95
ნახ. 10.	ფირფიტის ნაწილი და მისი შესაბამისი ნახევარწრე	100

შესავალი

თემის აქტუალობა. ფირფიტებს დიდი გამოყენება აქვთ მშენებლობაში, ავიაციაში, მანქანათმშენებლობაში, გემთმშენებლობასა და მრეწველობის მრავალ სხვა დარგში. გამოყენებისას პრაქტიკული მიზნებიდან გამომდინარე ხშირად საჭირო ხდება ფირფიტას ჰქონდეს გარკვეული ფორმის ხვრელი (მაგალითად, წარმოუდგენელია თვითმფრინავი ილუმინატორის გარეშე), რაც ცხადია ცვლის ფირფიტის სიმტკიცეს, კონსტრუქციის საიმედოობა, ეკონომიურობა და მისი სხვა მექანიკური თვისებები მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული მასში შემავალი ფირფიტებისა და ამ ფირფიტების ხვრელების ფორმაზე. ამიტომ ფირფიტისა და ამ ფირფიტის ხვრელის, გარკვეული აზრით, ოპტიმალური ფორმის მოძებნის ამოცანებს დიდი გამოყენებითი მნიშვნელობა აქვთ.

დიდი დატვირთვების შემთხვევაში ფირფიტაში ჩნდება პლასტიური არე, რომელიც სწორედ ხვრელის საზღვრიდან ვრცელდება. აქედან გამომდინარე, ცხადია, დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ფირფიტის ხვრელის ისეთი ფორმის მოძებნას, როდესაც პლასტიური დეფორმაციის აღძვრისას პლასტიურობის არე მოიცავს ხვრელის მთელ კონტურს. ამ პირობებში, როცა საზღვარზე ხახუნი არ გვაქვს და მოქმედებს ნორმალის გასწვრივ მოქმედი ძალები, ნორმალური ტანგენციალური ძაბვა მუდმივია. ასეთი კონსტრუქცია წარმოადგენს თანაბრადმტკიცე კონსტრუქციას.

თანაბრადმტკიცე ხვრელების მქონე კონსტრუქციებს აქვთ ბევრი შესანიშნავი თვისება. მაგალითად, აქვთ ნაკლები წონა არათანაბრადმტკიცე ხვრელების მქონე ანალოგიურ კონსტრუქციებთან შედარებით. ამრიგად, თანაბრადმტკიცე ხვრელების ამოცანები წარმოადგენს ფორმების ოპტიმალურად შერჩევის ამოცანებს.

მამასადამე, დრეკად-პლასტიური ამოცანების გამოკვლევა აქტუალური პრობლემაა და აქვს დიდი პრაქტიკული და თეორიული ინტერესი.

ნაშრომის მიზანი და კვლევის ამოცანა. ზოგიერთი კლასის დრეკად-პლასტიური ამოცანის გამოკვლევა, კერძოდ, ხვრელების მქონე სასრული და

უსასრულო ფირფიტებისათვის დრეკად-პლასტიური ამოცანების ზუსტი და ეფექტური ამონახსნების აგება ციკლური სიმეტრიის შემთხვევაში.

მეცნიერული სიახლე. ნაშრომის მეცნიერული სიახლე მდგომარეობს შემდეგში: მოცემულია წვეროებში ამონაჭრების მქონე კვადრატული ფორმის ხვრელებით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტის დრეკად-პლასტიური ამოცანების ეფექტური ამოხსნები ფირფიტის კუმშვისა და ღუნვის შემთხვევაში, როდესაც ხვრელების ამონაჭრების უცნობი კონტურები იმყოფებიან პლასტიურ მდგომარეობაში და პლასტიურობა არ აღწევს ფირფიტის სიღრმეში. მიღებულია n ერთნაირი ხვრელით შესუსტებული წესიერი n კუთხედის შემთხვევაში დრეკად-პლასტიური ამოცანის ეფექტური ამოხსნა, როდესაც ადგილი აქვს ციკლურ სიმეტრიას. ხვრელების კონტურები პლასტიურ მდგომარეობაშია. მოცემულია წვეროებში ამონაჭრების მქონე კვადრატული ფორმის ერთი ხვრელით შესუსტებული კვადრატული ფირფიტის კუმშვის ამოცანის ეფექტური ამოხსნა, ხვრელის ამონაჭრების კონტურები პლასტიურ მდგომარეობაშია.

კვლევის მეთოდები. ხვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტებისათვის დრეკად-პლასტიური ამოცანები კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ გადასახვათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით დაიყვანება ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანებზე მარტივადბმული არეებისათვის ან კიდევ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის შერეულ სასაზღვრო ამოცანებზე სიბრტყისათვის, რომელიც გაჭრილია წრეწირის რკალების გასწვრივ.

ამოცანები წესიერი n კუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის n ერთნაირი ხვრელით ან კვადრატის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის კვადრატის ფორმისვე ხვრელით დაიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე წრისათვის უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებით.

შედეგების უტყუარობა. მიღებული თეორიული დასკვნები დადასტურებულია მკაცრი მათემატიკური, დედუქციური მსჯელობებით და მტკიცებულებებით.

ნაშრომის სტრუქტურა. სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლისაგან, სამი თავისაგან, ცხრა ქვეთავისაგან ზოგადი დასკვნებისაგან, გამოყენებული ლიტერატურისა და ავტორის მიერ გამოქვეყნებული შრომების სიისაგან.

ლიტერატურის მიმოხილვა. დრეკადობის თეორიისა და დრეკადი პლასტიურობის თეორიის უცნობსაზღვრიან ამოცანებს ეძღვნება, როგორც ჩვენი ისე უცხოელი ავტორების მრავალი ნაშრომი. ამ მიმართულებით ერთ-ერთი პირველი ნაშრომი ეკუთვნის ლ.ა.გალინს [1]. ლ.ა. გალინის მიერ განხილულია დრეკად-პლასტიური ამოცანა წრიული ხვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტისათვის, პლასტიურობის ზონა შედის ფირფიტის სიღრმეში და მისი საზღვარი დრეკად არესთან წარმოადგენს სამიბელ კონტურს. გ.პ. ჩერეპანოვის ნაშრომებში [2-6] მოცემულია ხვრელის კონტურის ფორმის განსაზღვრის ამოცანა უსასრულო სივრცეში, რომელიც იმყოფება არაბრტყელი დეფორმაციის პირობებში. მოითხოვება, რომ პლასტიური არე წარმოშობის მომენტიდანვე მოიცავდეს მთელს კონტურს.

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის შებრუნებული ამოცანები პირველად განხილული იყო გ.პ. ჩერეპანოვის მიერ [7-10]. [10] ნაშრომში მოცემულია ხვრელების მქონე დრეკადი სიბრტყისათვის შებრუნებული ამოცანების დასმა და ამოხსნა. ანალიზურ ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ გადასახვათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა დაიყვანება დირიხლეს ამოცანაზე პარალელური მონაკვეთების გასწვრივ გაჭრილი სიბრტყისთვის. მოცემულია ამოცანების ეფექტური ამოხსნები ერთი, ორი სიმეტრიული და პერიოდულად განლაგებული ხვრელებისათვის.

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის შებრუნებულ ამოცანებს იხილავს ს.ბ. ვიგდერგაუზი [11-12]. ამ ნაშრომებში ამოცანა დაიყვანება ინტეგრალურ განტოლებამდე, რომელიც იხსნება რიცხობრივად. ციკლურად სიმეტრიულობის შემთხვევაში აგებულია თანაბრადმტკიცე კონტურები.

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის შებრუნებული ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნები ხვრელების მქონე დრეკადი სიბრტყისათვის მოცემულია გ.მ.ივანოვის [13-17] შრომებში. [16] ნაშრომში მოცემულია

ერთნაირი მრუდწირული უსასრულო პერიოდული ხვრელებით შესუსტებული დრეკადი სიბრტყის მომენტებით ღუნვის შებრუნებული ამოცანების დასმა და მიახლოებითი ამონახსნები. ამავე ნაშრომში განხილულია შემთხვევა, როდესაც წინასწარ გაჭიმვით ხვრელში ჩადგმულია აბსოლუტურად ხისტი რგოლი.

გ.მ.ივანოვის ნაშრომში [18] მოცემულია ციკლურად სიმეტრიულად განლაგებული ხვრელებით შესუსტებული დრეკადი სიბრტყის ღუნვის შებრუნებული ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნები, როცა ხვრელების ნაპირებსა და უსასრულობაში მოქმედებენ მუდმივი მღუნავი მომენტები.

დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და ღუნვის უცნობსაზღვრიანი ამოცანები თხელი ფირფიტისათვის განხილულია ვ.მ. მირსალიმოვის [19-22], ნ.ვ. ბანიჩუკის [23], შ.ვ. მყავანადის [24-28], გ.ა. კაპანადის [29], Neiber [30], Tvergaard V. [31], G.S.Bjorkman, R.Richards [32] და სხვა ავტორების შრომებში.

სასრული ზომის ფირფიტებისთვის დრეკადობის ბრტყელი თეორიისა და თხელი ფირფიტის ღუნვის შებრუნებული ამოცანები პირველად განხილული იყო რ.დ. ბანცურისა და რ.ბ. ისახანოვის შრომებში [33-36] და რ.დ. ბანცურის შრომებში [37, 38]. კერძოდ, [34]-ში აგებულია ამოცანების ამოხსნები ფირფიტისათვის, რომელთაც გააჩნიათ მრუდწირული ფორმა. მიღებულია ეფექტური ამოხსნები. [37]-ში ამოხსნილია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის შებრუნებული ამოცანა თანაბრადმტკიცე ამონაჭრების მქონე ამოზნექილი მრავალკუთხედებისათვის.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი. პირველ თავში მოყვანილია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის, ფირფიტის ღუნვის მიახლოებითი თეორიისა და პლასტიურობის მათემატიკური თეორიის ის საკითხები, ფორმულები და დამოკიდებულებანი, რომელთაც უშუალო გამოყენება აქვთ მომდევნო თავებში და ძირითადად მათზე დაყრდნობით დასმული ამოცანები მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ცნობილ ამოცანებზე.

მეორე თავში განხილულია დრეკად-პლასტიური და ღუნვის ამოცანები ორი სიმეტრიული ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტისათვის.

§2.1-ში ამოხსნილია დრეკად-პლასტიური ამოცანა ორი ერთნაირი ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტისათვის. ვეძებთ ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას და ხვრელების კონტურების ფორმას იმ პირობით, რომ ხვრელის კონტური იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში და პლასტიურობის არე არ ვრცელდება (არ აღწევს) ფირფიტის სიღრმეში. კონფორმული ასახვისა და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა დაიყვანება ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანამდე. მოძებნილია კონტურების უცნობი საზღვარი და ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა.

§2.2-ში განხილულია დრეკად-პლასტიური ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის მქონე წვეროებში მომრგვალებული ორი ერთნაირი ხვრელით. ხვრელის მომრგვალებული ნაწილი წარმოადგენს საძიებელ კონტურს, რომელიც იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში. მტკიცდება, რომ კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ერთ-ერთი პოტენციალი მუდმივია

$$\Phi(z) = \text{const},$$

მეორე პოტენციალისთვის მიღებულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = b \quad t \in l_1$$

$$\text{Im} e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = 0 \quad t \in l_0$$

სადაც $b = k$, l_1 წარმოადგენს ხვრელების კონტურების უცნობ ნაწილს, ხოლო l_0 ცნობილი წირია. $\alpha(t)$ არის კუთხე OX ღერძსა და t წერტილში კონტურის გარე ნორმალს შორის. $\alpha(t)$ l_1 წირზე უცნობი და l_0 წირზე ცნობილი ფუნქციაა. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ ასახვათა გამოყენებით ამოცანა მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანამდე და მოძებნილია ხვრელების ამონაჭრების უცნობი კონტურები და დაძაბული მდგომარეობა.

§2.3-ში განხილულია ღუნვის ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის ორი ერთნაირი, წვეროებში ამონაჭრების მქონე ხვრელით. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ ასახვათა გამოყენებით ამოცანა მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანამდე.

მესამე თავში განხილულია სასრული არის შემთხვევები.

§3.1-ში განხილულია წესიერი მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა, შესუსტებული ციკლურად სიმეტრიულად განლაგებული უცნობი საზღვრის მქონე ხვრელებით. ხვრელები ისეა განლაგებული, რომ თითოეული მათგანის კონტური სიმეტრიულია მრავალკუთხედის აპოთემის მიმართ. ციკლურად სიმეტრიულობის გამოყენებით ამოცანა მიიყვანება ასეთივე ამოცანამდე, რომელიც განხილულია არა მთლიანი მრავალკუთხედის, არამედ მისი ერთი ნაწილისათვის. წარმოქმნილი პლასტიური არე, წარმოქმნისთანავე მოიცავს ხვრელის მთლიან კონტურს. მნიშვნელოვანია ისეთი შემთხვევის განხილვა, როცა პლასტიური არე არ ვრცელდება (ვერ აღწევს) ფირფიტის სიღრმეში, სწორედ ამის გამო დასმულ ამოცანაში პლასტიურობის პირობა მოცემულია მხოლოდ ხვრელის კონტურზე. კონფორმული ასახვის გამოყენებით მრავალკუთხედის ის ნაწილი, რომელზეც დაყვანილ იქნა ამოცანა, გადადის ცალადბმულ არეზე ცნობილი საზღვრით, შემდეგ კი კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა მიიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის. მიღებულია ამოცანის ამოხსნა ცხადი სახით და მოძებნილია ხვრელის უცნობი კონტურის განტოლება.

§3.2-ში განხილულია წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტის შემთხვევა. ზოგადი შემთხვევისაგან განსხვავებით შესაძლებელი ხდება განვიხილოთ ექვსკუთხედის კიდევ უფრო მარტივი ნაწილი. ამ შემთხვევაშიც ამოცანა მიიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის და მიღებულია ამოცანის ამოხსნა ცხადი სახით და ხვრელის უცნობი კონტურის განტოლება.

§3.3-ში ამოხსნილია დრეკად-პლასტიური ამოცანა კვადრატის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის ხვრელით. იმისათვის, რომ არ გაჩნდეს ბზარები ხვრელის წვეროებში კონტურს აქვს ამონაჭრები და სწორედ საზღვრის ეს ნაწილია საძიებელი. ვეძებთ ამონაჭრების ფორმას და ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას, როცა ამონაჭრების კონტური პლასტიურ მდგომარეობაშია და პლასტიური არე არ ვრცელდება ფირფიტის სიღრმეში. სიმეტრიის გათვალისწინებით ამოცანა მიიყვანება უფრო მარტივი არის შემთხვევაზე, ხოლო შემდეგ კონფორმული ასახვის და კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ამოცანა მიიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის. მიღებულია ამოცანის ამოხსნა ცხადი სახით და საძიებელი კონტურის განტოლება.

§3.4-ში ამოხსნილია ამოცანა წესიერი მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია ციკლურად სიმეტრიულად განლაგებული უცნობსაზღვრიანი ხვრელებით. ამ შემთხვევაში უკვე განხილულია ხვრელების სხვა განლაგება, მათი კონტურები სიმეტრიული არიან მოცემული წესიერი მრავალკუთხედის რადიუსების მიმართ. მოცემულ შემთხვევაშიც ციკლურად სიმეტრიულობის გამოყენებით განხილულია მრავალკუთხედის ნაწილი. ხვრელების კონტურები იმყოფებიან პლასტიურ მდგომარეობაში, ისე, რომ პლასტიურობა არ ვრცელდება ფირფიტის სიღრმეში. ამოცანა მიყვანილია რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე ერთეულრადიუსიანი წრისათვის. დაწერილია ხვრელის უცნობი კონტურის განტოლება და ნაპოვნია კოლოსოვ-მუსხელიშვილის კომპლექსური პოტენციალები, რომლებიც თავის მხრივ განსაზღვრავენ ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას.

ბოლოს, მინდა მადლობა გადავუხადო აწ განსვენებულ ჩემს მასწავლებელსა და სამეცნიერო ხელმძღვანელს, ცნობილ მეცნიერს, ბატონ რეზო ბანცურს ამოცანების დასმისათვის და ათეული წლების მანძილზე გაწეული კონსულტაციებისა და რჩევებისათვის.

თავი I

ზოგიერთი დამხმარე საკითხი და დებულება

ამ თავში მოყვანილია დრეკადობის ბრტყელი თეორიის, ფირფიტის ღუნვის მიახლოებითი თეორიისა და პლასტიურობის მათემატიკური თეორიის ის საკითხები, ფორმულები და დამოკიდებულებანი, რომელთაც უშუალო გამოყენება აქვთ მომდევნო თავებში და ძირითადად რომლებზე დაყრდნობითაც დასმული ამოცანები მიყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის ცნობილ ამოცანებზე.

ქვემოთ მოყვანილი ყველა ფორმულის დამტკიცება განხილულია, შესაბამისად, ნ. მუსხელიშვილის [39] და გ. სავინის [40] ცნობილ მონოგრაფიებში.

1.1. დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი ფორმულა

$z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში დამაბულობის კომპონენტებია σ_x ; σ_y ; τ_{xy} , ხოლო გადაადგილების კომპონენტებია u , v . სხეულის მიერ დაკავებულ S არეში ანალიზური $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციების ან $\Phi(z)$ და $\Psi(z)$ ფუნქციების $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ საშუალებით დამაბულობისა და გადაადგილების კომპონენტები გამოისახება შემდეგი სახით:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z) \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (2)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (3)$$

სადაც μ წარმოადგენს ძვრის მოდულს. $\kappa = 3 - 4\sigma$ ბრტყელი დეფორმაციის შემთხვევაში და $\kappa = \frac{3 - \sigma}{1 + \sigma}$ თხელი ფირფიტის (განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა [39], §26) შემთხვევაში. σ პუასონის კოეფიციენტი.

თუ $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში სხეულის მიერ დაკავებული S არე წარმოადგენს სასრულ მრავლადბმულ არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ მარტივი შეკრული კონტურებით, ისე, რომ L_{m+1} კონტური მოიცავს ყველა დანარჩენს, მაშინ $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ანალიზურ ფუნქციებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=1}^m (X_k + iY_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z) \quad (4)$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{k=1}^m (X_k - iY_k) \ln(z - z_k) + \psi^*(z) \quad (5)$$

სადაც z_k ($k = 1, 2, \dots, m$) წარმოადგენს L_k ($k = 1, 2, \dots, m$) მარტივი შეკრული კონტურით შემოსაზღვრული სასრული არის შიგნით აღებულ ნებისმიერ წერტილს. X_k, Y_k - L_k ($k = 1, 2, \dots, m$) კონტურზე მოქმედი გარე დატვირთვების ნაკრები ვექტორის კომპონენტებია. $\varphi^*(z), \psi^*(z)$ - S არეში ჰოლომორფული ფუნქციებია.

როგორც (4) და (5) ფორმულებიდან ჩანს, თუ ყველა კონტური თავისუფალია დატვირთვისაგან ან მათზე მოქმედი ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია (თითოეულზე ცალ-ცალკე), მაშინ $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ წარმოადგენენ S არეში ცალსახა ჰოლომორფულ ფუნქციებს.

უსასრულო მრავლადბმული არის შემთხვევაში, როდესაც L_{m+1} კონტური არ გვაქვს სხეულის მიერ დაკავებული S არე წარმოადგენს

L_1, L_2, \dots, L_m კონტურებით შემოსაზღვრულ უსასრულო მრავლადბმულ არეს, $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ აქვთ სახე:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi_0(z) \quad (6)$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma' z + \psi_0(z) \quad (7)$$

სადაც X და Y წარმოადგენს S არის საზღვარზე, ან რაც იგივეა L_1, L_2, \dots, L_m კონტურებზე მოქმედი ძალების ნაკრები ვექტორის კომპონენტებს.

$$\operatorname{Re} \Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2) \quad (8)$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2) \cdot e^{-2i\alpha}$$

აქ N_1 და N_2 არის უსასრულობაში მთავარი ძაბვების მნიშვნელობები, ხოლო α წარმოადგენს კუთხეს N_1 -ის შესაბამის მთავარ ღერძსა და OX ღერძს შორის.

თუ S არეში ავიღებთ რაიმე z_0 და z წერტილებს, მაშინ $z_0 z$ რკალზე მოქმედი ძალების მთავარი ვექტორი გამოისახება შემდეგი სახით

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i \int_{z_0}^z (X_n + iY_n) ds + const = i(X + iY) + const \quad (9)$$

სადაც ინტეგრალი აღებულია z_0 და z წერტილების შემაერთებელ ნე-

ბისმიერ რკალზე, რომელიც არ გამოდის S არედან. X_n და Y_n აღნიშნავენ z_0z რკალზე ნორმალის მხრიდან მოქმედ დამაბულობის კომპონენტებს. ნორმალი მიმართულია მარჯვნივ, როცა ვმოძრაობთ დადებითი მიმართულებით, რომელსაც მივყავართ z_0 -დან z წერტილამდე.

(9) ფორმულა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც როცა z_0z წარმოადგენს საზღვრის ნაწილს.

დამაბულობის X_n და Y_n კომპონენტებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) \tag{10}$$

$$Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y)$$

კოორდინატთა სისტემის მობრუნების შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებებს

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_n + \sigma_t \tag{11}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = (\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{tn}) \cdot e^{-2i\alpha}$$

1.2. ფირფიტის ღუნვა

ფირფიტის შუა ზედაპირის მიერ $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში დაკავებული არე აღვნიშნოთ S-ით.

M_x და M_y მღუნავი მომენტები, M_{xy} მგრეხავი მომენტი, N_x და N_y გადამჭრელი ძალები და გადაადგილების u, v კომპონენტები გამოისახებიან S არეში ანალიზური $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ან $\Phi(z) = \varphi'(z)$ და $\Psi(z) = \psi'(z)$ ფუნქციების საშუალებით შემდეგნაირად

$$M_x + M_y = -2D(1 + \sigma) \cdot (\Phi(z) + \overline{\Phi(\overline{z})}) \quad (12)$$

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1 + \sigma) \cdot (\overline{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (13)$$

$$N_x - iN_y = -4D \cdot \Phi'(z) \quad (14)$$

$$u + iv = -\delta(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}) \quad (15)$$

სადაც $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$ ცილინდრული სიხისტეა, E - იუნგის მოდული,

σ - პუასონის კოეფიციენტი, h ფირფიტის სისქეა, δ არის პარამეტრი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$-\frac{h}{2} \leq \delta \leq \frac{h}{2}$$

და გამოსახავს ფირფიტის დეფორმირებულ მდგომარეობაში წერტილის დაშორებას შუა ზედაპირიდან.

თუ $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში ფირფიტის მიერ დაკავებული S არე ცალადბმული არეა, მაშინ $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებია S არეში, ხოლო თუ S არე $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ მარტივი შეკრული კონტურებით შემოსაზღვრული სასრული მრავლადბმული არეა, ისე, რომ L_{m+1} კონტური მოიცავს ყველა დანარჩენს, მაშინ $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციებს აქვთ სახე:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^m (A_k z + a_k) \ln(z - z_k) + \varphi^*(z) \quad (16)$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^m \overline{a_k} \ln(z - z_k) + \psi^*(z)$$

სადაც z_k ნებისმიერი წერტილია $L_k (k=1,2,\dots,m)$ მარტივი შეკრული კონტურით შემოსაზღვრულ არეში. $\varphi^*(z)$ და $\psi^*(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებია S არეში.

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \frac{iP_z}{4D}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x + iM_y}{4D}$$

სადაც P_z და $M_x + iM_y$ აღნიშნავენ k -ური ხვრელის კონტურზე მოქმედი ძალების მთავარ ვექტორსა და მთავარ მომენტს.

უსასრულო მრავლადბმული არის შემთხვევაში სხეულის მიერ დაკავებული S არე წარმოადგენს L_1, L_2, \dots, L_m მარტივი შეკრული კონტურებით შემოსაზღვრულ უსასრულო მრავლადბმულ არეს და $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ფუნქციებს ამ შემთხვევაში აქვთ შემდეგი სახე

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x + iM_y}{4D} \ln z + \Gamma z + \varphi^*(z)$$

(17)

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{M_x - iM_y}{4D} \ln z + \Gamma' z + \psi^*(z)$$

ამას გარდა ამ შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ

$$P_z = 0$$

აქ P_z და $M_x + iM_y$ წარმოადგენენ S არის საზღვარზე ან რაც იგივეა

L_1, L_2, \dots, L_m კონტურებზე (ერთად) მოქმედ ძალთა ნაკრებ ვექტორს და ნაკრებ მომენტს, $\varphi^*(z)$ და $\psi^*(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებია S არეში.

$$\operatorname{Re} \Gamma = -\frac{M_1 + M_2}{4D(1 + \sigma)} \quad (18)$$

$$\Gamma' = \frac{M_1 - M_2}{2D(1 - \sigma)} e^{-2i\alpha}$$

სადაც M_1 და M_2 მთავარი მღუნავი მომენტებია, ხოლო α წარმოადგენს კუთხეს OX ღერძსა და M_1 მთავარი მომენტის შესაბამის მთავარ ღერძს შორის.

თავი II

დრეკად-პლასტიური ამოცანები უსასრულო ფირფიტებისთვის

ამ თავში განხილულია დრეკად-პლასტიური და თხელი ფირფიტის ღუნვის ამოცანები ორი სიმეტრიული ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტებისათვის

2.1. დრეკად-პლასტიური ამოცანა ორი ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტისათვის

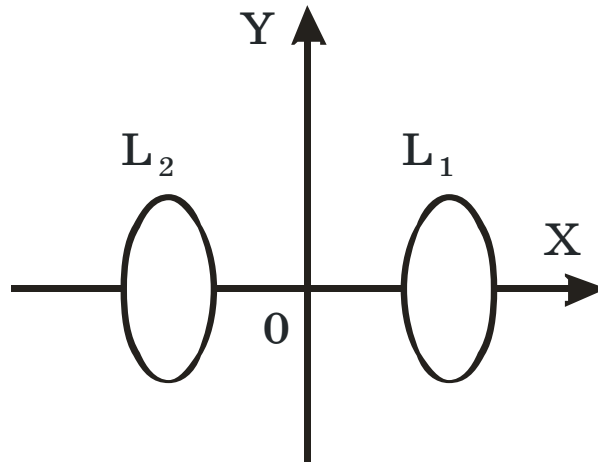
განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული უსასრულო ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია გლუვი კონტურებით შემოსაზღვრული ორი ერთნაირი ხვრელით. ვთქვათ ფირფიტა იმყოფება დაძაბულ მდგომარეობაში უსასრულობაში მთავარი ძაბვებისა და ხვრელების კონტურებზე თანაბრად განაწილებული ნორმალური ძალების მოქმედებით.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: განვსაზღვროთ ხვრელების კონტურების ფორმა და ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა იმ პირობით, რომ ხვრელების კონტურები იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში, პლასტიური მდგომარეობა მოიცავს მხოლოდ ხვრელების კონტურებს და არ აღწევს ფირფიტის სიღრმეში.

აღვნიშნოთ L_1 და L_2 -ით ხვრელების საძიებელი კონტურები და მოვათავსოთ ფირფიტა $z = x + iy$ კომპლექსური სიბრტყის XOY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ისე, რომ L_1 კონტური აისახებოდეს L_2 კონტურში OY ღერძის მიმართ სიმეტრიით. $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში ფირფიტის მიერ დაკავებული არე აღვნიშნოთ S-ით. S არე

წარმოადგენს L_1 და L_2 კონტურებით შემოსაზღვრულ უსასრულო ორადბმულ არეს. დასმული ამოცანის პირობები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\sigma_x^\infty = A, \quad \sigma_y^\infty = B, \quad \tau_{xy}^\infty = 0 \quad (19)$$



ნახაზი 1. ორი ერთნაირი ხვრელით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტა

ხვრელების კონტურებზე მოქმედებს მუდმივი ნორმალური ძაბვები და მხები ძაბვა ნულის ტოლია

$$\sigma_n = -p \quad \text{როცა } t \in L \quad (20)$$

$$\tau_{tn} = 0$$

$$\text{სადაც } L = L_1 \cup L_2$$

ხვრელების კონტურები იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში [41]:

$$(\sigma_t - \sigma_n)^2 + 4\tau_{tn}^2 = 4k^2, \quad t \in L \quad (21)$$

A, B, p და k ცნობილი მუდმივებია. t და n წარმოადგენენ L კონტურის მხეხსა და ნორმალს.

(6) და (7) ფორმულების საფუძველზე (19) პირობის ძალით კოლოსოვი-მუსხელიშვილის კომპლექსურ პოტენციალებს დიდი $|z|$ -თვის ექნება სახე

$$\Phi(z) = \frac{1}{4}(A+B) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (22)$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2}(A-B) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (23)$$

პირველი თავის (1) ფორმულის თანახმად (20), (21) პირობებისა და (11)-ის პირველი ფორმულის ძალით $\Phi(z)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ პირობას

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = \frac{k}{2} - \frac{p}{2}, \quad t \in L \quad (24)$$

(24) პირობის ძალით L კონტურზე მუდმივი იქნება $\operatorname{Im} \Phi(z)$ და ამიტომ $\Phi(z)$ ანალიზური ფუნქცია მუდმივი იქნება S არეში და (22) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Phi(z) = a, \quad a = \frac{1}{4}(A+B) = \frac{k}{2} - \frac{p}{2} \quad (25)$$

ამრიგად, საძიებელი დაგვრჩა S არეში ანალიზური $\Psi(z)$ ფუნქცია და L_1, L_2 კონტურები.

(1)-(3) და (11) ფორმულების საფუძველზე მარტივი გარდაქმნების შედეგად ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს

$$\sigma_n + i\tau_n = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (26)$$

$$2\mu(u'_t - iu'_n) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (27)$$

სადაც $\alpha(t)$ წარმოადგენს t წერტილში L კონტურის გარე ნორმალსა და OX ღერძს შორის კუთხეს

$$u'_t = \frac{du_t}{ds}, \quad u'_n = \frac{du_n}{ds}$$

(26) ტოლობის საფუძველზე (25) ტოლობისა და (20) პირობების გათვალისწინებით $\Psi(z)$ ანალიზური ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = b, \quad t \in L \quad (28)$$

$$\text{სადაც } b = \frac{A+B}{2} + p = k$$

$\alpha(t)$ უცნობი ფუნქციაა, რადგან უცნობია თვითონ L_1 და L_2 კონტურები.

გარდა ამისა (23) ტოლობიდან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში მივიღებთ შემდეგ პირობას

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Psi(z) = \frac{B-A}{2} \quad (29)$$

გავიხსენოთ, რომ S არე სიმეტრიულია OY ღერძის მიმართ. ამასთანავე ჩავთვალოთ, რომ S არე სიმეტრიულია OX ღერძის მიმართაც და თუ

მხედველობაში მივიღებთ გარე დატვირთვების სიმეტრიულობას, ადვილად დავადგენთ, რომ $\Psi(z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$\Psi(z) = \Psi(-z), \quad z \in S \quad (30)$$

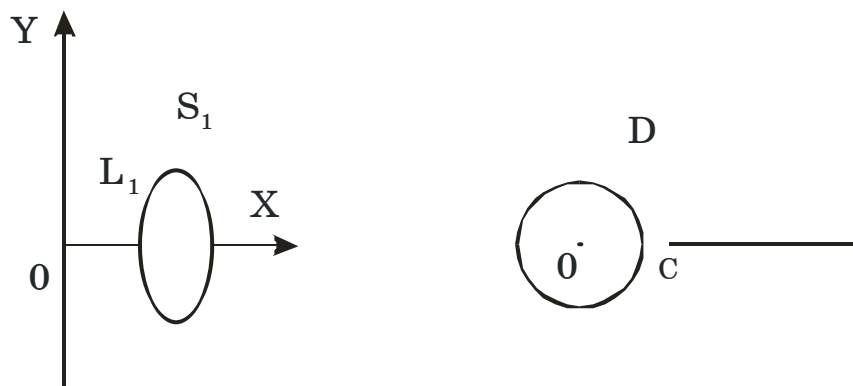
განვიხილოთ S არის მარჯვენა ($\operatorname{Re} z \geq 0$) ნაწილი, აღვნიშნოთ იგი S_1 -ით. (28) და (30) ტოლობების ძალით S_1 არეში ანალიზური $\Psi(z)$ ფუნქცია ამ არის საზღვარზე აკმაყოფილებს პირობებს

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = b, \quad t \in L_1 \quad (31)$$

$$\Psi(t) = \Psi(-t), \quad \operatorname{Re} t = 0 \quad (32)$$

აღვნიშნოთ D -თი ζ სიბრტყის ერთეულრადიუსიანი წრეხაზის გარე არე, გაჭრილი ნამდვილი ღერძის გასწვრივ $\zeta = c$ ($c > 1$) წერტილიდან უსასრულობამდე. ვთქვათ S_1 არე კონფორმულად აისახება D არეზე შემდეგი ფუნქციის საშუალებით

$$z = -i\sqrt{\omega(\zeta)} \quad (33)$$



ნახაზი 2. კონფორმული ასახვისას ერთმანეთის შესაბამისი არეები

სადაც $\omega(\zeta)$ ანალიზური ფუნქციაა $|\zeta| > 1$ არეში, $\zeta = c$ წერტილში ხდება ნულის ტოლი და უსასრულოდ დამორებული წერტილის მახლობლობაში ექნება სახე

$$\omega(\zeta) = R \cdot \zeta + O(\zeta^{-1}) \quad (34)$$

(32) და (33) ტოლობების გათვალისწინებით ζ სიბრტყის ჭრილზე ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას

$$\Psi_0^+(\zeta) = \Psi_0^-(\zeta) \quad (35)$$

$$\text{სადაც } \Psi_0(\zeta) = \Psi(-i\sqrt{\omega(\zeta)})$$

(35) ტოლობა ნიშნავს, რომ D არეს ჭრილი $\Psi_0(\zeta)$ ფუნქციისათვის არ წარმოადგენს ნახტომის წირს და მაშასადამე $\Psi_0(\zeta)$ ანალიზური ფუნქციაა $|\zeta| > 1$ არეში.

(33) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციით კონფორმული ასახვის შემთხვევაში გვექნება

$$e^{2i\alpha(t)} = -\frac{\sigma^2 \omega'(\sigma)}{\sqrt{\omega(\sigma)}} \cdot \frac{\overline{\sqrt{\omega(\sigma)}}}{\omega'(\sigma)} \quad (36)$$

სადაც σ წარმოადგენს $|\zeta| = 1$ ერთეულრადიუსიანი წრეხაზის წერტილს.

(36) ტოლობის გათვალისწინებით (28) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$\frac{\sigma^2 \omega'(\sigma)}{\sqrt{\omega(\sigma)}} \cdot \Psi_0(\sigma) = -b \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sqrt{\omega(\sigma)}}, \quad \sigma \in l \quad (37)$$

სადაც l აღნიშნავს $|\zeta|=1$ წრეწირს.

გადავწეროთ (37) ტოლობა შემდეგი სახით:

$$\sigma^2 \omega'(\sigma) \Psi_0(\sigma) \sqrt{\frac{\sigma-c}{\omega(\sigma)}} \cdot \sqrt{\sigma-c} = -b \overline{\omega'(\sigma)} \sqrt{\frac{\sigma-c}{\omega(\sigma)}} \sqrt{\sigma-c} \quad (38)$$

$|\zeta| > 1$ არეში $\zeta = c$ ერთადერთი წერტილია, რომელშიც $\omega(\zeta)$ ანალიზური ფუნქცია ნულს უტოლდება (პირველი რიგის ნულია), ამიტომ $\sqrt{\frac{\zeta-c}{\omega(\zeta)}}$ ფუნქცია ანალიზური იქნება ამ არეში. როგორც ცნობილია, თუ

$F(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta| > 1$ არეში, მაშინ $\overline{F\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ ფუნქცია

ანალიზური იქნება $|\zeta| < 1$ არეში და ამის გამო $\overline{\Psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$, $\overline{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$, $\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$,

$\overline{\sqrt{\frac{1}{\zeta}-c}} \sqrt{\frac{1}{\zeta}-c}$ წარმოადგენენ ანალიზურ ფუნქციებს $|\zeta| < 1$ არეში [42].

შემოვიღოთ $W(\zeta)$ ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$W(\zeta) = \begin{cases} -b \cdot \overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta}-c} \sqrt{\zeta-c}, & |\zeta| < 1 \\ \zeta^2 \Psi_0(\zeta) \cdot \omega'(\zeta) \cdot \sqrt{\frac{\zeta-c}{\omega(\zeta)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta}-c}, & |\zeta| > 1 \end{cases} \quad (39)$$

$W(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta|=1$ ერთეულრადიუსიანი წრის შიგნით და გარეთ და (38) ტოლობის ძალით აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$W^+(\sigma) = W^-(\sigma), \quad \sigma \in l \quad (40)$$

და ამიტომ $W(\zeta)$ წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას მთელს ζ კომპლექსურ სიბრტყეში.

(29), (34), (39) ტოლობების ძალით ადვილად დავადგენთ, რომ $W(\zeta)$ ფუნქციას უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში აქვს მეორე რიგის პოლუსი. ამიტომ მთელს სიბრტყეში ანალიზური და უსასრულობაში მეორე რიგის პოლუსის მქონე $W(\zeta)$ ფუნქცია ლიუვილის განზოგადოებული თეორემის ძალით წარმოადგენს მეორე რიგის პოლინომს

$$W(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 \quad (41)$$

(39) ტოლობაში ჩავსვათ ζ -ს ნაცვლად $\frac{1}{\zeta}$, გადავიდეთ შეუღლებულ

მნიშვნელობებზე და (41) ტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$-b \cdot \omega'(\zeta) \cdot \sqrt{\frac{\zeta-c}{\omega(\zeta)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta}-c} = \bar{C}_0 + \frac{\bar{C}_1}{\zeta} + \frac{\bar{C}_2}{\zeta^2}, \quad |\zeta| > 1$$

მიღებული ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ შემდეგ გამოსახულებაზე

$$\frac{2b}{i} \cdot \sqrt{\zeta-c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta}-c}$$

და 1-დან ζ -მდე ინტეგრებით მივიღებთ

$$z = -i\sqrt{\omega(\zeta)} = \frac{i}{2b} \cdot \int_1^\zeta \frac{\left(\overline{C_0} + \frac{\overline{C_1}}{\zeta} + \frac{\overline{C_2}}{\zeta^2}\right) d\zeta}{\sqrt{\zeta - c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta} - c}} + A_1 \quad (42)$$

სადაც A_1 წარმოადგენს ინტეგრების მუდმივს. თუ გამოვიყენებთ $\omega(c) = 0$ პირობას, გვექნება

$$A_1 = -\frac{i}{2b} \cdot \int_1^c \frac{\left(\overline{C_0} + \frac{\overline{C_1}}{\zeta} + \frac{\overline{C_2}}{\zeta^2}\right) d\zeta}{\sqrt{\zeta - c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta} - c}}$$

(41) ტოლობიდან ადვილად მიიღება C_0 და C_2 მუდმივების გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულები

$$C_0 = \lim_{\zeta \rightarrow 0} W(\zeta) \quad (43)$$

$$C_2 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{W(\zeta)}{\zeta^2}$$

(43) ტოლობებიდან, თუ გავითვალისწინებთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში $\Psi_0(\zeta)$, $\omega(\zeta)$, $\omega'(\zeta)$ ფუნქციების წარმოდგენებს, C_0 და C_2 მუდმივებისათვის ადვილად მივიღებთ

$$C_0 = -ib\sqrt{R \cdot c} \quad (44)$$

$$C_2 = i \cdot \frac{B - A}{2} \sqrt{R \cdot c}$$

C_1 მუდმივის განსასაზღვრავად ვისარგებლოთ ამსახველი ფუნქციის ცალსახობის პირობით, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე:

$$\int_{\gamma} \frac{\left(\overline{C_0} + \frac{\overline{C_1}}{\zeta} + \frac{\overline{C_2}}{\zeta^2} \right) d\zeta}{\sqrt{\zeta - c} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta} - c}} = 0$$

სადაც γ წარმოადგენს ნებისმიერ შეკრულ კონტურს, რომელიც მთლიანად მდებარეობს $|\zeta| > 1$ არეში და საერთო წერტილი არა აქვს ჭრილთან.

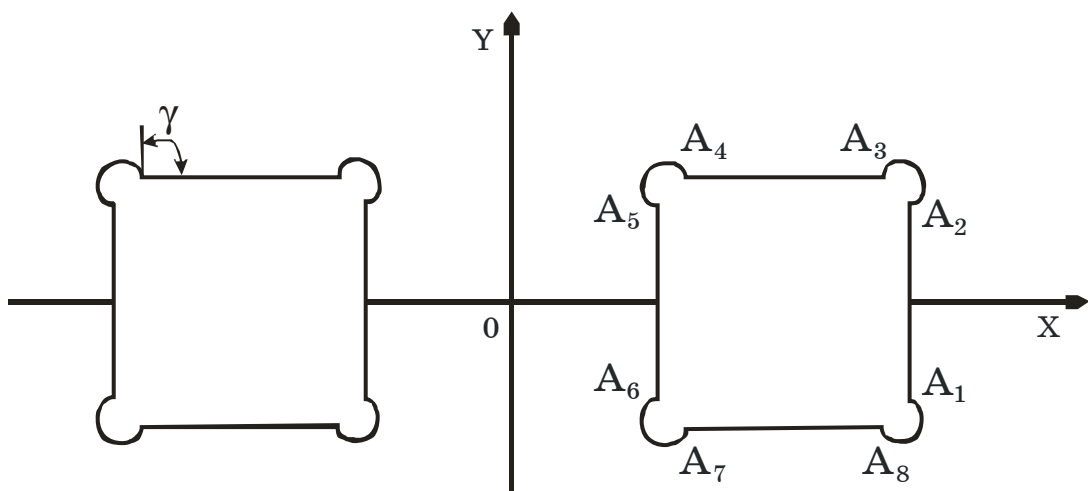
განსასაზღვრავი დაგვრჩა (42) ფორმულაში შემავალი მუდმივებიდან c . ამ მუდმივის გამოსათვლელად საჭიროა დამატებითი პირობა. ასეთ პირობად შეიძლება ავიღოთ ის, რომ დავაფიქსიროთ ხვრელებს შორის მანძილი. ხვრელების კონტურების (42) ფორმულაში შედის მუდმივი c და ე.ი. ამ კონტურების ფორმა და ზომები დამოკიდებულია ხვრელებს შორის მანძილზეც.

2.2. დრეკად-პლასტიური ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის მქონე, წვეროებში მომრგვალებული ორი ერთნაირი ხვრელით.

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული, უსასრულო ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის ორი ერთნაირი ხვრელით. წარმოვიდგინოთ, რომ ხვრელში ჩადგმულია აბსოლუტურად ხისტი კვადრატის ფორმის მქონე შაიბა და ხახუნი უგულუბელვყოთ. ვთქვათ ფირფიტა იკუმშება უსასრულობაში მოქმედი მთავარი ძაბვების მოქმედებით $\sigma_x^\infty = A$, $\sigma_y^\infty = B$. რადგან ხახუნი უგულუბელვყავით და შაიბა აბსოლუტურად ხისტია, ხვრელების კონტურებზე გვექნება პირობები:

$\tau_m = 0, u_n = 0$. ასეთ პირობებში, როგორც ცნობილია, კვადრატის (ხვრელის) წვეროებში დაძაბულობებს ექნებათ განსაკუთრებულობა. ამიტომ, ბუნებრივია, ფირფიტას შეიძლება გაუჩნდეს ბზარი სწორედ ამ წერტილებში.

თუ განვიხილავთ ასეთივე ფირფიტას, მაგრამ კვადრატის წვეროებში გლუვი წირის გასწვრივ ამონაჭრებით, (ნახ. 3) ძაბვების კონცენტრაცია შეიცვლება. ცხადია, რომ ძაბვების განაწილება ხვრელების კონტურის გასწვრივ დამოკიდებულია ამონაჭრების ფორმასა და ზომაზე. განვიხილოთ ასეთი ფირფიტა და $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში მის მიერ დაკავებული არე აღვნიშნოთ S -ით. გლუვი წირები, რომელთა გასწვრივ ამოვჭერთ ფირფიტა, წარმოადგენს საზღვრის საძიებელ ნაწილს და აღვნიშნოთ იგი l_1 -ით, ხოლო საზღვრის დანარჩენი სწორხაზოვანი ნაწილი მოცემული წირებია და აღვნიშნოთ იგი l_0 -ით. ფირფიტის მთელი საზღვარი აღვნიშნოთ l -ით. ვიგულისხმობთ, რომ $z = x + iy$ კომპლექსური სიბრტყის XOY საკოორდინატო სისტემაში l_0 წირი შედგება, შესაბამისად, OX და OY ღერძების პარალელური მონაკვეთებისაგან და S არე სიმეტრიულია საკოორდინატო წრფეების მიმართ.



ნახაზი 3. კვადრატის ფორმის ხვრელებით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტა

ვთქვათ უსასრულობაში მოქმედი ძაბვები მოცემულია

$$\sigma_x^\infty = A, \quad \sigma_y^\infty = B, \quad \tau_{xy}^\infty = 0 \quad (45)$$

უცნობი საზღვარი თავისუფალია დატვირთვისაგან და საზღვრის წრფივ ნაწილზე ნორმალური გადაადგილება მუდმივია.

$$\sigma_n = 0, \quad t \in l_1 \quad (46)$$

$$u_n = const, \quad t \in l_0 \quad (47)$$

მთელს საზღვარზე ხახუნი უგულებელყოფილია

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in l \quad (48)$$

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა:

მოცემულ (45)-(48) პირობებში განვსაზღვროთ მოცემული ფირფიტის ხვრელების კონტურების l_1 ნაწილის ფორმა და ფირფიტის დამაბული მდგომარეობა იმ დამატებითი პირობით, რომ საზღვრის უცნობი l_1 ნაწილი იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში და პლასტიური მდგომარეობა მოიცავს მხოლოდ l_1 წირს და არ ვრცელდება (არ აღწევს) ფირფიტის სიღრმეში.

$$(\sigma_t - \sigma_n)^2 + 4\tau_{tn}^2 = 4k^2, \quad t \in l_1 \quad (49)$$

σ_t ტანგენციალური ნორმალური დამაბულობაა.

(1)-(3) და (11) ფორმულების გათვალისწინებით ელემენტარული გარდაქმნებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს

$$\sigma_n + i\tau_m = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (50)$$

$$2\mu(u'_t - iu'_n) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (51)$$

$\alpha(t)$ წარმოადგენს t წერტილში კონტურის გარე ნორმალსა და OX ღერძს შორის კუთხეს.

პლასტიურობის (49) ტოლობის საფუძველზე (46) და (48) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$4\operatorname{Re}\Phi(z) = \sigma_t + \sigma_n = 2k, \quad t \in l_1$$

თუ გავითვალისწინებთ (47) და (48) პირობებს, (50), (51) ფორმულებიდან მივიღებთ

$$\operatorname{Im}\Phi(z) = 0, \quad t \in l_0$$

(6) და (8) ფორმულების საფუძველზე დასმული ამოცანის შემთხვევაში მივიღებთ ტოლობას

$$\Phi(z) = \Gamma + \Phi_0(z) \quad (52)$$

სადაც $\Phi_0(z)$ წარმოადგენს S არეში ჰოლომორფულ და უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ქრობად ფუნქციას

$$4\operatorname{Re}\Gamma = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty = A + B \quad (53)$$

(52) და (53) ტოლობებზე დაყრდნობით შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\Phi(z)$ ფუნქცია უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემოსაზღვრულია

(მოზრუნების კუთხეს უსასრულობაში უგულებელვყოფთ, რადგან დაძაბულ მდგომარეობაზე გავლენას არ ახდენს).

ამრიგად, S არეში ჰოლომორფული და უსასრულოდ დამორებული წერტილში შემოსაზღვრული $\Phi(z)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ პირობებს:

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = p \quad t \in l_1 \quad (54)$$

$$\operatorname{Im}\Phi(z) = 0 \quad t \in l_0 \quad (55)$$

$$|\Phi(z)| < C|z - A_k|^{-\varepsilon}, \quad (k = 1; 2 \dots 8), \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (56)$$

ფირფიტის სიმეტრიულობის გამო z და -z სიმეტრიულ წერტილებში მოქმედი ძაბვის ვექტორებისათვის გვექნება შემდეგი ტოლობა

$$\vec{F}_n(z) = -\vec{F}_n(-z)$$

ამ ტოლობისა და იმის გათვალისწინებით, რომ სიმეტრიულ წერტილებში ნორმალები უნდა წარმოვიდგინოთ საპირისპიროდ მიმართული, დავასკვნით, რომ $\sigma_n + i\tau_n$ და $u_n + iu_t$ გამოსახულებები ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობენ (სიმეტრიულ წერტილებში). ზემოთქმულისა და (50), (51) ტოლობების ძალით მივიღებთ:

$$\Phi(z) = \Phi(-z) \quad (57)$$

ამოცანის სიმეტრიულობის გამო OY ღერძზე ნორმალური გადაადგილება და მხები ძაბვა ნულის ტოლია და ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ S არის $\operatorname{Re} z > 0$ ნაწილი [43]. აღვნიშნოთ იგი D-თი.

აღვნიშნოთ D_1 -ით ζ სიბრტყის ერთეულრადიუსიანი წრის (ცენტრით $\zeta = 0$ წერტილში) გარე არე, გაჭრილი ნამდვილი ღერძის გასწვრივ $\zeta = m$ წერტილიდან ($m > 1$) უსასრულობამდე.

ვთქვათ $z = -i\sqrt{\omega(\zeta)}$ ფუნქცია კონფორმულად ასახავს D არეს D_1 არეზე, სადაც $\omega(\zeta)$ ანალიზური ფუნქციაა $|\zeta| > 1$ არეში, $\zeta = m$ წერტილში ხდება ნულის ტოლი და დიდი $|\zeta|$ -სთვის აქვს სახე

$$\omega(\zeta) = R \cdot \zeta + O(\zeta^{-1}), \quad R > 0 \quad (58)$$

ამასთან, ვგულისხმობთ, რომ A_k წერტილები აისახებიან a_k წერტილებში $k=1;2\dots 8$.

აღვნიშნოთ l'_0 და l'_1 კონტურების სახეები შესაბამისად L_0 და L_1 -ით. (57) ტოლობის ძალით $\Phi_0(\zeta) = \Phi(-i\sqrt{\omega(\zeta)})$ ფუნქციის მნიშვნელობები D_1 არის ჭრილზე ზევიდან და ქვევიდან ერთმანეთის ტოლია და ამრიგად, $\Phi_0(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta| > 1$ არეში და (54) და (55) ტოლობების ძალით აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\operatorname{Re} \Phi_0(\sigma) = p \quad \sigma \in L_1 \quad (59)$$

$$\operatorname{Im} \Phi_0(\sigma) = 0 \quad \sigma \in L_0 \quad (60)$$

განვსაზღვროთ $\Phi_1(\zeta)$ ფუნქცია შემდეგი წესით

$$\Phi_1(\zeta) = \Phi_0(\zeta) - p$$

და (59), (60) სასაზღვრო პირობები მიიღებს სახეს:

$$\operatorname{Re} \Phi_1(\sigma) = 0 \quad \sigma \in L_1 \quad (61)$$

$$\operatorname{Im} \Phi_1(\sigma) = 0 \quad \sigma \in L_0 \quad (62)$$

განვსაზღვროთ $\Phi_2(\zeta)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\Phi_2(\zeta) = \begin{cases} \Phi_1(\zeta) & |\zeta| > 1 \\ \overline{\Phi_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (63)$$

(62) ტოლობიდან ჩანს, რომ $\Phi_2(\zeta)$ ფუნქციისათვის L_0 წირი არ წარმოადგენს ნახტომის წირს, ხოლო (61) ტოლობის საფუძველზე ვღებულობთ L_1 წირზე შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\Phi_2^+(\sigma) + \Phi_2^-(\sigma) = 0, \quad \sigma \in L_1 \quad (64)$$

სადაც L_1 წარმოადგენს $|\zeta| = 1$ წრეწირზე ერთმანეთისაგან განცალკევებით მდებარე რკალებს.

როგორც ცნობილია, $\omega(\zeta)$ ფუნქცია l წირის A_k ბოლოების მიდამოებში წარმოიდგინება შემდეგი სახით [44]:

$$\omega(\zeta) - A_k = (\zeta - a_k)^{\alpha_k} \cdot \{c_0 + c_1(\zeta - a_k) + \dots\} = (\zeta - a_k)^{\alpha_k} \cdot \omega^*(\zeta)$$

$\omega^*(\zeta)$ ნულისგან განსხვავებულია a_k წერტილების მიდამოებში.

$\gamma = \alpha_k \pi$. კუთხე γ (იხ. ნახ. 3) არ აღემატება $\frac{\pi}{2}$ -ს, ამიტომ $0 < \alpha_k \leq \frac{1}{2}$ და

(56)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$|\Phi_1(\zeta)| < \text{const} |\zeta - a_k|^{-\beta_k}, \quad \text{სადაც } 0 \leq \beta_k < \frac{1}{2}$$

ამრიგად, უნდა ვეძებოთ (64) ამოცანის a_k წერტილებში $\frac{1}{2}$ -ზე დაბალი რიგით შემოუსაზღვრელი ამონახსნები. ასეთ ფუნქციათა კლასში (64) ამოცანას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი, $\Phi_2(\zeta) = 0$ და საბოლოოდ $\Phi(z)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$\Phi(z) = p \tag{65}$$

ამრიგად, საძიებელი დარჩა l_1 კონტური და $\Psi(z)$ ფუნქცია.

(50), (51) ტოლობების ძალით (46)-(48) პირობების საფუძველზე, შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = b \quad t \in l'_1 \tag{66}$$

$$\text{Im} e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = 0 \quad t \in l'_0 \tag{67}$$

სადაც $b = k$, l'_0 და l'_1 შესაბამისად l_0 და l_1 წირების D არეში მდებარე ნაწილებია. l წირის კუთხური წერტილები აღვნიშნოთ A_k -თი ($k=1;2\dots 8$) ისე, როგორც ნახაზზეა. $\alpha(t)$ წარმოადგენს l'_0 -ზე უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას: $\alpha(t) = \alpha_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$ ($k=2n-1$, ანუ k კენტია).

(66), (67) ტოლობებთან ერთად განვიხილოთ l'_0 კონტურის განტოლება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$t - A_k = -i\rho \cdot e^{i\alpha}, \quad \rho = |t - A_k|$$

საიდანაც ვებულობთ

$$\operatorname{Re}(te^{-i\alpha(t)}) = \operatorname{Re}(A(t) \cdot e^{-i\alpha(t)}) \quad (68)$$

სადაც $A(t) = A_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$, $k=1; 3; 5; 7$.

(2) ტოლობიდან (65)-ის გათვალისწინებით უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში მივიღებთ $\Psi^\infty(z) = \frac{B-A}{2}$ და რადგან $\tau_{\max \infty} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} = \frac{B-A}{2}$, უნდა სრულდებოდეს პირობა:

$$\frac{B-A}{2} < k$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში მთელი ფირფიტა აღმოჩნდება პლასტიურ მდგომარეობაში.

$z = -i\sqrt{\omega(\zeta)}$ ფუნქციით D არის D_1 -ზე ასახვისას (66)-(68) ტოლობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)}\Psi_0(\sigma) = b, \quad \sigma \in L_1 \quad (69)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha_0(\sigma)}\Psi_0(\sigma) = 0, \quad \sigma \in L_0 \quad (70)$$

$$\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)}(-i\sqrt{\omega(\sigma)})) = \operatorname{Re}(A_0(\sigma) \cdot e^{-i\alpha_0(\sigma)}), \quad \sigma \in L_0 \quad (71)$$

სადაც $\Psi_0(\sigma) = \Psi(-i\sqrt{\omega(\sigma)})$, $\alpha_0(\sigma) = \alpha(-i\sqrt{\omega(\sigma)})$

$\alpha_0(\sigma)$ უბან-უბან მუდმივი ცნობილი ფუნქციაა L_0 -ზე და უცნობია L_1 კონტურზე:

$$A_0(\sigma) = A_k, \quad \sigma \in a_k a_{k+1} \quad k=1; 3; 5; 7$$

$e^{2ia_0(\sigma)}$ გამოსახულებისთვის გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$e^{2ia_0(\sigma)} = -\frac{\sigma^2 \omega'(\sigma)}{\sqrt{\omega(\sigma)}} \cdot \frac{\sqrt{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}, \quad |\sigma|=1 \quad (72)$$

ფირფიტის ციკლურად სიმეტრიულობის გამო $\Psi(z)$ ანალიზური ფუნქციისათვის გვექნება

$$\Psi(ze^{i\beta}) = e^{-2i\beta} \Psi(z)$$

რომელიც ჩვენს შემთხვევაში, იმის გათვალისწინებით, რომ ციკლურად სიმეტრიულობის კუთხე ტოლია π -ს ($\beta = \pi$), მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\Psi(-z) = \Psi(z), \quad z \in S \quad (73)$$

როდესაც ζ სიბრტყეში ვუახლოვდებით ჭრილის რაიმე σ წერტილს, ზევიდან და ქვევიდან, მაშინ $\Psi_0(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობები იქნება $\Psi_0^-(\sigma)$ და $\Psi_0^+(\sigma)$, რომლებიც თავის მხრივ წარმოადგენენ $\Psi(t)$ -სა და $\Psi(-t)$ -ს და (73) ტოლობის ძალით დავასკვნით, რომ $\Psi_0(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობები ζ სიბრტყის ჭრილზე ზევიდან და ქვევიდან ერთმანეთის ტოლია.

ამრიგად, $\Psi_0(\zeta)$ წარმოადგენს $|\zeta|=1$ წრის გარე არეში ანალიზურ, საზღვარზე უწყვეტად გაგრძელებად და a_k ($k=1;2\dots 8$) წერტილებში $\frac{1}{2}$ -ზე დაბალი რიგით შემოუსაზღვრელ ფუნქციას.

თუ გავითვალისწინებთ (72) დამოკიდებულებას (69) ტოლობაში, (71) ტოლობის ζ ცვლადით დიფერენცირების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\frac{-\sigma^2 i \omega'(\sigma)}{2\sqrt{\omega(\sigma)}} \cdot \Psi_0(\sigma) = b \cdot \frac{i \overline{\omega'(\sigma)}}{2\sqrt{\omega(\sigma)}}, \quad \sigma \in L_1 \quad (74)$$

$$\operatorname{Im} \left(\sigma \cdot \left(\frac{-i \omega'(\sigma)}{2\sqrt{\omega(\sigma)}} \right) \cdot e^{-i\alpha_0(\sigma)} \right) = 0, \quad \sigma \in L_0 \quad (75)$$

$$\operatorname{Im} \left(e^{2i\alpha_0(\sigma)} \Psi_0(\sigma) \right) = 0 \quad \sigma \in L_0 \quad (76)$$

(74) ტოლობას მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} & \frac{-\sigma^2 i \omega'(\sigma)}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma-m}{\omega(\sigma)}} \cdot \Psi_0(\sigma) \cdot \sqrt{\sigma-m} = \\ & = \frac{b i \overline{\omega'(\sigma)}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma-m}{\omega(\sigma)}} \cdot \sqrt{\sigma-m} \end{aligned} \quad (77)$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$F(\zeta) = \begin{cases} \frac{-\zeta^2 i \omega'(\zeta)}{2} \cdot \sqrt{\frac{\zeta-m}{\omega(\zeta)}} \cdot \Psi_0(\zeta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta}-m} & |\zeta| > 1 \\ \frac{b i \overline{\omega' \left(\frac{1}{\zeta} \right)}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{\zeta}-m}{\omega \left(\frac{1}{\zeta} \right)}} \cdot \sqrt{\zeta-m} & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (78)$$

$\zeta = m$ არის ერთადერთი წერტილი $|\zeta| > 1$ არეში, რომელშიაც ამ არეში ანალიზურ $\omega(\zeta)$ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის ნული, ამიტომ $\sqrt{\frac{\zeta - m}{\omega(\zeta)}}$ ფუნქცია ანალიზურია ამ არეში. ამის გამო (78) ტოლობით განსაზღვრული $F(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta| = 1$ წრეწირის შიგნით და გარეთ, ხოლო (77) ტოლობის ძალით $|\zeta| = 1$ წრეწირის ნაწილზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$F^+(\sigma) = F^-(\sigma), \quad \sigma \in L_1 \quad (79)$$

თუ გავითვალისწინებთ (75), (76) და (78) ტოლობებს, L_0 -ზე გაჭრილ სიბრტყეში ანალიზური $F(\zeta)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\operatorname{Im} \frac{F^+(\sigma)}{\sigma} e^{i\alpha} = 0, \quad \sigma \in L_0 \quad (80)$$

$$\operatorname{Im} \frac{F^-(\sigma)}{\sigma} e^{i\alpha} = 0, \quad \sigma \in L_0 \quad (81)$$

ჩვენს შემთხვევაში L_0 წირზე $e^{-2i\alpha}$ ტოლია 1-ის ან -1-ის. ამის გამო, თუ (81) ტოლობას გავამრავლებთ $e^{-2i\alpha}$ გამოსახულებაზე, საბოლოოდ L_0 -ზე გაჭრილ სიბრტყეში ანალიზური $F(\zeta)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ სასაზღვრო პირობებს:

$$\operatorname{Im} \frac{F^+(\sigma)}{\sigma} e^{i\alpha} = 0 \quad \sigma \in L_0 \quad (82)$$

$$\operatorname{Im} \frac{F^-(\sigma)}{\sigma} e^{-i\alpha} = 0 \quad \sigma \in L_0 \quad (83)$$

ან რაც იგივეა

$$\frac{F^+(\sigma)}{\sigma} \cdot e^{i\alpha} = \sigma \cdot \overline{F^+(\sigma)} \cdot e^{-i\alpha}, \quad \sigma \in L_0 \quad (84)$$

$$\frac{F^-(\sigma)}{\sigma} \cdot e^{-i\alpha} = \sigma \cdot \overline{F^-(\sigma)} \cdot e^{i\alpha}, \quad \sigma \in L_0 \quad (85)$$

$|\zeta|=1$ წირზე დადებითი მიმართულება ისეა არჩეული, რომ ამ მიმართულებით მოძრაობისას $|\zeta| < 1$ არე რჩება მარცხნივ.

განვსაზღვროთ $F_*(\zeta)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$F_*(\zeta) = \overline{F\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \begin{cases} \frac{i\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{2\zeta^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta} - m} \cdot \overline{\Psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \cdot \sqrt{\zeta - m}, & |\zeta| < 1 \\ \frac{-bi\omega'(\zeta)}{2} \cdot \sqrt{\frac{\zeta - m}{\omega(\zeta)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\zeta} - m}, & |\zeta| > 1 \end{cases} \quad (86)$$

და განვიხილოთ $W(\zeta)$ და $W_*(\zeta)$ ფუნქციები განსაზღვრული შემდეგი ტოლობებით:

$$W(\zeta) = \frac{1}{\zeta} F(\zeta) \quad (87)$$

$$W_*(\zeta) = \overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \quad (88)$$

შემოვიღოთ $\Omega(\zeta)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\Omega(\zeta) = W(\zeta) + W_*(\zeta) \quad (89)$$

$\Omega(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Omega^+(\sigma) = W^+(\sigma) + W_*^+(\sigma) = \frac{1}{\sigma} F^+(\sigma) + \overline{\sigma F^-(\sigma)} \quad (90)$$

$$\Omega^-(\sigma) = W^-(\sigma) + W_*^-(\sigma) = \frac{1}{\sigma} F^-(\sigma) + \overline{\sigma F^+(\sigma)} \quad (91)$$

(79), (90) და (91) ტოლობების საფუძველზე გვექნება

$$\Omega^+(\sigma) = \Omega^-(\sigma), \quad \sigma \in L_1 \quad (92)$$

L_0 წირზე $\Omega(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებისათვის შიგნიდან და გარედან, (84), (85) სასაზღვრო პირობებისა და (90), (91) ტოლობების ძალით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\Omega^+(\sigma) = e^{-2i\alpha} \Omega^-(\sigma), \quad \sigma \in L_0 \quad (93)$$

შემოვიღოთ $T(\zeta)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$T(\zeta) = W(\zeta) - W_*(\zeta) \quad (94)$$

$T(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$T^+(\sigma) = W^+(\sigma) - W_*^+(\sigma) = \frac{1}{\sigma} F^+(\sigma) - \overline{\sigma F^-(\sigma)} \quad (95)$$

$$T^-(\sigma) = W^-(\sigma) - W_*^-(\sigma) = \frac{1}{\sigma} F^-(\sigma) - \overline{\sigma F^+(\sigma)} \quad (96)$$

(79), (95) და (96) ტოლობების გათვალისწინებით $T(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებისათვის გვექნება:

$$T^+(\sigma) = T^-(\sigma) \quad \sigma \in L_1 \quad (97)$$

L_0 წირზე $T(\zeta)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებისათვის შიგნიდან და გარედან, (84), (85) სასაზღვრო პირობებისა და (95), (96) ტოლობების ძალით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$T^+(\sigma) = -e^{-2i\alpha} \cdot T^-(\sigma) \quad \sigma \in L_0 \quad (98)$$

L_0 წირზე $e^{-2i\alpha}$ ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$e^{-2i\alpha} = \begin{cases} 1, & \sigma \in a_1 a_2 \cup a_5 a_6 \\ -1, & \sigma \in a_3 a_4 \cup a_7 a_8 \end{cases} \quad (99)$$

(99) ტოლობის გათვალისწინებით $\Omega(\zeta)$ და $T(\zeta)$ ფუნქციებისთვის, შესაბამისად (93) და (98) სასაზღვრო ტოლობები გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \Omega^+(\sigma) = -\Omega^-(\sigma), & \sigma \in a_3a_4 \cup a_7a_8 \\ \Omega^+(\sigma) = \Omega^-(\sigma), & \sigma \in a_1a_2 \cup a_5a_6 \end{cases} \quad (100)$$

$$\begin{cases} T^+(\sigma) = -T^-(\sigma), & \sigma \in a_1a_2 \cup a_5a_6 \\ T^+(\sigma) = T^-(\sigma), & \sigma \in a_3a_4 \cup a_7a_8 \end{cases} \quad (101)$$

(100), (101) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $\Omega(\zeta)$ ფუნქციისათვის L_0 წირის ნაწილი (კერძოდ $a_1a_2 \cup a_5a_6$) ისევე, როგორც L_1 წირი, არ წარმოადგენს ნახტომის წირს. $T(\zeta)$ ფუნქციისათვის L_0 წირის ნაწილი (კერძოდ $a_3a_4 \cup a_7a_8$) და L_1 წირი ნახტომის წირი არ არის.

ამრიგად, ამოცანა მივიდა L_0 წირის ნაწილზე გაჭრილ ζ სიბრტყეში (ζ სიბრტყე $\Omega(\zeta)$ ფუნქციისათვის გაჭრილია $a_3a_4 \cup a_7a_8$ წირზე, ხოლო $T(\zeta)$ ფუნქციისათვის $a_1a_2 \cup a_5a_6$ წირზე) ანალიზური $\Omega(\zeta)$ და $T(\zeta)$ ფუნქციების მოძებნაზე შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\Omega^+(\sigma) = -\Omega^-(\sigma), \quad \sigma \in a_3a_4 \cup a_7a_8 \quad (102)$$

$$T^+(\sigma) = -T^-(\sigma), \quad \sigma \in a_1a_2 \cup a_5a_6 \quad (103)$$

(78), (86), (87), (88), (89) და (94) ტოლობების ძალით დავასკვნით, რომ საძიებელი $\Omega(\zeta)$ და $T(\zeta)$ ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ დამატებით პირობებს:

$$\Omega(\zeta) = \overline{\Omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \quad (104)$$

$$T(\zeta) = -\overline{T\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \quad (105)$$

(102), (103) ამოცანები წარმოადგენენ წრფივი შეუღლების სასაზღვრო ამოცანის კერძო შემთხვევებს ნაწყვეტი გლუვი სასაზღვრო წირის შემთხვევისათვის. კერძოდ, ამოცანის კოეფიციენტი $G(\sigma) = -1$.

ვეძებთ a_k წერტილებში შემოუსაზღვრელი ამონახსნები, ან რაც იგივეა უნდა ვეძებთ h_0 კლასის ამონახსნები [42].

(102) ამოცანის ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\Omega(\zeta) = \chi_1(\zeta) \cdot P_1(\zeta) \quad (106)$$

სადაც $P_1(\zeta)$ წარმოადგენს პოლინომს, $\chi_1(\zeta)$ იმავე ამოცანის კანონიკური ამონახსნია, რომელსაც ზოგად შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$\chi_1(\zeta) = e^{\gamma(\zeta)} \prod_{k=1}^n (\zeta - a_k)^{\lambda_k} \quad (107)$$

ეს ფორმულა ჩვენს შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$\chi_1(\zeta) = e^{\gamma(\zeta)} (\zeta - a_3)^{\lambda_3} \cdot (\zeta - a_4)^{\lambda_4} \cdot (\zeta - a_7)^{\lambda_7} \cdot (\zeta - a_8)^{\lambda_8}$$

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_3 a_4} \frac{\pi i d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a_7 a_8} \frac{\pi i d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta - a_4}{\zeta - a_3} + \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta - a_8}{\zeta - a_7}$$

$$e^{\gamma(\zeta)} = \left(\frac{\zeta - a_4}{\zeta - a_3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\zeta - a_8}{\zeta - a_7} \right)^{\frac{1}{2}}$$

აქ $\left(\frac{\zeta - a_4}{\zeta - a_3}\right)^{\frac{1}{2}}$ და $\left(\frac{\zeta - a_8}{\zeta - a_7}\right)^{\frac{1}{2}}$ გამოსახულებაში ვგულისხმობთ $a_3 a_4$ და

$a_7 a_8$ რკალებზე გაჭრილ სიბრტყეში იმ ჰოლომორფულ შტოს, რომელიც $\zeta = \infty$ წერტილში ტოლია ერთის.

$$\lambda_3 = \lambda_7 = 0 \quad \lambda_4 = \lambda_8 = -1$$

ამოცანის ინდექსისათვის მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\kappa_1 = -(\lambda_4 + \lambda_8) = 2 \quad (108)$$

h_0 კლასის კანონიკური ამონახსნისათვის საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას

$$\chi_1(\zeta) = \frac{C_1^*}{\sqrt{R_1(\zeta)}} \quad (109)$$

სადაც C_1^* ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ფიქსირებული მუდმივია

$$R_1(\zeta) = (\zeta - a_3) \cdot (\zeta - a_4) \cdot (\zeta - a_7) \cdot (\zeta - a_8) \quad (110)$$

$\frac{1}{\sqrt{R_1(\zeta)}}$ -ს ქვეშ ვგულისხმობთ $a_3 a_4$ და $a_7 a_8$ რკალებზე გაჭრილ

სიბრტყეში ჰოლომორფულ იმ შტოს, რომლის გამლას ζ -ს კლებადი ხარისხების მიხედვით უსასრულოდ დამორებული წერტილის მახლობლობაში აქვს სახე:

$$\frac{1}{\sqrt{R_1(\zeta)}} = \zeta^{-2} + B'_1 \zeta^{-3} + B'_2 \zeta^{-4} + \dots \quad (111)$$

(78), (86), (87) და (89) ტოლობების საფუძველზე ჩანს, რომ $\Omega(\zeta)$ ფუნქციას $\zeta = 0$ და $\zeta = \infty$ წერტილებში აქვს პირველი რიგის პოლუსი. იმის გამო, რომ $\chi_1(\zeta)$ კანონიკური ფუნქციის რიგი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში $-\kappa_1$ -ის ტოლია, (108) ტოლობისა და ზემოთქმულის ძალით მივიღებთ

$$\Omega(\zeta) = \chi_1(\zeta) \cdot \left(\frac{c'_0}{\zeta} + c'_1 + c'_2 \zeta + c'_3 \zeta^2 + c'_4 \zeta^3 \right) \quad (112)$$

(104) ტოლობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $c'_0, c'_1, c'_2, c'_3, c'_4$ მუდმივები შებმულნი არიან პირობებით:

$$c'_0 = \overline{c'_4}$$

$$c'_1 = \overline{c'_3} \quad (113)$$

$$c'_2 = \overline{c'_2}$$

ანალოგიური მსჯელობით (103) ამოცანისათვის მივიღებთ:

$$\chi_2(\zeta) = \frac{C_2^*}{\sqrt{R_2(\zeta)}} \quad (114)$$

სადაც C_2^* ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ფიქსირებული მუდმივია.

$$R_2(\zeta) = (\zeta - a_1) \cdot (\zeta - a_2) (\zeta - a_5) (\zeta - a_6) \quad (115)$$

ამ შემთხვევაშიც $\frac{1}{\sqrt{R_2(\zeta)}}$ -ს ქვეშ ვგულისხმობთ $a_1 a_2$ და $a_5 a_6$ რკალებზე

გაჭრილ სიბრტყეში ჰოლომორფულ იმ შტოს, რომლის გამლასაც უსასრულოდ დამორებული წერტილის მახლობლობაში აქვს სახე:

$$\frac{1}{\sqrt{R_2(\zeta)}} = \zeta^{-2} + B_1'' \zeta^{-3} + B_2'' \zeta^{-4} + \dots \quad (116)$$

$$\kappa_2 = 2 \quad (117)$$

საბოლოოდ საძიებელი $T(\zeta)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ:

$$T(\zeta) = \chi_2(\zeta) \cdot \left(\frac{c_0''}{\zeta} + c_1'' + c_2'' \zeta + c_3'' \zeta^2 + c_4'' \zeta^3 \right) \quad (118)$$

სადაც $c_0'', c_1'', \dots, c_4''$ მუდმივები შებმულნი არიან შემდეგი პირობებით:

$$\begin{aligned} c_0'' &= \overline{c_4''} \\ c_1'' &= \overline{c_3''} \\ c_2'' &= \overline{c_2''} \end{aligned} \quad (119)$$

$\Omega(\zeta)$ და $T(\zeta)$ ფუნქციების (112) და (118) გამოსახულებაში შემავალი $c'_0, c'_1, c'_2, c'_3, c'_4$ და $c''_0, c''_1, c''_2, c''_3, c''_4$ მუდმივების პოვნა შეიძლება, თუ გამოვიყენებთ ფირფიტის საზღვრის წრფივი ნაწილების მოცემულ სიგრძეებს და დავაფიქსირებთ ერთ-ერთ კუთხურ წერტილს.

ამის შემდეგ, რადგან ვიცით $\Omega(\zeta)$ და $T(\zeta)$ ფუნქციები, (78), (87), (89) და (94) ტოლობების ძალით ვიპოვიან $F(\zeta)$ ფუნქციას. გვეცოდინება რა

$F(\zeta)$ ფუნქცია (78) და (86) ტოლობების დახმარებით ვიპოვით $f'(\zeta)$ და $\Psi_0(\zeta)$ ფუნქციებს ($z = f(\zeta) = -i\sqrt{\omega(\zeta)}$).

ამრიგად, განვსაზღვრეთ $\Psi_0(\zeta)$ და მასთან ერთად $\Psi(z)$ ფუნქცია, რომელიც $\Phi(z)$ ფუნქციასთან ერთად აღწერს ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას.

2.3. ღუნვის ამოცანა უსასრულო ფირფიტისათვის, რომელიც

შესუსტებულია კვადრატის ფორმის მქონე,

წვეროებში მომრგვალებული ორი ერთნაირი ხვრელით

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული, უსასრულო ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის მქონე ორი ხვრელით. ხვრელების კონტურები კვადრატის წვეროებში მომრგვალებულია და წარმოადგენს ფირფიტის საზღვრის საძიებელ ნაწილს. კვადრატის გვერდები (სწორი წირები) მოცემული წირებია და აღვნიშნოთ იგი l_1 -ით, ხოლო საზღვრის საძიებელი ნაწილი აღვნიშნოთ l_2 -ით. ფირფიტის მთელი საზღვარი $l_1 \cup l_2$ აღვნიშნოთ l -ით.

ვთქვათ ფირფიტის შუა სიბრტყე მოთავსებულია $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში და უჭირავს მასში S არე. ვიგულისხმობთ, რომ S არე სიმეტრიულია OX და OY საკოორდინატო ღერძების მიმართ და ამავე დროს l_1 კონტურის შემადგენელი წირები OX და OY ღერძების პარალელურია.

ვთქვათ უსასრულობაში მოქმედი ნორმალურად მღუნავი მომენტები მოცემულია და მგრეხავი მომენტი ნულის ტოლია.

$$M_x^\infty = M_1, \quad M_y^\infty = M_2, \quad M_{xy}^\infty = 0 \quad (120)$$

l კონტურზე გვაქვს შემდეგი პირობები

$$\frac{\partial W(t)}{\partial n} = d_k, \quad d_k = tg\beta_k \quad t \in l_1 \quad (121)$$

$$N(t) = 0, \quad t \in l_1$$

$$M_n(t) = 0, \quad M_{ns}(t) = 0 \quad t \in l_2 \quad (122)$$

$$N(t) = 0 \quad t \in l_2$$

სადაც n გარე ნორმალია, β_k მუდმივებია (მობრუნების კუთხეები), $N(t)$ წარმოადგენს გადამჭრელ ძალას, $M_n(t)$ ნორმალურად მღუნავი მომენტი, $M_{ns}(t)$ მგრეხავი მომენტი. t კონტურის წერტილია. $W(x; y)$ წარმოადგენს ფირფიტის ჩალუნვას $(x; y)$ წერტილში.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ფირფიტის ჩალუნვა და საზღვრის უცნობი ნაწილი, l_2 წირი იმ პირობით, რომ მასზე ტანგენციალური ნორმალური მომენტი მუდმივი სიდიდეა.

$$M_s(t) = k, \quad t \in l_2 \quad (123)$$

ფირფიტის ღუნვის მიახლოებითი თეორიის თანახმად განსახილველ შემთხვევაში $W(x; y)$ უნდა აკმაყოფილებდეს ბიჰარმონიულ განტოლებას

$$\Delta^2 W = 0, \quad z \in S \quad (124)$$

როგორც ცნობილია, ბიჰარმონიული განტოლების ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით [39]:

$$W(x; y) = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)), \quad z \in S \quad (125)$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\chi(x)$ S არეში ანალიზური ფუნქციებია.

(125) ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\frac{\partial W}{\partial n} = \operatorname{Re} \left(i \frac{\partial \bar{t}}{\partial S} \left(\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} \right) \right), \quad t \in l_1 \quad (126)$$

სადაც $\psi(z) = \chi'(z)$

(126) ტოლობიდან (121) პირობების ძალით, მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha(t)} \left(\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} \right) \right) = d(t), \quad t \in l_1 \quad (127)$$

სადაც $\alpha(t)$ წარმოადგენს კუთხეს t წერტილში l_1 კონტურის ნორმალსა და OX ღერძს შორის. $d(t) = d_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$, $k=1; 3; 5; 7$.

(121) პირობის ძალით, თუ ვისარგებლებთ გადამჭრელი ძალისათვის ცნობილი ფორმულით, მივიღებთ ტოლობას:

$$\operatorname{Re} \left(e^{-i\alpha(t)} \left(\chi \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} \right) \right) = C(t), \quad t \in l_1 \quad (128)$$

სადაც $C(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციის მნიშვნელობაა t წერტილში. $C(t) = C_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$, $k=1; 3; 5; 7$.

$$C_k = \sum_{j=1}^k \sin(\alpha_k - \alpha_j) M_j$$

სადაც ჯამის ნიშანთან შტრიხი აღნიშნავს იმას, რომ ჯამი აიღება j -ს მხოლოდ იმ მნიშვნელობებისათვის, რომელთათვისაც $A_j A_{j+1}$ l_1 კონტურის შემადგენელი წირია.

$$M_j = \int_{S_j}^{S_{j+1}} M_n ds$$

მთავარი მლუნავი მომენტია, რომელიც მოქმედებს $A_j A_{j+1}$ გვერდზე,

$$j = 1; 3; 5; 7. \kappa = \frac{\sigma + 3}{\sigma - 1}, \sigma \text{ პუასონის კოეფიციენტი.}$$

(127) და (128) ტოლობების შეკრებით და შემდეგ S რკალური აბსცისით დიფერენცირებით მივიღებთ შემდეგ პირობას:

$$\operatorname{Im} \varphi'(t) = 0, \quad t \in l_1 \quad (129)$$

ვისარგებლოთ შემდეგი ცნობილი ფორმულით:

$$M_n + M_s = M_x + M_y = -2D(1 + \sigma)(\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)}) \quad (130)$$

სადაც M_x და M_y მლუნავი მომენტებია, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \sigma^2)}$ ფირფიტის ცილინდრული სიხისტეა, E იუნგის მოდულია.

(130) ფორმულის საფუძველზე (122) და (123) პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ შემდეგ პირობას l_2 კონტურზე:

$$\operatorname{Re} \varphi'(t) = \frac{k}{-4D(1 + \sigma)}, \quad t \in l_2$$

იგივე (130) ფორმულიდან (120) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ პირობას უსასრულოდ დამორებული წერტილში:

$$\operatorname{Re} \varphi'(t) = \frac{M_1 + M_2}{-4D(1 + \sigma)} = \text{const}$$

ამრიგად, S არეში ჰოლომორფული და უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემოსაზღვრული $\varphi'(t)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\operatorname{Im} \varphi'(t) = 0, \quad t \in l_1$$

$$\operatorname{Re} \varphi'(t) = \frac{k}{-4D(1+\sigma)}, \quad t \in l_2$$

მიღებული ამოცანის ამონახსნს იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi'(t)$ შემოსაზღვრულია, ექნება შემდეგი სახე:

$$\varphi(z) = P \cdot z \quad (131)$$

$$\text{სადაც } P = -\frac{k}{4D(1+\sigma)}$$

საძიებელი დარჩა l_2 კონტური და $\psi(z)$ ფუნქცია.

ვისარგებლოთ გადამჭრელი ძალისათვის ცნობილი ფორმულით:

$$N(t) = -D(\Delta W)_x \quad (132)$$

სადაც t წარმოადგენს OX ღერძის წერტილს.

ფირფიტის სიმეტრიულობის გამო OY ღერძის მიმართ შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$W(x; y) = W(-x; y) \quad (133)$$

(132) და (133) ტოლობების ძალით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$N(0; y) = 0 \quad (134)$$

ე. ი. გადამჭრელი ძალა OY ღერძზე ნულის ტოლია.

(133) ტოლობის ძალით ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას:

$$W_x(x; y) = -W_x(-x; y) \quad (135)$$

ე. ი. გამოდის, რომ

$$W_x(0; y) = -W_x(0; y)$$

სადაც ტოლობის მარცხენა მხარე წარმოადგენს $\lim W_x(x; y)$, როცა ვუახლოვდებით სიმეტრიის ღერძს, ასევე $-W_x(0; y) = \lim (-W_x(x; y))$.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$W_x(0; y) = 0$$

ამრიგად, შუა ზედაპირის სიბრტყეში $\operatorname{Re} z = 0$ წრფეზე, შუა ზედაპირის ნორმალის OX ღერძის მიმართ არ მოხრუნდება.

ფირფიტის სიმეტრიულობის გამო OX ღერძის მიმართ გვექნება შემდეგი დამოკიდებულება:

$$W(x; y) = W(x; -y)$$

აქედან კი მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$W_y(x; y) = -W_y(x; -y)$$

საიდანაც გამოდის

$$W_y(x;0) = -W_y(x;0)$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან კი გამოდის

$$W_y(x;0) = 0$$

ე. ი. შუა ზედაპირის სირტყეში OX ღერძზე შუა ზედაპირის ნორმალი არ მობრუნდება OY ღერძის მიმართ.

$$W(x; y) = W(-x; y) = W(-x; -y)$$

ეს იგივეა

$$W(z) = W(-z)$$

აქ z შუა ზედაპირის სიბრტყის წერტილია.

ამრიგად სრულდება

$$W(ze^{i\beta}) = e^{-2i\beta}W(z)$$

სადაც β ციკლურად სიმეტრიულობის კუთხეა, ჩვენს შემთხვევაში $\beta = \pi$.

ფირფიტა დატვირთული მდგომარეობით სიმეტრიულია OX და OY ღერძების მიმართ და ამიტომ $\vec{F}_n(z)$ სათავის მიმართ π კუთხით (ფირფიტის) მობრუნებისას გადავა $\vec{F}_n(ze^{i\pi})$ ანუ $\vec{F}_n(-z)$ -ში.

$(x; y)$ და $(-x; y)$ სიმეტრიულ წერტილებში მოქმედი ძაბვის ვექტორები სიმეტრიულია, ეს კი ნიშნავს, რომ

$$\sigma_x(x; y) = -\sigma_x(-x; y)$$

როცა $(x; y)$ და $(-x; y)$ OY ღერძის მიმართ სიმეტრიული წერტილები მიისწრაფვიან OY ღერძის ერთსა და იმავე $(0; y)$ წერტილისაკენ მივიღებთ

$$\sigma_x(0; y) = -\sigma_x(0; y) = 0$$

ამრიგად, OY ღერძზე მღუნავი მომენტისათვის მივიღებთ:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = 0$$

$\sigma_x(x; y)$ და $-\sigma_x(-x; y)$ -ში იგულისხმება არა OX-ის მართობულ ზედაპირზე მოქმედი ძაბვის X-ზე გეგმილი, არამედ $(x; y)$ და $(-x; y)$ წერტილებში მოქმედ ძაბვათა კოორდინატები (X, Y) სისტემაში.

ჩვეულებრივი გაგებით თუ ვიგულისხმებთ, მაშინ $(-x; y)$ წერტილში მოქმედ ძაბვას ექნება მინუს ნიშანი, რადგან მოქმედებს ნორმალის (კერძოდ X-ის) საწინააღმდეგო მხრიდან. ამრიგად, $(x; y)$ -ში მოქმედი $\vec{F}_n(x; y)$ ძაბვის σ_n და τ_{ns} კომპონენტები და $(-x; -y)$ -ში მოქმედი $\vec{F}_n(-x; -y)$ ძაბვის $\sigma_n(-x; -y)$, $\tau_{ns}(-x; -y)$ კომპონენტები ტოლია, რადგან $\vec{F}_n(x; y) = -\vec{F}_n(-x; -y)$ ერთსა და იმავე $(n; s)$ კოორდინატთა სისტემაში,

მაგრამ ამ ორ წერტილში $\vec{n}(x; y)$ და $\vec{n}(-x; -y)$ საპირისპიროდ მიმართულები არიან, ე. ი. საბოლოოდ

$$\sigma_n(x; y) = \sigma_n(-x; -y)$$

$$\tau_{ns}(x; y) = \tau_{ns}(-x; -y)$$

და ეს მოგვცემს

$$M_n(z) = M_n(-z)$$

$$M_{ns}(z) = M_{ns}(-z)$$

ან რაც იგივეა

$$M_n(ze^{i\pi}) = e^{-2i\pi} M_n(z)$$

$$M_{ns}(ze^{i\pi}) = e^{-2i\pi} M_{ns}(z)$$

ე. ი. OY ღერძზე მდუნავი და მგრეხავი მომენტები ნულის ტოლია და იგივე OY ღერძზე ნორმალის X-ის მიმართ მობრუნება $W_x(0; y) = 0$, ამიტომ შეგვიძლია განვიხილოთ $\text{Re } z > 0$ ნახევარსიბრტყე და აღვნიშნოთ იგი S_1 -ით. ამოცანის ციკლურად სიმეტრიულობის გამო გვექნება

$$\Psi(ze^{i\pi}) = e^{-2i\pi} \Psi(z), \text{ ან რაც იგივეა } \Psi(z) = \Psi(-z) \quad (136)$$

ვისარგებლოთ შემდეგი ცნობილი ფორმულით:

$$(1-\sigma)d(\kappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)})=M_n+i\int_{S_1}^S Nds \quad (137)$$

(131) ტოლობისა და (122) პირობის გათვალისწინებით (137) ფორმულიდან მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t)=P(1-\kappa), \quad t \in l'_2 \quad (138)$$

სადაც $\Psi(z)=\psi'(z)$, ხოლო l'_2 წარმოადგენს l_2 კონტურის S_1 არეში მდებარე ნაწილს.

(127) ტოლობა (131)-ის გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\operatorname{Re}(e^{-i\alpha(t)}(2Pt+\overline{\psi'(t)}))=d(t), \quad t \in l'_1 \quad (139)$$

სადაც l'_1 წარმოადგენს l_1 კონტურის S_1 არეში მდებარე ნაწილს.

(139) ტოლობის დიფერენცირებით S რკალური აბსცისით საბოლოოდ მივიღებთ $\Psi(t)$ ფუნქციისათვის შემდეგ სასაზღვრო პირობას l'_1 კონტურზე

$$\operatorname{Im}e^{2i\alpha(t)}\Psi(t)=0, \quad t \in l'_1 \quad (140)$$

$l'_1 \cup l'_2$ -ის კუთხური წერტილები აღვნიშნოთ A_k -თი, $k=1; 2; \dots; 8$ ისე, როგორც ნახ. 3-ზეა ნაჩვენები.

l'_1 კონტურის t წერტილისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$t-A_k=-i\rho \cdot e^{i\alpha_k}, \quad \rho=|t-A_k|$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ l'_1 კონტურის შემდეგ განტოლებას:

$$\operatorname{Re}(t \cdot e^{-i\alpha(t)}) = \operatorname{Re}(A(t) \cdot e^{-i\alpha(t)}) \quad (141)$$

სადაც $\alpha(t)$ l'_1 კონტურზე უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა. $\alpha(t) = \alpha_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$ ($k = 2n - 1$ ანუ k კენტი), $A(t) = A_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$ (k აქაც კენტი).

ამრიგად, თუ განვიხილავთ (141) ტოლობას ზემოთ მიღებულ (138) და (140) ტოლობებთან ერთად, $\Psi(z)$ ფუნქციისათვის გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = b, \quad t \in l'_2 \quad (142)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = 0, \quad t \in l'_1 \quad (143)$$

$$\operatorname{Re}(t \cdot e^{-i\alpha(t)}) = \operatorname{Re}(A(t) \cdot e^{-i\alpha(t)}), \quad t \in l'_1 \quad (144)$$

$$\text{სადაც } b = P \cdot (1 - \kappa)$$

ამრიგად, მივიღეთ წინა 2.2. პარაგრაფში განხილული ამოცანის ანალოგიური ამოცანა.

თავი III

დრეკად-პლასტიური ამოცანები მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტებისთვის

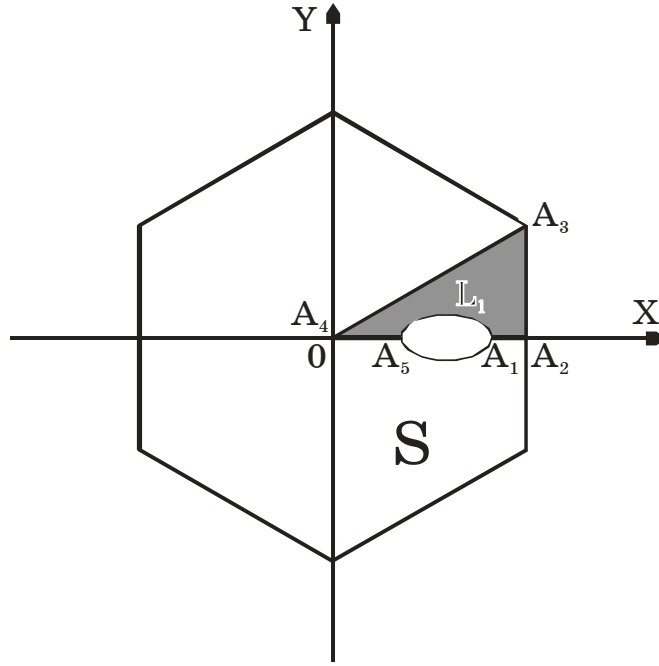
მესამე თავში განხილულია დრეკად-პლასტიური ამოცანები მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტებისთვის, როცა ფირფიტა შესუსტებულია ციკლურად სიმეტრიულად განლაგებული ხვრელებით.

3.1. დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ერთი დრეკად-პლასტიური ამოცანის შესახებ

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული, წესიერი n კუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია n ერთნაირი ხვრელით ისე, რომ ამ ხვრელების კონტურები სიმეტრიულები იყოს მრავალკუთხედის აპოთემების მიმართ.

მოვათავსოთ ფირფიტა $z = x + iy$ კომპლექსური სიბრტყის XOY საკოორდინატო სისტემაში ისე, რომ მრავალკუთხედის ცენტრი დაემთხვეს $z = 0$ წერტილს, ხოლო ერთ-ერთი აპოთემა მდებარეობდეს OX ღერძზე (ნახაზი 4).

აღვნიშნოთ S -ით სიბრტყის ფირფიტის მიერ დაკავებული ნაწილი. L_0 -ით გარე საზღვარი (ტეხილი), ხოლო L -ით შიგნითა საზღვარი (უცნობ კონტურთა ერთობლიობა). $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$, სადაც L_k ($k=1; 2; \dots; n$) k -ური ხვრელის კონტურია. S არე წარმოადგენს მრავალკუთხედის ცენტრის მიმართ ციკლურად სიმეტრიულ არეს, ციკლურად სიმეტრიულობის $\beta = \frac{2\pi}{n}$ კუთხით.



ნახაზი 4. წესიერი მრავალკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: განვსაზღვროთ ხვრელების კონტურების ფორმა და აგრეთვე ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა იმ პირობებით, რომ ფირფიტის მიერ დაკავებული არის გარე საზღვარზე, ანუ L_0 კონტურზე ნორმალური გადაადგილება მუდმივია და მხები ძაბვა ნულის ტოლია

$$u_n = const, \quad t \in L_0 \tag{145}$$

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in L_0$$

ხვრელების კონტურებზე მოქმედებს მუდმივი ნორმალური ძაბვები და მხები ძაბვა ნულის ტოლია

$$\sigma_n = -p, \quad t \in L \tag{146}$$

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in L$$

ხვრელების კონტურები ანუ L საზღვარი იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში, პლასტიური მდგომარეობა მოიცავს მხოლოდ L კონტურს და არ ვრცელდება ფირფიტის სიღრმეში:

$$(\sigma_t - \sigma_n)^2 + 4\tau_{tn}^2 = 4k^2, \quad t \in L \quad (147)$$

σ_t ტანგენციალური ნორმალური დაძაბულობაა.

ჩავთვალოთ, რომ L_k ($k=1; 2; \dots; n$) კონტურები გლუვი წირებია.

ვისარგებლოთ კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ცნობილი ფორმულებით:

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (148)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (149)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (150)$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ წარმოადგენენ S არეში ჰოლომორფულ ფუნქციებს, $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$. u , v წარმოადგენენ გადაადგილების კომპონენტებს კოორდინატთა ღერძებზე. X_x , Y_y , X_y ძაბვის

კომპონენტებია. $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, λ , μ ლამეს მუდმივებია.

(148)-(150) ფორმულებისა და შემდეგი დამოკიდებულებების

$$\sigma_n + \sigma_t = X_x + Y_y \quad (151)$$

$$(\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{tn}) \cdot e^{-2i\alpha(t)} = Y_y - X_x + 2iX_y \quad (152)$$

ძალით მივიღებთ

$$\sigma_t + i\tau_m = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (153)$$

$$2\mu(u'_t - iu'_n) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (154)$$

სადაც $\alpha(t)$ წარმოადგენს t წერტილში კონტურის გარე ნორმალსა და OX ღერძს შორის კუთხეს.

(153), (154) ფორმულებიდან (145)-(147) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = a, \quad t \in L \quad (155)$$

$$\operatorname{Im}\Phi(t) = 0, \quad t \in L_0 \quad (156)$$

$\Phi(z)$ ანალიზური ფუნქციისათვის მიღებულ (155)-(156) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი:

$$\Phi(z) = a, \quad z \in S \quad (157)$$

$$\text{სადაც } a = \frac{\sigma_n + \sigma_t}{4} = \frac{k - p}{2}.$$

ამრიგად, განსასაზღვრავი დაგვრჩა ხვრელის უცნობი კონტურის ფორმა და $\Psi(z)$ ანალიზური ფუნქცია.

დასმული ამოცანის ციკლურად სიმეტრიულობის გამო, მრავალკუთხედის აპოთემებსა და რადიუსებზე ნორმალური გადაადგილება და მხები ძაბვა იქნება ნულის ტოლი, ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ $z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში ფირფიტის მიერ დაკავებული S არის გამუქებული ნაწილი (იხ. ნახ. 4) [43], აღვნიშნოთ იგი D -თი.

(153), (154) ფორმულებისა და (145)-(146) პირობების ძალით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$e^{2i\alpha(t)} \cdot \Psi(t) = b, \quad t \in L'_1 \quad (158)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha(t)} \cdot \Psi(t) = 0, \quad t \in L_2 \quad (159)$$

სადაც $b = k$. L'_1 წარმოადგენს L_1 კონტურის ნაწილს, ხოლო L_2 არის $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ ტეხილი. $\alpha(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა L_2 -ზე: $\alpha(t) = \alpha_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$ ($k=1; 2; 3; 4$), ხოლო L'_1 -ზე უწყვეტი უცნობი ფუნქციაა, რადგან უცნობია თვითონ L'_1 კონტური. $\Psi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია D არის საზღვარზე, გარდა, შესაძლებელია, A_3 წერტილისა, რომლის მახლობლობაშიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$|\Psi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - A_3|^\varepsilon} \quad (160)$$

სადაც $0 \leq \varepsilon < 1$

როცა $t \in L_2$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$t - A_k = i\rho \cdot e^{i\alpha_k}, \quad \rho = |t - A_k|$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\operatorname{Re}(t \cdot e^{-i\alpha(t)}) = \operatorname{Re}(A(t) \cdot e^{-i\alpha(t)}) \quad (161)$$

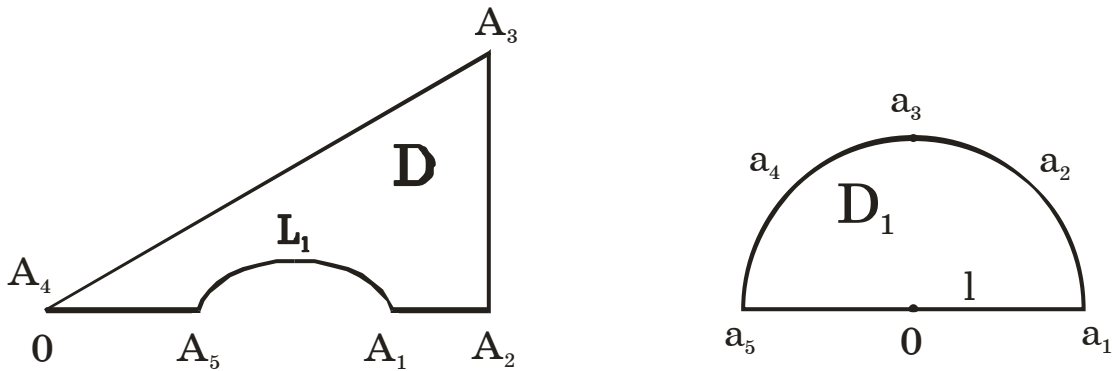
სადაც $A(t)$ წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას და აქვს შემდეგი სახე:

$$A(t) = A_k, \quad \text{როცა } t \in A_k A_{k+1} \quad k=1; 2; 3; 4.$$

(158), (159) ტოლობებთან ერთად განვიხილოთ (161) ტოლობაც, რომელიც წარმოადგენს L_2 კონტურის განტოლებას.

აღვნიშნოთ D_1 -ით ζ სიბრტყის ერთეულრადიუსიანი ნახევარწრე, ცენტრით $\zeta = 0$ წერტილში. $D_1 = \{\zeta : |\zeta| < 1, \text{Im}\zeta > 0\}$.

ვთქვათ $z = \omega(\zeta)$ ფუნქცია კონფორმულად ასახავს $z = x + iy$ სიბრტყის D არეს ζ სიბრტყის D_1 არეზე, ამასთან A_k ($k=1; 2; 3; 4; 5$) წერტილები ასახებიან a_k ($k=1; 2; 3; 4; 5$) წერტილებში.



ნახაზი 5. z სიბრტყის D არე და ζ სიბრტყის D_1 არე

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$a_1 = 1, \quad a_3 = i, \quad a_5 = -1$$

აღვნიშნოთ l_1 -ით და l_2 -ით $z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვისას, შესაბამისად, L'_1 და L_2 კონტურების სახეები.

(158), (159) და (161) ტოლობები მიიღებს სახეს:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)} \Psi_0(\sigma) = b, \quad \sigma \in l_1 \quad (162)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha_0(\sigma)} \Psi_0(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l_2 \quad (163)$$

$$\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)} \omega(\sigma)) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)} A_0(\sigma)), \quad \sigma \in l_2 \quad (164)$$

$$\text{სადაც } \Psi_0(\zeta) = \Psi(\omega(\zeta)), \quad \alpha_0(\sigma) = \alpha(\omega(\sigma))$$

$\alpha_0(\sigma)$ წარმოადგენს l_2 წირზე ცნობილ უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, ხოლო l_1 წირზე უცნობი ფუნქციაა.

$$A_0(\sigma) = A(\omega(\sigma)) = A_k, \quad \text{როცა } \sigma \in a_k a_{k+1}, \quad k=1; 2; 3; 4$$

$z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვის შემთხვევაში $e^{2i\alpha_0(\sigma)}$ გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)} = \frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}, \quad \text{როცა } \sigma \in l_1 \quad (165)$$

უკანასკნელი (165) ტოლობის (162) პირობაში გათვალისწინებით და (164) ტოლობის ζ ცვლადის მიხედვით დიფერენცირებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\overline{\omega'(\sigma)} \Psi_0(\sigma) = b \cdot \omega'(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \quad (166)$$

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \omega'(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l_2 \quad (167)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha_0(\sigma)} \Psi_0(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l_2 \quad (168)$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ დასმული ამოცანა მივიდა ერთეულრადიუსიან ნა-

ხევარწრეში ანალიზური $\omega(\zeta)$ და $\Psi_0(\zeta)$ უცნობი ფუნქციების მოძებნის ამოცანამდე (166)-(168) პირობებით.

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$W(\zeta) = \begin{cases} b\omega'(\zeta) & |\zeta| < 1, \operatorname{Im} \zeta > 0 \\ \overline{\omega'(\bar{\zeta})} \cdot \overline{\Psi_0(\bar{\zeta})} & |\zeta| < 1, \operatorname{Im} \zeta < 0 \end{cases} \quad (169)$$

(166) ტოლობის ძალით $W(\zeta)$ ფუნქცია l_1 წირზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$W^+(\sigma) = W^-(\sigma), \quad \sigma \in l_1$$

და აქედან გამომდინარე, l_1 წირი $W(\zeta)$ ფუნქციისათვის არ იქნება ნახტომის წირი და მაშასადამე, $W(\zeta)$ ანალიზური ფუნქციაა მთელს $|\zeta| < 1$ წრეში.

თუ გავითვალისწინებთ (167) და (168) ტოლობებს, მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{Im} e^{i\alpha_0(\sigma)} \sigma \overline{\omega'(\bar{\sigma})} = 0, \quad \sigma \in l'_2 \quad (170)$$

$$\operatorname{Im} e^{-2i\alpha_0(\sigma)} \overline{\Psi_0(\bar{\sigma})} = 0, \quad \sigma \in l'_2 \quad (171)$$

სადაც l'_2 წარმოადგენს $|\zeta| = 1, \operatorname{Im} \zeta < 0$ ნახევარწრეწირს,

$$\alpha_0(\sigma) = \alpha_0(\bar{\sigma}), \quad \sigma \in l'_2$$

(167), (168), (169), (170), (171) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ:

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \cdot W^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l \quad (172)$$

სადაც l წარმოადგენს $|\zeta|=1$ წრეხაზს.

(172) ტოლობა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \cdot W^+(\sigma) = e^{i\alpha_0(\sigma)} \overline{\sigma \cdot W^+(\sigma)}, \quad \sigma \in l \quad (173)$$

შემოვიღოთ ფუნქცია

$$F(\zeta) = \begin{cases} \zeta \cdot W(\zeta) & |\zeta| < 1 \\ \frac{1}{\zeta} \cdot \overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)} & |\zeta| > 1 \end{cases} \quad (174)$$

$W(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta| < 1$ წრეში და ამიტომ $\overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ ფუნქცია

ანალიზური იქნება $|\zeta| > 1$ არეში.

$F(\zeta)$ ფუნქციის (174) განსაზღვრების გათვალისწინებით (173) თანაფარდობა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F^+(\sigma) = e^{2i\alpha_0(\sigma)} \cdot F^-(\sigma), \quad \sigma \in l \quad (175)$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ $F(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია ერთეულრადიუსიანი წრის შიგნით და გარეთ და აკმაყოფილებს (175) სასაზღვრო პირობას. ეს ამოცანა წარმოადგენს წრფივი შეუღლების

სასაზღვრო ამოცანას ერთეულრადიუსიანი წრისათვის, უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებით.

$\alpha_0(\sigma)$ ფუნქციის განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ კვანძების რაოდენობა (175) ამოცანის შემთხვევაში არის 8.

იმისათვის, რომ (175) ამოცანის ამონახსნი იყოს ამავე დროს რიმან-ჰილბერტის (172) ამოცანის ამონახსნიც, უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობა:

$$F(\zeta) = \overline{F\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \quad (176)$$

ვეძებთ $F(\zeta)$ ამონახსნი ისეთი, რომ

$$F(\zeta) = 0, \quad \text{როცა } \zeta = 0 \quad (177)$$

წრფივი შეუღლების სასაზღვრო (175) ამოცანის ამონახსნს, რომელსაც უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში აქვს სასრული რიგი, ზოგად შემთხვევაში ექნება შემდეგი სახე:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P(\zeta) \quad (178)$$

სადაც $P(\zeta)$ პოლინომია, ხოლო $\chi(\zeta)$ წარმოადგენს იმავე (175) ამოცანის კანონიკურ ამონახსნს, რომელიც წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\chi(\zeta) = e^{\gamma(\zeta)} \prod_{k=1}^8 (\zeta - a_k)^{\lambda_k} \quad (179)$$

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\ln G(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

სადაც $G(\sigma)$ წრფივი შეუღლების (175) ამოცანის კოეფიციენტია, a_k ($k=1; 2; 3; \dots; 8$) კვანძებია და ამ კვანძების მახლობლად ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$e^{\gamma(\zeta)} = (\zeta - a_k)^{\mu_k + i\beta_k} \Omega(\zeta) \quad (180)$$

სადაც $\Omega(\zeta)$ წარმოადგენს ფუნქციას ჰოლომორფულს, a_k ($k=1; 2; 3; \dots; 8$) კვანძის მიდამოს l წირით დაყოფით მიღებულ თითოეულ სექტორში და მისწრაფვის ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $\zeta \rightarrow a_k$ ნებისმიერი გზის გასწვრივ, რომელიც არ გამოდის მოცემული სექტორიდან.

$\mu_k + i\beta_k$ ჩვენს შემთხვევაში ლებულობს შემდეგ სახეს:

$$\mu_k + i\beta_k = \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\pi} \quad (181)$$

(181) თანაფარდობის საფუძველზე მივიღებთ

$$\mu_1 = \mu_5 = 0, \quad \mu_2 = \frac{3}{2}, \quad \mu_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \quad \mu_4 = -1 + \frac{1}{n},$$

$$\mu_6 = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mu_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \quad \mu_8 = -\frac{3}{2}$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან ჩანს, რომ a_1 და a_5 განსაკუთრებული კვანძებია და მათ მიდამოში ამონახსნი იქნება შემოსაზღვრული.

ვეძებთ არაგანსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში შემოუსაზღვრელი ამონახსნები, ანუ h_0 კლასის ამონახსნები. ამისათვის საჭიროა, ადგილი ჰქონდეს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$-1 < \mu_k + \lambda_k < 0 \quad (182)$$

სადაც ზოგად შემთხვევაში

$$-1 < \mu_k + \lambda_k < 1$$

თუ გავითვალისწინებთ (182) პირობებს, მივიღებთ:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0, \quad \lambda_2 = -2,$$

$$\lambda_6 = -1, \quad \lambda_7 = -1, \quad \lambda_8 = 1$$

წრფივი შეუღლების (175) სასაზღვრო ამოცანის კანონიკური $\chi(\zeta)$ ამონახსნის რიგი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ტოლია $-\kappa$, სადაც

$$\kappa = -\sum_{k=1}^8 \lambda_k \quad (183)$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ წრფივი შეუღლების (175) სასაზღვრო ამოცანის ინდექსისათვის

$$\kappa = 3$$

და ამის საფუძველზე წრფივი შეუღლების (175) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისათვის მიღებული (178) ფორმულა ჩვენს შემთხვევაში, თუ ვეძებთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემოსაზღვრულ ამონახსნს, შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P_3(\zeta) \quad (184)$$

სადაც

$$P_3(\zeta) = c_0\zeta^3 + c_1\zeta^2 + c_2\zeta + c_3 \quad (185)$$

იმისათვის, რომ შესრულდეს (176) პირობა, ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ ტოლობებს:

$$c_k = \overline{c_{3-k}} \quad k=1; 2; 3$$

უკანასკნელ ტოლობებთან ერთად თუ გავითვალისწინებთ (177) პირობას, საბოლოოდ $P_3(\zeta)$ პოლინომის (185) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P_3(\zeta) = c_1\zeta^2 + \overline{c_1}\zeta \quad (186)$$

(184) ტოლობიდან (186)-ის გავითვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta)(c_1\zeta^2 + \overline{c_1}\zeta) \quad (187)$$

თუ გავითვალისწინებთ (169) ტოლობას, მივიღებთ:

$$\omega'(\sigma) = \frac{1}{b} \cdot W(\sigma) \quad (188)$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$t = \omega(\sigma) = \frac{1}{b} \cdot \int_{-1}^{\sigma} W(\zeta) d\zeta + C \quad (189)$$

სადაც $\zeta \in l_1$, ე. ი. ინტეგრება ხდება ნამდვილი ღერძის მონაკვეთზე.
(174) და (187) ტოლობების ძალით საბოლოოდ გვექნება:

$$t = \frac{1}{b} \cdot \int_{-1}^{\sigma} \chi(\zeta)(c_1\zeta + \bar{c}_1) d\zeta + C \quad (190)$$

რაც წარმოადგენს საძიებელი კონტურის განტოლებას.

(190) ტოლობაში C გამოვთვალოთ იმ პირობით, რომ $z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვით $a_5 = -1$ წერტილი გადადის A_5 წერტილში.

$$A_5 = \frac{1}{b} \int_{-1}^{-1} \chi(\zeta)(c_1\zeta + \bar{c}_1) d\zeta + C$$

ინტეგრალი შეკრულ წირზე ნულის ტოლია და ამიტომ გვექნება

$$A_5 = C$$

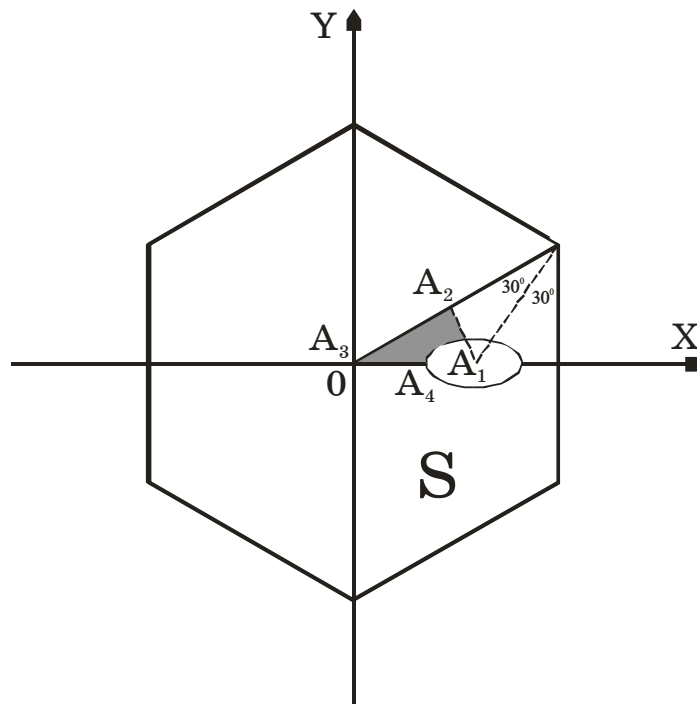
c_1 მუდმივის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ პირობა, რომ $a_3 = i$ წერტილი აისახება A_3 წერტილში, რომელიც დაფიქსირებულია

$$A_3 = \frac{1}{b} \int_{-1}^i \chi(\zeta)(c_1\zeta + \bar{c}_1) d\zeta + C$$

ვიცით რა $\omega(\zeta)$, (169) ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\Psi_0(\zeta)$ და მასთან ერთად $\Psi(z)$ ფუნქცია, რომელიც $\Phi(z)$ ფუნქციასთან ერთად განსაზღვრავს ფირფიტის დამაბულ მდგომარეობას.

3.2. წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტის შემთხვევა

განვიხილოთ 3.1.-ში დასმული ამოცანა იმ კერძო შემთხვევაში, როცა ფირფიტა არის წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე. ზოგადი შემთხვევისაგან განსხვავებით წესიერი ექვსკუთხედის შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ უფრო მარტივი, ნახაზზე 6-ზე გამუქებული ნაწილი.



ნახაზი 6. წესიერი ექვსკუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა

ამ შემთხვევაში (181) ტოლობის ძალით მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\mu_1 = \mu_4 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mu_3 = -\frac{5}{6},$$

$$\mu_5 = \frac{5}{6}, \quad \mu_6 = \frac{1}{2}$$

ამ უკანასკნელი ტოლობებისა და (182) პირობების საფუძველზე გვექნება შემდეგი ტოლობები:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \quad \lambda_5 = -1, \quad \lambda_6 = -1$$

საიდანაც (183) ტოლობის გათვალისწინებით ამოცანის ინდექსისათვის მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\kappa = 2 \tag{191}$$

(191) ტოლობის გათვალისწინებით (178) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P_2(\zeta)$$

სადაც $\chi(\zeta)$ კანონიკური ამონახსნია, რომელიც მოიცემა (179) ფორმულით, ხოლო $P_2(\zeta)$ წარმოადგენს შემდეგ პოლინომს:

$$P_2(\zeta) = c_0 \zeta^2 + c_1 \zeta + c_2$$

(176) და (177) ტოლობების გათვალისწინებით საბოლოოდ ამონახსნი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F(\zeta) = c_1 \cdot \zeta \cdot \chi(\zeta) \tag{192}$$

საძიებელი კონტურის განტოლება კი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$t = \frac{1}{b} \int_{-1}^{\sigma} \chi(\zeta) c_1 \zeta d\zeta + C$$

სადაც $\zeta \in L_1$ და ე. ი. ამ შემთხვევაშიც ინტეგრება ხდება ნამდვილი ღერძის მონაკვეთზე.

3.3. კვადრატის ფორმის მქონე ფირფიტა შესუსტებულია

კვადრატის ფორმისვე ხვრელით

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული, კვადრატის ფორმის მქონე ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია კვადრატის ფორმის ხვრელით. ხვრელის კონტური კვადრატის წვეროებში მომრგვალებულია და წარმოადგენს ფირფიტის საზღვრის საძიებელ ნაწილს. აღვნიშნოთ იგი L_0 -ით. ხვრელის კონტურის დანარჩენი ნაწილი, ე. ი. კვადრატის გვერდები (სწორი ხაზები) მოცემული წირებია და აღვნიშნოთ იგი L_0 -ით. ფირფიტის საზღვრის დარჩენილი ნაწილი (გარეთა კვადრატის საზღვარი) აღვნიშნოთ L_1 -ით.

მოვათავსოთ ფირფიტა $z = x + iy$ კომპლექსური სიბრტყის XOY საკოორდინატო სისტემაში. ვიგულისხმობთ, რომ კვადრატების წრფივი ნაწილები ერთმანეთის პარალელურობა და ფირფიტა სიმეტრიულია საკოორდინატო ღერძების მიმართ.

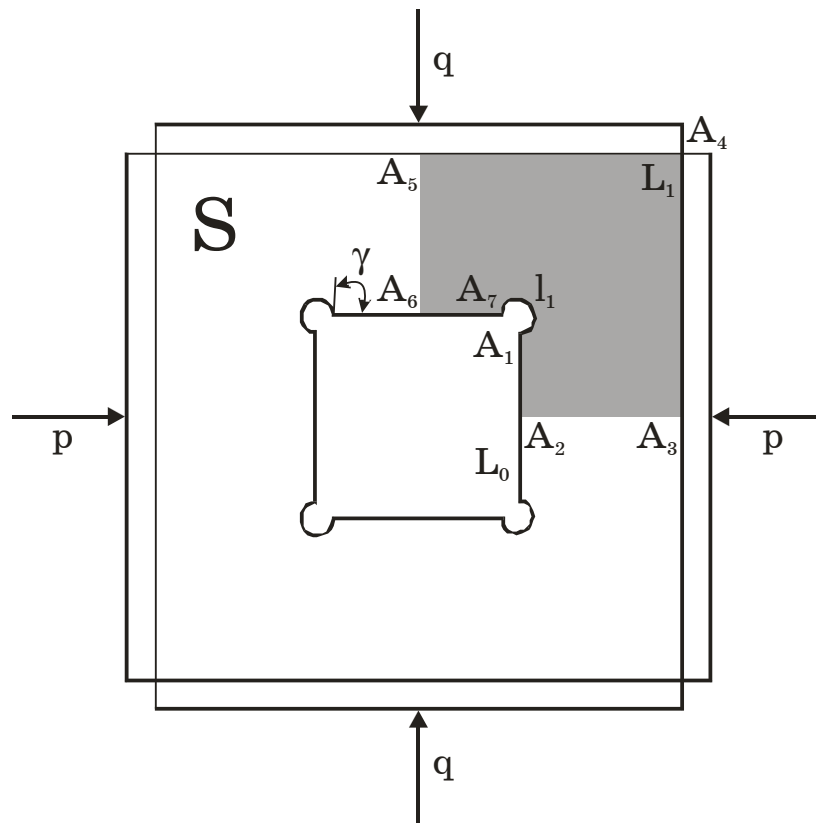
აღვნიშნოთ S-ით სიბრტყის ფირფიტის მიერ დაკავებული ნაწილი. S არე წარმოადგენს $z = 0$ წერტილის მიმართ ციკლურად სიმეტრიულ არეს, ციკლურად სიმეტრიულობის $\beta = \frac{\pi}{2}$ კუთხით.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: განვსაზღვროთ ხვრელის კონტურის უცნობი ნაწილების ფორმა და აგრეთვე ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა იმ პირობებით, რომ ფირფიტის მიერ დაკავებული S არეს

გარე საზღვარზე, ანუ L_1 -ზე ნორმალური გადაადგილება მუდმივია და მხები ძაბვა ნულის ტოლია

$$u_n = const, \quad t \in L_1 \tag{193}$$

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in L_1$$



ნახ. 7. კვადრატის ფორმის ფირფიტა, კვადრატის ფორმის ხვრელით

ხვრელის კონტურის წრფივ ნაწილებზეც, ანუ L_0 კონტურზე ნორმალური გადაადგილება მუდმივია და მხები ძაბვა ნულის ტოლია

$$u_n = const, \quad t \in L_0 \tag{194}$$

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in L_0$$

ხვრელის კონტურის უცნობი ნაწილები თავისუფალია დატვირთვისაგან და მხები ძაბვა საზღვრის ამ ნაწილზეც ნულის ტოლია

$$\sigma_n = 0, \quad t \in l_0 \quad (195)$$

$$\tau_{in} = 0, \quad t \in l_0$$

ფირფიტის საზღვრის უცნობი ნაწილები (l_0 წირი) იმყოფება პლასტიურ მდგომარეობაში, პლასტიური მდგომარეობა მოიცავს მხოლოდ l_0 წირს და არ ვრცელდება (არ აღწევს) ფირფიტის სიღრმეში

$$(\sigma_t - \sigma_n)^2 + 4\tau_{in}^2 = 4k^2, \quad t \in l_0 \quad (196)$$

σ_t ტანგენციალური ნორმალური დამაბულობაა.

ვისარგებლოთ კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულებით [39]:

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (197)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (198)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (199)$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ წარმოადგენს S არეში ჰოლომორფულ ფუნქციებს. $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$. u და v არის გადაადგილების კომპონენტები კოორდინატთა ღერძებზე. X_x , Y_y , X_y წარმოადგენს ძაბვის კომპონენტებს.

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda, \mu \text{ ლამეს მუდმივებია.}$$

(197)-(199) ფორმულებისა და შემდეგი დამოკიდებულებების

$$\sigma_n + \sigma_t = X_x + Y_y \quad (200)$$

$$e^{-2i\alpha(t)}(\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{in}) = Y_y - X_x + 2iX_y \quad (201)$$

ძალით ადვილად მივიღებთ

$$\sigma_n + i\tau_{in} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (202)$$

$$2\mu(u'_t - iu'_n) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(\bar{z})} + e^{-2i\alpha(t)}(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}) \quad (203)$$

სადაც $\alpha(t)$ წარმოადგენს t წერტილში კონტურის გარე ნორმალსა და OX ღერძს შორის კუთხეს.

(202), (203) ფორმულების საფუძველზე, (193)-(196) პირობების გათვალისწინებით, მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = a, \quad t \in l_0 \quad (204)$$

$$\operatorname{Im}\Phi(t) = 0, \quad t \in L_0 \cup L_1 \quad (205)$$

$$\text{სადაც } a = \frac{k}{2}$$

(204)-(205) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi(z) = a, \quad z \in S \quad (206)$$

ამრიგად, საძიებელი დაგვრჩა ხვრელის კონტურის ნაწილის, l_0 წირის ფორმა და $\Psi(z)$ ანალიზური ფუნქცია.

დასმული ამოცანის ციკლურად სიმეტრიულობის გამო OX და OY საკოორდინატო ღერძების იმ ნაწილებზე, რომლებიც S არეში მოექცევიან ნორმალური გადაადგილება და მხები ძაბვა იქნება ნულის ტოლი, ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ S არეს გამუქებული ნაწილი (იხ. ნახ. 7), აღვნიშნოთ იგი D-თი.

(202), (203) ფორმულებიდან (193)-(196) პირობების გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი ტოლობები:

$$e^{2i\alpha(t)} \cdot \Psi(t) = b, \quad t \in l'_0 \quad (207)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha(t)} \cdot \Psi(t) = 0, \quad t \in L' \quad (208)$$

სადაც $b = 2a = k$, l'_0 წარმოადგენს l_0 კონტურის ნაწილს, ხოლო L' არის $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ ტეხილი (იხ. ნახ. 7). $\alpha(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა L' კონტურზე: $\alpha(t) = \alpha_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$ ($k=1; 2; \dots 6$), ხოლო l'_0 ნაწილზე უცნობი ფუნქციაა, რადგან უცნობია თვითონ l'_0 კონტური.

γ კუთხის სიდიდე არ არის მეტი 90° -ზე (იხ. ნახ. 7) და ამიტომ ძაბვები შემოუსაზღვრელი იქნება $\frac{1}{2}$ -ზე დაბალი რიგით A_1 და A_7 წერტილების მიდამოებში.

$\Psi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია D არეს საზღვარზე, გარდა შესაძლებელია A_4 წერტილისა, რომლის მახლობლობაშიაც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$|\Psi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - A_4|^\varepsilon} \quad (209)$$

სადაც $0 \leq \varepsilon < 1$

როდესაც $t \in L'$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$t - A_k = i\rho \cdot e^{i\alpha}, \quad \rho = |t - A_k|$$

საიდანაც ადვილად მიიღება

$$\operatorname{Re}(te^{-i\alpha(t)}) = \operatorname{Re}(A(t)e^{-i\alpha(t)}), \quad t \in L' \quad (210)$$

ამ ტოლობაში $A(t)$ წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას და აქვს შემდეგი სახე:

$$A(t) = A_k, \quad \text{როცა } t \in A_k A_{k+1}, \quad k=1; 2; \dots 6$$

(207), (208) ტოლობებთან ერთად განვიხილოთ (210) ტოლობაც, რომელიც წარმოადგენს L' კონტურის განტოლებას.

აღვნიშნოთ D_1 -ით ζ კომპლექსური სიბრტყის ერთეულრადიუსიანი ნახევარწრე $|\zeta| < 1, \operatorname{Im}\zeta > 0$.

ვთქვათ $z = \omega(\zeta)$ ფუნქცია კონფორმულად ასახავს z კომპლექსური სიბრტყის D არეს ζ სიბრტყის D_1 არეზე, ამასთან ისე, რომ L' წირი აისახებოდეს ნახევარწრეწირში, A_k ($k=1; 2; \dots 7$) წერტილები აისახებიან a_k ($k=1; 2; \dots 7$) წერტილებში (იხ. ნახ. 8).

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$a_1 = 1 \quad a_4 = i \quad a_7 = -1$$

აღვნიშნოთ l -ით და L -ით $z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვისას, შესაბამისად l'_0 და L' კონტურების ანასახები.

(207), (208), (210) ტოლობები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)}\Psi_0(\sigma)=b, \quad \sigma \in l \quad (211)$$

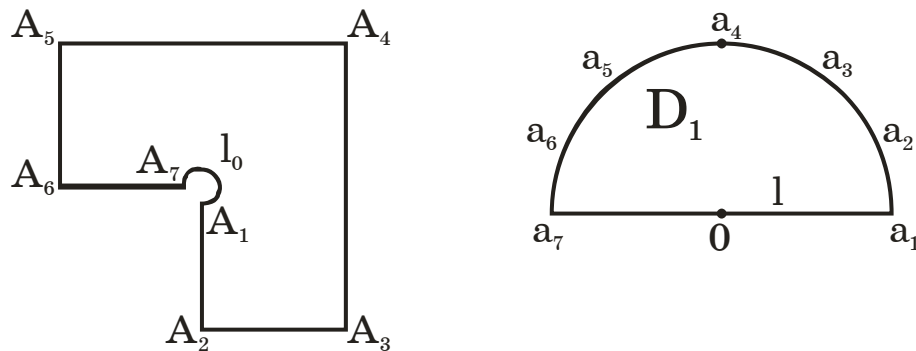
$$\operatorname{Im}e^{2i\alpha_0(\sigma)}\Psi_0(\sigma)=0, \quad \sigma \in L \quad (212)$$

$$\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)}\omega(\sigma))=\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)}A_0(\sigma)), \quad \sigma \in L \quad (213)$$

სადაც $\Psi_0(\zeta)=\Psi(\omega(\zeta))$, $\alpha_0(\sigma)=\alpha(\omega(\sigma))$

$\alpha_0(\sigma)$ წარმოადგენს L წირზე ცნობილ უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, ხოლო l წირზე უცნობი ფუნქციაა.

$$A_0(\sigma)=A(\omega(\sigma))+A_k, \quad \text{როცა } \sigma \in a_k a_{k+1}, \quad k=1; 2; \dots 6.$$



ნახაზი 8. ფირფიტის ნაწილი და კონფორმული ასახვისას მისი ანასახი

ჩვენს შემთხვევაში $z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვისას $e^{2i\alpha_0(\sigma)}$ გამოსახულებისთვის გვექნება შემდეგი ტოლობა:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)} = \frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}, \quad \sigma \in l \quad (214)$$

(214) ტოლობის გათვალისწინებით (211)-ში და (213)-ის დიფერენცირებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\overline{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\Psi_0(\sigma)} = b\omega'(\sigma), \quad \sigma \in l \quad (215)$$

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \omega'(\sigma) = 0, \quad \sigma \in L \quad (216)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha_0(\sigma)} \Psi_0(\sigma) = 0, \quad \sigma \in L \quad (217)$$

ამრიგად, ამოცანა მივიდა ζ სიბრტყეში ერთეულრადიუსიან ნახევარწრეში ანალიზური $\omega(\zeta)$ და $\Psi_0(\zeta)$ ფუნქციების მოძებნის ამოცანამდე (215)-(217) სასაზღვრო პირობებით.

განვსაზღვროთ ახალი $W(\zeta)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$W(\zeta) = \begin{cases} b\omega'(\zeta) & |\zeta| < 1, \operatorname{Im} \zeta > 0 \\ \overline{\omega'(\bar{\zeta})} \cdot \overline{\Psi_0(\bar{\zeta})} & |\zeta| < 1, \operatorname{Im} \zeta < 0 \end{cases} \quad (218)$$

(215) ტოლობის საფუძველზე $W(\zeta)$ ფუნქციისათვის l წირზე გვექნება შემდეგი პირობა:

$$W^+(\sigma) = W^-(\sigma), \quad \sigma \in l$$

საიდანაც შეიძლება დავასკვნათ, რომ l წირი $W(\zeta)$ ფუნქციისათვის არ წარმოადგენს ნახტომის წირს და ე. ი. $W(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზური იქნება მთელს $|\zeta| < 1$ წრეში.

(216), (217) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{Im} e^{i\alpha_0(\sigma)} \sigma \overline{\omega'(\bar{\sigma})} = 0, \quad \sigma \in L' \quad (219)$$

$$\operatorname{Im} e^{-2i\alpha_0(\sigma)} \overline{\Psi_0(\sigma)} = 0, \quad \sigma \in L' \quad (220)$$

სადაც L' წარმოადგენს $|\zeta|=1$, $\operatorname{Im}\zeta < 0$ ნახევარწრეწირს და

$$\alpha_0(\sigma) = \alpha_0(\overline{\sigma}), \quad \sigma \in L'$$

(216), (218), (219), (220) ტოლობების ძალით მივიღებთ

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \cdot W^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in L \quad (221)$$

ამ შემთხვევაში L წარმოადგენს ზემოთ ასევე L -ით აღნიშნული წირის და L' -ის გაერთიანებას, ანუ $|\zeta|=1$ წრეწირს.

გადავწეროთ (221) ტოლობა შემდეგი სახით:

$$e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \cdot W^+(\sigma) = e^{i\alpha_0(\sigma)} \overline{\sigma} \cdot \overline{W^+(\sigma)}, \quad \sigma \in L \quad (222)$$

განვსაზღვროთ $F(\zeta)$ ახალი ფუნქცია შემდეგი წესით:

$$F(\zeta) = \begin{cases} \zeta \cdot W(\zeta), & |\zeta| < 1 \\ \frac{1}{\zeta} \cdot \overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, & |\zeta| > 1 \end{cases} \quad (223)$$

რადგან $W(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta| < 1$ წრეში. $\overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ ფუნქცია

ანალიზური იქნება $|\zeta| > 1$ არეში და ე. ი. $F(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზური იქნება $|\zeta| < 1$ წრეში და $|\zeta| > 1$ არეში.

გავითვალისწინოთ (223) ტოლობა და (222) თანაფარდობა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$F^+(\sigma) = e^{2i\alpha_0(\sigma)} F^-(\sigma), \quad \sigma \in L \quad (224)$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ $F(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია ერთეულრადიუსიანი წრის შიგნით და გარეთ და აკმაყოფილებს (224) სასაზღვრო პირობას. ეს ამოცანა წარმოადგენს წრფივი შეუღლების სასაზღვრო ამოცანას ერთეულრადიუსიანი წრისათვის, უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებით [42].

$\alpha_0(\sigma)$ ფუნქციის განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ კვანძების რაოდენობა არის 12.

იმისათვის, რომ წრფივი შეუღლების (224) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი იყოს ამავე დროს რიმან-ჰილბერტის (221) ამოცანის ამონახსნიც, უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობა:

$$\overline{F\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = F(\zeta) \quad (225)$$

ვეძებთ ისეთი ამონახსნი, რომ

$$F(\zeta) = 0, \quad \text{როცა } \zeta = 0 \quad (226)$$

(225) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\overline{F(\infty)} = F(0) = 0$$

და ე. ი. $F(\infty) = 0$

წრფივი შეუღლების (224) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, რომელსაც უსასრულოდ დამორებულ წერტილში აქვს სასრული რიგი, წარმოიდგინება შემდეგი სახით [42]:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P(\zeta) \quad (227)$$

სადაც $P(\zeta)$ წარმოადგენს პოლინომს, ხოლო $\chi(\zeta)$ ფუნქცია იმავე ამოცანის კანონიკური ამონახსნია, რომელიც წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\chi(\zeta) = e^{\gamma(\zeta)} \prod_{k=1}^{12} (\zeta - a_k)^{\lambda_k} \quad (228)$$

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

სადაც $G(\sigma)$ წრფივი შეუღლების (224) სასაზღვრო ამოცანის კოეფიციენტია, a_k ($k=1; 2; \dots 12$) კვანძებია და ამ კვანძების მახლობლად ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$e^{\gamma(\zeta)} = (\zeta - a_k)^{\mu_k + i\beta_k} \cdot \Omega(\zeta) \quad (229)$$

სადაც $\Omega(\zeta)$ წარმოადგენს ფუნქციას ჰოლომორფულს, a_k ($k=1; 2; \dots 12$) კვანძის მიდამოს L წირით დაყოფით მიღებულ თითოეულ სექტორში და მისწრაფვის ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $\zeta \rightarrow a_k$ ნებისმიერი გზის გასწვრივ, რომელიც არ გამოდის მოცემული სექტორიდან.

$\mu_k + i\beta_k$ ჩვენს შემთხვევაში ლებულობს შემდეგ სახეს

$$\mu_k + i\beta_k = \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\pi} \quad (230)$$

(230) ტოლობის საფუძველზე გვექნება:

$$\mu_1 = \mu_7 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mu_3 = \frac{3}{2}, \quad \mu_4 = -\frac{1}{2},$$

$$\mu_5 = -\frac{1}{2}, \quad \mu_6 = -\frac{1}{2}, \quad \mu_8 = \frac{1}{2}, \quad \mu_9 = \frac{1}{2},$$

$$\mu_{10} = \frac{1}{2}, \quad \mu_{11} = -\frac{3}{2}, \quad \mu_{12} = \frac{1}{2}$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან ჩანს, რომ a_1 და a_7 განსაკუთრებული კვანძებია და მათ მიდამოში ამონახსნი იქნება შემოსაზღვრული.

ვეძებთ არაგანსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში შემოუსაზღვრელი ამონახსნები, ანუ h_0 კლასის ამონახსნები, ამისათვის საჭიროა ადგილი ჰქონდეს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$-1 < \mu_k + \lambda_k < 0 \quad (231)$$

სადაც ზოგად შემთხვევაში

$$-1 < \mu_k + \lambda_k < 1$$

თუ გავითვალისწინებთ (231) პირობებს, მივიღებთ ტოლობებს:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_8 = -1,$$

$$\lambda_9 = -1, \quad \lambda_{10} = -1, \quad \lambda_{11} = 1, \quad \lambda_{12} = -1$$

წრფივი შეუღლების (224) სასაზღვრო ამოცანის $\chi(\zeta)$ კანონიკური ამონახსნის რიგი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ტოლია $-\kappa$, სადაც κ გამოითვლება შემდეგი ფორმულის მეშვეობით:

$$\kappa = -\sum_{\kappa=1}^{12} \lambda_{\kappa} \quad (232)$$

წრფივი შეუღლების (224) სასაზღვრო ამოცანის ინდექსისათვის უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$\kappa = 5$$

ახლა, რადგან ცნობილია წრფივი შეუღლების (224) სასაზღვრო ამოცანის ინდექსი, ამოცანის ამონახსნისთვის მიღებული (227) ფორმულა, როცა ვეძებთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემოსაზღვრულ ამონახსნს, შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P_5(\zeta) \quad (233)$$

სადაც

$$P_5(\zeta) = c_0 \zeta^5 + c_1 \zeta^4 + c_2 \zeta^3 + c_3 \zeta^2 + c_4 \zeta + c_5 \quad (234)$$

იმისათვის, რომ შესრულდეს (225) პირობა, უნდა სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობები:

$$c_k = \overline{c_{5-k}}, \quad k=1; 2; \dots 5$$

ამ უკანასკნელ ტოლობებთან ერთად თუ გავითვალისწინებთ (226) პირობას, $P_5(\zeta)$ პოლინომის (234) გამოსახულება საბოლოოდ მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P(\zeta) = c_1\zeta^4 + c_2\zeta^3 + \overline{c_2}\zeta^2 + \overline{c_1}\zeta \quad (235)$$

გავითვალისწინოთ (235) ტოლობა და (233) ფორმულიდან მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta)(c_1\zeta^4 + c_2\zeta^3 + \overline{c_2}\zeta^2 + \overline{c_1}\zeta) \quad (236)$$

(218) ტოლობის საფუძველზე სამიებული $\omega(\zeta)$ ფუნქციისათვის შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ტოლობა:

$$\omega'(\sigma) = \frac{1}{b}W(\sigma) \quad (237)$$

ამ უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ ტოლობას:

$$t = \omega(\sigma) = \frac{1}{b} \int_{-1}^{\sigma} W(\zeta) d\zeta + C \quad (238)$$

სადაც $\zeta \in l$

(223) და (236) ტოლობების გათვალისწინებით (238) ტოლობიდან საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$t = \frac{1}{b} \int_{-1}^{\sigma} \chi(\zeta)(c_1\zeta^3 + c_2\zeta^2 + \overline{c_2}\zeta + \overline{c_1})d\zeta + C \quad (239)$$

რაც წარმოადგენს საძიებელი კონტურის განტოლებას.

(239) ტოლობაში C მუდმივის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ იმ პირობით, რომ $z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვით $a_7 = -1$ წერტილი აისახება A_7 წერტილში:

$$A_7 = \frac{1}{b} \int_{-1}^{-1} \chi(\zeta) (c_1 \zeta^3 + c_2 \zeta^2 + \bar{c}_2 \zeta + \bar{c}_1) d\zeta + C \quad (240)$$

გადამსახავი ფუნქციის ცალსახობა სრულდება, რადგან (240)-ში ინტეგრალი აღებულია შეკრულ წირზე, $\chi(\zeta)$ ჰოლომორფული ფუნქციაა და ნაზრდს არ მიიღებს (იგივე ჩანს უშუალო შემოწმებითაც (228)-დან), ხოლო $P(\zeta)$ პოლინომი არ მიიღებს ნაზრდს (უშუალო შემოწმებითაც ჩანს) და ე. ი. ინტეგრალის გული წარმოადგენს ცალსახა ანალიზურ ფუნქციას, ამიტომ შეკრულ წირზე ინტეგრალი ნულის ტოლია და გვექნება:

$$A_7 = C$$

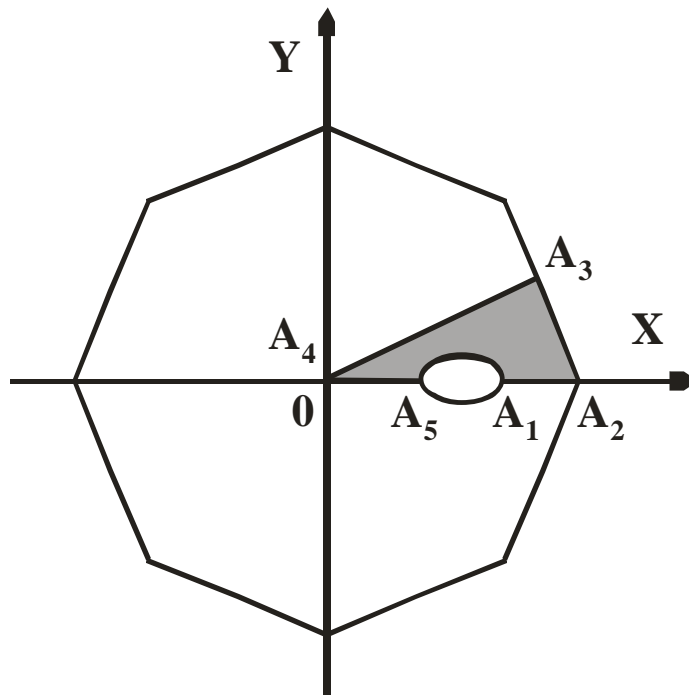
c_1 და c_2 მუდმივების მნიშვნელობა შეიძლება განისაზღვროს, თუ გამოვიყენებთ პირობას, რომ $a_1 = 1$ და $a_4 = i$ წერტილები აისახებიან, შესაბამისად A_1 და A_4 წერტილებში.

(218) ტოლობიდან, უკვე განსაზღვრული $\omega(\zeta)$ ფუნქციის საშუალებით, შეგვიძლია განვსაზღვროთ $\Psi_0(\zeta)$ და მასთან ერთად $\Psi(z)$ ფუნქცია, რომელიც $\Phi(z)$ ფუნქციასთან ერთად განსაზღვრავს ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას.

3.4. დრეკად-პლასტიური ამოცანა წესიერი n კუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტისათვის, რომელიც შესუსტებულია n ერთნაირი ხვრელით

განვიხილოთ ერთგვაროვანი, იზოტროპული, წესიერი n კუთხედის ფორმის მქონე ფირფიტა, რომელიც შესუსტებულია n ერთნაირი ხვრელით ისე, რომ ამ ხვრელების კონტურები სიმეტრიული იყოს მრავალკუთხედის რადიუსების მიმართ.

ვთქვათ ფირფიტა მოთავსებულია $z = x + iy$ კომპლექსური სიბრტყის XOY საკოორდინატო სისტემაში. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მრავალკუთხედის ცენტრი დაემთხვეს $z = 0$ წერტილს, ხოლო ერთ-ერთი რადიუსი მდებარეობდეს OX ღერძზე (ნახ. 9).



ნახაზი 9. წესიერი მრავალკუთხედი რადიუსებზე განლაგებული ხვრელებით

$z = x + iy$ კომპლექსურ სიბრტყეში ფირფიტის მიერ დაკავებული არე აღვნიშნოთ S -ით, L_0 -ით გარე საზღვარი (ტეხილი), ხოლო L -ით შიგნითა

საზღვარი (უცნობ კონტურთა ერთობლიობა) $L = \bigcup_{k=1}^n L_k$, სადაც L_k

($k=1;2\dots n$) k -ური ხვრელის კონტურია. ჩავთვალოთ, რომ L_k კონტურები გლუვი წირებია. S არე წარმოადგენს მრავალკუთხედის ცენტრის მიმართ (მრავალკუთხედის ცენტრი $z = 0$ წერტილშია) ციკლურად სიმეტრიულ არეს, ციკლურად სიმეტრიულობის $\beta = \frac{2\pi}{n}$ კუთხით.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: განვსაზღვროთ ხვრელების უცნობი კონტურები და ფირფიტის დამაბული მდგომარეობა, თუ ფირფიტის მიერ დაკავებული S არეს გარე საზღვარზე ნორმალური გადაადგილება მუდმივია და მხები ძაბვა ნულის ტოლია:

$$u_n = const, \quad t \in L_0 \tag{241}$$

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in L_0$$

მხები ძაბვა ხვრელების კონტურებზეც ნულის ტოლია და გარდა ამისა, ხვრელების კონტურებზე მოქმედებს მუდმივი ნორმალური ძაბვები:

$$\sigma_n = -p, \quad t \in L \tag{242}$$

$$\tau_{tn} = 0, \quad t \in L$$

ხვრელების კონტურებზე გვაქვს დამატებით პირობა, რომ ისინი იმყოფებიან პლასტიურ მდგომარეობაში, პლასტიური მდგომარეობა მოიცავს მხოლოდ L საზღვარს და არ ვრცელდება S არეს სიღრმეში:

$$(\sigma_t - \sigma_n)^2 + 4\tau_{tn}^2 = 4k^2, \quad t \in L \tag{243}$$

σ_t ტანგენციალური ნორმალური დამაბულობაა.

ვისარგებლოთ კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ცნობილი ფორმულებით:

$$X_x + Y_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad (244)$$

$$Y_y - X_x + 2iX_y = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (245)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (246)$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ჰოლომორფული ფუნქციებია S არეში, $\Phi(z) = \varphi'(z)$ $\Psi(z) = \psi'(z)$. u და v წარმოადგენენ გადაადგილების კომპონენტებს კოორდინატთა ღერძებზე. X_x , Y_y , X_y ძაბვის კომპონენტებია. $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$,

λ , μ ლამეს მუდმივებია.

(244)-(246) ფორმულებთან ერთად თუ განვიხილავთ დამოკიდებულებებს

$$\sigma_n + \sigma_t = X_x + Y_y \quad (247)$$

$$(\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_m) \cdot e^{-2i\alpha(t)} = Y_y - X_x + 2iX_y \quad (248)$$

მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\sigma_t + i\tau_m = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\alpha(t)}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (249)$$

$$2\mu(u'_t - iu'_n) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + e^{-2i\alpha(t)}(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)) \quad (250)$$

სადაც $\alpha(t)$ არის t წერტილში კონტურის გარე ნორმალსა და OX ღერძს შორის კუთხე.

(241)-(243) პირობების გათვალისწინებით (249)-(250) ტოლობების საფუძველზე მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = a, \quad t \in L \quad (251)$$

$$\operatorname{Im}\Phi(t) = 0, \quad t \in L \quad (252)$$

(251)-(252) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი:

$$\Phi(z) = a, \quad z \in S \quad (253)$$

$$\text{სადაც } a = \frac{\sigma_n + \sigma_t}{4} = \frac{k - p}{2}.$$

$\Phi(z)$ და $\Psi(z)$ ანალიზური ფუნქციები, როგორც ჩანს კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულებიდან, განსაზღვრავენ S არეს დაძაბულ მდგომარეობას. რაკი $\Phi(z)$ ფუნქცია ვიპოვეთ, დასმული ამოცანის ამოსახსნელად საძიებელი დაგვრჩა ხვრელების უცნობი კონტურები და $\Psi(z)$ ანალიზური ფუნქცია.

ამოცანის ციკლურად სიმეტრიულობის გამო მრავალკუთხედის რადიუსებსა და აპოთემებზე ნორმალური გადაადგილება და მხები ძაბვა ნულის ტოლია, ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ S არეს გამუქებული ნაწილი (იხ. ნახ. 9), აღვნიშნოთ ეს ნაწილი D -თი.

(241)-(243) პირობების გათვალისწინებით (249), (250) ფორმულებიდან მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$e^{2i\alpha(t)}\Psi(t) = b, \quad t \in L' \quad (254)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha(t)} \Psi(t) = 0, \quad t \in L_2 \quad (255)$$

სადაც $b = 2a + p - 2k = -k$. L_1' წარმოადგენს L_1 კონტურის ნაწილს, L_2 არის $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ ტეხილი (იხ. ნახ. 9). $\alpha(t)$ უბან-უბან მუდმივი ფუნქციაა L_2 -ზე, კერძოდ $\alpha(t) = \alpha_k$, როცა $t \in A_k A_{k+1}$ ($k=1; 2; 3; 4$), ხოლო L_1' -ზე უწყვეტი უცნობი ფუნქციაა, რადგანაც უცნობია L_1' წირი. $\Psi(z)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია D არეს საზღვრამდე, გარდა, შესაძლებელია, A_2 წერტილისა, რომლის მახლობლობაშიც ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას:

$$|\Psi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - A_2|^\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad (256)$$

(254), (255) ტოლობებთან ერთად განვიხილოთ L_2 კონტურის განტოლებაც, რომელსაც ექნება შემდეგი სახე:

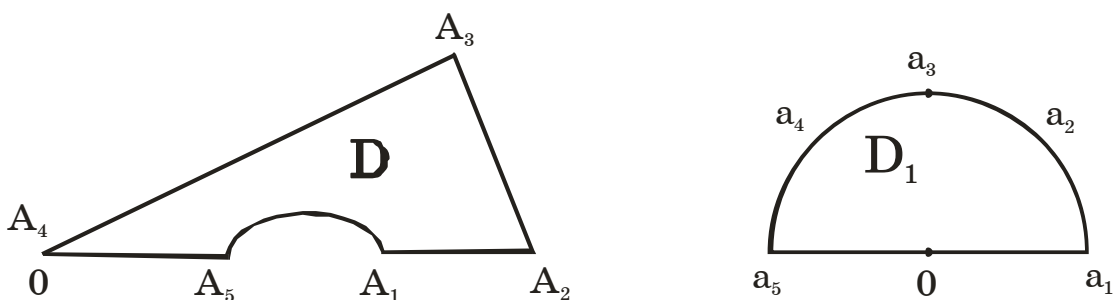
$$\operatorname{Re}(t \cdot e^{-i\alpha(t)}) = \operatorname{Re}(A(t) \cdot e^{-i\alpha(t)}) \quad (257)$$

ვთქვათ $z = \omega(\zeta)$ ფუნქცია კონფორმულად ასახავს $z = x + iy$ სიბრტყის D არეს, $\zeta = \xi + i\eta$ სიბრტყის D_1 არეზე, ამასთან ისე, რომ D არეს A_k ($k=1; 2; \dots; 5$) წერტილები აისახებიან D_1 არეს a_k ($k=1; 2; \dots; 5$) წერტილებზე. D_1 -ით აღნიშნულია ζ სიბრტყის ერთეულრადიუსიანი ნახევარწრე, ცენტრით $\zeta = 0$ წერტილში.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია $z = \omega(\zeta)$ ფუნქციით კონფორმული ასახვისას D_1 არეს სამი წერტილი დავაფიქსიროთ, კერძოდ, ჩავთვალოთ, რომ

$$a_1 = 1, \quad a_3 = i, \quad a_5 = -1$$

განხილული კონფორმული ასახვისას L'_1 და L_2 კონტურების სახეები აღვნიშნოთ, შესაბამისად, l_1 -ით და l_2 -ით.



ნახაზი 10. ფირფიტის ნაწილი და მისი შესაბამისი ნახევარწრე

(254), (255), (257) ტოლობები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)}\Psi_0(\sigma) = b, \quad \sigma \in l_1 \quad (258)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha_0(\sigma)}\Psi_0(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l_2 \quad (259)$$

$$\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)}\omega(\sigma)) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_0(\sigma)}A_0(\sigma)), \quad \sigma \in l_2 \quad (260)$$

სადაც $\Psi_0(\zeta) = \Psi(\omega(\zeta))$, $\alpha_0(\sigma) = \alpha(\omega(\sigma))$.

$\alpha_0(\sigma)$ წარმოადგენს l_2 წირზე ცნობილ უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, ხოლო l_1 წირზე უცნობი ფუნქციაა.

$$A_0(\sigma) = A(\omega(\sigma)) = A_k, \quad \text{როცა } \sigma \in a_k a_{k+1}, \quad k=1; 2; \dots; 5 \quad (a_6 = a_1)$$

$z = \omega(\zeta)$ კონფორმული ასახვისას $e^{2i\alpha_0(\sigma)}$ გამოსახულებისთვის მიიღება შემდეგი ტოლობა:

$$e^{2i\alpha_0(\sigma)} = \frac{\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}, \quad \sigma \in l_1 \quad (261)$$

გავითვალისწინოთ (261) ტოლობა (258)-ში და (260) ტოლობის ζ ცვლადით დიფერენცირებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\overline{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\Psi_0(\sigma)} = b \cdot \omega'(\sigma), \quad \sigma \in l_1 \quad (262)$$

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma \omega'(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l_2 \quad (263)$$

$$\operatorname{Im} e^{2i\alpha_0(\sigma)} \Psi_0(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l_2 \quad (264)$$

ამრიგად, დასმული ამოცანა მიყვანილ იქნა ერთეულრადიუსიან ნახევარწრეში ანალიზური $\omega(\zeta)$ და $\Psi_0(\zeta)$ უცნობი ფუნქციების მოძებნის ამოცანაზე (262)-(264) სასაზღვრო პირობებით.

განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$W(\zeta) = \begin{cases} b\omega'(\zeta) & |\zeta| < 1, \quad \operatorname{Im} \zeta > 0 \\ \overline{\omega'(\bar{\zeta})} \cdot \overline{\Psi_0(\bar{\zeta})} & |\zeta| < 1, \quad \operatorname{Im} \zeta < 0 \end{cases} \quad (265)$$

(262) ტოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $W(\zeta)$ ფუნქცია l_1 კონტურზე აკმაყოფილებს პირობას:

$$W^+(\sigma) = W^-(\sigma), \quad \sigma \in l_1$$

და მიღებული ტოლობიდან გამომდინარე l_1 კონტური $W(\zeta)$ ფუნქციისათვის არ იქნება ნახტომის წირი და $W(\zeta)$ ანალიზური ფუნქციაა მთელს $|\zeta| < 1$ წრეში.

(263) და (264) ტოლობების გათვალისწინებით, მიიღება შემდეგი თანაფარდობები:

$$\operatorname{Im} e^{i\alpha_0(\sigma)} \sigma \overline{\omega'(\bar{\sigma})} = 0, \quad \sigma \in l'_2 \quad (266)$$

$$\operatorname{Im} e^{-2i\alpha_0(\sigma)} \overline{\Psi_0(\bar{\sigma})} = 0, \quad \sigma \in l'_2 \quad (267)$$

სადაც l'_2 კონტური არის $|\zeta| = 1, \operatorname{Im} \zeta < 0$ ნახევარწრეწირი

$$\alpha_0(\sigma) = \alpha_0(\bar{\sigma}), \quad \sigma \in l'_2$$

(263), (264), (265), (266), (267) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$\operatorname{Im} e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma W^+(\sigma) = 0, \quad \sigma \in l \quad (268)$$

სადაც l წარმოადგენს $|\zeta| = 1$ წრეწირს.

(268) ტოლობა შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$e^{-i\alpha_0(\sigma)} \sigma W^+(\sigma) = e^{i\alpha_0(\sigma)} \overline{\sigma W^+(\bar{\sigma})}, \quad \sigma \in l \quad (269)$$

შემოვიღოთ ფუნქცია:

$$F(\zeta) = \begin{cases} \zeta W(\zeta) & |\zeta| < 1 \\ \frac{1}{\zeta} \overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)} & |\zeta| > 1 \end{cases} \quad (270)$$

$W(\zeta)$ ფუნქცია ანალიზურია $|\zeta| < 1$ წრეში, ამიტომ $\overline{W\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ ფუნქცია ანალიზური იქნება წრის გარეთ, $|\zeta| > 1$ არეში.

გავითვალისწინოთ $F(\zeta)$ ფუნქციის (270) განსაზღვრება და (269) თანაფარდობა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F^+(\sigma) = e^{2i\alpha_0(\sigma)} F^-(\sigma), \quad \sigma \in l \quad (271)$$

ამრიგად, ამოცანა მივიდა ერთეულრადიუსიანი წრის შიგნით და გარეთ ანალიზური $F(\zeta)$ ფუნქციის მოძებნის ამოცანაზე (271) სასაზღვრო პირობით. ეს ამოცანა კი წარმოადგენს წრფივი შეუღლების სასაზღვრო ამოცანას ერთეულრადიუსიანი წრისათვის, უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებით.

$\alpha_0(\sigma)$ ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამოდის, რომ (271) სასაზღვრო ამოცანაში კვანძების რაოდენობა არის 8.

(271) ამოცანის ამონახსნი ამავედროულად რიმან-ჰილბერტის (268) ამოცანის ამონახსნიც რომ იყოს, უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა [42]:

$$F(\zeta) = \overline{F\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \quad (272)$$

ვეძებთ $F(\zeta)$ ამონახსნი, შემდეგი პირობით:

$$F(\zeta) = 0, \quad \text{როცა } \zeta = 0 \quad (273)$$

წრფივი შეუღლების სასაზღვრო (271) ამოცანის ამონახსნი, რომელსაც უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში აქვს სასრული რიგი, წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P(\zeta) \quad (274)$$

სადაც $P(\zeta)$ პოლინომია, ხოლო $\chi(\zeta)$ იგივე (271) სასაზღვრო ამოცანის კანონიკური ამონახსნია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\chi(\zeta) = e^{\gamma(\zeta)} \prod_{k=1}^8 (\zeta - a_k)^{\beta_k} \quad (275)$$

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\ln G(\sigma) d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

სადაც $G(\sigma)$ წრფივი შეუღლების (271) ამოცანის კოეფიციენტია (ჩვენს შემთხვევაში $e^{2i\alpha_0(\sigma)}$), a_k ($k=1; 2; \dots 8$) კვანძებია და მათ მახლობლად ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას:

$$e^{\gamma(\zeta)} = (\zeta - a_k)^{\mu_k + i\beta_k} \Omega(\zeta) \quad (276)$$

სადაც $\Omega(\zeta)$ წარმოადგენს ფუნქციას ჰოლომორფულს a_k ($k=1; 2; \dots 8$) კვანძის მიდამოს l წირით დაყოფით მიღებულ თითოეულ სექტორში და მისწრაფვის ნულისაგან განსხვავებული გარკვეული ზღვრისაკენ, როცა $\zeta \rightarrow a_k$ ნებისმიერი გზის გასწვრივ, რომელიც არ გამოდის მოცემული სექტორიდან.

(276) ტოლობაში შემავალ $\mu_k + i\beta_k$ გამოსახულებას ზოგად შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე [42]:

$$\mu_k + i\beta_k = \sum_{j=1}^8 \frac{\mp \ln G_j(a_k)}{2\pi i}$$

და რადგან განხილული ამოცანის შემთხვევაში $G(\sigma) = e^{2i\alpha_0(\sigma)}$, მივიღებთ ტოლობას:

$$\mu_k + i\beta_k = \frac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\pi} \quad (277)$$

უკანასკნელი თანაფარდობის ცალკეული კვანძებისთვის განხილვის შემთხვევაში მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\mu_1 = \mu_5 = 0, \quad \mu_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}, \quad \mu_3 = -\frac{1}{2}, \quad \mu_4 = -1 + \frac{1}{n},$$

$$\mu_6 = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mu_7 = \frac{1}{2}, \quad \mu_8 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{n}$$

მიღებული ტოლობებიდან ჩანს, რომ a_1 და a_5 განსაკუთრებული კვანძებია და მათ მიდამოში ამონახსნი იქნება შემოსაზღვრული.

ვეძებთ არაგანსაკუთრებული კვანძების მახლობლობაში შემოუსაზღვრელი (ერთზე დაბალი რიგით) ამონახსნები, ანუ h_0 კლასის ამონახსნები. ამისათვის მოვიტხოვით, რომ სრულდებოდეს შემდეგი თანაფარდობები:

$$-1 < \mu_k + \lambda_k < 0 \quad (278)$$

სადაც ზოგად შემთხვევაში

$$-1 < \mu_k + \lambda_k < 1$$

(278) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_6 = -1,$$

$$\lambda_7 = -1, \quad \lambda_8 = 1$$

წრფივი შეუღლების (271) სასაზღვრო ამოცანის $\chi(\zeta)$ კანონიკური ამონახსნის რიგი უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში ტოლია $-\kappa$, სადაც

$$\kappa = -\sum_1^8 \lambda_k \quad (279)$$

(279) ტოლობაში λ_k -ს მნიშვნელობების ჩასმით მივიღებთ წრფივი შეუღლების (271) სასაზღვრო ამოცანის ინდექსისათვის შემდეგ ტოლობას:

$$\kappa = 3$$

ამონახსნისათვის მიღებული (274) ფორმულა, ამოცანის ინდექსის საფუძველზე, ჩვენს შემთხვევაში, თუ ვეძებთ უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში შემოსაზღვრულ ამონახსნს, გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta) \cdot P_3(\zeta) \quad (280)$$

$$\text{სადაც } P_3(\zeta) = c_0 \zeta^3 + c_1 \zeta^2 + c_2 \zeta + c_3 \quad (281)$$

(272) პირობის შესრულებისთვის, ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ ტოლობებს:

$$c_k = \overline{c_{3-k}}, \quad k=1; 2; 3$$

მიღებულ ტოლობებთან ერთად (273) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ $c_0 = c_3 = 0$ და საბოლოოდ $P_3(\zeta)$ პოლინომის (281) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P_3(\zeta) = c_1 \zeta^2 + \overline{c_1} \zeta \quad (282)$$

(282)-ის (280) ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ შემდეგ ფორმულას:

$$F(\zeta) = \chi(\zeta)(c_1 \zeta^2 + \overline{c_1} \zeta) \quad (283)$$

(265) ტოლობის საფუძველზე გვექნება:

$$\omega'(\sigma) = \frac{1}{b} \cdot W(\sigma) \quad (284)$$

მიღებული ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$t = \omega(\sigma) = \frac{1}{b} \cdot \int_{-1}^{\sigma} W(\zeta) d\zeta + C \quad (285)$$

სადაც $\zeta \in l_1$.

(270) და (283) ტოლობების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$t = \frac{1}{b} \cdot \int_{-1}^{\sigma} \chi(\zeta)(c_1\zeta + \bar{c}_1)d\zeta + C \quad (286)$$

ტოლობას, რომელიც წარმოადგენს საძიებელი კონტურის განტოლებას.

$z = \omega(\zeta)$ ფუნქციით კონფორმული ასახვისას $a_5 = -1$ წერტილი გადადის A_5 წერტილში და ამ პირობის გამოყენებით გამოვთვალოთ (286) ტოლობაში შემავალი C მუდმივი:

$$A_5 = \frac{1}{b} \cdot \int_{-1}^{-1} \chi(\zeta)(c_1\zeta + \bar{c}_1)d\zeta + C \quad (287)$$

უკანასკნელ ტოლობაში შემავალი ინტეგრალის გული ცალსახა ანალიზური ფუნქციაა და ინტეგრალი შეკრულ წირზე იქნება ნულის ტოლი, ამიტომ C მუდმივის საპოვნელად მივიღებთ:

$$A_5 = C \quad (288)$$

გამოსათვლელი დაგვრჩა c_1 მუდმივი. ამისათვის გამოვიყენოთ პირობა, რომ $a_3 = i$ წერტილი აისახება A_3 წერტილში

$$A_3 = \frac{1}{b} \cdot \int_{-1}^i \chi(\zeta)(c_1\zeta + \bar{c}_1)d\zeta + C \quad (289)$$

ამრიგად, განვსაზღვრეთ გადამსახავი $\omega(\zeta)$ ფუნქცია და მისი საშუალებით (265) ტოლობიდან ვიპოვიოთ $\Psi_0(\zeta)$ და მასთან ერთად $\Psi(z)$ ფუნქციას. $\Psi(z)$ და $\Phi(z)$ ფუნქციები კი განსაზღვრავენ ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას.

ზოგადი დასკვნები და შედეგები

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ გადასახვათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით ნაშრომში ამოხსნილია ზოგიერთი კლასის დრეკად-პლასტიური ამოცანა, კერძოდ, ხვრელების მქონე სასრული და უსასრულო ფირფიტებისათვის დრეკად-პლასტიური ამოცანები ციკლური სიმეტრიის შემთხვევაში:

- ორი ერთნაირი ხვრელის მქონე უსასრულო ფირფიტისათვის დრეკად-პლასტიური ამოცანა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიისა და კონფორმულ გადასახვათა თეორიის მეთოდების გამოყენებით დაყვანილია ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანაზე მარტივადბმული არესათვის და მიღებულია ამოცანის ამონახსნი და ხვრელების კონტურის განტოლება;
- მოცემულია წვეროებში ამონაჭრების მქონე კვადრატული ფორმის ხვრელებით შესუსტებული უსასრულო ფირფიტის დრეკად-პლასტიური ამოცანის ეფექტური ამოხსნა ფირფიტის კუმშვისა და ღუნვის შემთხვევაში, როდესაც ხვრელების ამონაჭრების უცნობი კონტურები იმყოფებიან პლასტიურ მდგომარეობაში და პლასტიურობა არ აღწევს ფირფიტის სიღრმეში.
- მიღებულია n ერთნაირი ხვრელით შესუსტებული წესიერი n კუთხედების შემთხვევაში დრეკად-პლასტიური ამოცანების ეფექტური ამოხსნები, როდესაც ადგილი აქვს ციკლურ სიმეტრიას. ხვრელების კონტურები პლასტიურ მდგომარეობაშია. ამოცანები დაიყვანება რიმან-ჰილბერტის ამოცანაზე წრისათვის უბან-უბან მუდმივი კოეფიციენტებით.
- მოცემულია წვეროებში ამონაჭრების მქონე კვადრატული ფორმის ერთი ხვრელით შესუსტებული კვადრატული ფირფიტის კუმშვის ამოცანის ეფექტური ამოხსნა, როდესაც ხვრელის ამონაჭრების კონტურები პლასტიურ მდგომარეობაშია.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Галин Л.А. Плоская упруго пластическая задача. ПММ, 1946, т 10. В.3, с.367-386.
2. Черепанов Г.П. Обратная упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6, с 1145-1147.
3. Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача в случае антиплоской деформации. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4, с. 697-708.
4. Черепанов Г.П. Об одном классе точных решений плоской упруго-пластической задачи. Изв. АН СССР, Отн. мех. и машиностр. 1963, №3, с 95-103.
5. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 5, с 906-912.
6. Черепанов Г.П. Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации. Изв. АН СССР. Отн мех. и машиностр. 1963, №1, с. 57-60.
7. Черепанов Г.П. Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн. «Приложение теории функции в механике сплошной среды», М, «Наука» 1965, т.1, с. 135-150.
8. Черепанов Г.П. Одна обратная задача теории упругости. Инж. Ж. МТТ, 1966, №3.
9. Черепанов Г.П. Равнопрочная выработка в горном массиве. В кн: Проблемы механики горных пород, Алма-Ата, «Наука», 1966.
10. Черепанов Г.П. Обратные задачи теории упругости, ПММ, 1974, т. 38, вып. 6, с. 963-980.
11. Выгдергауз С.Б. Об одном случае обратной задачи двумерной теории упругости. ПММ, 1977, т 41, вып. 5, с 902-908.
12. Выгдергауз С.Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской упругости. ПММ, 1976, т 40, вып. 3, с 566-569.
13. Иванов Г.М., Космодамианский А.С. К решению задач с неизвестной границей при наличии циклической симметрии. Тр. Николаевского кораблестр. Инс-та, 1973.
14. Иванов Г.М., Космодамианский А.С. Обертета пружнопластична периодична задача. ДОП. АН УССР, 1971, №100, с 919-923.
15. Иванов Г.М., Космодамианский А.С. Обертета подвійно періодичка задача плоскої теорії пружності. ДОП АН УССР, 1972, №9, с 826-829.
16. Иванов Г.М., Космодамианский А.С. Обратные задачи изгиба тонких изотропных плит. Изв. АН СССР, мтт, 1974, т 5, с 53-56.

17. Иванов Г.М. Определение равнопрочных контуров отверстий в тонкой перфорированной плите. «Сопротивление материалов и теория сооружений» респ. Межвед. Науч.-техн. Сб. 1973, Вып. 21, с 140-143.
18. Иванов Г.М. Определение формы равнопрочных отверстий в тонкой плите при наличии циклической симметрии. Механика твердого тела. Вып. 6, Республиканский межведомственный сборник, «Наукова думка». Киев, 1947, с 196-198.
19. Мирсалимов В.М. Обратная двоякопериодическая задача термоупругости. Изв. АН СССР, 1974, №4, с 165-168.
20. Мирсалимов В.М. Упруго-пластическая задача для массива, ослабленного периодической системой круглых выработок. Изв. АН АЗССР, серия физика, техникка, 1978, вып. 5, с 101-106.
21. Мирсалимов В.М. Обратная неоднородная задача изгиба решеток. Изв. АН АЗ ССР, физика, техника, 1978, вып. 2, с 105-111.
22. Мирсалимов Е.М. Обратная упругая задача для плоскости, ослабленной двумя одиноковыми плоскостями матер. Респ. Конф. Баку, 1971.
23. Баничук Н.В. Оптимизация формы упругих тел. Москва: Наука, 1980, с 254.
24. Мжаванадзе Ш.В. Об одной обратной задаче плоской теории упругости. Сообщения АН ГССР, 1984, т.113, №3, с. 497-500.
25. Мжаванадзе Ш.В. Обратные задачи теории упругости при наличии циклической симметрии. Сообщения АН ГССР, 1984, т 113, №1, с. 53-56.
26. Мжаванадзе Ш.В. Об одной асимметричной полуобратной задаче плоской теории упругости. Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых, специалистов и работников производства «Наука-практике». Тезисы докладов, с 152-153.
27. Мжаванадзе Ш.В. Некоторые обратные задачи плоской теории упругости. X республиканская научно-методическая конференция математиков высших учебных заведений Грузинской ССР. Тезисы докладов. Телави, 1983, с 110.
28. Мжаванадзе Ш.В. Одна полуобратная плоская задача при наличии циклической симметрии. Механика сплошных сред, труды ГПИ, №9 (279), 1984, с 135-140.
29. Karanadze G.A. On one problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary. Proc. A.Razmadze Math. Inst. Vol. 143 (2007), 61-71.
30. Neiber N. Zuz optimiezung der Spanyngs Konzentrration. В кн. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, Москва: Наука, 1972. с. 375-380.

31. Tuergaazd V. On the optimum shape of a flat bar with restrictions. – In: Proceedings of IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design, Warsaw, 1973. Berlin: Springer-Verl., 1975, p. 181-195.
32. Bjorkman G.S., Ir, R.Richards, Ir Harmonic Holes. An inverse problem in Elasticity. Journal of Applied Mechanics. September 1976, p. 414-418.
33. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Об одной задаче теории упругости для области с неизвестной частью границы. Сообщения АН ГССР, 1984, т 116, №1.
34. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Об одной полуобратной плоской задаче теории упругости. Всесоюзная конференция по теории упругости. Тезиси докладов. Ереван, с. 49-50.
35. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Об одной полуобратной задаче изгиба пластинки. Сообщения АН ГССР, 1987, т 128. №2.
36. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Некоторые обратные задачи теории упругости. Труды Тбилисского матем. инс-та, 87 (1987), с 3-20.
37. Банцури Р.Д. Краевые задачи изгиба пластинки с частично-неизвестной границей. Proceeding of A. Razmadze Mathematical Institute, 1994, vol. 111.
38. Банцури Р.Д. Решение третьей основной задачи для двухсвязных областей огражденных ломанными. ДАН СССР т.243, №4.
39. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Наука. 1966.
40. Савин Г.Н. Концентрация напряжении около отверстий. М. Л: Гостежтеоретиздат, 1951, с. 446.
41. Соколовский В.В. Теория пластичности. Москва: «Высшая школа», 1969.
42. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Москва: Наука, 1962.
43. Оболашвили Е.И. Об одном обобщении принципа симметрии Римана-Шварца и его применения. ДАН СССР 1964, т. 157, с 1051-1053.
44. Лаврентьев М.А. Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Физико-математическая литература, 1958.
45. Галин Л.А. Упруго-пластические задачи. Москва: Наука, 1984.
46. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М: Физматгиз, 1958.
47. Келдыш М.В. Конформное отображение многосвязных областей на канонические области. Успехи математических наук, 1939, №6.
48. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. Москва: Техн.-теорет. литер. 1956.

49. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. Киев, 1975.
50. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. Москва: Техн.-теорет. литер. 1947.
51. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва: Машиностроение, 1975.
52. Нахмейи Е.Л., Нулер Б.М. ПММ, 1989, т 52, вып. 1.
53. Остросаблин Н.И. Равнопрочное отверстие в пластинке при неоднородном напряженном состоянии. «Прик. Мех. и тежн. Физ» 1981, №2, с 155-163.
54. Положий Г.Н. Решение третьей основной задачи плоской теории упругости для бесконечной плоскости квадратным отверстием. ПММ, 1949, т. 13, вып 3.
55. Положий Г.Н. Новый метод решения некоторых стешанных задач плоской теории упругости. ДАН СССР, 1949, т. 66, №2.
56. Положий Г.Н. Решение третьей основной задачи плоской теории упругости для конечного многоугольника ДАН СССР, 1950, т. 73, №1, с 49-52.
57. Положий Г.Н. Общее решение задачи соприкасания жестким профилем для произвольного многоугольника с отверстием. Научные записки. Киев, ун-т, т. 16, вып. 2, с 35-51.
58. Прагер В. Ходж Ф. Теория идеально пластических тел. Москва: Изд. Иностранной литературы, 1956.
59. Пуладзе Э.П. Об одной обратной задаче теории упругости для бесконечной области. Сообщения АН Грузии, 1991, т. 144, №1.
60. Пуладзе Э.П. Об одной задаче изгиба пластинки с частично-нейизвестной границей. Сообщения АН Грузии, 1992, т. 145, №3.
61. Пуладзе Э.П. Одна задача теории упругости с частично-нейизвестной границей. Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И.В. Векуа. 1992, т. 7, №1, с. 68-71.
62. Хуторянский И.Н. Некоторые обратные оптимизационные проские задачи теории упругости. Прикладные проблемы прочности и пластичности, 1977, №6. с. 81-87.
63. Wheeler L. On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimising elastic stress concentration. Ins. I. Solids and Struct., 1976, vol. 12, №11, p. 779-789.
64. R. Hill. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: at the Clarendon Press, 1950.

ავტორის მიერ გამოქვეყნებული შრომები

1. Abashidze Z. On One Problem of Elasticity and Plasticity of the Plane Theory of Elasticity, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 1996, 153, 2, 178-181
2. Abashidze Z. Problem of Elasticity and Plasticity for the Finite Plate, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 1996, 153, 3, 359-362.
3. Abashidze Z. Puladze E. Problem of Elasticity and Plasticity for the Plate Weakened by Two Holes, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 1996, 153, 3, 356-358.
4. Abashidze Z. Problem of Elasticity and Plasticity with Partially Unknown Boundary, Journal of Mathematical Sciences (Springer, New York), 2014, 199, 2.
5. Abashidze Z. Problem of Elasticity and Plasticity for a Plate with a Shape of Rectilinear n -angle which is Weakened by n Cyclic Symmetric Holes, Journal of Mathematical Sciences (Springer, New York), 2014, 199, 3.
6. Abashidze Z. Problem of Elasticity and Plasticity for a Plate with a Shape of n -angle Weakened by n Holes, Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences, 2014, vol. 8, no. 1, 27-31.