

*თვ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის*

*90 წლის იუბილედად მიძღვნილი*

*სამეცნიერო კონფერენცია*

**კომპიუტინგ 2008**

*მხსენებათა კრება*



**ON BEHALF OF 90 YEARS ANNIVERSARY OF  
IV. JAVAKHISHVILI TBILISI STATE UNIVERSITY  
SCIENCE CONFERENCE**

**COMPUTING 2008**

**PROCEEDINGS**

*19 თებერვალი, 2008 წ.  
თბილისი*

*19 October, 2008  
Tbilisi*

ივ.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო  
უნივერსიტეტის  
90 წლის იუბილესადმი მიძღვნილი  
სამეცნიერო კონფერენცია

კომპიუტინგ 2008

მოსხენებათა კრებული

**ON BEHALF OF 90 YEARS ANNIVERSARY OF  
IV.JAVAKHISHVILI TBILISI STATE  
UNIVERSITY  
SCIENCE CONFERENCE**

**COMPUTING 2008**

**PROCEEDINGS**

*19 ოქტომბერი, 2009 წ.  
თბილისი*

*19 October, 2009  
Tbilisi*

კრებული მოიცავს 2008 წლის 19 ოქტომბერს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის 90 წლის იუბილესთან დაკავშირებით ზუსტ და საბუნებისმეტ

ყველ მცნიერებათა ფაკულტეტის კვირეულის ფარგლებში კომპიუტერულ მცნიერებათა მიმართულების მიერ ჩატარებული სამეცნიერო კონფერენციის კომპიუტინგ 2008 მასალებს. მასში შესულია ყველა სამეცნიერო მოხსენება, რომელიც წაკითხულ იქნა კონფერენციაზე.

The present book is the proceedings of the scientific conference of COMPUTING 2008 held in 19 October 2009 on behalf of 90 years anniversary of Iv.Javakhishvili Tbilisi State University, in framework of exact and natural sciences week, direction of computer sciences. It comprises all papers read at the conference.

**პროგრამული კომიტეტი:**  
გია სირბილაძე (თავმჯდომარე),  
ჰამლეტ მელაძე  
მანანა ხაჩიძე  
კობა გელაშვილი  
რევაზ გრიგოლია  
ალექსანდრე გამყრელიძე  
რიჩარდ მეგრელიშვილი  
ზურაბ ქოჩლაძე

**rogramme Committee:**  
Gia Sirbiladze (Chairman)  
Hamlet Meladze  
Manana xachidze  
Koba Gelashvili  
Revaz Grigolia  
Alexander Gamkrelidze  
Richard Megrelishvili  
Zurab Kochladze

**საორგანიზაციო კომიტეტი:**  
მანანა ხაჩიძე (თავმჯდომარე)  
კობა გელაშვილი,  
გია სირბილაძე,  
ნათელა არჩვაძე,  
ბეჟან გვაბერიძე,  
თინათინ დავითაშვილი,  
ირინა ხუციშვილი  
მაგდა ცინცაძე

**Organization Committee :**  
Manana Khachidze (Head)  
Koba Gelashvili  
Gia Sirbiladze  
Natela Archvadze,  
Bejan Gvaberidze  
Tinatin Davitashvili  
Irina Khucishvili  
Magda Tsintsadze

**ISBN 978-9941-0-1511-3**

## სარჩევი – CONTENTS

### *მონაცემთა სტრუქტურები და ალგორითმები*

* კ. გელაშვილი, მ. თუთბერიძე სიმეტრიული მატრიცულ თამაშის ამოხსნა ჩვეულებრივი დიფ. განტოლებების გამოყენებით	7
K. Gelashvili, M. Tutberidze. <b>NEW METHOD TO SOLVE SIMMETRIC MATRIX GAMES BY DIFFERENTIAL EQUATIONS</b>	
გ.გიორგაძე, ზ.მელიქიშვილი. ქვანთურ პროცესორებზე დაფუძნებული სამღონიანი ქვანთური სისტემები	11
* G.Giorgadze, Z.Melikishvili. <b>QUANTUM PROCESSOR BASED ON A THREE LEVEL QUANTUM SYSTEM</b>	
* რ. მეგრელიშვილი, მ. ჭელიძე, თ. გნოლიძე. ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების აბეზის შესახებ	12
R. Megrelishvili, M. Chelidze, T. Gnolidze - <b>ABOUT THE CONSTRUCTION OF DIGITAL SIGNATURES ALGORITHMS</b>	
* ტ. ხვედელიძე. სასრული ავტომატის ქცევის ერთი ალგორითმის შესახებ	15
T. Khvedelidze. <b>ON ONE ALGORITHM OF BEHAVIOUR OF FINITE AUTOMATA</b>	
გ.ბოლოთაშვილი. ზობიერთი ახალი ფასეულობი წრფივი გადაადგილების ამოცანის მრავალფასუნაბასათვის	18
* G.Bolotashvili. <b>SOME FACETS OF THE LINEAR ORDERING POLYTOPE</b>	
* ა.გამყრელიძე. სწრაფი არითმეტიკის ალგორითმები	20
A.Gamkrelidze. <b>FAST ARITHMETICS ALGORITHMS</b>	
<i>საინფორმაციო სისტემები</i>	
გ.სირბილაძე. გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა ზოგად ბანუზღვრულ ბარემოში	24
* G.Sirbiladze - <b>DECISION MAKING PROBLEM IN GENERAL UNCERTAIN ENVIRONMENT</b>	
გ.სირბილაძე, ა.სიხარულიძე, მ.კაპანაძე. სუსტად სტრუქტურირებადი დინამიკური სისტემების მოდელირების შესახებ	27
* G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, M. Kapanadze. <b>ON THE WEAKLY STRUCTURABLE DYNAMIC SYSTEMS MODELLING</b>	
გ.სირბილაძე, ბ.ღვახერიძე. მინიმალური ფაზი-დაფარვის ამოცანის შესახებ	30
* G.Sirbiladze, B.Ghvaberidze. <b>ON THE MINIMAL FUZZY COVERING PROBLEM</b>	
გ.სირბილაძე, ი.ხუციშვილი - საინფორმაციო რისკების მენეჯმენტში ექსპერტონებისა და ფაზი-დისკრიმინაციის კომბინირებული მეთოდის გამოყენების შესახებ	34
* G.Sirbiladze, I.Khutsishvili. <b>ON THE COMBINED EXPERTON AND FUZZY DISCRIMINATION METHOD IN INVESTMENT RISK MANAGEMENT</b>	

ი.ხუციშვილი. არამკაფიო კლასების ანალიზის სტატისტიკური მეთოდის გამოყენების შესახებ საკომპიუტერო ფაქტორების დიდი რიცხვის პირობებში	39
<b>*I. Khutsishvili. ON THE STATISTICAL METHOD OF FUZZY GRADES' ANALYSIS WITH THE GREAT NUMBER OF FORECASTING FACTORS</b>	
რ.გრიგოლია. მრავალნიშნა ლოგიკების ალგებრული ანალიზი	43
<b>*R.Grigolia. ALGEBRAIC ANALYSIS OF MANY VALUED LOGIC</b>	
ჯ.გაჩეჩილაძე, თ.გაჩეჩილაძე, თ.დავითაშვილი, ჰ.მელაძე, გ.ცერცვაძე. ექსპერტონები სპეციალური შეფასებისთვის	47
<b>*G.Gachechiladze, T. Gachechiladze, T.Davitashvili, H.Meladze, G.Tsertsvadze - EXPERTONS FOR EXPERT EVALUATIONS</b>	
თ.მანჯარაშვილი. ბანკოტრების რისკის შეფასება არამკაფიო სტატისტიკის მეთოდით	50
<b>*T. Manjafarashvili EVALUATION OF BANKRUPTCY RISKS BY THE METHOD OF FUZZY STATISTICS</b>	
თ.გაჩეჩილაძე, ჰ.მელაძე, გ.ცერცვაძე, ნ.არჩვაძე, თ.დავითაშვილი კანონიკურად შეუღლებული არამკაფიო ქვესიმრავლეების ახალი ქრომოთეორია	56
<b>*T.Gachechiladze, H.Meladze, G.Tsertsvadze, N.Archvadze, T.Davitashvili NEW CHROMOTHEORY OF CANONICALY CONJUGATE FUZZY SUBSETS</b>	
თ.ცაბაძე. არამკაფიო ტრაპეციული შეფასების აგრეგაციის მეთოდი ჯგუფური გადაწყვეტილებებისას	59
<b>* T.Tsabadze. A METHOD FOR AGGREGATION OF TRAPEZOIDAL FUZZY ESTIMATES UNDER GROUP DECISION-MAKING</b>	
მ.ხაჩიძე. ბარემოს მონიტორინგის ინტელექტუალური სისტემის ინფორმაციული წარმოდგენა	63
<b>*M. Khachidze. INFOLOGICAL PRESENTATION OF ENVIROMEN MONITORING INTELLECTUAL SYSTEM</b>	
*ფ. დვალისვილი. ოპტიმალური სტრატეგია მარაბთა მართვის ერთი ალბათური მოდელისათვის.	66
<b>P.Dvalishvili. INVENTORY CONTROL PROBABILITY MODELS</b>	
ტ.კისელიოვა ბმულობის ანალიზისა და ფაზი-ექვივალენტობის მიმართებებზე დაფუძნებული კლასტერული მეთოდის შედარება სამედიცინო დიაგნოსტიკის ამოცანებისთვის	70
<b>T. Kiseliova. A COMPARISON OF THE CONNECTIVITY ANALYSIS AND THE CLUSTERING METHOD BASED UPON FUZZY EQUIVALENCE RELATIONS FOR THE PROBLEMS OF MEDICAL DIAGNOSES</b>	
<i>კომპიუტერის მეთოდოლოგია</i>	
*მ.რაზმაძე, ზ.კოჩლაძე, ა.ჯიქია. ელექტრონული არჩევნების კრიპტოგრაფიული პროტოკოლების შესახებ	71
<b>M.Razmadze, Z.Kochladze, A.Jikia. ABOUT OF CRYPTOGRAPHY PROTOCOLS OF ELECTRONIC VOTING</b>	

ტ.წილოსანი. ქართული და ინგლისური სამეცნიერო ტექსტების კომპიუტერული მოდელი	76
<b>*T.Tsilosani. THE COMPUTER MODEL OF GEORGIAN AND ENGLISH SCIENTIFIC TEXTS</b>	
*გ.ბესიშვილი, მ.ხაჩიძე. ბენეტიკური ალგორითმების გამოყენება სემანტიკურ web-ში	79
<b>G.Besiashvili, M.Khachidze. USING SEMANTICAL GENETICAL ALGORITHM FOR SEMANTICAL WEB</b>	

*კომპიუტერის გამოყენება*

პ. მელაძე, ა. ჭანტურია სენ-ვენანის (მარჩხი წყლის) ორბანზომილებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის გაწვრივებული სხვაობიანი სქემების კრებადობის შესახებ	83
<b>* G.V. Meladze, A.Z.Chanturia. CONVERGENCE OF LINEARED DIFFERENCE SCHEMES TWO-DIMENSIONAL SAINT-VENANT EQUATIONS (SHALLOW WATER)</b>	
*ნ. არჩვაძე, ლ. შეწირული პარალელური დაკრობრამება ფუნქციონალური დაკრობრამირების მუშავებით	88
<b>N. Archvadze, L. Sheciruli PARALLEL PROGRAMMING BY USING FUNCIONAL PROGRAMMING</b>	
ნ.ოდიშელიძე. ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ნაწილობრივ უცნობ საზღვრიანი შემრული ამოცანის საძიებელი თანაბრად მტკიცე კონტურების აბება	91
<b>*N. Odishelidze. CONSTRUCTIONS OF UNKNOWN EQUI-STRONG CONTOURS OF MIXED PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY WITH PARTIALLY UNKNOWN BOUNDARIES.</b>	
თ.დავითაშვილი, პ.მელაძე. არაწვრივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგიერთი ალგორითმის შესახებ პარალელურ პროცესორებიან გამოთვლულ სისტემებზე	96
<b>*T.Davitashvili, H.Meladze. ABOUT SOME ALGORITHMS FOR SOLUTION OF SYSTEMS OF THE NONLINEAR EQUATIONS ON COMPUTING SYSTEMS WITH PARALLEL PROCESSORS</b>	
ნ.არჩვაძე, მ.ფხოველიშვილი. ობიექტზე ორიენტირებული დაკრობრამება LISP საფუძველზე	99
<b>*N. Archvadze, M. Pkhovelishvili. OBJECT-ORIENTED PROGRAMMING ON LISP BASIS</b>	
ვ.ოდიშარია, ჯ.ფერაძე. რიცხვითი ალგორითმი ტიმოშენკოს ერთბანზომილებიანი არაწვრივი სისტემისათვის	103
<b>*V. Odisharia, J. Peradze. A NUMERICAL ALGORITHM FOR A ONE- DIMENSIONAL NONLINEAR TIMOSHENKO SYSTEM</b>	
*ჯ.ფერაძე, ვ. ოდიშარია იტერაციული პროცესის კრებადობა რხმვის ერთი სამბანზომილებიანი ამოცანისათვის	106
<b>V. Odisharia, J. Peradze. THE COVERGENCE OF AN ITERATION METHOD FOR ONE THREE-DIMENSIONAL OSCILLATION PROBLEM</b>	

<b>*ზ.მოდეზაძე. GRID - ქსელების არქიტექტურის მონიტორინგის სერვისი</b>	<b>109</b>
<b>Z.Modebadze. GRID NET ARCHITECTURE MONITORING SERVICE</b>	
<b>მ.ცინცაძე. არამკავშირ ობიექტების კანონიკური შემუშავება</b>	<b>112</b>
<b>*M. Tsintsadze. ON CANONICALLY CONJUGATE FUZZY SUBSET</b>	

**სიმეტრიული მატრიცულ თამაშის ამოხსნა  
ჩვეულებრივი დიფ. განტოლებების გამოყენებით**

კ. გელაშვილი, მ. თუთბერიძე

**მოტივაცია.** 1950 –იან წლებში მატრიცული თამაშების ამოხსნის მიზნით შეიქმნა სიმპლექს-ალგორითმი, ბრაუნის მეთოდი [1], ფონ ნეიმანის მეთოდი [2], დიფ. განტოლებების გამოყენებაზე დაფუძნებული ბრაუნის და ფონ ნეიმანის მეთოდი [3]. სიმპლექს-ალგორითმზე დაფუძნებული მეთოდები ამჟამად აქტიურად გამოიყენება მატრიცულ თამაშებსა და წრფივ დაპროგრამებაში. თუმცა, ჩვენი აზრით, შესაძლებელია სხვა აღნიშნული მეთოდების მკვეთრი გაუმჯობესება ოპტიმიზაციის თანამედროვე იდეების საფუძველზე.

**ბრაუნის და ფონ ნეიმანის მეთოდის იდეა და ზოგიერთი მახასიათებელი.** ამ მეთოდის მიხედვით, სიმეტრიულ მატრიცულ თამაშში ირიბსიმეტრიული  $A = (a_{ij}^j)_{i,j=1}^n$  (ე.ი.  $a_{ij}^j = -a_{ji}^i$ ) მატრიცით,

მეორე მოთამაშის შერეული სტრატეგია  $y(t)$  წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს გარკვეულ (ფონ ნეიმანისა და ბრაუნის მიერ შედგენილ) კოშის ამოცანას. როცა  $t \rightarrow \infty$ ,  $y(t)$ -ს ნებისმიერი ზღვარითი წერტილი წარმოადგენს ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას ანუ ამონახსნს. ამ მეთოდის შემდეგი სამი მახასიათებლის გამო:

1. თუ ამონახსნი ერთადერთი არაა, მეთოდი პოულობს მხოლოდ თამაშის ფასს;
2. თამაშის ფასის განსაზღვრას დროის უსასრულო  $[0, \infty)$  შუალედი სჭირდება;
3.  $[0, \infty)$ -ზე დიფ. განტოლების მიახლოებით ამოხსნას ახლავს სპეციფიკური სირთულეები;

ითვლება, რომ მატრიცულ თამაშებში დიფ. განტოლებების გამოყენება მხოლოდ თეორიული თვალსაზრისით არის საინტერესო.

**ჩვენი მეთოდის იდეა და ზოგიერთი მახასიათებელი.** შესაძლებელია მატრიცული თამაშის სასრულ დროში ამოხსნა (და არა მხოლოდ მისი მნიშვნელობის პოვნა), თუ ფონ ნეიმანისა და ბრაუნის მიერ შედგენილი დიფ. განტოლებათა სისტემასთან ერთად გამოვიყენებთ სხვა, ახლებურად შედგენილ დიფ. განტოლებათა სისტემას, და შერეულ სტრატეგია  $y(t)$ -ს შევადგენთ მათი ამონახსნების სინთეზით. ასეთი მიდგომით,  $y(t)$  განისაზღვრება სასრულ შუალედზე და მისი მნიშვნელობა ბოლო მომენტში წარმოადგენს ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას ანუ ამონახსნს. ამგვარად, საბაზო მეთოდის პირველი ორი ნაკლი სრულად ქრება, ხოლო მესამე მნიშვნელოვნად სუსტდება. აღსანიშნავია, რომ მეთოდი უმჯობესდება არა მხოლოდ თეორიულად. C –პროგრამა, რომელიც წარმოადგენს ამ მეთოდის პროგრამული რეალიზაციის პირველ მარტივ ცდას, შემთხვევითად შერჩეული მონაცემებისთვის ეფექტურად და საიმედოდ მუშაობს როცა მატრიცის გამზომილება ათეულების რიგისაა.

**მეთოდის აღწერა.** ვთქვათ,  $y = (y^1, \dots, y^n)$  არის შერეული სტრატეგია, ხოლო  $h = (h^1, \dots, h^n)$  მიმართულება, ანუ  $n$  – განზომილებიანი სივრცის ერთეულოვანი წრეწირის რომელიმე ვექტორი.  $\max_i \{a_i y^T\}$  სიდიდეს ვუწოდოთ (პირველი მოთამაშის) საუკეთესო პასუხი  $y$ -ზე, სადაც  $a_i$  არის

$A$  მატრიცის  $i$ -ური სტრიქონი, ხოლო  $a_i y^T = \sum_j a_{ij}^j y^j$ . თუ  $y$  ოპტიმალურია, მაშინ მასზე საუკეთესო პასუხი არის ნული.  $y$ -ის წინააღმდეგ საუკეთესო პასუხების მოძებნა ინდექსების სიმრავლე აღვნიშნოთ  $I(y)$ -ით.

ოვველი  $y \in Y$ -ისთვის განვიხილოთ მინიმიზაციის ამოცანა (იხ. მარჯვნივ), სადაც  $I(y) = \{i_1, \dots, i_k\}$ . როცა ამ ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი  $\hat{h}$ , მაშინ ვთვლით, რომ  $v(y) = \hat{h}$ . თუ ამონახსნი არ არის ან ერთადერთი არ არის, ასეთ  $y$ -ს ვუწოდებთ ჩიხს. ერთ-ერთ ჩიხს თვითონ ოპტიმალური შერეული სტრატეგია წარმოადგენს.

სიმეტრიული მატრიცული თამაშის ალგორითმი ასეთია.

1. ნებისმიერად ვიღებთ საწყისი პირობას  $y_0$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i_1} h^T \rightarrow \min, \\ a_{i_1} h^T = a_{i_2} h^T, \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i_k} h^T = a_{i_k} h^T, \\ h h^T = 1, \\ \sum_j h^j = 0, \\ (y^j = 0) \Rightarrow (h^j = 0), \end{array} \right.$$

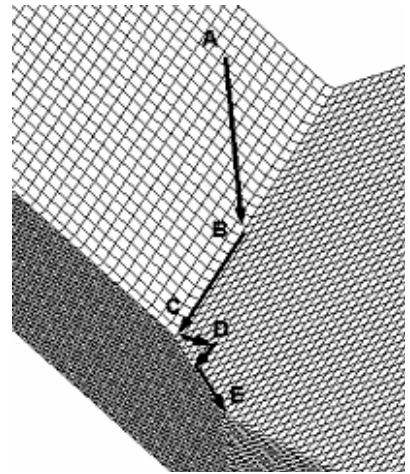


2. თუ  $y_0$  არის ოპტიმალური შერეული სტრატეგია, ვამთავრებთ მუშაობას; თუ  $y_0$  არ არის ჩიხი, გადავიდვართ მესამე ბიჯზე; სხვა შემთხვევაში, გადავიდვართ მეოთხე ბიჯზე;
3.  $y_0$  საწყისი პირობით ვხსნით  $\dot{y} = v(y)$  სისტემას, ვიდრე ტრაექტორიის ბოლო ჩიხი არ გახდება, მიღებულ ჩიხს აღვნიშნავთ  $y_0$ -ით და გადავიდვართ მეორე ბიჯზე;
4. ვხსნით ბრაუნ – ფონ ნეიმანის სისტემას  $y_0$  საწყისი პირობით, ვიდრე საუკეთესო პასუხი უფრო მცირე არ გახდება  $y_0$ -ზე პასუხთან შედარებით;
5. ტრაექტორიის ბოლოს ვაცხადებთ  $y_0$ -ად და გადავიდვართ მეორე ბიჯზე.

წარმოვიდგინოთ რომ საუკეთესო პასუხის ასახვის გრაფიკის ფრაგმენტს აქვს შემდეგ ნახაზზე მოცემული სახე და  $A = (y_0, \max_i \{a_i(y_0)^T\})$ . რადგან ამ შემთხვევაში საუკეთესო

პასუხი ერთი ინდექსისთვის მიიღწევა, ამიტომ საძიებელი  $h$  მიმართულება წარმოადგენს ანტიგრადიენტის მიმართულებას  $y_0$ -ში. დიფ. განტოლების

ველი  $h$ -ის ტოლია ვიდრე საუკეთესო პასუხი გახდება გრაფიკის  $B$  წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლი (ამ მომენტში საუკეთესო პასუხების მოძიება ინდექსების  $I$  სიმრავლე იზრდება).  $B$  წერტილში კვლავ შეგვიძლია საჭირო დასაშვები მიმართულების განსაზღვრა. ეს მიმართულება მუდმივია  $C$  წერტილამდე, რომელიც წარმოადგენს ჩიხს. ამიტომ,  $C$  წერტილის შესაბამისი დროის  $s$  წერტილიდან დაწყებული ვხსნით ბრაუნ – ფონ ნეიმანის დიფ. განტოლებას  $y(s)$  საწყისი პირობით, ვიდრე რომელიმე  $s_1$  წერტილში  $y(s_1)$ -ზე საუკეთესო პასუხი უფრო მცირე გახდება ვიდრე  $C$  წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა. ნახაზზე  $CD$  წარმოადგენს მონაკვეთს, თუმცა იგი შეიძლება იყოს ბევრად რთული სახის წირი.



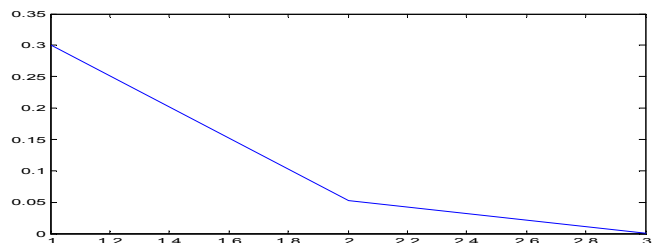
$D$  წერტილიდან კვლავ შეგვიძლია დიფ. განტოლების ველის განსაზღვრა დასაშვები მიმართულების საშუალებით და შემდეგ როგორც თავიდან. გრაფიკის  $E$  წერტილი კვლავ ჩიხს შეესაბამება, ანუ ამ მომენტიდან ვუბრუნდებით ბრაუნ-ფონ ნეიმანის განტოლებას და ასე შემდეგ, ვიდრე საუკეთესო პასუხი არ გახდება ნულის ტოლი.

**ალგორითმის კორექტულობა.** სტატიის ფორმატი არ იძლევა ალგორითმის დაწვრილებითი ანალიზის საშუალებას. ჩვენ უბრალოდ შევნიშნავთ, რომ მეთოდი ყოველითვის იძლევა ოპტიმალური შერეული სტრატეგიის განსაზღვრის საშუალებას, რადგან ყოველი ჩიხიდან გამოსვლა გარანტირებულია ბრაუნ-ფონ ნეიმანის მეთოდის ზუსტი შეფასებების საფუძველზე. ხოლო ჩიხების მთლიანი რაოდენობა სასრულია ელემენტარული კომბინატორული მოსაზრებების გამო.

**რამდენიმე ტესტი.** განვიხილოთ სხვადასხვა განზომილების რამდენიმე სიმეტრიული თამაში და მოვახდინოთ ჩვენი მეთოდის გამოყენების გრაფიკული გააზრება.

**მაგალითი 1.** ავიღოთ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_0^T = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.6 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

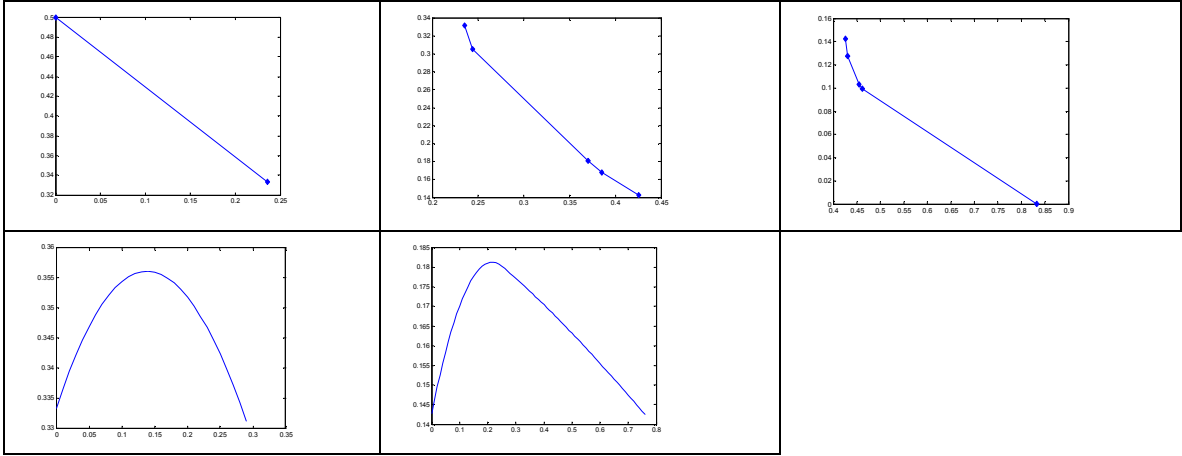


მაშინ ოპტიმალური შერეული

სტრატეგია  $y \approx (0.1667; 0.0000; 0.5000; 0.3333)$  მიიღება უბან-უბან მუდმივი დიფ. განტოლების ამოხსნის შედეგად, ბრაუნ-ფონ ნეიმანის სისტემაზე გადასვლის გარეშე. შერეული სტრატეგიის ცვლილება ( $y_0$ -იდან ამონახსნამდე) ნაჩვენებია მარჯვნივ.

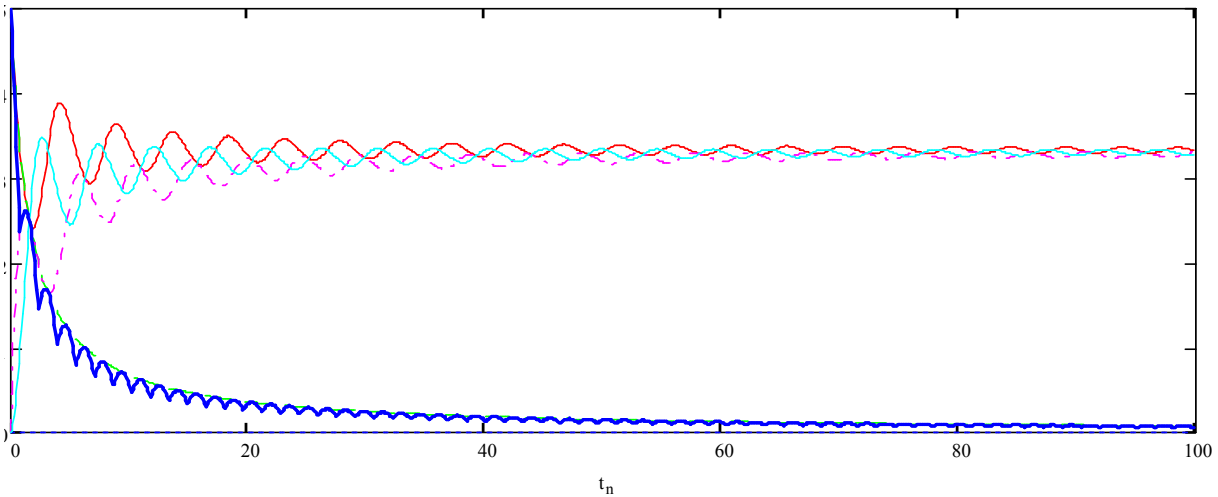
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_0^T = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**მაგალითი 2.** ავიღოთ: მაშინ ოპტიმალური შერეული სტრატეგია  $y \approx (0.3333; 0.0000; 0.0000; 0.3333; 0.3333)$  მიიღება უბან-უბან მუდმივი და ბრაუნ-ფონ ნეიმანის სისტემის მონაცვლეობითი გამოყენებით, რაც ნაჩვენებია შემდეგ ცხრილში:



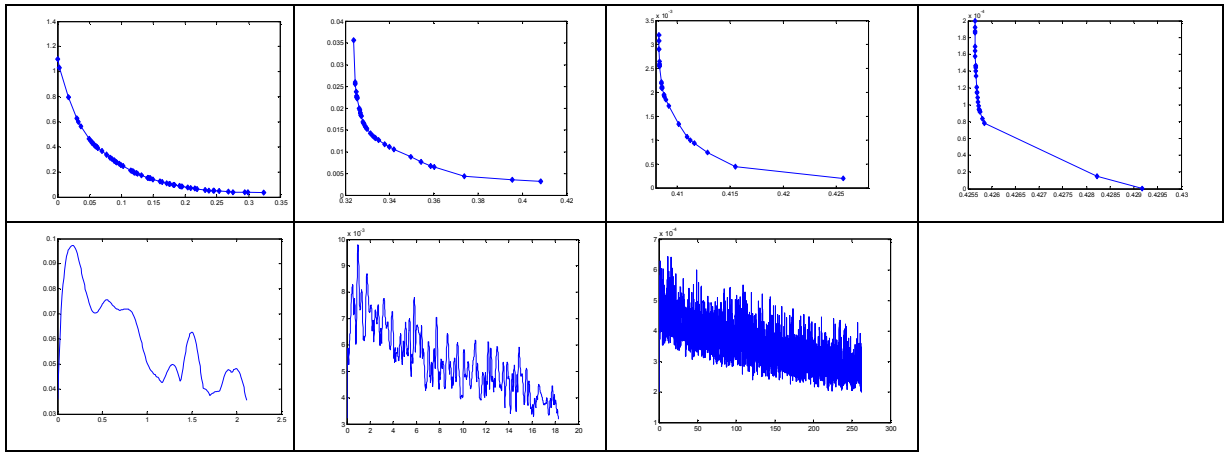
შეგნიშნოთ, რომ ორდინატთა ღერძის მასშტაბი სხვადასხვა უჯრაში სხვადასხვაა. ყოველ გრაფიკზე საუკეთესო პასუხის ასახვის ბოლო მნიშვნელობა წარმოადგენს მომდევნო გრაფიკზე საუკეთესო პასუხის ასახვის საწყის მნიშვნელობას.

შედარებისთვის შეგვიძლია ვნახოთ თუ როგორ იცვლება შერეული სტრატეგიები და საუკეთესო ასახვის ფუნქცია (ქვედა გრაფიკი შემდეგ ნახაზზე) დროის საკმაოდ დიდ შუალედზე, მხოლოდ ბრაუნ-ფონ ნეიმანის სისტემის გამოყენების შემთხვევაში:



შეგნიშნოთ, რომ ჩვენს მეთოდში დროის ინტერვალი გაცილებით მცირეა.

**მაგალითი 3.** ამ შემთხვევაში  $A$  არის ირიბსიმეტრიული  $70 \times 70$  მატრიცა, შევსილი შემთხვევითი რიცხვებით დიაპაზონიდან  $\text{rand}()$  ფუნქციის გამოყენებით,  $y_0$ -ის ყველა კომპონენტი ერთმანეთის ტოლია. მაშინ ოპტიმალური შერეული სტრატეგია, რომლის ზუსტ სახეს არ მოვიყვანთ მოცულობაზე შეზღუდვის გამო, კვლავ მიიღება უბან-უბან მუდმივი და ბრაუნ-ფონ ნეიმანის სისტემის მონაცვლეობითი გამოყენებით, რაც ნაჩვენებია შემდეგ ცხრილში:



### Summary

New method to solve symmetric matrix games by differential equations is described. It allows us to find out optimal mixed strategy in finite time, whilst the old ODE-based method, belonging to Brown and von Neumann, in general case gives only the value of game and its trajectory must be found on  $[0, \infty)$ .

### გასაღები სიტყვები

სიმეტრიული მატრიცული თამაში, დიფ. განტოლება, ბრაუნ-ფონ ნეიმანის მეთოდი, ოპტიმალური შერეული სტრატეგია, რიცხვითი ალგორითმი, წრფივი პროგრამირება, სიმპლექს-ალგორითმი.

### ლიტერატურა:

1. Brown, G. W. (1951): Iterative solution of games by fictitious play. In *Activity Analysis of Production and Allocation*, Koopmans, T. C. (ed.), 374-376. Wiley.
2. von Neumann, J. A numerical method to determine optimum strategy, *Naval Research Logistic Quart.*, 1, 109-115, 1954.
3. Brown, G.W., von Neumann, J. (1950): Solutions of games by differential equations. *Annals of Mathematical Studies* 24, 73-79.

## QUANTUM PROCESSOR BASED ON A THREE LEVEL QUANTUM SYSTEM

G.Giorgadze, Z.Melikishvili

Institute of Cybernetics

In the work [1] we have explicitly constructed the evolution operator of a three-level atom in a two-mode field and indicated possibility of applying atom-photon interactions to the construction of a quantum register and processor in spirit of [2].

More than quarter century ago an attempt was made to explicate fundamental limits bounding possibilities of a computer resulting from laws of physics. As a result of the conducted research it was found that minimal energy per one bit that is lost in the computation process is of order  $kT$ , where  $k$  is the Boltzmann constant and  $T$  is the absolute temperature of the computing device [4-7].

This fundamental limit is a consequence of irreversibility of processes taking place in an elementary computing device which plays the role of a logical gate.

At the same time it was shown that one can transcend this limit if in a computing device one uses reversible logical gates, i. e. logical gates with the property that the physical processes taking place in them are reversible. As a result of this, entropy does not change in the course of computation, consequently, such logical gates will be conservative logical gates realizing an invertible Boolean function and conserving the total number of bits of information [6-7].

Physical realization of a classical logical gate remained technically unsolved for many years. Progress has been achieved only in the nineties in the works [3], [8].

The constructed model of computation is in certain sense optimal, since the three-valued gate is optimal from the point of view of efficiency of information recording, whereas the logical gates are reversible.

### References

- [1] Giorgadze, G., Melikishvili, Z. *Journal of Mathematical Sciences*, pp. 1-19, vol.153, N 2, 2008, see also LANL preprint, arXiv:quant-ph/0604003, 2006.
- [2] Suzko, A.A., Giorgadze, G. *Physics of Particles and Nuclei* 39 (4), pp. 578-596, 2008
- [3] Antipov, A.L., Bykovsky, A.Yu., Vasiliev, N.A., Egorov, A.A. *Journal of Russian Laser Research*, 27 (5), pp. 492-505, 2006
- [4] Landauer R. *IBM J.Res.Devel.* 5, 183, 1961
- [5] Bennett C.H. *IBM J.Res.Devel.* 17, 525, 1973
- [6] Fredkin E, Toffoli T. *Int.J.Theor.Phys.* 21, 219, 1982
- [7] Feynmann R.P. *Found.Phys.* 16, 507, 1986
- [8] Konishi T. et.al. *Appl.Opt.* v.34, N 17, p.3097

**ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების ახლის შესახებ**

**რ. მეგრელიშვილი, მ. ჭელიძე, თ. გნოლიძე**

**შესავალი**

თავის ცნობილ ნაშრომში ბრიუს შნაიერი [1] შენიშნავს, რომ დამატებითი ვარიანტებისა და განზოგადების შედეგად ციფრული ხელმოწერის სქემების რაოდენობამ შეიძლება შეადგინოს ცამეტ ათასზე მეტი (თუმცა მათგან ყველა ეფექტური არ იქნება).

ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების უმრავლესობა ეფუძნება გალუას  $GF(p)$  ველეებში დისკრეტული ლოგარითმების, ფესვის ამოღებისა და ფაქტორიზაციის პრობლემებს [1-3].

წინამდებარე ნაშრომში ავტორები იკვლევენ ციფრული ხელმოწერის შესაძლო ვარიანტებს, რომლებიც, აგრეთვე, იყენებს დისკრეტული ლოგარითმების პრობლემას (ანუ  $g^x \equiv y \pmod{p}$  ცალმხრივ ფუნქციას). მათემატიკური საფუძვლების სივიწროვე, ცხადია, ართულებს ალტერნატიული კრიპტოგრაფიული ალგორითმების აგებას. ამავე დროს აღსანიშნავია, რომ, როგორც სხვა ცნობილ შემთხვევებში, პროტოტიპად (კვლევის ვარიანტად) გამოყენებულია ერთ-ერთი, კერძოდ, ელგამალის სქემა [4], რათა გარკვეული ფუნქციონალური ელემენტის შემოტანის შედეგად მივიღოთ ალგორითმის, როგორც ვარიანტის, ახალი სტრუქტურული თვისებობა.

**1. პირველი ალგორითმის აგება**

არსებული ალგორითმების სახესხვაობები და ფუნქციონირება ითვალისწინებს გარკვეულ პროტოკოლურ შეზღუდვებსა და პირობითობას. ამის მაგალითია თუნდაც ის, რომ ელგამალის ალგორითმი კრძალავს ერთ-ერთი პარამეტრის სიდიდის განმეორებით გამოყენებას ხელმოწერის სხვადასხვა სეანსში. განვიხილოთ ეს კერძო შემთხვევა ზოგიერთი ფუნქციონალური დამოკიდებულების გამარტივებული წარმოდგენით. ვთქვათ, რომ პირველ და მეორე სეანსში პროტოკოლის საწინააღმდეგოდ  $k_1 = k_2$  (ანუ  $R_1 = R_2$ ); მაშინ პირველ სეანსში ელგამალის ალგორითმის სინთეზის ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$M_1 \equiv (xR_1 + k_1S_1) \pmod{p-1} \quad (1.1)$$

სადაც  $M_1$  არის პირველი სეანსის  $M_{01}$  ინფორმაციის ჰეშირებული სიდიდე  $M_1 = H(M_{01})$ ;  $X$ -ინფორმაციის გამგზავნი სუბიექტის საიდუმლო გასაღები;  $k_1$ - ერთჯერადი შემთხვევითი საიდუმლო სიდიდე;  $R_1 \equiv a^{k_1} \pmod{p}$  და  $S_1$  -ხელმოწერის წყვილი,  $1 < a < p$ ;  $p$  - მაღალი რიგის მარტივი რიცხვი ( $a$  და  $p$  ღიაა). მეორე სეანსისათვის შესაბამისად გვექნება:

$$M_2 \equiv (xR_1 + k_1S_2) \pmod{p-1} \quad (1.2)$$

(1) და (2)-დან მიიღება:

$$M_1 - M_2 \equiv (k_1S_1 - k_1S_2) \pmod{p-1},$$

საიდანაც განისაზღვრება

$$k_1 \equiv \frac{M_1 - M_2}{S_1 - S_2} \pmod{p-1} \quad (1.3)$$

სიდიდე, თუ  $(S_1 - S_2, p-1) = 1$ ; რაც ალგორითმის გატეხვას ნიშნავს, რადგან (1)-დან შესაძლებელი იქნება საიდუმლო გასაღების განსაზღვრა.

განვიხილოთ სინთეზის (1.1) ფორმულის განსხვავებული, გამარტივებული ვარიანტი:

$$S \equiv (x + kM) \pmod{p-1} \quad (1.4)$$

შემოწმების ფორმულა შესაბამისად არის:

$$a^S \equiv yR^M \pmod{p}, \quad (1.5)$$

სადაც  $y \equiv a^x \pmod{p}$  - ღია გასაღები, ხოლო  $M = H(M_0)$  სიდიდისათვის საჭიროა დამატებითი პირობის შემოტანა, რომ ის ჰეშირების შემდეგ საჭიროების შემთხვევაში გარდაიქმნას ისე, რომ დაკმაყოფილდეს პირობა:  $2 \nmid M$   $M$  სიდიდის ლუწობის პირობა, რაც მარტივად განხორციელდება).  $M$  სიდიდის ლუწობის პირობის შემოტანა დაიცავს ალგორითმს გატეხვისაგან. განვიხილოთ შემოწმების (1.5) ფორმულა. დავუშვათ, რომ მოცემული  $M_{\#} = H(M_{0\#})$  ინფორმაციისათვის  $S$  პარამეტრი შევარჩიეთ, როგორც გარკვეული  $S_{\#}$  სიდიდე და შევეცადოთ განესაზღვროთ  $R_{\#}$ :

$$a^{S_{\#}} \equiv yR_{\#}^{M_{\#}} \pmod{p}. \quad (1.6)$$

(1.6) გამოსახულებაში  $R_{\#}$  სიდიდის გარდა ყველა პარამეტრი ცნობილია. თუ  $(M_{\#}, p-1) = 1$ , რაც შესაძლებელია, მაშინ:

$$R_{\#} \equiv (y^{-1}a^{S_{\#}})^{M_{\#}^{-1}} \pmod{p}, \quad (1.7)$$

სადაც  $M_{\#}M_{\#}^{-1} \equiv 1 \pmod{p-1}$ . მაგრამ, თუ  $M_{\#}$  ლუწი სიდიდეა, მაშინ  $(M_{\#}, p-1) \neq 1$ ,  $R_{\#}$  სიდიდის განსაზღვრა (6)-ე ფორმულიდან შეუძლებელია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ალგორითმი ამ მეთოდით არ გატყდება და პროტოკოლით დაუშვებელი  $|M_{\#}||R_{\#}||S_{\#}|$  კონკატენაციის ყალბი გზავნილი არ შედგება.

ჰემირების შემდეგ  $M$  სიდიდისათვის ლუწობის პირობის შესრულება არ წარმოადგენს რთულ ოპერაციას, მაგრამ შესაძლებელია სინთეზის და შემოწმების ფორმულისათვის განხილული ალგორითმის შემდეგი ვარიანტიც:

$$S \equiv (x + 2km) \pmod{p-1}, \quad (1.8)$$

$$a^S \equiv yR^{2M} \pmod{p} \quad (1.9)$$

განვიხილოთ ეს ვარიანტი. გატყების მცდელობამ სინთეზის (1.8) ფორმულის მიმართ შედეგი არ გამოიღო. რაც შეეხება შემოწმების (1.9) ფორმულას, (1.6) და (1.7) ფორმულების განხილვამ აჩვენა, რომ განხილული მეთოდით გატყების მცდელობა უშედეგო უნდა იყოს, რადგან  $2M$  სიდიდე უპირობოდ ლუწია.

## 2. მეორე ალგორითმის აგება

მოცემული ალგორითმისათვის სინთეზის და შემოწმების ფორმულებს, შესაბამისად, აქვს შემდეგი სახე:

$$S = (x + kRM) \pmod{q} \quad (2.1)$$

და

$$a^S \equiv yR^{RM} \pmod{p}. \quad (2.2)$$

ინფორმაციული გზავნილისა და ხელმოწერის კონკატენაცია ქმნის შემდეგ ჩანაწერს:

$$|M_0||R||S|, \quad (2.3)$$

სადაც  $M \equiv H(M_0)$ ,  $M_0$  - გადაცემული ინფორმაციაა, რომელიც პროტოკოლით არის დაცული;  $R \equiv a^k \pmod{q}$  და  $S$  - ხელმოწერების წყვილი;  $k$  - ერთჯერადი გამოყენების შემთხვევითი, საიდუმლო რიცხვია.

თუ ალგორითმის პარამეტრებს განვიხილავთ, როგორც გალუას  $GF(p)$  ველის ციკლური ჯგუფის ქვეჯგუფის ელემენტებს, მაშინ ძირითადი პარამეტრების შერჩევისათვის გვექნება შემდეგი წესი:

$p$  - მაღალი რიგის მარტივი რიცხვია (მაგალითად, 509 და 512 ბიტებს შორის);

$q$  - მარტივი რიცხვია,  $p-1$  რიცვის მამრავლი, შედარებით ნაკლები, მაგრამ გარკვეული რიგისა;

$a$  - ქვეჯგუფის გენერატორია, ნებისმიერი რიცხვია, რომელიც  $(p-1)$ -ზე ნაკლებია და რომლისათვისაც  $a^q \pmod{p} \equiv 1$ ;

$x$  - საიდუმლო გასაღებია,  $0 < x < q$ ;

$y$  - ღია გასაღები, რომელიც გამოითვლება  $x$  პარამეტრით:  $y \equiv a^x \pmod{p}$ .

**ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების აბეზის შესახებ**  
**რ. მეგრელიშვილი, მ. ჭელიძე, თ. გნოლიძე**

გამოკვლეულია ციფრული ხელმოწერის ალგორითმების ორი ვარიანტი. როგორც სხვა ცნობილი სქემები, მოცემული ალგორითმებიც წარმოადგენს ელგამალის ალგორითმის გარკვეულ მოდიფიკაციას. მთავარი არსი მდგომარეობს მასში, რომ ზოგიერთი პარამეტრის გარკვეული ფუნქციური თვისების გამოყენებით მიიღება საჭირო სტრუქტურული ალტერნატივა.

**ABOUT THE CONSTRUCTION OF DIGITAL SIGNATURES ALGORITHMS**

**R. Megrelishvili, M. Chelidze, T. Gnolidze**

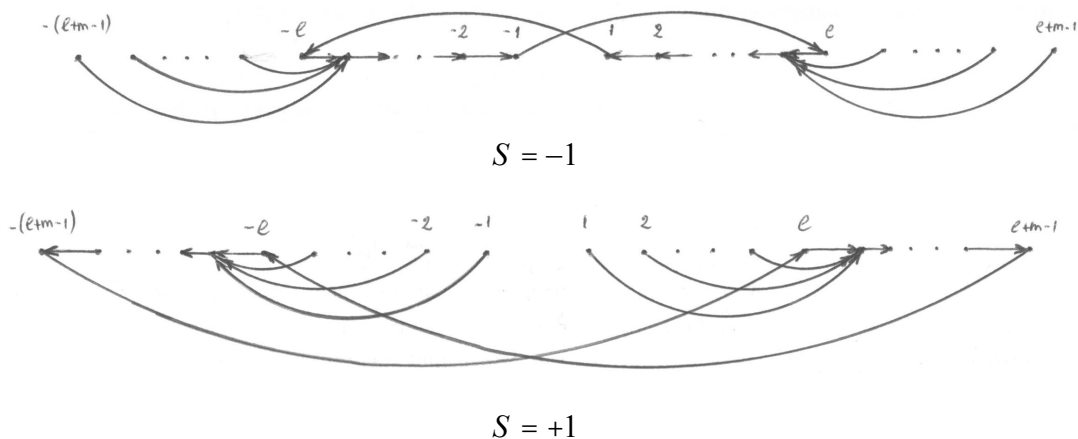
There are discussed the available variants of construction the algorithms of digital signatures. The algorithms, as many other algorithms, are obtained from the simplification of the algorithm of ElGamal. The main objective is to change the functionality of some parameters, in a result we obtain the necessary structural alternation.

ლიტერატურა

1. Schneier B. Applied cryptography. John Wiley and Sons. Inc. New York. 1996.
2. Diffie W. and Hellman M.E. New direction in cryptography. IEEE Trans. on Inf. Theory, v. IT-22, n.6., Nov. pp. 644-654, 1976.
3. Rivest R. L., Shamir A. and Adleman L.M. A method for obtaining digital signature and public-key cryptosystems. Communications of the ACM, v.21, n.2. Feb. pp. 120-126, 1978.
4. ElGamal T. A public-key cryptosystem and signature scheme based on discrete logarithms. IEEE Trans. on Inf. Theory, v. IT-31, n.4. pp. 469-472, 1985.

**სასრული ავტომატის ქცევის ერთი ალგორითმის შესახებ  
ტ. ხვედელიძე**

ვთქვათ, სასრული  $A_{2n,2}$  ავტომატი, რომელსაც გააჩნია  $2n$  ( $n = e + m - 1$ ) რაოდენობის  $L^{(n)} = L_1^{(n)} \cup L_2^{(n)} = \{-(e + m - 1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, e + m - 1\}$  შიგა მდგომარეობა და შეუძლია შეასრულოს ორი განსხვავებული  $f_1$  და  $f_2$  მოქმედება, ფუნქციონირებს  $C(a_1, a_2)$  სტაციონალურ შემთხვევით გარემოში  $|1|$ . იგულისხმება, რომ მდგომარეობათა  $L_1^{(n)} = \{-(e + m - 1), -(e + m - 2), \dots, -2, -1\}$  ქვესიმრავლეში სრულდება პირველი მოქმედება, ხოლო მდგომარეობათა  $L_2^{(n)} = \{1, 2, \dots, e + m - 2, e + m - 1\}$  ქვესიმრავლეში - მეორე.  $C(a_1, a_2)$  გარემოში  $A_{2n,2}$  ავტომატის ქცევის ტაქტიკა განვსაზღვროთ შემდეგი წესით: ავტომატი ცვლის მოქმედებას, თუ მის შესასვლელზე ზედიზედ მოვიდა  $\ell$  სიგრძის ჯარიმა ან  $m$  სიგრძის დაჯილდოება. ამავე დროს ამავე დროს ავტომატის მოქმედების შეცვლა შესაძლებელია მხოლოდ  $|x| = 1$  და  $|x| = e + m - 1$ . განაპირა მდგომარეობებიდან. ასე რომ  $A_{2n,2}$  ავტომატს გააჩნია ერთი შესასვლელი და ორი გასასვლელი (ნახ.1)



ნახ.1.  $A_{2n,2}$  ავტომატის მდგომარეობათა გრაფი

ვთქვათ  $u_{x,d}^{(n)}$  არის ალბათობა იმისა, რომ  $A_{2n,2}$  ავტომატი  $d$  მომენტში პირველად შეცვლის  $f_x$  მოქმედებას  $x \in L_a^{(n)}$  მდგომარეობიდან სტარტის შემდეგ. მოქმედების შეცვლის ალბათობის მაწარმოებელ ფუნქციას აქვს სახე

$$U_x^{(n)}(z) = \sum_{d=0}^{\infty} u_{x,d}^{(n)} z^d.$$

შემდგომში ძირითადად განვიხილავთ ავტომატის ქცევას იმ ქვესიმრავლეში, რომელიც აღნიშნულია რომელიმე მოქმედებით მის შეცვლამდე და ჩანაწერების შემოკლების მიზნით  $\alpha$  ინდექსს გამოვტოვებთ.

$C(a_1, a_2)$  გარემოში  $A_{2n,2}$  ავტომატის ფუნქციონირების გათვალისწინებით  $U_x^{(n)}(z)$  მაწარმოებელი ფუნქციის მიმართ გვექნება განტოლობები:



$$\begin{aligned} U_x^{(n)}(z) &= p z U_{x-1}^{(n)}(z) + q z U_{e+1}^{(n)}(z), & x = \overline{1, e-1}, \\ U_e^{(n)}(z) &= p z U_{e-1}^{(n)}(z) + q z U_{e+1}^{(n)}(z), \\ U_x^{(n)}(z) &= p z U_{e-1}^{(n)}(z) + q z U_{x+1}^{(n)}(z), & x = \overline{e+1, e+m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

და სასაზღვრო პირობები:

$$U_0^{(n)}(z) = U_{e+m}^{(n)}(z) = 1. \quad (2)$$

(1) და (2)-დან  $U_x^{(n)}(z)$ -ის მიმართ საბოლოოდ მივიღებთ ფორმულას:

$$U_e^{(n)}(z) = \frac{(1-pz)p^e z^e (1-q^m z^m) + (1-qz)q^m z^m (1-p^e z^e)}{1-z + q p^e z^{e+1} + p q^m z^{m+1} - p^e q^m z^{m+e}}$$

$C(a_1, a_2)$  შემთხვევით გარემოში  $A_{2n,2}$  ავტომატის ქცევის ტაქტიკის გათვალისწინებით ადგილი შესამჩნევია, რომ ეს ფორმულა სრულად თანხვედრა ცნობილი სტატისტიკური წესისათვის “ან  $m$  სივრძის წარმატებათა სერია, ან  $l$  სივრძის წარუმატებლობათა სერია”. დაბრუნების დროს მაწარმოებელი ფუნქციის რეკურენტული გზით მიღებულ ცნობილ ფორმულის.

ადგილი შესამჩნევია აგრეთვე, რომ  $C(a_1, a_2)$  გარემოში  $A_{2n,2}$  ავტომატის ფუნქციონირება აღიწერება მარკოვის სასრული ერთგვაროვანი ერგოდული ჯაჭვით. ასეთი ავტომატებისთვის  $f_\alpha$  მოქმედების შეცვლის  $\sigma_\alpha^{(n)}$  აღბათობა ერთის ტოლია, ხოლო საშუალო  $\tau_\alpha^{(n)}$  დრო  $f_\alpha$  მოქმედების შეცვლამდე ნებისმიერ  $C(a_1, a_2)$  არაგადაავარებულ ( $|a_\alpha| \neq 1$ ) გარემოში სასრულია. შესაბამისად  $A_{2n,2}$  სასრული ავტომატები არიან გამომგდებნი თითოეულ სტაციონალურ შემთხვევით გარემოში [3].

მაშასადამე, ასეთი ავტომატების ოპტიმალურობა გამორიცხულია და მათი ქცევა განისაზღვრება მათი ფუნქციონირების მიზანშეწონილობის ხარისხით.

ვიტყვი, რომ  $C(a_1, a_2, \dots, a_k)$  გარემოში ავტომატის ქცევა მიზანშეწონილია  $/1/$ , თუ  $M(A; C) > M_0$ , სადაც  $M_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$  - მოვების მათემატიკური მოლოდინია, თუ ავტომატი თავის მოქმედებას ირჩევს თანაბარაღბათურად და გარემოსგან დამოუკიდებლად. შევნიშნოთ, რომ თუ  $M(A; C) = M_0$ , მაშინ ავტომატი ინდიფერენტულია, ხოლო თუ  $M(A; C) < M_0$  - არამიზანშეწონილი.

$C(a_1, a_2)$  გარემოში  $A_{2n,2}$  ავტომატის ქცევის გამოკვლევამ მოგვცა შემდეგი შედეგები:

1. როცა  $e = 1, m \geq 2$  ავტომატის ქცევა მიზანშეწონილია.
  2. როცა  $e = m = 1$  . ავტომატის ქცევა ინდიფერენტულია,
  3. როცა  $m = 1, e \geq 2$  ავტომატის ქცევა არამიზანშეწონილია.
- დავუშვათ ახლა , რომ  $e = m \neq 1$ . მაშინ ადგილი საჩვენებელია, რომ:
- ა) როცა  $p_1 + p_2 > 1$  ავტომატის ქცევა მიზანშეწონილია
  - ბ) როცა  $p_1 + p_2 = 1$  ავტომატის ქცევა ინდიფერენტულია,
  - გ) როცა  $p_1 + p_2 < 1$  ავტომატის ქცევა არამიზანშეწონილია.

## ON ONE ALGORITHM OF BEHAVIOUR OF FINITE AUTOMATA

*T. Khvedelidze*

We propose the automation on one algorithm of finite automata behaviour design which is a finitely automated realization of a well-known statistical rule from the theory of recurrent events: “either a series of gains of length  $m$  or a series of failures of length  $l$ ”. Since the behavior quality of a finite automation is defined by a degree of its operation purposefulness, the problem of existence of asymptotically optimal sequences of finite automations is solved by studying the behavior of the respective infinite automata. In this context, we have obtained conditions, the fulfillment of which makes the behavior of a finite automation of the proposed design purposeful and show that a sequence of finite automations of the considered design reduces to an infinite automation of the same design.

### **ლიტერატურა:**

1. მ.ლ.ცეტლინი “კვლევები ავტომატების თეორიაში და ბიოლოგიური სისტემების მოდელირება”. მოსკოვი. ” მეცნიერება”. 1969 (რუს).
2. ვ.ფელერი “შესავალი ალბათობის თეორიაში და მისი გამოყენება.”ტ.1.მოსკოვი, მშვიდობა, 1967(რუს).
3. ვ.ს.კოროლიუკი. ა.ი.პლეტნევი ს.დ.ეიდელმანი. ”ავტომატები.ხეტილები.თამაშები” მათემატიკურ მეცნიერებათა მიღწევები ტ.43..გვ.1(259) 1986. (რუს.)

**SOME FACETS OF THE LINEAR ORDERING POLYTOPE**  
**Bolotashvili G.**

Let consider  $K_n = (V_n, A)$  a complete directed graph  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  and weights  $c_{ij}$  for each edge  $(i, j) \in A$ . The set of acyclic tournaments is denoted by  $T_n$ . The linear ordering problem can be formulated in the following way: For any complete, directed graph find acyclic tournament with maximal weight.

Incidence points  $x^T \in R^{n^2-n}$  correspond to each acyclic tournament  $T \in T_n$  in the following way:

$$x_{ij}^T = \begin{cases} 1, & (i, j) \in T, \\ 0, & (i, j) \notin T. \end{cases}$$

Let consider now the problem:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n c_{ij} x_{ij} \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, \\ x_{ij} + x_{ji} = 1, \\ 0 \leq x_{ij} + x_{jk} - x_{ik} \leq 1, \\ i \neq j, i \neq k, j \neq k, i, j, k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

We have denoted the relaxational polytope of the linear ordering problem by  $B_n$ . Polytope  $B_n$  has integral vertices corresponding one-to-one to the admissible solutions of the linear ordering problem as well as the non-integral vertices. We denote the polytope of integer vertices as  $P_n$ .

In the paper [1] for the  $k$ -fence inequalities

$$\sum_{l=1}^m x_{i_l j_l} - \sum_{l=1, l \neq q}^m \sum_{q=1}^m x_{i_l j_q} \leq 1,$$

where  $I = \{i_1, \dots, i_m\}, J = \{j_1, \dots, j_m\}$  are arbitrary disjoint subsets of  $\{1, \dots, n\}, m \geq 3$ , in [2], [3], are constructed facets of the linear ordering polytope  $P_n$ ,  $t$ -reinforced  $k$ -fence inequalities

$$t \sum_{l=1}^m x_{i_l j_l} - \sum_{l=1, l \neq q}^m \sum_{q=1}^m x_{i_l j_q} \leq t(t+1)/2, \quad 1 \leq t \leq m-2.$$

Analogously previous in this paper for the  $(m, k)$ -fence inequalities

$$\sum_{l=1}^m x_{i_l j_l} - \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^{k-1} (x_{i_l j_{l+q}} + x_{i_l j_{l-q}}) \leq t' - 1,$$

where  $I = \{i_1, \dots, i_m\}, J = \{j_1, \dots, j_m\}$  are arbitrary disjoint subsets of  $\{1, \dots, n\}, m \geq 3$ ,

$m = t'k - 1, t' \geq 2, k \geq 2, j_{m+p} = j_p, j_{1-p} = j_{m-p+1}, p = 1, \dots, m$  in [4], are constructed new facets of the linear ordering polytope  $P_n$ , 2-reinforced  $(m, k)$  - fence inequalities  $t' \geq 2, t \geq 2$ ,

$$2 \sum_{l=1}^{m-2(k-1)} x_{i_l j_l} + \sum_{l=m-2k+3}^m x_{i_l j_l} - \sum_{l=1}^m \sum_{q=1}^{k-2} (x_{i_l j_{l+q}} + x_{i_l j_{l-q}}) -$$

$$- \sum_{l=1}^{m-2(k-1)} (x_{i_l j_{l+k-1}} + x_{i_{l+k-1} j_l}) - \sum_{l=1}^{m-2(k-1)} (x_{i_l j_{l-k+1}} + x_{i_{l-k+1} j_l}) \leq 4;$$

Resume

For the linear ordering polytope are constructed new facets.

რეზიუმე

წრფივი გადაადგილების ამოცანის მრავალწახნაგასათვის აგებულია ახალი ფასეტები.

References

1. Leung J., Lee J. More facets for linear ordering and acyclic subgraph polytope. Discrete Applied Math. 1994, v.50, 185-200.
2. Grottschel M., Junger M., Reinelt G. Facets of the linear ordering polytope. Mathematics programming 33, 43-60, 1985.
3. Bolotashvili G. G. On the facets of the permutation polytope. Georgian Academy of Sciences 121, N2, 281-284, 1986.
4. Bolotashvili G. G. A class of facets of the permutation polytope. Preprint VINITI, N 3403-B87, 1987.

## სწრაფი არითმეტიკის ალგორითმები

### ა.გამყრელიძე

**ანოტაცია:** სტატიაში წარმოდგენილია სწრაფი არითმეტიკის ალგორითმის რამოდენიმე მაგალითი და გაანალიზებულია ზოგადი გზები, რომლითაც შესაძლებელია მიმდევრობითი ალგორითმების გაპარალელელება და ამის ხარჯზე გამოთვლის დროის საგრძნობი შემცირება. სწრაფი მიმატების მაგალითზე მოყვანილია გაპარალელელების ასლებური მეთოდი, რის შედეგადაც შექმნილია დღეისათვის ცნობილ მიმატების ალგორითმებს შორის ყველაზე ეფექტური სიმეტრიული რეკურსიული სქემა.

#### 1. შესავალი

სწრაფი არითმეტიკა მეტად მნიშვნელოვანია ჩვენს დღევანდელ ცხოვრებაში. მაგალითად, სამხედრო დანიშნულების დანადგარებში (როგორცაა რაკეტსაწინააღმდეგო ალტურვილობა) სწრაფ გამოთვლებს სასიცოცხლო მნიშვნელობა აქვს. ამას გარდა, დიდი რიცხვების გადამუშავება საჭიროა კრიპტოგრაფიულ ალგორითმებში მონაცემთა კოდირების დროს, კომპიუტერულ თამაშებში რეალურ დროში მაღალხარისხიანი გრაფიკული გამოსახულების შექმნის დროს, სხვადასხვა მათემატიკური მოდელების შექმნის დროს და მრავალ სხვა პრაქტიკულ თუ თეორიულ ამოცანაში. ხშირად ისეც კი ხდება ხოლმე, რომ ასეთი რთული გამოთვლების ჩატარებას ვერც კი ვამჩნევთ ხოლმე: როდესაც კომპიუტერზე ჩვეულებრივ ტექსტს ვკრებთ, თანამედროვე მანქანას ვატარებთ, ან თვითმფრინავით ვმგზავრობთ - იქაც კი ტარდება რთული მათემატიკური თუ ლოგიკური ოპერაციები. ხშირად მათ სწრაფ გამოთვლაზე ბევრი რამ, მათ შორის ადამიანთა უსაფრთხოებაც კი არის დამოკიდებული.

თუ მოცემული გვაქვს ორი  $n$  თანრიგიანი რიცხვი, მათზე არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარება შეიძლება „ქვეშ მიწერის“ ალგორითმის გამოყენებით – ისე, როგორც ეს ყველამ სკოლაში ვისწავლეთ. მაგალითად, თუ მოცემულია ორი 3 თანრიგიანი რიცხვი  $A = 127$  და  $B = 228$ , მათი ჯამი  $C = 355$  ამ ორი რიცხვის თითოეული ციფრისა და „დახსომებული“ რიცხვის რიგ-რიგობით  $mod 10$  შეკრებით გამოითვლება. ამას გარდა, ყოველ ჯერზე უნდა „დავიხსომოთ“ დამატებითი ციფრი. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ორი  $n$  თანრიგიანი რიცხვის შესაკრებად  $O(n)$  ოპერაციაა საჭირო. თუ საჭიროა დიდი რიცხვების ან ბევრი პატარა რიცხვის შეკრება, ეს ალგორითმი უკვე აგარ გამოდგება. საჭიროა მისი დასტრუფება.

კიდევ უფრო ცუდ შედეგს მივიღებთ ორი  $n$  თანრიგიანი რიცხვის გამრავლების შემთხვევაში: ადვილი საჩვენებელია, რომ „ქვეშ მიწერით“ გამრავლებისას ოპერაციათა რაოდენობაა  $O(n^2)$ , რაც სიტუაციას უფრო ართულებს.

ძირითადად, ალგორითმების დაჩქარება მათი გაპარალელელების ხარჯზე ხდება: მონაცემები იყოფა ორ ან რამოდენიმე ნაწილად, შემდეგ ეს ნაწილები *ერთდროულად* და ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად გადამუშავდება და მიღებული შედეგები თავის მხრივ გადამუშავდება ისე, რომ ჩატარებულმა გამოთვლებმა საბოლოო შედეგი მოგვცეს. სწორედ მონაცემთა ერთდროულად გადამუშავების ხარჯზე ხდება დროის მოგება.

ამ ე.წ. „დაყავი და იბატონე“ პარადიგმაზე დაყრდნობილი ძირითადად ყველა ანდაგვარი გაპარალელელების მეთოდი. აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ ძირითადად *მონაცემები* იყოფა ნაწილებად. ძირითადად მონაცემები ორ ნაწილად იყოფა ხოლმე, მაგრამ ზოგ შემთხვევაში მათი მეტ ნაწილად დაყოფა უკეთეს შედეგს იძლევა. ანდაგვარი მეთოდი გამოყენებულია ქვემოთ მოყვანილ სწრაფი მიმატების ალგორითმში.

მაგრამ ზოგ შემთხვევაში ნაწილებად მონაცემების ნაცვლად *გამოთვლის სივრცე* იყოფა და სასურველი შედეგიც ამის ხარჯზე მიიღწევა. ანდაგვარი მეთოდი გამოიყენება შონაგესა და შტრასენის გამრავლების ალგორითმში, რომლის იდეაც შემდგომში იქნება წარმოდგენილი.

#### 2. სწრაფი მიმატების ალგორითმი

##### 2.1 პრეფიქსის გამოთვლის ამოცანა

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: მოცემულია ცვლადები  $x_1, x_2, \dots, x_n$  და რაიმე ასოციაციური ოპერაცია  $\circ$  (ეს შეიძლება იყოს მიმატება, გამრავლება, ორის მოდულით მიმატება, მაგრამ არა გაყოფა).

ე.წ. პრეფიქსის გამოთვლის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგი ფუნქციების გამოთვლის ამოცანაში:

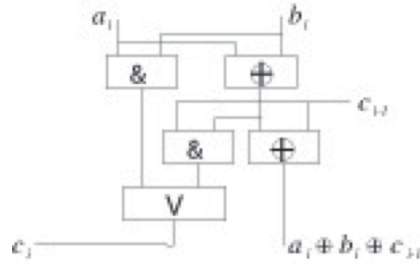
$$f(i) = x_i \circ x_{i-1} \circ \dots \circ x_2 \circ x_1 \quad (1 \leq i \leq n).$$

აღსანიშნავია, რომ ცვლადი  $x_i$  ნებისმიერი ფიქსირებული  $n$  განზომილებიანი სივრცის ვექტორი შეიძლება იყოს.

## 2.1 შეკრების ამოცანის პარალელისაცია

დავუბრუნდეთ ორი რიცხვის ქვეშ მიწერით მიმატების ამოცანას.

გრაფიკულად მისი ჯაჭვის თითოეული ელემენტი შემდგენიარად შეიძლება წარმოვადგინოთ:



თუ დავუშვებთ, რომ  $u_i = a_i b_i$  და  $v_i = a_i + b_i \pmod 2$  ( $1 \leq i \leq k = 2^n$ ) და ჩავთვლით, რომ ეს ცვლადები უკვე გამოთვლილია (მათ გამოთვლას მუდმივი დრო დასჭირდება), მივიღებთ:

$$c_k = v_k \text{ OR } v_k u_{k-1} \text{ OR } (v_k \dots v_{k-i}) u_{k-i-1} \text{ OR } \dots \text{ OR } (v_k \dots v_2) u_1.$$

აქ OR ბულის ალგებრის დიზიუნქციის ოპერატორია.

თუ ჩავთვლით, რომ  $c_k = f_k(u_k, v_k, \dots, u_2, v_2, u_1)$ , მივიღებთ:

$$f_k(u_k, v_k, \dots, u_2, v_2, u_1) = f_{k/2}(u_{k/2}, v_{k/2}, \dots, u_{k/2+1}, v_{k/2+1}) \text{ OR } (v_{k/2} \dots v_{k/2+1}) f_{k/2}(u_{k/2-1}, \dots, u_1).$$

$r$  ცალი იტერაციული ბიჯის შემდეგ ვიღებთ:

$$f_k(u_k, v_k, \dots, u_2, v_2, u_1) = f_1(u_k, \dots, u_{k-l+1}) \text{ OR } (v_k \dots v_{k-l}) f_1(u_{k-l}, \dots, u_{k-2l+1}) \text{ OR } \dots \text{ OR } (v_k \dots v_l) f_1(u_l, \dots, u_1),$$

სადაც  $l = 2^r$ .

მისი ბიჯების რაოდენობა იქნება

$$T(f_k) = \max\{T(f_l), T(v_k \dots v_l)\} + n - r + 1.$$

ახლა განვსაზღვროთ მიმდევრობა

$$m_i = 0, \quad m_i = i(i-1)/2$$

და ბიჯების რაოდენობის ფორმულაში ჩავსვათ  $n = m_i$ ,  $r = m_{i-1}$  [2].

ინდუქციის გამოყენებით შეიძლება დავამტკიცოთ უტოლობა  $T(f_p) \leq m_{i+1}$ , სადაც  $p = 2^{m_i}$ .

აქედან გამომდინარე, ნებისმიერი ნატურალური  $m$  რიცხვისთვის, სადაც  $m_{i-1} < m \leq m_i$ , ჰქმნარა იტა შემდეგი უტოლობა:

$$T(f_d) = T(f_p) + (m - m_{i-1}) + 1 \leq m_i + m - m_{i-1} + 1 = (t-1) + m + 1 = t + m.$$

$m_{i-1} < m$  უტოლობიდან ვიღებთ:

$$(t-1)(t-2)/2 < m, \quad t < 1,5 + (2m + 0,25)^{1/2}.$$

თუ ამ შედეგს ბიჯების რაოდენობის გამოთვლის ფორმულაში ჩავსვამთ, მივიღებთ:

$$T(f_k) < 1,5 + (2m + 0,25)^{1/2} + m.$$

აქედან გამომდინარე,

$$T(f_k) < 1,5 + (2 \log(k) + 0,25)^{1/2} + \log(k).$$

დასკვნის სახით შეიძლება ვთქვათ, რომ შესაძლებელია მიმატების ალგორითმის გაპარალელეება ისე, რომ იტერაციის ყოველ ბიჯზე მონაცემები დაიყოს  $m_i$  ტოლ ნაწილად, ეს ნაწილები რეკურსიულად დამუშავდეს და შედეგები შეჯამდეს კონიუნქციისა და დიზიუნქციის საშუალებით ზემოთ მოყვანილი ფორმულის თანახმად. ამის საფუძველზე კი სწრაფი შემკრები ალგორითმის შემუშავება შეიძლება [1].

### 3. გამრავლების სწრაფი ალგორითმი

გამრავლების ალგორითმის ზუსტი ქვედა ზღვარი დღეისათვის ცნობილი არაა. თეორიულად დადგენილია, რომ ორი  $n$  ბიტის რიცხვის გამრავლებისათვის საჭიროა მინიმუმ  $\Omega(n)$  ბიჯი, მაგრამ ასეთი სწრაფი ალგორითმი ცნობილი არაა. მაგრამ არც ისაა ცნობილი, შესაძლებელია თუ არა ანდაგვარი ალგორითმის შექმნა.

აქ წარმოვადგენთ ერთი ალგორითმის იდეას, რომელიც პირველად გერმანელი მათემატიკოსების, შონჰაგესა და შტრასენის მიერ იყო წარმოდგენილი [2]. აღსანიშნავია, რომ თეორიული თვალსაზრისით იგი ყცნობილ ალგორითმთა შორის ყველაზე სწრაფია, რადგან  $O(n \log(n) \log \log(n))$  ბიჯს იყენებს, მაგრამ პრაქტიკაში სრულიად გამოუდგარია  $O$  აღნიშვნაში ძალიან დიდი მუდმივების გამო.

#### 3.1. შონჰაგესა და შტრასენის იდეა

მოცემულია ორი ორობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვი

$$A = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0), \quad B = (b_{n-1}, \dots, b_1, b_0)$$

შედგად ვეძებთ რიცხვს  $C = AB$ .

თითოეული საწყისი რიცხვი დავყოთ  $k$  ცალ ტოლ ბლოკად, რომელთა სიგრძეა  $l$ :

$$\begin{aligned} A &= A_{k-1}, \dots, A_0, & B &= B_{k-1}, \dots, B_0 \\ A_0 &= (a_{l-1}, \dots, a_0) & B_0 &= (b_{l-1}, \dots, b_0) \\ A_1 &= (a_{2l-1}, \dots, a_l) & B_1 &= (b_{2l-1}, \dots, b_l) \\ & \dots & & \dots \\ A_{k-1} &= (a_{n-1}, \dots, a_{n-l}) & B_{k-1} &= (b_{n-1}, \dots, b_{n-l}) \end{aligned}$$

ცხადია, რომ ასეთი დაყოფის შედეგად

$$A = f(2^l), \quad B = g(2^l), \quad C = h(2^l),$$

სადაც

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{k-1} A_{k-1} + x^{k-2} A_{k-2} + \dots + x^l A_1 + A_0, \\ g(x) &= x^{k-1} B_{k-1} + x^{k-2} B_{k-2} + \dots + x^l B_1 + B_0, \\ h(x) &= f(x) g(x). \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე, ორი რიცხვის გამრავლების ამოცანა დაყვანილია ორი პოლინომის გამრავლების ამოცანაზე. მართალია, ორი პოლინომის გამრავლების ამოცანა ზოგადად ორი რიცხვის გამრავლებაზე უფრო რთულია, მაგრამ აქ გვინტერესებს არა ზოგადად პოლინომების

ნამრავლი, არამედ ამ ნამრავლის მნიშვნელობა რაღაცა კონკრეტული მონაცემისათვის (ჩვენს შემთხვევაში ესაა  $2^l$ ).

თავდაპირველ ამოცანაში ჩვენ გვინდოდა  $C = A B \bmod (2^n + 1)$  გამოთვლა. რადგან  $2^n + 1$  დიდი რიცხვია,  $Z_{2^n + 1}$  რგოლში გამოთვლიაც რთულია. კარგი იქნებოდა, თუ ამ ოპერაციების ჩატარებას უფრო სწრაფად პატარა რგოლებში მოვახერხებდით და მიღებულ შედეგებს შემდგომში ისე გადავაშუშავებდით, რომ საბოლოო შედეგი უფრო სწრაფად მიგვეღო.

ამაში გვეხმარება ე.წ. ჩინური თეორემა ნაშთის შესახებ, რომელიც საკმაოდ დიდი ხანია ცნობილია:

თუ მოცემულია ნებისმიერი ნატურალური  $a_1, a_2, \dots, a_p$  და  $m = m_1 m_2 \dots m_p$ , სადაც  $m_1, m_2, \dots, m_p$  ურთიერთმარტივი რიცხვებია, მაშინ განტოლებათა სისტემას

$$a = a_i \pmod{m_i} \quad (1 \leq i \leq p)$$

აქვს ცალსახა ამონახსნი

$$a = a_1 r_1 s_1 + a_2 r_2 s_2 + \dots + a_p r_p s_p \pmod{m},$$

სადაც  $r_i = m / m_i$ ,  $s_i = a_i^{-1} \pmod{m_i}$ .

აქედან გამომდინარე, შესაძლებელია გამოთვლა პატარა რგოლებში  $Z_{m_i}$ , რის შემდეგაც შევძლებთ საბოლოო პასუხის გამოანგარიშებას  $Z_{2^n + 1}$  რგოლში ჩინურ თეორემაზე დაყრდნობით.

#### 4. დასკვნა

ჩვენ განვიხილეთ მეთოდები, რომელთა გამოყენებისას არითმეტიკული ოპერაციების სწრაფად ჩატარებაა შესაძლებელი. ორივე მეთოდი ე.წ. „დაპყავი და იბატონე“ პარადიგმას ეყრდნობა. პირველ შემთხვევაში იყოფა მონაცემთა სიმრავლე, მაგრამ, სხვა ალგორითმებისაგან განსხვავებით, ყოველ ბიჯში ეს სიმრავლე სხვადასხვა რაოდენობის ქვესიმრავლეებად იყოფა. მეორე მაგალითში იყოფა არა გამოსათვლელ ელემენტთა სიმრავლე, არამედ მათი გამოტევის სივრცე.

ორივე შემთხვევაში ვიღებთ აქამდე ცნობილ ალგორითმებთან შედარებით საუკეთესო შედეგს.

ლიტერატურა:

[1] A. Gamkrelidze  
Einige Optimierungsmethoden Hierarchischer Schaltkreise}  
PhD thesis, Universität des Saarlandes, 2001

[2] В. М. Храпченко  
О времени Сложения параллельного сумматора  
Доклады Академии Наук, 19, 1967

[3] A. Schönhage, V. Strassen  
Schnelle Multiplikation Großer Zahlen  
Computing 7, 1969



## DECISION MAKING PROBLEM IN GENERAL UNCERTAIN ENVIRONMENT

### G.Sirbiladze

Firstly, the lower and upper expected values provide limits to the expected utility value for each decision [1,3,4,6,7]. The function of the second step reflects the decision-maker's subjectivity and lets us model it between these two boundaries by means of a convex combination [4]. The relationships between a body of evidence [1,4,6] and fuzzy measures [2,3-5,8] are shown in [4] and some relevant properties of lower and upper expected values [1,6] are proved in [4]. The main result of this discussion is presented in section 3 where a definition of inclusion relation on the set of evidences is used to study existing relations among results which can be obtained from different basic probability assignments. Finally, we show the way in which our model includes the most classical criteria, such as min-max or mathematical expectation criteria in uncertainty or risk environments etc.

1. Some classical decision problems can be considered as given by the information system [4]:

$$(\Omega, D, I, u, K)$$

where  $\Omega$  is the non-empty set of the states (factors, situations) of nature;  $D$  is non-empty set of the feasible decisions;  $I$  is the available information about  $\Omega$ ;  $K$  is the decision-maker's criterion, which represents some optimal principle; and  $u : D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , is a valuation of the consequences, coherent with the decision-maker's preferences.

According to the kind and amount of available information, the following cases have been distinguished:

- General Decision Problem in a Certain Environment: when the state of nature which will occur is known "a priori".
- General Decision Problem in a Risk Environment: if the true state is unknown but a probability distribution is available on  $\Omega$ .
- General Decision Problem in an Uncertain Environment: when no information about the states of nature can be used.

Our aim in this paper is to study a more general model including the previous three; such a model will consider the information about  $\Omega$  as defined by a body of evidence [1,4,6].

To obtain a solution for a decision problem as defined above, an order relation should be found on the set of decisions  $D$ ; we will construct this order taking into account the utility  $u$  and the information  $I$ . We suppose  $D$  and  $\Omega$  to be finite, in order to avoid measurability or convergence problems. If we denote

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}.$$

The consequences of a decision  $d_i$  are given in terms of a utility vector  $\bar{u}_i$ :

$$d_i \leftrightarrow \bar{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) \in \mathbb{R}^n, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

which represents the decision-maker's preferences.

2. The problem is now to find an order on  $\mathbb{R}^n$ . Classically the solution is obtained by mapping each vector  $\bar{u}_i$  on a value of  $\mathbb{R}$ ; to build this map  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , we will use the decision-maker's opinions and the information available about  $\Omega$ .

Thus, we will say that a decision  $d_i$  is preferred or indifferent to another  $d_k$  (and express it as):

$$d_k \leq d_i \Leftrightarrow (u_{k1}, u_{k2}, \dots, u_{kn}) \leq (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{u}_k) \leq \varphi(\bar{u}_i).$$

Numerous examples of this procedure exist in the relevant literature, as the criteria  $K$  of the expected value (risk environment), Laplace, Wald (uncertain environment), etc.

In this paper we will suppose the information I is given by a body of evidence represented by a basic probability assignment (B.P.A.)- $m$  [1,4,6]

**Definition 1**[1,4]: A B.P.A. On  $\Omega$  is a map

$$m : 2^\Omega \rightarrow [0;1],$$

fulfilling the conditions:

$$(i) \quad m(\emptyset) = 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{A \subset \Omega} m(A) = 1.$$

In 1967, Demster [1] introduced the concepts of lower and upper expected values of a function, with respect to a measure as a generalization of the expected mathematical value (The main properties of lower and upper expected values of a function are used in [4]):

**Definition 2**[1]: let  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  be any function and let  $m$  be a B.P.A. on  $\Omega$ . Lower and upper expected values of  $h$  with respect to  $m$  are defined as

$$E_*(h/m) = \sum_{A \subset \Omega} m(A) \cdot \inf_{\omega \in A} h(\omega),$$

$$E^*(h/m) = \sum_{A \subset \Omega} m(A) \cdot \sup_{\omega \in A} h(\omega).$$

In these conditions, we can map the vector  $\bar{u}_i \in \mathbb{R}^n$  (represented as function  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ) on another vector of  $\mathbb{R}^2$  by means of  $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$t(u_{i1}u_{i2}, \dots, u_{in}) = (E_*(\bar{u}_i/m), E^*(\bar{u}_i/m)).$$

If we consider the composition  $h \circ t = \varphi$ , the determination of  $\varphi$  means merely to determine the map:  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . From this composition, one can see  $t$  contains the available information while  $h$  must reflect the decision maker's attitude.

3. Finally, we may note: On one hand, if a body of evidence considered about  $\Omega$  is probabilistic ( $m \equiv m_p$ ), then

$$E_*(\bar{u}_i/m_p) = E^*(\bar{u}_i/m_p) = E_{m_p}(\bar{u}_i),$$

where the most outstanding ways to define  $h$  are as follows:

(a) Optimistic criterion. Based on the map  $h^*$ :

$$h = h^*(E_*, E^*) = E^*$$

(b) Pessimistic criterion. Based on the map  $h_*$ :

$$h = h_*(E_*, E^*) = E_*$$

The decision rules consisting of the maximization of the value of  $h$  (the construction of criterion K), coincides with the classical expected value criterion for risk environment [3].

On the other hand, if we confront a problem in the absence of information, the only possible body of evidences to be considered is the so called total ignorance ( $m = m_0$ ), and in this case

$$E_i^* = \max_{\omega_j \in \Omega} \bar{u}_i = \max_j u_{ij}, \quad E_{i*} = \min_{\omega_j \in \Omega} \bar{u}_i = \min_j u_{ij}$$

are verified. If the decision maximizing  $h$  is chosen (criterion K), we find:

(A) The max-max criterion, from  $h^*$ :

$$\max_i E_i^* = \max_i E^*(\bar{u}_i/m_0) = \max_i \max_j u_{ij}$$

as a particular case of our optimistic criterion.

(B) Wald's criterion, or max-min criterion, from  $h_*$  :

$$\max_i E_{i*} = \max_i E_*(\bar{u}_i / m_0) = \max_i \min_j u_{ij}$$

as a particular case of our pessimistic criterion.

Conclusion

**Demster-Shafer's Mathematical theory of Body of Evidence [1,4,6] is a powerful tool to build models in risk or uncertain environments. By expressing the available information about states or factors of nature in a decision problem by means of a body of evidence and by using the lower and upper expected values to obtain decision rules, one may generalize classical criteria to intermediate situations between null and probabilistic sets of information.**

### **გადაწყვეტილების მიღების ამოცანა ზოგად ბანუზღვრულ გარემოში გ.სირბილაძე რეზიუმე**

განხილულია გადაწყვეტილების მიღების ზოგადი მოდელი, წარმოდგენილი მონაცემთა ტანის საბაზო ალბათური განაწილებით, რომელიც იძლევა ინფორმაციას მდგომარეობათა, სიტუაციათა ან ფაქტორთა განაწილებაზე. გადაწყვეტილების მიღების წესი აგებულია ორი ბიჯით - ქვედა და ზედა მოსალოდნელი სარგებლიანობათა მნიშვნელობების კომპოზიციით.

## DECISION MAKING PROBLEM IN GENERAL UNCERTAIN ENVIRONMENT

**G.Sirbiladze**

Abstract

**A general model for decision problems is presented, represented by a basic probability assignment of a body of evidence, which gives the information on distribution of states, situations or factors. The rule for decision making is constructed from two steps by means of a composition of two functions - lower and upper expected utility values.**

### References

1. **P. Dempster**, Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Ann. Math. Statist. 38, 325-339, 1967.
2. **G. Sirbiladze and N. Zaporozhets**, About Two Probability Representations of Fuzzy Measures on a Finite Set, The Journal of Fuzzy Mathematics. Los Angels, USA, Vol.10, No.3, 1467-1489, 2002.
3. **G. Sirbiladze and A. Sikharulidze**, Weighted Fuzzy Averages in Fuzzy Environment, Parts I,II.. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. Vol.11, No.2, 139-158 ; 159-172, 2003.
4. **G. Sirbiladze and G. Khachidze**, Decision-Making Aiding Fuzzy Information Analysis in Investments. Part II: Demster-Shafer's Expected Utility in Investments. Proc. of Javakhishvili Tbilisi State University, Applied Mathematics, Computer Sciences, Vol.353(22-23), 95-108, 2003.
5. **G. Sirbiladze and T.Gachechiladze** Restored Fuzzy Measures in Expert Decision-Making. Information Sciences. An International Journal. 169 (1/2), 71-95, 2005.
6. **G. Shafer**, A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
7. **A. Smets**, Medical Diagnosis: Fuzzy sets and Degrees of belief, Fuzzy Sets and Systems, 5, 259-266, 1981.
8. **M. Sugeno**, Theory of Fuzzy Integral and its applications. Doct. Theses, Tokyo, 1974.

**ON THE WEAKLY STRUCTURABLE DYNAMIC SYSTEMS MODELLING**  
**G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, M. Kapanadze**

In this paper the new approach to the study of weakly structurable fuzzy dynamic systems (WSDS) is presented (weakly structurable controllable dynamic system) [4-6]. Different from other approaches where the source of fuzzy uncertainty in dynamic systems is expert, this approach considers time as long as an expert to be the source of fuzzy uncertainty. This notably widens the area of studied problems. All these is connected to the incomplete, imprecise, anomal and extremal processes in nature and society, where connections between the system's objects are of subjective (expert) nature, which is caused by lack of objective information about the evolution of studied system, for example in 1) economy of developing countries, business, conflictology, sociology, medical diagnosis etc; 2) management of evacuation processes in catastrophe areas, estimation of disease spreading in epidemical regions; 3) research of complex systems of applied physics, etc. One of our purposes is to create scenarios describing possible evolution of WSDS using methods developed in this paper in the framework of expert-possibilistic theory. This includes construction of algorithms of logical-possibilistic simulations of anomal and extremal process analysis.

By the participants of the paper new mathematical apparatus[1-3] was created in 2002-2005, where main attention is paid to rapidly developing theory of fuzzy measures (some class of capacities) and integrals. Using the theory of fuzzy measures and integrals for construction of decision support systems is not a new idea. But we have chosen one part of this theory – extremal fuzzy measures [1-3], which is not much well researched. In the framework of this theory a new apparatus of extended fuzzy measures was constructed on the basis of Sujeno's upper and lower integrals. Using this apparatus new fuzzy extremal models of weakly structurable dynamic system control were created [4-6], where fuzziness is represented in time. Here the structure of time is represented by monotone extremal classes of measurable sets [1-3]. On such structures uncertainty is described by extremal fuzzy measures and problems of fuzzy-statistics of extremal fuzzy processes: identification, filtration, optimal control. Results of research are published in articles [4-6].

Short description of weakly structurably dynamic systems (WSDS):

Following the system approach of modeling of weakly structurable dynamic systems, we propose that the time structure in fuzzy dynamic system is represented in following way [3-6]:

$$\left\langle \left\{ T, \tilde{F}I(T), \tilde{g}_T \right\}, \preceq, \oplus \right\rangle, \quad T \equiv \mathbb{R}_0^+, \quad (1)$$

where  $\tilde{F}I(T) \equiv \langle [0, t] \rangle_{t \geq 0}$  is  $\sigma$ -monotonic space of monotonically increasing measurable fuzzy time intervals;  $\tilde{g}_T$  is the extended fuzzy measure on  $\tilde{F}I(T)$ ;  $\preceq$  is the partial ordering relation in  $\tilde{F}I(T)$  and  $\oplus$  is the algebraic sum operation in  $\tilde{F}I(T)$ .

Suppose  $X$  ( $X \neq \emptyset$ ) is the set of states of some WSDS to be investigated with initial  $(X, \tilde{B}, \tilde{g})$  – fuzzy measure space restriction;  $U$  ( $U \neq \emptyset$ ) is the set of all admissible controls acting on the system with  $(U, \tilde{B}_U, \tilde{g}_U)$  – fuzzy measure space restriction;  $Y$  ( $Y \neq \emptyset$ ) is the set of output states of the system with  $(Y, \tilde{B}_Y, \tilde{g}_Y)$  – fuzzy measure space restriction ( $Y$  is some transformation of  $X$ );  $\tilde{p} \in \tilde{B} \otimes \tilde{F}I(T) \otimes \tilde{B}$  is expert reflection process, which represents fuzzy relation describing expert fuzzy activities (estimations) of fuzzy states of the system in the output values of the system in monotonically increasing fuzzy time intervals  $\{\tilde{r}_t\}_{t \geq 0}$ ;  $\tilde{\rho} \in (\tilde{B} \otimes \tilde{F}I(T)) \otimes (\tilde{B}_U \otimes \tilde{F}I(T)) \otimes \tilde{B}$  is an fuzzy transition relation describing system state evolution in fuzzy time intervals  $\{\tilde{r}_t\}_{t \geq 0}$  with control taken into account;  $\tilde{u} \in \tilde{B}_U \otimes \tilde{F}I(T)$  is some binary relation describing the action of fuzzy control on the system in fuzzy time intervals  $\{\tilde{r}_t\}$ ,  $t \geq 0$  (fuzzy control process);  $\tilde{Q} \in \tilde{B} \otimes \tilde{F}I(T)$  is binary fuzzy relation (fuzzy process) describing the evolution of system in time;  $(s) \int$  is Sugeno extended fuzzy integral (the aggregation operator of the system objects).

**Definition 1.** The train

$$\langle \{X, U, T, Y, \tilde{\rho}, \tilde{Q}, \tilde{P}, \tilde{u}, (s) \int \} \rangle \quad (2)$$

is called *Weakly Structurable Controllable Dynamic System (WSCDS)*, describing the evolution of system's states in fuzzy time intervals  $\{\tilde{r}_t\}$ ,  $t \geq 0$ , using following integral equation:  $(Y \equiv X)$ ,  $\forall (x, \tau) \in X \times T$ :

$$\mu_{\tilde{Q}}(x, \tau) \stackrel{\Delta}{=} (s) \int_{E_{\tilde{u}}(\cdot, \tau)} \left[ (s) \int_{\tilde{r}_\tau} \left[ (s) \int_{\tilde{A}_0} \mu_{\tilde{\rho}}(x, x'u, t) \circ \tilde{g}(\cdot) \right] \circ \tilde{g}_T(\cdot) \right] \circ \tilde{g}_U(\cdot), \quad (3)$$

with system's initial state  $\tilde{A}_0 \equiv E_{\tilde{Q}}(\cdot, 0)$ .

Suppose that relation between fuzzy measure spaces  $(X, \tilde{B}, \tilde{g})$  and  $(T, \tilde{F}I(T), \tilde{g}_T)$  can be defined using some conditional extended fuzzy measure in the following way:  $\forall \tilde{r}_\tau \in \tilde{F}I(T)$ :

$$\tilde{g}_T(\tilde{r}_\tau) \stackrel{\Delta}{=} (s) \int_X \tilde{g}_t(\tilde{r}_\tau / x) \circ \tilde{g}(\cdot). \quad (4)$$

**Definition 2:** The process  $\tilde{P}$  performing in fuzzy time intervals  $\{\tilde{r}_\tau\}_{\tau \geq 0}$  and defined by formula

$$\mu_{E_{\tilde{P}}(\cdot, \tau)}(x) = \tilde{g}_t(\tilde{r}_\tau / x) \quad (5)$$

is called the fuzzy process describing expert reflections of evolutions of WSCDS states.

Now we will consider important theorem concerning the relation between  $\tilde{Q}$  and  $\tilde{P}$  processes.

**Theorem:** Suppose  $\{\tilde{r}_\tau\}_{\tau \geq 0}$  and  $\tilde{u}$  processes are ergodic; Let  $\tilde{P}$  be the fuzzy process describing expert mappings of evolutions of system states in fuzzy time intervals regarding the fuzzy measure  $\tilde{g}_t(\cdot / x)$ . Then:

- The process  $\tilde{Q}$  described by (3) is ergodic;
- in the conditions of control process  $\tilde{u}$  on WSCDS with initial fuzzy state  $\tilde{A}_0$ , the evolution of system's fuzzy states is described by fuzzy process  $\tilde{Q}$  integral representation of which is the following:  
 $\forall (x, \tau) \in X \times T$

$$\mu_{\tilde{Q}}(x, \tau) = (s) \int_{U \times T} \{ \mu_{E_{\tilde{u}}(\cdot, \tau)}(u) \wedge \mu_{E_{\tilde{P}}(x, \cdot)}(u, t) \} \circ \tilde{g}_U \otimes \tilde{g}_{E_{\tilde{P}}(\cdot, \tau)}(u), \quad (6)$$

where  $\tilde{\rho}'$  is transition fuzzy relation

$$\mu_{E_{\tilde{\rho}'(x, \cdot)}}(u, t) \stackrel{\Delta}{=} (s) \int_{\tilde{A}_0} \mu_{E_{\tilde{\rho}}(x, \cdot, u, t)}(x') \circ \tilde{g}(\cdot);$$

$\tilde{g}_U \otimes \tilde{g}_{E_{\tilde{P}}(\cdot, \tau)}$  is the composition of fuzzy measure  $\tilde{g}_U$  and  $\tilde{P}$ -extended fuzzy measure  $\tilde{g}_{E_{\tilde{P}}(\cdot, \tau)}$  [3-5].

Using the results obtained in [3-6] we shortly described the issues of controllable extremal process modeling. The following problems have been already researched and solved:

- a) We have introduced the notion of the weakly structurable controllable dynamic system (WSCDS) in case of fuzzy control action  $(U, \tilde{B}_U, \tilde{g}_U)$ , where the source of uncertainty is expert reflections (expert measurements) of the system states in monotonically increasing fuzzy time intervals [3-6];
- b) The notions of reflection and description processes describing WSCDS states evolution have been introduced [3-6];
- c) The issues of point wise ergodicity have been studied [3];
- d) The compositional representation of continuous controllable fuzzy process have been constructed correspondingly using Sugeno composition integral. Analogical model is constructed for cases of discrete time [1-3].
- e) The problems of fuzzy time structure dualization have been studied [1-3];
- f) (1)-(6) WSDS identification problems have been studied [4];
- g) The problem of restoring of the fuzzy input-output relation of (1)-(6) WSDS have been studied [4];
- h) The problems of (1)-(6) WSDS optimal control have been studied [5]
- i) The problems of estimation (filtration) of (1)-(6) WSDS states have been studied [6];

The following problems need further research:

- 1) The problem of estimation of pessimistic-optimistic indices of ergodicity for each problem of extremal fuzzy processes fuzzy-modeling (identification, fuzzy-optimal control, fuzzy-filtration);
- 2) The quantitative-basic analysis of adaptation as object of WSDS control in the environment of anomalous and extremal processes;
- 3) construction of possibilistic-objective simulation algorithms for anomalous and extremal processes based on constructed models;
- 4) Creation of adaptation scenarios in the environment of anomalous and extremal processes using expert-possibilistic theory;
- 5) Development of software for universal library implementing the WSDS structure and decision support methods; Creation of decision-support systems for real applications.

## სუსტად სტრუქტურირებადი დინამიკური სისტემების მოდელირების შესახებ

გ.სირბილაძე, ა.სიხარულიძე, მ.კაპანაძე

### რეზიუმე

წარმოდგენილია სუსტად სტრუქტურირებადი დინამიკური სისტემების (სსდს) შესწავლის ახალი მიდგომა. განსხვავებით სხვა მიდგომებისგან, სადაც განუზღვრელობის წყარო ექსპერტია, ჩვენი მიდგომა განუზღვრელობის წყაროდ განიხილავს როგორც ექსპერტს, ასევე დროსაც. ეს მნიშვნელოვნად აფართოებს შესასწავლი ამოცანების არეს. ყოველივე ეს დაკავშირებულია არასრულ, არაზუსტ, ანომალურ და ექსტრემალურ პროცესებთან, რომლების გაცხადება ბუნებასა და საზოგადოებაში, სადაც კავშირი სისტემის ობექტებს შორის სუბიექტური (ექსპერტული) ბუნებისაა. მეთოდები, რომლებსაც ჩვენ ამ სტატიაში წარმოგიდგენთ, ექსპერტულ-შესაძლებლობითი თეორიის სქემიდანაა. ისინი ემსახურებიან ჩვენს მიზანს, შევქნათ სცენარები, რომლებიც სსდს-ის შესაძლო ევოლუციას აღწერენ.

## THE WEAKLY STRUCTURABLE DYNAMIC SYSTEMS MODELLING

G. Sirbiladze, A. Sikharulidze, M. Kapanadze

### Abstract

The new approach to the study of weakly structurable dynamic systems (WSDS) is presented. Different from other approaches where the source of fuzzy uncertainty in dynamic systems is expert, this approach considers time as long as an expert to be the source of fuzzy uncertainty. This notably widens the area of studied problems. All

these is connected to the incomplete, imprecise, anomal and extremal processes in nature and society, where connections between the system's objects are of subjective (expert) nature, which is caused by lack of objective information about the evolution of studied system. One of our purposes is to create scenarios describing possible evolution of WSDS using methods developed in this paper in the framework of expert-possibilistic theory. This includes construction of algorithms of logical-possibilistic simulations of anomal and extremal process analysis.

### References

1. **G. Sirbiladze, A. Sikharulidze**, Weighted Fuzzy Averages in Fuzzy Environment, Part I. Insufficient Expert Data and Fuzzy Averages. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. Vol.11, No.2, 139-158, 2003;
2. **G. Sirbiladze, A. Sikharulidze**, Weighted Fuzzy Averages in Fuzzy Environment, Part II. Generalized Weighted Fuzzy Expected Values in Fuzzy Environment. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. Vol. 11, No.2, 159-172 , 2003;
3. **G. Sirbiladze**, Modeling of Extremal Fuzzy Dynamic Systems. Part I-III: Extended Extremal Fuzzy Measures. *International Journal of General Systems*. 34,2, 107-198, 2005;
4. **G.Sirbiladze**, Modeling of Extremal Fuzzy Dynamic Systems. Part IV: Identification of Fuzzy-Integral Models of Extremal Fuzzy Processes. *International Journal of General Systems*. 35, 4, 435-459, 2006;
5. **G.Sirbiladze**, Modeling of Extremal Fuzzy Dynamic Systems. Part V: Optimization of Continuous Controllable Extremal Fuzzy Processes and the Choice of Decisions. *International Journal of General Systems*. 35, 5, 2006, 529-554;
6. **G.Sirbiladze**, Modeling of Extremal Fuzzy Dynamic Systems. Part VI: Problems of States Estimation (Filtration) of Extremal Fuzzy Process. *International Journal of General Systems*. 36,1 19-58, 2007.

**ON THE MINIMAL FUZZY COVERING PROBLEM**  
**G.Sirbiladze, B.Ghvaberidze**

**1. Introduction**

Optimization and decision-making problems are traditionally handled by either the deterministic or the probabilistic approach. The former provides an approximate solution completely ignoring uncertainty, while the latter assumes that any uncertainty can be represented in terms of probability distribution. Obviously both approaches only partly capture the uncertainty that actually exists but not in the form of known probability distributions. In this paper we consider a discrete fuzzy optimization problem, i.e. a minimal covering problem where the data has expert-objective nature. The obtained bicriterial optimization problem is a specific compromised approach between the expert and objective methods of optimization.

**2. The Minimal Fuzzy Covering Problem**

Partitioning, covering and packing problems serve as mathematical models for many theoretical and applied problems such as coloring of graphs, construction of perfect codes and minimal disjunctive normal forms, drawing up of blockdiagrams, information search, traffic scheduling, administrative division into zones and so on [1,3]. Let us introduce some basic notions [1], [3]. Suppose that we are given the finite set  $R=\{r_1, \dots, r_m\}$  and the family of its subsets -  $S=\{S_1, \dots, S_n\}$ . Let  $S'=\{S_{j_1}, \dots, S_{j_p}\}$ ,  $1 \leq p \leq n$ , be some subfamily of the family  $S$ . If each element  $r_i$  is contained in at most (at least) one of the sets  $S_j$ , belonging to  $S'$ , then  $S'$  is called a packing (covering) of the set  $R$ . A covering which is simultaneously a packing is called a partitioning of the set  $R$ . Let  $A = \| a_{ij} \|_{m \times n}$  be the incidence matrix of elements  $R$  and subsets  $S_j$ :  $a_{ij}=1$  if  $r_i \in S_j$ , and  $a_{ij}=0$  if  $r_i \notin S_j$ . Each subfamily  $S'$  of the family  $S$  is represented by the characteristic vector which has a component  $x_j=1$  if the subset  $S_j$  is contained in  $S'$ , and  $x_j=0$  otherwise. If to each  $S_j \in S$  we assign a positive price  $c_j$ , then the partitioning, covering and packing problems take the form

$$1) \min_{A\bar{x}=\bar{\ell}} (\bar{c}, \bar{x}); \quad 2) \min_{A\bar{x} \geq \bar{\ell}} (\bar{c}, \bar{x}); \quad 3) \max_{A\bar{x} \leq \bar{\ell}} (\bar{c}, \bar{x});$$

Respectively. Here  $\bar{c}=(c_1, \dots, c_n)$  is the price vector,  $\bar{x}=(x_1, \dots, x_n)$  is the vector with components 0 and 1, and  $\bar{\ell}$  is the vector consisting of 1's. Note that in many interesting problems  $c_j=1, j=1, \dots, n$  (such is, for instance, the problem of finding a minimal dominating set in the graph), but this does not simplify the solution process of these problems.

Our further consideration concerns the minimal fuzzy covering problem. Other problems can be considered analogously. Let  $\tilde{S} = \{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n\}$  be some family of fuzzy subsets on  $R$ . Denote the compatibility level by  $\mu_{\tilde{S}_j}(r_i) \equiv b_{ij}$  for  $r_i \in R, j=1, 2, \dots, n$ . This compatibility level represents some subjective expert estimation. We assume that  $\mu_{\tilde{S}_j}(r_i) > 0$  means that an element  $r_i$  is covered by a fuzzy set  $\tilde{S}_j$  even if this level is small.

**Definition.** Any subfamily  $\tilde{S}' = \{\tilde{S}_{j_k}\} \subset \tilde{S}, k=1, \dots, p, 1 \leq p \leq n$ , of fuzzy subset is called a fuzzy covering of the set  $R$  if for each  $r_i$  there exists a fuzzy subset  $\tilde{S}_{j_k} \subset \tilde{S}'$  such that  $\mu_{\tilde{S}_{j_k}}(r_i) > 0$ .

If to each  $\tilde{S}_j \in \tilde{S}$  we assign a positive price  $c_j$ , then the fuzzy covering problem is formulated as follows: find a fuzzy covering  $\tilde{S}'$  of the set  $R$  having the least price with the least misbelief in subjection data. Thus, under an optimal fuzzy covering we understand a covering defined by two criteria: 1) minimization of a covering price; 2) ) minimization of misbelief in fuzzy uncertainty. We obtain the bicriterial discrete optimization problem. Note that if under  $\tilde{S}$  we understand the classical covering, then this problem can be reduced to the well known covering problem [1].

Suppose we are given some fuzzy set on  $R_0^+$  with definition: "a large Ratio" := (L-R) with a nondecreasing compatibility function  $\mu_{L-R}: R_0^+ \rightarrow [0,1]$ .

Like in [5] we introduce the notation



$$p_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mu_{L-R} \left( \frac{b_{ij}}{b_{ik}} \right), \quad n_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \mu_{L-R} \left( \frac{b_{ik}}{b_{ij}} \right), \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

where the heuristic explanation of the positive ( $p_{ij}$ ) and the negative ( $n_{ij}$ ) discrimination measure is that  $p_{ij}$  represents the accumulated belief that an element  $\tilde{S}_j$  covers an element  $r_i$  better than any of the remaining elements  $r_\ell$ ,  $\ell=1, \dots, m, \ell \neq i$ , while  $n_{ij}$  represents the belief that an element  $\tilde{S}_j$  covers an element  $r_i$  poorer than any of other elements  $r_\ell$  ( $\ell=1, \dots, m, \ell \neq i$ ).

Let two fuzzy sets be given on  $[0,1]$ . One defined as "large" with some nondecreasing compatibility functions  $\mu_{large}: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , and the other defined as "small" with some nonincreasing compatibility functions  $\mu_{small}: [0,1] \rightarrow [0,1]$ . We introduce the following values:

$$\pi_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{ij}, \quad \nu_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m n_{ij}, \quad j=1, \dots, n, \quad (2)$$

Where  $\pi_j$  and  $\nu_j$  are the average values of the positive and the negative discrimination measure of the covering for elements  $\tilde{S}_j, j=1, \dots, n$ .

Now, on the set  $\{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_n\}$  we construct the misbelief distribution of the covering where the positive and negative discrimination measures  $(\pi_j, \nu_j)$  are taken into account:

$$\delta_j = \frac{1}{2} (\mu_{small}(\pi_j) + \mu_{large}(\nu_j)), \quad j=1, \dots, n. \quad (3)$$

The information content of  $\delta_j$  expresses a level of misbelief in that an element  $\tilde{S}_j$  should be included in optimal covering.

Let  $\tilde{S}' = \{\tilde{S}_{j_k}\}$ ,  $k=1, 2, \dots, p$ ;  $1 \leq p \leq n$ , be some fuzzy covering. It can be characterized by the binary vector  $x_{\tilde{S}'} = (x_1, \dots, x_n)$ , where

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{if the fuzzy subset } \tilde{S}'_i \text{ is contained } \tilde{S}' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let us consider the misbe

$$\tilde{S}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \delta_1, \dots, \delta_n \end{pmatrix}$$

Since the values  $x_j$  are chosen without any a priori information, we can consider the following uniform probability distribution on  $x_{\tilde{S}'}$ :

$$P_{\tilde{S}'} = \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Thus, for each fuzzy covering  $\tilde{S}'$  we have constructed the fuzzy misbelief distribution  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  on  $x_{\tilde{S}'}$  and the uniform probability distribution  $P_{\tilde{S}'}$ . Applying the method of fuzzy statistics [6],[7],[8], the fuzzy average value of  $\tilde{S}'$  is defined as monotone expectation [6] (which here coincides with mathematical expectation)

$$E_{\tilde{S}'} \equiv \int_0^1 P_{\tilde{S}'}(\mu_{\tilde{S}'} \geq \alpha) d\alpha = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \delta_j. \quad (4)$$

Note that value  $E_{\tilde{S}'}$  is an average measure of misbelief in fuzzy covering. Minimizing the average misbelief in the fuzzy covering  $\tilde{S}'$ , we obtain the criterion

$$\sum_{j=1}^n x_j \delta'_j \rightarrow \min, \quad \text{where} \quad \delta' = \left( \frac{\delta_1}{n}, \dots, \frac{\delta_n}{n} \right). \quad (5)$$

Finally, the minimal fuzzy covering problem is reduced to a bicriterial problem of the type (minsum-minsum) [3] for an ordinary covering with the target functions

$$f_1 = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad f_2 = \sum_{j=1}^n \delta'_j x_j \rightarrow \min \quad (\text{minimization of price and average misbelief}). \quad (6)$$

If  $X$  is the set of all boolean vectors satisfying the conditions of the fuzzy covering problem, then considering the scalar optimization problem

$$\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \rightarrow \min, \quad (x_1, \dots, x_n) \in X, \quad \lambda \in (0, 1), \quad (7)$$

where  $X = \{x_{\tilde{S}} \in \{0, 1\}^n \mid \tilde{S}' \subset \tilde{S} - \tilde{S}' \text{ is the covering}\} \equiv \{\bar{x} \in \{0, 1\}^n \mid A\bar{x} \geq \bar{\ell}\}$ . And  $\lambda$  is a weighted parameter, we can find, in the general case, some Pareto optima [3].

**Conclusion.** We apply the methods of extended possibility analysis to the considered discrete optimization problems with fuzzy data. In an appropriate manner we introduce the definitions of positive and negative discrimination measures of expert knowledge of the optimization problem parameters, i.e. the parameters of possible solutions and alternatives (candidates). We thereby determine the fuzzy distribution of misbelief on the set of alternatives. As a result we obtain the bicriterial discrete optimization problem which is solved by the method of linear convolution of the criteria. The scalar problem is solved by the algorithm of tree type search from [3].

### მინიმალური ფაზი-დაფარვის ამოცანის შესახებ გ.სირბილაძე, ბ.ღვაბერიძე

#### რეზიუმე

მინიმალური ფაზი-დაფარვის ამოცანისთვის შემოტანილია ახალი კრიტერიუმი, რომელიც შესაძლო ალტერნატივებზე საშუალო არასანდოობის მინიმალურ მნიშვნელობას წარმოადგენს. მონაცემები ექსპერტულ-ობიექტური ბუნებისაა. ახალი კრიტერიუმითა და დაფარვის ფასის მინიმიზაციის კრიტერიუმის გამოყენებით მიღებულია ორკრიტერიული ამოცანა.

### ON THE MINIMAL FUZZY COVERING PROBLEM G.Sirbiladze, B.Ghvaberidze

#### Abstract

A new criterion is introduced for a minimal fuzzy covering problem which is a minimal value of the average misbelief contained in possible alternatives. The data has expert-objective nature. A bicriterial problem is obtained using this new criterion and the criterion of covering price minimization.

#### References

- [1] E.Balas, M.WPagberg, On the covering problem, Ops. Res., 20 (1972).
- [2] B.E. Bellman, L.A.Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment. Management Sci. 17(1970/71), B141-B164.
- [3] N.Christofides, Graph Theory. An Algorithmic Approach, Academic Press, 1975.
- [4] T.Deng, Y.Chen, W.Xu, Q.Dai, A novel approach to fuzzy rough sets based on a fuzzy covering. Inform. Sci. 177 (2007), no 11, 2308-2326.
- [5] D.Norris, B.W.Pilsworth, D.Baldwin, Medical Diagnosis from patient records – A method using fuzzy discrimination and connectivity analysis, Fuzzy Sets and Systems 23, (1987), 73- 87.
- [6] G.Sirbiladze, A.Sikharukidze, Weighted Fuzzy Averages in Fuzzy Environment, Parts I, II, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2 (2) (2003) 139- 157, 159-172.
- [7] G.Sirbiladze, B.Ghvaberidze, Possibility Analysis of the Fuzzy Covering Problem, Bull. Georgian Acad. Sci. 167 (2003) no. 1 47-50.
- [8] G.Sirbiladze, T.Gachechiladze, Restored Fuzzy Measures in Expert Decision-Making, Information Sciences 169, (1/2), (2005), 71-95.

# ON THE COMBINED EXPERTON AND FUZZY DISCRIMINATION METHOD IN INVESTMENT RISK MANAGEMENT

G.Sirbiladze, I.Khutsishvili

## Introduction

The authors propose the combined method of evaluating risks of investment decisions. The method is based on the expert (subjective) data received from the members of the tender commission of the investment fund. The method consists of two stages, of which the first stage is the selection from many projects of those which have minimal credit risks. These risks are revealed by means of the experton method [2, 3] which in its turn uses the expert data mentioned above. Such an approach is justified because in the case of substantial credit sums the number of competing projects is as a rule large. In the second stage the selected projects are compared with one another by the possibilistic discrimination method and are arranged from the standpoint of their quality. Therefore it became necessary to modify the fuzzy discrimination method [5] since in that case only expert data are used, while the classical variant of the method is only effective when working only objective data.

So, we have developed a method that enables us to identify with a great deal of certainty the investment projects with minimal risks and to formulate their crediting possibility levels in the form of recommendations.

## § 1. Fuzzy decision-making methods for the evaluation of investment projects.

When some legal person submits a business plan to the investment fund or the bank with the aim of receiving a credit, the experts of the fund are have the task to check certain factors that are essential for granting a credit. As a rule, the set of factors is determined by the group of experts of the investment fund who are members of the tender commission of the fund. When studying the activities of an applicant for a credit, the chosen factors can be identified or it may happen so that they are absent. Let the set of all possible factors be

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, \quad (1)$$

and the set of those factors that were identified for the applicant be

$$\Omega' = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_k}\}. \quad (2)$$

Assume that the investment fund makes decisions on granting a credit and these decisions differ not only in a credit sum, but also in the conditions on which the credit is to be granted. The set of decisions is denoted by

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}. \quad (3)$$

One of possible ways of making decisions for the assessment of investment projects can be fuzzy discrimination analysis if we construct a tabular-numerical knowledge base [5, 6] (for a new possibilistic variant of this method see § 3) in the form of a matrix with elements  $f_{ij}$ .

In the case of evaluation of investment projects, the information bases of statistical data on the already fulfilled successful investment projects either do not exist at all or they exist but the number of successful projects contained in them is small. Hence the values  $f_{ij}$  are estimated through psychometric interviews with the known experts in this concrete area. Then  $f_{ij}$  will denote the number of experts who think the solution  $d_i$  to be true if the investment project possesses the factor  $w_j$ .

The initial selection of tender participants is carried out by the experton method [2, 3], while the final decision is obtained using the possibilistic variant of discrimination analysis constructed in this paper (see § 3).

## § 2. Experton method

As is well known, if the number of considered factors and alternative solutions is large, i.e. if the size of a tabular-numerical knowledge base is large, then the reliability of the results obtained by discrimination analysis is low [6]. Therefore there arises a need to use some method of preliminary selection which from the number of credit applicants will leave only those whose prognosis corresponds to the crediting with a minimal risk. We use the experton method as a method of preliminary selection.

The experton theory was first formulated in the 90s of the last century by A. Kaufmann [2]. An experton is the generalized notion of a probability of a random fuzzy event when the probability of a random event of every  $\alpha$ -level is replaced by confidence intervals. These intervals, in turn, are statistically defined by a group of experts. The expert technology makes it possible to accumulate the subjective estimates obtained by the members of the expert commission of the investment fund and to derive an optimal joint estimate of all members of the commission, relying on their knowledge and intellectual activity.

**§ 3. Possibilistic discrimination analysis**

The results presented in this paper are based on refs.[5, 6]. In problems of making decisions on investment projects the values  $f_{ij}$  can be obtained only by psychometric interviews with the experts since for each project the set of factors  $\Omega'$  (see (2)) is different and one can hardly rely on the availability of information bases of statistical data. Thus, instead of a frequency tabular-numerical knowledge base it is expedient to construct the so-called possibilistic tabular-numerical knowledge base in the form of a matrix with elements  $\pi_j^i$ .  $\pi_j^i$  is a conditional possibility that the expert will make a decision  $d_i$  in the presence of the factor  $w_j$  (the possibility is defined by formula (10) below);  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  are all candidates with minimal risks selected by the experton method;  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  are all possible factors which, as shown by analysis, the legal persons or the candidates selected for crediting may have.

Several methods are available for constructing a table of possibilistic distribution [1, 3, 6, 7, 9]. For example, one of them is as follows: if the values  $f_{ij}$  are known, then each row of the matrix  $f_{ij}$  is normalized and we obtain

$$\pi_j^i = \frac{f_{ij}}{\max_{j=1,n} f_{ij}}. \tag{4}$$

After constructing the table of possibilistic distribution, the algorithm of a possibilistic variant of the discrimination analysis method can be formulated as follows:

1) using the well-known principle of transformation [1], the table of possibilistic distribution can be converted to the table of probabilistic distribution. For example, let us assume that for all  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) we have

$$\pi_{j_1}^i \geq \pi_{j_2}^i \geq \dots \geq \pi_{j_n}^i, \tag{5}$$

then the conditional probability  $f_j^i$  corresponding to the possibility  $\pi_j^i$  is expressed by the formula

$$f_{j_s}^i = \sum_{\ell=s}^n \frac{1}{s} (\pi_{j_\ell}^i - \pi_{j_{\ell+1}}^i), \text{ where } s = 1, 2, \dots, n, \pi_{j_{n+1}}^i \equiv 0; \tag{6}$$

2) we return to the discrimination analysis problem when instead of objective frequencies, for each  $d_i$  we have the probabilistic scale obtained from the possibilistic distribution.;

3) on  $D \times \Omega$  we construct the positive and negative discriminations and calculate their concrete compatibility levels which define in generality, how much the given factor influences (positive discrimination) and how much it does not influence (negative discrimination) the decision as compared with other factors:

$$p_{ij} = \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{\sum_{k: f_k^i < f_j^i} (f_j^i - f_k^i)^{\alpha_1}}{1 + \sum_{k: f_k^i > f_j^i} (f_k^i - f_j^i)^{\alpha_2}} \right\}, \tag{7}$$

$$n_{ij} = \frac{1}{n+1} \left\{ 1 + \frac{\sum_{k: f_k^i > f_j^i} (f_k^i - f_j^i)^{\alpha_1}}{1 + \sum_{k: f_k^i < f_j^i} (f_j^i - f_k^i)^{\alpha_2}} \right\}, \alpha_s > 0, s = 1, 2. \tag{8}$$

4) if some set of factors  $\Omega^i = \{w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_k}\}$  was defined before making a concrete decision, then in order to diminish the information entropy on the set of solutions  $D$  we construct the following positive and negative possibilistic discriminations:

$$\pi_i = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k p_{ij_l}, \quad v_i = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k n_{ij_l}; \tag{9}$$

5) on  $D$  we construct the possibilistic distribution,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ :

$$\delta_i = \frac{1}{2} (\pi_i^\beta + (1 - v_i)^\beta), \quad \beta > 0. \tag{10}$$

6) the solution  $\delta_{i_0}$  which has a maximal value on the possibilistic distribution  $\{\delta_i\}$  will be considered to be the most reliable (certain) one among possible solutions

$$\delta_{i_0} = \max_i \delta_i. \quad (11)$$

#### §4. An example of the application of the combined decision-making method for the evaluation of investment projects

Let us consider an example in which the tender commission of the investment fund consists, say, of ten members ( $i = \overline{1,10}$ ), and assume that the number of possible estimates (possible decisions) of crediting risks for each applicant is equal to four ( $P_j, j = \overline{1,4}$ ). Where  $P_1$  is the crediting with an insignificant risk,  $P_2$  is the crediting with a low risk,  $P_3$  is the crediting with an average risk, and  $P_4$  is the crediting with a high risk.

Let us assume that the members of the tender commission have made a conjecture about four possible solutions, the levels of credit granting risks for a certain applicant,  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Instead of expressing their opinion by a number  $\alpha \in [0,1]$ , they prescribe estimates in terms of confidence intervals which are included an interval  $[0,1]$ :  $[a_1, a_2] \subset [0,1]$ , where  $a_1$  is a pessimistic risk level and  $a_2$  is an optimistic risk level.

We construct the summary table of experts' estimates expressed by confidence intervals. We consider eleven  $\alpha$ -levels from 0 up to 1, and for each of the possible decisions  $P_i, i = \overline{1,4}$  we calculate two statistics of each level: one for the lower bound of the interval and the other for the upper bound. If now we carry these statistics onto the set of levels  $\{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1\}$ , we obtain a table which is an experton. The experton is transformed by the well known algorithm [2]. As a result, on  $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  we obtain a possibilistic distribution of risk identification for a certain applicant: each  $P_i$  will be associated with the definite number established with the experts' common opinion taken into account. To obtain a unique solution we use the principle of the maximum:  $\delta(P_{i_0}) = \max_i (P_i)$ . This means that in conformity with the experts' common opinion the experton gives preference to the solution  $P_{i_0}$  – the level of crediting risk for the chosen applicant is defined as  $P_{i_0}$ .

After processing the information by the experton method, from the group of applicants we leave only those whose prognosis matches the crediting with an insignificant and, possibly, the crediting with a low risk.

The second stage of making a decision on investment projects is concerned with a more thorough analysis of external and internal factors which define the current state and future prospects for the activities of each applicant. That is, if the selection by the experton method was carried out by the crediting risk classes, the next selection among the selected candidates will be carried out using the estimates of their factors. We will evaluate the candidates by the method of possibilistic discrimination analysis.

Let us formulate the main factors  $w_k, k = \overline{1,9}$ , by which a legal person taking part in the competition for credit granting will be evaluated by all members of the expert commission. For example, we may have the following factors [3, 6, 7]:  $w_1$ : the profitability of the participant's business;  $w_2$ : the purpose of credit reception;  $w_3$ : the pledge securing the reimbursement for the credit received;  $w_4$ : the credit sum (money amount);  $w_5$ : the paid percentage extra charge;  $w_6$ : the date of granting the loan (credit);  $w_7$ : the date of debt (credit) reimbursement;  $w_8$ : a monthly debt and accrued interest reimbursement (repayment scheme);  $w_9$ : a percentage ratio of the pledge to the monetary value of the credit.

Each member of the expert commission may evaluate this or another factor by numbers 1 or 0. The members of the expert commission fill in the patterns tables where  $d_i$  stands for the participants and  $w_k$  denotes the list of evaluated factors. Then on  $D \times \Omega$  (see § 3) we construct the summary table of  $f_{ij}$ .

Let, as before, the tender commission consist of 10 members, the evaluated factors be  $w_k, k = \overline{1,9}$ , and the quantity of candidates after the preliminary selection be  $d_i, i = \overline{1,4}$ .

Suppose that the summary table of values of  $f_{ij}$  has the following form:

$\Omega$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$
$d_1$	0.1	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.2	0.1
$d_2$	0.3	0.4	0.4	0.3	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3
$d_3$	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2	0.3	0.5	0.3	0.2
$d_4$	0.4	0.1	0.1	0.3	0.3	0.4	0.2	0.1	0.4

All further calculations are performed according to the algorithm of possibilistic discrimination analysis (see formulas (4) – (10)). As the coefficients  $\alpha_s, s = 1, 2$  we take the values  $\alpha_1 = 0.3, \alpha_2 = 0.95$  chosen empirically for the “spectral decomposition” of the values  $p_{ij}$  and  $n_{ij}$ . The value of the coefficient  $\beta = 0.85$  is defined empirically for the “spectral decomposition” of  $\delta_i$ . As a result we obtain the following possibilistic distribution on  $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ :

$D$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$\delta$	0.60709	<u>0.612043</u>	0.606352	0.608552

The final decision is  $\delta_2 = \max_j \delta_j$ , i.e. the investment project of the candidate  $d_2$  receives the credit.

**Conclusion**

We have developed the method of processing and synthesis of the expert information, which is a combination of Kaufmann’s experton method and the method of possibilistic discrimination analysis. The proposed method enables us to identify with a high degree of certainty the investment projects with minimal risks and to formulate the levels of their crediting in the form of recommendations.

A practical example is considered, where using a special software package a decision is proposed in the form of a recommendation on the selection of a project with a minimal risk of granting a credit.

**საინფორმაციო რისკების მენეჯმენტში ექსპერტონებისა და ფაზი-  
დისკრიმინაციის კომბინირებული მეთოდის გამოყენების შესახებ  
გ.სირბილაძე, ი.ხუციშვილი  
რეზიუმე**

ნაშრომში წარმოდგენილია საინფორმაციო პროექტების შერჩევაში რისკების მინიმიზების ექსპერტონებისა და არამკაფიო დისკრიმინაციის კომბინირებული, ახალი ტექნოლოგია. იგი ითვალისწინებს საექსპერტო კომისიის მიერ კანდიდატი-საინფორმაციო პროექტებზე შეფასებების კონდენსირების მეთოდის გამოყენებას.

კრედიტის გაცემისას რისკების შემცირების მიზნით გადაწყვეტილების მიღების ეს ტექნოლოგია ითვალისწინებს საინფორმაციო პროექტების შეფასების ორ საფეხურს. პირველი ესაა მათი შესაძლო დიდი რაოდენობიდან უმნიშვნელო ან მცირე რისკების მქონე პროექტების გამოვლენას ექსპერტონების მეთოდის გამოყენებით [2,3]. ეს მეთოდი იყენებს ექსპერტთა ინტერვალურ პესიმისტურ და ოპტიმისტურ ხარისხობრივ შეფასებებს ყველა პროექტთან მიმართებაში. აკეთებს ამ ცოდნის კონდენსირებას და შესაძლო რისკების სიმრავლეზე აგებს ხარისხობრივ დონეებს ყოველი საინფორმაციო პროექტისთვის, საიდანაც გამოვლინდება დაბალი რისკების მქონე პროექტები.

მეორე საფეხური გულისხმობს პირველი საფეხურზე შერჩეული შედარებით მცირე რაოდენობის პროექტებიდან ერთმანეთთან შედარების მეთოდის, შესაძლებლობითი დისკრიმინაციული მეთოდის გამოყენებით (იგი ამ ნაშრომშია კონსტრუირებული) გამოავლინოს მაღალი ხარისხის მქონე პროექტები. ამის საფუძველზე კეთდება რჩევა-დასკვნა რათა გაიცეს კრედიტები.

მეთოდის რეალიზების მიზნით განხილულია პრაქტიკული მაგალითი, რომელშიც შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის გამოყენებით შემოთავაზებულია რჩევა-დასკვნა მინიმალური რისკების მქონე პროექტების შერჩევისათვის.

## ON THE COMBINED EXPERTON AND FUZZY DISCRIMINATION METHOD IN INVESTMENT RISK MANAGEMENT

G.Sirbiladze, I.Khutsishvili

### Abstract

The risk minimization method is proposed for the selection of investment projects. This is a novel technology combining fuzzy discrimination and the experton method. To minimize credit risks, the proposed technology of decision making offers two stages of the evaluation of investment projects. The first stage is the selection by the experton method [2, 3] of projects with insignificant and low risks among the total (possibly large) number of projects. The second stage is the application of the possibilistic discrimination method (constructed in this paper) to a relatively small number of projects selected in the first stage in order to compare them and identify top-quality projects for which a conclusion is made in the form of a recommendation on the credit granting. The realization of the method is illustrated by a practical example.

### References

1. Dubois, D. and Prade, H., *Theorie des Possibilites. Applications á la representation des connaissances en informatique*, Paris, Milan, Barcelone, Mexico, 1988.
2. Kaufmann, A., *Les Expertons*, Hermes, Paris, 1987.
3. Kaufmann A., *Expert Appraisements and Counter-Appraisements with Experton Processes, Analysis and Management of Uncertainty: Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, pp. 109-132, 1992.
4. Khutsishvili I., *An Application of the Statistical Method of Fuzzy Grades Analysis*, *Bulletin of the Georgian Academy of Sciences*, 173, No 2, 266-268, 2006.
5. Norris D., Pilsworth P.W. and Baldwin J.F., *Medical Diagnosis from Patient Records – A Method using Fuzzy Discrimination and Connectivity Analysis*, *Fuzzy Sets and Systems* 23, pp. 73-87, 1987.
6. Sirbiladze G., Sikharulidze A. and Korakhashvili G., *Decision-Making Aiding Fuzzy Informational Systems in Investments. Part I – Discrimination Analysis in Investment Projects*. *Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University. Applied Mathematics and Computer Sciences* , vol.353 (22-23), pp.77-94, 2003.
7. Sirbiladze G., Khachidze G., *Decision-Making Aiding Fuzzy Informational Systems in Investments. Part II - Demster-Shaper's Expected Utility in Investment Decisions*, *Proceedings of I. Javakhishvili Tbilisi State University. Applied Mathematics and Computer Sciences*, vol. 353(22-23), pp.95-108, 2003.
8. Sirbiladze G. and Gachechiladze T. *Restored Fuzzy Measures in Expert Decision-making* . *Information Sciences: an International Journal Archive*, vol. 169 (1/2), pp. 71 – 95, 2005.
9. Sirbiladze G. and Sikharulidze A., *Weighted Fuzzy Averages in Fuzzy Environment*, Parts I, II, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 11, no.2, pp. 139-157, 159-172, 2003.

## ON THE STATISTICAL METHOD OF FUZZY GRADES' ANALYSIS WITH THE GREAT NUMBER OF FORECASTING FACTORS

### I. Khutsishvili

1. Given work describes one of fuzzy statistical methods of decision-making and, presents its generalization for a case when the object of decision-making is characterized by a great number of forecasting factors. The object of the forecast considered in the work is an earthquake. It contains a fuzziness in the definition. Classes of classification into which it is possible to divide the object of forecast are fuzzy sets. For example, the forecasting object such as an earthquake can be divided into forecasting classes such as: "strong earthquake", "moderate earthquake" and "weak earthquake" [6]. It becomes obvious, that in this case, it is impossible to draw strict boundaries between classes of classification. Classes of factors of the object of forecast are also fuzzy sets. The above mentioned has provided the ground for applying a statistical method of fuzzy grades' analysis as the bases of forecast drawing up.

In a known "classical" variant of the method [1, 3, 7] the considered number of forecasting factors (activity) is not more than 3. However, for a specific forecast it can be much greater (in a considered concrete example of the forecast such factors are 9). Therefore, the "classical" variant of a method became a subject to modification in order to satisfy the condition of a great number of activity. With this purpose, the author introduced a concept of a measure of possibility (see (3)) which is used to build a generalized decision.

For the forecast, belonging to a certain class of classification is determined through application of a so-called membership functions. One of the most important problems of a statistical method of fuzzy grades' analysis is that the building of membership functions is based on intellectual activity of experts. Since membership functions are defined with the allowance for subjective preferences of experts, they can vary in kind. "Right" definition of membership functions is the basic guarantee of the method's success. The present work offers a model of membership function developed for a concrete case of the forecast. It represent a new modification of Zadeh's model (see (5)).

2. According to a statistical method of fuzzy grades' analysis (hereinafter referred to as the method of fuzzy grade statistics) the forecasting object is described by the corresponding forecast value. Codomain for the forecast value is divided into forecasting grades (classes). For each class the numerical interval is put in conformity. Corresponding membership functions are defined. Definition of the membership functions enclose a human factor, since an expert has a subjective viewpoint on a degree of belonging of the given forecasting object to the forecasting classes. The mentioned classes are fuzzy, therefore supports of membership functions are intersected.

The forecasting value depends on the certain parameters, or of forecasting factors (activity). Each of factors, in turn, is divided into classes (subfactors). The numbers of forecasting factors, their classes and range of their numerical intervals can be selected arbitrarily.

Let's introduce some designations:

Forecasting grades:  $M_1, M_2, \dots, M_\ell$ ;

Corresponding membership functions:  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell$

Forecasting factors:  $X_1, X_2, \dots, X_m$ ;

Classes of forecasting factors:  $X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kr}$ ;  $k = \overline{1, m}$ ;  $X_k = \bigcup_{j=1}^r X_{kj}$ .

Further, let us define selective frequencies  $n_{kj}^i$ , which represent the frequencies of  $j$ -th class of  $X_k$ -th factor occurring in  $i$ -th forecasting grade. The values of  $n_{kj}^i$  constitute initial data received as a result of observations and measurements. (see [1]).  $n_{kj}^i$  and  $\mu_i$  numbers are used to define fuzzy selective frequencies, fuzzy relative frequencies and the weight of each interval of the forecasting factor in accordance to the known formulas [2]:

$$\tilde{n}_{kj}^m = \sum_i \mu_i^m \cdot n_{kj}^i, \quad \tilde{f}_{kj}^m = \frac{\tilde{n}_{kj}^m}{\sum_i \tilde{n}_{kj}^i}, \quad w_{kj} = \frac{\sum_i \tilde{n}_{kj}^i}{\sum_j \sum_i \tilde{n}_{kj}^i}. \quad (1)$$

where  $\mu_i^m$  – average value of membership function when the forecasting value from  $i$  forecasting interval belongs to  $m$  forecasting grade.

After that, it becomes possible to draw a decision for the certain sample of forecasting factors. For this purpose we need to define fuzzy weights of each activity according to its interval, and then to carry out multifactorial linear



synthesis of fuzzy weights and fuzzy relative frequencies. As a result of multifactorial linear synthesis we receive the generalized decision (vector of the possible weighed decisions) [1]

$$\bar{D}_\alpha = \bar{w}_\alpha \cdot \tilde{f}_\alpha. \quad (2)$$

Considering the great number of forecasting factors, to draw the generalized decision we need to define concept of a measure of possibility:

$$\overrightarrow{Poss}_\alpha = \frac{\bar{D}_\alpha}{\max_j(D_\alpha(j))}, \text{ where } D_\alpha(j) \text{ is } j \text{ component of a vector } \bar{D}_\alpha. \quad (3)$$

At last, in order to receive the classical unique decision it is necessary to use an additional principle. For example, it is possible to use a principle of a maximum of possibilities. Then the final decision will be [5]:

$$D_{Class}^{(\alpha)} = \max_i(Poss_\alpha(i)), \text{ where } Poss_\alpha(i) \text{ is } i \text{ component of a vector } \overrightarrow{Poss}_\alpha. \quad (4)$$

3. Let's consider a concrete example of an application of a fuzzy grade statistics.

For a specific example of earthquake forecasting we consider the following geophysical atmosphere data to be factors-precursors: 1. Value of intensity of the electric fields (volt/m); 2. Temperature of air (in degrees of Celsius); 3. Temperature of ground (in degrees of Celsius); 4. Atmospheric pressure (in mb); 5. Absolute humidity (elasticity water pair in mb); 6. Relative humidity (in %); 7. The general overcast (in points); 8. The bottom overcast (in points); 9. Speed of a wind (in m/s).

Initial data comprises the earthquakes' statistics in the Caucasus Region. Values of factors were measured during the day in three hour interval: 0<sup>00</sup>, 3<sup>00</sup>, 6<sup>00</sup>, 9<sup>00</sup>, 12<sup>00</sup>, 15<sup>00</sup>, 18<sup>00</sup>, 21<sup>00</sup>.

The object of forecasting, earthquake, is described by means of a linguistic variable with following values: "noise", "moderate earthquake", "strong earthquake" [5] and is characterized by numerical value of magnitude ( $M$ ). At  $0 \leq M \leq 3$  "noise" is observed; at  $3 < M < 5$  "moderate earthquake" is observed; at  $5 \leq M \leq 8$  - "strong earthquake" is observed. Let us designate the defined forecast classes as  $M_0$ ,  $M_1$  and  $M_2$  and introduce the corresponding membership functions. The model of membership function, applied in the given method, is modification of Zadeh's model:

$$\mu_0(M) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (\alpha_1 M)^2}, & 0 \leq M \leq 3; \\ 0, & M > 3 \end{cases}; \quad \mu_1(M) = \begin{cases} 0, & M < 4.4; \\ \frac{1}{1 + (\alpha_2 (M - 4.9))^2}, & 4.4 \leq M \leq 5.4; \\ 0, & M > 5.4 \end{cases};$$

$$\mu_2(M) = \begin{cases} 0, & M < 4.4; \\ \frac{1}{1 + (\alpha_3 (M - 8))^2}, & 4.4 \leq M \leq 8; \\ 1, & M > 8 \end{cases}. \quad (5)$$

Coefficients  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  and  $\alpha_3$  are chosen empirically in accordance with the available data and experts' recommendations. In our case  $\alpha_1 = 0.15$ ,  $\alpha_2 = 4.99$  and  $\alpha_3 = 0.5$ .

Since forecasting classes are presented in the form of intervals, it is necessary to average membership functions on these intervals. Let  $\mu_i^j$  be an average value of  $\mu_j$  considering the intersection of a support of  $i$  forecasting fuzzy class and  $\text{supp } \mu_j$ . Then:

$$\mu_0^0 = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{dM}{1 + (0.15M)^2} \approx 0.93968; \quad \mu_1^0 = 0;$$

$$\mu_0^1 = 0; \quad \mu_1^1 = \frac{1}{5 - 4.4} \int_{4.4}^{5.0} \frac{dM}{1 + (4.99(M - 4.9))^2} \approx 0.55192; \quad \mu_2^1 = \frac{1}{0.4} \int_5^{5.4} \frac{dM}{1 + (4.99(M - 4.9))^2} \approx 0.3641;$$

$$\mu_1^2 = \frac{1}{0.6} \int_{4.4}^5 \frac{dM}{1 + (0.5(M - 8))^2} \approx 0.26968; \quad \mu_2^2 = \frac{1}{3} \int_5^8 \frac{dM}{1 + (0.5(M - 8))^2} \approx 0.6552.$$

Each of the factors-precursors is divided into three classes (subfactors). Intervals of the classes are fuzzy sets. Their boundaries are chosen empirically in accordance with the available data and estimations by the experts. In our case the following intervals are chosen for each activity and each of its classes :

$X_0$ – Intensity of an electric field:	$x_{00} \leq 5, x_{01} \in (5, 9], x_{02} > 9;$
$X_1$ – Temperature of air:	$x_{10} < 4.3, x_{11} \in [4.3, 9), x_{12} \geq 9;$
$X_2$ – Temperature of ground:	$x_{20} \leq 2, x_{21} \in (2, 11), x_{22} \geq 11;$
$X_3$ – Atmospheric pressure:	$x_{30} \leq 911.0, x_{31} \in (911, 916.4), x_{32} \geq 916.4;$
$X_4$ – Humidity absolute:	$x_{40} \leq 5, x_{41} \in (5, 9], x_{42} > 9;$
$X_5$ – Humidity relative:	$x_{50} < 60, x_{51} \in [60, 81], x_{52} > 81;$
$X_6$ – Overcast the general:	$x_{60} < 6, x_{61} \in [6, 8], x_{62} > 8;$
$X_7$ – Overcast bottom:	$x_{70} \leq 3, x_{71} \in (3, 9), x_{72} \geq 9;$
$X_8$ – Speed of a wind:	$x_{80} \leq 1, x_{81} \in (1, 2], x_{82} > 2.$

Selective frequencies  $n_{kj}^i$  for each interval of intensity and each class of each activity are calculated. The  $\tilde{n}_{kj}^i$  fuzzy selective frequencies,  $\tilde{f}_{kj}^i$  fuzzy relative frequencies and  $w_{kj}$  fuzzy weights of the forecasting factors are built on the basis of formulae (1). Now all the data necessary for decision-making exist.

Assume, we need to study a new case and values describing its factors are following:

$$7.25 \quad 13.0875 \quad 10.75 \quad 914.8125 \quad 11.0125 \quad 75.375 \quad 4.5 \quad 4.25 \quad 0.875$$

The following set of the classes of activities corresponds to the above given set of activities:

$$x_{01}, x_{12}, x_{21}, x_{31}, x_{42}, x_{51}, x_{60}, x_{71}, x_{80}.$$

Then a vector of fuzzy weights is

$$\vec{w} = (0.6619, 0.3762, 0.3381, 0.5130, 0.2435, 0.5816, 0.4346, 0.5714, 0.4266),$$

and a matrix of fuzzy relative frequencies is

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 0.3647 & 0.3272 & 0.3081 \\ 0.3850 & 0.3256 & 0.2894 \\ 0.2856 & 0.3337 & 0.3807 \\ 0.2823 & 0.3858 & 0.3319 \\ 0.3965 & 0.2701 & 0.3334 \\ 0.3320 & 0.3071 & 0.3609 \\ 0.4443 & 0.2596 & 0.2961 \\ 0.3379 & 0.3294 & 0.3326 \\ 0.1132 & 0.4413 & 0.4455 \end{pmatrix}.$$

Applying a linear multifactorial synthesis, we receive the weighed vector of possible decisions (the generalized decision)

$$\vec{D} = \vec{w} \cdot \tilde{f} = (1.35178, 1.38351, 1.41166),$$

with the corresponding measure of possibility

$$\overrightarrow{Poss} = \frac{\vec{D}}{\max_j D_j} = (0.95758, 0.98006, 1), \text{ where } D_j \text{ is } j \text{ component of a vector } \vec{D}.$$

Using the principle of a maximum of possibilities and, finally, we receive the forecast:

$$D_{Class} = 1 \left( \Rightarrow M_2 \equiv \text{Strong earthquake} \right).$$

The drawn result conforms with the statistical data: values of forecasting factors in the given sample correspond to a real data for October, 30-th, 1983 when in 4<sup>00</sup> there was an earthquake with magnitude 6.8 (according to our classification – "strong earthquake").

4. The method was tested on 80 cases of "noise" (days when earthquake was not observed) and 20 cases of arbitrarily taken earthquakes qualified as "moderate" and "strong". The initial data is represented by the measurements taken by meteorological station in Dusheti region of Georgia and Hydrometeorological Centre of Georgia for the period 1967-1992.

Test of the given method, performed by means of the developed software package, proved approximately 70 % [4] historical accuracy. It could be considered as a quite satisfactory result taking into account the fact that the geophysical activities of an atmosphere are not the main factors-precursors of earthquake.

While using the offered method it is necessary to remember, that there should be a remarkable correlation between forecasting factors and object of the forecast. Besides, it is necessary to make sure, that the sample of primary classical frequencies does not contain much of zero values. Otherwise, it will have statistical effect.

The fact of getting satisfactory results based on relatively small amount of initial data speaks in favour of the offered method [2].

## არამკაფიო კლასების ანალიზის სტატისტიკური მეთოდის გამოყენების შესახებ საპროგნოზო ფაქტორების დიდი რიცხვის პირობებში

ი.ხუციშვილი  
რეზიუმე

წარმოდგენილ ნაშრომში განიხილება პროგნოზის ამოცანა, როდესაც საპროგნოზო ობიექტი აღიწერება საპროგნოზო ფაქტორების დიდი რიცხვით. პროგნოზის მათემატიკური მოდელი აიგება არამკაფიო კლასების ანალიზის სტატისტიკური მეთოდის საფუძველზე. ნაშრომში შემოღებულია განზოგადებული ამონახსნის შესაძლებლობის ზომის ცნება. ასევე შემოთავაზებულია შეთანხმებულობის ფუნქციის ახალი მოდელი, რომელიც წარმოადგენს ზადეს მოდელის გარკვეულ მოდიფიკაციას.

განიხილულია კონკრეტული მაგალითი – მიწისძვრის შესაძლებლობის შესახებ გადაწყვეტილების მიღება ატმოსფეროს გეოფიზიკური აქტივობების მონაცემთა მიხედვით. საწყის მონაცემებად აღებულია კავკასიის რეგიონის სტატისტიკური მონაცემები.

შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის გამოყენებით მეთოდის მუშაობა შემოწმდა ოთხმოცი შემთხვევისთვის, როდესაც მიწისძვრა არ აღინიშნებოდა და ოცი შემთხვევით შერჩეული მიწისძვრისათვის. პროგნოზი გამართლდა დაახლოებით 70% შემთხვევაში, რაც შეიძლება ჩაითვალოს დამაკმაყოფილებელ შედეგად, მითუმეტეს რომ ატმოსფეროს გეოფიზიკური აქტივობები არ წარმოადგენენ მიწისძვრის მთავარ წინამორბედებს.

## ON THE STATISTICAL METHOD OF FUZZY GRADES' ANALYSIS WITH THE GREAT NUMBER OF FORECASTING FACTORS

I. Khutsishvili

*Abstract*

The present article considers the problem of a forecast when the object of forecast is described by a great number of forecasting factors. In the article we build the mathematical model of forecasting and introduce the concept of a measure of possibility of a generalized decision. The work also offers a new model of membership function, which represents a modification of Zadeh's model.

The article focuses on the specific example of earthquakes' forecasting and takes geophysical forecasting factors (activity) of an atmosphere as the factors-precursors. Initial data comprises the earthquakes' statistics in the Caucasus Region.

The efficiency of the method was tested on eighty cases without earthquake and twenty arbitrarily taken earthquakes. The method proved approximately 70% accuracy, which is the satisfactory result taking into account the fact that the geophysical activities of an atmosphere are not the principal factors-precursors.

### References

1. Criado F., Gachechiladze T., Meladze H., Tsertsvadze G. – A new Approach to Analysing Fuzzy Data and Decision-making Regarding the Possibility of Earthquake Occurrence – Intas-9702126 (Final Report), 1999.
2. Juzhang Li - Fuzzy Statistics of Classification – Fuzzy Mathematics, 2(4), p. 107, 1988.
3. Khutsishvili I., An Application of the Statistical Method of Fuzzy Grades Analysis, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 173, No 2, 266-268, 2006.
4. Khutsishvili I., Statistical Method of Fuzzy Grades' Analysis for Forecast Modeling - Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Vol.1, pp.12-19, 2006.
5. Peizhuang Wang – Fuzzy Sets and its Application – Publishing House of Science and Technology, Shanghai, 1983.
6. Zadeh L.A., Concept of a linguistic variable and its application to acceptance of the approached decisions. – M: "World", 1976.
7. Zuoying Li, Zhenpei Chen and Jitao Li – A Model of Weather Forecast by Fuzzy Grade Statistics – FSS 26, N 3, pp. 275-283, June ( 1988).

## ALGEBRAIC ANALYSIS OF MANY VALUED LOGIC

R.Grigolia

Many-valued logic (MVL) as a separate subject was developed by the Polish logician and philosopher Lukasiewicz in [L]. His first intention was to use a third, additional truth value for "possible", and to model in this way the modalities "it is necessary that" and "it is possible that".

Essentially parallel to the Lukasiewicz approach, the American mathematician Post in [P] introduced the basic idea of additional truth degrees, and applied it to problems of the representability of functions.

Later on, Gödel in [G] tried to understand intuitionistic logic in terms of many truth degrees. The outcome was the family of Gödel systems, and a result, namely, that intuitionistic logic does not have a characteristic logical matrix with only finitely many truth degrees.

One of the main types of logical calculi are Hilbert type calculi. These calculi are formed in the same way as the corresponding calculi for classical logic:

## SINTAX

Some set of *axioms* is used together with a set of *inference rules*. The notion of derivation is the usual one. A language  $L$  for a propositional many-valued logic is given by:

- a finite or denumerable set  $p, q, r, \dots$  of propositional symbols;
- a finite set of connectives  $c_1, \dots, c_m$ , with  $c_i$  having arity  $u_i \geq 0$ .

The set  $FORM(L)$  of formulas in the language  $L$  is defined as usual: any propositional symbol is a formula and, if  $c$  is a connective of arity  $u$  and  $\alpha_1, \dots, \alpha_u$  are formulas, then  $c\alpha_1 \dots \alpha_u$  is a formula. In specific examples, we always have connectives of arity at most 2, and we write binary connectives using infix notation. We also use left and right parentheses according to the standard conventions; so, e.g.,  $\rightarrow p \rightarrow qp$  is written  $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ .

## SEMANTICS

There are many types of semantics: 1) Logical matrices, 2) Algebraic semantics. Particular case of algebraic semantics are logical matrices. The most suitable way of defining a system  $L$  of many-valued logic is to fix the characteristic logical matrix for its language, i.e. to fix:

- the set of truth degrees,
- the truth degree functions which interpret the propositional connectives,
- the meaning of the truth degree constants
- the *designated truth degrees*, which form a subset of the set of truth degrees and act as substitutes for the traditional truth value.

A formula  $\alpha$  of a propositional language counts as *valid* under some valuation  $v$  (which maps the set of propositional variables into the set of truth degrees) iff it has a designated truth degree under  $v$ . And  $\alpha$  is *logically valid* or a *tautology* iff it is valid under all valuations.

## SYSTEMS OF MANY-VALUED LOGIC

## Basic Logic (BL)

The language of the propositional logic  $BL$  consists of countably many propositional variables and the following primitive logical connectives: **Strong conjunction**  $\&$  (binary); **Bottom 0** (nullary — a propositional constant); **Implication**  $\rightarrow$  (binary); **Weak conjunction**  $\wedge$  (binary), also called **lattice conjunction**  $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \& (\alpha \rightarrow \beta)$ ; **Negation**  $\neg$  (unary), defined as  $\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow 0$ ; **Equivalence**  $\leftrightarrow$  (binary), defined as  $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ ; **(Weak) disjunction**  $\vee$  (binary), also called **lattice disjunction**, defined as  $\alpha \vee \beta \equiv ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \wedge ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ ; **Top 1** (nullary), defined as  $1 \equiv 0 \rightarrow 0$ .

## Axioms

$$(BL1) \quad (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(BL2) \quad (\varphi \& \psi) \rightarrow \varphi$$

$$(BL3) \quad (\varphi \& \psi) \rightarrow (\psi \& \varphi)$$

$$(BL4) \quad (\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\psi \& (\psi \rightarrow \varphi))$$

$$(BL5a) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \& \psi) \rightarrow \chi)$$

$$(BL5b) \quad ((\varphi \& \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$$

$$(BL6) \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$$

$$(BL7) \quad 0 \rightarrow \varphi$$

Inference rule: modus ponens  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$

This logic is  $t$ -Norm based logic. Truth degree set is  $W = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ . These system are determined by a strong conjunction connective  $\&T$  which has as corresponding truth degree function a  $t$ -norm  $T$ , i.e. a binary operation  $T$  in the unit interval which is associative, commutative, non-decreasing, and has the degree 1 as

a neutral element:  $T(u, T(v, w)) = T(T(u, v), w)$ ,  $T(u, v) = T(v, u)$ ,  $u \leq v \Rightarrow T(u, w) \leq T(v, w)$ ,  $T(u, 1) = u$ . There is a standard way to introduce a related implication connective  $\rightarrow_T$  with the truth degree function  $u \rightarrow_T v = \sup \{z \mid T(u, z) \leq v\}$ . This implication connective is connected with the t-norm  $T$  by the crucial *adjointness condition*:  $T(u, v) \leq w \Leftrightarrow u \leq (v \rightarrow_T w)$ .

**Lukasiewicz logics  $L, L_m$**

$L$  —  $BL$  plus  $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

The systems  $L_m$  and  $L$  are defined by the logical matrix which has either some finite set  $W_m = \{k/m-1 \mid 0 \leq k \leq m-1\}$  of rationals within the real unit interval, or the whole unit Interval  $W = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  as the truth degree set. The degree 1 is the only designated truth degree. The main connectives of these systems are a strong and a weak conjunction,  $\&$  and  $\wedge$ , respectively, given by the truth degree functions  $u \& v = \max \{0, u + v - 1\}$ ,  $u \wedge v = \min \{u, v\}$ , where  $\max \{0, u + v - 1\}$  is a t-Norm; a negation connective  $\neg$  determined by  $\neg u = 1 - u$ , and an implication connective  $\rightarrow$  with truth degree function  $u \rightarrow v = \min \{1, 1 - u + v\}$ .

**Gödel logics  $G, G_m$**

$G$  —  $BL$  plus  $\varphi \rightarrow (\varphi \& \varphi)$

The systems  $G_m$  and  $G$  are defined by the logical matrix which has either some finite set  $W_m = \{k/m-1 \mid 0 \leq k \leq m-1\}$  of rationals within the real unit interval, or the whole unit interval  $W = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$  as the truth degree set. The degree 1 is the only designated truth degree. The main connectives of these systems are a conjunction and a disjunction determined by the truth degree functions  $u \wedge v = \min \{u, v\}$ ,  $u \vee v = \max \{u, v\}$ , where  $\min \{u, v\}$  is a t-Norm; an implication connective  $\rightarrow$  with truth degree function  $u \rightarrow v = 1$ , if  $u \leq v$  and  $u \rightarrow v = v$ , if  $u > v$ , and a negation connective  $\sim$  with truth degree function  $\sim u = 1$ , if  $u = 0$  and  $\sim u = 0$ , if  $u \neq 0$ .

**Product logic  $\Pi$**

$\Pi$  —  $BL$  plus  $\neg\neg\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \& \psi)) \rightarrow (\psi \& \neg\neg\psi))$ .

This logic is t-Norm based logic, where t-Norm is natural multiplication between real numbers.

**ALGEBRAIC SEMANTICS**

Residuated structures appears in many areas of mathematics, the main origin of which are monoidal operation multiplication  $\otimes$  that respects a partial order  $\leq$  and a binary (left-) residuation operation  $\rightarrow$  characterized by  $x \otimes y \leq z$  if and only if  $x \leq y \rightarrow z$ . Such kind of structures are associated with logical systems. If the partial order is a semilattice order, and multiplication the semilattice operation, we get Brouwerian semilattices which are models of the conjunction-implication fragment of the intuitionistic propositional calculus. The well-known algebraic models of the conjunction-implication fragment of Lukasiewicz many-valued logic are another example of special class of residuated structures. We are interested mainly with those monoidal structures which have in common the following basic properties: Integrality, Commutativity of the monoidal operation  $\otimes$  and the existence of a binary operation  $\rightarrow$  which is adjoint to the given operation. Every continuous t-norm is locally isomorphic to one of the following: Lukasiewicz t-norm, defined by  $a \otimes b = \max\{a + b - 1, 0\}$ ; Gödel t-norm  $\wedge$ , defined by  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ; product t-norm  $\cdot$ ; i. e., ordinary product of real numbers.

**BL-algebras** is introduced by P. Hájek [H] as an algebraic counterpart of one of the extensions of fuzzy logic.  $BL$ -algebra  $(B, \vee, \wedge, \rightarrow, \otimes, 0, 1)$  is a universal algebra of type  $(2, 2, 2, 1, 0, 0)$  such that:

- 1)  $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$  is a bounded lattice;
- 2)  $(B, \otimes, 1)$  is a commutative monoid with identity:  $x \otimes q = q \otimes p, p \otimes (q \otimes r) = (p \otimes q), p \otimes 1 = 1 \otimes p$
- 3) (1)  $p \wedge (q \rightarrow (p \otimes q)) = p,$   
 (2)  $((p \rightarrow q) \otimes p) \vee q = q,$   
 (3)  $(p \rightarrow (p \vee q)) = 1,$   
 (4)  $((p \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow (p \vee q))) = 1,$   
 (5)  $(p \wedge q) \otimes r = (p \otimes r) \wedge (q \otimes r),$   
 (6)  $p \wedge q = p \otimes (p \rightarrow q),$   
 (7)  $p \vee q = ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \wedge ((q \rightarrow p) \rightarrow p),$   
 (8)  $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) = 1.$

An algebra  $A = (A; \oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$  is said to be an **MV-algebra** iff it satisfies the following equations:

1.  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$  2.  $x \oplus y = y \oplus x;$
3.  $x \oplus 0 = x;$  4.  $x \oplus 1 = 1;$
5.  $\neg 0 = 1;$  6.  $\neg 1 = 0;$
7.  $x \otimes y = \neg(\neg x \oplus \neg y);$
8.  $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$

Every  $MV$ -algebra has an underlying ordered structure defined by  $x \leq y$  iff  $\neg x \oplus y = 1$ .  $(A; \leq, 0, 1)$  is a bounded distributive lattice. Moreover, the following property holds in any  $MV$ -algebra:  $x \otimes y \leq x \wedge y \leq x \vee y \leq x \oplus y$ .

**Product logic algebras**, or **PL-algebras**, for short, were introduced by Hájek, Godo and Esteva [HGE]. The fundamental work on  $PL$ -algebras belong to R. Cignoli and A. Torrens [CT]. A  $PL$ -algebra is an algebra  $(A, \otimes, \rightarrow,$

0) of type (2, 2, 0) such that, upon derived operations :  $1 = 0 \rightarrow 0$ ,  $\neg x = x \rightarrow 0$ ,  $x \wedge y = x \otimes (x \rightarrow y)$ ,  $x \vee y = ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \wedge ((y \rightarrow x) \rightarrow x)$ , satisfies the following identities :

- (PL1)  $(A, \otimes, 1)$  is a commutative monoid with identity,
- (PL2)  $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$  is a lattice with 0 and 1,
- (PL3)  $x \otimes (y \vee z) = (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$ ,  $x \otimes (y \wedge z) = (x \otimes y) \wedge (x \otimes z)$ ,
- (PL4)  $(x \otimes y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$ ,
- (PL5)  $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ ,
- (PL6)  $x \rightarrow x = 1$ ,
- (PL7)  $(\neg \neg z \otimes ((x \otimes z) \rightarrow (y \otimes z))) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$ ,
- (PL8)  $x \wedge \neg x = 0$ .

A **Heyting algebra**  $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$  is a bounded distributive lattice  $(H, \vee, \wedge, 0, 1)$  with an additional binary operation  $\rightarrow: H \times H \rightarrow H$  such that for any  $a, b \in H$   $x \leq a \rightarrow b$  iff  $a \wedge x \leq b$ . A Heyting algebra is named **Gödel algebra** if in addition the one satisfies  $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ .

**MV-algebras** are algebraic models of Łukasiewicz logic. MV-algebras form variety, i.e. the class of algebras closed under homomorphic images, subalgebras and direct product.

A description of structure of non-equivalent formulas of  $n$  variables is equivalent to the description of  $n$ -generated free algebras. An algebra  $A \in \mathbf{K}$  is said to be a *free algebra* in a variety  $\mathbf{K}$ , if there exists a set  $A_0 \subset A$  such that  $A_0$  generates  $A$  and every mapping  $f$  from  $A_0$  to any algebra  $B \in \mathbf{K}$  is extended to a homomorphism  $h$  from  $A$  to  $B$ . In this case  $A_0$  is said to be *the set of free generators* of  $A$ . If the set of free generators is finite then  $A$  is said to be a *finitely generated free algebra*. Let  $\mathbf{MV}_n$  be subvariety of  $\mathbf{MV}$  generated by algebras  $\mathbf{S}_i = (W_i, \oplus, \otimes, \neg, 0, 1)$ ,  $W_i = \{k/i \mid 0 \leq k \leq i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . The subvariety  $\mathbf{MV}_n \subset \mathbf{MV}$  is axiomatized by the extra axiom:  $x^{n+1} = x^n$  (or  $(n+1)x = nx$ ). We define the function  $v_m(x)$  as follows:  $v_m(1) = 2^m$ ,  $v_m(2) = 3^m - 2^m$ , ...  $v_m(n) = (n+1)^m - (v_m(n_1) + \dots + v_m(n_{k-1}))$ , where  $n_1 = 1$ ,  $n_k = n$  and  $n_2, \dots, n_{k-1}$  are all the strict divisors of  $n$ .

**Theorem 1.** (A. Di Nola, R. Grigolia, Panti G. [DGP]).  $F_{\mathbf{MV}_n}(m) = S_1^{v_m(1)} \times \dots \times S_n^{v_m(n)}$ ,  $F_{\mathbf{MV}}(m)$  is isomorphic to the subalgebra of the inverse limit  $\lim_{n \in \omega - \{0\}} \{F_{\mathbf{MV}_n}(m)\}_{n \in \omega - \{0\}}$  generated by  $g_i = (g_i^{(1)}, g_i^{(2)}, g_i^{(3)}, \dots)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

An algebra  $A \in \mathbf{K}$  is called *projective*, if for any  $B, C \in \mathbf{K}$ , any epimorphism (that is an onto homomorphism)  $\beta: B \rightarrow C$  and any homomorphism  $\gamma: A \rightarrow C$ , there exists a homomorphism  $\alpha: A \rightarrow B$  such that  $\beta \alpha = \gamma$ . A subalgebra  $A$  of  $F_{\mathbf{K}}(m)$  is said to be projective if there exists an endomorphism  $h: F_{\mathbf{K}}(m) \rightarrow F_{\mathbf{K}}(m)$  such that  $h(F_{\mathbf{K}}(m)) = A$  and  $h(x) = x$  for every  $x \in A$ . McNaughton has proved that a function  $f: [0,1]^m \rightarrow [0,1]$  has an MV polynomial representation  $q(x_1, \dots, x_m)$  such that  $f = q$  iff  $f$  satisfies the following conditions: (i)  $f$  is continuous, (ii) there exists a finite number of affine linear distinct polynomials  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , each having the form  $\lambda_j = b_j + n_{j1}x_1 + \dots + n_{jm}x_m$  where all  $b$ 's and  $n$ 's are integers such that for every  $(x_1, \dots, x_m) \in [0,1]^m$  there is  $j$ ,  $1 \leq j \leq s$  such that  $f(x_1, \dots, x_m) = \lambda_j(x_1, \dots, x_m)$ . We recall that to any 1-variable McNaughton function  $f$  is associated a partition of the unit interval  $[0, 1]$   $\{0 = a_0, a_1, \dots, a_n = 1\}$  in such a way that  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  and the points  $\{(a_0, f(a_0)), (a_1, f(a_1)), \dots, (a_n, f(a_n))\}$  are the knots of  $f$  and the function  $f$  is linear over each interval  $[a_{i-1}, a_i]$ , with  $i = 1, \dots, n$ . We assume that all considered functions are 1-variable McNaughton functions.

**Theorem 2.** (A. Di Nola, R. Grigolia). *Let  $A$  be a one-generated subalgebra of  $F_{\mathbf{MV}}(1)$  generated by  $f$ . Then the following are equivalent: (1)  $A$  is projective; (2) one of the following holds:* (2.1)  $\text{Max}\{f(x): x \in [0,1]\} = f(a_1)$  and for  $f$  non-zero function,  $f(x) = x$  for every  $x \in [0, a_1]$ . (2.2)  $\text{Min}\{f(x): x \in [0,1]\} = f(a_n - 1)$  and for  $f$  non-unit function,  $f(x) = x$  for every  $x \in [a_{n-1}, a_n]$ .

## PROJECTIVE FORMULAS

Let us denote by  $\mathbf{P}_m$  a set of fixed  $p_1, \dots, p_m$  propositional variables and by  $\Phi_m$  all of Basic logic formulas with variables in  $\mathbf{P}_m$ . Notice that the  $m$ -generated free  $BL$ -algebra  $FBL(m)$  is isomorphic to  $\Phi_m / \equiv$ , where  $\alpha \equiv \beta$  iff  $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$  and  $(\alpha \leftrightarrow \beta) = (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \beta)$ . Subsequently we do not distinguish between the formulas and their equivalence classes. Hence we simply write  $\Phi_m$  for  $F_{\mathbf{MV}}(m)$ , and  $\mathbf{P}_m$  plays the role of free generators. Since  $\Phi_m$  is a lattice, we have an order  $\leq$  on  $\Phi_m$ . It follows from the definition of  $\rightarrow$  that for all  $\alpha, \beta \in \Phi_m$ ,  $\alpha \leq \beta$  iff  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Let  $\alpha$  be a formula of Basic logic and consider a substitution  $\sigma: \mathbf{P}_m \rightarrow \Phi_m$  and extend it to all of  $\Phi_m$  by  $\sigma(\alpha(p_1, \dots, p_m)) = \alpha(\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_m))$ . We can consider the substitution as an endomorphism of the free algebra  $\Phi_m$ .

**Definition 3.** A formula  $\alpha \in \Phi_m$  is called *projective* if there exists a substitution  $\sigma: \mathbf{P}_m \rightarrow \Phi_m$  such that  $\vdash \sigma(\alpha)$  and  $\alpha \vdash \beta \leftrightarrow \sigma(\beta)$ , for all  $\beta \in \Phi_m$ .

**Definition 4.** An algebra  $A$  is called *finitely presented* if  $A$  is finitely generated, with the generators  $a_1, \dots, a_m \in A$ , and there exist a finite number of equations  $P_1(x_1, \dots, x_m) = Q_1(x_1, \dots, x_m), \dots, P_n(x_1, \dots, x_m) = Q_n(x_1, \dots, x_m)$  holding in  $A$  on the generators  $a_1, \dots, a_m \in A$  such that if there exists an  $m$ -generated algebra  $B$ , with generators  $b_1, \dots, b_m \in B$ , such that the equations  $P_1(x_1, \dots, x_m) = Q_1(x_1, \dots, x_m), \dots, P_n(x_1, \dots, x_m) = Q_n(x_1, \dots, x_m)$  hold in  $B$  on the generators  $b_1, \dots, b_m \in B$ , then there exists a homomorphism  $h: A \rightarrow B$  sending  $a_i$  to  $b_i$ .

**Theorem 5.** [DG]. *A BL-algebra B is finitely presented iff  $B \cong \Phi_m / [u]$ , where  $[u]$  is a principal filter generated by some element  $u \in \Phi_m$ .*

**Theorem 6.** (Di Nola A., Grigolia R). *Let A be an m-generated projective BL-algebra. Then there exists a projective formula  $\alpha$  of m variables, such that A is isomorphic to  $\Phi_m / [\alpha]$ , where  $[\alpha]$  is the principal filter generated by  $\alpha \in \Phi_m$ .*

**Corollary 10.** *If A is a projective MV-algebra, then A is finitely presented.*

**Theorem 11.** *If  $\alpha$  is a projective formula of m variables, then  $\Phi_m / [\alpha]$  is a projective algebra.*

**Theorem 12.** *There exists a one-to-one correspondence between projective formulas with m variables and m-generated projective subalgebras of  $\Phi_m$ .*

**მრავალნიშნა ლოგიკების ალგებრული ანალიზი**

**რ.გრიგოლია**

**რეზიუმე**

განხილულია  $t$ -ნორმაზე დაფუძნებული BL-ლოგიკის, ლუკასევიჩის ლოგიკის, გოდელის ლოგიკის და ნამრავლის ლოგიკის ალგებრული ანალიზი. მოცემულია თავისუფალი ალგებრების აღწერა და პროექციული MV-ალგებრების დახასიათება.

**ALGEBRAIC ANALYSIS OF MANY VALUED LOGIC**

**R.Grigolia**

**ABSTRACT**

Algebraic analysis of  $t$ -norm based logics is given. Namely, BL-logic, Łukasiewicz logic, Gödel logic and product logic. Description of free and characterization of projective MV-algebras is given.

**References**

[CT] Cignoli, R., Torrens, A., *An algebraic analysis of product logic*. Multiple-Valued Logic 5 (2000), 45–65.  
 [DG] Di Nola A., Grigolia R., *Projective MV-algebras and their automorphism groups*, Mutiple valued Logic, vol. 8, issue 6, 2002.  
 [DGP] Di Nola A., Grigolia R., Panti G., *Finitely generated free MV-algebras and their automorphism groups*, Studia Logica, vol. 61(1998), N 1, 65-78.  
 [G]. Godel K., *Zum intuitionistischen Aussagenkalkül*, Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, Math.-naturwiss. Klasse 69 (1932), 65-66.  
 [H] Hájek P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Trends in Logic, vol. 4, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.  
 [HGE] ] Hájek, P., Godo, L., and Esteva, F. (1996). A complete many-valued logic with product-conjunction, *Arch. Math. Logic* 35, 191-208.  
 [L]. Łukasiewicz, J., *O logice trojwartosciowej*, *Ruch Filozoficzny* 5(1920), 170-171.  
 [English translation in: Selected Works. (ed.: L. Borkowski), North-Holland Publ. Comp., Amsterdam and PWN, Warsaw. (1970)].  
 [P]. Post, E., *Introduction to a general theory of elementary propositions*, *American Journal Mathematics* 43 (1921), 163-185.

## EXPERTONS FOR EXPERT EVALUATIONS

G.Gachechiladze, T. Gachechiladze, T.Davitashvili, H.Meladze, G.Tsertsvadze

1. This work is devoted to adopt experton theory [1] to decision making.

1. An experton is an extension of the concept of probabilistic sets (random fuzzy subsets) where the probability of each  $\alpha$ -out is replaced by an interval of probabilities collected from expert opinion by a statistic. We show, that expertons have the same algebraic rules as probabilistic [2].

We start with a numerical example. Suppose, we must estimate six theme and each theme by points presented by experts. We consider our method on the basis of one them which is estimated by five attributes. Expert gives his own valuation which is a points given by experts.

Table 1. Experts estimations (primary table)

Expert	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
1	5	7	3	5	2
2	3	8	4	5	3
3	3	7	3	4	3
4	4	6	3	5	4
5	7	4	5	3	5
6	4	4	4	4	4
7	9	8	6	6	6
8	3	4	3	3	3
9	3	5	3	3	4
10	4	4	5	5	6

After normalization  $\bar{P}_i = P_i / \sum_{i=1}^5 P_i$  and calculation Corrado Jinni's intrinsic dispersion

$c_i^2 = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{10} \sum_{i=1}^{10} (P_{ik} - P_{ij})^2$  it is possible to calculate the confidence intervals, which are presented in table 2.

Table 2. Confidence intervals

Expert	$P_1'$	$P_2'$	$P_3'$	$P_4'$	$P_5'$
1	[0.3, 0.4]	[0.6, 0.8]	[0.2, 0.4]	[0.3, 0.5]	[0.1, 0.2]
2	[0.2, 0.4]	[0.7, 0.9]	[0.3, 0.5]	[0.3, 0.5]	[0.2, 0.3]
3	[0.2, 0.4]	[0.6, 0.8]	[0.2, 0.4]	[0.3, 0.4]	[0.2, 0.3]
4	[0.6, 0.8]	[0.5, 0.7]	[0.2, 0.4]	[0.3, 0.5]	[0.4, 0.5]
5	[0.4, 0.5]	[0.3, 0.4]	[0.4, 0.5]	[0.2, 0.4]	[0.4, 0.7]
6	[0.6, 0.8]	[0.3, 0.4]	[0.3, 0.5]	[0.4, 0.6]	[0.4, 0.6]
7	[0.8, 1.0]	[0.7, 0.9]	[0.5, 0.7]	[0.5, 0.6]	[0.5, 0.7]
8	[0.2, 0.4]	[0.3, 0.4]	[0.2, 0.4]	[0.2, 0.4]	[0.2, 0.3]
9	[0.2, 0.4]	[0.3, 0.5]	[0.2, 0.4]	[0.2, 0.4]	[0.4, 0.6]
10	[0.5, 0.8]	[0.3, 0.4]	[0.4, 0.5]	[0.3, 0.5]	[0.5, 0.7]

For each property  $P_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4, 5$ , we shall compute two statistics, one for the lower bounds of intervals, the other for the upper bounds. If we accept these statistics like probability lows on the level set (0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.0) and take for each law the cumulative complementary law, we obtain the following table, which represent what we call "experton" (see table 3).

This experton at first must be reduced to a probabilistic set taking the mean of bounds, second, probabilistic set must be reduced to a fuzzy subset and, third, it is necessary to look for maximum value of possibility distribution or for nearest ordinary set.



Table 3. Experton

level	$P_1'$	$P_2'$	$P_3'$	$P_4'$	$P_5'$
0	1	1	1	1	1
0.1	1	1	1	1	1
0.2	1	1	1	1	[0.9, 1]
0.3	[0.6, 1]	1	[0.5, 1]	[0.7, 1]	[0.6, 0.9]
0.4	[0.5, 1]	[0.5, 1]	[0.4, 0.6]	[0.2, 1]	[0.4, 0.6]
0.5	[0.4, 0.5]	[0.4, 0.6]	[0.4, 0.5]	[0.1, 0.5]	[0.2, 0.6]
0.6	0.4	[0.4, 0.5]	[0.2, 0.5]	[0, 0.2]	[0, 0.6]
0.7	[0.1, 0.4]	[0.2, 0.5]	[0, 0.4]	0	0
0.8	[0.1, 0.4]	[0, 0.4]	0	0	0
0.9	[0, 0.1]	[0, 0.2]	0	0	0
1.0	0	0	0	0	0

The corresponding probabilistic set by mean of bounds is given by following table:

Table 4.

$P_1'$	$P_2'$	$P_3'$	$P_4'$	$P_5'$
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	0.95
0.80	1	0.75	0.85	0.75
0.75	0.75	0.50	0.50	0.50
0.45	0.50	0.45	0.30	0.40
0.40	0.45	0.35	0.10	0.30
0.70	0.35	0.20	0	0
0.70	0.20	0	0	0
0.05	0.10	0	0	0
0	0	0	0	0

Taking the mathematical expectation for each  $P_i'$ , we find the fuzzy set

$P_1'$	$P_2'$	$P_3'$	$P_4'$	$P_5'$
0.623	0.577	0.477	0.441	0.445

Maximum of possibility distribution is  $P_1'$  and the nearest ordinary set will be

$P_1'$	$P_2'$	$P_3'$	$P_4'$	$P_5'$
1	1	0	0	0

Analogously we consider the remained five themes.

Taking the maximal values of possibility distributions, corresponding to each experton as  $P_i'$ , one can construct a new experton, giving the final decision.

2. Denote by  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \subset \Omega$  (referential set) some expertons with the product  $(\cdot)$  and algebraic sum  $(\dot{+})$  ( $a+b-ab$ ), which concern each  $\omega$  and each  $\alpha$  (operations on intervals of confidence). The following algebraic properties are available:

$$\hat{A}(\cdot)\hat{B} = \hat{B}(\cdot)\hat{A}, \quad \hat{A}(\dot{+})\hat{B} = \hat{B}(\dot{+})\hat{A} \quad \text{commutativity}$$

$$\begin{aligned} (\hat{A}(\cdot)\hat{B})(\cdot)\hat{C} &= \hat{A}(\cdot)(\hat{B}(\cdot)\hat{C}) \\ (\hat{A}(\dot{+})\hat{B})(\dot{+})\hat{C} &= \hat{A}(\dot{+})(\hat{B}(\dot{+})\hat{C}) \end{aligned} \quad \text{associativity}$$

$$\overline{\overline{\hat{A}}} = \hat{A} \quad \text{involution}$$

$$\hat{A}(\cdot)\emptyset = \emptyset, \quad \hat{A}(\dot{+})\emptyset = \hat{A}, \quad \hat{A}(\cdot)\Omega = \hat{A}, \quad \hat{A}(\dot{+})\Omega = \Omega$$

$$\overline{\hat{A}(\cdot)\hat{B}} = \overline{\hat{A}(\dot{+})\hat{B}}, \quad \overline{\hat{A}(\dot{+})\hat{B}} = \overline{\hat{A}(\cdot)\hat{B}} \quad \text{De Morgans theorem}$$

Now with  $(\wedge)$ (min) and  $(\vee)$ (max) we have:

$$\hat{A}(\wedge)\hat{B} = \hat{B}(\wedge)\hat{A}, \quad \hat{A}(\vee)\hat{B} = \hat{B}(\vee)\hat{A} \quad \text{commutativity}$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\wedge)(\widehat{B}(\wedge)\widehat{C}) &= (\widehat{A}(\wedge)\widehat{B})(\wedge)\widehat{C} && \text{associativity} \\ \widehat{A}(\vee)(\widehat{B}(\vee)\widehat{C}) &= (\widehat{A}(\vee)\widehat{B})(\vee)\widehat{C} \\ \widehat{A}(\wedge)(\widehat{B}(\vee)\widehat{C}) &= (\widehat{A}(\wedge)\widehat{B})(\vee)(\widehat{A}(\wedge)\widehat{C}) \\ \widehat{A}(\vee)(\widehat{B}(\wedge)\widehat{C}) &= (\widehat{A}(\vee)\widehat{B})(\wedge)(\widehat{A}(\vee)\widehat{C}) && \text{distributivity} \\ \widehat{A}(\wedge)\widehat{A} &= \widehat{A}, \quad \widehat{A}(\vee)\widehat{A} = \widehat{A} && \text{idempotency} \\ \overline{\overline{A}} &= \widehat{A} && \text{involution} \\ \widehat{A}(\wedge)\emptyset &= \emptyset, \quad \widehat{A}(\vee)\emptyset = \widehat{A}, \quad \widehat{A}(\wedge)\Omega = \widehat{A}, \quad \widehat{A}(\vee)\Omega = \Omega \\ \overline{\widehat{A}(\wedge)\widehat{B}} &= \overline{\widehat{A}}(\vee)\overline{\widehat{B}}, \quad \overline{\widehat{A}(\vee)\widehat{B}} = \overline{\widehat{A}}(\wedge)\overline{\widehat{B}} && \text{De Morgans theorem} \end{aligned}$$

With operations  $(\cdot)$  and  $(+)$  expertons have a monoidal structure and with  $(\wedge)$  and  $(\vee)$  the structure of a distributive lattice.

**ექსპერტონები სამქსპერტო შეფასებისთვის**  
**ჯ.გაჩეჩილაძე, თ.გაჩეჩილაძე, თ.დავითაშვილი, ჰ.მელაძე, გ.ცერცვაძე**

**რეზიუმე**

წარმოდგენილ ნაშრომში ექსპერტონების თეორია ჩამოყალიბებულია ისეთი ფორმით, რომელიც იძლევა მისი გამოყენების საშუალებას უშუალოდ გადაწყვეტილების მიღებისათვის. ექსპერტონების თეორიის ახალი ფორმა განხილულია საკონკურსოდ წარმოდგენილი თემების წინასწარ მოცემული ნიშნების მიხედვით ათქულიანი შეფასების შემთხვევაში. გადაწყვეტილების მიღების ალგორითმი ჩამოყალიბებულია გარკვეული მატრიცების გარდაქმნის სახით.

ექსპერტონების თეორიის წარმოდგენილი ფორმა შეიძლება გამოყენებულ იქნას ყველა შემთხვევაში, სადაც საწყისი ინფორმაცია მოცემულია ყოველი შესაფასებელი ობიექტის თვისებების ქულებით შეფასების სახით.

მოკლედ განხილულია ექსპერტონების ძირითადი ალგებრული თვისებები.

**EXPERTONS FOR EXPERT EVALUATIONS**

**G.Gachechiladze, T. Gachechiladze, T.Davitashvili, H.Meladze, G.Tsertsvadze**

**Resume.** The experton theory is presented in a such form that permits to use it directly for decision making. The new form of experton theory is applied to scientific themes presented on the concurs. Each them is characterized by some attributes in 10 point system. The algorithm of decision making is presented by some rules of matrix transformations. Shortly the expertons algebraic properties are considered.

References.

1. A.Kaufmann –Les Expertons. Ermes, Paris (1987) ;
2. A.Kaufmann – Theory of Expertons and Fuzzy logic – FSS, 28, pp.295-304, North Holland, 1988.

## EVALUATION OF BANKRUPTCY RISKS BY THE METHOD OF FUZZY STATISTICS

T. Manjafarashvili

### Introduction

With the progress of computer facilities, the creation of high technologies that could facilitate decision making by the management of an enterprise has become of topical importance in the economy.

Today we are faced with an urgent task to create such expert-information technologies that, along with the use of an objective data base, could use the subjective knowledge of experienced experts, managers and other persons concerned in order to make trustworthy decisions. All these reasons have led to the development of formal technologies of constructing **expert-analytic systems of decision making support**.

In the present paper we consider one concrete technology of constructing the expert-analytic system of decision making support. As the initial information for making a decision the above-mentioned technology uses the expert (subjective) information [5,6] received from the experienced managers of the enterprise and the objective financial-and-economic data collected from respective subdivisions. For their processing and consolidation the most up-to-date methods are used.

In this context, the problem of evaluating a bankruptcy risk extent is topical for all persons concerned about the state of the enterprise – owners, managers, investors, creditors, auditors and so on. A suitable mathematical tool for such studies is the fuzzy set theory and fuzzy logic.

### Bankruptcy Risk Analysis

Suppose we are given three periods of time 1, 2, 3 for which a comparative financial analysis is carried out. Let the enterprise be characterized by the set (vector) of  $N$  financial indexes constructed on the basis of financial accounts for each period. The vector of financial indexes is  $(X_1^1, X_2^1, \dots, X_N^1)$  for period 1,  $(X_1^2, X_2^2, \dots, X_N^2)$  for period 2 and  $(X_1^3, X_2^3, \dots, X_N^3)$  for period 3. Each of the indexes  $X_i^j$  can be divided into subfactors  $X_{ik}^j$  ( $k = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, 3$ ). It is assumed that the system of indexes ( $X$ ) is sufficient for a reliable analysis of the state of the enterprise.

The exhaustive set of states (otherwise bankruptcy risks)  $A$  of the enterprise is divided into five (overlapping in the general case) fuzzy subsets of the form:

- $A_1$  a fuzzy subset of “extremely unfavourable” states,
- $A_2$  a fuzzy subset of “unfavourable” states,
- $A_3$  a fuzzy subset of “average quality” states,
- $A_4$  a fuzzy subset of “relatively favourable” states,
- $A_5$  a fuzzy subset of “extremely favourable” states.

We say that the term-set of the linguistic variable “state of enterprise” consists of five elements  $A_1, \dots, A_5$ . These elements are respectively associated with the membership functions  $\mu_1(v), \dots, \mu_5(v)$ , where  $V = V(X)$  is the complex index of the enterprise state. The higher  $V$ , the more prosperous the enterprise. The qualitative form of the functions  $\mu_1(v), \dots, \mu_5(v)$  is shown in Fig. 1.

In order that an enterprise bankruptcy risk could be predicted by the methods of mathematical statistics, we need a certain classification procedure, but, as we see, between the above-described five classes there are no clear boundaries. That is why any notions concerning the enterprise state contain uncertainty (fuzziness). Since we deal with fuzzy subsets  $V$ , to describe the membership functions  $\mu_1, \dots, \mu_5$  in a compact way we associate them with the fuzzy  $T$ -numbers  $(\alpha_{1l}, \beta_{1l}, \beta_{1r}, \alpha_{1r}), \dots, (\alpha_{5l}, \beta_{5l}, \beta_{5r}, \alpha_{5r})$ , where  $\alpha_l$  and  $\alpha_r$  are the abscissas of the left and right points of the lower base, and  $\beta_l$  and  $\beta_r$  the abscissas of the left and right points of the upper base of a trapezoid which prescribes the respective function in the region where the membership function of the respective fuzzy subset is nontrivial [2,3,4,8].

The problem of bankruptcy risk analysis can be formulated as follows: define a procedure that relates the set of indexes ( $X$ ) to the complex index  $V$ . Then using the “historical experience” and functions  $\{\mu\}$  and defining the value  $V$ , we construct the following assertion “current state of the enterprise”:

- extremely favourable with plausibility level  $\mu_1(V)$ ,
- relatively favourable with plausibility level  $\mu_2(V)$ ,
- of medium quality with plausibility level  $\mu_3(V)$ ,
- unfavourable with plausibility level  $\mu_4(V)$ ,
- extremely unfavourable with plausibility level  $\mu_5(V)$

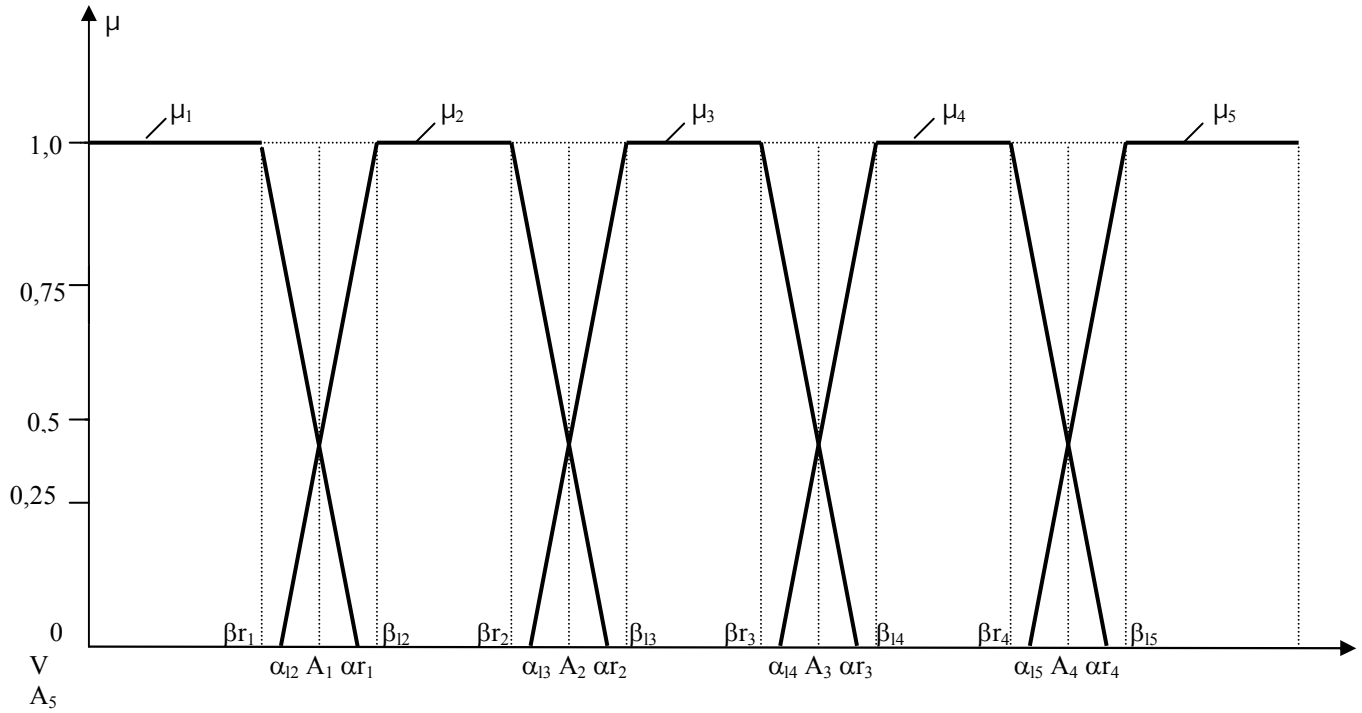


Fig.1. The qualitative form of a compatibility function

This assertion imparts a certain weight to each of the variants of the belonging of the current state of the enterprise to one of the subsets  $\{A\}$ . The person who makes a decision as to the enterprise may satisfy himself with a hypothesis that the value  $\mu(V)$  is maximal and evaluate qualitatively the state of the enterprise. Whether the state of the enterprise has become better or worse from one period to another can be described in the following manner:

if  $V_{II} > V_I$ , then the state has become better,  
if  $V_{II} < V_I$ , then the state has become worse.

Let us consider the mathematical model of enterprise risk prediction based on the theory of fuzzy class statistics [16]. The object of prediction is the enterprise bankruptcy risk. Since the result of prediction will be a fuzzy subset of the set of states  $A$  of the enterprise, we need an additional principle to obtain a unique (classical) answer. We use the following dephasification principle:

$$\delta(A_0) = \max_i \delta(A_i) \quad (1)$$

Let us introduce the notation for the initial frequencies  $n_{ik}^{qj}$ , where  $j$  is the observation period number ( $j = 1, 2, 3$ ),  $i$  is the number of a factor (the number of a component of the vector  $\vec{X}$ ), ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $k$  is the number of a respective subfactor ( $k = 1, 2, \dots, s$ ),  $q$  is the number of a state of the enterprise ( $q = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Frequencies  $n_{ik}^{qj}$  are the classical frequencies corresponding to the nonfuzzy partitioning of the region of variation of the complex index of the financial state of the enterprise into nonoverlapping classes. The partitioning is done by an expert. We regard these frequencies as initial data, i.e. assume them to be given (see Table 1).

Thanks to the fuzzy definition of the notions  $A_q$ , we impose on the nonfuzzy partitioning of the region  $V$  the fuzzy partitioning into nonoverlapping fuzzy classes (see Fig. 1). An analogous fuzzy partitioning is also done for every factor (into  $s$  subfactors). Because of the fuzziness and overlapping of the intervals it becomes necessary to calculate fuzzy frequencies [1,2,3,8] by means of which the analysis will be carried out. These fuzzy frequencies are calculated by the following formulas (they are given for the case for  $q = 5$  and  $s = 5$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{ik}^1 &= \bar{\mu}_1^1 n_{ik}^1 + \bar{\mu}_2^1 n_{ik}^2, & \tilde{n}_{ik}^2 &= \bar{\mu}_1^2 n_{ik}^1 + \bar{\mu}_2^2 n_{ik}^2 + \bar{\mu}_3^2 n_{ik}^3, & \tilde{n}_{ik}^3 &= \bar{\mu}_2^3 n_{ik}^2 + \bar{\mu}_3^3 n_{ik}^3 + \bar{\mu}_4^3 n_{ik}^4, \\ \tilde{n}_{ik}^4 &= \bar{\mu}_3^4 n_{ik}^3 + \bar{\mu}_4^4 n_{ik}^4 + \bar{\mu}_5^4 n_{ik}^5, & \tilde{n}_{ik}^5 &= \bar{\mu}_4^5 n_{ik}^4 + \bar{\mu}_5^5 n_{ik}^5, \end{aligned} \quad (2)$$

(in the general case  $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $k = 1, 2, \dots, s$ )

Since the formulas are identical for any analyzed time period  $j$ , the upper second index in them is omitted.  $\bar{\mu}$  denotes an average value of the membership function in the respective interval. First we give the formulas for the membership functions having the form of fuzzy  $T$ -numbers:

$$\mu_1(v) = \begin{cases} 1, v \in [0, \beta_{r1}] \\ \frac{1}{\beta_{r1} - \alpha_{r1}} v - \frac{\alpha_{r1}}{\beta_{r1} - \alpha_{r1}}, v \in [\beta_{r1}, \alpha_{r1}] \end{cases}, \mu_2(v) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_{12} - \beta_{12}} v + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12} - \beta_{12}}, v \in [\alpha_{12}, \beta_{12}] \\ 1, v \in [\beta_{12}, \beta_{r2}] \\ \frac{1}{\beta_{r2} - \alpha_{r2}} v - \frac{\alpha_{r2}}{\beta_{r2} - \alpha_{r2}}, v \in [\beta_{r2}, \alpha_{r2}] \end{cases},$$

$$\mu_3(v) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_{13} - \beta_{13}} v + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{13} - \beta_{13}}, v \in [\alpha_{13}, \beta_{13}] \\ 1, v \in [\beta_{13}, \beta_{r3}] \\ \frac{1}{\beta_{r3} - \alpha_{r3}} v - \frac{\alpha_{r3}}{\beta_{r3} - \alpha_{r3}}, v \in [\beta_{r3}, \alpha_{r3}] \end{cases},$$

$$\mu_4(v) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_{14} - \beta_{14}} v + \frac{\alpha_{14}}{\alpha_{14} - \beta_{14}}, v \in [\alpha_{14}, \beta_{14}] \\ 1, v \in [\beta_{14}, \beta_{r4}] \\ \frac{1}{\beta_{r4} - \alpha_{r4}} v - \frac{\alpha_{r4}}{\beta_{r4} - \alpha_{r4}}, v \in [\beta_{r4}, \alpha_{r4}] \end{cases}, \mu_5(v) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha_{15} - \beta_{15}} v + \frac{\alpha_{15}}{\alpha_{15} - \beta_{15}}, v \in [\alpha_{15}, \beta_{15}] \\ 1, v \in [\beta_{15}, A_5] \end{cases} \quad (3)$$

Table 1

Factors	Subfactors	$n_{ik}^{1j}$	$n_{ik}^{2j}$	$n_{ik}^{3j}$	$n_{ik}^{4j}$	$n_{ik}^{5j}$
$X_1^j$	$x_{11}^j$	$n_{11}^{1j}$	$n_{11}^{2j}$	$n_{11}^{3j}$	$n_{11}^{4j}$	$n_{11}^{5j}$
	$x_{12}^j$	$n_{12}^{1j}$	$n_{12}^{2j}$	$n_{12}^{3j}$	$n_{12}^{4j}$	$n_{12}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_{1s}^j$	$n_{1s}^{1j}$	$n_{1s}^{2j}$	$n_{1s}^{3j}$	$n_{1s}^{4j}$	$n_{1s}^{5j}$
$X_2^j$	$x_{21}^j$	$n_{21}^{1j}$	$n_{21}^{2j}$	$n_{21}^{3j}$	$n_{21}^{4j}$	$n_{21}^{5j}$
	$x_{22}^j$	$n_{22}^{1j}$	$n_{22}^{2j}$	$n_{22}^{3j}$	$n_{22}^{4j}$	$n_{22}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_{2s}^j$	$n_{2s}^{1j}$	$n_{2s}^{2j}$	$n_{2s}^{3j}$	$n_{2s}^{4j}$	$n_{2s}^{5j}$
...	...	...	...	...	...	...
$X_N^j$	$x_{N1}^j$	$n_{N1}^{1j}$	$n_{N1}^{2j}$	$n_{N1}^{3j}$	$n_{N1}^{4j}$	$n_{N1}^{5j}$
	$x_{N2}^j$	$n_{N2}^{1j}$	$n_{N2}^{2j}$	$n_{N2}^{3j}$	$n_{N2}^{4j}$	$n_{N2}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$x_{Ns}^j$	$n_{Ns}^{1j}$	$n_{Ns}^{2j}$	$n_{Ns}^{3j}$	$n_{Ns}^{4j}$	$n_{Ns}^{5j}$

Next we define the average values of  $\mu_q(v)$  which for the respective interval [a,b] are calculated by the formula

$$\bar{\mu}_n^m = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mu_n(v) dv,$$

where  $m$  is the membership function number (1, 2, 3, 4, 5) and  $n$  is the classification region of  $V$ . By formulas (2) and (4) we calculate the fuzzy frequencies presented in Table 2. We introduce the notation

$$\tilde{p}_{ik}^{qj} = \frac{\tilde{n}_{ik}^{qj}}{\sum_{q=1}^5 \tilde{n}_{ik}^{qj}}, \quad w_{ik}^{qj} = \frac{\sum_{q=1}^5 \tilde{n}_{ik}^{qj}}{\sum_{k=1}^s \sum_{q=1}^5 \tilde{n}_{ik}^{qj}} \times \frac{1}{N} \quad (4)$$

Table 2

Factors	Subfactors	$\tilde{n}_{ik}^{1j}$	$\tilde{n}_{ik}^{2j}$	$\tilde{n}_{ik}^{3j}$	$\tilde{n}_{ik}^{4j}$	$\tilde{n}_{ik}^{5j}$
$X_1^j$	$x_{11}^j$	$\tilde{n}_{11}^{1j}$	$\tilde{n}_{11}^{2j}$	$\tilde{n}_{11}^{3j}$	$\tilde{n}_{11}^{4j}$	$\tilde{n}_{11}^{5j}$
	$x_{12}^j$	$\tilde{n}_{12}^{1j}$	$\tilde{n}_{12}^{2j}$	$\tilde{n}_{12}^{3j}$	$\tilde{n}_{12}^{4j}$	$\tilde{n}_{12}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_2^j$	$x_{21}^j$	$\tilde{n}_{21}^{1j}$	$\tilde{n}_{21}^{2j}$	$\tilde{n}_{21}^{3j}$	$\tilde{n}_{21}^{4j}$	$\tilde{n}_{21}^{5j}$
	$x_{22}^j$	$\tilde{n}_{22}^{1j}$	$\tilde{n}_{22}^{2j}$	$\tilde{n}_{22}^{3j}$	$\tilde{n}_{22}^{4j}$	$\tilde{n}_{22}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_N^j$	$x_{N1}^j$	$\tilde{n}_{N1}^{1j}$	$\tilde{n}_{N1}^{2j}$	$\tilde{n}_{N1}^{3j}$	$\tilde{n}_{N1}^{4j}$	$\tilde{n}_{N1}^{5j}$
	$x_{N2}^j$	$\tilde{n}_{N2}^{1j}$	$\tilde{n}_{N2}^{2j}$	$\tilde{n}_{N2}^{3j}$	$\tilde{n}_{N2}^{4j}$	$\tilde{n}_{N2}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{Ns}^j$	$x_{Ns}^j$	$\tilde{n}_{Ns}^{1j}$	$\tilde{n}_{Ns}^{2j}$	$\tilde{n}_{Ns}^{3j}$	$\tilde{n}_{Ns}^{4j}$	$\tilde{n}_{Ns}^{5j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

The application of this notation gives Table 3 containing, in addition to relative fuzzy frequencies, also factors, subfactor change intervals and the weights of these intervals calculated by formulas (5).

Table 3

Factors	Subfactors	$p_{ik}^{1j}$	$p_{ik}^{2j}$	$p_{ik}^{3j}$	$p_{ik}^{4j}$	$p_{ik}^{5j}$	$w_{ik}^j$
$X_1^j$	$x_{11}^j$	$p_{11}^{1j}$	$p_{11}^{2j}$	$p_{11}^{3j}$	$p_{11}^{4j}$	$p_{11}^{5j}$	$w_{11}^j$
	$x_{12}^j$	$p_{12}^{1j}$	$p_{12}^{2j}$	$p_{12}^{3j}$	$p_{12}^{4j}$	$p_{12}^{5j}$	$w_{12}^j$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_2^j$	$x_{21}^j$	$p_{21}^{1j}$	$p_{21}^{2j}$	$p_{21}^{3j}$	$p_{21}^{4j}$	$p_{21}^{5j}$	$w_{21}^j$
	$x_{22}^j$	$p_{22}^{1j}$	$p_{22}^{2j}$	$p_{22}^{3j}$	$p_{22}^{4j}$	$p_{22}^{5j}$	$w_{22}^j$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_N^j$	$x_{N1}^j$	$p_{N1}^{1j}$	$p_{N1}^{2j}$	$p_{N1}^{3j}$	$p_{N1}^{4j}$	$p_{N1}^{5j}$	$w_{N1}^j$
	$x_{N2}^j$	$p_{N2}^{1j}$	$p_{N2}^{2j}$	$p_{N2}^{3j}$	$p_{N2}^{4j}$	$p_{N2}^{5j}$	$w_{N2}^j$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_{Ns}^j$	$x_{Ns}^j$	$p_{Ns}^{1j}$	$p_{Ns}^{2j}$	$p_{Ns}^{3j}$	$p_{Ns}^{4j}$	$p_{Ns}^{5j}$	$w_{Ns}^j$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Note that calculations are performed for each period ( $j = 1, 2, 3$ ) separately. This makes it possible to trace up the change dynamics of the enterprise bankruptcy risk. Table 3 contains the information obtained by the initial data processing (cf. the table of classical frequencies). We think that using Table 3 and applying the method of linear statistical synthesis [7], a decision can be made for the current moment of time. The decision is made in two steps.

Step 1: let the results of measurement of the current financial indexes (factors) (for simplicity, further formulas will be given for the case of the example to be considered below for  $N = 6$  and  $s = 5$ ) be  $X_{13}, X_{25}, X_{31}, X_{44}, X_{51}, X_{62}$ , and the weights of six subfactor change intervals be respectively  $w_{13}, w_{25}, w_{31}, w_{44}, w_{51}, w_{62}$ . The matrix of respective fuzzy intervals has the form

$$\begin{pmatrix} p_{13}^1 & p_{13}^2 & p_{13}^3 & p_{13}^4 & p_{13}^5 \\ p_{25}^1 & p_{25}^2 & p_{25}^3 & p_{25}^4 & p_{25}^5 \\ p_{31}^1 & p_{31}^2 & p_{31}^3 & p_{31}^4 & p_{31}^5 \\ p_{44}^1 & p_{44}^2 & p_{44}^3 & p_{44}^4 & p_{44}^5 \\ p_{51}^1 & p_{51}^2 & p_{51}^3 & p_{51}^4 & p_{51}^5 \\ p_{62}^1 & p_{62}^2 & p_{62}^3 & p_{62}^4 & p_{62}^5 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Step 2: the vector of weights  $(w_{13} \ w_{25} \ w_{31} \ w_{44} \ w_{51} \ w_{62})$  is multiplied by the frequency matrix

$$\begin{aligned} \bar{\delta} = (w_{13} \ w_{25} \ w_{31} \ w_{44} \ w_{51} \ w_{62}) \begin{pmatrix} p_{13}^1 & p_{13}^2 & p_{13}^3 & p_{13}^4 & p_{13}^5 \\ p_{25}^1 & p_{25}^2 & p_{25}^3 & p_{25}^4 & p_{25}^5 \\ p_{31}^1 & p_{31}^2 & p_{31}^3 & p_{31}^4 & p_{31}^5 \\ p_{44}^1 & p_{44}^2 & p_{44}^3 & p_{44}^4 & p_{44}^5 \\ p_{51}^1 & p_{51}^2 & p_{51}^3 & p_{51}^4 & p_{51}^5 \\ p_{62}^1 & p_{62}^2 & p_{62}^3 & p_{62}^4 & p_{62}^5 \end{pmatrix} = \\ = (\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5) \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} \delta_1 &= w_{13}p_{13}^1 + w_{25}p_{25}^1 + w_{31}p_{31}^1 + w_{44}p_{44}^1 + w_{51}p_{51}^1 + w_{62}p_{62}^1, \\ \delta_2 &= w_{13}p_{13}^2 + w_{25}p_{25}^2 + w_{31}p_{31}^2 + w_{44}p_{44}^2 + w_{51}p_{51}^2 + w_{62}p_{62}^2, \\ \delta_3 &= w_{13}p_{13}^3 + w_{25}p_{25}^3 + w_{31}p_{31}^3 + w_{44}p_{44}^3 + w_{51}p_{51}^3 + w_{62}p_{62}^3, \\ \delta_4 &= w_{13}p_{13}^4 + w_{25}p_{25}^4 + w_{31}p_{31}^4 + w_{44}p_{44}^4 + w_{51}p_{51}^4 + w_{62}p_{62}^4, \\ \delta_5 &= w_{13}p_{13}^5 + w_{25}p_{25}^5 + w_{31}p_{31}^5 + w_{44}p_{44}^5 + w_{51}p_{51}^5 + w_{62}p_{62}^5. \end{aligned}$$

To obtain a unique “classical” solution it is necessary to use some principle from outside. We apply the principle of the maximum and the final solution looks like

$$\delta_0 = \max (\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5).$$

## Conclusion

We have fully realized the proposed method in the form of a software package based on C#. After entering the initial expert (subjective) and objective data, it enables the financial manager of an enterprise to evaluate automatically the financial-and-economic results of the work of his enterprise in the definite periods of time and to make, on their basis, the required decisions. Our system of decision-making support can also be used for the monitoring of changes in the financial-and-economic state of an enterprise.

Furthermore, this software package is helpful in solving an important management problem of business effectiveness evaluation, which cannot be solved without applying the up-to-date computer technology of simultaneous processing of the expert and objective information.

## References

- [1] L. M. de Campos Ibanez, M. J. Bolanos Carmone. Representation of fuzzy measures through probabilities, FSS, 1989, 31, № 1
- [2] T.Gachechiladze, T.Manjaparishvili. On Fuzzy Subsets, Proc. Tbilisi State Univ., Applied Math. Series, 1988, 279.
- [3] Kandel Abraham. Fuzzy Statistics and Forecast Evaluation, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1978, SMC-8, no. 5.
- [4] Kandel Abraham. On the Control and Evaluation of Uncertain Processes, IEEE Transactions on Automatic Control, 1980, AC-25, no. 6.
- [5] A. Kaufmann, Theory of Expertons and Fuzzy Logic, Fuzzy Sets and Systems, 1988, 28, no. 2, 295-304

- [6] A. Kaufmann. Expert Appraisements and Counter-Appraisements with Experton Processes - Analysis and Management of Uncertainty: Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam, pp. 109-132, 1992.
- [7] Li Zuoyong, Chen Zhenpei, Li Jitao. A model of weather forecast by fuzzy grade statistics, FSS, 1988, 26, no. 3
- [8] G.Sirbiladze, T.Gachechiladze. Restored fuzzy measures in expert decision-making Information Sciences: an International Journal archive, Volume 169 (1/2), Pp: 71 – 95, 2005.

**გაკოტრების რისკის შეფასება არამკაფიო სტატისტიკის მეტოდით  
თ.მანჯაფარაშვილი  
რეზიუმე**

ეკონომიკის სხვადასხვა დარგში (მათ შორის საწარმოებშიც) ფინანსური აქტივების მართვისას მომავალი არაცხადია იმის გამო რომ მართვა მიმდინარეობს როგორც თვით ფინანსური აქტივების ისე მათი ეკონომიკური გარემოცვის მომავალი მდგომარეობის განუზღვრელობის პირობებში. გაკოტრების რისკის ხარისხის განსაზღვრის ამოცანა არის აქტუალური ამოცანა ყველა იმ პირისათვის ვინც დაინტერესებულია საწარმოს მდგომარეობით – საწარმოს მფლობელებისათვის ხელმძღვანელებისათვის ინვესტორებისათვის კრედიტორებისათვის აუდიტორებისათვის და ა.შ.

ამასთან უნდა აღინიშნოს რომ მოცემული კონკრეტული საწარმოს უნიკალურობიდან თავიდანვე ცხადია რომ აქ სტატისტიკური ალბათობის გამოყენება უადგილოა (სრულყოფილი სტატისტიკა არ შეიძლება არსებობდეს) და აქცენტი გაკოტრების პროგნოზირებიდან გადატნილი უნდა იქნას არსებული სიტუაციის გამოცნობაზე იმ დისტანციის განსაზღვრით რომელიც აშორებს საწარმოს გაკოტრების მდგომარეობიდან და ასევე ამ განსაზღვრის შესაბამისი დასაჯერებლობის ხარისხის მითითებაზე. ამის გამო ადეკვატურ მათემატიკურ აპარატს ასეთი გამოკვლევებისათვის წარმოადგენს არა სტატისტიკა და ალბათობის თეორია, არამედ არამკაფიო სიმრავლეთა თეორია და არამკაფიო ლოგიკა.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ამ თეორიაზე დაფუძნებული მათემატიკური მოდელი საწარმოს გაკოტრების რისკის განსაზღვრისათვის, არამკაფიო კლასების სტატისტიკის თეორიის გამოყენების ავტორის მიერ შემოთავაზებული ვარიანტი.



**NEW CHROMOTHEORY OF CANONICALLY CONJUGATE FUZZY SUBSETS**  
**T.Gachechiladze, H.Meladze, G.Tsertsvadze, N.Archvadze, T.Davitashvili**

**Resume.** The new chromotheory of canonically conjugate fuzzy subsets is presented. The Heizenberg’s principle’s analog principle is established. In Hilbert space the informational functions and joint membership functions are defined. In the work Zadeh operators, colour operators and corresponding commutativity relations are presented.

**Keywords.** Fuzzy sets, membership function, colour operator, Zadeh operator.

1. In the work a new chromotheory of canonically conjugate fuzzy subsets is presented [1].

In many cases there exist unlimited number of ways of interaction of subject with the object. As a result the controlled interaction is almost always is incomplete. It is based on the limited (generally small) number of attributes (colour) of the object corresponding to the subject, which can be recognized. When the set of colours are defined as a result of our interaction with the object we say, that there is defined the system on the object with the given structure of uncertainty.

Data in informatics are the set of so-called informational units [2]. Each of informational units is the four: (object, sing, value, plausibility). It is important to differ the notion of inaccuracy and uncertainty. Inaccuracy is connected with the information content (corresponding to the component “value”) and uncertainty to its verity, understandable in terms of compatibility with reality (component “plausibility”). For the given information there exist contradiction between inaccuracy of expression content and its uncertainty expressed in the fact that with the increase of expressions accuracy its uncertainty rise and vise versa, uncertain character of information leads to some inaccuracy of the final conclusions received from this information. We see that from one side these notions are in certain contradiction and from another side – complete each other.

We offer to model such situation by means of a new concept of optimal pare of canonically conjugate fuzzy subsets. We offer the method of construction of the informational unit membership functions taking into account the both canonically conjugate components simultaneously and have describing this unit in the most complete and optimal way.

In the frame of optimal model the generalized probability theory and information theory, color operators, canonically conjugate numbers and appropriate arithmetic, Zadeh operators are constructed.

2. Let  $\varphi$  denotes some colour,  $\xi_\varphi$  - his numerical value is random variable. In the referential system  $\Omega$  (universal set) it is latent parameter.

Let probability distribution of  $\xi_\varphi$  is characterized by density  $\rho_\varphi(x_\omega)$ :

$$\int_R \rho_\varphi(x_\omega) dx_\omega = 1 . \tag{1}$$

Quantity

$$x_\omega^* \equiv M\xi_\varphi = \int_R x_\omega \rho_\varphi(x_\omega) dx_\omega \tag{2}$$

will be called calculated value of the colour  $\varphi$  in point  $\omega$  of universal set  $\Omega$ . Note that formula (2) establish one to one corresponds under  $\Omega$  and real numbers  $R$ .

Except  $M\xi_\varphi$  the colour of  $\omega$  characterized by dispersion

$$\sigma_\varphi^2(\omega) = \int_R (x - x_\omega^*)^2 \rho_\varphi(x_\omega) dx_\omega . \tag{3}$$

In our model  $\sigma_\varphi^2(\omega)$  is connected with definition of presence of colour  $\varphi$  for  $\omega$ . If  $\sigma_\varphi^2(\omega) \rightarrow 0$ , we will say, that  $\varphi$  has certain value in  $\omega$ . The more is  $\sigma_\varphi^2(\omega)$ , the more  $\varphi$  is uncertain in  $\omega$ . If  $\sigma_\varphi^2(\omega) \rightarrow \infty$ , we say that  $\omega$  has no colour  $\varphi$ . Thus if  $\mu_\varphi(\omega) = 1$  we say that  $\omega$  possess colour  $\varphi$ , if  $\mu_\varphi(\omega) \rightarrow 0$ , than  $\omega$  does not possess colour  $\varphi$ .

3. For  $\forall \omega \in \Omega$  introduce some interval of  $\varphi$  values  $I_\varphi(\omega) \subseteq R$  by relation

$$\mu_{\tilde{\varphi}}(\omega) = \int_{I_\varphi(\omega)} \rho_\varphi(\omega) dx_\omega = \int_R I_\varphi(\omega) \rho_\varphi(x_\omega) dx_\omega \tag{4}$$

where  $I_\varphi(\omega)$  is defined in a such way, that (4) will be true when  $\mu_\varphi(\omega)$  is a membership function established by expert. In the theory of information representation main role plays the notion of informational function of defined by

$$|x_\omega; \varphi\rangle = \sqrt{\rho_\varphi(\omega)} e^{i\alpha} , \tag{5}$$

where  $\sqrt{\dots}$  is the arithmetic root and  $\alpha$  - random phase (real number). It is evident, that

$$\rho_\varphi(\omega) = |x_\omega; \varphi\rangle^+ |x; \omega\rangle.$$

Here  $|x; \varphi\rangle^+ \equiv \langle x; \varphi|$  and  $|x; \omega\rangle$  are bra- and ket- vectors [3] correspondingly.

Let consider the Fourier transform of the ket -vector:

$$|x_{c\omega}; \varphi_c\rangle = \widehat{F}|x_\omega; \varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} \int_R |x_\omega; \varphi\rangle e^{-\frac{i}{c}x_\omega x_{c\omega}} dx_\omega \quad (6)$$

where  $c$  is a constant. Integral (6) converges in mean-quadratic sense to the function from  $L^2(R)$  (Hilbert space). Correspondence under  $|x_\omega; \varphi\rangle$  and  $\widehat{F}|x_\omega; \varphi\rangle$  is reciprocal:  $\exists \widehat{F} : F^{-1}|x_\omega; \varphi\rangle = |x_\omega; \varphi\rangle$ . If in  $L^2(R)$  the scalar product is defined, than

$$\left( |x_{\omega_1}; \varphi_1\rangle, |x_{\omega_2}; \varphi_2\rangle \right) = \left( |x_{c\omega_1}; \varphi_1^c\rangle, |x_{c\omega_2}; \varphi_2^c\rangle \right). \quad (7)$$

From formula (7) we can conclude that in parallel with colour  $\varphi$  exist other colour  $\varphi^c$  with informational function  $|x_{c\omega}; \varphi^c\rangle$  and density  $\rho_{\varphi^c}(\omega_c)$  which determines corresponding membership function:

$$\chi_{\varphi^c}(\omega_c) = \int_{I_{\varphi^c}(\omega_c)} |x_{\omega_c}; \varphi^c\rangle^+ |x_{\omega_c}; \varphi^c\rangle d\omega_{\varphi^c} = \int_R I_{\varphi^c}(\omega_c) \left\| |x_{\omega_c}; \varphi^c\rangle \right\|^2 d\omega_c \quad (8)$$

where  $I_{\varphi^c}(\omega_c)$  is the interval corresponding to membership function of canonically conjugate fuzzy subset.

4. Usually fuzzy subset is constructed on the basis of expect estimation of one of the noncommuting component. Fuzzy subset constructed in this way characterize the information unit incompletely. We offer the method of constructions the informational unit membership function taking into account the both canonically conjugate components simultaneously and hence describing this unit in most complete and optimal way.

The joint distribution of two canonically conjugate colours is given by following formula:

$$\rho_{\varphi_\omega \times \varphi_{c\omega}}(x_\omega, x_{c\omega}) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R R} M(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_\omega + \alpha_2 x_{c\omega})) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (9)$$

and corresponding joint membership function is:

$$\mu(x_\omega, x_{c\omega}; \varphi, \varphi^c) = \int_{I_\varphi(\omega)} \int_{I_{\varphi^c}(\omega_c)} \rho_{\varphi_\omega \times \varphi_{c\omega}}(x_\omega, x_{c\omega}) dx_\omega dx_{c\omega}, \quad (10)$$

where (9) is the Weil transformation [4] of the operator  $\widehat{M}(\alpha_1, \alpha_2)$ :

$$\widehat{M}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{(2\pi c)^3} \int dx_\omega dx_{c\omega} \rho_{\varphi_\omega \times \varphi_{c\omega}}(x_\omega, x_{c\omega}) \widehat{\Delta}(x_\omega, x_{c\omega}). \quad (11)$$

Operator  $\widehat{\Delta}(x_\omega, x_{c\omega})$  has the form:

$$\widehat{\Delta}(x_\omega, x_{c\omega}) = \int dv \exp\left(-\frac{i}{2\pi c} x_{c\omega} v\right) \left| x_\omega + \frac{1}{2} v \right\rangle \left\langle x_\omega - \frac{1}{2} v \right|. \quad (12)$$

5. From formulas (9) and (10) follows very important relation between dispersions of canonically conjugate colours:

$$\left( \sigma_\varphi^2(\omega) + \sigma_{\varphi^D}^2(\omega) \right) \left( \sigma_{\varphi^c}^2(\omega_c) + \sigma_{\varphi^{cD}}^2(\omega_c) \right) \geq \frac{c^2}{2}, \quad (13)$$

where  $\varphi^D$  and  $\varphi^{cD}$  denotes dual colours.

This relation is analogue of Heisenberg's uncertainty principle [5]. Generalized information theory leaves to interpret the constant  $c$  in terms of the Shannon measure of uncertainty.

When in formula (13) one have equality this means that corresponding membership function is optimal. In presented work the form of optimal informational and membership functions are established:

Informational function

$$|x; \varphi\rangle^{opt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2}} \exp\left(-\frac{(x-x^*)^2}{4\sigma_\varphi^2} + \frac{i}{c} x_c^* x\right),$$

corresponding density is

$$\rho_{\varphi}^{opt}(x, x^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varphi}^2}} \exp\left(-\frac{(x-x^*)^2}{4\sigma_{\varphi}^2}\right),$$

and membership function have following form:

$$\mu_{\varphi}^{opt}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varphi}^2}} \int_{x^*-\alpha\sigma_{\varphi}}^{x+\alpha\sigma_{\varphi}} \exp\left(-\frac{(x-x^*)^2}{4\sigma_{\varphi}^2}\right) dx.$$

Analogously quantities for canonically conjugate colour  $\varphi^c$  are determined.

## კანონიკურად შეუღლებული არამკაფიო ქვესიმრავლეების ახალი ქრომოთეორია

თ.გაჩეჩილაძე, ჰ.მელაძე, გ.ცერცვაძე, ნ.არჩვაძე, თ.დავითაშვილი

### რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია კანონიკურად შეუღლებული არამკაფიო ქვესიმრავლეების ახალი ცნება. დადგენილია ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის მსგავსი პრინციპი, რომლის საფუძველზე შესაძლებელია არამკაფიო ქვესიმრავლეებისთვის ოპტიმალური საინფორმაციო ფუნქციისა და ერთობლივი მიკუთვნების ფუნქციის განსაზღვრა. ნაშრომში განზოგადოებული ინფორმაციის თეორიის საფუძველზე დადგენილია კანონიკურ გარდაქმნაში შემავალი მუდმივის შინაარსი.

ცდომილებათა თეორიის ძირითადი ცნებების გამოყენებით აგებულია არამკაფიო ნამდვილ რიცხვთა არითმეტიკა.

გარდა ამისა, ნაშრომში მოყვანილია ზადეს ოპერატორების, ფერის ოპერატორების და შესაბამისი გადასმადობის თანაფარდობების ცხადი გამოსახულებები.

### Reference:

1. G.G.Emch – Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, John Wiley and Sons (1972);
2. D.Dubois and H.Prud – Theorie des possibilities , Musson (1988);
3. P.A.M. Dirac – Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press (1958);
4. S.R.de Groot, L.G.Suttorp – Foundation of Electrodynamics, North-Holland (1972);
5. W.Heizenberg – Physical Principles of Quantum Theory, Claredon Press (1930).

## A METHOD FOR AGGREGATION OF TRAPEZOIDAL FUZZY ESTIMATES UNDER GROUP DECISION-MAKING

Teimuraz Tsabadze

**1. Introduction.** An uncertainty assists at practically any situations in our life [7]. One of the most effective ways to take account of this phenomenon is a using of group decision strategy. These processes by their nature represent a transformation from individual opinions of experts into the resulting one.

In the present paper we suppose that each expert expresses his subjective estimate by a positive trapezoidal fuzzy number that represents the rating to an alternative under a given criterion. As a result a finite collection of trapezoidal fuzzy numbers is obtained. Almost all the theoretical results in section 2 represent, to one extent or the other, the modification of the results obtained by Tsabadze [5,6] for finite collection of fuzzy sets including terminology, which have been adapted for trapezoidal fuzzy numbers.

On the set of positive trapezoidal fuzzy numbers in the universe  $X$  we introduce specific operations for inclusion, union and intersection of trapezoidal fuzzy numbers. Then by the offered isotone valuation we determine a metric that defines a distance between trapezoidal fuzzy numbers. Further, concepts of regulation and representative of a finite collection of trapezoidal fuzzy numbers is introduced and motivated. Basic idea is that weight of an expert's opinion is larger if his opinion is closer to the representative.

**2. Essential notions and theoretical background.** A membership function of a trapezoidal fuzzy number  $\tilde{R} = (a, b, c, d)$ ,  $0 < a \leq b \leq c \leq d$  in a universe  $X$  is determined as follows:

$$\mu_{\tilde{R}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{if } x \in [a, b], \\ 1, & \text{if } x \in [b, c], \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{if } x \in ]c, d], \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad x \in \mathfrak{R}^+. \quad (2.1)$$

$\Psi(X) = \{ \tilde{R}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i), i \in \square \}$  - set of all trapezoidal fuzzy numbers in  $X$ .

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2, \quad \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in \Psi(X).$$

$$\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \quad \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in \Psi(X).$$

$$\alpha \square \tilde{R} = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d) \quad \alpha > 0, \quad \tilde{R} \in \Psi(X).$$

**Definition 2.1.** Trapezoidal fuzzy number  $\tilde{R}_1 = (a_i)$  is included in trapezoidal fuzzy number  $\tilde{R}_2 = (b_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , i.e.  $\tilde{R}_1 \sqsubseteq \tilde{R}_2$  if and only if

$$a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2, d_1 \leq d_2. \quad (2.2)$$

The operations for union and intersection of trapezoidal fuzzy numbers play an important role in our research.

**Definition 2.2.** Union and intersection of trapezoidal fuzzy numbers  $\tilde{R}_1 = (a_i), \tilde{R}_2 = (b_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  are determined as follows:

$$\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_2 = \max\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = (\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}, \max\{a_4, b_4\}),$$

$$\tilde{R}_1 \sqcap \tilde{R}_2 = \min\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = (\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}, \min\{a_4, b_4\}).$$

**Theorem 2.1.** Consider the trapezoidal fuzzy numbers  $\tilde{R}_1 = (a_i), \tilde{R}_2 = (b_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Results of operations for union and intersection, where intersection is included in union by (2.2), represent trapezoidal fuzzy numbers with vertexes belonging to set of given trapezoids' vertexes if and only if union is  $\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_2$  and intersection is  $\tilde{R}_1 \sqcap \tilde{R}_2$ .

We also introduce the operation of crisp subtraction of nested trapezoidal fuzzy numbers as follows:

$$\tilde{R}_2 \ominus \tilde{R}_1 \Rightarrow \tilde{R}_1 \square \tilde{R}_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, d_1 - d_2), \quad \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \in \Psi(X). \quad (2.3)$$

It is obvious that the result of crisp subtraction of nested trapezoidal fuzzy numbers is also a trapezoidal fuzzy number. It is not hard to be convinced that the distributivity of union and intersection holds in  $\Psi(X)$ :

$$\tilde{R}_1 \sqcap (\tilde{R}_2 \sqcup \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \sqcap \tilde{R}_2) \sqcup (\tilde{R}_1 \sqcap \tilde{R}_3), \quad \tilde{R}_1 \sqcup (\tilde{R}_2 \sqcap \tilde{R}_3) = (\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_2) \sqcap (\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_3). \quad (2.4)$$

Now we are going to introduce a metric on  $\Psi(X)$ , i.e. define a distance between trapezoidal fuzzy numbers. We say that the function  $v: \Psi(X) \rightarrow \mathfrak{R}^+$  is *isotone valuation on  $\Psi(X)$*  if  $v(\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_2) + v(\tilde{R}_1 \sqcap \tilde{R}_2) = v(\tilde{R}_1) + v(\tilde{R}_2)$  and  $\tilde{R}_1 \sqsubseteq \tilde{R}_2 \Rightarrow v(\tilde{R}_1) \leq v(\tilde{R}_2)$ .

The isotone valuation  $v$  determines *the metric* on  $\Psi(X)$ :

$$\rho(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = v(\tilde{R}_1 \sqcup \tilde{R}_2) - v(\tilde{R}_1 \sqcap \tilde{R}_2). \quad (2.5)$$

$\Psi(X)$  with isotone valuation  $v$  and metric (2.5) is called a *metric space* of trapezoidal fuzzy numbers.

**Definition 2.3.** In the metric space the trapezoidal fuzzy number  $\tilde{R}^*$  is *the representative* of the finite collection of trapezoidal fuzzy numbers  $\{\tilde{R}_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  if

$$\sum_{j=1}^m \rho(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j) \leq \sum_{j=1}^m \rho(\tilde{S}, \tilde{R}_j), \quad \forall \tilde{S} \in \Psi(X). \quad (2.6)$$

For an accommodation of posterior theoretical constructions we need to introduce a concept of *regulation* of finite collection of trapezoidal fuzzy numbers

**Definition 2.4.** The finite collection of trapezoidal fuzzy numbers  $\{\tilde{R}'_j\}$  is a *regulation* of the finite collection of trapezoidal fuzzy numbers  $\{\tilde{R}_j\}$  if the finite sets  $\{a_j\}$  and  $\{a'_j\}$ ,  $\{b_j\}$  and  $\{b'_j\}$ ,  $\{c_j\}$  and  $\{c'_j\}$ ,  $\{d_j\}$  and  $\{d'_j\}$  are pairwise equal and  $a_1' \leq a_2' \leq \dots \leq a_m'$ ,  $b_1' \leq b_2' \leq \dots \leq b_m'$ ,  $c_1' \leq c_2' \leq \dots \leq c_m'$ ,  $d_1' \leq d_2' \leq \dots \leq d_m'$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$

Due to this definition and (2.5) it is obvious that the equality

$$\sum_{j=1}^m \rho(\tilde{S}, \tilde{R}_j) = \sum_{j=1}^m \rho(\tilde{S}, \tilde{R}'_j) \quad (2.7)$$

holds in the metric space for any  $\tilde{S} \in \Psi(X)$  and the finite collection of trapezoidal fuzzy numbers  $\{\tilde{R}'_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$ . From (2.7) it follows that *representatives of finite collection of trapezoidal fuzzy numbers and its regulation coincide*.

Definition 2.3 and (2.2) justify the validity of the following proposition.

**Proposition 2.3.** *The regulation represents a finite collection of nested trapezoidal fuzzy numbers:*

$$\tilde{R}_1 \sqsubseteq \tilde{R}_2 \sqsubseteq \dots \sqsubseteq \tilde{R}_m, \quad m = 2, 3, \dots$$

It is easy to see that

$$\tilde{R}_1 \sqsubseteq \tilde{R}_2 \Rightarrow \rho(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = v(\tilde{R}_2) - v(\tilde{R}_1). \quad (2.8)$$

**Theorem 2.2.** *In the metric space of trapezoidal fuzzy numbers the representative  $\tilde{R}^*$  of the finite collection of trapezoidal fuzzy numbers,  $\{\tilde{R}'_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  is determined as follows:*

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{m/2} \sqsubseteq \tilde{R}^* \sqsubseteq \tilde{R}_{m/2+1} & \text{ if } m \text{ is even;} \\ \tilde{R}^* = \tilde{R}_{(m+1)/2} & \text{ if } m \text{ is odd.} \end{aligned}$$

Now we introduce the unique specific aggregation operator (here and further on symbol  $\square$  denotes an integer part of a number):

$$\tilde{R}^* = \begin{cases} 0.5 \square \left( \tilde{R}'_{\lfloor m/2 \rfloor} \oplus \tilde{R}'_{\lfloor (m+3)/2 \rfloor} \right) & \text{if } \sum_{j=1}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} \rho(\tilde{R}'_j, \tilde{R}'_{\lfloor m/2 \rfloor}) = \sum_{j=\lfloor m/2 \rfloor+1}^m \rho(\tilde{R}'_j, \tilde{R}'_{\lfloor (m+3)/2 \rfloor}), \\ \tilde{R}'_{\lfloor m/2 \rfloor} \oplus \left( \frac{\sum_{j=1}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} \rho(\tilde{R}'_j, \tilde{R}'_{\lfloor m/2 \rfloor})}{\sum_{j=1}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} \rho(\tilde{R}'_j, \tilde{R}'_{\lfloor m/2 \rfloor}) + \sum_{j=\lfloor m/2 \rfloor+1}^m \rho(\tilde{R}'_j, \tilde{R}'_{\lfloor (m+3)/2 \rfloor})} \square \left( \tilde{R}'_{\lfloor (m+3)/2 \rfloor} \sqcup \tilde{R}'_{\lfloor m/2 \rfloor} \right) \right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.9)$$

**3. The method for fuzzy aggregation and its algorithm.** Let  $m$  experts estimate of the rating to an alternatives under different given criterions and  $\tilde{R}_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  be the opinion of expert number  $j$  under a given criterion. As a result we obtain a finite collection of  $m$  trapezoidal fuzzy numbers. First of all we determine the regulation of this finite collection and its representative. When constructing any aggregation method under group decision-making, the main task is to provide well-founded degrees of importance for each estimate.

The main idea of the proposed method is that aggregation weights (degrees of importance) of each expert represent functions, which are inversely proportional to distances between their estimates and the representative.

**Definition 3.1.** Aggregation weights of experts represent functions inversely proportional to distances between their estimates and the representative; at the same time the result of aggregation for  $m$  fuzzy trapezoidal estimates of the rating to an alternatives under different given criterions determined by

$$\tilde{R} = \sum_{j=1}^m (\omega_j \square \tilde{R}_j) \quad (3.1)$$

is always continuous.

Here  $\square$  is the fuzzy multiplication operator [3] and the aggregation weight of expert number  $j$  is

$$\omega_j = \left( \rho(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j) \right)^{-1} / \sum_{j=1}^m \left( \rho(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j) \right)^{-1}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

It is obvious that  $\sum_{j=1}^m \omega_j = 1$ . This definition looks plausible, but in case when at least one estimate coincides with the representative, a function discontinuity takes place.

**Proposition 3.1.** Consider the finite collection of  $m$  trapezoidal fuzzy numbers in the metric space. If there exists at least one  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  such that  $\rho(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j) = 0$  then  $\tilde{R} = \tilde{R}^*$ .

**Corollary 3.1.** If for all  $t, j \in \{1, 2, \dots, m\}$   $\tilde{R}_t = \tilde{R}_j \Rightarrow \tilde{R} = \tilde{R}^*$

**Corollary 3.2.** If the all estimates are identical then we can conclude that  $\omega_j = 1/m$ .

### Algorithm

Step 0: Initialization: the finite collection of trapezoidal fuzzy numbers  $\{\tilde{R}_j\}$ , its regulation  $\{\tilde{R}_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$ . Denote the aggregation weight of expert number  $j$  as  $\omega_j$  and the final result as  $\tilde{R}$ .

Step 1: Compute the representative  $\tilde{R}^*$  of  $\{\tilde{R}_j\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  by (2.9).

Step 2: Do Step 3 for  $j = \overline{1, m}$ .

Step 3: Compute  $\Delta_j = \rho(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j)$ :

- If at least one  $\Delta_j = 0$  then  $\tilde{R} = \tilde{R}^*$ ;
- If  $\Delta_j > 0$  for all  $j$  then compute  $\omega_j$  by (3.2) and obtain the final result is by (3.1).

### 4. Properties of the proposed method:

**4.1.** (Agreement preservation [1]). If  $\tilde{R}_t = \tilde{R}_j$  for all  $t, j$  then  $\tilde{R} = \tilde{R}_j$ . In other words, if all estimates of  $m$  experts are identical then the combined result should be the common estimate.

**4.2.** (Order independence [1]). If  $\{(1), (2), \dots, (m)\}$  is a permutation of  $\{1, 2, \dots, m\}$  then  $\tilde{R} = f(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \dots, \tilde{R}_m) = f(\tilde{R}_{(1)}, \tilde{R}_{(2)}, \dots, \tilde{R}_{(m)})$ . The result is also a consistency requirement.

**4.3.** Let the uncertainty measure  $H(\tilde{R}_j)$  of individual estimate  $\tilde{R}_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $m = 2, 3, \dots$  be defined as the area under its membership function [1]:  $H(\tilde{R}_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\tilde{R}_j}(x) dx$ . The uncertainty measure  $H$  fulfills the following equation:  $H(\tilde{R}) = \sum_{j=1}^m \omega_j \times H(\tilde{R}_j)$ .

**4.4.** The common intersection of supports of all experts' estimates is included in the aggregation result. It means that  $\bigcap_{j=1}^m \tilde{R}_j \subseteq \tilde{R}$  [5].

**Property 4.5** [4]. If an expert's estimate is far from the consensus then his estimate is less important.

**Property 4.6** [4]. If  $\bigcap_{j=1}^m \mu(\tilde{R}_j) = 0$ , a consensus  $\tilde{R}$  also can be derived.

**5. Illustrations.** For the motivated comparing of the proposed method with others we will use the metric based on the following isotone valuation for trapezoidal fuzzy number  $\tilde{R} = (a_i)$ :  $v(\tilde{R}) = \sum_{i=1}^4 a_i$ . Thus, by (2.5) we introduce the metric as follows:  $\rho(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2) = \sum_{i=1}^4 |a_i - b_i|$ .

We follow with the examples presented by H.-M. Hsu, C.-T. Chen [2] and utilized by Lee [4]:

$$\tilde{R}_1 = (1, 2, 3, 4), \tilde{R}_2 = (1.5, 2.5, 3.5, 5), \tilde{R}_3 = (2, 2.5, 4, 6).$$

№	Method	$\tilde{R}$
1	Hsu	(1.519, 2.356, 3.519, 5.038)
2	Lee	(1.5005964, 2.3370414, 3.5005965, 5.0011930)
3	Tsabadze	(1.516, 2.4365, 3.516, 5.032)

It easy to see that the difference between the results obtained by our method and Hsu and Lee's results is very small (here we do not discuss who's result is more adequate), whereas our algorithm is a lot simpler.

## A METHOD FOR AGGREGATION OF TRAPEZOIDAL FUZZY ESTIMATES UNDER GROUP DECISION-MAKING

T. Tsabadze

Resume

This paper introduces the simple method for group decision-making, where experts' opinions are expressed by trapezoidal fuzzy numbers. The method determines aggregations weights of each expert as a function of closeness of their estimates to the representative. The method is correct under extensive class of distances between trapezoidal fuzzy numbers. It is demonstrated that the algorithm of this method is a lot simpler then the algorithms of analogous methods, it can be realized with usual calculator. It is shown that the proposed method preserves important properties of other aggregation methods. The introduced method can be also used under situations, where experts' estimates are given as triangular ( $b = c$ ) or interval ( $a = b, c = d$ ) fuzzy numbers.

## არამკაფიო ტრაპეციული შეფასების აგრეგაციის მეთოდი ჯგუფური გადაწყვეტილებებისას

თ.ცაბაძე

რეზიუმე

წარმოდგენილია ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა აგრეგაციის მეთოდი, სადაც ექსპერტთა შეფასებები მოცემულია ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებით. შემოთავაზებულია მიდგომა, სადაც ექსპერტის "წონა" წარმოადგენს მისი შეფასების და სხვა შეფასებების ერთობლიობის წარმომადგენლის შორის მანძილის უკუპროპორციულ ფუნქციას. მეთოდი კორექტულია ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებს შორის მანძილების გაფართოებული კლასისათვის. ნაჩვენებია, რომ შემოთავაზებული ალგორითმი გაცილებით მარტივია, ვიდრე ანალოგიური მეთოდების ალგორითმები, მისი რეალიზაციისათვის საკმარისია ჩვეულებრივი კალკულატორი. ამავედროულად მეთოდი ინარჩუნებს სხვა მეთოდების მნიშვნელოვან თვისებებს და გამოსადეგი იქნება მაშინაც, როცა ექსპერტების შეფასებები გამოსახულია სამკუთხა ( $b = c$ ) ან ინტერვალური ( $a = b, c = d$ ) არამკაფიო რიცხვების სახით.

### Keywords

Group decision-making, Trapezoidal fuzzy number, Metric space of trapezoidal fuzzy numbers, Regulation, Representative, Fuzzy aggregation operator.

### References

- [1] A. Bardossy, L. Duckstein and I. Bogardi, Combination of fuzzy numbers representing expert opinions, *Fuzzy Sets and Systems* 57 (1993) 173-181.
- [2] H.-M. Hsu, C.-T. Chen, Aggregation of fuzzy opinions under group decision making, *Fuzzy Sets and Systems* 79 (1996) 279-285.
- [3] A. Kauffman and M.M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1985).
- [4] H.-S. Lee, Optimal consensus of fuzzy opinions under group decision making environment, *Fuzzy Sets and Systems* 132 (2002) 303 – 315.
- [5] T. Tsabadze, The coordination index of finite collection of fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 107 (1999) 177-185.
- [6] T. Tsabadze, A method for fuzzy aggregation based on grouped expert evaluations, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 1346-1361.
- [7] L. Zadeh, Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) – an outline, *Information Sciences*, 172 (2005) 1-40

## INFOLOGICAL PRESENTATION OF ENVIRONMENT MONITORING INTELLECTUAL SYSTEM

M. Khachidze

In our understanding the environmental monitoring intellectual system belongs to knowledge representation systems. Out of three components of intellectual systems of this type – human component, technology and organization – we are considering the technological component which itself consists of two main modules: data collector module and assessment module.

Collecting environmental monitoring data is difficult and requires comprehensive approach as there is a great variety of potential sources of data and different levels of competence. Thus the forms of data representation are not uniform. In such situations the data collector module acquires the function of syntactic analyzer.

For dynamic functioning of the environmental monitoring information model it is important that assessment module can provide an answer to any legitimate customer even if insufficiently precise data is provided.

Very often while describing an ecosystem we find out that the information is incomplete or not sufficiently precise; i.e. the values of some characteristic attributes of a given object may be completely unknown or known incompletely, when, for example, only a subset of the domain of an attribute is known, or indefinite. Besides, sometimes the chosen attribute is unusable for some ecosystem under consideration. A question may arise whether the given values of the attributes do not exist in reality or they are simply unknown. In these cases great importance is attached to the representation of information and its initial standardization with a view of putting it into a database and further processing.

In order to consider the real structure of data collector module it is important to determine the sources of data. Results of assessments of physical and chemical composition of air, water, soil received from different measuring devices can be considered as sources of data, as well as information collected by visual inspection. If we determine and classify these sources we can then differentiate the data to be later incorporated into the intellectual system data base by types. Of great importance during dynamic monitoring can be changes visually determined by an experienced ranger, changes that can not always be registered by a measuring device. So special attention should be given to semantic description of natural environment. At the initial stage we can present the following diagram of data classification [1].

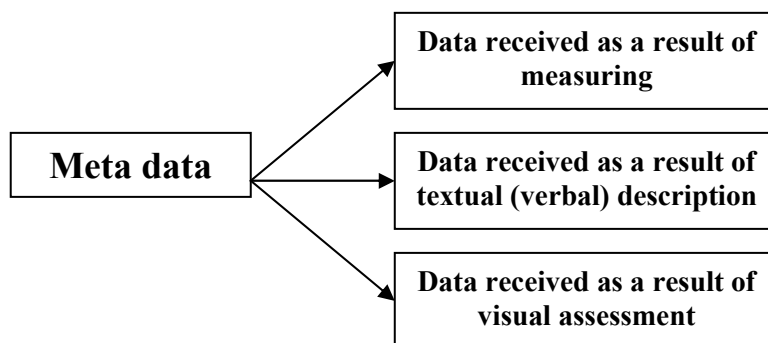


Figure.1 Data Classification scheme.

Data received as a result of measuring occupies a big part in intellectual systems of describing environment. There are specific descriptive parameters for air, water and soil and they are regularly collected and systematized according to the specificity of each data base (e.g. in the data base of European Environment Agency (EEA)).

Textual-descriptive information is not very precise but nevertheless such method is very important in the process of dynamic monitoring. In such cases the Fuzzy Sets Theory and Fuzzy Logic is used to introduce data into the data base [2].

Images received as a result of digital fixation at some local site can be considered as information received by visual fixation. To systematize such data methods of image processing are used.

Data collection module is processed independently of intellectual system and it can be used as fully valid program package. The customer can at the initial stage determine what type of information he introduces into the data base for a concrete geographical location, or change information type while introduction. So it can be said that for some definite time and some definite place there can be values of different parameters presented in analytical, textual or descriptive and visual form. These values can be presented at the same time or differentially. At this stage data base is filled with initial “raw” data which is available in the same form it was introduced into the data base.

Semantic data converter converts each and every value into single format preserving relevant value syntax. While introducing analytical values of data everything is clear: parameter dimensions are determined for each



parameter, as well as high and low limits of possible value. The data is introduced in digital form. In verbal description first of all we single out those parameters that can be evaluated by careful observation without any devices. Each of these parameters is logically described (linguistic variable is described) [2]. Actually each verbal description implies some unity of values of analytical parameters, the so-called “semantic converter” processes these data and transfers them to the data base that works out knowledge base.

As to visual information, generalized use of such data to assess status of environment is almost impossible. For each “visual” parameter digital images must be collected in each particular locality.

To elaborate this model analytical as well as logical descriptive data is used. Its main component is knowledge base which consists of the so-called knowledge concepts. Such knowledge concepts are elaborated by data collector module by way of processing collected observational data.

The knowledge concept is the unity of “notions” calculated by the method of artificial conceptual intellect [3]. At the initial stage of elaborating these concepts status of environment is assessed by expert questioning or in some cases the assessment is based on calculating the pollution index of environment. Data base of concepts reflecting specific situation (based on the quality of pollution of environment) is set up separately for water, atmosphere, soil. Depending on the type of data prevalent in data collector module we can have analytical concepts [3], binary concepts [4] and fuzzy concepts. Besides this when these three types of concepts are joined together we get generalized fuzzy concepts.

It should be underlined that information on current status of environment is generally not sufficient to make adequate decision. As a rule apart from information on environmental violations it is also necessary to have information on causes of such situation, and also information on the future status of environment. Such information can be gathered as a result of forecasting the status of environment. Information on current status after environmental violation allows us to pinpoint the source of pollution against which management resources must be used. Forecasting allows us to calculate new conditions which logically develop from current situations or may be results of possible decisions on impacting environment. Ability to forecast consequences of decisions made gives us the possibility to practically implement only the decisions that will not cause undesirable consequences.

Information on current status of environment, information on the causes of such conditions, as well as information on forecasted status add up and form information on the situation based on which the decision should be made.

Figure 2 presents a model of intellectual system. The system functions as follows:

- ◆ Subsystem 1 gets information based on monitoring data (irrespective of the type). These data are used to study and evaluate the current state which is implemented in subsystem 2;
- ◆ These same data are used to carry out logical-causative analysis of the condition observed (subsystem 3) based on expert knowledge formed as concepts (subsystem 4), and also to forecast and evaluate forecasted state (subsystem 5). Subsystem 6 makes the final decision on management and control.

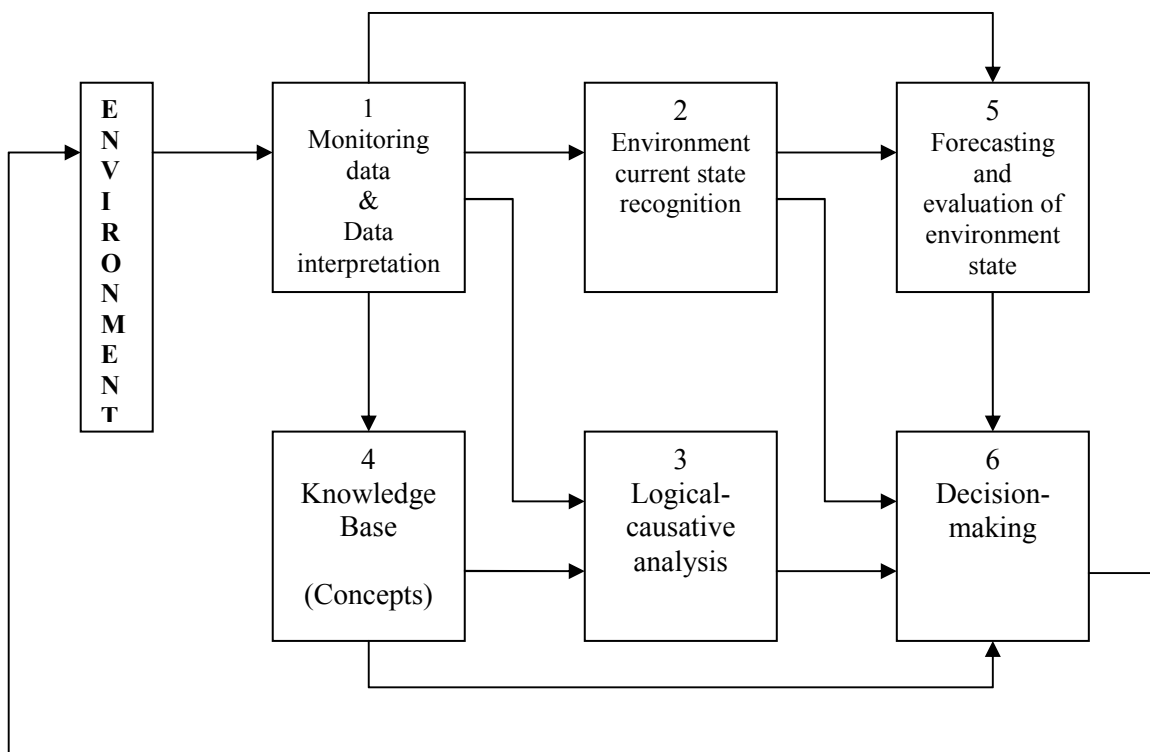


Figure 2. Environmental monitoring intellectual system model.

Figure 2 presents a model of intellectual system. The system functions as follows:

- ◆ Subsystem 1 gets information based on monitoring data (irrespective of the type). These data are used to study and evaluate the current state which is implemented in subsystem 2;
- ◆ These same data are used to carry out logical-causative analysis of the condition observed (subsystem 3) based on expert knowledge formed as concepts (subsystem 4), and also to forecast and evaluate forecasted state (subsystem 5). Subsystem 6 makes the final decision on management and control.

Knowledge base (subsystem 4) is used to carry out logical-causative analysis. The base is represented as semantic net, peaks being concepts. Arcs denoting logical-causative relations connect characteristics with possible pollution sources.

When forecasting it is important to determine the scale of the system in which forecasting is done. If the ecological system as a whole is taken, then based on assessing one part of the system the state of other components of the whole system must be forecasted. Based on the analysis of the states of these components the current state of ecological system is evaluated. But if we confine ourselves with one component of the ecological system considering it as isolated system, then we forecast the future state of this component only.

The Great advantage of general theoretical method is that in case of necessity, environmental monitoring several systems can be united in form of sub-systems, in spite of that the parameters of these systems are absolutely identical, how and with what tools are they measured.

## INFOLOGICAL PRESENTATION OF ENVIROMEN MONITORING INTELLECTUAL SYSTEM

M. Khachidze

### ABSTRACT

The model of environmental monitoring intellectual system is proposed. The basic part of intellectual system is presented in the form of two basic modules: data collector module and environmental assessment module. The data collector module helps solve data presentation problem by the method presented below. The method is based on the fuzzy sets theory which allows reducing data to the homogeneous form of representation in databases of intellectual system. Environmental assessment module is based on theoretical model using artificial conceptual intellect method, where environment possible large amount of state characteristic parameters will be united and we have possibility of treatment.

### REFERENCES

1. Khachidze, M. (1998) Some Ways of Representing Incomplete and Indefinite Information in the Ecointellectual system Databases. *Ecoinformatics Problems*, Moscow, pp. 152-154.
2. Zadeh, L.A (1977) Fuzzy sets and their applications to classification and clustering. In J. Van Ryzin J. (Ed.), *Classification and Clustering* (pp. 251-299). New York: Academic Press.
3. Chavchanidze, V.V. (1973) Towards the General Theory of Conceptual Systems., V3, N1 London, Kybernetes.
4. Khachidze, M., (1997) Classification of Complex Systems Described Over Fuzzy Sets by Use of the Method of Analytical Heuristics. *Bulletin of Georgian Academy of Sciences*, vol. 156, no. 3, pp.381-384.
5. Stair, RM & Reynolds, GW (2006) *Principles of Inetelectual systems: A Managerial Approach* 7th ed, Thomson, Massachusetts
6. The European Environment Agency (EEA). <http://www.eea.europa.eu>

**ოპტიმალური სტრატეგია მარაგთა მართვის ერთი ალბათური მოდელისათვის.**

ფ. დვალაშვილი

ნაშრომში მარაგთა მართვის ერთი ალბათური მოდელისათვის აგებულია ოპტიმალური სტრატეგია, მოყვანილია კონკრეტული რიცხვითი მახასიათებლების გამოსათვლელი ფორმულები. ანალიტიკური საკითხები სხვადასხვა მოდელისათვის მოყვანილია ნაშრომებში [1], [2], [3].

ვთქვათ,  $t-1$  დღის ბოლოს საწყობშია  $x_{t-1} \geq 0$  მარაგი. კეთდება შეკვეთა  $h_t$  რაოდენობაზე მეორე დღისათვის.  $S_t$  იყოს  $t$  დღეს პროდუქციაზე მოთხოვნის მოცულობა.

თუ  $S_t \leq x_{t-1} + h_t$  მოთხოვნა მთლიანად სრულდება და დღის ბოლოს რჩება  $x_t = x_{t-1} + h_t - S_t$  რაოდენობა. შენახვის ხარჯი იქნება

$$cx_t = c(x_{t-1} + h_t - S_t), \text{ სადა } c \text{ არის ერთეულის შენახვის ხარჯი.}$$

თუ  $S_t > x_{t-1} + h_t$ , მაშინ იქმნება დეფიციტი. ცხადია, რომ სასაწყობო ხარჯი ამ შემთხვევაში არ იქნება, მაგრამ იქნება დანაკარგი დეფიციტის გამო (მაგ. ჯარიმა). ეს დანაკარგი ტოლია

$K(S_t - x_{t-1} - h_t) = -K(x_{t-1} + h_t - S_t)$ , სადაც  $K$  არის პროდუქციის ერთეულის დეფიციტის დანაკარგი.

მთლიანი დანახარჯი შეგვიძლია შემდგენიარად ჩავწეროთ:

$$\varphi(x_{t-1}, h_t, S_t) = \max\{c(x_{t-1} + h_t - S_t), -K(x_{t-1} + h_t - S_t)\}$$

ცხადია, რომ  $x_t = \max\{0, x_{t-1} + h_t - S_t\}$ ,

$$\varphi(x_t) = \begin{cases} cx_t, & \text{თუ } x_t > 0, \\ -Kx_t, & \text{თუ } x_t < 0, \\ 0, & \text{თუ } x_t = 0. \end{cases}$$

პროდუქციაზე მოთხოვნა შემთხვევითი სიდიდეა. მისი სიმკვრივის ფუნქცია იყოს  $f(x)$ , განაწილების ფუნქცია  $F(x)$ . დავსვათ ამოცანა: ვიპოვოთ მარაგის შევსების ისეთი  $h_t$  მოცულობა, რომ საშუალო დანაკარგი (მათემატიკური ღირებულება) იყოს მინიმალური:

$$\Phi(x_{t-1} + h_t) = M\varphi(x_{t-1}, h_t, S_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_{t-1}, h_t, S_t) dF(S_t) \rightarrow \min$$

აღვნიშნოთ  $y = x_{t-1} + h_t$ ,  $S_t = S$ , მაშინ გვექნება:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{c(y - S), -K(y - S)\} dF(S) \rightarrow \min. \quad (1)$$

$\Phi(y)$  შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდგენიარად:

$$\Phi(y) = c \int_{-\infty}^{+\infty} (y - S) dF(S) + K \int_{-\infty}^{+\infty} (S - y) dF(S).$$

გამოვთვალოთ  $\Phi(y)$ -ის წარმოებული. თუ გავითვალისწინებთ, რომ  $F' = f$  მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \Phi'(y) &= (cyF(y))' - cyf(y) - Kyf(y) - (Ky - KyF(y))' = \\ &= cF(y) - K + KF(y) = (c + K)F(y) - K. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Phi''(y) = (c + K)F'(y) = (c + K)f(y) \geq 0.$$

მინიმუმის წერტილი განისაზღვრება  $\Phi'(y) = 0$  განტოლებიდან.

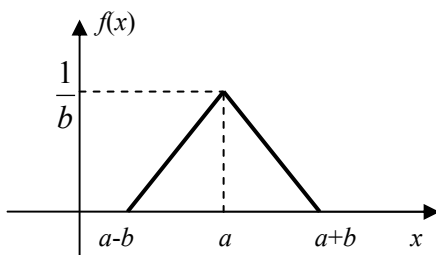
ი.ე.

$$F(y) = \frac{K}{c + K}. \quad (3)$$

ვთქვათ ამ განტოლების ამონახსნია  $y = y^*$ . მაშინ მარაგთა შევსების ოპტიმალური  $h_t^*$  მოცულობა იქნება:

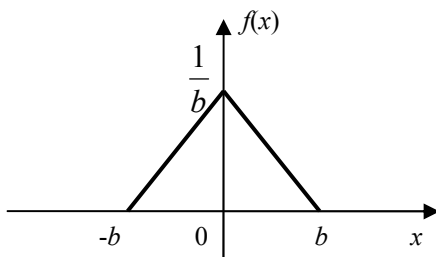
$$h_t^* = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x_{t-1} \geq y^*, \\ y^* - x_{t-1}, & \text{თუ } x_{t-1} < y^*. \end{cases}$$

განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა. ვთქვათ,  $S$  მოთხოვნის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეს აქვს სიმეტრიული "სამკუთხა" განაწილება. ასეთი განაწილების სიმკვრივის  $f(x)$  ფუნქციის გრაფიკია (ნახ. 1):



(ნახ. 1)

ცხადია, რომ ეს გრაფიკი მიიღება (ნახ. 2)-ზე მოცემული ფუნქციის გრაფიკის მარჯვნივ  $a$  ერთეულით გადატანით



(ნახ. 2)

მარტივად შეგვიძლია ჩავწეროთ ეს უკანასკნელი ანალიზური სახით:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq -b, \\ \frac{x+b}{b^2}, & \text{თუ } -b < x \leq 0, \\ \frac{-x+b}{b^2}, & \text{თუ } 0 < x \leq b, \\ 0, & \text{თუ } x \geq b. \end{cases}$$

განაწილების ფუნქცია იქნება:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \leq -b, \\ \frac{(x+b)^2}{2b^2}, & \text{თუ } -b < x \leq 0, \\ 1 - \frac{(x-b)^2}{2b^2}, & \text{თუ } 0 < x \leq b, \\ 1, & \text{თუ } x \geq b. \end{cases} \quad (4)$$

$S$  შემთხვევითი სიდიდის რიცხვითი მახასიათებლები იქნება: მათემატიკური ლოდინი  $MS = 0$ , დისპერსია  $DS = \frac{b^2}{6}$ , საშუალო კვადრატული გადახრაა  $\sigma = \frac{b}{\sqrt{6}}$ .

უშუალოდ (1)-დან მივიღებთ:

თუ  $x \leq -b$ , მაშინ

$$\Phi(x) = -K \int_{-\infty}^{+\infty} (x-S)f(S)dS = -Kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dS + K \int_{-\infty}^{+\infty} Sf(S)dS = -Kx + KMS = -Kx. \quad (5)$$

თუ  $-b \leq x \leq 0$ , მაშინ (2) და (4) გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\Phi(x) = (c + K) \frac{(x + b)^3}{6b^2} - Kx + c_1. \quad (6)$$

(5) და (6) ერთმანეთის ტოლია როცა  $x = -b$ . ამიტომ

$$Kb = Kb + c_1, \quad \text{ე.ი.} \quad c_1 = 0.$$

ანალოგიურად, თუ  $0 \leq x \leq b$ . მივიღებთ:

$$\Phi(x) = -(c + K) \frac{(x - b)^3}{6b^2} + cx. \quad (7)$$

თუ

$$x \geq b, \quad \Phi(x) = cx. \quad (8)$$

მიღებული (5)-(8) ფორმულები გვაძლევს საშუალო დანაკარგებს სხვადასხვა ინტერვალში, ხოლო მარაგების ოპტიმალური მნიშვნელობა  $y^*$  წარმოადგენს (3) განტოლების ამონახსნს, სადაც  $F(x)$  მოიცემა (4) ფორმულით. თუ მოთხოვნის სიმკვრივის ფუნქციას აქვს (ნახ. 1) მოყვანილი სახე, მაშინ ანალოგიურად, უშუალო გამოთვლებით მივიღებთ მარაგების ოპტიმალურ მნიშვნელობას  $y^*$  და საშუალო მინიმალური დანაკარგის  $\Phi^* = \Phi(y^*)$  გამოსათვლელ ფორმულებს:

$$y^* = \begin{cases} a - b + \sqrt{\frac{2K}{c+K}} \cdot b, & \text{თუ } c > K, \\ a, & \text{თუ } c = K, \\ a + b - \sqrt{\frac{2c}{c+K}} \cdot b, & \text{თუ } c < K. \end{cases}$$

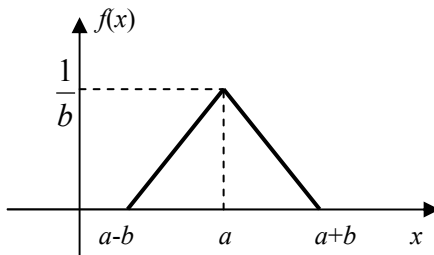
$$\Phi^* = \begin{cases} bK \left( 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2K}{c+K}} \right), & \text{თუ } c > K, \\ \frac{bK}{3} = \frac{bc}{3}, & \text{თუ } c = K, \\ bc \left( 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2c}{c+K}} \right), & \text{თუ } c < K. \end{cases}$$

ამასთან მარაგთა შევსების ოპტიმალური სტრატეგია მოიცემა ფორმულით:

$$h_t^* = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x_{t-1} \geq y^*, \\ y^* - x_{t-1}, & \text{თუ } x_{t-1} < y^*. \end{cases}$$

### რეზიუმე

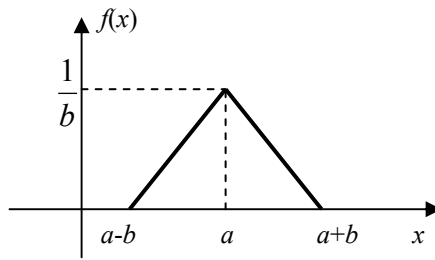
მარაგთა მართვის ალბათურ მოდელებში, კონკრეტული რიცხვითი მახასიათებლები განისაზღვრებიან მოთხოვნის, როგორც შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივის ფუნქციის საშუალებით. ნაშრომში განხილულია შემთხვევა, როდესაც განაწილების სიმკვრივის  $f(x)$  ფუნქციას აქვს სიმეტრიული "სამკუთხა" განაწილება:



მოყვანილი შემთხვევისათვის აგებულია მარაგთა მართვის ოპტიმალური სტრატეგია, კერძოდ გამოთვლილია ოპტიმალური მარაგის რიცხვითი მნიშვნელობები და საშუალო მინიმალური დანაკარგი.

## Summary

In Inventory control models the concrete number characteristics defined using with demand function, such as probability density function of random variable. In an article considered case, where density function  $f(x)$  has symmetrical "triangle" distribution:



For the given case it is built optimal strategy of inventory reserve, particularly calculated optimal inventory values and mean minimal expenses.

შ ო ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. Х. Таха. Введение в исследование операций, Т 1, Москва "мир" 1985.
2. Дж. Букан, Э. Кенигсберг. Научное управление запасами, Изд. "Наука", главная редакция физико-математической литературы, Москва 1967.
3. Дж. Хедли, Т. Уайтин. Анализ систем управления запасами. Изд. "Наука". Москва 1969.

## A COMPARISON OF THE CONNECTIVITY ANALYSIS AND THE CLUSTERING METHOD BASED UPON FUZZY EQUIVALENCE RELATIONS FOR THE PROBLEMS OF MEDICAL DIAGNOSES

*Tatiana Kiseliova*

Abstract

Formalisation of a physician's intuition can be split into different tasks. One is the ability of an experienced doctor to establish a diagnosis using the small amount of observations on a patient. The doctor pays attention on the symptoms that represent a disease the best way. To get these representative symptoms is not an easy task, because very often a physician uses his knowledge intuitively. To model such task approaches processed vague information as connectivity analysis [1,2] and clustering methods based upon fuzzy equivalence relations [3] are suitable.

In the paper these two methods are compared. Similar from the first glance (the connectivity analysis calculates the level of connections of the representative symptoms whereas the clustering method uses  $\alpha$ -cuts to build them) the methods reveal best and worst characteristics, that allow to use them more efficiently.

### ბმულობის ანალიზისა და ფაზი-ექვივალენტობის მიმართებებზე დაფუძნებული კლასტერული მეთოდის შედარება სამედიცინო დიაგნოსტიკის ამოცანებისთვის ტატიანა კისელიოვა

ექიმის ინტუიციის ფორმალიზაცია შესაძლებელია გაიყოს სხვადასხვა ამოცანებით. ერთი მათგანია გამოცდილი ექიმის უნარი დასვას დიაგნოზი პაციენტის ავადმყოფობაზე ცოტა რაოდენობის მონაცემთა გამოყენებით. ექიმი აქცევს ყურადღებას სიმპტომებს, რომლებიც წარმოადგენენ ავადმყოფობის დადგენის გზას. წარმოდგენილი სიმპტომების მიღება არ არის ადვილი ამოცანა, ვინაიდან ექიმები ძალიან ხშირად იყენებენ თავისი გამოცდილების ინტუიციას. ასეთი ამოცანის მოდელირებისათვის, გამოიყენება არამკაფიო ინფორმაციის, როგორც კავშირის ანალიზით დამუშავების მიდგომა [1,2] და კლასტერული მეთოდი, დაფუძნებული ფაზი-ექვივალენტობის მიმართებებზე [3], არის მისადაგებული.

ამ ნაშრომში ხორციელდება ამ ორი მეთოდის შედარება. ერთი შეხედვით (კავშირის ანალიზი გამოითვლის წარმოდგენილი სიმპტომების კავშირების დონეებს, როდესაც კლასტერული მეთოდი იყენებს  $\alpha$ -კვეთას) ეს მეთოდები ავლენენ ძლიერ და სუსტ მახასიათებლებს, იმისათვის, რომ ისინი გამოყენებულ იქნენ ეფექტურად.

#### ლიტერატურა.

- [1] J. F. Baldwin, B. W. Pilsworth, and D. Norris. Medical diagnoses from patient records. *Fuzzy Sets and Systems*, 23:73–87, 1987.
- [2] T. Kiseliova and S. Krajčiči. Generation of representative symptoms based on fuzzy concept lattices. In B. Reusch, editor, *International Conference on Computational Intelligence*, 8. *Fuzzy Days in Dortmund*, pages 349–356, Dortmund, Germany, September 30 - October 2, 2004. Springer-Verlag Heidelberg.
- [3] G. J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, 1995.

## ელექტრონული არჩევნების კრიპტოგრაფიული პროტოკოლების შესახებ მ.რაზმაძე, ზ.ქოჩლაძე, ა.ჯიქია

ელექტრონული არჩევნები (ელექტრონული ხმის მიცემა), თავის თავში მოიცავს რამდენიმე განსხვავებულ ფორმას დაწყებული ხმათა ელექტრონული ფორმით დათვლიდან (რომელიც ფართოდ გამოიყენება), დამთავრებული არჩევნების ყველა პროცესის კომპიუტერიზაციით [1,2,3,4]. ელექტრონული არჩევნების ტექნოლოგიებს შეუძლიათ დააჩქარონ არჩევნების ჩატარება, უზრუნველყონ ამომრჩეველთათვის არჩევნების პროცედურების გამარტივება, არჩევნების ფარული და გაუყალბებლობა და ხელი შეუშალონ ხმათა მოსყიდვას.

ელექტრონული არჩევნების იდეალური პროტოკოლი უნდა აკმაყოფილებდეს მინიმუმ შემდეგ კრიტერიუმებს [5,6]:

1. ხმის მიცემა უნდა შეძლოს მხოლოდ საამისოდ უფლებამოსილმა პირმა;
2. თითოეულ ამომრჩეველს შეუძლია ხმა მისცეს მხოლოდ ერთხელ;
3. ვერაინ უნდა შეძლოს იმის გაგება, თუ ვის მისცა ხმა კონკრეტულმა ამომრჩეველმა;
4. ვერაინ უნდა შეძლოს სხვის მაგივრად ხმის მიცემა;
5. ვერაინ უნდა შეძლოს ფარულად შეცვალოს სხვის მიერ გაკეთებული არჩევანი;
6. თითოეულ ამომრჩეველს უნდა შეეძლოს შეამოწმოს ჩაითვალა თუ არა მისი ხმა საბოლოო შედეგებში.

ამ კრიტერიუმების დაკმაყოფილება საკმაოდ რთული ამოცანაა. პირველი კრიტერიუმი, პრაქტიკულად წარმოადგენს საარჩევნო სიების შექმნას და მათ დაზუსტებას. არსებულ პროტოკოლებს ეს კრიტერიუმი შეუძლიათ დააკმაყოფილონ მხოლოდ ნაწილობრივ და ამ მხრივ რადიკალური გაუმჯობესება ალბათ არც მომავალშია მოსალოდნელი. საქმე იმაშია, რომ ამომრჩეველთა სია თითქმის ყველა ქვეყანაში დგება იუსტიციის სამინისტროს მიერ და თუ ამ დონეზე ხდება სიების გაყალბება (და ამის მაგალითები არსებობს მსოფლიოში), ეს შესაძლებელია აღმოჩენილი და შესწორებული იქნეს მხოლოდ საარჩევნო კომისიის და არჩევნებში მონაწილე სუბიექტების მიერ. ნებისმიერ კომპიუტერულ სისტემას შეუძლია აღმოაჩინოს მხოლოდ ის შემთხვევა, როდესაც ხმას აძლევს პირი, რომელსაც ამის უფლება არა აქვს.

მეორე კრიტერიუმი შედარებით ადვილი დასაკმაყოფილებელია ნებისმიერი პროტოკოლის საშუალებით, მაგრამ რაც შეეხება დანარჩენ კრიტერიუმებს, მათი უზრუნველყოფა შესაძლებელია მხოლოდ მაღალი საიმედოობის კრიპტოგრაფიული პროტოკოლის საშუალებით. ლიტერატურაში ცნობილია სხვადასხვა პროტოკოლები [6,7,8], რომლებიც მტ-ნაკლები წარმატებით უზრუნველყოფენ ზემოთხსენებული კრიტერიუმების შესრულებას და შესაბამისად მათი შესრულებაც მოითხოვს ამომრჩევლისაგან სხვადასხვა დონის სპეციალურ ცოდნას და არჩევნების შესაბამის ტექნიკურ აღჭურვას.

ჩვენს მიერ დამუშავებული იქნა რამდენიმე პროტოკოლი, რომლებიც შეიძლება გამოყენებული იქნას ისეთ პირობებში, როდესაც ამომრჩეველთა რაოდენობა შეზღუდულია (მაგალითად უნივერსიტეტის სამეცნიერო საბჭო, ქვეყნის პარლამენტი ან სხვა რაიმე ორგანო, სადაც ხშირია ფარული არჩევნების აუცილებლობა).

### *არჩევნების პროტოკოლი საარჩევნო კომისიის გარეშე.*

დავუშვათ, არჩევნებში მონაწილეობს შეზღუდული რაოდენობის ამომრჩეველი (იმისათვის, რომ პროტოკოლის აღწერამ არ დაიკავოს დიდი ადგილი, ჩვენ შევჩერდებით ოთხ ამომრჩეველზე: ანი – **A**, ბექა – **B**, გია – **G** და დათო – **D**. ყველა მათგანს გააჩნია დაშიფრვის ღია გასაღები  $E_A, E_B, E_G, E_D$  და ხელმოწერის დახურული გასაღები  $S_A, S_B, S_G, S_D$ . დავუშვათ, ანი (**A**) არის პასუხისმგებელი პირი არჩევნების ჩატარებაზე. პირველ ეტაპზე (**A**) ირჩევს შემთხვევით რიცხვს  $R_1$ , შიფრავს მას ყველა მონაწილის ღია გასაღებებით და მიღებულ შედეგებს  $E_B(R_1), E_G(R_1), E_D(R)$  შესაბამისად უგზავნის დანარჩენ მონაწილეებს. (**B**), (**G**) და (**D**) გაშიფრავენ მიღებულ შეტყობინებას, კვლავ დაშიფრავენ ამ შემთხვევით რიცხვს დანარჩენი მონაწილეების ღია გასაღებებით და უგზავნიან ერთმანეთს. ყველა მონაწილე ადარებს დანარჩენებისაგან მიღებულ შემთხვევით სიდიდეს ანისაგან მიღებულ  $R_1$  სიდიდესთან და დარწმუნდებიან, რომ ყველამ მიიღო ერთი და იგივე რიცხვი.



პროტოკოლის ეს ეტაპი აუცილებელია, რათა არჩევნებში არ მიიღოს მონაწილეობა პირმა, რომელიც არ არის უფლებამოსილი და გარდა ამისა, თუ ანი არ არის პატიოსანი და უნდა გაიგოს რა არჩევანი გააკეთა თითოეულმა მონაწილემ, ის სხვადასხვა პირებს გაუზიარებს სხვადასხვა რიცხვებს და ეცოდინება მათი არჩევანი.

მეორე ეტაპზე უკვე ტარდება ხმის მიცემის პროცედურა. თითოეული მონაწილე აირჩევს თავის შემთხვევით რიცხვს  $R_2$ , რომელსაც არავის ატყობინებს, გააკეთებს არჩევანს და შევსებულ საარჩევნო ბიულეტენს  $V$ -ს და შემთხვევით სიდიდეს  $R_2$ -ს დაშიფრავს ბექას ღია გასაღებით. მიღებულ შედეგს  $E_B(V, R_2)$  ამომრჩეველი დაიმასხვორებს და შემდეგ ამ მიღებულ სიდიდეს და შემთხვევით  $R_1$  სიდიდეს დაშიფრავს უკვე ანის ღია გასაღებით. მიღება სიდიდე  $E_A(R_1, E_B(V, R_2))$ , რომელსაც ამომრჩეველი კვლავ იმასხვორებს და ამავე დროს უზიარებს ანის.

$R_2$  სიდიდე გვჭირდება იმისათვის, რომ თითოეულმა ამომრჩეველმა შეამოწმოს გაითვალისწინეს თუ არა მისი ხმა არჩევნების შედეგებში. ბიულეტენები იშიფრება ბექას ღია გასაღებით იმიტომ, რომ თუ დაეშიფრავდით ანის ღია გასაღებით და ანი გახსნიდა ბიულეტენებს, რადგანაც მან იცის თუ რომელი ბიულეტენი ვისგან მიიღო, მაშინ მას ეცოდინებოდა ვის მისცა ხმა ამა თუ იმ ამომრჩეველმა. იგივე მიზეზით ბიულეტენები არ ეგზავნება პირდაპირ ბექას, რომელმაც უნდა გახსნას ეს ბიულეტენები.  $R_1$  სიდიდე საჭიროა, რათა ანი დარწმუნდეს, რომ ბიულეტენი მიიღო ნამდვილად იმ პირისაგან, ვინც უფლებამოსილია მიიღოს მონაწილეობა არჩევნებში. თუ რომელიმე ამომრჩეველი არაკეთილსინდისიერია და გაამჟღავნებს  $R_1$  სიდიდეს და მის მაგივრად სხვა მიიღებს მონაწილეობას არჩევნებში, ამას ვერც ანი და ვერც სხვა ვერ გაიგებს. იურიდიულ ენაზე ეს ნიშნავს, რომ ამომრჩეველმა თავისი ხმა გადასცა სხვას, რაც კანონით არ ისჯება, მაგრამ თუ ამომრჩეველი გაამჟღავნებს  $R_1$  სიდიდეს და მასთან ერთად სხვაც მიიღებს არჩევნებში მონაწილეობას, ანის დაუგროვდება იმაზე მეტი ბიულეტენი, რამდენიც მას უნდა მიეღო და ის არჩევნების შედეგებს გააუქმებს და მოითხოვს კენჭისყრის ხელახლად ჩატარებას. თუ მოხდება ისე, რომ ანი შეეცდება შეცვალოს ამომრჩეველის ბიულეტენი სხვა ბიულეტენით, ეს გამჟღავნდება შემდეგ ეტაპებზე.

მესამე ეტაპზე ანი მიიღებს რა  $E_A(R_1, E_B(V, R_2))$  სახის ყველა შეტყობინებას, დაითვლის მათ, დაშიფრავს, დარწმუნდება რომ ყველა მათგანში  $R_1$  ემთხვევა შეთანხმებულ  $R_1$ -ს, მოაშორებს შეტყობინებებს ამ რიცხვს, მოაწერს ხელს ყველა შეტყობინებას, აურევს მათ რიგით მიმდევრობას და  $S_A(E_B(V, R_2))$  სახის შეტყობინებებს გაუზიარებს გიას. გია მიიღებს ყველა შეტყობინებას, აურევს მათ, მოაშორებს ანის ხელმოწერას, დარწმუნდება რომ მისი ბიულეტენი არის ამ შეტყობინებაში, თვითონ მოაწერს ხელს და  $S_G(E_B(V, R_2))$  სახის შეტყობინებას გადაუზიარებს ბექას.

მეოთხე ეტაპზე ბექა მიიღებს რა გიასაგან ყველა  $S_G(E_B(V, R_2))$  სახის შეტყობინებას, მოხსნის გიას ხელმოწერას, დარწმუნდება, რომ მისი ბიულეტენი არის მათ შორის, თვითონ მოაწერს ხელს და  $S_B(E_B(V, R_2))$  სახის შეტყობინებას გაუზიარებს არჩევნების ყველა მონაწილეს.

მესუთე ეტაპზე ყველა მონაწილე მოხსნის ბექას ხელმოწერას მიღებულ შეტყობინებებს, დარწმუნდება რომ მისი ბიულეტენი მონაწილეობს არჩევნებში და გაუზიარებს ბექას შეტყობინებას ამის შესახებ. თუ არჩევნების მონაწილე რომელიმე პირი აღმოაჩენს, რომ მისი ბიულეტენი არ მიუღია ბექას, ის ამის შესახებ შეტყობინებს უზიარებს არჩევნებში მონაწილე ყველა პირს.

იმისათვის, რომ არ შეიკრან ანი, ბექა და გია, რაც მათ მისცემთ საშუალებას გაიგონ თუ კონკრეტულმა ამომრჩეველმა ვის მისცა ხმა, შესაძლებელია ბექა და გია არჩეულნი იქნან ხელახლა ყოველი კენჭისყრის დროს.

მეექვსე ეტაპზე ხდება არჩევნების შედეგების დათვლა. ბექა გახსნის ყველა ბიულეტენს და გამოაქვეყნებს შედეგებს  $R_2$  სიდიდის მითითებით.

ყველა დარწმუნდება, რომ არჩევნები ჩატარდა სწორად და ადასტურებს ამას.

როგორც ვხედავთ, აღწერილი პროტოკოლი აკმაყოფილებს ზემოთხაზოვლილ კრიტერიუმებს.

- რადგანაც წინასწარ ცნობილია არჩევნებში მონაწილეთა ვინაობა და რაოდენობა, არჩევნებში ვერ მიიღებს მონაწილეობას პირი, რომელსაც ამის უფლება არა აქვს. ანი ამას აღმოაჩენს, როდესაც დაითვლის მიღებული ბიულეტენების რაოდენობას;

- ამავე მიზეზით ერთი და იგივე პირი ორჯერ ვერ მიიღებს მონაწილეობას არჩევნებში;
- ვერავინ გაიგებს ვის მისცა ხმა კონკრეტულმა ამომრჩეველმა;
- ვერავინ შეცვლის არჩევნების შედეგებს.

ერთი შეხედვით, პროტოკოლის უარყოფითი მხარეა ის, რომ ბექა ყველაზე პირველი იგებს არჩევნების შედეგებს, მაგრამ ეს დამახასიათებელია ნებისმიერი სახით ჩატარებულ არჩევნებისათვის.

იმისათვის, რომ პრაქტიკულად შესაძლებელი იყოს ასეთი არჩევნების ჩატარება, საჭიროა არჩევნებში მონაწილე პირებს ჰქონდეთ წვდომა კომპიუტერთან და გააჩნდეთ ელემენტარული პრაქტიკული ცოდნა **RSA** და **DSA** ალგორითმების გამოყენებისა. პირველი ალგორითმი უზრუნველყოფს შეტყობინებების დაშიფრვა – გაშიფრვის პროცესებს, მეორე კი ციფრული ხელმოწერის პროცესს. გარდა ამისა, უნდა არსებობდეს მინიმუმ კორპორაციული ქსელი, რომელშიც უზრუნველყოფილი იქნება ამ ალგორითმების მუშაობისათვის საჭირო გასაღებების შექმნა და განაწილება ქსელის აბონენტებს შორის.

ცხადია, რომ რაც უფრო ბევრი იქნება არჩევნებში მონაწილეთა რაოდენობა, მით უფრო გართულდება პროტოკოლის გამოყენება და მონაწილეთა გარკვეული რაოდენობის შემდეგ პრაქტიკულად გახდება შეუძლებელი.

### არჩევნების პროტოკოლი ცენტრალური საარჩევნო კომისიით (ცსკ).

როდესაც არჩევნებში მონაწილეობს ამომრჩეველთა დიდი რაოდენობა, უკვე აუცილებელი ხდება არჩევნების ორგანიზაციისათვის საარჩევნო კომისიის შექმნა, რაც კიდევ უფრო აართულებს საარჩევნო ტექნოლოგიებს. აქ დგება ორი მთავარი მომენტი, დავიცვათ არჩევნების პროცედურა არაკეთილსინდისიერი ამომრჩეველების ან ამომრჩეველთა ჯგუფებისაგან და დავიცვათ არჩევნები არაკეთილსინდისიერი საარჩევნო კომისიისაგან. რადგანაც საარჩევნო კომისიას არჩევნებში გააჩნია უფრო მეტი უფლებები, ვიდრე ამომრჩეველებს, შესაბამისად უფრო ძნელია არჩევნების პროცესის დაცვა საარჩევნო კომისიისაგან. ასე მაგალითად, როგორც არ უნდა იყოს საარჩევნო სისტემა და როგორც კომპიუტერული ტექნოლოგიებიც არ უნდა გამოვიყენოთ, თითქმის შეუძლებელია თავიდან ავიცილოთ იმ ამომრჩეველთა ხმების გამოყენება თავისი მიზნებისათვის არაკეთილსინდისიერი საარჩევნო კომისიის მიერ, რომლებმაც არ მიიღეს მონაწილეობა არჩევნებში (აქ ლაპარაკია კომპიუტერულ ტექნოლოგიებზე).

მეორე მთავარ მომენტს წარმოადგენს მესამე კრიტერიუმი, ანუ როგორ დავიცვათ ამომრჩეველის ანონიმურობა საარჩევნო კომისიისაგან, რომელიც არიგებს საარჩევნო ბიულეტენებს და შემდეგ შევსებულ ბიულეტენს ღებულობს ამომრჩეველისაგან. კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენების დროს ბიულეტენის დარიგებას შეესაბამება ამომრჩეველისათვის საიდენტიფიკაციო ეტიკეტის მინიჭება, რაც ერთის მხრივ ადასტურებს ამომრჩეველის უფლებას მიიღოს მონაწილეობა არჩევნებში და მეორეს მხრივ, როდესაც გამოქვეყნდება არჩევნების შედეგები, ამომრჩეველი დარწმუნდება სწორად გაითვალისწინეს თუ არა მისი ხმა. მაგრამ თუ არ მოხდება ამომრჩეველის პიროვნებისა და საიდენტიფიკაციო ეტიკეტის ერთმანეთისაგან გახლეჩვა, საარჩევნო კომისია ადვილად დაადგენს თუ კონკრეტულმა ადამიანმა ვის მისცა ხმა. დღეს [5,6] ამ პროცედურის შესასრულებელ ძირითად ტექნიკურ ინსტრუმენტად გამოიყენება **ANDOS (All or Nothing Disclosure Of Secret)** პროტოკოლი [9,10], რომელიც წარმოადგენს პროტოკოლს, რომელიც უზრუნველყოფს ინფორმაციის რაიმე წყაროდან ინფორმაციის ისე მიღებას, რომ ინფორმაციის მფლობელი ვერ გაიგებს რა ინფორმაცია მიიღო აბონენტმა. იმისათვის რომ ამ პროტოკოლმა იმუშაოს, საჭიროა რამდენიმე მომხმარებელი (მინიმუმ ორი) ერთდროულად ასრულებდეს ამ პროტოკოლს საარჩევნო კომისიასთან ერთად, მაგრამ თუ გვეყოლება არაკეთილსინდისიერი ამომრჩეველები და ისინი შეიკვრიბიან, მაშინ ისინი შეძლებენ საარჩევნო კომისიის მოტყუებას და გაიგებენ ყველა საიდენტიფიკაციო ეტიკეტს (საიდენტიფიკაციო ეტიკეტი წარმოადგენს პრაქტიკულად დიდ მარტივ რიცხვს), რასაც გამოიყენებენ თავისი მიზნებისათვის. გარდა ამისა, ეს პროტოკოლი საკმაოდ რთულია და შესასრულებლად მოითხოვს დიდ დროს, რაც ეჭვქვეშ აყენებს ამ პროტოკოლის გამოყენების შესაძლებლობას, როდესაც საქმე ეხება არჩევნებს მთელი ქვეყნის მასშტაბით.

ჩვენი აზრით შესაძლებელია **ANDOS** პროტოკოლი შეიცვალოს მეორე, უფრო მარტივი პროტოკოლით, რომელიც სრულად აკმაყოფილებს იგივე მიზნებს. ესაა ე.წ. სრულიად “ბრმად” ხელმოწერის ალგორითმი [11], რომელიც იყენებს **RSA** ალგორითმს და რომლის პრინციპიც მდგომარეობს შემდეგში: დავუშვათ, ანის სურს ხელი მოაწერინოს ბექას რაიმე დოკუმენტზე ისე, რომ ბექამ არ იცოდეს მისი შინაარსი. ამისათვის ანი შენიღბავს ამ ინფორმაციას და გაუგზავნის ბექას, რომელიც მოაწერს მას ხელს. ამის შემდეგ ანი მოხსნის შენიღბვას და დარჩება ხელმოწერილი დოკუმენტი, ამასთან ბექას არ შეუძლია დააკავშიროს ხელმოწერილი დოკუმენტი ხელმოწერის პროცესთან მაშინაც კი, თუ ის ინახავს ჩანაწერებს თავის მიერ ხელმოწერილი დოკუმენტების შესახებ, ის ვერ შეძლებს განსაზღვროს როდის მოაწერა ხელი

ამა თუ იმ დოკუმენტს და ამიტომ ვერ დააკავშირებს მას კონკრეტულ პიროვნებასთან. ამ პროცედურის გამოყენებით არჩევნების პროტოკოლს ექნება შემდეგი სახე:

მას შემდეგ, რაც გამოქვეყნდება საარჩევნო სიები, ამომრჩეველს მიეცემა წვდომა ცსკ -ს მიერ შექმნილ საიდენტიფიკაციო ეტიკეტების ბაზასთან (ეს ბაზა წარმოადგენს დიდ მარტივ რიცხვებს, რომელთა რაოდენობა გაცილებით მეტია, ვიდრე ამომრჩეველთა რაოდენობა). ამომრჩეველი ამოირჩევს საიდენტიფიკაციო ეტიკეტს, შენიღბავს მას და ხელს მოაწერინებს ცსკ -ს. ამის შემდეგ მოხსნის შენიღბას და მიიღებს მარტივ რიცხვს  $p_i$ . შემდეგ ის აირჩევს ორი ცვლადის კრიპტოგრაფიულ  $h_B(x, y)$  ჰეშ- ფუნქციას და ცსკ -ს გაუზიარებს  $(p_i, h_B(p_i, V_B))$ . ცსკ ადასტურებს ბიულეტენის მიღებას, გამოაქვეყნება რა  $h_B(p_i, V_B)$ - ს. მაშინ ამომრჩეველი უზიარებს ცსკ-ს  $(p_i, h_B^{-1})$ , რის საფუძველზეც ცსკ-ს შეუძლია გახსნას  $V_B$ . მან იცის კავშირი  $p_i$  და  $V_B$  შორის, მაგრამ არ იცის კავშირი  $B$  ამომრჩეველსა და  $p_i$  - ს შორის. როდესაც არჩევნები დამთავრდება და ცსკ გამოაქვეყნებს შედეგებს, თუ კონკრეტული ამომრჩეველი აღმოაჩენს, რომ მისი ხმა არასწორადაა დათვლილი, ის უზიარებს ცსკ-ს  $(p_i, h_B(p_i, V_B), h_B^{-1})$  სიდიდეს, რომელიც ამტკიცებს, რომ ამომრჩეველის ხმა დათვლილია არასწორად.

ამ ალგორითმში არის კიდევ ერთი ხარვეზი, რომელიც აუცილებლად უნდა იქნას გამოსწორებული. მიუხედავად იმისა, რომ საიდენტიფიკაციო ეტიკეტების რაოდენობა გაცილებით აღემატება ამომრჩეველთა რაოდენობას, მაინც შეიძლება ისე მოხდეს, რომ ორმა (ან მეტმა) ამომრჩეველმა აირჩიოს ერთი და იგივე საიდენტიფიკაციო ეტიკეტი. ამას ცსკ ადვილად აღმოაჩენს, როდესაც სხვადასხვა ჰეშ-ფუნქციებთან ერთად მოვა ერთი და იგივე  $p_i$ . მაშინ ცსკ აქვეყნებს წყვილს  $(p_i', h_B(p_i', V_B))$ . ამ წყვილის მეორე კომპონენტი ამომრჩეველს მიანიშნებს, რომ მის საიდენტიფიკაციო ეტიკეტთან მიმართებაში პრობლემაა და ამიტომ ის ცსკ-ს უზიარებს ახალ წყვილს  $(p_i', h_B(p_i', V_B))$ , რაც ნიშნავს, რომ ამომრჩეველმა შეცვალა საიდენტიფიკაციო ეტიკეტი.

აღწერილი ალგორითმის პრაქტიკული რეალიზაცია მოითხოვს ამომრჩეველისაგან გარკვეული უნარ-ჩვევების ცოდნას კომპიუტერის გამოყენების სფეროში, მაგრამ ეს ადვილად მისაღწევია, თუკი იქნება სურვილი ასეთი სახით არჩევნების ჩატარებისა. ტექნიკური უზრუნველყოფისათვის კი პირველ ეტაპზე შეიძლება შეიქმნას საარჩევნო უბნები, რომლებიც აღჭურვილი იქნება კომპიუტერებით და გამოყენებული იქნას ინტერნეტი.

## ელექტრონული არჩევნების კრიპტოგრაფიული პროტოკოლების შესახებ მ.რაზმაძე, ზ.ქოჩლაძე, ა.ჯიქია

### რეზიუმე

სტატიაში განხილულია ელექტრონული ხმის მიცემის (ელექტრონული არჩევნების) სისტემები. განხილულია ის კრიტერიუმები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდნენ ასეთი სისტემები და ის სირთულეები, რომელთა გადალახვაც საჭიროა ასეთი სისტემების შექმნის დროს.

ნაშრომში აგებულია ორი პროტოკოლი, რომლებიც შეიძლება გამოყენებული იქნას ელექტრონული არჩევნების დროს. პირველი პროტოკოლი – არჩევნების პროტოკოლი საარჩევნო კომისიის გარეშე შეიძლება გამოყენებული იყოს მაშინ, როდესაც არჩევნებში მონაწილეთა რიცხვი შეზღუდულია, ხოლო მეორე პროტოკოლი – არჩევნების პროტოკოლი ცენტრალური საარჩევნო კომისიით განკუთვლილია ფართომაშტაბიანი არჩევნებისათვის.

## ABOUT OF CRYPTOGRAPHY PROTOCOLS OF ELECTRONIC VOTING

M.Razmadze, Z.Kochladze, A.Jikia

### Abstracts

The topic of electronic voting is discussed in the research. The problem of creation of e-government is actual present day.

In the article “About of Cryptography Protocols of Electronic voting“ is discussed the problem of formation of two types of protocols: one is without Centralized Election Commission and another with Centralized Election Commission. First protocol can be implemented for election with small number of voters and second, when the number of voters is large.

#### ლიტერატურა:

1. Federal Election Commission. Voting System Standards, 2001.  
[http:// fecweb1.fec.gov/pages/vss/vss.html](http://fecweb1.fec.gov/pages/vss/vss.html)
2. Schneier, Bruce (September 2004), open Democracy **What ' s wrong with electronic voting machines?**  
<http://www.schneier.com/essay - 068.html>
3. Schneier on Security – **Voting Software and Secrecy**  
[http://www.schneier.com/blg/archives/2006/10/voting\\_\\_software.html](http://www.schneier.com/blg/archives/2006/10/voting__software.html)
4. **Electronic voting and Democracy.** <http://www.electronic-voting.otg/>
5. Bruce Schneier, Applied Cryptography, John Wiley & Sons, Inc.
6. Hannu Nurmi, Arto Salomaa and Lila Santean Secret Ballot Elections in Computer Networks. computers & Security, 10 (1991) 553 – 560.
7. A. Salomaa, Public-key Cryptography , Spring – Verlag 1990.
8. R. DeMillo, M. Lynch and M. Merritt “Cryptographic Protocols”, Proceedings of The 14<sup>th</sup> Annual Symposium on the Theory of Computing, 1982, pp. 383 – 400.
9. A.Salomaa and L. Santean, “Secret Selling of Secrets with Many Buyers,” ETACS Bulletin, v.42,1990, pp.178-186.
10. M. Santha and U.V.Vazirani, “Generating Quasi-Random Sequences from Slightly Random Sources,” Proceedings of 25<sup>th</sup> Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, 1984, pp.434-440.
11. D.Chaum, “Blind Signatures for Untraceable Payments,” Advances in Cryptology: Proceedings of Crypto 82, Plenum Press, 1983, pp,199-203.

## THE COMPUTER MODEL OF GEORGIAN AND ENGLISH SCIENTIFIC TEXTS

T.Tsilosani

It is such necessary to create the mathematical models of text formation for automatic text remake. For example, it is very interesting to reveal the empyreal distributions of linguistic units for different types of texts.

The major task is to compare the distributions of linguistic units with theoretical distributions lows. This problem is not solved to day.[1]

We mast conclude which theoretical lows of distribution, will be necessari to pick out the terminology words in texts, to discuss for which parts of speech can we belong the linguistic units. This problem is the problem of text automatic translate.[2]

he task of this problem is to construct the probability- statistical “ filter”, which helps us to recognize the terminology words and which part of speech belongs the pick out words. It will be used some theoretical lows of distributions to solve this problem. It will be used Georgian and English scientific texts. [3]

In first we must create the frequency dictionary of Georgian and English scientific texts. In second, we must pick out the word forms and put them into our probability “ filter”. In third, we must discuss about linguistic results. This everything may be possibility, if we construct some computer program, which gives us opportunity to compare the empirical distributions of word forms with theoretical distributions.

This computer program may be used for ever texts in ever languages, therefore, this research may be belong application task of science. Investigation in this direction are actual not only in respect of construction of methods of statistic estimates of linguistic phenomena, but more over, also in respect of analysis of statistic regularities of language as a whole.

Present work is realized in channel of modern searches of inherent statistic parameters of Georgian and English scientific texts. It was used program language “Basic”.

This searches were realized to exposing the modal and diagnostic forse of five theoretical laws of distributions (namely: Gaussian, Poisson, Chebanov- Fuks, Binomial and Lognormal distributions), being relative to Georgian synthetic and English analytic art texts, their styles and under languages. The principles of using this model of distributions for formal establishing the lexiso-gramatic natur of saporate wordusage in the text were determined.

Complex of this distributions were presented as diagnostic filter, which could show us, with definite probability, to which of lexico- grammatic class were belong given wordusage.

The algorithm of text processing is shown in[5]. In first step was nessesary to create the frequency list of Georgian and English scientific texts. All the words of frequency list “active”zone were investigated, and then the selective analysis was used with constant increase of interval between selected groups of word-forms. In all 400 Georgian and 300English word-forms were selected for comparison.

The fololwing characteristics were investigated:

$N_k^\alpha$  - the number of series of a certain lenth  $k$ , to which the text set with capacity  $\alpha$  is represented.

$F_i'$  - absolute frequency, which the investigated unit wasfound certain numberof series.

$m_{F_i'}$  - the number of intraserialselections, in which the investigated unit was found with frequency  $F_i'$ . Here

$$N_k^\alpha = \sum_i m_{F_i'}$$

The  $m_{F_i'}$ -quantity of series in which the word-form appeared the given frequency.  $F_i'$  was determined for each investigated word-form aqnd by all options of  $N_k^\alpha$  according to the scheme of formation text. These frequencies were sorted ascending from  $F'_{\min}$  to  $F'_{\max}$ . Thus, the construction of regulated empirical variation rows of frequencies for text with  $N_k^\alpha$  length of intra- serial samples was maintained.

These rows were as follows:

$$F'_{\min}, \dots, F'_1, \dots, F'_{\max}$$

$$M_{F'_{\min}}, \dots, M_{F'_1}, \dots, M_{F'_{\max}}$$

For constructing continuous variations rows the division of empirical rows on certain number of enlarged classes was achieved by with the establishmentof a division step(interva)  $\Delta F_i''$ , which was considered constant for

each analysed unit and calculated according Sterger’s formula.  $\Delta F_i'' = \frac{F'_{\max} - F'_{\min}}{r}$  where  $r = 1 + \log_2 N_k^\alpha$

Thus, distributions, used for comparison will be written down by the following way:

1. Normal distribution

$$P_{F_i} = \frac{\Delta F_i''}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(F_i''-a)}{2\sigma^2}} \quad \text{where } a = \frac{\sum_i F_i'' m_{F_i''}}{N_k^\alpha} \text{ is the mathematical expectation.}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_i (F_i''-a)^2 m_{F_i''}}{N_k^\alpha}} \text{ is the standard deflexion.}$$

2. Log- normal distribution

$$P_{F_i''} = \frac{\Delta F_i'}{\sigma' F_i'' \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln F_i''-a')^2}{2(\sigma')^2}} \quad \text{where } a' = \frac{\sum_i m_{F_i''} \ln F_i''}{N_k^\alpha}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_i (\ln F_i''-a')^2 m_{F_i''}}{N_k^\alpha}}$$

3. Poisson distribution

$$P_{F_i'} = \frac{a^{F_i'}}{F_i'^!} e^{-a} \quad \text{when } a = \frac{\sum_i F_i' m_{F_i'}}{N_k^\alpha}$$

4. Cebanov- Fucks distribution

$$P_{F_i'} = \frac{(a-1)^{F_i'-1}}{(F_i'-1)!} e^{-(a-1)} \quad \text{where } a = \frac{\sum_i F_i' m_{F_i'}}{N_k^\alpha}$$

5. Binomial distribution

$$P_{F_i'} = \frac{N_k^\alpha}{m_{F_i'}!(N_k^\alpha - m_{F_i'})!} \left(\frac{m_{F_i'}}{N_k^\alpha}\right)^{m_{F_i'}} \left(1 - \frac{m_{F_i'}}{N_k^\alpha}\right)^{N_k^\alpha - m_{F_i'}}$$

For  $X^2$  distribution

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(m_{F_i'} - N_k^\alpha P_{F_i'})^2}{N_k^\alpha P_{F_i'}}$$

Thus, complex of this distributions are presented as diagnostic filter, which could show us, with definite probability, how to recognize the terminology words and which part of speech belongs the pick out words.

The following conclusions for Georgian and English scientific texts was made:

1. With the increase of the ordinal number in the frequency list, the number of nouns subordinate to Normal, Log-normal and Chebanov-Fucks lows, but then there is a step rise in the number of nouns, which distributions subordinates to Poisson and Binomial lows.
2. Verbs, adjectives, pronouns, numerals and adverbs with high frequency subordinate to almost all of analyzed lows.
3. Adjective, numerals, adverbs and conjunctions with high frequency subordinate to all five laws of distribution. With increase to ordinal number they subordinate to normal and log-normal and then to Chebanov-Focks law. The spheres of activity of Poisson and binomial laws remain invariable.
4. With the increase of ordinal number in frequency lists of Georgian and English scientific technical texts the general tendency narrowing spheres of activity of Gaussian, Chebanov- Fucks and log-normal lows is observed.
5. The spheres of activity of binomial and Poisson laws are stable or extend with the increase of ordinal number of word- forms in frequency list of Georgian and English scientific- technical texts. Accordingly, these laws can be used for word-forms, taken from different zones of the frequency list.

Subordination of Georgian and English parts of speech to selected five theoretical distribution laws is of same character, in spite of the fact that English is an analytical (elective- isolating) and Georgian is a synthetically (elective- agglutinative) language. Apparently, the influence of general rules of statistic texts structuring, operating in condition of the 'genre', more exactly in condition of the sub- language is revealed here. It is important to mention that in Georgian as well as in English scientific- technical texts the word- forms, which have no subordinate to any of the above mentioned distribution laws, were terminological for the given them.

## THE COMPUTER MODEL OF GEORGIAN AND ENGLISH SCIENTIFIC TEXTS

T.Tsilosani

A scheme of computer comparing the empirical distributions of lexical units with five theoretical laws of distribution (normal, log- normal, Poisson, Chebanov – Fucks, binomial) for Georgian and English scientific texts is considered. The results are obtained.

### References

- 1.Бектаев К. Б. Лукьяненко К.Ф. О законах распределения единиц письменной речи. Сб. «Статистика речи и автоматический анализ текста». «Наука», Ленинград,1971
- 2.Кокочашвили Т.Г. Чхенкели А.И. О выявлении эмпирических законов распределения лексических единиц в текстах с помощью ЭВМ. Труды ТГУ. Серия «Кибернетика и прикладная математика» Т. 258,6. Тбилиси, 1985.
3. Кокочашвили Т.Г, Цилосани Т.П. , Беришвили Г.Ш. Исследование законов распределения лексических единиц в грузинских научно- технических текстах. Труды ТГУ. Серия «Кибернетика и прикладная математика» Т. 258,6. Тбилиси, 1985.

**გენეტიკური ალგორითმების გამოყენება სემანტიკურ web-ში**  
 გ.ბესიშვილი, მ.ხაჩიძე

გენეტიკური ალგორითმი ცოცხალი ბუნებისათვის დამახასიათებელი ისეთი თვისებების განმაზოგადოებელი და იმიტატორია, როგორცაა: ბუნებრივი გადარჩევა, გარემოს პირობების ცვლილებებთან შეგუება, შთამომავლობის, მემკვიდრეების მიერ მშობლებისაგან მიღებული მნიშვნელოვანი სასიცოცხლო თვისებების მემკვიდრეობით მიღება. ალგორითმი ძეხვის პროცესში იყენებს არა თვითონ პარამეტრებს არამედ ამ პარამეტრთა კოდირებულ მნიშვნელობებს. ამიტომ ის შეიძლება გამოვიყენოთ დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანებში, როგორც რიცხვით სიმრავლეებზე, ასევე ნებისმიერი ბუნების სასრულ სიმრავლეებზე. რადგანაც ალგორითმი მუშაობისას პროცესში არ იყენებს არც წარმოებულებს და არც სხვა რაიმე მახასიათებლებს, ამიტომ მოცემული ალგორითმი შეიძლება გამოვიყენოთ ფართო კლასის ამოცანების ამოსახსნელად და კერძოდ, ისეთი ფუნქციებისათვისაც რომელთა ანალიტიკური სახე არ არსებობს. საწყისი წერტილრბის ერთობლიობის ფორმირება ხდება ამოცანის სპეციფიკის გათვალისწინებით.

გენეტიკური ალგორითმის ძალა მდგომარეობს იმაში, რომ ეს მეთოდი ძლიერ მოქნილია და იმის გათვალისწინებით, რომ გარემო პირობების შესახებ შეიძლება ცნობილი იყოს მხოლოდ მინიმალური ინფორმაცია (როგორც ეს ხშირად ხდება რთულ ტექნიკურ სისტემებში) გენეტიკური ალგორითმები წარმატებით მუშაობენ პრობლემათა ფართო წრეში და განსაკუთრებით ისეთ ამოცანებში, სადაც დღემდე არ არსებობს ამონახსნის საყოველთაოდ ცნობილი ალგორითმები ან ძალიან მაღალია აპრიორული განუზღვრელობის ხარისხი [1, 2].

გენეტიკური ალგორითმი – აღწერა, მუშაობის პრინციპი

მოსემულია:  $S$  – სტრიქონი,  $l$  – სიგრძის; სასრული ალფაბიტის  $s$  – სტრიქონი;  $V_i$  – ალტერნატივების საწყისი სიმრავლე.

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_l)$$

ითეული შეიძლება წარმოვადგინოთ  $V_i$  ალფაბიტით  $i = \overline{1, L}$

$$s_i \circ V_i, \text{ სადაც } V_i = \{v_{ij}, j = \overline{1, r_i}\},$$

$W$  ამოცანის ამოხსნა:  $W$  –ს ასახვა სათანადო სიგრძის სტრიქონების სიმრავლეზე (სტრიქონის სიგრძე დამოკიდებულია გამოყენებულ ალფაბიტზე).

$U_{(v_1, v_2, \dots, v_m)}^m$  სტრიქონების სიმრავლეზე განვსაზღვროთ არაუარყოფითი  $F(S)$  ფუნქცია ხარისხის მაჩვენებელით, სტრიქონის ფასით  $SOU_{(v_1, v_2, \dots, v_m)}^m$ . ალგორითმი ეძებს სტრიქონს რომლისთვისაც

$$F^*(s) = \arg \max_{S \in U_{(r_1, r_2, \dots, r_m)}^m} F(S).$$

თუ  $W$  სიმრავლეზე მოცემული მიზნის ფუნქციაა  $f(w)$ , მაშინ  $F(S)$  ფუნქცია  $U_{(v_1, v_2, \dots, v_m)}^m$  სტრიქონების სიმრავლეზე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$F(S) = f(w) \quad \text{თუ } w \text{ ელემენტი } W \text{ –ს ასახვისას სტრიქონების სიმრავლეზე ეთანადებოდა } S \text{ სტრიქონს.}$$

გენეტიკური ალგორითმი ერთ ბიჯზე ამუშავებს სტრიქონების რაღაც პოპულაციას.  $G(t)$  არის  $t$ -ბიჯის პოპულაცია და წარმოიდგინება:

$$G(t) = (S_1^t, S_2^t, \dots, S_N^t), \text{ სადაც } S_k^t \in U_{(v_1, v_2, \dots, v_m)}^m, k = \overline{1, N},$$

$N$ - პოპულაციის ზომაა. და პოპულაციაში შეიძლება სტრიქონები მეორდებოდეს.

ალგორითმის მუშაობის მექანიზმის აღსაწერად შემოვიტანოთ სქემის აპარატო. გენეტიკურ ალგორითმებში სქემას უწოდებენ სტრიქონების რაიმე ქვესიმრავლის აღწერას. სქემა  $H = (h_1, h_2, \dots, h_m)$  შეიძლება განვიხილოთ, როგორც სტრიქონი, რომლის ელემენტების ალფაბიტს დამატებული აქვს # სპეციალური სიმბოლო.

$$H \in U_{(v^H_1, v^H_2, \dots, v^H_m)}^m, v_i^H = v_i \cup \{ \# \}$$

თუ რომელიმე  $r$  აბზაცში გვხვდება # მაშინ მას თავისუფალ პოზიციას ვუწოდებთ.

გენეტიკური ალგორითმი - ძირითადი ოპერატორები აღწარმოება, შეუღლება და მუტაცია.

აღწარმოება – ამორჩევის პროცესი.  $K*N$  სტრიქონიდან ამორჩევა  $G(t)$  პოპულაცია (ამორჩევა შემთხვევითია):



$$P_{\text{ამორჩევი}}(S_i^t) = \frac{F(S_i^t)}{\sum_{k=1}^N F(S_k^t)}$$

$S_i^t$  სტრიქონის ამორჩევის ალბათობაა მისი კლასის პროპორციულია. ამორჩევის პროცესი გრძელდება,  $G(t+1)$  პოპულაციაში  $S_i^t$  სტრიქონების ეგზემპლარების რაოდენობა  $n_{\text{ამორჩევი}}(S_i^t) = P_{\text{ამორჩევი}}(S_i^t) \cdot K \cdot N$ .

აღწარმოების ოპერაცია ადიდებს შემდგომში პოპულაციების ფასს, ყველაზე უფრო ფასიანი სტრიქონები რაოდენობის ზრდის ხარჯზე.

ვთქვათ  $G(t)$  პოპულაციაში გვაქვს  $n(H, t)$  სტრიქონი, რომელიც აკმაყოფილებს  $H$  სქემას. მაშინ აღწარმოების შემდეგ  $G(t+1)$  პოპულაციაში  $H$  სქემას დამაკმაყოფილებელი სტრიქონების რაოდენობა იქნება:

$$n(H, t+1) = \sum_{i=1}^{n(H,t)} (K \cdot N \cdot P_{\text{ამორჩევი}}(S_i^{H,t})) = K \cdot N \frac{\sum_{i=1}^{n(H,t)} F(S_i^{H,t})}{\sum_{j=1}^{n(H,t)} F(S_j^t)}$$

საშუალო კლასის გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$n(H, t+1) = K \cdot \frac{n(H, t) \cdot \sum_{i=1}^{n(H,t)} F(S_i^{H,t})}{\sum_{j=1}^{n(H,t)} F(S_j^t)} = n(H, t) \cdot K \cdot \frac{F_{\text{საშ}}(G_H(t))}{F_{\text{საშ}}(G(t))}$$

$F_{\text{საშ}}(G_H(t)) = F(G_H(t)) + C \cdot F_{\text{საშ}}(G(t))$   $C$  რაიმე ცვლადია.

$$n(H, t+1) = n(H, t) \cdot K \cdot \frac{F_{\text{საშ}}(G(t)) + C \cdot F_{\text{საშ}}(G(t))}{F_{\text{საშ}}(G(t))} = (1 + C) \cdot K \cdot n(H, t)$$

აღწარმოების პროცესის შედეგად იზრდება იმ სქემის წარმომადგენელთა რაოდენობა, რომელთა შესაბამისი ქვეპოპულაციებს გააჩნიათ საშუალოზე მაღალი საშუალო ფასი.

შეუღლების პროცესის დროს ხდება სტრიქონების ელემენტების შემთხვევითი შეცვლა. შემთხვევით აირჩევა შეუღლების წერტილი. უტაციის ალბათობა საზოგადოდ მცირეა [2, 3].

### სემანტიკური ქსელი ანუ Semantic Web

სემანტიკური ქსელი ანუ Semantic Web – ეს არის ფორმატების და ენების ერთობლიობა, რომელიც საშუალებას იძლევა ინტერნეტში განთავსებული სხვადასხვა მონაცემები მოძებნოს სხვადასხვა ფორმატში, მოახდინოს მათი შეკრება, გაანალიზოს და მომხმარებელს მიაწოდოს მისთვის გასაგებ ფორმაში.

ამ მიზნით web კონსორციუმის მიერ შემუშაბეულია Semantic Web Activity პროგრამა. ამ პროგრამის საფუძველზე შეიქმნა რამოდენიმე ფორმატი და ენა:

**RDF ფორმატი.** Resource Description Framework (RDF) ქსელში ონფორმაციის განსაზღვრისათვის გამოიყენება. მონაცემთა თითოეულ ბლოკს და ყოველი ორი ბლოკის კავშირს მიენიჭება უნიკალური სახელი, ეგრეთწოდებული რესურსის უნივერსალური იდენტიფიკატორი (Universal Resource Identifier, URI), ყველასათვის ცნობილი ვებ-მისამართები (Universal Resource Locators, URL) რომელთაც ჩვენ ხშირად ვსარგებლობთ არიან URI-ს კერძო ფორმები. RDF სქემებში ინფორმაციის ორი ბლოკი და მათ შორის აღმნიშვნელი ნებისმიერი კავშირი გაერთიანდება სამეულში. მაგალითად:

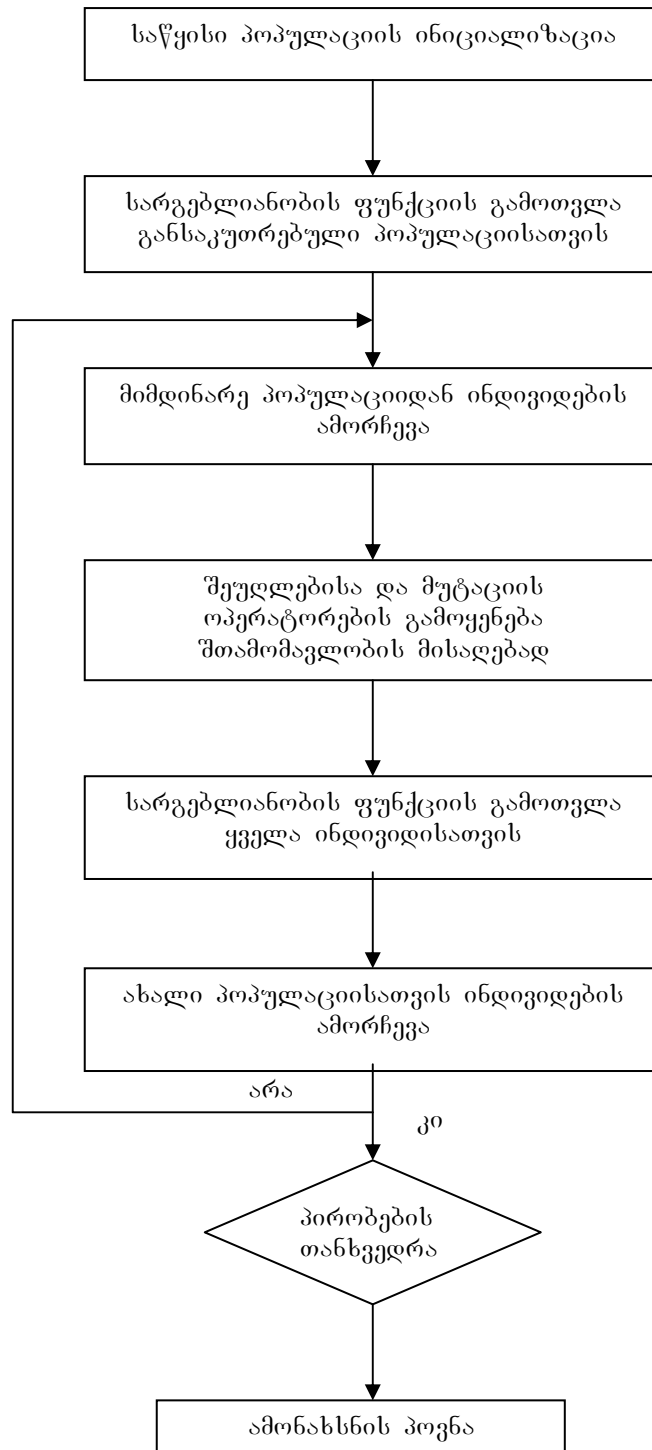
<Uri for Flipper> <Uri for ISA> <Uri for Dolphin>

<http://en.wikipedia.org/wiki/dolphin>

**ონტოლოგიის ენები.** Web Ontology Language (OWL) ეს არის ერთ-ერთი ის სტანდარტი, რომლის საშუალებითაც სხვადასხვა ტერმინები და განსაზღვრებები ურთიერთ თავსებადი და გასაგებია RDF ფორმატისათვის.

ლოგიკური გამოყვანის მანქანა. სვადასხვა წყაროებს შორის კავშირების ამოცნობა (გამოცნობა) – მნიშვნელოვანი ეტაპია ინფორმაციის “აზრობრივი” გამოვლენის გზაზე. RDF სამეულის შესწავლის შემდეგ ლოგიკური გამოყვანის მანქანა აკეთებს დასკვნას. RDF და ონტოლოგიის შემდეგი დონე არის ლოგიკური გამოყვანის მანქანა.

სხვა ტექნოლოგიები. ვებ კონსორციუმი შეიმუშავებს ლოგიკური გამოყვანის დასკვნების მანქანებს და სვადასხვა ტექნოლოგიებს. მათ შორის. SPARQL – შეკითხვების ენა – ეძებოს RDF მონაცემებში კონკრეტული ინფორმაცია და GRDDL-ტექნოლოგია, რომელიც საშუალებას იძლევა, რომ მომხმარებელმა იმ ფორმატში გამოაქვეყნოს მონაცემები რომლითაც ის მუშაობს, მაგ. HTML ან XML და განსაზღვრავს განახორციელოს ამ მონაცემების გადაყვანა RDF მონაცემებში.



გენეტიკური ალგორითმის ბლოკ-სქემა

რომელი გენები იწვევენ გულის დაავადებებს.

სხვადასხვა ტიპის მონაცემებთა ბაზების და სამეცნიერო შრომების შესწავლის და ანალიზის შედეგად სემანტიკური ქსელის მეშვეობით გამოვლენილი იქნა ამ დაავადების ხელშემწყობი ასამდე საეჭვო გენი:

- Gene Ontology (გენები და გენური პროდუქტები);
- MeSH (დაავადებები და მათი სიმპტომები);
- Entrez Gene (გენები);
- OMIM (ადამიანის გენები და და გენეტიკური დარღვევები).

ამ მონაცემთა ბაზებიდან მოღებული მონაცემები გადაიყვანეს RDF ფორმატში და შეიტანეს სემანტიკური ქსელის მონაცემთა ბაზაში. შემდეგ გამოიყენეს Protege და Jena სემანტიკური ქსელის უფასო პროგრამები მიღებული შედეგის ინტეგრაციისათვის.

ასევე SAPPHERE (Situational Awareness and Preparedness for Public Health Incidences using Reasoning Engines) გრიპის ეპიდემიის გაგრძელების პროგნოზირების სისტემა იყენებს სემანტიკურ web-ის ტექნოლოგიას.

ლიტერატურა

1. Holand J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems, Ann Arbor. University of Michigan . 1975.
2. Davis L. Handbook of genetic Algorithms. HY. 1991.
3. Michalewicz Z. Genetik Algorithms+Data Structures-Evolution Programs. Springer – Verlag, 1992.
4. [www.w3.org/topic/semantic](http://www.w3.org/topic/semantic) web toobs/sw books

**სემანტიკური ალგორითმების გამოყენება სემანტიკურ web-ში**

გ.ბესიშვილი, მ.ხაჩიძე  
რეზიუმე

განხილულია ინტერნეტში სემანტიკური ქსელების (Semantic Web) ელემენტები, ფორმატი და ენა, აგრეთვე ენების ონტოლოგია, ლოგიკური გამოყვანის მანქანა და სხვა ტექნოლოგიები მონაცემთა ანალიზისათვის, კერძოდ მონაცემების მინიმიზაციისათვის (ან მაქსიმიზაციისათვის). აღწერილია გენეტიკური ალგორითმების ბუნება და მუშაობის პრინციპი. მოყვანილია სხვადასხვა პროგრამები რომლებიც ინტერნეტში ამ ტექნოლოგიებს იყენებენ.

**USING SEMANTICAL GENETICAL ALGORITHM FOR SEMANTICAL WEB**

G.Besishvili, M.Khachidze

Summary

Elements, formats and languages of semantic networks on the Internet are considered. Also, ontology, machine logical conclusions, and other technologies for data analysis, in particular the minimization (maximization) of data. described the nature and principles of genetic algorithms and the different programs that are used on the Internet.

სენ-ვენანის (მარჩხი წყლის) ორგანოზომილებიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის გაწვრივებული სხვაობიანი სქემების კრებადობის შესახებ

3. მელაძე, ა. ჭანტურია

**გასაღები სიტყვები:** დიფერენციალური განტოლება, სხვაობიანი სქემა, მათემატიკური მოდელი, სქემის კრებადობა.

მარჩხი წყლის (სენ-ვენანის) თეორიის საფუძველზე, აგებულია კაშხლის ნგრევისას, გამრღვევი ტალღის ფორმირებისა და გავრცელების შემდეგი ორგანოზომილებიანი მოდელი[1]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_1(Q) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(Q) = W(Q), \quad (*)$$

$$J_1 = Hu, \quad J_2 = Hv, \quad Q = (J_1, J_2, H)^T,$$

$$F_1(Q) = (J_1 u + gH^2/2, J_1 v, J_1)^T, \quad F_2(Q) = (J_2 u, J_2 v + gH^2/2, J_2)^T,$$

$$W(Q) = (f_1(x, y, t, H, u, v), f_2(x, y, t, H, u, v), f_3(x, y, t, H, u, v))^T,$$

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y),$$

სადაც  $x$  და  $y$  ეილერის კოორდინატებია,  $t$ - დრო,  $g$ - თავისუფალი ვარდნის აჩქარება,  $v(x, y, t)$  და  $u(x, y, t)$  სიჩქარის ვექტორის კომპონენტები შესაბამისად  $x$  და  $y$  ღერძების მიმართ,  $J_1(x, y, t)$  და  $J_2(x, y, t)$ -ნაკადის იმპულსის კომპონენტებია ( $x$  და  $y$  ღერძების მიმართულებით),  $H(x, y, t)$ -ნაკადის სიღრმე, ხოლო  $H_0(x, y)$ ,  $u_0(x, y)$  და  $v_0(x, y)$ -შესაბამისად, ნაკადის სიღრმისა და სიჩქარეების განაწილების ფუნქციები დროის საწყისი მომენტისათვის,  $f_1(x, y, t, H, u, v)$ ,  $f_2(x, y, t, H, u, v)$ ,  $f_3(x, y, t, H, u, v)$ -მასისა და იმპულსის წყაროების აღმწერი ფუნქციები.

კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლისას წარმოქმნილი სიძნელეები ძირითადად განპირობებულია როგორც წესი, მათი არაწვრივობით. ნაშრომში შემოვიფარგლებით სენ-ვენანის ორგანოზომილებიანი დიფერენციალური განტოლებების (\*) წრფივი მიახლოების განხილვით. გამოკვლეულია წრფივი მიახლოებისათვის აგებული არაწვრივ რეგულარიზატორიანი გაწვრივებული სხვაობიანი სქემის კრებადობა.

ეილერის ცვლადებში ჩაწერილი გაწვრივებული სენ-ვენანის ორგანოზომილებიანი განტოლებებისათვის  $\Omega = \{(x, y, t), -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$  არეში განვიხილოთ კომის ამოცანა, საწყისი პირობებით:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = f_1(x, y, t, H, u, v), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial y} = f_2(x, y, t, H, v, u), \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u_0 \frac{\partial H}{\partial x} + H_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial H}{\partial y} + H_0 \frac{\partial v}{\partial y} = f_3(x, y, t, H, u, v), \quad (3)$$

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (4)$$

სადაც  $H$ -წყლის სიღრმეა,  $u$  და  $v$  მისი სიჩქარის მდგენელები,  $f_i, i = \overline{1,3}$ -მასისა და იმპულსის წყაროების აღმწერი ფუნქციები, ხოლო  $H_0(x, y), u_0(x, y), v_0(x, y)$  საკმარისად გლუვი, პერიოდული ფუნქციები,  $L_1$  პერიოდით  $x$  ცვლადის მიმართ,  $L_2$ -ით  $y$  ცვლადის მიმართ.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ:

(A1) ფუნქციები  $H(x, y, t), u(x, y, t), v(x, y, t) \in C^{3,3,2}\{(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \times [0, T]\}$ , აგრეთვე მოიძებნება ისეთი მუდმივი  $\delta > 0$ , რომ  $H(x, y, t) \geq \delta$ , როცა  $(x, y, t) \in \Omega$ . ასევე დავუშვათ, რომ შესრულებულია (1)-(4) ამოცანის პერიოდული ამოხსნის ( $x$  და  $y$  ცვლადების მიმართ) არსებობისა და ერთადერთობის პირობები.

(A2) ფუნქციები  $f_1(x, y, t, H, u, v), f_2(x, y, t, H, u, v)$  და  $f_3(x, y, t, H, u, v)$  აკმაყოფილებენ ლიფშიცის პირობას  $H(x, y, t), u(x, y, t), v(x, y, t)$  ცვლადების მიმართ,  $K > 0$  მუდმივით.

(1)-(3) ამოცანის სხვაობიანი აპროქსიმაციისათვის განვიხილოთ არაწრფივ რეგულარიზატორიანი სხვაობიანი სქემის[2] წრფივი ანალოგი, რომელსაც  $u/c \geq 1, v/c \geq 1$  შემთხვევისათვის აქვს შემდეგი სახე:

$$u_{ht} + u_0 u_{hx} + g H_{hx} + v_0 u_{hy} = \varphi_1(\tau, h)(u_0 u_{hxx} + g H_{hxx}) + \varphi_2(\tau, h)v_0 u_{hy} + f_{1h}, \quad (5)$$

$$v_{ht} + u_0 v_{hx} + v_0 v_{hy} + g H_{hy} = \varphi_1(\tau, h)u_0 v_{hxx} + \varphi_2(\tau, h)(v_0 v_{hy} + g H_{hy}) + f_{2h}, \quad (6)$$

$$H_{ht} + H_0 u_{hx} + u_0 H_{hx} + H_0 v_{hy} + v_0 H_{hy} = \varphi_1(\tau, h)(H_0 u_{hxx} + u_0 H_{hxx}) + \varphi_2(\tau, h)(H_0 v_{hy} + v_0 H_{hy}) + f_{3h}, \quad (7)$$

ხოლო  $-1 \leq u/c \leq 1, -1 \leq v/c \leq 1$ -სთვის:

$$u_{ht} + u_0 u_{hx} + g H_{hx} + v_0 u_{hy} = 1.5\varphi_1(\tau, h)[c_0 u_{hxx} + 0.5(c_0 u_0 / H_0) H_{hxx}] + \varphi_2(\tau, h)c_0 u_{hy} + f_{1h}, \quad (8)$$

$$v_{ht} + u_0 v_{hx} + v_0 v_{hy} + g H_{hy} = \varphi_1(\tau, h)c_0 v_{hxx} + 1.5\varphi_2(\tau, h)[c_0 v_{hy} + 0.5(c_0 v_0 / H_0) H_{hy}] + f_{2h}, \quad (9)$$

$$H_{ht} + H_0 u_{hx} + u_0 H_{hx} + H_0 v_{hy} + v_0 H_{hy} = 1.5\varphi_1(\tau, h)c_0 H_{hxx} + 1.5\varphi_2(\tau, h)c_0 H_{hy} + f_{3h}. \quad (10)$$

სადაც  $c = \sqrt{gH}$  ბგერის სიჩქარეა,  $c_0 = \sqrt{gH_0}$ ,  $H_h = H_h(ih, jh, k\tau)$ ,  $u_h = u_h(ih, jh, k\tau)$ ,  $v_h = v_h(ih, jh, k\tau)$ ,  $f_{ih} = f_i(ih, jh, k\tau)$ ,  $i = \overline{1,3}$  ფუნქციები წარმოადგენენ  $D = \omega_{h^2} \times \omega_\tau$  არეში განსაზღვრულ,  $H, u, v, f_i, i = \overline{1,3}$  -ის მათპროქსიმირებულ, ბადურ ფუნქციებს,  $\omega_{h^2} = \{(x_i, y_j): x_i = ih, y_j = jh, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}\}$ ,  $\omega_\tau = \{n\tau: N\tau = T, n = \overline{0, N}\}$ .

(5)-(10) სხვაობიანი ამოცანისათვის საწყისი პირობები შემდეგი სახისაა:

$$H_h(ih, jh, 0) = H_0(ih, jh), \quad u_h(ih, jh, 0) = u_0(ih, jh), \quad v_h(ih, jh, 0) = v_0(ih, jh), \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2} \quad (11).$$

განვიხილოთ ცდომილებათა ფუნქციები:

$$\tilde{H} = H_h - H, \quad \tilde{u} = u_h - u, \quad \tilde{v} = v_h - v, \quad (**)$$

$$\text{და აღნიშვნა } \tilde{f}_i = f_i(ih, jh, H + \tilde{H}, u + \tilde{u}, v + \tilde{v}) - f_i(ih, jh, H, u, v).$$

(\*\*) ტოლობებიდან განვსაზღვროთ  $H_h, u_h, v_h$  და შევიტანოთ (5)-(7) განტოლებებში. მაშინ  $u/c \geq 1, v/c \geq 1$  შემთხვევისათვის მივიღებთ (კრებადობის კვლევის მეთოდიკა ყველა დანარჩენი შემთხვევისათვის ანალოგიურია):

$$\tilde{u}_t + u_0 \tilde{u}_x + g \tilde{H}_0 + v_0 \tilde{u}_y = \varphi_1(\tau, h)(u_0 \tilde{u}_{x\bar{x}} + g \tilde{H}_{x\bar{x}}) + \varphi_2(\tau, h)v_0 \tilde{u}_{y\bar{y}} + \tilde{f}_1 - \psi_1, \quad (12)$$

$$\tilde{v}_t + u_0 \tilde{v}_x + v_0 \tilde{v}_y + g \tilde{H}_0 = \varphi_1(\tau, h)u_0 \tilde{v}_{x\bar{x}} + \varphi_2(\tau, h)(v_0 \tilde{v}_{y\bar{y}} + g \tilde{H}_{y\bar{y}}) + \tilde{f}_2 - \psi_2, \quad (13)$$

$$\tilde{H}_t + H_0 \tilde{u}_x + u_0 \tilde{H}_x + H_0 \tilde{v}_y + v_0 \tilde{H}_y = \varphi_1(\tau, h)(H_0 \tilde{u}_{x\bar{x}} + u_0 \tilde{H}_{x\bar{x}}) + \varphi_2(\tau, h)(H_0 \tilde{v}_{y\bar{y}} + v_0 \tilde{H}_{y\bar{y}}) + \tilde{f}_3 - \psi_3, \quad (14)$$

$$\tilde{H}_h(ih, jh, 0) = 0, \quad \tilde{u}_h(ih, jh, 0) = 0, \quad \tilde{v}_h(ih, jh, 0) = 0, \quad i = \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad (15)$$

სადაც

$$\psi_1 = u_t + u_0 u_x + g H_0 + v_0 u_y - f_1 - \varphi_1(\tau, h)(u_0 u_{x\bar{x}} + g H_{x\bar{x}}) - \varphi_2(\tau, h)v_0 u_{y\bar{y}},$$

$$\psi_2 = v_t + u_0 v_x + v_0 v_y + g H_0 - f_2 - \varphi_1(\tau, h)u_0 v_{x\bar{x}} - \varphi_2(\tau, h)(v_0 v_{y\bar{y}} + g H_{y\bar{y}}),$$

$$\psi_3 = H_t + H_0 u_x + u_0 H_x + v_0 H_y + H_0 v_y - f_3 - \varphi_1(\tau, h)(H_0 u_{x\bar{x}} + u_0 H_{x\bar{x}}) - \varphi_2(\tau, h)(H_0 v_{y\bar{y}} + v_0 H_{y\bar{y}}),$$

შეუსაბამობები წარმოადგენენ  $O(\tau + h^2)$  რიგის აპროქსიმაციის ცდომილებებს, როდესაც (1)-(3) ამოცანის ამოხსნა მიეკუთვნება  $C^{3,3,2}(\bar{\Omega})$  კლასს.

(5)-(7), (11) ამოცანისათვის სამართლიანია შემდეგი

**ლემა 1.** ვთქვათ სრულდება (A1), (A2) პირობები. ასევე  $\tau = h^{2+2\varepsilon}$ , ( $\varepsilon > 0$ ),  $\varphi_1(\tau, h) = O(h^2)$ ,  $\varphi_2(\tau, h) = O(h^2)$  და (5)-(7),(11) ამოცანის ამონახსნისათვის  $n$ -ურ შრეზე,  $0 \leq n \leq N-1$ , ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას;

$$\max\{\|\tilde{H}\|_c, \|\tilde{u}\|_c, \|\tilde{v}\|_c\} \leq h \quad (16)$$

მაშინ, მოიძებნება ისეთი  $h_1 > 0$ , რომ როცა  $h \leq h_1$ , სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1.  $(n+1)$  შრეზე (5)-(7),(11) სხვაობიან ამოცანას აქვს ერთადერთი ამოხსნა.
2. ცდომილებისათვის  $(n+1)$  შრეზე ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\max\left\{\|\hat{\tilde{H}}\|_c, \|\hat{\tilde{u}}\|_c, \|\hat{\tilde{v}}\|_c\right\} \leq Mh \quad (17)$$

სადაც  $M$  არაა დამოკიდებული  $h$ -ზე.

(5)-(7) ამოცანისათვის შევნიშნოთ, რომ თუ  $y_t + Ay = \phi$  განტოლებას სკალარულად გავამრავლებთ  $\alpha y^{(0.5)}$ -ზე,  $y^{(0.5)} = y + 0.5\tau y_t$  იგივეობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\alpha(\alpha, [y^2]_{\downarrow}) = (\phi, \alpha y) - (Ay, \alpha y) + 0.5\tau(\alpha, (\phi - Ay)^2). \quad (18)$$

(12) განტოლება სკალარულად გავამრავლოთ  $g^{-1}H_0 \tilde{u}^{(0.5)}$ -ზე, (13) და (14) განტოლებები შესაბამისად  $g^{-1}H_0 \tilde{v}^{(0.5)}$  და  $\tilde{H}^{(0.5)}$ -ზე. მიღებული განტოლებების შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$0.5\|\tilde{H}\|_t^2 = \sum_{i=1}^{21} G_i + (f_3 - \psi_3, \tilde{H}) + (f_1 - \psi_1, g^{-1}H_0 \tilde{u}) + (f_2 - \psi_2, g^{-1}H_0 \tilde{v}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{სადაც } G_1 &= -0.5(g^{-1}H_0, [\tilde{u}^2]_{\downarrow}), & G_2 &= -0.5(g^{-1}H_0, [\tilde{v}^2]_{\downarrow}), \\ G_3 &= (\varphi_1(\tau, h)(H_0 \tilde{u}_{x\bar{x}} + u_0 \tilde{H}_{x\bar{x}}), \tilde{H}), & G_4 &= (\varphi_2(\tau, h)(H_0 \tilde{v}_{y\bar{y}} + v_0 \tilde{H}_{y\bar{y}}), \tilde{H}), \end{aligned}$$

$$G_5 = -\left(H_0 \tilde{u}_x, \tilde{H}\right), \quad G_6 = -\left(u_0 \tilde{H}_x, \tilde{H}\right), \quad G_7 = -\left(H_0 \tilde{v}_y, \tilde{H}\right), \quad G_8 = -\left(v_0 \tilde{H}_y, \tilde{H}\right),$$

$$G_9 = 0.5\tau \left\| \varphi_1(\tau, h) \left( H_0 \tilde{u}_{xx} + u_0 \tilde{H}_{xx} \right) + \varphi_2(\tau, h) \left( H_0 \tilde{v}_{yy} + v_0 \tilde{H}_{yy} \right) - \tilde{f}_2 - \psi_3 - H_0 \tilde{u}_x - u_0 \tilde{H}_x - H_0 \tilde{v}_y - v_0 \tilde{H}_y \right\|^2,$$

$$G_{10} = \left( \varphi_1(\tau, h) \left( u_0 \tilde{u}_{xx} + g \tilde{H}_{xx} \right), g^{-1} H_0 \tilde{u} \right), \quad G_{11} = \left( \varphi_2(\tau, h) \left( v_0 \tilde{v}_{yy} + g \tilde{H}_{yy} \right), g^{-1} H_0 \tilde{v} \right),$$

$$G_{12} = -\left( u_0 \tilde{u}_x, g^{-1} H_0 \tilde{u} \right), \quad G_{13} = -\left( g \tilde{H}_x, g^{-1} H_0 \tilde{u} \right), \quad G_{14} = -\left( v_0 \tilde{v}_y, g^{-1} H_0 \tilde{v} \right),$$

$$G_{15} = 0.5\tau \left( g^{-1} H_0, \left\{ \varphi_1(\tau, h) \left( u_0 \tilde{u}_{xx} + g \tilde{H}_{xx} \right) + \varphi_2(\tau, h) \left( v_0 \tilde{v}_{yy} + g \tilde{H}_{yy} \right) - \tilde{f}_1 - \psi_1 - u_0 \tilde{u}_x - g \tilde{H}_x - v_0 \tilde{v}_y \right\}^2 \right),$$

$$G_{16} = -\left( \varphi_1(\tau, h) \left( u_0 \tilde{v}_{xx} + g \tilde{H}_{xx} \right), g^{-1} H_0 \tilde{v} \right), \quad G_{17} = -\left( \varphi_2(\tau, h) \left( v_0 \tilde{v}_{yy} + g \tilde{H}_{yy} \right), g^{-1} H_0 \tilde{v} \right),$$

$$G_{18} = -\left( u_0 \tilde{v}_x, g^{-1} H_0 \tilde{v} \right), \quad G_{19} = -\left( v_0 \tilde{v}_y, g^{-1} H_0 \tilde{v} \right), \quad G_{20} = -\left( g \tilde{H}_y, g^{-1} H_0 \tilde{v} \right),$$

$$G_{21} = 0.5\tau \left( g^{-1} H_0, \left\{ \varphi_1(\tau, h) \left( u_0 \tilde{v}_{xx} + g \tilde{H}_{xx} \right) + \varphi_2(\tau, h) \left( v_0 \tilde{v}_{yy} + g \tilde{H}_{yy} \right) - \tilde{f}_2 - \psi_2 - u_0 \tilde{v}_x + v_0 \tilde{v}_y + g \tilde{H}_y \right\}^2 \right),$$

(19) ტოლობაში შესაკრებების შეფასებისათვის თუ ვისარგებლებთ ლემა 24-ით [3]-დან, და [2], [3], [4]-ში განხილული მეთოდით, ასევე  $\varphi_1(\tau, h) = O(h^2)$ ,  $\varphi_2(\tau, h) = O(h^2)$  გათვალისწინებით, მივიღებთ ძირითად ენერგეტიკულ უტოლობას:

$$\left( \hat{Q} - Q \right) \tau^{-1} \leq M \left( \hat{Q} + Q \right) + M \| \psi \|^2, \quad Q^{(0)} = 0, \quad (20)$$

$$\text{სადაც } Q = g^{-1} \left( H_0, \tilde{u}^2 \right) + g^{-1} \left( H_0, \tilde{v}^2 \right) + \| \tilde{H} \|^2, \quad \| \psi \|^2 = \max \left\{ \| \psi_1 \|^2, \| \psi_2 \|^2, \| \psi_3 \|^2 \right\} = O(h^4).$$

(20) ცხადი ენერგეტიკული უტოლობის ამოსახსნელად გამოიყენება ლემა 2.3 [5]-დან. ლემა 1 და ლემა 2.3-ის ([5]-დან) გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი კრებალობის

**თეორემა** ვთქვათ (1)-(4) ამოცანის ამოსახსნისათვის სრულდება (A1), (A2) პირობები და  $\varphi_1(\tau, h) = O(h^2)$ ,  $\varphi_2(\tau, h) = O(h^2)$ ,  $\tau = h^{2+2\varepsilon}$  ( $\varepsilon = \text{const} > 0$ ). მაშინ მოიძებნება ისეთი  $h_0 > 0$ , რომ როცა  $h \leq h_0$  სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

1. (5)-(11) სხვაობიანი ამოცანის ამოსხნა  $[0, T]$  შუალედში არსებობს და ერთადერთია
2. (5)-(11) ამოცანის ამოსხნა კრებადია (1)-(4) დიფერენციალური ამოცანის ამოსხნისაკენ  $L_2$

ბადურ ნორმაში  $O(h^2)$  სიჩქარით.

ამგვარად, ეილერის ცვლადებში ჩაწერილი სენ-ვენანის ორგანზომილებიანი განტოლებებისათვის დასმული კომის ამოცანის საკმარისად გლუვ ამოსხნათა კლასში დამტკიცებულია გაწრფივებული სხვაობიანი სქემის კრებალობა  $L_2$  ბადურ ნორმაში  $O(h^2)$  სიჩქარით.

კაშხლის ნგრევისას გამრღვევი ტალღის ფორმირებისა და გავრცელების ორგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი ამოსხნისათვის გამოყენებული არაწრფივრეგულარიზატორიანი ორშირიანი სხვაობიანი სქემებით მიღებული გამოთვლების შედეგები მოყვანილია სამგანზომილებიანი გრაფიკების სახით[1].

**სენ-ვენანის (მარჩხი წყლის) ორგანოზომილებიანი დიფერენციალური  
ბანტოლებებისათვის გაწვრივებული სხვაობიანი სქემების  
კრებადობის შესახებ  
პ. მელაძე, ა. ჭანტურია  
რეზიუმე**

ეილერის ცვლადებში ჩაწერილი სენ-ვენანის ორგანოზომილებიანი განტოლებებისათვის დასმული კოშის ამოცანის საკმარისად გლუვ ამოხსნათა კლასში დამტკიცებულია გაწვრივებული სხვაობიანი სქემის კრებადობა  $L_2$  ბადურ ნორმაში  $O(h^2)$  სიჩქარით.

**CONVERGENCE OF LINEARED DIFFERENCE SCHEMES TWO-DIMENSIONAL  
SAINT-VENANT EQUATIONS (SHALLOW WATER)  
G.V. Meladze, A.Z.Chanturia**

The convergence of lineared difference scheme in Eulerian variables with non-linear regularization to the smooth solutions for linear analog of two-dimensional Saint-Venant equations are considered for Cauchy problem with periodic (in spatial variables) solutions. The proof of difference scheme convergence is conducted with help of energetic method. It's proved that in the class of sufficiently smooth solutions of the difference scheme solution of the difference scheme converges in mesh norm  $L_2$  with speed  $O(h^2)$ .

**ლიტერატურა**

1. F. Criado, A. Chanturia, N. Jgamadze, H. Meladze, N. Skhirtladze. Mathematikal Modelling of Wreck Events Originated by Dam Collapse // International Journal of Computer Mathematics. Vol. 80, NO.8, August 2003. pp. 999 – 1018.
2. Чантурия А. Разностные схемы для квазилинейных систем гиперболических уравнений, моделирующих некоторые задачи гидродинамики. Диссер. 2002.
3. Давиташвили Т.Д., Елизарова Т.Г., Криадо Ф., Меладзе Г.В., Схиртладзе Н.В. О сходимости кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики. Препринт, Москва, Диалог-МГУ, 1999.
4. Kuo P.-Y., Wu H.-M. Numerical solution of K.D.V. equation // J. Math. analis. and Applic. 1981, v. 82, N2, p. 334-345.
5. Самарский А.А. Классы устойчивых схем. Ж. выч. мат. и мат. физ., Т. 7, N2, 1967, 1096-1134.



**პარალელური დაკრობრამება ფუნქციონალური  
დაკრობრამირების მუშავებით**  
**6. არჩევაჟე, ლ. შეწირული**

ბუნებრივი რეზერვი, რათა მოხდეს კომპიუტერების წარმოებადობის გაზრდა, არის პარალელური პროცესების მართვა. მისი ორგანიზება ითხოვს დროითი კავშირების გათვალისწინებას და მოქმედებების მართვის არაიმპერატიულ სტილს.

პროგრამირების ენა LISP [6,8,9] თავისი არსებობის ნახევარსაუკუნოვანი ისტორიის მანძილზე და დღემდე კვლავაც რჩება პრაქტიკულად შეუზღუდავი შესაძლებლობის სიმბოლური პროგრამირების სისტემად. LISP და მისი დიალექტები გახდნენ საფუძვლები მთელი რიგი გამოყენებითი ხასიათის კვლევებისა, რომლებმაც დიდი როლი შეასრულეს საინფორმაციო ტექნოლოგიების გავრცელებაში.

LISP არის პროგრამირებადი პროგრამირების ფუნქციონალური ენა, ამიტომაც ჩვენს მიერ შესწავლილი იყო LISP-ის ბაზაზე უნივერსალური დაპროგრამირების საკითხები [4]. ესეა გვერს ვაჩვენოთ, როგორ შეიძლება იგი გახდეს პარალელური პროგრამირების ენა, ანუ როგორ შეიძლება LISP-ზე მოხდეს პარალელური გამოთვლების ორგანიზება მრავალპროცესორიანი პერსონალური კომპიუტერისთვის და ამ შესაძლებლობების თანამედროვე ენებში (მაგალითად, C/C++-ში) რეალიზება.

პარალელური გამოთვლების შესაძლებლობა – ეს ისაა, რაც LISP-ს თავიდანვე ჩადებული აქვს ე.წ. ფუნქციონალუბის სახით. ფუნქციონალუბის შესრულება LISP-ის პირველ ვერსიებსაც შეეძლოთ. ასე, რომ პროგრამირების ფუნქციონალური სტილიდან პარალელურ პროგრამირებაზე გადასვლა, მიგვანჩნია ბუნებრივად. ამასთან, გვინდა ავღნიშნოთ, რომ ამჟამად, როცა გამოთვლითი ტექნიკის განვითარება მრავალპროცესორიანი პერსონალური კომპიუტერების შექმნის მიმართულებით ხდება, ძალზე აქტუალურია ის, რომ თანამედროვე პროგრამირების ენებში ჩადებული იყოს გამოთვლების პარალელურად შესრულების შესაძლებლობა.

ფუნქციონალურ ენებში განსაზღვრულია მაღალი რივის ფუნქციები, რომელთაც ფუნქციონალუბი ეწოდებათ [8,6]. ფუნქციონალუბი – ეს ფუნქციებია, რომლებიც არგუმენტად იყენებენ ან ფუნქციის შედეგად განსაზღვრავენ სხვა ფუნქციებს. ფუნქციონალის განსაზღვრებისას ცვლადების როლს ასრულებენ ფუნქციების სახელები, რომელთა განსაზღვრებებიც მოცემულია გარე ფორმულებით, რომელთაც ფუნქციონალუბი იყენებენ.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ მონაცემები და პროგრამები LISP-ში წარმოდგებიან ერთნაირად, ამიტომ განსხვავება ცნებებს შორის “მონაცემი” და “ფუნქცია” განისაზღვრება არა მათი სტრუქტურით, არამედ მათი გამოყენებით. თუ არგუმენტი ფუნქციაში გამოიყენება როგორც ობიექტი, რომელიც მხოლოდ გამოთვლებში მონაწილეობს, მაშინ იგი არის ჩვეულებრივი არგუმენტი-მონაცემი, ხოლო თუ იგი გამოიყენება როგორც საშუალება, რომელიც განსაზღვრავს გამოთვლებს, მაგალითად, გამოდის lambda გამოსახულების როლში, მაშინ იგი არის ფუნქცია.

მაგალითად:

(car '(lambda (x)(list x))) → lambda ; მონაცემი  
((lambda (x)(list x) car)→(car) ; ფუნქცია

LISP-ში განსაზღვრულია ამსახველი ფუნქციონალუბი ანუ map-ფუნქციონალუბი როგორც ფუნქციები, რომლებიც სიას (თანმიმდევრობას) რაღაც საშუალებით ასახავენ (map) ახალ სიაში, ან მეორადი მოქმედებით წარმოქმნიან ამ თანმიმდევრობას. map-ფუნქციონალუბის სახელები იწყება სიტყვა map-ით, მათ გამოძახებას აქვს სახე:

(MAPx f<sub>n</sub> l<sub>1</sub> l<sub>2</sub> ... l<sub>n</sub>). სადაც l<sub>1</sub> ... l<sub>n</sub>-სიებია, ხოლო f<sub>n</sub>-ფუნქცია N არგუმენტის.

როგორც წესი, map-ფუნქციები გამოიყენება ერთ არგუმენტზე-სიაზე, ანუ f<sub>n</sub>-ფუნქცია ერთ არგუმენტიანია: (MAPx fn სია).

ამსახველი ფუნქციონალუბი იყოფა ორ ჯგუფად. პირველი, რომლებიც უზრუნველყოფენ მოცემული სიის თითოეული ელემენტის დამუშავებას (mapcar, mapcan) და მეორე, რომლებიც უზრუნველყოფენ საწყისი სიისა და მისი ყოველი კულის დამუშავებას (maplist, mapcon). სიის კული სიაა, საიდანაც პირველი ელემენტია ამოგდებული.

ფუნქციონალუბი mapcar უზრუნველყოფს ფუნქციონალური არგუმენტის რეალიზაციას სიის ყველა ელემენტზე და შედეგს აერთიანებს სიაში. მაგალითად, (mapcar 'list '(a b c)) გვაძლევს შედეგს '( (a) (b) (c) ). ფუნქციონალუბი mapcan ანალოგიურია mapcar იმ განსხვავებით, რომ შედეგის გამოსატანად გამოიყენება ფუნქცია ncons. მაგალითად, (mapcan 'list '(a b c)) გვაძლევს შედეგს '( a b c ).

ფუნქციონალი `maplist` უზრუნველყოფს ფუნქციონალური არგუმენტის რეალიზაციას სიაზე და მის ყველა კუდზე. მაგალითად, `(maplist 'list '(a b c))` გვაძლევს შედეგს `'(((a b c))((b c))((c)))`. ფუნქციონალი `mapcon` ანალოგიურია `maplist`-ის იმ განსხვავებით, რომ შედეგის გამოსატანად გამოიყენება ფუნქცია `ncons`. მაგალითად, `(mapcon 'list '(a b c))` გვაძლევს შედეგს `'((a b c)(b c)(c))`.

მაგალითი:

`(mapc 'list '(a b c))` გვაძლევს შედეგს `'(a b c)`.  
`(mapl 'list '(a b c))` გვაძლევს შედეგს `'(a b c)`.

ენა `Clisp`-ში [3] ფუნქციონალებს მიეკუთვნება შემდეგი ფუნქციები: `Mapc`, `Mapcan`, `Mapcar`, `Mapcon`, `Mapl`, `Maplist`. `LISP`-ის ერთ-ერთ თანამედროვე ვერსიაში `Objective CAML` [2] შემოღებულია ნაკადების ცნება და არის პარალელური ალგორითმის ჩაწერის საშუალება. `Objective CAML`-ს აქვს ბიბლიოთეკა “`მსუბუქი`” პროცესების ნაკადებისთვის, რომლებიც ორგანიზებულია თვით პროცესის და არა ოპერაციული სისტემის მიერ. ასეთი ნაკადები იყენებენ მათი წარმომქმნელი პროცესის მისამართების არეს და ამიტომ ითხოვენ ნაკლებ რესურსებს. პრინციპული განსხვავება ნაკადსა და პროცესს შორის არის ის, ერთდროულად იყენებენ თუ არა მეხსიერებას მონაცემებისთვის ერთი და იგივე პროგრამის შეიღობილი პროცესებისთვის. ნაკადების გამოყენება არის საშუალება მოხდეს პარალელური ალგორითმების შესრულება ენის ფარგლებში.

ფუნქციონალების გამოყენება პროგრამირების ენებში იძლევა მთელ რიგ უპირატესობებს:

- მათი მეშვეობით შესაძლებელია აიგოს პროგრამები უფრო მსხვილი მოქმედებებისაგან (ვიდრე ფუნქციების მეშვეობით);
- უზრუნველყოფენ ასახვის მოქნილობას;
- ფუნქციის განსაზღვრება შეიძლება არ იყოს დამოკიდებული ფუნქციის სახელთან (ფუნქციის განსაზღვრება `lambda` გამოსახულებით);
- ფუნქციონალების საშუალებით შეიძლება საშედეგო ფორმების მართვა;
- ფუნქციონალის პარამეტრი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც გარდაქმნის ფუნქციის ელემენტებს;
- ფუნქციონალები საშუალებას იძლევიან მოხდეს ფუნქციათა სერიის ფორმირება საერთო მონაცემებიდან;
- ურთიერთდაკავშირებული ფუნქციების ნებისმიერი სისტემა შეიძლება გარდაიქმნას ერთ ფუნქციად, უსახელო ფუნქციების გამოძახებით.

როგორც ვნახეთ, `map`-ფუნქციონალები ისე ახდენენ გამოთვლებს, რომ პირველი არგუმენტით მოცემული ფუნქცია გამოითვლება მეორე არგუმენტით მოცემულ სიის თითოეულ წევრზე (პირველი ჯგუფის ფუნქციონალებისას), ან მეორე არგუმენტით მოცემულ სიასა და მის კუდებზე (მეორე ჯგუფის ფუნქციონალებისას), ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ `map`-ფუნქციონალები თავისი ბუნებით არიან “პარალელურები”. საჭიროა მრავალპროცესორიანი კომპიუტერისთვის ენის კომპილატორი შეიქმნას ისე, რომ შესაძლებელი იყოს ფუნქციის გამოთვლა ყოველ არგუმენტზე ჩატარდეს სხვადასხვა პროცესორზე. თითოეული გამოთვლა მოხდეს დამოუკიდებლად პროცესორზე, რომელიც დაუბრუნებს შედეგს `map`-ფუნქციონალს იმ რიგის მითითებით, რომლითაც მოხდა მისი გამოძახება. უფრო ზუსტად, პირველი ჯგუფის ფუნქციონალების დროს პროცესორს გადაეცემა ფუნქციის სახელი და ის სია, რომელზეც მოქმედებას ასრულებს, ხოლო მეორე ჯგუფის ფუნქციონალების დროს – ფუნქციის სახელები და გამოთვლილი კუდები. პროცესორი გამოთვლების შედეგს ამ გამოთვლის ნომრის მითითებით დაუბრუნებს `map`-ფუნქციონალს, და განთავისუფლდება თუ არა, შეასრულებს შემდეგ გამოთვლებს. ცხადია, ეს პროცესი არ იქნება დამოკიდებული კომპიუტერში პროცესორების რაოდენობაზე.

მიგვაჩნია მიზანშეწონილად, რომ თანამედროვე პროცესდურული და ობიექტზე ორიენტირებული ენები უნდა გაფართოვდნენ `map`-ფუნქციონალებით და სწორედ ეს ფუნქციონალები უნდა გახდნენ ამ ენების “გაპარალელების” საშუალებები. ამასთან, უნდა მოხდეს თითოეული ტიპის `map`-ფუნქციონალის გადატვირთვა ისე, რომ მეორე არგუმენტად შეიძლება გამოყენებული იყოს სია, მასივი (მთელი და ნამდვილი რიცხვების), სტრიქონი, ფაილი და მომხმარებლის მიერ განსაზღვრული ტიპიც. `map`-ფუნქციონალების გამოყენებით ნებისმიერი პარალელური ალგორითმის ჩაწერა შესაძლებელია.

პარალელური გამოთვლების შესრულება მრავალპროცესორიან კომპიუტერებზე მოგვცემს მთელ რიგ უპირატესობას ინფორმაციის ძიების ამოცანებში. ინფორმაცია, წარმოდგენილი ქსელებით, ადვილად წარმოდგება `LISP`-ის სიების საშუალებით [1]. მათზე სტანდარტული ძიების ალგორითმების ნაცვლად, როგორებიცაა პირდაპირი გზით გავლა, უკუ

მიმართულებით გავლა და გავლა ბოლო რიგით [7] ნაცვლად, შეიძლება რეალიზებული იყოს ძიება ტალღური პრინციპით. ტალღური ძიების მეთოდით შესაძლებელია ძიება მოხდეს წვეროდან პირველ დონეზე. თუ მოიძებნა შედეგი, პროცესი დამთავრდება, თუ არა და, ძიება გაგრძელდება ყველა ტოტის მეორე დონეზე. თითოეული ტოტისთვის კი ცალკეული პროცესორების გამოყოფილი. ასე, რომ ვინაიდან პარალელური სტრუქტურები გვაქვს, ერთდროულად, პარალელურად ხდება ძიება.

ასეთი ტიპის ამოცანაა, მაგალითად, ბუნებრივი ენის ლექსიკონში სიტყვების ძებნა, როცა ენის სემანტიკური ქსელი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს ცალკეულ ხეებად. ძებნა შეიძლება მოხდეს ცალკეული პროცესორების მიერ ცალკეულ ხეებში, რითაც შესაძლებელია მკვეთრად შემცირდეს ძებნის პროცესისთვის საჭირო დრო.

## პარალელური დაპროგრამება ფუნქციონალური დაპროგრამირების მეთოდებით

ნ. არჩვაძე, ლ. შეწირული  
რეზიუმე

ნახვენებია, როგორ შეიძლება LISP-ზე, რომელიც ფუნქციონალური პროგრამირების ენაა, მოხდეს პარალელური გამოთვლების ორგანიზება. პარალელური გამოთვლების შესაძლებლობა განპირობებულია მაღალი რიგის ფუნქციების-ფუნქციონალების არსებობით. საჭიროა არსებული სინტაქსისა და სემანტიკის ფარგლებში შეიცვალოს map-ფუნქციონალების ინტერპრეტაცია ისე, რომ შესაძლებელი იყოს გამოთვლების თითოეული ნაწილის ცალკეულ პროცესორზე შესრულება (იგულისხმება, რომ კომპიუტერი მრავალპროცესორიანია). თანამედროვე პროცესორული და ობიექტზე ორიენტირებული ენების map-ფუნქციონალების ტიპის ფუნქციონალებით გაფართოება საშუალებას მისცემს მომხმარებლებს ჩაწერონ პარალელური ალგორითმები

### ლიტერატურა

1. ნ.არჩვაძე, მ.ფხოველიშვილი, ლ.შეწირული. Data presentation by LISP structures. მეცნიერება და ტექნოლოგიები, 2008, №3.
2. პროგრამირების ენა Objective Caml-ის აღწერა: <http://caml.inria.fr/pub/docs/oreilly-book/html/index.html>
3. საიტი, რომელზეც განთავსებულია თავისუფალი გავრცელებისთვის სისტემა Clisp-ის რეალიზაცია (clisp-2.29-win32.zip) <ftp://ftp.gnu.org/gnu/clisp/release/2.29/>
4. Archvadze N., Pkhovelishvili M. The issue of universal programming. "Science and Technologies". №7-9, 2003, 49-52.
5. Лавров С., Силагадзе Г. Автоматическая обработка данных – Язык Лисп и его реализация. Наука, Москва, 1978.
6. Интернет университет информационных технологий. <http://www.intuit.ru> Курсы: Введение в программирование на Лиспе, Основы функционального программирования.
7. Кнут. Искусство программирования. Том 1.
8. П.Хендерсон. Функциональное программирование. Применение и реализация. Москва: "Мир", 1983.
9. Хьювенен Э., Сеппанен Й. Мир Лиспа., т.1,2, Москва: "Мир", 1990.

## CONSTRUCTIONS OF UNKNOWN EQUI-STRONG CONTOURS OF MIXED PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY WITH PARTIALLY UNKNOWN BOUNDARIES.

N. Odishelidze

**Introduction.** In the plate with a hole it is important to investigate the concentration of stresses near the hole contour. The tangential-normal stresses can reach at some point such values that cause destruction of plates or the formation of plastic zones near the hole. Proceeding from the above-said, the following problem was posed: Given load applied to the plate's boundary, it is required to choose such hole shape at which boundary the maximum value of tangential normal stress would be minimal in comparison with the all other holes. It is proved that such condition is valid provided that tangential normal stress is constant at that hole. As is known, such holes are called equi-strong ones.

In the plane theory of elasticity for solving the problems of finding full-strength contours, the most effective turned out the methods of boundary value problems of the theory of analytic functions (the problems of linear conjugation, Riemann-Hilbert, Dirichlet, etc.).

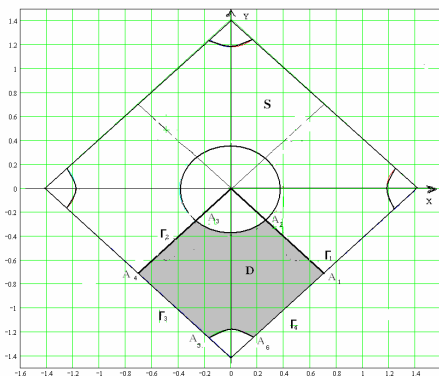
Problems of finding equi-strong holes for an infinite plane were considered by N. B. Banichuk, Cherepanov G.P, Vigdergauz S B, Neuber N and other, for the case where tensile or compressive stress act at infinity [1,2,7,10,13].

Cherepanov G.P proved that the stress concentration of plate weakened by hole with equistable contour is less than 40% of stress concentration of a plate weakened by circular hole with the same strength.

The problems of equistable contours for finite doubly-connected domains bounded by broken lines and a sought smooth contour were considered by R. Bantsuri and Isaxanov and others. [3, 4,5,6, 11,12]

In our report we consider the axially symmetric problem for finite doubly-connected domains which reduce to the simple-connected domains to the same type problem. To solve these problems it is used the function theory of complex variable. It is carried out numerical analysis of solutions and corresponding graphs are constructed.

**Problem Formulation and Solution Technique .** Let an isotropic elastic body on the plane  $z=x+iy$  occupies a double connected domain  $S$ , whose external boundary is a square boundary whose diagonals lie at the coordinate axes  $OX$  and  $OY$ , the internal boundary is required equistable contour, whose symmetric axes are the quadrate diagonals. In addition the quadrate vertices are cut by equal unknown full-strength arcs.



(Fig.1).

The length of quadrate sides of the broken line is assumed to be equal  $2a$ . It is supposed that absolutely smooth rigid stamps with rectilinear bases, enclosed with a force  $P$ , are attached to each link of the external boundary of broken line.

Under these assumptions the normal displacements of each link of external boundary of broken line  $v_n = v = const$ . Unknown parts of the boundary are free from outer actions. Tangential stresses  $\tau_{ns} = 0$  along the entire boundary of the domain  $S$

**Consider the problem:** Find the shape of the unknown parts of boundary and the state of stress of the given body such that the tangential normal stress  $\sigma_s$ , arising at it would take the constant value  $\sigma_s = K = const$ .

Since the problem is axially symmetric, then to investigate the state problem, it is sufficient to consider the curvilinear hexagon  $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$  which be denoted by D. The  $A_1, A_4$  are the middle points of square sides. The normal displacements and the tangential stresses are equal to zero  $v_n = \tau_{ns} = 0$  at each segment  $[A_1, A_2], [A_3, A_4]$ .

Let introduce the following notations  $\Gamma_1 = A_1 A_2, \Gamma_2 = A_3 A_4, \Gamma_3 = A_4 A_5, \Gamma_4 = A_5 A_6, \gamma_1 = A_2 A_3, \gamma_2 = A_5 A_6, \Gamma = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j$ . Since the plate is in the equilibrium state and  $A_1 A_2 \parallel A_4 A_5, A_3 A_4 \parallel A_6 A_1$ , then the main bending moments satisfy the condition  $\int_{\Gamma_1} \sigma_n ds = \int_{\Gamma_2} \sigma_n ds = \int_{\Gamma_3} \sigma_n ds = \int_{\Gamma_4} \sigma_n ds = \frac{P}{2}$ .

The boundary conditions are

$$v_n = \begin{cases} 0, & t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ v & t \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \end{cases} \quad (1)$$

$$\tau_{ns} = 0, t \in \Gamma \cup \gamma, \quad (2)$$

$$\sigma_n = \frac{P}{2}, t \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \sigma_s = K, t \in \gamma \quad (3)$$

On the basis of the well-known Kolosov-Muskelishvili's formulas [9], the problem reduces to finding the functions  $\psi, \varphi$  which are holomorphic in the domain D with the following conditions

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} \left( \chi \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \psi(t) \right) = 2\mu v_n(t), t \in \Gamma, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} \left( \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \psi(t) \right) = C(t), t \in \Gamma, \quad (5)$$

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = B(t), t \in \gamma, \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \varphi'(t) = \frac{\sigma_n + \sigma_s}{4} = \frac{K}{4}, t \in \gamma, \quad (7)$$

where  $\chi, \mu$  - are elasticity constants,  $C(t), B(t)$  are piecewise - constant functions,  $\alpha(t)$  - is the angle formed between the external normal  $n$  to contour and the abscissa axis Ox.

$$\alpha(t) = \alpha_k, t \in \Gamma_k, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{4}, \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{3\pi}{4}, \alpha_5 = \frac{5\pi}{4}, \alpha_6 = \frac{7\pi}{4}. \quad (8)$$

$$C(t) = \operatorname{Re} \left( e^{-i\alpha(t)} B(t) \right), \quad B(t) = \frac{1}{D(1-\nu)} \left( \int_{A_1}^t \sigma_n(t_0) e^{i\alpha(t_0)} ds_0 - \frac{P}{2} e^{4i} \right)$$

Under the following assumptions  $|\varphi'(z)| < M|z - A_k|^{-\delta_k}, |\psi(z)| < M|z - A_k|^{-\delta_k}$ , where

$0 \leq \delta_k < \frac{1}{2}, k = 5, 6. M > 0$  and after some transformations it is proved that  $\varphi(z)$  is a linear function:

$\varphi(z) = \frac{K}{4} z$ . Substituting the values  $\varphi(t), C(t), B(t)$  into the boundary conditions (5)- (6), one gets the following problem

$$\operatorname{Re} \left[ e^{-i\alpha(t)} \left( \frac{K}{2} t + \overline{\psi(t)} \right) \right] = \begin{cases} 0, & t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \frac{P}{2}, & t \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases} \quad (9)$$

$$e^{-\frac{\pi}{4}i} \left( \frac{k}{2} t + \overline{\psi(t)} \right) = \begin{cases} 0, & t \in \gamma_1 \\ -(1+i) \frac{P}{2} & t \in \gamma_2 \end{cases} \quad (10)$$

where  $k = \frac{M_0}{D(1-\nu)}$ ,  $P = \frac{M}{D(1-\nu)}$ .

Let the function  $z = \omega(\zeta)$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$  maps conformally the upper half plane  $\text{Im}\zeta > 0$ . onto the domain  $S$ . It is assumed,  $a_k = \omega^{-1}(A_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ . It is assumed, that  $a_6 = 1$ ,  $a_5 = -1$ , the middle point of arc  $A_2\tilde{A}_3$  maps at  $\zeta = \infty$ .  $|\gamma_0| = 1$ ,  $\text{Im}\zeta > 0$ . Since the domain is symmetric with respect to  $OY$ , then  $-a_1 = a_4$ ,  $-a_2 = a_3$ . Denote

$$\Phi(\zeta) = \frac{k}{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \omega(\zeta) + e^{\frac{\pi}{4}i} \overline{\psi(\omega(\zeta))}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{k}{2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \omega(\zeta) - e^{\frac{\pi}{4}i} \overline{\psi(\omega(\zeta))}. \quad (11)$$

Taking into account (11), after some transformations of problem (9)-(10) it is reduced to the following problem:

$$\Phi(\xi) + \overline{\Phi(\bar{\xi})} = \begin{cases} 0, & \xi \in (-\infty, -a_2) \cup (a_1, \infty) \\ -P, & \xi \in (-a_1, 1) \end{cases}, \quad \Phi(\xi) - \overline{\Phi(\bar{\xi})} = \begin{cases} 0, & \xi \in (-a_2, -a_1) \\ (P-2ak)i, & \xi \in (1, a_1) \end{cases} \quad (12)$$

$$\Psi(\xi) + \overline{\Psi(\bar{\xi})} = \begin{cases} 0, & \xi \in (a_1, a_2) \\ P-2ak, & \xi \in (-a_1, -1) \end{cases}, \quad \Psi(\xi) - \overline{\Psi(\bar{\xi})} = \begin{cases} 0, & \xi \in (-\infty, -a_1) \cup (a_2, \infty) \\ -Pi, & \xi \in (-1, a_1) \end{cases} \quad (13)$$

Solutions of boundary problems (12), (13) are given by Keldysh-Sedov's formula

$$\Phi(\zeta) = \frac{X_1(\zeta)i}{2\pi} \left[ \int_{-a_1}^{a_1} \frac{Pd\xi}{X_1(\xi)(\xi-\zeta)} - 2ak \int_1^{a_1} \frac{d\xi}{X_1(\xi)(\xi-\zeta)} + C \right], \quad (14)$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{X_2(\zeta)}{2\pi i} \left[ \int_{-a_1}^{a_1} \frac{Pd\xi}{X_2(\xi)(\xi-\zeta)} - 2ak \int_{-a_1}^{-1} \frac{d\xi}{X_2(\xi)(\xi-\zeta)} - C \right], \quad \text{Im}\zeta > 0$$

where

$$X_1(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta+a_4)(\zeta-1)}{(\zeta+a_1)(\zeta-a_1)}}, \quad \text{Im}\zeta > 0, \quad X_2(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta+1)(\zeta-a_4)}{(\zeta+a_1)(\zeta-a_1)}}, \quad \text{Im}\zeta > 0.$$

$X_1(\zeta)$ ,  $X_2(\zeta)$  are holomorphic function in the upper half plane and  $X_1(\infty) = X_2(\infty) = 1$ .

Since functions  $X_1(\zeta)$ ,  $X_2(\zeta)$  have singularity 0,5 order at points  $\xi = \pm a_1$ , then the function  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Psi(\zeta)$

will be restricted near points  $a_1$ ,  $-a_1$ , if and only if

$$\begin{cases} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{Pd\xi}{|X_1(\xi)|(\xi+a_1)} - 2ak \int_1^{a_1} \frac{d\xi}{|X_1(\xi)|(\xi+a_1)} + C = 0 \\ \int_{-a_1}^{a_1} \frac{Pd\xi}{|X_1(\xi)|(\xi-a_1)} - 2ak \int_1^{a_1} \frac{d\xi}{|X_1(\xi)|(\xi-a_1)} + C = 0 \end{cases}$$

After solved this system with respect to unknown parameters  $k$  и  $C$ , we get

$$k = \frac{P}{2a} \frac{\int_{-a_1}^{a_1} \frac{d\xi}{|X_1(\xi)|(\xi^2-a_1^2)}}{\int_1^{a_1} \frac{d\xi}{|X_1(\xi)|(\xi^2-a_1^2)}}, \quad C = 2ak \int_1^{a_1} \frac{d\xi}{|X_1(\xi)|(a_1+\xi)} - P \int_{-a_1}^{a_1} \frac{d\xi}{|X_1(\xi)|(a_1+\xi)}.$$

Equation of arc  $\gamma_1$  presented as

$$t = \omega(\xi_0) = \frac{\Phi_0(-\xi_0) - \Phi_0(\xi_0)}{2k} \sqrt{2} + i \frac{\Phi_0(\xi_0) + \Phi_0(-\xi_0)}{2k} \sqrt{2}, \quad \xi_0 \in (-\infty, -a_4) \cup (a_4, \infty),$$

Equation of arc  $\gamma_2$  presented as

$$t = \omega(\xi_0) = \frac{\Phi(-\xi_0) - \Phi(\xi_0)}{2k} \sqrt{2} + i \frac{\Phi(\xi_0) + \Phi(-\xi_0) - P}{2k} \sqrt{2}, \quad \xi_0 \in (-1, 1)$$

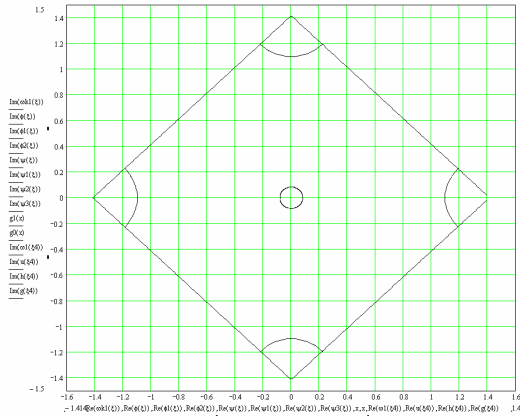
where

$$\Phi_0(\xi_0) = \frac{X_1(\xi_0)}{2\pi} \left[ \int_{-a_1}^{a_1} Pd\xi X_1(\xi) (\xi - \xi_0)^{-2ak} - 2ak \int_1^{a_1} d\xi X_1(\xi) (\xi - \xi_0)^+ + C \right]$$

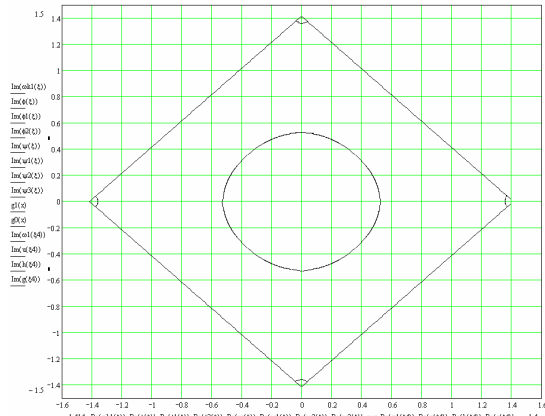
Calculations and graph's constructions for  $\gamma_1$  and  $\gamma_2$  are carried out by system Mathcad. As problem is cycle-symmetry the other parts of unknown equi-strong contours are constructed by rotation of graph  $\omega(\xi_0)$  by angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Graphs of equi-strong contours for concrete cases

$P=-10, a=1, a1=3, a4=124, K=-10.914, C=4.007$



$P=-10, a=1, a1=79, a4=104, K=-12.754, C=29.642$



## CONSTRUCTIONS OF UNKNOWN EQUI-STRONG CONTOURS OF MIXED PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY WITH PARTIALLY UNKNOWN BOUNDARIES

N. Odishelidze

### Abstract

The article considers the plane elasticity theory problem for the double-connected body, which is presented a square, weakened by unknown equi- strong hole including the origin of coordinates and it is symmetric with respect to coordinate axis. Assume the vertices of square are stated at the coordinate axis and their vicinities are cut out with the identical smooth unknown full-strength arches. It is supposed that absolutely smooth rigid stamps with rectilinear bases, enclosed with a force  $P$ , are attached to each link of the external boundary of broken line. Unknown parts of the boundary are free from outer actions. Applying apparatus of the complex variable function theory one can define the unknown full-strength contours and the body stressed state. Numerical analysis are performed and the corresponding graphs are constructed.

### ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ნაწილობრივ უცნობ საზღვრიანი შერეული ამოცანის საძიებელი თანაბრად მტკიცე კონტურების აბეზა

ნ.ოდიშელიძე  
რეზიუმე

გამოკვლეულია ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ამოცანა ორად ბმული არისათვის  $S$ , კვადრატისათვის, შესუსტებულს თანაბრად მტკიცე ხვრელით, რომელიც სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ. კვადრატის წვეროები მდებარეობენ კოორდინატთა ღერძებზე და მათი მიდამოები ამოჭრილია კოორდინატთა ღერძების სიმეტრიული ტოლი სიდიდის გლუვი რკალებით. საზღვრის წრფივ მონაკვეთებზე მოდებულია აბსოლიტურად

გლუვი მყარი შტამპები, სწორხაზოვანი ფუძეებით, რომლებზეც მოდებულია ძალა  $P$ . საძიებელი სახაზურის ნაწილები თავისუფალნი არიან გარეშე ზემოქმედებისაგან. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის აპარატის გამოყენებით განისაზღვრება სახაზურის თანაბრად მტკიცე კონტურები და სხეულის დაძაბული მდგომარეობა. წარმოდგენილია რიცხვითი ანალიზი და აგებულია შესაბამისი გრაფიკები.

## References

- [1] N. V. Banichuk. Optimality conditions in the problem of seeking the hole shapes in elastic bodies. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 41(5):920–925, 1977.
- [2] N. V. Baničuk. Optimization of forms of elastic bodies. Nauka, Moscow, 1980.
- [3] R. Bantsuri. On one mixed problem of the plane theory of elasticity with a partially unknown boundary. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 140:9–16, 2006.
- [4] R. Bantsuri. Solution of the mixed problem of plate bending for a multi-connected domain with partially unknown boundary in the presence of cyclic symmetry. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 145:9–22, 2007.
- [5] R. D. Bantsuri. Some inverse problems of plane elasticity and of bending of thin plates. In *Continuum mechanics and related problems of analysis (Tbilisi, 1991)*, pages 100–107. “Metsniereba”, Tbilisi, 1993.
- [6] R. D. Bantsuri and R. S. Isakhanov. Some inverse problems in elasticity theory. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 87:3–20, 1987.
- [7] G. P. Cherepanov. Inverse problems of the plane theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 38(6):915–931, 1975.
- [8] Keldysh M.V. and Sedov L.D. The effective solution of some boundary problems for harmonic functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 16(1):7–10, 1937. in Russian
- [9] N. I. Muskhelishvili. *Singular integral equations*. Dover Publications Inc., New York, 1992. Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics.
- [10] H. Neuber. The optimization of stresses concentration. In *Continuum mechanics and related problems of analysis*, pages 375–380, Moscow, 1972. Nauka.
- [11] N. Odishelidze and F. Criado-Aldeanueva. A mixed problem of plane elasticity for a domain with a partially unknown boundary. *International Applied Mechanics*, 42(3):342–349, 2006.
- [12] N. Odishelidze and F. Criado-Aldeanueva. Some axially symmetric problems of the theory of plane elasticity with partially unknown boundaries. *Acta Mech* 199, 227–240 (2008)
- [13] S. B. Vigdergauz. On a case of the inverse problem of the two-dimensional theory of elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 41(5):902–908, 1977.16



**ABOUT SOME ALGORITHMS FOR SOLUTION OF SYSTEMS OF THE NONLINEAR EQUATIONS ON COMPUTING SYSTEMS WITH PARALLEL PROCESSORS**

**T.Davitashvili, H.Meladze**

**Keywords:** parallel algorithms, multiprocessor systems, nonlinear equations

1°. Let's denote through the  $R^n$  real n-dimensional linear space and consider the equation

$$F(X) = 0, \tag{1}$$

where  $X = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ , a  $F : R^n \rightarrow R^n$  - is the given operator:  $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))^T$ .

In these notations the problem, being a subject of our consideration, is a problem of finding the solution of nonlinear system of equations (1).

Let's enter the following notation  $Y^j = F(X^j)$ . Function  $F(X)$  we will replace by affine mapping  $L(X) = C + AX$ , where  $C = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$  and the matrix  $A$  is:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

The vector  $C$  and the matrix  $A$  are chooses such, that the following conditions were satisfied:

$$L(X^j) = F(X^j), \quad j = \overline{0, n}. \tag{2}$$

Let's demand that  $\det(H_{X_{0,n}}) \neq 0$ , where

$$H_{X_{0,n}} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \text{and } X^j = (x_1^j, \dots, x_n^j) \in R^n, \quad j = \overline{0, n}.$$

This condition is equivalent to the following condition: for each  $j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , the vectors  $X^j - X^i$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $i \neq j$ , are linearly independent [1].

**Theorem 1.** *Let  $X^0, \dots, X^n \in R^n$ ,  $Y^0, \dots, Y^n \in R^n$ . Then there exists the unique affine function  $L(X) = C + AX$ , where  $C \in R^n$ ,  $A \in L(R^n, R^n)$ , such, that the equalities  $L(X^j) = Y^j$ ,  $j = \overline{0, n}$ , take place if and only if, when  $\det(H_{X_{0,n}}) \neq 0$ . Thus the matrix  $A$  is non-degenerate if and only if, when  $\det(H_{Y_{0,n}}) \neq 0$ .*

Note, that during construction of affine functions one can consider the following cases:  $A$  is diagonal,  $A$  - two-diagonal matrix,  $A$  - three-diagonal matrix and etc.  $A$  is a full matrix. Depending on a choice of a matrix we receive different iterative methods. First two cases are attractive that it is possible to write obvious formulas for calculation the new approximations.

2°. Let's consider the case, when  $A$  is the diagonal matrix. We will consider an iterative method for which realization it is required  $3n$  parallel processors. Let are known  $X_1^0, X_2^0, X_3^0$  initial approximations to a root of the equation (1). On  $j$ -th processor the vector  $X_j^{k+1}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ,  $k$  - iteration number) by the following formula is calculated:

$$X_j^{k+1} = X_j^k - F(X_j^k, X_{j+1}^k)^{-1} F(X_j^k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3}$$

$F(X_j^k, X_{j+1}^k)$  is the diagonal matrix:

$$F(X_j^k, X_{j+1}^k) = \text{diag} \left( \frac{f_i(X_j^k) - f_i(X_{j+1}^k)}{(x_i)_j^k - (x_i)_{j+1}^k} \right)_{i=\overline{1, n}}.$$

$j = 1, 2, 3$ , sums  $j + 1, j + 2$  (in indexes) are taken by module 3, and  $(x_i)_j^k, i = \overline{1, n}$  are the components of the vector  $X_j^k$ .

Note, that by formula (3) it's possible to calculate in parallel the components  $(x_i)_j^{k+1}, i = \overline{1, n}$ , of each vector  $X_j^{k+1} (j = 1, 2, 3)$  on  $n$  processor, so as a whole the iterative process (3) can be realized on  $3n$  processors.

**Theorem 2.** *Let there exists constants  $B_0, K, \eta_j^0, j = 1, 2, 3$ , such that the following conditions are satisfied:*

1. *the operators  $F(X_j^0, X_{j+1}^0), j = 1, 2, 3$ , where  $X_j^0, j = \overline{1, 3}$ , are initial approximations, have the inverse and  $\|F(X_j^0, X_{j+1}^0)^{-1}\| \leq B_0$ ;*
2. *the estimations  $\|X_j^1 - X_j^0\| \leq \eta_j^0, \|X_j^1 - X_{j+1}^0\| \leq \eta_{j+1}^0, j = 1, 2, 3$  are known;*
3.  $\|F(X, Y) - F(X, Z)\| \leq k\|Y - Z\|, X, Y, Z \in S$ ,  
*where  $S = \{X : \|X - X_1^0\| \leq 2\eta_0\}$ ,  $\eta_0 = \max_j |\eta_j^0|$ ;*
4. *for constants  $B_0, K, \eta_j^0, j = 1, 2, 3$ , the inequality is hold*

$$h_0 = B_0 K (\eta_1^0 + \eta_2^0 + \eta_3^0) < 1/4.$$

*Then the equation (1) has the unique solution  $X^*$ ,  $X^*$ , to which converges the sequences  $X_j^k (j = 1, 2, 3)$  and*

$$\|X_j^k - X^*\| \leq \frac{\eta_0}{4h_0} 2^{-(k-1)} (4h_0)^{2^k}, k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

3°. Let's consider the case, when  $A$  - twodiagonal matrix (contains the main and below its diagonals). For realization of this algorithm it is required  $4n$  parallel processors. Let are known  $X_j^0, j = \overline{1, 4}$ , initial approximations to a root of the equation (1). On  $j$ -th processor the vector  $X_j^{k+1} (j = \overline{1, 4}, k$  - iteration number) by the following formula is calculated:

$$X_j^{k+1} = X_j^k - F(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^k)^{-1} F(X_j^k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Sums in indexes are taken by module 4.

For parallel calculation of  $x_i^{k+1}, i = \overline{1, n}$ , we have

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \sum_{l=1}^i \frac{-f_l(X^k)}{(a_{ll})^k} \prod_{j=l+1}^i \frac{-(a_{j,j-1})^k}{(a_{jj})^k}, \quad (6)$$

where  $(a_{ij})^k$  are the elements if matrix  $F(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^k)$ . In (6) when  $j > i, \prod_{j=l+1}^i \equiv 1$ .

It is possible to prove the correctness of this method and existence of the unique solution of the initial problem under certain conditions. The following theorem is valid.

**Theorem 3.** *Let there exists constants  $B_0, K, \eta_j^0, j = \overline{1, 4}$ , such that the following conditions are satisfied:*

1. *the operators  $F(X_j^0, X_{j+1}^0, X_{j+2}^0)$ , where  $X_j^0, j = \overline{1, 4}$ , are initial approximations, have the inverse and  $\|F(X_j^0, X_{j+1}^0, X_{j+2}^0)^{-1}\| \leq B_0$ ;*
2. *the estimations  $\|X_j^1 - X_{j+l}^0\| \leq \eta_{j+l}^0, l = 0, 1, 2, j = \overline{1, 4}$  are known;*
3.  $\|F(Z_1, Z_2, Z_3) - F(Z_2, Z_3, Z_4)\| \leq K\|Z_1 - Z_4\|, Z_j \in S, j = \overline{1, 4}$ ,

$$\text{where } S = \{X : \|X - X_1^0\| \leq 2\eta_0\}, \quad \eta_0 = \max_j \{\eta_j^0\}$$

4. for constants  $B_0, K, \eta_j^0, j = \overline{1,4}$ , the inequality is hold

$$h_0 = B_0 K (\eta_1^0 + \eta_2^0 + \eta_3^0 + \eta_4^0) < 1/6.$$

Then the equation (1) has the unique solution  $X^*$ , to which converges the sequences  $X_j^k$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) and

$$\|X_j^k - X^*\| \leq 2^{-(k-1)} (4h_0)^{2^{k-1}} \eta_0, k = 1, 2, \dots, j = \overline{1,4}.$$

The method (5) can be realized on  $4n$  parallel processors.

The order of convergence of this parallel methods is equal to 2 (the order of corresponding sequential methods is 1.618...), and the area of convergence is increases in dependence of choice of matrix  $A$ , that in turn defines the number of initial data.

These methods can be applied at calculation of problems of gas dynamics, hydrodynamics, and also many other applied problems.

Note, that some parallel iterative methods for the nonlinear equations are considered in articles [2-10].

#### ABOUT SOME ALGORITHMS FOR SOLUTION OF SYSTEMS OF THE NONLINEAR EQUATIONS ON COMPUTING SYSTEMS WITH PARALLEL PROCESSORS

T.Davitashvili, H.Meladze

**Resume.** For numerical modeling of difficult applied problems now is perspective to use the computing systems with parallel data processing. In the given work some parallel iterative methods for the solution of nonlinear systems of the equations for cluster systems are considered.

#### არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგიერთი ალგორითმის შესახებ პარალელურ პროცესორებთან გამოთვლულ სისტემებზე რეზიუმე

როელი გამოყენებითი ამოცანების რიცხვითი მოდელირებისათვის გამოიყენება მრავალპროცესორიანი გამოთვლული სისტემები მონაცემთა პარალელური დამუშავებით. სწორედ ასეთი სისტემისათვის ნაშრომში აგებულია და გამოკვლეულია არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგიერთი საიტერაციო მეთოდი.

#### References:

1. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными // М.: "Мир" – 1975 – 558 стр.;
2. F.Criado, T.D.Davitashvili. On Asynchronous Iterative Methods for the Solution of Non-linear Equations and Systems of Equations for Multiprocessors // Parallel Algorithms and Applications – 1997– vol.12 – pp.253-263 ;
3. F.Criado, T.D.Davitashvili, H.V. Meladze, N.M.Skhirtladze. On One Numerical Method for Solving Some Self-similarity Problems of Gas Dynamics on a Multiprocessor // Intern. J. Computer Math. – 2000 – vol.74 – pp.63-85 ;
4. Т.Д.Давиташвили, Г.В.Меладзе, В.Г.Саакян, П.А.Церетели. Итерационные методы решения граничной задачи для системы ОДУ первого порядка с параметром для кластерных систем // Вычислительные методы и программирование – 2005 – т.6, номер 2 – с.116-125.
5. F.Criado, T.Gachechiladze, H.Meladze. Inverse Spline-interpolation for Numerically Solving Piston Problem with Isothermic Gas Compression and Constant Velocity // Inter. J. Computer Math. – 1999 – vol.71 – pp.83-95 ;
6. Gal Sh., Miranker W.L. Optimal Sequential and Parallel Search for Finding a Root // J. of Combinatorial Theory (A) – 23 – 1977 – p.1-14 ;
7. Gerard H. Baudet. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessor // J. of ACM – v.25, №2 – April 1978 – pp.226-244 ;
8. Miranker W.L. A Servey of Parallelizm in Numerical Analysis // SIAM Review – vol.13, №4 – 1971 – pp.524-547 ;
9. Miranker W.L. Parallel Methods for Solving Equations // Math. and Computers in Simulation – XX – 1978 – pp.93-101 ;
10. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем // М.: "Мир" – 1991 – 365 стр. ;

**OBJECT-ORIENTED PROGRAMMING ON LISP BASIS**  
**N. Archvadze, M. Pkhovelishvili**

Functional languages [7, 6] for the present stage of their development have reached the results, which allow considering them as an alternative to the traditional programming languages.

As it is known, in the imperative programming execution is driven by explicit sequencing of operators. In functional programming, the sequence of operations is defined by the required computations. Unlike these programs, object-oriented programming can be thought of as a data driven. Application of objects leads to the new organization of programs into classes and objects connected with them. Class comprises data and operators – methods, which describe possible activities of the class.

LISP [8, 5] is a programmable programming language and therefore we have shown [1] how the LISP-nucleus - on which the universal language is possible to build - could be singled out. In [2], in the LISP database, we have considered the presentations facilities.

Now let's see how realization of the Object Oriented programming (OOP) schemes could be executed so that we could stay in the frame of the functional programming: to this effect we shall take model of OO language, which should be put into LISP and by means of which we represent the typical notions of OO programming in fundamental abstractions of functional programming.

For organization of heredity, it is necessary to define the discrepancies between the models of generalized functions and exchange of messages. Objects have the properties, objects send the messages, and they can inherit properties and methods.

Generally, OO programming is organization of the programs in the terms of methods, classes, exemplars and heredity. The advantage of such organization is that changing the program is very easy. For example, if we want to change the means of manipulation on any object of any class, we have to change only the method of this class. In case we need to create the object, which bears the resemblance to the given one, but differs from it by some properties, we can create the sub-class of that class and make some changes in its properties. Such changes do not cause the changes in code.

There are different means for OO program presentation in LISP. One of them is presentation of objects by HASH-tables [4]. During such realization objects are not divided into classes and instances. Instance can be considered only as the class with the single parent.

In [6] the OO program vector realization is used. At that moment division into classes and instances becomes real, though the instances can not be changed into class by the simple change of its properties.

If we use the list of LISP properties, it would be possible to create the following model of OO programming, which indicates relationship between functional programming and object-oriented programming:

```
(defun classes (cl) (cond
; (cl (cons (cdar cl) (classes (cdr cl))))))
; development of formula of argument classes from definition of
; method parameters
; Nil – arbitrary class
```

```
(defun argum (cl) cond
(cl (cons (caar cl) (argum (cdr cl)))) )
; Development of list of the argument names from definition of
; method parameters
```

```
(defun defmet (Fmn c-as expr)
(setsf (get FMN 'category) METHOD )
(setq ML (cons (cons (cons FMN (classes c-as))
(list 'lambda (argum c-as0 expr) ) ML))
FMN )
; statement method and exfoliation of its definition
; for convenient apposition with argument classes
```

```
; (defun defcl (NCL SCL FCL )
; name, superclass and fields/slots of the class
(setq ALLCL (cons NCL ALLCL))
(set NCL (append FCL SCL) )
```

```
; value of the class is the list of its fields,
; possibly, with the values

(defun ev-cl (vargs) (cond

; development of format of the actual arguments for searching
; of the method of their processing

(vargs (cons (cond
  (( member (caar vargs) ALLCL) (caar vargs) ) )
  (ev - cl (cdr vargs) ) ) ) )
; Nil if not a class
```

```
(defun m-assoc (pm meli) (cond (( equal
(caar meli) pm (cdr meli))))))

; Search of the suitable method, appropriate to the
; format of data classes
```

```
(defun method (MN args & optiona; c)
  (apply m-assoc (cons mn (ev cl args) ) ML)
  args c )

; If the method has not been found, in the program should be
; executed reduction
; of parameters to the required class
```

```
(defun instance (class &optional cp) (cond

; like Let unnamed copy of the context
(class (cond ( ( atom (car class) ) (instance
(cdr class) cp) )
  (( assoc (caar class) cp) (instance
(cdr class) cp) )
  (T (instance (cdr class) (cons (car class)
cp) ) )
) ) ) cp)
```

```
(defun slot (obj fld) assoc fld obj))

; value of the object field
```

It becomes necessary to add new branches to the Lisp interpreter.

In such case object instances could be described as follows:

```
(defclass ob ( ) (f1 f2 ....))
```

which shows that each object would have the field-slot f1 f2 ... (slot is the field of the record or the list of properties). For the class presentation the general function should be called:

```
(setf c (make-instance 'ob))
```

For definition of the field value it is necessary to use the special function:

```
(setf (slot-value c) 1223).
```

For description of slot, it is necessary to provide it with the name and with the field of properties. The properties of the field are specified as the key parameters of the function. That allows defining initial values. Change of such slot should be available for every instance.

As we can see, conceptually OO programming is nothing else but paraphrasing the Lisp ideas. OO programming is just what the Lisp was able to do from the very beginning. There is nothing unexpected in transition from functional style to the one of OO programming. Only the slight concretization of selective mechanisms of functional objects' branches takes place.

Generally, impossibility of effective realization of implementation of the first generation functional languages is considered to be the main counter-argument against their usage, as they are based on the interpretation and dynamic type control. Such arguments are unacceptable for contemporary functional languages.

The language of the last generation functional programming is Objective Calm [3] which has been processed at INRIA (Institute of Informatics and Automation, France). Objective Calm has a wide range of the

well known properties of traditional imperative languages and constructions of language C. As evident from the name, it supports object oriented programming; particularly it is characterized by parameterized polymorphism. Let us consider it closer:

Existence of functionals allows calculation of a number of constructions. For example, function:

let o f g = fun x -> f (g x)

returned the function, which is the composition of the parameters. What type has in that case the parameters and the result of function – o? The notion of Objective CML polymorphism will help us with making the situation clear.

Thus, it is impossible to pin-point the types of o-parameters and results, although coming out of syntax it is possible to make the following conclusions:

- Yielding value resulted from using function **o** is the function (as in is construction **fun** in its body);
- Arguments of function **o** are the functions (as they are invoked in the body).
- The result of the function **g** is the type of argument **f** (it is not defined in the language operation of bringing down to types);
  - Result of function **o** function result type is the same as **f** result type;
  - Result of function **o** function argument type is the same as **g** argument type.

In this example description of function has been compared to its type, which was defined by the given typical expression. Typical images are the syntax constructions of Objective CAML. If there is even one variable in the typical image, this type should be called polymorphism. Just this type of polymorphism is called Parametric. Value type can be parameterized by its sub-value, while polymorphism is the main property of the object-oriented programming.

Polymorphism and comparing to instances allows increasing sharply the language facilities through data structures and processing procedures.

Generally it is difficult to contend that functional languages are the best choice at any situation. For instant, they could not be recommended for writing the drivers. It is accepted that functional languages are less effective than C and FORTRAN, but at the same time it is not taken into account, that functional languages are more expressive than object-oriented languages, and polymorphism has the same degree of generalization as C++ patterns. As the difference between the imperative and functional languages remains non-existence of variables, although it should be noted that Objective CAML is not the pure functional language. Imperative properties (such as assignment and variables) do not do much for completeness of the language, but often facilitates writing the program.

Finally, it should be noted, that organization of polymorphism by means of inheritance causes heavy expenses: first, it is necessary to write large volume program code: describe classes, virtual function-members, hereditary classes and virtual function-members. Secondly, the result could be reached only by the virtual functions. In the other words, modeling of polymorphism should be done while functional is already put in and therefore is more elegant and effective.

Coming out of the reasons above we consider that contemporary functional languages are not able to provide sufficient quantity of libraries and ready functions, as imperative and object oriented do. Therefore, unfortunately, functional languages failed to become the main instrument for creation commercial software.

## OBJECT-ORIENTED PROGRAMMING ON LISP BASIS

**N. Archvadze, M. Pkhovelishvili**

### Resume

The model of Object-oriented programming through the list of the LISP properties and the parameterized polymorphism of the last generation functional programming language - Objective CAML is considered. It is shown, that conceptually object –oriented programming – is nothing else than paraphrase of the ideas of the functional programming language - LISP. OO programming is just what the Lisp was able to do from the very beginning. There is nothing unexpected in transition from the functional style to the one of OO programming. Only the slight concretization of selective mechanisms of functional objects' branches takes place.

**Reference**

10. Archvadze N., Pkhovelishvili M. The issue of universal programming. "Science and Technologies". №7-9, 2003, 49-52.
11. Archvadze N., Pkhovelishvili M. Shetsiruli L. Data presentation by LISP structures. "Science and Technologies". №3, 2008.
12. Graham P. ANSI Common Lisp
13. Description of programming language Objective Caml:  
<http://caml.inria.fr/pub/docs/oreilly-book/html/index.html>
14. Лавров С., Силагадзе Г. Автоматическая обработка данных – Язык Лисп и его реализация. Наука, Москва, 1978.
15. Интернет университет информационных технологий. <http://www.intuit.ru>. Курсы: Введение в программирование на Лиспе, Основы функционального программирования.
16. П.Хендерсон. Функциональное программирование. Применение и реализация. Москва: "Мир", 1983.
17. Хьювенен Э., Сеппанен Й. Мир Лиспа., т.1,2, Москва: "Мир", 1990.

## A NUMERICAL ALGORITHM FOR A ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR TIMOSHENKO SYSTEM

V. Odisharia, J. Peradze

**Key words:** Nonlinear Timoshenko system, numerical algorithm, Jacobi iteration method, convergence of process.

From the system of Timoshenko equations given in [1], p. 24, we can obtain a one-dimensional variant of a nonlinear system which in the case of axially symmetric static deformation of a plate has the form

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1}{2} \left[ (w')^2 \right]' &= 0, \\ k_0^2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\psi' + w'') + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ w' \left( u' + \frac{1}{2} (w')^2 \right) \right]' + f &= 0, \\ \frac{h^2}{6(1+\nu)} \psi'' - k_0^2 (\psi + w') &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $k_0, E, h$  and  $\nu$  are some positive constants,  $0 < \nu < 0,5$ ,  $f = f(x)$  is the given function,  $u = u(x)$ ,  $w = w(x)$  and  $\psi = \psi(x)$  are the functions we want to define,  $0 \leq x \leq 1$ .

Let us assume that the following boundary conditions are fulfilled

$$u(0) = u(1) = 0, \quad w(0) = w(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0. \quad (2)$$

From (1) and (2) follows the formula

$$u = \frac{x}{2} \int_0^1 (w'(\xi))^2 d\xi - \frac{1}{2} \int_0^x (w'(\xi))^2 d\xi. \quad (3)$$

Applying (3), from (1) we obtain a system of equations with respect to the functions  $w$  and  $\psi$  of the form

$$k_0^2 \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\psi' + w'') + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} w'' \int_0^1 (w')^2 dx + f = 0, \quad \frac{h^2}{6(1+\nu)} \psi'' - k_0^2 (\psi + w') = 0, \quad (4)$$

which we complement with the corresponding boundary conditions

$$w(0) = w(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1) = 0. \quad (5)$$

Let us write an approximate solution of problem (4), (5) in the form

$$w_n = \sum_{i=1}^n w_{ni} \sin i\pi x, \quad \psi_n = \sum_{j=0}^n \psi_{nj} \cos j\pi x, \quad (6)$$

where the coefficients  $w_{ni}$  and  $\psi_{nj}$  are found by the Galerkin method from the system of nonlinear equations

$$\begin{aligned} k_0^2 \frac{Eh}{1+\nu} \left( j\pi \psi_{nj} + (j\pi)^2 w_{nj} \right) + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (i\pi)^2 w_{ni} \sum_{p=1}^n (p\pi)^2 w_{np}^2 - f_i &= 0, \\ \frac{h^2}{6(1+\nu)} (j\pi)^2 \psi_{nj} + k_0^2 (\psi_{nj} + j\pi w_{nj}) &= 0, \quad w_{n0} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad f_i &= \int_0^1 f(x) \sin i\pi x dx. \end{aligned} \quad (7)$$

The convergence of the Galerkin method for both the static and the dynamic one-dimensional Timoshenko system is studied in [2], [4].

Let us consider the question of solution of system (7). Since (7) implies  $\psi_{n0} = 0$ , it can be assumed that in this system the index  $j$  takes the values  $1, 2, \dots, n$ . From the second equality in (7) we obtain the relation



$$\psi_{ni} = -\frac{k_0^2 i \pi}{k_0^2 + \frac{h^2}{6(1+\nu)} (i\pi)^2} w_{ni}, \quad (8)$$

after substituting this relation in the first equality, we have

$$i\pi w_{ni} \left[ \frac{2(1-\nu)}{\frac{1}{k_0^2} + \frac{6(1+\nu)}{h^2 (i\pi)^2}} + \sum_{j=1}^n (j\pi)^2 w_{nj}^2 \right] - \frac{2(1-\nu^2)}{Ehi\pi} f_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

(9) is a system of nonlinear equations with respect to  $i\pi w_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . For its solution we use the Jacobi iteration method [3]

$$i\pi w_{ni,k+1} \left[ \frac{2(1-\nu)}{\frac{1}{k_0^2} + \frac{6(1+\nu)}{h^2 (i\pi)^2}} + (i\pi)^2 w_{ni,k+1}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (j\pi)^2 w_{nj,k}^2 \right] - \frac{2(1-\nu^2)}{Ehi\pi} f_i = 0, \quad (10)$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Here  $w_{ni,k+l}$  is the  $(k+l)$ -th iteration approximation of  $w_{ni}$ ,  $l = 0, 1$ ,  $k = 0, 1, \dots$

For fixed  $i$ , (10) is a cubic equation with respect to  $i\pi w_{ni,k+1}$ . Using the Cardano formula, we write

$$i\pi w_{ni,k+1} = \sigma_{i,1} - \sigma_{i,2}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

where

$$\sigma_{i,p} = \left[ (-1)^p \frac{s_i}{2} + \left( \frac{s_i^2}{4} + \frac{r_i^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad p = 1, 2,$$

$$r_i = \frac{2(1-\nu)}{\frac{1}{k_0^2} + \frac{6(1+\nu)}{h^2 (i\pi)^2}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (j\pi w_{nj,k})^2, \quad (12)$$

$$s_i = -\frac{2(1-\nu^2)}{Ehi\pi} f_i.$$

Let us represent system (11) as follows

$$i\pi w_{ni,k+1} = \varphi_i(1\pi w_{n1,k}, 2\pi w_{n2,k}, \dots, n\pi w_{nn,k}) \quad (13)$$

and consider the Jacobi matrix  $J = \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial (j\pi w_{nj,k})} \right)_{i,j=1}^n$ .

By virtue of (11)-(13) the diagonal terms of the matrix  $J$  are equal to zero, while for the nondiagonal terms we have

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial (j\pi w_{nj,k})} = \frac{2}{3} j\pi w_{nj,k} \frac{s_i}{\sigma_{i,1}^4 + \left( \frac{r_i}{3} \right)^2 + \sigma_{i,2}^4}. \quad (14)$$

By (14) and (12), for  $i \neq j$ , after some transformations, we write the estimate

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial (j\pi w_{nj,k})} \right| \leq \frac{4(1-\nu^2)}{Ehi\pi} |f_i| \frac{j\pi |w_{nj,k}|}{\left( \frac{2(1-\nu)}{\frac{1}{k_0^2} + \frac{6(1+\nu)}{h^2 \pi^2}} + (j\pi w_{nj,k})^2 \right)^2}. \quad (15)$$

Let us use the vector and matrix norms equal respectively to  $\sum_{i=1}^n |v_i|$  and  $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}|$  for  $v = (v_i)_{i=1}^n$  and  $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ .

It is required that for an arbitrary set of values  $w_{nj,k}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , the elements of the matrix  $J$  satisfy the condition  $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial (j\pi w_{nj,k})} \right| \leq q < 1$ . For this it is sufficient that

$$\frac{3}{8Eh\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1+\nu}{\sqrt{1-\nu}} \left( \frac{1}{k_0^2} + \frac{6(1+\nu)}{\pi^2 h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{|f_i|}{i} \leq q < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Then, as follows from the principle of compressed mappings, system (9) has a unique solution  $w_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , the iteration process (13) converges,  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{ni,k} = w_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , with the rate defined by the inequality

$$\sum_{i=1}^n i |w_{ni,k} - w_{ni}| \leq \frac{q^k}{1-q} \sum_{i=1}^n i |w_{ni,1} - w_{ni,0}|, \quad k = 0, 1, \dots$$

Applying iteration approximations for  $w_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , and using formulas (8) and also (6) and (3), we construct approximations for the coefficients  $\psi_{ni}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , and the function  $u(x)$ .

## A NUMERICAL ALGORITHM FOR A ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR TIMOSHENKO SYSTEM

**Resume.** We consider the boundary value problem for a system of nonlinear ordinary differential equations that describes the static behavior of a plate. An approximate solution is obtained using the algorithm including the Galerkin method, the convergence of which was proved by the authors previously, and the nonlinear Jacobi iteration process, the accuracy of which is discussed in this work.

### რიცხვითი ალგორითმი ტიმოშენკოს ერთგანზომილებიანი არაწრფივი სისტემისათვის

**რეზიუმე.** განიხილება სასაზღვრო ამოცანა ფირფიტის სტატიკური დეფორმაციის აღმწერი ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად გამოყენებულია ალგორითმი, რომელიც მოიცავს გალიორკინის მეთოდს, რომლის კრებადობა ადრე იყო დამტკიცებული ავტორების მიერ და იაკობის არაწრფივ იტერაციულ პროცესს, რომლის სიზუსტის საკითხი შესწავლილია მოცემულ ნაშრომში.

### References

1. Lagnese J. E., Lions J.-L., Modelling analysis and control of thin plates, Masson, Springer-Verlag, 1998.
2. Odisharia V., A generalized solution of a one-dimensional nonlinear Timoshenko system, Int. Conf. on Nonclassical Problems of Mechanics, October 25-27, Kutaisi, 2007, 137-139.
3. Ortega J., Rheinboldt V., Iterative methods of solution of nonlinear systems of equations in several variables, Mir, Moscow, 1975.
4. Peradze J., On the solution of a dynamic system of one-dimensional Timoshenko equations, Proc. Conf. on Modern Problems of Cybernetics and Applied Mathematics, December 21-23, Tbilisi, 1987, Tbilisi Univ. press, 1991, 49-52.

**იტერაციული პროცესის კრეპალობა რხევის ერთი სამგანზომილებიანი ამოცანისათვის**

**ჯ.ფერაძე, ვ. ოდიშარია**

**გასაღები სიტყვები:** კირხჰოფის განტოლება, იაკობის არაწრფივი იტერაციული პროცესი, ცლომილების შეფასება, არაცხადი სხვაობიანი სქემა.

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა

$$w_{tt} - \left( \lambda + \frac{8}{\pi^3} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad w_t(x, 0) = w^1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$w(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T,$$

სადაც  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) | 0 < x_1 < \pi, 0 < x_2 < \pi, 0 < x_3 < \pi\}$ ,  $\partial\Omega$  არის  $\Omega$  არის საზღვარი,  $w^0(x)$  და  $w^1(x)$  მოცემული ფუნქციებია, ხოლო  $\lambda > 0$  და  $T$  ცნობილი კონსტანტები.

(1) განტოლება წარმოადგენს კირხჰოფის [1] სიმის რხევის

$$w_{tt} - \left( \lambda + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} w_x^2 dx \right) w_{xx} = 0$$

განტოლების სამგანზომილებიან ანალოგს, რომელიც პირველად გამოიკვლია ს. ბერნშტეინმა. კირხჰოფის ტიპის განტოლებებს მიეძღვნა არაერთი მკვლევარის შრომები (ბიბლიოგრაფია იხ. მაგ. [2],[3]).

ჩამოვყავილობთ (1), (2) ამოცანის ამოხსნის ერთი რიცხვითი ალგორითმი. მიახლოებითი ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სასრული ჯამის სახით

$$w_n(x, t) = \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n w_{ni_1i_2i_3}(t) \sin i_1 x_1 \sin i_2 x_2 \sin i_3 x_3,$$

სადაც  $w_{ni_1i_2i_3}(t) = \frac{1}{\sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2}} \underline{w}_{ni_1i_2i_3}(t)$  კოეფიციენტებს ვპოულობთ გალიორკინის მეთოდის

გამოყენებით განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან და საწყისი პირობებიდან

$$\underline{w}_{ni_1i_2i_3}''(t) + \left( \lambda + \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^n (\underline{w}_{nj_1j_2j_3}(t))^2 \right) (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2) \underline{w}_{ni_1i_2i_3}(t) = 0, \quad (3)$$

$$\underline{w}_{ni_1i_2i_3}(0) = \frac{8}{\pi^3} \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2} \int_{\Omega} w^0(x) \sin i_1 x_1 \sin i_2 x_2 \sin i_3 x_3 dx,$$

$$\underline{w}_{ni_1i_2i_3}'(0) = \frac{8}{\pi^3} \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2} \int_{\Omega} w^1(x) \sin i_1 x_1 \sin i_2 x_2 \sin i_3 x_3 dx, \quad (4)$$

$$i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n.$$

მიღებული (3), (4) ამოცანის ამოხსნენიდან გამოვიყენოთ არაცხადი სხვაობიანი სქემა, ამ მიზნით  $[0, T]$  ინტერვალზე შემოვიღოთ ბაღე ბიჯით  $\tau = T/M$  და კვანძებით

$t_m = m\tau$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . კვანძით  $t_m$  წერტილში მიახლოებითი  $\underline{w}_{ni_1i_2i_3}(t_m)$  მნიშვნელობა

აღვნიშნოთ  $\underline{w}_{ni_1i_2i_3}^m$  - ით,  $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ .

განვიხილოთ შემდეგი სქემა

$$\frac{w_{ni_1i_2i_3}^m - 2w_{ni_1i_2i_3}^{m-1} + w_{ni_1i_2i_3}^{m-2}}{\tau^2} + \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2, j_3=1}^n \sum_{r=0,2} \left( w_{nj_1j_2j_3}^{m-r} \right)^2 \right) (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2) \sum_{u=0,2} w_{ni_1i_2i_3}^{m-u} = 0, \quad (5)$$

$i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, M.$

$$\begin{aligned} w_{ni_1i_2i_3}^0 &= w_{ni_1i_2i_3}(0), \quad w_{ni_1i_2i_3}^1 = w_{ni_1i_2i_3}(0) + \\ &+ \left[ \tau w'_{ni_1i_2i_3}(0) + \frac{4\tau^2}{\pi^3} \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + i_3^2} \left( \lambda + \frac{8}{\pi^3} \int_{\Omega} |\nabla w^0(x)|^2 dx \right) \int_{\Omega} \Delta w^0(x) \sin i_1 x_1 \sin i_2 x_2 \sin i_3 x_3 dx \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n.$

ჩავთვალოთ, რომ (5), (6) სისტემის ამოსახსნელად გამოთვლებს ვაწარმოებთ იტერაციების საშუალებით შრიდან შრეზე გადასვლით. იაკობის არაწრფივი იტერაციული მეთოდის გამოყენებით გვექნება

$$\begin{aligned} &\frac{4}{\tau^2 (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)} w_{ni_1i_2i_3, k+1}^m + \left[ 2\lambda + \left( w_{ni_1i_2i_3, k+1}^m \right)^2 + \left( w_{ni_1i_2i_3}^{m-2} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=1 \\ j_1 \neq i_1, j_2 \neq i_2, j_3 \neq i_3}}^n \left( \left( w_{nj_1j_2j_3, k}^m \right)^2 + \left( w_{nj_1j_2j_3}^{m-2} \right)^2 \right) \right] \left( w_{ni_1i_2i_3, k+1}^m + w_{ni_1i_2i_3}^{m-2} \right) = \\ &= \frac{4}{\tau^2 (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)} f_{ni_1i_2i_3}^m, \quad i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (7) \end{aligned}$$

სადაც  $w_{ni_1i_2i_3, k+l}^m$  წარმოადგენს  $w_{ni_1i_2i_3}^m$ -ის  $(k+l)$ -ურ იტერაციულ მიახლოებას  $l = 0, 1$ , ხოლო  $f_{ni_1i_2i_3}^m = 2w_{ni_1i_2i_3}^{m-1} - w_{ni_1i_2i_3}^{m-2}$ .

კარდანოს ფორმულის გამოყენებით (7) სისტემიდან ვღებულობთ

$$w_{ni_1i_2i_3, k+1}^m = \psi_{ni_1i_2i_3, k}^m, \quad i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (8)$$

(8) ტოლობის მარჯვენა მხარე  $(k+1)$  იტერაციულ მიახლოებებს არ შეიცავს.

$$\begin{aligned} &\text{შევავსოთ } \left| \frac{\partial \psi_{ni_1i_2i_3, k}^m}{\partial w_{nj_1j_2j_3, k}^m} \right|. \text{ ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი თანადობები } \min_x |\varphi^{(1)}(x)| = r \text{ და} \\ &\min_x |\varphi^{(2)}(x)| = 3r^2, \quad \text{შესაბამისად } \varphi^{(1)}(x) = -r + \sum_{s=1,2} [x + (-1)^s (x^2 + r^3)^{1/2}]^{4/3} \text{ და} \\ &\varphi^{(2)}(x) = r^2 + \sum_{s=1,2} [x + (-1)^s (x^2 + r^3)^{1/2}]^{2/3} \text{ ფუნქციებისთვის, } -\infty < x < \infty, \quad r = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

მოვითხოვთ შემდეგი პირობების შესრულება რომელიც  $q \in (0, 1)$ -სათვის

$$\max_{j_1, j_2, j_3} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n \left| \frac{\partial \psi_{ni_1i_2i_3, k}^m}{\partial w_{nj_1j_2j_3, k}^m} \right| \leq q, \quad j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n \left| w_{ni_1i_2i_3, k}^m - w_{ni_1i_2i_3, 0}^m \right| \leq \frac{1}{1-q} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n \left| w_{ni_1i_2i_3, 1}^m - w_{ni_1i_2i_3, 0}^m \right|. \quad (10)$$

აღნიშნული პირობების დასაკმაყოფილებლად ჩვენ დაგვირდება შემდეგი ფორმულის გამოყენება

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)^l \leq \frac{3^l n^3 (n+1)(2n+1)}{6} \left( \frac{3n^2 + 3n - 1}{5} \right)^{l-1}, \quad l = 1, 2.$$

მტკიცდება, რომ (9) და (10) სამართლიანია, თუ ბადის  $\tau$  ბიჯი იმდენად მცირეა, რომ კმაყოფილდება  $\tau^4 + \alpha\tau^2 - \beta \leq 0$  უტოლობა, სადაც  $\alpha$  და  $\beta$  დადებითი სიდიდეებია, რომლებიც გამოისახებიან  $q$ ,  $n$ ,  $w_{ni_1i_2i_3}^{m-2}$  და  $f_{ni_1i_2i_3}^m$  სიდიდეების საშუალებით,  $i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n$ .

იტერაციული პროცესი (8) კრებადია,  $\lim_{k \rightarrow \infty} w_{ni_1i_2i_3, k}^m = w_{ni_1i_2i_3}^m$ , ამასთან პროცესის ცდომილება ფასდება შემდეგი უტოლობით

$$\sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n |w_{ni_1i_2i_3, k}^m - w_{ni_1i_2i_3}^m| \leq \frac{q^k}{1-q} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^n |w_{ni_1i_2i_3, 1}^m - w_{ni_1i_2i_3, 0}^m|, \quad k = 0, 1, \dots$$

**იტერაციული პროცესის კრებადობა რხევის ერთი სამგანზომილებიანი ამოცანისათვის  
ჯ.ფერაძე, ვ. ოდიშარია  
რეზიუმე**

განხილულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანა კირხჰოფის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის სამგანზომილებიანი არის შემთხვევაში. მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად განხორციელებულია ეტაპობრივი დისკრეტიზება სივრცული ცვლადებისა და დროის არგუმენტის მიმართ. მიღებული კუბური სისტემის ამოსახსნელად გამოყენებულია იაკობის იტერაციული მეთოდი. შეფასებულია ამ მეთოდის ცდომილება.

**THE COVERAGE OF AN ITERATION METHOD FOR ONE THREE-DIMENSIONAL OSCILLATION PROBLEM**

**V. Odisharia, J. Peradze**

**Abstracts**

The initial boundary value problem for an integro-differential Kirchhoff equation is considered in the case of a three dimensional domain. To find an approximate solution, step-by-step discretization is performed with respect to spatial variables and a time argument. The obtained cubic system is solved by the iteration method. The method error is estimated.

**References**

- [1] Kirchhoff, G., Vorlesungen über Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.
- [2] Medeiros, L., Limaco, I., Menezes, S., Vibrations of an elastic string, Mathematical Aspects, I and II., J. Comput. Anal. Appl., 4, 2(2002), 211-263.
- [3] Peradze, J., A numerical algorithm for the nonlinear Kirchhoff string equation, Numer. Math., 102, 2(2005), 311-342.

## GRID - ქსელების არქიტექტურის მონიტორინგის სერვისი ზ.მოდებაძე

ზოგადი განმარტებით - GRID ეს არის პროგრამულ-აპარატურული გარემო, რომელშიც გეოგრაფიულად დაშორებული გამომთვლელი მოწყობილობები ერთობლიობაში ქმნიან მძლავრ გამომთვლელ რესურსს. ამ გამომთვლელ გარემოში შეიძლება გაერთიანებული იყოს, დაწყებული პერსონალური კომპიუტერებით, დამთავრებული სუპერკომპიუტერებით, პროგრამული პაკეტებით და ინფორმაციის მიღება-გადაცემის მოწყობილობებით.

დღესდღეობით GRID სეგმენტები იქმნება სხვადასხვა დანიშნულებისათვის და სხვადასხვა პროექტებისთვის, ძირითადი მიზეზი არის არსებული ამონაცანების გადაჭრის სირთულე და მასშტაბურობა. GRID ტექნოლოგია საშუალებას იძლევა რესურსების გაერთიანებისა (მაგალითად რამოდენიმე ისტიტუტი აერთიანებს თავის გამოთვლით და ბაზურ რესურსებს თანამედროვე გლობალური ამოცანების გადასატრედად), აგრეთვე მონაცემების დამუშავების სტანდარტიზაციის დანერგვას. მეცნიერებს საშუალება ეძლევათ ერთი და იგივე პირობებში მიიღონ შედეგები მათი ანალიზისა და შედარებისათვის. ეს მნიშვნელოვანია როცა მეცნიერთა სხვადასხვა ჯგუფი იღებს განსხვავებულ შედეგებს, დგება საკითხი ობიექტურად სწორი შედეგების ამორჩევისა, პროექტში მონაწილე მეცნიერთა ჯგუფებისთვის ერთიანი სისტემის და სტანდარტული პროგრამული პაკეტების შექმნა და გამოყენება გამორიცხავს სუბიექტური, გაუთვალისწინებელი მიზეზებით განსხვავებული შედეგების მიღებას. ასე რომ GRID აერთიანებს არამარტო რესურსებს, არამედ უქმნის სხვადასხვა ქალაქებში მყოფ მეცნიერებს ერთიან გარემოს და აგრეთვე უადვილებს მათ მონაცემების გაცვლას და შედარებას. შესაძლებელი ხდება სხვადასხვა ქვეყნიდან მეცნიერთა ჯგუფებმა ერთი და იმავე საკითხზე ერთობლივად, მოხერხებულად იმუშაონ.

GRID -ში გაერთიანებული იქნება სხვადასხვა დონის (tier) ცენტრები:

Tier0 (CERN) -> Tier1 -> Tier2 -> Tier3 -> მომხმარებლების კომპიუტერები;

ცენტრების დონეები ერთმანეთისაგან უნდა განსხვავდებოდნენ როგორც არქივული და გამოთვლითი რესურსების მასშტაბურობით, ისე მათი ფუნქციონალური დატვირთვით:

- **Tier0** - შემთხვევების პირველადი რეკონსტრუქცია და კალიბრირება, მონაცემთა ასლების სრული ბაზის შენახვა;
- **Tier1** - მონაცემთა სრული რეკონსტრუქცია, შემთხვევების მიხედვით აქტუალური მონაცემთა ბაზის შენახვა, გაანალიზირებული შემთხვევების ნაკრების შექმნა და შენახვა, ანალიზი, მოდელირება;
- **Tier2** - გაანალიზირებული შემთხვევების ნაკრების რეპლიკაცია და შენახვა, მოდელირება, ანალიზი;
- **Tier3** - ცალკეული სამეცნიერო ჯგუფების კლასტერები. კლასტერი ანუ სეგმენტი ეს არის კომპიუტერული რესურსების გაერთიანება თავისი ფიზიკური და პროგრამული უზრუნველყოფით, რომელიც თავის მხრივ დაკავშირებულია მომდევნო დონესთან მადალსიქარიანი ინტერნეტით.

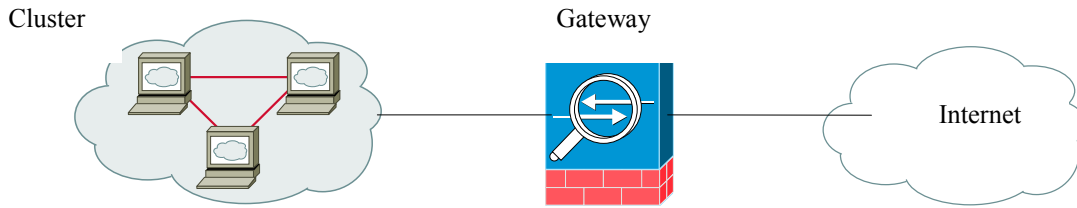
ამჟამად, არსებობს Tier1 ცენტრები შემდეგ ქვეყნებში: იტალია, საფრანგეთი, დიდი ბრიტანეთი, გერმანია, აშშ და სხვა. დღესდღეობით ასოციაცია გრენა-სა და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტს მიღებული აქვს გრანტი სამხრეთ-აღმოსავლეთ ევროპის GRID-ში მონაწილეობაზე საბერძნეთის გავლით (ე.წ. SEE-GRID). აგრეთვე მიმდინარეობს მუშაობა რეგიონალური ამიერკავკასიური GRID ინფრასტრუქტურის მიერთებაზე საქართველოს გავლით შავი ზღვის აუზის ქვეყნების გლობალურ კომპიუტერულ ქსელთან (პროექტი BSI – Black Sea Interconnection). თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მაღალი ენერჯიებისა და ინფორმატიზაციის ინსტიტუტი ჩართულია ამ პროცესში. მრავალპროცესორიანი გამოთვლითი სეგმენტის (კლასტერის) შესაქმნელად განხორციელდა კომპიუტერების შექმნა. შექმნისას გათვალისწინებულ იქნა გამოთვლითი სეგმენტის ტექნიკური მოთხოვნები (პროცესორის სიმძლავრე, მეხსიერება, დისკური მასივები). სეგმენტის ასაწყოებად შეირჩა შემდეგი კომპლექტაცია:

1 – მმართველი სერვერი HP XW 4600,  
CPU 2.33 GHz Core2Duo, 4 Gb RAM, 2x500 Gb HD,

7 – გამომთვლელი კვანძი, Hp dx 7400,  
CPU 2,4 Mhz Coreduo, RAM 2 Gb, 250 Gb Hd.

პირველ ეტაპზე განხორციელდა თითოეულ კომპიუტერზე ოპერაციული სისტემა LINUX დაყენება, გამართვა, ტესტირება. განხორციელდა კომპიუტერების ქსელით შეერთება და ოპერაციული სისტემის შესაბამისად დაკონფიგურირება. მმართველ სერვერზე მოხდა

ვირტუალური ინტერფეისის დამატება გამოთვლელ კვანძებთან კავშირის დასამყარებლად. კლასტერის ქსელის სქემა შემდეგნაირად გამოიყურება:



მმართველ სერვერზე დისკური მასივების კონფიგურაცია მოხდა სარკული პრინციპით (RAID-1). ერთი მყარი დისკის ტექნიკური დაზიანების შემთხვევაში ინფორმაცია შენახული დარჩება მეორეზე.

კლასტერის შემადგენელი კომპონენტების და ქსელის გამართვის შემდეგ, ამ კომპონენტებიდან განხორციელდა ერთიანი ინტეგრირებული გამოთვლითი სისტემის აწყობა. შეიქმნა და გაიმართა ერთიანი NFS ფაილურ სისტემა. რაც საშუალებას იძლევა სერვერმა და გამოთვლელმა კვანძებმა მარტივად გაცვალონ ერთმანეთში ინფორმაცია.

ერთიანი ფაილური სისტემის შექმნის შემდეგ მოხდა ამოცანების მართვის სისტემის ინსტალირება-კონფიგურირება. ამოცანების მმართველ სისტემად შერჩეულ იქნა "Torque", რომელიც წარმოადგენს "Open PBS" – ის გაუმჯობესებულ ვერსიას.

კლასტერი დაკონფიგურირდა ისე, რომ მმართველმა სერვერმა არ მიიღოს მონაწილეობა ამოცანების შესრულებაში. მმართველი სერვერი ანხორციელებს მხოლოდ ამოცანების მართვას, ხოლო გამოთვლელი კვანძები ასრულებენ მომხმარებლის მიერ გაშვებულ ამოცანებს და აბრუნებენ პასუხებს.

ერთიანი ფაილური სისტემის გამოყენებით მოხდა სისტემაში პროგრამების გამართვის ცენტრალიზაცია. მაგალითად, მმართველ სერვერზე გაიმართა ATLAS ექსპერიმენტის პროგრამული უზრუნველყოფა ATHENA, ხოლო გამოთვლელ კვანძებზე ამის გაკეთება აღარ არის საჭირო. შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის ბიბლიოთეკებს კვანძები სერვერიდან გამოიყენებენ.

მოხდა გამოთვლითი სეგმენტის კომპლექსური შემოწმება: ამოცანების გარჩევა, ფაილური სისტემისა და ქსელის. განისაზღვრა სეგმენტზე მომხმარებლების რეგისტრაციისა და მართვის ამოცანის გაშვების წესები.

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, შემდგომი ნაბიჯი იქნება კლასტერის მიერთება ევროპულ GRID ქსელთან. ამ სამუშაოების ჩატარებისთვის ერთ-ერთი აქტუალური ამოცანაა სხვადასხვა ქსელების არქიტექტურის მონიტორინგის სერვისი. ამ ამოცანის გადაჭრისთვის შექმნილია ინტეგრირებული პროგრამული უზრუნველყოფა PerfSonar.

PerfSonar ეს არის მონიტორინგის სერვისული საშუალებები ქსელთა შორის ინფორმაციის გაცვლისთვის, რომელიც აადვილებს სხვადასხვა ქსელის 2 პოსტს შორის კავშირისას პრობლემების გამოვლენას. PerfSonar საშუალებით ხორციელდება GEANT2 და DEISA globalur qselur infrastructurebs Soris informaciis gadacemis monitoringi.

PerfSonar –ის ერთ-ერთი შემადგენელი ნაწილია პროგრამული პაკეტი PingER. მისი საშუალებით შესაძლებელია MySQL და SLite ბაზათა ცხრილებში მოგროვდეს ყველანაირი ინფორმაცია ქსელების ფუნქციონირების შესახებ. PingER პროგრამული პაკეტის სრულად ამუშავებისთვის გარკვეული საფეხურები და ქმედებებია გასაკეთებელი. PingER პროგრამული პაკეტის ძირითადი გამშვები ბრძანებაა :

Ps – pinger-0.09 start

ხოლო მის შესრულებამდე მზად უნდა იყოს თვითონ ამ პროგრამული პაკეტის საკონფიგურაციო ფაილი სახელწოდებით : pinger.conf.

ამ ინფორმაციის შეკრებისა და შესაბამის SQL ცხრილებში განთავსების შემდეგ საჭიროა მათი ნორმალური ვიზუალური დათვალიერება. ამისთვის არსებობს Perl –ზე შექმნილი პროგრამული უზრუნველყოფა PingER GUI, რომელსაც გააჩნია შემდეგი სახის ინტერფეისი:

- <http://tukki.fnal.gov/pinger/pingerUI.pl>

**Pinger GUI**

- Enter MA URL as it configured in `pinger.conf`
- Use wildcard to get hostname or packet size of interest. Move the mouse's pointer on End-to-End Links area. List of links will be updated automatically.  
**Source Hostname:**
- **Destination Hostname:**
- **Packetsize:**
- **End-to-End Links**

**Graph parameters**    **Start Time**    **End Time**    **GMT offset**    **Type of metric:**  
**Upper RTT(or IPD) Limit:**    **Graph type:**

რა თქმა უნდა, ამ პროგრამული უზრუნველყოფის კოდები არის თავისუფლადგავრცელებადი და შექმნილია Linux ოპერაციული სისტემის გარემოსთვის.

**ლიტერატურა:**

- [1] Portable Batch System OpenPBS Release 2.3 Administrators Guide
- [2] <http://www.ganglia.info>
- [3] <http://wiki.perfsonar.net>



## ON CANONICALLY CONJUGATE FUZZY SUBSET M. Tsintsadze

In the space of incomplete and uncertain information the ability of correct decision-making is the most incredible feature of human intellect, the modeling of the human mind principle and using it in the new generation computer systems, is the one of the main task of scientists. The significant step ahead in this direction was made 30 years ago by the California University Professor, L. Zadeh. His work “Fuzzy Subsets” was the base of the intellectual system modeling and became the initial point of new mathematical theory.

Zadeh made the generalization of set, as the classical Cantor notion, accepting that the characteristic function (membership function) can have any meaning in the interval  $[0,1]$  and named such sets “fuzzy”. He also explained the set of operations on fuzzy sets and generalized the famous logical methods such as “modus ponens” and “modus tollens”.

Introducing the linguistic variable notion and accepting the existence of fuzzy subsets as its meaning Zadeh created the powerful system of the intellectual processes, fuzzyness and uncertainties description. The further works of the Professor Zadeh and his followers have created the important base for the fuzzy control methods in engineering, industrial practice.

The compilation of fuzzy information as well as the effective and fast realizable algorithm development - is very actual in modern world. The works of the famous scientist - L. Zadeh, D. Dubois, H. Prade, A. Kandel, A. Kauffman and others are dedicated to this issue.

Fuzzy logic is derived from fuzzy set theory dealing with reasoning that is approximate rather than precisely deduced from classical predicate logic. It can be thought of as the application side of fuzzy set theory dealing with well thought out real world expert values for a complex problem. Degrees of truth are often confused with probabilities. However, they are conceptually distinct; fuzzy truth represents membership in vaguely defined sets, not likelihood of some event or condition.

In many cases of intellectual activity of human there exists virtually unlimited number of ways of interaction of a subject with the object. As a result of this, the controlled inter-action is almost always incomplete. It is based on limited (generally small) number of attributes (color) of the object which corresponds to the interests of the subjects and which he/she can recognize. Sometimes these colors are not available for the direct observation but are available only in terms of their abstract modes (or quantity models), being the results of the direct perception or some specific measuring procedures. In this case the information loses the definition, univocacy and there appears the uncertainty.

By Dubuis and Prade : data in informatics – it is the set of so-called informational units. Each of informational units is the four: (object, sign, value, plausibility) [2]. It's important to differ the notion of inaccuracy and uncertainty. Inaccuracy belongs to information content (corresponding to the component “value”), and uncertainty – to its verity, understandable in terms of compatibility with reality (component “plausibility”). For the given various information there exists the opposition between inaccuracy of expression content and its uncertainty, expressed in that with the increase of expression accuracy, its uncertainty rises as well and vice versa, uncertain character of information leads to some inaccuracy of the final conclusions, received from this information. We see that from one side these notions in a certain way in contradiction, and from another side – complete each other upon the data presentation.

We offer to model this situation by means of new concept of optimal pair of fuzzy subset and its canonically conjugated one [1]. Generally, fuzzy subset is constructed on the basis of expert estimation of one of the commutate component. From this point of view, fuzzy subset, constructed in this way, characterizes informational unit incompletely. We offer the method of construction of the informational unit membership function taking into account the both canonically conjugated components simultaneously and hence describing this unit in the most complete and optimal way. In the frames of optimal model the fuzzy logics and generalized information theory [3] is constructed, corresponding to the canonically conjugated subsets.

Now we shall shortly consider those general reasons which are laying in the basis of our model construction.

Significant that every "color" characterized by numerical parameter or parameters is the random quantity. Lets denote its distribution density by  $\rho(x)$ , its nonnegative number and we may present it in following way:  $|\psi(x)|^2$ . (note that  $\psi(x)$  is the element of  $L^2$  Hilbert's space), in this case we'll put the object in correspondence with linear operator  $\hat{p}$ , by:  $\hat{p}(\psi) = x\psi(x)$ , where  $x$  is the value of "color" numerical characteristic, so we may call  $\hat{p}$  the "color operator". Consider  $\psi$  function's Fourier transformation:  $\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{icy} \psi(x) dx$ , it's known that if  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(y)|^2 dx = 1$ , than  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)|^2 dy = 1$ , so we may consider  $|\varphi(y)|^2$  as density function  $\rho(y)$  for some  $y$ , random quantity.

So every numerical value of "color" would be in correspondence with random parameter's math. expectation value.

As  $1 \geq \int_{I_p} \rho(x) dx \geq 0$  we consider it as the value of the membership function, analogically  $\int_{I_{p_c}} \chi(y) dy$  is the value of other membership function.

Describe the uncertainties on  $x$  and  $y$  axis with appropriate dispersions: it's known that between  $\sigma_x^2$  and  $\sigma_y^2$  exists the connection:  $\sigma_x^2 \sigma_y^2 \geq c$  so, we see that, reduction of  $x$  uncertainty value brings  $y$  uncertainty increasing and vice versa, so if we want to take into consideration both uncertainty commonly, we offer the following way: lets find such  $\rho(x)$  (properly such  $\psi(x)$ ) and  $\chi(y)$  (properly such  $\varphi(y)$ ) that:  $\sigma_x^2 \sigma_y^2 = c$ . Using the analogic method of quantum-mechanical model [3] solution, we have:

$$\rho_\varphi(x, x^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varphi^2}} \exp\left[-\frac{(x - x^*)^2}{2\sigma_\varphi^2}\right] \text{ and } \chi_{\varphi_c}(y, y^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varphi_c}^2}} \exp\left[-\frac{(y - y^*)^2}{2\sigma_{\varphi_c}^2}\right]$$

The characteristic intervals will be selected in the following way:

$$I_\varphi(\omega) = [x_\omega^* - \alpha_\omega \sigma_\varphi^2; x_\omega^* + \alpha_\omega \sigma_\varphi^2] \text{ and } I_{\varphi_i}(\omega) = [x_\omega^* - \alpha_\omega \sigma_{\varphi_c}^2; x_\omega^* + \alpha_\omega \sigma_{\varphi_c}^2]$$

$\alpha$  and  $\alpha_c$  in general cases depend on  $x^*$  and  $y^*$  appropriately. In dispersion terms uncertainty is optimal if  $\sigma_{\varphi} \cdot \sigma_{\varphi_c} = \text{const}$ , in accordance of this, the membership function is

$$\mu_{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varphi}^2}} \int_{x_{\omega}^* - \alpha\sigma_{\varphi}^2}^{x_{\omega}^* + \alpha\sigma_{\varphi}^2} \exp\left[-\frac{(x - x_{\omega}^*)^2}{2\sigma_{\varphi}^2}\right] dx$$

$$\mu_{\varphi_c}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\varphi_c}^2}} \int_{x_{\omega_c}^* - \alpha\sigma_{\varphi_c}^2}^{x_{\omega_c}^* + \alpha\sigma_{\varphi_c}^2} \exp\left[-\frac{(x - x_{\omega_c}^*)^2}{2\sigma_{\varphi_c}^2}\right] dx$$

Thus we have the membership functions appropriate to the uncertainty and plausibility, which are optimal according to above-mentioned scheme. There is possibility [4] to describe both uncertainty commonly: the algorithm is such: we calculate the "color pair"  $(\hat{p}, \hat{p}_c)$  appropriate numerical parameter (random quantity) membership functions density with the following formula:

$$f(x, y) = \int M(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

where in the integrated functions  $x$  and  $y$  represent correspondingly  $\hat{p}$  and  $\hat{p}_c$  operators proper values, and

$$M(\alpha, \beta) = (\psi^*(x), e^{i(\alpha\hat{p} + \beta\hat{p}_c)} \psi(x)) = (\varphi^*(y), e^{i(\alpha\hat{p} + \beta\hat{p}_c)} \varphi(y))$$

the results of calculations are:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Re} \psi_{\omega}^* \left(x - \frac{c\tau}{2}\right) e^{-i\tau y} \psi_{\omega} \left(x + \frac{c\tau}{2}\right) d\tau$$

and the membership function is the following:

$$\mu_{\hat{p} \times \hat{p}_c}(x^*, y^*) = \iint_{I(x^*) \times I_c(y^*)} f(x, y) dx dy$$

## ON CANONICALLY CONJUGATE FUZZY SUBSET

### M. Tsintsadze

**ABSTRACT:** The aim of the work is construction of informational unit membership function with the help of new concept - canonically conjugated fuzzy subsets where both complimentary and simultaneously concurrent components uncertainties are taken into consideration. The above-mentioned notion allows modeling of fuzzy information more completely and optimally.

#### References:

1. A. Messiah –Quantum Mechanics. Moscow (1982)
2. D.Dubois. H. Prade – T’heorie des Possibilite’s. (Masson, Paris-Barselon-Mexico-Milan), 1988.
3. M.Tsintsadze – Probabilistic Model of Optimal Membership Function. Proceedings of Iv.Javakhishvili Tbilisi State University, Vol 354(24) (2004) Tbilisi
4. T.Gachechiladze – Modified Probabilistic Model of membership Functions of Fuzzy Subsets . AMI Vol. 1. (1996)N1 pp63-69 Tbilisi