საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ლია ყიფიანი

დისკრეტულ ფინანსურ ბაზარზე ოფციონის ფასდადების მოდელის შემუშავება

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

თბილისი,
2012 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტზე

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი **თინათინ კაიშაური**

რეცენზენტები: ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი **მედეა თევდორაძე** (სტუ)
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
ასოც. პროფესორი **გრიგოლ სოხაძე** (თსუ)

დაცვა შედგება ______ წლის „____“ __________________,___________საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი _____, აუდიტორია_________
მისამართი: 00175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციისა და ავტორეფერატის გაცნობა შეიძლება საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში და უნივერსიტეტის ვებგვერდზე www.gtu.ge

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი — ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი თ. კაიშაური

ნაშრომის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალობა: თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტები ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია დეტერმინირებული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი პრობლემა. დეტერმინისტულ ნაწილში განხილულია ფინანსური ხდომილობები და ნაკადები, კერძოდ, პირველი და მეორე რიგის ნაკადები. შესწავლილია მეორე რიგის ნაკადის აქტუალიზაცია – პირველი რიგის ნაკადად გარდაქმნა, ანუ ავანსირებისა და ფინალიზაციის ოპერაციები. მოყვანილია მეორე რიგის ნაკადის რიცხვზე გამრავლებისა და ნაკადების შეკრების ოპერაციების განმარტებები და რიცხვითი მაგალითები. სპეციალური მეორე რიგის ნაკადისთვის – რენტისთვის შემოტანილია რენტის პერიოდის დაყოფის ოპერაცია და შესწავლილია ამ ოპერაციის კავშირის თვისებები ავანსირებისა და აქტუალიზაციის ოპერაციებთან. შესწავლილია აგრეთვე ფინანსური ნაკადებისთვის ფინანსური კანონების – კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების ოპერაციების თვისებები.

სტოქასტურ ნაწილში გამოკვლეულია ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანა. ფინანსური ბაზრის სტრუქტურა საკმაოდ რთული ბუნებისაა და მისი ანალიზი მოითხოვს საინტერესო და რთული მათემატიკური ამოცანების გადაჭრას. ასეთებია მაგალითად: ბაზრის მოდელის შერჩევა და მასში შემავალი პარამეტრების შეფასება, აქციების ან სხვა აქტივების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების, მაგალითად, ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების, სამართლიანი ფასის დადგენა, ინვესტორის

თვითდაფინანსებადი და არათვითდაფინანსებადი ოპტიმალური სტრატეგიების დადგენა და სხვა.

შესწავლილია ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონების ფასდადების ამოცანა თვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისთვის.

გადაწყვეტილია ევროპული ოფციონის ფასდადების ზოგადი ამოცანა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიისთვის, როდესაც ოფციონის გადახდის ფუნქცია დამოკიდებულია აქციის ფასის მნიშვნელობაზე მხოლოდ ბოლო მომენტში. მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და ოპტიმალური სტრატეგიის – ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები და აგებულია ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი. გადაწყვეტილია აგრეთვე ერთი კერძო ამოცანა, როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება აქციის ფასის პროპორციული თანხის გათვალისწინება დივიდენდის სახით. ანხილულია, რომ თუ ყიდვის დივიდენდი ინვესტირების პროცესში ნულის ტოლია, მაშინ მიღებული შედეგიდან მიიღება კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის ფორმულა ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასისთვის.

საქართველო ბოლო ათწლეულებში დაადგა საბაზრო ეკონომიკის განვითარების გზას. ამიტომ მიგვაჩნია, რომ სადისერტაციო ნაშრომში განხილული პრობლემატიკა ქვეყნის ეკონომიკის განვითარებისთვის მნიშვნელოვანი და **აქტუალურია**.

ნაშრომის მიზანია: ფინანსური ნაკადების (კერძოდ რენტის), ფინანსური ოპერაციების და ფინანსური კანონების თვისებების შესწავლა და სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითებისათვის კომპიუტერული პროგრამების შედგენა. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში დისკრეტული ფინანსური ბაზრის შემთხვევაში არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგება და რიცხვითი მაგალითების კომპიუტერული პროგრამების შექმნა.

მეცნიერული სიახლე სადოქტორო ნაშრომში შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) აქტუალიზაციის – ავანსირებისა და ფინალიზაციის ოპერაციები და ფინანსური კანონების – კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების თვისებები.

არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისთვის გადაწყვეტილია ოფციონის ფასდადების ზოგადი ამოცანები და ამოხსნილია კერძო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

საქართველოს ზოგიერთმა ბანკმა აქციები განალაგა სავაჭრო უცხოურ საფონდო ბირჟებზე (ფინანსურ ბაზრებზე), ამიტომ ოფციონების ფასდადების ამოცანებს დიდი **პრაქტიკული ღირებულება** აქვს, რადგანაც ოფციონების ერთ-ერთი ძირითადი დანიშნულება ისაა, რომ ისინი აქციების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტებს წარმოადგენენ.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები, დაკავშირებული ოფციონების ფასდადების ზოგად და კერძო ამოცანებთან არათვით-დაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის გამოქვეყნებულია რეცენზირებად ჟურნალებში და ჩვენი აზრით მათი **უტყუარობა** ეჭვს არ იწვევს.

ნაშრომის აპრობაცია: ნაშრომის ცალკეული ნაწილები მოხსენებულია 4 საერთაშორისო და რესპუბლიკურ კონფერენციაზე, ხოლო მთლიანი ნაშრომი სადოქტორო პროგრამით გათვალისწინებულ ორ სემინარზე.

პუბლიკაციები: ნაშრომის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია 11 სამეცნიერო სტატიასა და 4 კონფერენციის მოხსენებათა კრებულებში. ასევე ორ სახელმძღვანელოში.

სადისერტაციო ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა: ნაშრომი შედგება შესავლის, ოთხი თავისა, ოცდახუთი პარაგრაფის, დასკვნებისა და გამოყენებული ლიტერატურისაგან. ნაშრომის მოცულობა 141 გვერდია. გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა შეიცავს 46 დასახელებას.

ნაშრომის შინაარსი

შესავალში მოყვანილია დეტერმინისტული და სტოქასტიკური ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთ ამოცანასთან დაკავშირებული საკითხები, რომლებიც შეისწავლება სადისერტაციო ნაშრომში. მოყვანილია აგრეთვე, ნაშრომის მიზანზე, შედეგების სიახლეზე, აპრობაციის, პუბლიკაციების, სტრუქტურისა და მოცულობის საკითხებზე.

პირველ თავში მიმოხილულია ნაშრომში გამოყენებული ლიტერატურა. კერძოდ, ჩამოყალიბებულია ძირითადი საკითხები და მითითებულია ამ საკითხებთან დაკავშირებული შედეგები ციტირებული ნაშრომების მიხედვით.

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა ფინანსების თეორიის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს და იგი ინტენსიურად ვითარდება ბოლო ათწლეულში. ამ კვლევაში გადამწყვეტი როლი ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის, შემთხვევით პროცესთა თეორიისა და, განსაკუთრებით, თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდებს მიეკუთვნება. სწორედ ამ მეთოდების გამოყენებით გახდა შესაძლებელი ძირითადი (საბაზისო, პირველადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ობლიგაციების, აქციების ევოლუციის (ტრაექტორიის) ადეკვატური აღწერა, ფინანსური ბაზრების დროში დისკრეტულად და უწყვეტად ფუნქციონირებადი მათემატიკური მოდელების შექმნა და წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების გათვლის ამოცანების გადაწყვეტა. სახელწოდება „წარმოებული ფასიანი ქაღალდი" მიუთითებს იმაზე, რომ იგი წარმოადგენს გარკვეულ პირობებში რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვის ხელშეკრულებას (კონტრაქტს) ორ მხარეს – მყიდველსა და გამყიდველს შორის. მაგ., ოფიციონის (ოფიციონური კონტრაქტის) საფუძველი შეიძლება იყოს აქცია, ვალუტა, საქონელი, თვითონ ოფციონი და სხვ.

1. თანამედროვე ფინანსური ბაზარი წარმოადგენს ფულის, ვალუტის (როგორც უცხოური ქვეყნის ფულის), კეთილშობილი (ძვირფასი) ლითონებისა და სხვადასხვა ფინანსური ინსტრუმენტის, მათ შორის ფასიანი ქაღალდების ბაზრების ერთობლიობას. განასხვავებენ ძირითად (პირველად, საბაზისო) და წარმოებულ (მეორად) ფასიან ქაღალდებს. პირველს მიეკუთვნება, მაგალითად, ობლიგაციები, საბანლო ანგარიში, აქციები, მეორეს – ოფციონი, რომელიც შეიძლება იყოს აქციის ყიდვა-გაყიდვის სხვადასხვა ტიპის კონტრაქტი (ხელშეკრულება).

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ საბანკო ტიპის ოპერაციები ბანკის მსგავსი ინსტიტუტების მიერ ტარდებოდა ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტეში,

ხოლო ძველ ბაბილონსა და ასურეთში კი უკვე არსებობდა საპროცენტო განაკვეთის შედეგად მოგების მომტანი სასესხო კაპიტალი და გარკვეული სახის ვექსილი (ფასიანი ქაღალდი). თანამედროვე ტიპის ბანკი პირველად შეიქმნა იტალიის ქ. გენუაში 1407 წელს, ხოლო აქციებით ვაჭრობის დასაწყისად ითვლება ქ. ამსტერდამში საფონდო ბირჟაზე აქციონერთა კომპანიების მიერ აქციების გაყიდვა 1602 წელს.

რაც შეეხება მეორად ფინანსურ ინსტრუმენტებს, მათი ინტენსიური განვითარება დაიწყო XX საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან (თუმცა, მაგ., ოფციონი ადრეც არსებობდა) და ძირითადად დაკავშირებული იყო შემდეგ გარემოებებთან:

1) 1973 წლიდან დაწყებული, ვალუტების ფიქსირებული გაცვლითი კურსების მაგივრად შემოღებული იყო ცვალებადი („მცურავი") კურსები. ზოგიერთი მათგანისათვის კი დაწესდა იქნა ცვალებადობის გარკვეული შუალედი („დერეფანი"). ამას დაემატა საპროცენტო განაკვეთების ცვალებადობა;

2) გასული საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან დაიწყო დოლარის გაუფასურება ოქროსთან მიმართებაში. 1971 წლის შემდეგ, ოქროს სტაბილურმა ფასმა (ერთი უნცია – 28,25 გრამი ოქრო ღირდა 35 დოლარი) მკეთრად იწყო მატება და უკვე 1980 წელს ერთი უნცია ოქრო 570 დოლარი ღირდა;

3) წარმოიშვა ნავთობის მსოფლიო კრიზისი ნავთობის ფასების ცვალებადობასთან დაკავშირებით;

4) მსოფლიოს ფინანსურ ბაზრებზე მოხდა აქციების რეალიზაციის შემცირება;

5) ქვეყნები აღმოჩნდნენ განსხვავებულ ეკონომიკურ სიტუაციებში, განსაკუთრებით მეორე მსოფლიო ომის დამანგრეველი შედეგების შემდეგ.

ამ მოვლენებმა ბუნებრივად გაზარდა რისკი ფინანსურ ურთიერთობებში. აუცილებელი გახდა, ფინანსური რისკისაგან თავის დაცვისა და მისი გარკვეულად განეიტრალების მიზნით, ახალი ფინანსური პროდუქციისა და ტექნოლოგიის შექმნა. ასე დაიწყო ე.წ. ფინანსური ინჟინერიის ჩამოყალიბება და განვითარება, რომლის

ძირითადი ფინანსური ინსტრუმენტები სწორედ წარმოებული ფასიანი ქაღალდებია.

ამასთან ერთად, სულ უფრო იზრდებოდა ქვეყნებს შორის ფინანსური ურთიერთობების მოცულობა და სისწრაფე. სხვადასხვა გარემოებასთან ერთად ამას ხელი შეუწყო მეცნიერულ-ტექნიკურმა პროგრესმა და განსაკუთრებით კომპიუტერული მეცნიერებების განვითარებამ. გარდა ამისა, ფინანსურ ურთიერთობებში არსებულმა რეალურმა რისკმა, განუსაზღვრელობამ დააჩქარა ფინანსების თეორიისა და ფინანსური ინჟინერიის პრობლემატიკაში ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება და სათანადო მათემატიკური აპარატის შექმნა. ყოველივე ამის საფუძველზე შეიქმნა და განვითარდა თანამედროვე სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

ფინანსურმა ბაზრებმა საკმაოდ სწრაფი რეაგირება მოახდინა ზემოთ აღნიშნულ გარემოებებზე. 1973 წელს ამერიკის შეერთებული შტატების ქალაქ ჩიკაგოში გაიხსნა სტანდარტული ოფციონების ბირჟა. საინტერესოა მოვიყვანოთ ინვესტორების რეაგირების ზოგიერთი მაჩვენებელი ინვესტირების ახალ შესაძლებლობებთან დაკავშირებით. გახსნის დღეს, 26 აპრილს, 16 სახის აქციაზე დაიდო 911 კონტრაქტი ყიდვის ოფციონზე. ერთი წლის შემდეგ იდებოდა 20000-ზე მეტი, ხოლო სამი წლის შემდეგ 100000-ზე მეტი კონტრაქტი ყოველდღე. 1987 წელს ამ მაჩვენებელმა 700 ათასი კონტრაქტი შეადგინა 100 სახის აქციაზე, ე.ი. ყოველდღიურ ბრუნვაში იყო 70 მილიონი აქცია. საინტერესოა, აგრეთვე, შევნიშნოთ, რომ იმავე 1987 წელს ქალაქ ნიუ-იორკის ბირჟაზე ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა 190 მილიონი აქცია.

ფინანსურ სამყაროში ასეთმა მნიშვნელოვანმა ძვრებმა ბუნებრივად გაზარდა მოსახლეობაში ფინანსურ ურთიერთობებში აქტიური მონაწილეობისა და ამის საშუალებით „ფულის კეთების“ სურვილი. თითქმის ყოველი ამერიკული ოჯახი ასობით აქციის მფლობელია და თავიანთი დანაზოგებით ინვესტირებას ეწევა ამერიკის საბაზრო ეკონომიკაში.

ფინანსურ ბაზრებზე სხვადასხვა სახის ძირითად ფასიან ქაღალდებთან ერთად ვაჭრობენ უამრავი მეორადი ფასიანი ქაღალდებით. ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების ნაწილის სახელწოდებების

უბრალო ჩამონათვალითაც კი ადვილად დავინახავთ ფინანსურ ურთიერთობებში მეორადი ფასიანი ქაღალდების მნიშვნელობას და მრავალფეროვნებას: ფიუჩერსები, ფიუჩერსები ობლიგაციებზე და საბირჟო ინდექსებზე, ევროპული და ამერიკული ტიპის სანდარტული ოფციონები, ეგზოტიკური ოფციონები: ბოსტონის ოფციონი, რუსული ოფციონი, აზიური ოფციონი, კალათის ოფციონი, სვოპები, კეპები, ფლორები, სვოპციონები. ეს არის მეორადი ფასიანი ქაღალდების სახეობის არასრული ჩამონათვალი.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი აქტივისაგან – ობლიგაციებისაგან (საბანკო ანგარიშისაგან) და აქციებისაგან შემდგარ ფინანსურ ბაზრებს. შევნიშნავთ, რომ საბანკო ანგარიში ობლიგაციის ტიპის ფასიანი ქაღალდია. ჩვენ მოკლედ შევეხებით საბანკო ანგარიშთან, ობლიგაციასთან და აქციასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს.

გადმოცემულია მიმოხილვითი ხასიათის შრომები და გამოკვლეულია ფინანსური ბაზრის დისკრეტული მოდელის შექმნის ძირითადი მიმართულებები. ჩატარებული ანალიზი ადასტურებს თემის აქტუალობას და საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ კვლევის მიზანი.

პირველი მეცნიერი მათემატიკოსი, რომელმაც დაიწყო აქციის ფასების ევოლუციის უწყვეტ დროში შესწავლა, იყო ფრანგი ლ. ბაშელიე. მან აქციის ფასების ცვლილების აღწერისათვის გამოიყენა სპეციალური შემთხვევითი პროცესი, ე.წ. ბროუნის მოძრაობა. მიღებული შედეგები ბაშელიემ 1900 წელს სადოქტორო დისერტაციის სახით წარუდგინა პარიზის მათემატიკურ საზოგადოებას. რამდენიმე წლის შემდეგ, 1905 წელს, ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური საკითხების შესწავლა დაიწყო ა. აინშტაინმა, ხოლო ბროუნის მოძრაობის სრულყოფილი მათემატიკური თეორია ააგო ნ. ვინერმა 1923 წელს. სამეცნიერო ლიტერატურასა და ტერმინოლოგიაში ბროუნის მოძრაობა დამკვიდრდა ვინერის პროცესის სახელწოდებით.

ბაშელიეს გამოკვლევებმა საკმაოდ დიდი ხნის განმავლობაში ვერ მოიპოვა სათანადო აღიარება და გამოყენება. მხოლოდ 1965 წელს პ. სამუელსონი დაინტერესდა ბაშელიეს ნაშრომით და მოუწოდა

ეკონომისტებსა და მათემატიკოსებს ყურადღება მიექციათ აღნიშნული ნაშრომისათვის. თვითონ სამუელსონმა შემოგვთავაზა აქციის ფასების უწყვეტ დროში ევოლუციის აღმწერი ბაშელიეს მოდელის გაუმჯობესებული და მოდიფიცირებული ე.წ. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელი, რომელიც „ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობის" სახელწოდებითაც არის ცნობილი.

1973 წელს სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში გამოქვეყნდა ფ. ბეკის, მ. შოულსის და რ. მერტონის ნაშრომები, რომელშიც უწყვეტი დროის შემთხვევაში მიღებული იყო ოფციონის ფასის გათვლის და ჰეჯირების ფორმულები. შემდეგ 1979 წელს ფ. კოკსმა, რ. როსმა და მ. რუბინშტეინმა ანალოგიური შედეგები მიიღეს დისკრეტული დროის შემთხვევაში. კლასიკურად აღიარებულმა ამ ფუნდამენტურმა ნაშრომებმა რევოლუციური ძვრები გამოიწვია ფინანსურ სამყაროში და, კერძოდ, ფინანსურ ბაზრებზე: დაიწყო სპეციალიზებული ბირჟების გახსნა და გაიზარდა წარმოებული ფასიანი ქაღალდებით ვაჭრობა. აღსანიშნავია, რომ ფინანსურ მათემატიკაში მიღებული შედეგების ზოგიერთმა ავტორმა (მაგ. მ. შოულსმა, რ. მერტონმა) ნობელის პრემია დაიმსახურა ეკონომიკაში.

გამოკვლევები სტოქასტიკური ფინანსური მათემატიკის თეორიული და პრაქტიკული მიმართულებებით დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში. გვინდა აღვნიშნოთ რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკური ინსტიტუტი და მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, სადაც კვლევა გასული საუკუნის ოთხმოცდაათიან წლებში დაიწყო. მოსკოველ მეცნიერთა შედეგების საფუძველზე რუსეთის მთავრობის დადგენილებით 1992 წელს ქ. მოსკოვში დაარსდა აქტუალურ-ფინანსური სამეცნიერო-კვლევითი ცენტრი, რომლის სამეცნიერო საბჭოს თავმჯდომარეა მსოფლიოში ცნობილი მეცნიერ-ექსპერტი, პროფესორი ა. შირიაევი [11].

ცენტრის მრავალმხრივ საქმიანობაში შედის რუსეთის სადაზღვევო კომპანიებისა და ფინანსური ინსტიტუტების საქმიანობის თეორიული და პრაქტიკული ხასიათის გამოკვლევებით უზრუნველყოფა, იურიდიული და ფიზიკური პირებისათვის საკონსულტაციო სამსახურის გაწევა,

ფუნდამენტური გამოკვლევები, პედაგოგიური მოღვაწეობა, სამეცნიერო-სასწავლო ლიტერატურის გამოშვება და მრავალი სხვა. შევნიშნავთ, რომ ანალოგიური ცენტრის შექმნა მიზანშეწონილი და სასარგებლო იქნებოდა ქ. თბილისშიც.

აქტუალურ-ფინანსური სამეცნიერო-კვლევითი ცენტრის მოღვაწეობის საფუძველზე 1993 წელს მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე გაიხსნა და წარმატებით ფუნქციონირებს ახალი საუნივერსიტეტო სპეციალობა „აქტუალური და ფინანსური მათემატიკა". წარმატების ერთ-ერთ მაჩვენებლად შეიძლება ჩაითვალოს ის ფაქტი, რომ ბოლო წლებში ამ ფაკულტეტზე სწავლის მსურველთა კონკურსი საკმაოდ გაიზარდა. გადაუჭარბებლად შეიძლება ითქვას, რომ მაღალ კონკურსს სტიმული სწორედ აღნიშნულმა ახალმა საუნივერსიტეტო სპეციალობამ მისცა.

აღვნიშნოთ, რომ საქართველოში ბოლო ათწლეულში საკმაოდ ნაყოფიერად მიმდინარეობს ფუნდამენტური გამოკვლევები ფინანსურ და სადაზღვევო მათემატიკაში.

ქართველ მეცნიერთა და მეცნიერ-პედაგოგთა აღნიშნული წარმატებები განაპირობა იმან, რომ საქართველოში არსებობს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ძლიერი სკოლა, რომლის ჩამოყალიბება და განვითარება დაკავშირებულია პროფესორ გვანჯი მანიას სახელთან. მან, აგრეთვე, აღზარდა და მეცნიერების ფართო გზაზე გაიყვანა ათეულობით პერსპექტიული ახალგაზრდა მკვლევარი.

გვინდა აგრეთვე, აღვნიშნოთ, რომ საქართველოში ფინანსური მათემატიკით დაინტერესება დაკავშირებულია თვალსაჩინო მეცნიერის, პროფესორ რ. ჩიტაშვილის სახელთან. სწორედ მან დაიწყო სამეცნიერო სემინარები და მიიღო ფუნდამენტური შედეგები ამ მიმართულებით.

ავტორთა ჯგუფის ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მირზაშვილი, თ ტორონჯაძე, ო. ღლონტი, ლ. ჯამბურია მიერ პროფესორ თემურ ტორონჯაძის რედაქციით გამოცემულია წიგნი "ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები" ფინანსური და სადაზღვეწვო მათემატიკა, ფინანსური ინჟინერია.

საბაზრო ეკონომიკის წარმატებით განვითარებისა და ნორმალური ფუნქციონირებისათვის მრავალი საკითხის გათვალისწინებით უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება ქვეყნის ეკონომეტრიკული მოდელის შექმნას (რეგრესიული ანალიზის გამოყენებას). ასეთი მოდელი ძირითადი ენდოგენური და ეგზოგენური ეკონომიკური მაჩვენებლების (მახასიათებლების) მართვისა და პროგნოზირების საშუალებას იძლევა და აუცილებელია, მაგალითად, რეალური ბიუჯეტის ფორმირებისათვის. აღვნიშნავთ, რომ რეგრესულ ანალიზს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ფასიანი ქაღალდების ევოლუციის სტატისტიკურ გამოკვლევებში.

მეორე თავში შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) თვისებები, ფინანსური ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოყვანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

განსაზღვრება 1. (t,C) წყვილს (t-დროის მომენტია C-ფულადი თანხა) ეწოდება მომენტალური ფინანსური ხდომილობა ან 1-ლი რიგის ხდომილობა. მათ უბრალოდ ხდომილობას უწოდებენ.

განსაზღვრება 2. (J.C) წყვილი, სადაც $J \subseteq T-$რაიმე დროის შუალედია, ხოლო $C \in M-$ფულადი თანხა, რომელსაც ვუწოდებთ ინტერვალურ ხდომილობას ან მე-2 რიგის ხდომილობას.

ჩვენ განვსაზღვრავთ ორი ტიპის ფინანსური ხდომილობას, რომლებიც შეესაბამება ფინანსური სიდიდეების ორ ტიპს. თუმცა პრაქტიკაში უმრავლეს შემთხვევაში (ავიღოთ მაგ.: დივიდენდების გადახდა) შეგვიძლია გვერდი ავუაროთ II კლასის ხდომილობებს. ასეც იქცევიან. ამისათვის იყენებენ ინტერვალური გადახდის გარდაქმნას მომენტალურ გადასახადში:

$$(J,C) \to (^2,C)\,.$$

უმარტივეს შემთხვევაში გადასახადის სიდიდე არ იცვლება, ხოლო გარდაქმნა მდგომარეობს გადახდის აქტუალიზაციის დროის ² მომენტის არჩევაში ამ გადახდის აქტუალიზაციით.

პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გამოიყენება (J, C) ინტერვალური გადასახადის აქტუალიზაციის ორი წესი, სადაც J – დროის შუალედში

t_1 და t_2 ბოლოებით $[t_1 t_2]$. პირველ შემთხვევაში C გადასახადის გადახდა ხდება შუალედის დასაწყისში, ე.ი. $² = t_1$.

აქტუალიზაციის ასეთ სქემას ეწოდება ავანსირება (ნახ. 7, ა), მეორე შემთხვევაში C გადასახადის გადახდა ხდება შუალედის ბოლოს – $² = t_2$. ამ სქემას ფინალიზაცია ეწოდება.

ფინანსური ხდომილობების მიმდევრობას

$$\{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}, \ \ n \le \infty$$

ეწოდება პირველი რიგის (დისკრეტული) ფინანსური ან ფულადი ნაკადი და აღინიშნება სიმბოლოთი CF (ინგლისურიდან $cas^h f(x_0)$)

როდესაც $n < \infty$, ეს სასრული (დისკრეტული) ფინანსური ნაკადია. ფინანსურ ლიტერატურაში განიხილავენ აგრეთვე შემთხვევას $n = \infty$. ე.ი. უსასრულო (დისკრეტულ) ნაკადს. მაგალითად, ე.წ. მუდმივი რენტა.

განსაზღვრება 3. რენტა ეწოდება მე-2 რიგის ინტერვალურ ნაკადს.

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), \cdots, (J_n, C_n) \cdots\}$$

მომიჯნავე მონაკვეთის მიმდევრობებით

$$J_1 \cdots J_k \cdots J_n \cdots$$

რენტის პერიოდი, ერთი და იგივე სიგრძით:

$$|J_1| = |J_2| = \cdots = |J_n| = \cdots = h.$$

$h -$ ეწოდება რენტის პერიოდი, ბოლოები

$$t_0, t_1, \cdots, t_{k-1}, t_k \cdots, t_n$$

შუალედებს $J_k = (t_{k-1}, t_k)$ ეწოდება რენტის კრიტიკული მომენტები. ისინი ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას: $t_n = t_0 + n \cdot h,$ $n = 0, 1, \cdots, t_0 -$ მომენტს ეწოდება რენტის დასაწყისი. თუ რენტას აქვს J_k შუალედების სასრული რიცხვი, მაშინ მას ეწოდება ვადიანი წინააღმდეგ შემთხვევაში (უვადო ან მუდმივი). ვადიანი რენტის J_n უკანასკნელი შუალედის t_n ბოლო რიცხვს $T = t_n - t_0$ ეწოდება რენტის სიგანე.

ზოგჯერ, თანხები განკუთვნილი რენტის ბუნებრივი პერიოდებისათვის, რეალიზებას ახდენს არა ერთი გადასახადით, არამედ ერთნაირი (შედარებით წვრილი) სერიული გადასახადით, რომლებიც რენტის პერიოდებით თანაბრადაა გადანაწილებული. ასე, დივიდენდების რენტის გადახდის აქციებისათვის ბუნებრივი წლიური პერიოდით, ხშირად ადგილი აქვს კვარტალურად. სხვა მაგალითისთვის გამოდგება ობლიგაციების კუპონური რენტა. წლიური პროცენტის გადახდა ობლიგაციებისა, მოცემული კუპონური ფსონით, ხშირად ხდება წელიწადში ორჯერ თანაბარი თანხით (ნახევარ წელიწადში ერთხელ).

ასეთი სახის რენტებს ეწოდება P-ჯერადი რენტის ბაზური პერიოდის მიმართ (ჩვეულებრივ წელიწადი). ასე, რომ P-ჯერადი რენტის, წლიური პერიოდით და წლიური (გადასახადით, რეალიზაცია ხდება P ერთნაირი გადასახადით $\frac{C}{P}$ სიდიდით. ეს გადასახადები თვითონ ქმნიან რენტას, რომლებსაც დავარქმევთ მიკრორენტას, რომელიც შეესაბამება რენტის ბაზურ პერიოდს.

ავანსირებული რენტის (ხდომილების) P-ჯერადი დანაწილება, შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც მოცემული ინტერვალური რენტის P-ჯერადი დანაწილების ავანსირება.

$$D^{(P)}(Adv(\overline{CF})) = Adv(D^{(P)}(\overline{CF})) \,.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ჩვეულებრივი რენტის (ხდომილების) დანაწილება

$$D^{(P)}(Fin(\overline{CF})) = Fin(D^{(P)}(\overline{CF})) \,.$$

ფინანსური ხდომილობები, რომლებიც შეადგენენ გადასახადების 1 ტიპის ნაკადს, მიეკუთვნება დროის გარკვეულ მომენტს. ახლა შემოვიღოთ ხდომილობის ნაკადის დახასიათება, რომელიც ხდება დროის რაიმე შუალედში.

განსაზღვრება 4. გადასახადების ნაკადის ნეტო სიდიდე

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}.$$

J შუალედზე ეწოდება სიდიდეს $NV(CF, J) = \sum_{k: t_k \in J} C_k$, ე.ი. ეს არის C_k სიდიდეების ალგებრული ჯამი სიმბოლო NV – (ინგ-დან netto-value).

შევნიშნოთ, რომ დროის ინტერვალის განსაზღვრისას აუცილებელია მივუთითოთ ეკუთვნის თუ არა ამ შუალედს მისი საზღვრები. მაგ.: ნაკადისათვის:

$$CF = \{(3,\ 100), (-1,\ -200), (1,\ 300), (2,\ 400)\}.$$

დროის სხვადასხვა შუალეისათვის აუცილებელია განვსაზღვროთ ნაკადის ნეტო-სიდიდეები:

$$NV(CF, [-4,0] = 100 + (-200) = -100 \ ;$$

$$NV(CF, (-1;1]) = 300 \ ;$$

$$NV(CF, (-3,5)) = 100 - 200 + 300 + 400 = 600 \ .$$

ნაკადის ნეტო-სიდიდესთვის ადგილი აქვს: ადიტიურობის თვისებას.

ნებისმიერი $t_1 < t_2 < t_3$

$$NV(CF, [t_1 t_2]) + NV(CF, (t_2, t_3) = NV(CF, [t_1, t_3]) \ .$$

ე.ი. ნაკადის ნეტო-სიდიდე გარკვეულ შუალედზე ტოლია ნაკადების ნეტო-სიდიდეების ჯამის, რომლებიც არ შეადგენენ ამ გადაუკვეთავი ქვემონაკვეთების მონაკვეთს.

ფინანსურ ნაკადებს აქვს წყაროები (რესურსები), რომლებიც წარმოქმნიან ამ ნაკადებს. ფინანსური მათემატიკის თვალსაზრისით ეს არის – ფონდი.

ფონდის მოცულობა არის მოცემულ მომენტში ფონდის აქტივების ღირებულება. ეს 1-ლი კლასის სიდიდეა. ფულად ნაკადს, დაკავშირებული ფონდთან, შეუძლია შეცვალოს მისი სიდიდე დროის რომელიღაც შუალედში. თუ დადებითი ნაკადების მნიშვნელობად მივიჩნევთ მნიშვნელობებს შემომავალი ნაკადებიდან, ხოლო უარყოფითებს გამავალი ნაკადებიდან, მაშინ მოცემული ფულადი ნაკადი დაიყოფა ორ ნაკადად: ერთი შემომავალი ფონდში, მეორე კი მისგან გამავალი. მოცემული დროის შუალედი, ფონდის სიდიდის ცვლილება ზუსტად ტოლია ამ შუალედში გადასახადების ნაკადების ალგებრული ჯამისა.

მათემატიკურად ეს ფაქტი აღიწერება შემდეგნაირად. ვთქვათ V_0 – ფონდის საწყისი სიდიდეა; V_t – ფონდის სიდიდე დროის t მომენტში. მაშინ ნებისმიერი CF ნაკადისთვის, დაკავშირებული ფონდთან, სამართლიანია თანაფარდობა:

$$V_t = V_0 + NV(CF,(0,t]), \quad t > 0 \tag{1}$$

რომელსაც ეწოდება ბალანსის განტოლება.

შემდგომში, ვთქვათ t_1 და t_2 დროის თავისუფალი მომენტებია და $t_1 < t_2$. მაშინ (1)-დან ადიტიურობის თვისების გათვალისწინებით მოვლენის ნაკადის ნეტო-სიდიდე

$$V_{t_2} = V_0 + NV(CF,(0,t_2]) = V_0 + NV(CF,(0,t_1]) + MV(CF,(t_1,t_2]) =$$

$$= V_{t_1} + NV(CF,(t_1,t_2]).$$

ამგვარად მივიღეთ თანაფარდობა:

$$V_{t_2} = V_{t_1} + NV(CF,(t_1,t_2]), \quad t_1 < t_2. \tag{2}$$

რომელსაც ასევე ბალანსის განტოლება ეწოდება.

(2) განტოლება უბრალოდ არის „შენახვის კანონის“ გამოსახულება. მართლაც, $V_{t_2} - V_{t_1}$ სხვაობა არის ფონდის მოცულობის ცვლილება დროის $(t_1,t_2]$ შუალედში. ფონდის მოცულობა. ამ შუალედში შეიცვლება ზუსტად იმდენით, რამდენი ფულადი სახსარიც შემოვა ან გავა ფონდიდან. ნაკადის ნეტო-სიდიდე ზუსტად გვაძლევს ზოგად ბალანსს ფონდში შემომავალ და გამავალ თანხებზე.

განსაზღვრება 5. ვიტყვით, რომ (t_2, C_2) ხდომილება უშუალოდ ცვლის (t_1, C_1) მოვლენას მოცემული დეტერმინირებული S პროცესის მიმართ, თუ

$$C_2 = S(t_2; t_1, C_1), \text{ როცა } t_2 \ge t_1,$$

ან

$$C_1 = S(t_1; t_2, C_2), \text{ როცა } t_1 \ge t_2.$$

შინაარსობრივად, ერთი მოვლენის უშუალოდ შეცვლა (შეთავსება) მეორეთი ნიშნავს, რომ ან ის მოავლენს მეორეს, როგორც ნაჩვენები პროცესის მიმართ საწყის ხდომილებას, ან თვითონ წარმოიქმნება ამ სხვა ხდომილებით, როგორც საწყისი.

ეს ნიშნავს, იმას რომ უშუალო ჩანაცვლების ფარდობა არის სიმეტრიული ფარდობა, ე.ი. თუ ერთი ხდომილება უშუალოდ ანაცვლებს მეორეს, მაშინ სამართლიანია შებრუნებულიც მეორე, ასევე უშუალოდ ანაცვლებს მისვლას. ამ დროს ორივე ხდომილება ძევს ერთ

ტრაექტორიაზე, ამასთან ერთ-ერთი მათგანი არის ამ ტრაექტორიის პროცესის საწყისი მდგომარეობა.

განსაზღვრება 6. ფინანსურ პროცესს ეწოდება სრულად განსაზღვრული, თუ $(^{2}, C)$ ნებისმიერი მდგომარეობისათვის და დროს ყოველი $^{\circ}$ მომენტისათვის არსებობს ერთადერთი მნიშვნელობა V ისეთი, რომ $(^{\circ}, V)$ ხდომილობა უშუალოდ ანაცვლებს $(^{2}, C)$ მდგომარეობას, ამასთან დროს $^{\circ}$ მომენტი შეიძლება როგორც მისდევდეს ^{2} მომენტს, ასევე უსწრებდეს მას.

მოყვანილი განსაზღვრების აზრი მარტივია. სრულად განსაზღვრული პროცესები საშუალებას გვაძლევენ ხდომილებები გარდავქმნათ ამ ხდომილებების არა მარტო მომავალი, არამედ წარსული დროის ხდომილებების მიმართ.

მართლაც, თუ $(^{\circ}, V)$ მოვლენა უშუალოდ ანაცვლებს (ცვლის) $(^{2}, C)$ მოვლენას, ამასთან $p \geq {}^{2}$, მაშინ განსაზღვრის ძალა. ეს ნიშნავს, რომ

$$V = S(p;{}^{2},C)\,,$$

ან, რაც იგივეა

$$V = FV_{p}({}^{2},C)\,.$$

თუ კი $(^{\circ}, V)$ მოვლენა იცვლება $(^{2}, C)$ ხდომილებით, ე.ი. ${}^{2} \geq P$, მაშინ

$$C = S({}^{2}, p,V)\,,$$

ან

$$C = FV_{c}(p;V)\,.$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში, $(^{\circ}, V)$ ხდომილება არის საწყისი იმ პროცესისათვის, რომელიც მომავალში წარმოშობს მოცემულ $(^{2}, C)$ ხდომილებას.

V მნიშვნელობა (დროის მოცემული P მომენტის მიმართ) საშუალებას გვაძლევს ვილაპარაკოთ მასზე, როგორც $P < {}^{2}$ მომენტამდე $(^{2}, C)$ მოვლენილ დაყვანილ მნიშვნელობაზე. ამ მნიშვნელობას უწოდებენ ამ ხდომილების დაყვანილ ან მიმდინარე მნიშვნელობას და წერენ

$$V = PV_{p}({}^{2},C)\,.$$

PV აღნიშვნა არის შემოკლებული ინგლ. „Present Value" (დღევანდელი, ახლანდელი მნიშვნელობა).

ამგვარად, FV ოპერატორს ხდომილებები მიჰყავს მომავალზე, ხოლო PV ოპერაციის – ამ ხდომილობების მიმართ წარსული დროის მომენტებზე. ორივე ეს ოპერატორი საშუალებას იძლევა გარდაქმნითი ხდომილობების დროის ნებისმიერ მომენტზე. დაყვანის ეს ზოგადი ოპერაცია აღინიშნება იგივე PV სიმბოლოთი, რითაც წარსული დროის მომენტებთან დაყვანა. ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$V_p = PV_p({}^2, C).$$

ყველა შემთხვევაში, ე.ი. როგორც $P < {}^2$ შემთხვევაში, ასევე $P \geq {}^2$ შემთხვევაშიც. ამასთან უკანასკნელ შემთხვევაში

$$PV_p({}^2, C) = FV_p({}^2, C). \tag{3}$$

P მომენტს, რომლის მიმართაც განისაზღვრება (², C) ხდომილობის დაყვანილი (მიმდინარე) მნიშვნელობა, ეწოდება დაყვანის მომენტი ან პოლუსი. პრაქტიკაში მას ხშირად უწოდებენ ფოკალურ თარიღს.

ვთქვათ (t, C) – ნებისმიერი ხდომილებაა და P პოლუსია. ფუნქციონალურ კანონს

$$V_p = A(t, p; C) = FV_p(t, C), \quad P \geq t, \tag{4}$$

რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილების მომავალ მნიშვნელობას უწოდებენ კაპიტალიზაციის ფინანსურ კანონს.

ორმაგი სახით განისაზღვრება დისკონტირების ფინანსური კანონი:

$$V_p = D(t, p; C) = PV_p(t, C), \quad P \leq t. \tag{5}$$

ტერმინი „დისკონტირება“ წარმოშობილია ინგლისურიდან discount, რაც ნიშნავს დაკლებას, ე.ი. ღირებულების შემცირება საწინააღმდეგო დაგროვებისა (კაპიტალიზაციისა). ნორმალურ სიტუაციაში საინვესტიციო პროცესიდან ელოდებიან საინვესტიციო კაპიტალის ღირებულების გაზრდას. ამიტომ მოძრაობა წინ (დაყვანა დროის მომავალ მომენტზე) აღინიშნება როგორც კაპიტალიზაცია, ხოლო მოძრაობა უკან (დაყვანა წარსული დროის მომენტზე) – როგორც დისკონტირება.

ხდომილობის დაყვანას მის მიმართ წარსული დროის მომენტზე უწოდებენ დისკონტირებას, ხოლო თვით დაყვანილ მნიშვნელობას – დისკონტირებულ მნიშვნელობას.

ამრიგად, მეორე თავში შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის)

თვისებები, ფინანსური, ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოყვანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

მესამე თავში გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ევროპული ტიპის ოფციენის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.

განვიხილოთ ფინანსური (B, S)-ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, რომელიც ფუნქციონირებს დროის მომენტებში $n = 0,1,\ldots,N$, $N < \infty$ და შედგება მხოლოდ ორი აქტივისგან: $B = (B_n)$ არის ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და $S = (S_n)$ არის აქციები. ამ მოდელის თანახმად B_n და S_n სიდიდეების ევოლუცია დროში აღიწერება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებებით:

$$B_n = (1+r)B_{n-1}\,,\ B_0 > 0, \tag{6}$$

$$S_n = S_{n-1}(1+ {}^\circ{}_n), \quad S_0 > 0, \tag{7}$$

სადაც $r \geq 0$ არის საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო $^\circ = {}^\circ(n)$, $n = 0,1,\ldots,N$, არის ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა და ყოველი $^\circ{}_n$ იღებს ან $a -$ს ან $b -$ს ტოლ მნიშვნელობას. ამასთან იგულისხმება, რომ $< a < r < b$.

წარმოვიდგინოთ ახლა ინვესტორი, რომელსაც დროის საწყის $n = 0$ მომენტში გააჩნია თანხა $X_0 = x > 0$ და მას სურს (6), (7) ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით თავისი საწყისი თანხა დროის N მომენტში გახადოს f_N თანხის ტოლი. ინვესტორის ამ სურვილს საინვესტიციო პრობლემა ეწოდება. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ გვაქვს გარკვეულ ფუნქციათა მიმდევრობა $g = (g_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$, $g_0 = 0$.

შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნები:

$$P^* = \frac{r-a}{b-a}\,, \tag{8}$$

$$F_x(x;p^*) = E^*\Bigg[\sum_{k=0}^{n} f\,(x(1+b)^k(1+a)^{n-k}C_n^k\,(p^*)^k(1-p^*)^{n-k} + \\ + \sum_{k=n+1}^{N}(1+r)^{n-k+1}g^k(\mathsf{F}_n)\Bigg], \tag{9}$$

სადაც E^* აღნიშნავს p^* ალბათური ზომით გასაშუალებას.

თეორემა. ვთქვათ, (6), (7) ფინანსურ (*B*, *S*)-ბაზარზე ვიხილავთ ევროპული ტიპის ოფციონს $f_N = f(S_N)$ გადახდის ფუნქციით და $g = (g_n)$ არის F_{n-1}-ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულებები:

1. მინიმალური $®_n^* = (\;{}_n^*, ¥_n^*)$ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი განიმარტება ტოლობით

$$X_n^{®^*} = (1+r)^{-N+n} \cdot F_{N-n}(S_n; p^*)\,. \tag{10}$$

2. ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = (1+r)^{-N} \cdot F_N(S_0; p^*), \tag{11}$$

სადაც p^* და $F_N(x; p^*)$ განმარტებულია შესაბამისად (8), (9) ტოლობებით.

3. არსებობს არათვითდაფინანსებადი მინიმალური ჰეჯი $®_n^* = (\;{}_n^*, ¥_n^*)$, რომლის კომპონენტები მოიცემა ტოლობებით:

$$\begin{aligned} {}_n^* = \frac{1}{B_N}\{ & F_{N-n+1}(S_{n-1}; p^*) - \\ & -(1+r)\left[F_{N-n}(S_{n-1}\cdot(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}\cdot(1+b); p^*)\right]\}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$¥_n^* = \frac{(1+r)^{-N+n}}{S_{n-1}(b-a)}\left[F_{N-n}(S_{n-1}\cdot(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}\cdot(1+b); p^*)\right]\}. \tag{13}$$

განვიხილოთ ფინანსური (*B*, *S*)-ბაზარი ცნობილი კოქსი-როსსი-რუბინშტეინის დისკრეტული მოდელი

$$B_n = (1+r)B_{n-1}\,,\;\; B_0 > 0\,, \tag{14}$$

$$S_n = (1+ °_n)S_{n-1}\,,\;\; S_0 > 0\,. \tag{15}$$

და არათვით-დაფინანსებადი სტრატეგიები $®_n$. დავუშვათ რომ $f = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ თანმიმდევრობა F_{n-1}-ზომადი ფუნქციების $g = (g_n)$ განსაზღვრულია ტოლობით

$$g_n = c¥_n S_{n-1}\,,\;\; 0 < x < 1\,. \tag{16}$$

თეორემა. დავუშვათ, რომ ფინანსური ბაზარი (14), (15) არის განხილული და თანმიმდევრობა F_{n-1}-ზომადი ფუნქციებისა $g = (g_n)$ მოცემულია (16) განტოლების მეშვეობით მაშინ

1) ევროპული ტიპის ოფციონის სამართლიანი ფასი C_N გადახდის ფუნქციასთან ერთად $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$C_N = E*\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^N \cdot f_N\right]. \tag{17}$$

სადაც E* წარმოადგენს საშუალოს P*∈**P** ღონისძიების მიმართ, როგორიც არის

$$P^*(°_n = b) = p^*, \quad P^*(°_n = a) = 1 - p^*, \quad 0 < p^* < 1,$$

$$p^* = \frac{r + c(1+r) - a}{(b-a)},$$

2) არსებობს მინიმალური (x, f, N)-ჰეჯი $® ^* = (®^*_n) = ({}^*_n, ¥^*_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$, რომლის F_{n-1}-ზომადი გასაზომი კომპონენტი განისაზღვრება ფორმულებით

$${}^*_n = \frac{X^*_{n-1} - ¥^*_n S_{n-1}(1+c)}{B_{n-1}}, \tag{18}$$

$$¥^*_n = \frac{\sim^*_n B_n}{S_{n-1}}, \tag{19}$$

სადაც $a^*_k = a^*_k(°_1, \ldots, °_{k-1})$, $k \geq 2$, $a^*_1 = const$, წარმოადგენენ განსაზღვრულ F_{n-1}-ზომად ფუნქციებს.

3) კაპიტალი $X^{®*}_n = (X^{®*}_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$, რომელიც შეესაბამება ჰეჯს $®^* = (®^*_n)$ მოცემულია ფორმულით

$$X^®_n = E^*\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^{N-n} \cdot f_N / F_n\right]. \tag{20}$$

ამრიგად მესამე თავში შესწავლილია ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელის შემთხვევაში:

აქციის ფასის ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე დამოკიდებული გადახდის ფუნქციისათვის მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები.

გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.

მეოთხე თავში მოყვანილია საილუსტრაციო რიცხვითი მალითების ამოხსნები ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონებისთვის. გამოყენებითი პროგრამების პაკეტების ფინანსური ფუნქციები პროგრამა MS Excel-ში და პროგრამა „მათემატიკაში“. აგრეთვე, გადმოცემულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის; ევროპული ოფციონის გათვლის და არათვითფინანსირებადი სტრატეგიების აგების კომპიუტერული პროგრამები და მაგალითები.

დასკვნა

- შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) თვისებები, ფინანსური ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოყვანილია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები;
- შესწავლილია ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელის შემთხვევაში;
- აქციის ფასის ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე დამოკიდებული გადახდის ფუნქციისათვის მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები;
- გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.
- მიღებულია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნა ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით;
- გადმოცემულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამა; ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანის პროგრამა და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების პროგრამა.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში

1. ყიფიანი ლ., საბაზრო ეკონომიკა და მისი სოციალური საკითხები // საქართველოს საავტომობილო-საგზაო ინსტიტუტის შრომები, № 2, თბილისი, 2005. გვ. 221-224;
2. Кикнадзе Н., Кипиани Л. Методы и задачи совершенствования организационных структур системы управления производственно-экономичкскими объектами // Труды международная научно-техническая конференция Грузинского автомобильно-дорожного института. № 2. Тбилиси. 2005. с. 229-233;
3. ყიფიანი დ., ყიფიანი ლ. ტესებრი კვეთის წიბოებით გამაგრებული გარსების საანგარიშო ალგორითმი // რესპუბლიკური ღია სამეცნიერო კონფერენციის „მშენებლობა და ოცდამეერთე საუკუნე“ მოხსენებათა თეზისები. თბილისი. 2005. – გვ. 4;
4. ქურდაძე მ., ყიფიანი ლ., ერემეიშვილი ნ., ნარეკლიშვილი თ. ფუნქციურად გადაწყობადი ოპტოელექტრონული სტრუქტურების დახასიათება და ანალიზი საიმედოობის თეორიის ძირითადი ცნებებითა და განმარტებები // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 1-3. თბილისი. 2006. გვ. 16-22;
5. ქურდაძე მ., ერემეიშვილი ნ., ხუციშვილი ლ., ყიფიანი ლ. ფუნქციურად გადაწყობილი ოპტოელექტრონული სტრუქტურების სპეციფიკური თავისებურებები და მათი საიმედოობის გათვლის ანალიზის სირთულეები // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 4-6. თბილისი. 2006. გვ. 9-12;
6. ბაბუციძე ჰ., ყიფიანი ლ. შენობა-ნაგებობათა სადიაგნოსტიკო კომპიუტერული სისტემები // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 10-12. თბილისი. 2006. გვ. 15-17;

7. ქურდაძე მ., ყიფიანი ლ., ერემეიშვილი ნ. ოპტოელექტრონული სტრუქტურების ფუნქციური შესაძლებლობების ანალიზი და მათი გამოყენების აქტუალურობა გამოთვლითი ტექნიკისა და მართვის სისტემების მოწყობილობებში // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 7-9. თბილისი. 2006. გვ. 6-9.
8. ორჯონიკიძე ნ., ყიფიანი ლ., ბაგდასარიანი ვ. ბიზნესის საფუძვლები. თბილისი. სტუ, 2007. 206 გვ;
9. ორჯონიკიძე ნ., ყიფიანი ლ., ბაგდასარიანი ვ. მცირე ბიზნესი. თბილისი. სტუ, 2007. 152 გვ;
10. Долидзе К.Г., Кипиани Л.Г., Тодуа М.Н. Особенности программирования при численной реализации алгоритма расчета нелинейно деформируемых оболочек с изломами // Грузинский автомобильно-дорожный институт. Труды № 3. Тбилиси. 2007. – с. 188-190;
11. ქურდაძე მ., კაიშაური თ., ყიფიანი ლ., სულაშვილი გ. გადაწყობის ალგორითმისა და საიმედოობის კონტროლის ალგორითმის დამუშავება ფუნქციონალურად – გადაწყობადი ოპტოელექტრონული სტრუქტურების ფუნქციონირების რეჟიმში // საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის „თანამედროვე ტექნოლოგიები და მასალები“, მოხსენებათა თეზისები. ქუთაისი. 2008. გვ. 215-216;
12. ჭიკაძე გ., სულაშვილი მ., სულაშვილი გ., ყიფიანი ლ. კორუფციის დინამიკური მოდელი//საერთშორისო სამეცნიერო კონფერენციის „ინფორმაციული ტექნოლოგიები 2008“ მოხსენებათა კრებული, თბილისი, სტუ, 2008, გვ.120-123;
13. ყიფიანი გ., ყიფიანი დ., ყიფიანი ლ. ფენოვან სისტემებში სამკუთხა სასრული ელემენტის (სე) სიხისტის მატრიცის შედგენა განივი ძვრის გათვალისწინებით // ინტელექტუალი № 8. თბილისი. 2009. გვ. 161-164.
14. კაიშაური თ., ყიფიანი ლ., ხართიშვილი ი. კონუსური გარსის ფიზიკურად არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანის გადაწყვეტის ალგორითმი // საერთაშორისო-სამეცნიერო ტექნიკური კონფერენციის „სამშენებლო მექანიკის პრობლემების“ შრომების კრებული. (ნომერი ეძღვნება სტუ-ს სამშენებლო მექანიკისა და

სიესმომედეგომის კათედრის 50 წლის იუბილეს). თბილისი. სტუ. 2010. გვ. 259-253;

15. ყიფიანი ლ. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ამოცანა და პროგრამა // ინტელექტი № 2, თბილისი. 2012.
16. Babilua Petre, Kipiani Lia. On one problem of furopean option pricing // Georgian International journal of science and Technology. Tom 3. N 2 New York. 2011. pp. 237-248;
17. ყიფიანი ლ. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის გათვლა და პროგრამა // ინტელექტუალი № 19, თბილისი. 2012, გვ 174-179.

SUMMARY

Is studied some problems of deterministic and stochastic financial mathematics. In deterministic part are considered financial events and flows of funds, in particular in the flows of first and second order is studied actualization of second order flow – transformation to first order flow, or operations of advancing and finalization. Are stated definitions of multiplying on number of second order flow and flows summation operations and numerical examples. For special second order flows are introduced operation of rent period division and is studied connection properties of this operation with operations of advancing and actualization. Also are studied for flows of funds properties of financial laws capitalization and discounting operations.

In the stochastic part are investigated in the case of binomial model of financial market task of European type options pricing. The structure of financial market has rather complex natureand its analysis requires solution of interesting and complex mathematical problems. Such are, for example: selection of market model and assessment of including in it parameters, definition of fair price of shares or other actives purchase contracts, for example options, forwards, futures,; definition of optimal strategies of self-finansing and nonself-financing and others.

Are studied European type options pricing problem for self-financing strategies and for one class of nonself-financing strategies.

Is solved pricing general problem of European option for nonself-financing strategies, when payment function of option is depended only on latest values of shares price. Is obtained option's fair price and optimal strategy – hedge explicit expressions and is constructed corresponding to this hedge capital process. Is solved also one particular problem, when in the investment process occurs consideration of proportional to share's price amount in the dividend form. Thev standard option for sale is considered. I this case, when considered dividend in the investment process is equal to zero, then from the obtained result is received well known Cox-Ross-Rubinstein model for fair price of standard option for sale.

Also are stated fro illustration solution of numerical examples by application of trees and answering portfolio principle.

Are studied some problems of deterministic and stochastic financial mathematics. In the deterministic part are considered financial events and flows of funds, in particular, the first and second order flows. Is studied actualization of second order flow – the transformation of first order flow, or operations of advancing and finalization. Are stated definitions of multiplying on number of second order flow and flows summation operations and numerical examples. For special second order flows are introduced operation of rent period division and are studied connection properties of this operation with operations of advancing and actualization. Also are studied for flows of funds properties of financial laws capitalization and discounting operations.

In the stochastic part are investigated in the case of binomial model of financial market task of European type options pricing. The structure of financial market has rather complex nature and its analysis requires solution of interesting and complex mathematical problems. Such are, for example: selection of market model and assessment of including in it parameters, definition of fair price of shares or other actives purchase contracts, for example options, forwards, futures; definition of optimal strategies of self-financing and nonself-financing and others.

Are studied European type options pricing problem for self-financing strategies and for one class of nonself-financing strategies.

Is solved pricing general problem of European option for nonself-financing strategies, when payment function of option is depended only on latest values of shares price. Is obtained option’s fair price and optimal strategy – hedge explicit expressions and is constructed corresponding to this hedge capital process. Is solved also one particular problem, when in the investment process occurs consideration of proportional to share’s price amount in the dividend form. Thev standard option for sale is considered. I this case, when considered dividend in the investment process is equal to zero, then from the obtained result am received well known Cox-Ross-Rubinstein model for fair price of standard option for sale.

Also are stated for illustration solution of numerical examples by application of trees and answering portfolio principle.

The aim of work: study of features of financial operations and financial laws of financial flows (in particular, rent) and according generation of computer programs for numerical examples illustration. In the European option pricing task in case of discrete financial market the construction if nonself-financing strategies and creation of computer programs for numerical examples.

ARE stated European option pricing task program; program for European option calculation task; program for construction of nonself-financing strategies; computation and program in MC Excel of minimal strategies.

Are studied for properties of discrete financial flows (in particular, rent) actualization – operations of advancing and finalizations and financial laws – capitalization and discounting. For one class of nonself-financing strategies are solved general tasks of option pricing and are solved particular illustrated numerical examples.

Are studied properties of financial events and flows of funds (in particular, the rent), financial operations and financial flows. The according numerical examples for illustration are given.

The problematic of European option pricing task for two-activity nonself-financing strategies in case of discrete binomial model of Cox-Rossi-Rubinstein are studied.

The depended on payment function for value of share’s price in last moment are obtained explicit expressions of option fair price and minimal hedge.

Are studied general and partial problems for European option pricing of nonself-financing strategies.

For illustration solution of numerical examples by application of binomial trees and response portfolio principle is obtained.

Are stated program of European option pricing; program of European option calculation and program of nonself-financing strategies construction.