ლია ყიფიანი

დისკრეტულ ფინანსურ ბაზარზე ოფციონის ფასდადების მოდელის შემუშავება

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
თვე, 2012 წელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ლია ყიფიანის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „ დისკრეტულ ფინანსურ ბაზარზე ოფციონის ფასდადების მოდელის შემუშავება“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი 21.06.2012

ხელმძღვანელი:
სრული პროფესორი თინათინ კაიშაური

რეცენზენტი:
სრული პროფესორი მედეა თევდორაძე

რეცენზენტი:
ასოცირებული პროფესორი გრიგოლ სოხაძე (თსუ)

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2012 წელი

ავტორი: ყიფიანი ლია

დასახელება: დისკრეტულ ფინანსურ ბაზარზე ოფციონის ფასდადების მოდელის შემუშავება

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: 21.06.2012

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა ის მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

გამოკვლეულია დეტერმინირებული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი პრობლემა. დეტერმინისტულ ნაწილში განხილულია ფინანსური ხდომილობები და ნაკადები, კერძოდ პირველი და მეორე რიგის ნაკადები. შესწავლილია მეორე რიგის ნაკადის აქტუალიზაცია – პირველი რიგის ნაკადად გარდაქმნა, ანუ ავანსირებისა და ფინალიზაციის ოპერაციები. მოტანილია მეორე რიგის ნაკადის რიცხვზე გამრავლებისა და ნაკადების შეკრების ოპერაციების განმარტებები და რიცხვითი მაგალითები. სპეციალური მეორე რიგის ნაკადისთვის – რენტისთვის შემოტანილია რენტის პერიოდის დაყოფის ოპერაცია და შესწავლილია ამ ოპერაციის კავშირის თვისებები ავანსირებისა და აქტუალიზაციის ოპერაციებთან. შესწავლილია აგრეთვე ფინანსური ნაკადებისთვის ფინანსური კანონების – კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების ოპერაციების თვისებები.

სტოქასტურ ნაწილში გამოკვლეულია ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანა. ფინანსური ბაზრის სტრუქტურა საკმაოდ რთული ბუნებისაა და მისი ანალიზი მოითხოვს საინტერესო და რთული მათემატიკური ამოცანების გადაჭრას. ასეთებია მაგალითად: ბაზრის მოდელის შერჩევა და მასში შემავალი პარამეტრების შეფასება, აქციების ან სხვა აქტივების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების, მაგალითად ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების, სამართლიანი ფასის დადგენა, ინვესტორის თვითდაფინანსებადი და არათვითდაფინანსებადი ოპტიმალური სტრატეგიების დადგენა და სხვა.

შესწავლილია ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონების ფასდადების ამოცანა თვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისთვის.

გადაწყვეტილია ევროპული ოფციონის ფასდადების ზოგადი ამოცანა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიისთვის, როდესაც ოფციონის გადახდის ფუნქცია დამოკიდებულია აქციის ფასის მხოლოდ ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე. მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და ოპტიმალური სტრატეგიის – ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები და აგებულია ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი. გადაწყვეტილია აგრეთვე ერთი კერძო ამოცანა, როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება აქციის ფასის პროპორციული თანხის გათვალისწინება დივიდენდის სახით. განხილულია ყიდვის დივიდენტი ინვესტირების პროცესში ნულის ტოლია, მაშინ მიღებული შედეგიდან მიიღება კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის ფორმულა ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასისთვის.

მოტანილია აგრეთვე საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნა ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით.

ნაშრომის მიზანია: ფინანსური ნაკადების (კერძოდ რენტის), ფინანსური ოპერაციების და ფინანსური კანონების თვისებების შესწავლა და სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითებისათვის კომპიუტერული პროგრამების შედგენა. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში დისკრეტული ფინანსური ბაზრის შემთხვევაში

არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგება და რიცხვითი მაგალითების კომპიუტერული პროგრამების შექმნა.

გადმოცემულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამა; ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანის პროგრამა; არათვითფინანსირებადი სტრატეგიების აგების ამოცანის პროგრამა; მინიმალური სტრატეგიის კომპიუტერული გამოთვლა და პროგრამა MS Excel-ში.

შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) აქტუალიზაციის – ავანსირებისა და ფინალიზაციის ოპერაციები და ფინანსური კანონების – კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების თვისებები. არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისთვის გადაწყვეტილია ოფციონის ფასდადების ზოგადი ამოცანები და ამოხსნილია კერძო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) თვისებები, ფინანსური, ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოტანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

შესწავლილია ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელის შემთხვევაში:

აქციის ფასის ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე დამოკიდებული გადახდის ფუნქციისათვის მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები.

გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.

მიღებული საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნა ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით.

გადმოცემული ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამა; ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანის პროგრამა და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების პროგრამა.

Abstract

Is studied some problems of deterministic and stochastic financial mathematics. In deterministic part are considered financial events and flows of funds, in particular in the flows of first and second order is studied actualization of second order flow – transformation to first order flow, or operations of advancing and finalization. Are stated definitions of multiplying on number of second order flow and flows summation operations and numerical examples. For special second order flows are introduced operation of rent period division and is studied connection properties of this operation with operations of advancing and actualization. Also are studied for flows of funds properties of financial laws capitalization and discounting operations.

In the stochastic part are investigated in the case of binomial model of financial market task of European type options pricing. The structure of financial market has rather complex natureand its analysis requires solution of interesting and complex mathematical problems. Such are, for example: selection of market model and assessment of including in it parameters, definition of fair price of shares or other actives purchase contracts, for example options, forwards, futures,; definition of optimal strategies of self-finansing and nonself-financing and others.

Are studied European type options pricing problem for self-financing strategies and for one class of nonself-financing strategies.

Is solved pricing general problem of European option for nonself-financing strategies, when payment function of option is depended only on latest values of shares price. Is obtained option's fair price and optimal strategy – hedge explicit expressions and is constructed corresponding to this hedge capital process. Is solved also one particular problem, when in the investment process occurs consideration of proportional to share's price amount in the dividend form. Thev standard option for sale is considered. I this case, when considered dividend in the investment process is equal to zero, then from the obtained result is received well known Cox-Ross-Rubinstein model for fair price of standard option for sale.

Also are stated fro illustration solution of numerical examples by application of trees and answering portfolio principle.

Are studied some problems of deterministic and stochastic financial mathematics. In the deterministic part are considered financial events and flows of funds, in particular, the first and second order flows. Is studied actualization of second order flow – the transformation of first order flow, or operations of advancing and finalization. Are stated definitions of multiplying on number of second order flow and flows summation operations and numerical examples. For special second order flows are introduced operation of rent period division and are studied connection properties of this operation with operations of advancing and actualization. Also are studied for flows of funds properties of financial laws capitalization and discounting operations.

In the stochastic part are investigated in the case of binomial model of financial market task of European type options pricing. The structure of financial market has rather complex nature and its analysis requires solution of interesting and complex mathematical problems. Such are, for example: selection of market model and assessment of including in it parameters, definition of fair price of shares or other actives purchase contracts, for example options, forwards, futures; definition of optimal strategies of self-financing and nonself-financing and others.

Are studied European type options pricing problem for self-financing strategies and for one class of nonself-financing strategies.

Is solved pricing general problem of European option for nonself-financing strategies, when payment function of option is depended only on latest values of shares price. Is obtained option’s fair price and optimal strategy – hedge explicit expressions and is constructed corresponding to this hedge capital process. Is solved also one particular problem, when in the investment process occurs consideration of proportional to share’s price amount in the dividend form. Thev standard option for sale is considered. I this case, when considered dividend in the investment process is equal to zero, then from the obtained result am received well known Cox-Ross-Rubinstein model for fair price of standard option for sale.

Also are stated for illustration solution of numerical examples by application of trees and answering portfolio principle.

The aim of work: study of features of financial operations and financial laws of financial flows (in particular, rent) and according generation of computer programs for numerical examples illustration. In the European option pricing task in case of discrete financial market the construction if nonself-financing strategies and creation of computer programs for numerical examples.

ARE stated European option pricing task program; program for European option calculation task; program for construction of nonself-financing strategies; computation and program in MC Excel of minimal strategies.

Are studied for properties of discrete financial flows (in particular, rent) actualization – operations of advancing and finalizations and financial laws – capitalization and discounting. For one class of nonself-financing strategies are solved general tasks of option pricing and are solved particular illustrated numerical examples.

Are studied properties of financial events and flows of funds (in particular, the rent), financial operations and financial flows. The according numerical examples for illustration are given.

The problematic of European option pricing task for two-activity nonself-financing strategies in case of discrete binomial model of Cox-Rossi-Rubinstein are studied.

The depended on payment function for value of share’s price in last moment are obtained explicit expressions of option fair price and minimal hedge.

Are studied general and partial problems for European option pricing of nonself-financing strategies.

For illustration solution of numerical examples by application of binomial trees and response portfolio principle is obtained.

Are stated program of European option pricing; program of European option calculation and program of nonself-financing strategies construction.

შინაარსი

ნახაზების ნუსხა

მადლიერება

ავტორი დიდი მადლობელია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სრული პროფესორის თინათინ კაიშაურის და ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორის პეტრე ბაბილუას იმ კონსულტაციების, ყურადღებისა და პრაქტიკული დახმარებისათვის, რასაც მუდმივად გრძნობდა სადისერტაციო ნაშრომზე მუშაობის პერიოდში.

შესავალი

თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტები ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი ამოცანა. კერძოდ ფინანსური ხდომილობებისა და ნაკადების დროში ყოფაქცევა და დისკრეტულ ბინომურ ბაზარზე პოპულარული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანა.

საქართველოს ბოლო ათწლეულებში დაადგა საბაზრო ეკონომიკის განვითარების გზას. ამიტომ მიგვაჩნია, რომ სადისერტაციო ნაშრომში განხილული პრობლემატიკა ქვეყნის ეკონომიკის განვითარებისთვის მნიშვნელოვანი და **აქტუალურია**.

ნაშრომის მიზანია: ფინანსური ნაკადების (კერძოდ რენტის), ფინანსური ოპერაციების და ფინანსური კანონების თვისებების შესწავლა და სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითებისათვის კომპიუტერული პროგრამების შედგენა. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში დისკრეტული ფინანსური ბაზრის შემთხვევაში არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგება და რიცხვითი მაგალითების კომპიუტერული პროგრამების შექმნა.

სადოქტორო ნაშრომის **მეცნიერული სიახლე** მდგომარეობს შემდეგში: შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) აქტუალიზაციის – ავანსირებისა და ფინალიზაციის ოპერაციები და ფინანსური კანონების – კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების თვისებები. არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისთვის გადაწყვეტილია ოფციონის ფასდადების ზოგადი ამოცანები და ამოხსნილია კერძო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

საქართველოს ზოგიერთმა ბანკმა აქციები განალაგა სავაჭრო უცხოურ საფონდო ბირჟებზე (ფინანსურ ბაზრებზე), ამიტომ ოფციონების ფასდადების ამოცანებს დიდი **პრაქტიკული ღირებულება** აქვს, რადგანაც ოფციონების ერთ-ერთი ძირითადი დანიშნულება არის ის, რომ ისინი წარმოადგენს აქციების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტებს.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები, დაკავშირებული ოფციონების ფასდადების ზოგად და კერძო ამოცანებთან არათვით-დაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის გამოქვეყნებულია რეცენზირებად ჟურნალებში და ჩვენი აზრით მათი **უტყუარობა** ეჭვს არ იწვევს.

ნაშრომი აპრობაცია: ნაშრომის ცალკეული ნაწილები მოხსენებულია 4 საერთაშორისო და რესპუბლიკურ კონფერენციაზე, ხოლო მთლიანი ნაშრომი სადოქტორო პროგრამით გათვალისწინებულ ორ სემინარზე.

პუბლიკაციები: ნაშრომის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია 8 სამეცნიერო სტატიასა და 4 კონფერენციების მოხსენებათა კრებულებში. ასევე ორ სახელმძღვანელოში.

სადისერტაციო ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა. ნაშრომი შედგება შესავლისგან, ოთხი თავისგან და ოცდახუთი პარაგრაფისგან. დასკვნებისა და გამოყენებული ლიტერატურისაგან. ნაშრომის მოცულობა 141 გვერდია.

განვიხილოთ ახლა ნაშრომის ძირითადი შინაარსი მოკლედ.

პირველ თავში მოტანილია ნაშრომში გამოყენებული ლიტერატურის მიმოხილვა. კერძოდ ჩამოყალიბებულია ძირითადი საკითხები და მითითებულია ამ საკითხებთან დაკავშირებული შედეგები ციტირებული ნაშრომების მიხედვით.

მეორე თავში შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) თვისებები, ფინანსური ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოტანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

მესამე თავში გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ევროპული ტიპის ოფციენის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.

მეოთხე თავში მოტანილია საილუსტრაციო რიცხვითი

მაგალითების ამოხსნები ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონებისთვის. გამოყენებითი პროგრამების პაკეტების ფინანსური ფუნქციები პროგრამა MS Excel-შო და პროგრამა „მათემატიკაში". აგრეთვე გადმოცემულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის; ევროპული ოფციონის გათვლის და არათვითფინანსირებადი სტრატეგიების აგების კომპიუტერული პროგრამები და მაგალითები.

თავი I. ლიტერატურის მიმოხილვა

1.1. პრობლემის მდგომარეობა

ცნობილია, რომ თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი უკავია ფინანსურ ბაზარზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებს. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. ამ პრობლემებს შეისწავლის ფინანსური მათემატიკა. ფინანსური მათემატიკა ორი ძირითადი მიმართულებისაგან შედგება: დეტერმინისტული ფინანსური მათემატიკა და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. პირველ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ ფინანსური პროცესების დროში სრული განსაზღვრებაა შესაძლებელი, ხოლო მეორე შემთხვევაში ხდება შემთხვევითი ფაქტორების გათვალისწინება. ფინანსურ მათემატიკაში შეისწავლება საპროცენტო განკვეთის დროითი სტრუქტურა მხოლოდ დროზე დამოკიდებულების გათვალისწინებით.

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა ფინანსების თეორიის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს და იგი ინტენსიურად ვითარდება ბოლო ათწლეულში. ამ კვლევაში გადამწყვეტი როლი ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის, შემთხვევით პროცესთა თეორიისა და, განსაკუთრებით, თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდებს მიეკუთვნება. სწორედ ამ მეთოდების გამოყენებით გახდა შესაძლებელი ძირითადი (საბაზისო, პირველადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ობლიგაციების, აქციების ევოლუციის (ტრაექტორიის) ადეკვატური აღწერა, ფინანსური ბაზრების დროში დისკრეტულად და უწყვეტად ფუნქციონირებადი მათემატიკური მოდელების შექმნა და წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების გათვლის ამოცანების გადაწყვეტა. სახელწოდება „წარმოებული ფასიანი ქაღალდი“ მიუთითებს იმაზე, რომ იგი წარმოადგენს გარკვეულ პირობებში რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვის ხელშეკრულებას (კონტრაქტს) ორ მხარეს – მყიდველსა და გამყიდველს შორის. მაგ., ოფიციონის (ოფიციონური კონტრაქტის) საფუძველი შეიძლება იყოს აქცია, ვალუტა, საქონელი, თვითონ ოფციონი და სხვ.

1. თანამედროვე ფინანსური ბაზარი წარმოადგენს ფულის, ვალუტის (როგორც უცხოური ქვეყნის ფულის), კეთილშობილი (ძვირფასი) ლითონებისა და სხვადასხვა ფინანსური ინსტრუმენტების, მათ შორის ფასიანი ქაღალდების ბაზრების ერთობლიობას. როგორც წინასიტყვაობაში აღვნიშნეთ, განასხვავებენ ძირითად (პირველად, საბაზისო) და წარმოებულ (მეორად) ფასიან ქაღალდებს. პირველს მიეკუთვნება, მაგალითად, ობლიგაციები, საბანლო ანგარიში, აქციები, მეორეს – ოფციონი, რომელიც შეიძლება იყოს აქციის ყიდვა-გაყიდვის სხვადასხვა ტიპის კონტაქტი (ხელშეკრულება).

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ საბანკო ტიპის ოპერაციები ბანკის მსგავსი ინსტიტუტების მიერ ტარდებოდა ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტეში, ხოლო ძველ ბაბილონსა და ასურეთში კი უკვე არსებობდა საპროცენტო განაკვეთის შედეგად მოგების მომტანი სასესხო კაპიტალი და გარკვეული სახის ვექსილი (ფასიანი ქაღალდი). თანამედროვე ტიპის ბანკი პირველად შეიქმნა იტალიის ქ. გენუაში 1407 წელს, ხოლო აქციებით ვაჭრობის დასაწყისიდან ითვლება ქ. ამსტერდამში საფონდო ბირჟაზე აქციონერთა კომპანიების მიერ აქციების გაყიდვა 1602 წელს.

რაც შეეხება მეორად ფინანსურ ინსტრუმენტებს, მათი ინტენსიური განვითარება დაიწყო XX საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან (თუმცა, მაგ., ოფციონი ადრეც არსებობდა) და ძირითადად დაკავშირებული იყო შემდეგ გარემოებებთან:

1) 1973 წლიდან დაწყებული, ვალუტების ფიქსირებული გაცვლითი კურსების მაგივრად შემოღებული იყო ცვალებადი („მცურავი“) კურსები. ზოგიერთი მათგანისათვის კი დაწესებული იქნა ცვალებადობის გარკვეული შუალედი („დერეფანი“). ამას დაემატა საპროცენტო განაკვეთების ცვალებადობა;

2) გასული საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან დაიწყო დოლარის გაუფასურება ოქროსთან მიმართებაში. 1971 წლის შემდეგ, ოქროს სტაბილურმა ფასმა (ერთი უნცია – 28,25 გრამი ოქრო ღირდა 35 დოლარი) მკეთრად იწყო მომატება და უკვე 1980 წელს ერთი უნცია ოქრო 570 დოლარი ღირდა;

3) წარმოიშვა ნავთობის მსოფლიო კრიზისი ნავთობის ფასების ცვალებადობასთან დაკავშირებით;

4) მსოფლიოს ფინანსურ ბაზრებზე მოხდა აქციების რეალიზაციის შემცირება;

5) ქვეყნები აღმოჩნდნენ განსხვავებულ ეკონომიკურ სუტუაციებში, განსაკუთრებით მეორე მსოფლიო ომის დამანგრეველი შედეგების შემდეგ.

ამ მოვლენებმა ბუნებრივად გაზარდა რისკი ფინანსურ ურთიერთობებში. აუცილებელი გახდა ფინანსური რისკისაგან თავის დაცვისა და მისი გარკვეულად განეიტრალების მიზნით ახალი ფინანსური პროდუქციისა და ტექნოლოგიის შექმნა. ასე დაიწყო ე.წ. ფინანსური ინჟინერიის ჩამოყალიბება და განვითარება, რომლის ძირითად ფინანსურ ინსტრუმენტებს სწორედ წარმოებული ფასიანი ქაღალდები წარმოადგენს.

ამასთან ერთად, სულ უფრო იზრდებოდა ქვეყნებს შორის ფინანსური ურთიერთობების მოცულობა და სისწრაფე. სხვადასხვა გარემოებებთან ერთად ამას ხელი შეუწყო მეცნიერულ-ტექნიკურმა პროგრესმა და განსაკუთრებით კომპიუტერული მეცნიერებების განვითარებამ. გარდა ამისა, ფინანსურ ურთიერთობებში არსებულმა რეალურმა რისკმა, განუსაზღვრელობამ დააჩქარა ფინანსების თეორიისა და ფინანსური ინჟინერიის პრობლემატიკაში ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება და სათანადო მათემატიკური აპარატის შექმნა. ყოველივე ამის საფუძველზე შეიქმნა და განვითარდა თანამედროვე სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

ფინანსურმა ბაზრებმა საკმაოდ სწრაფი რეაგირება მოახდინა ზემოთ აღნიშნულ გარემოებებზე. 1973 წელს ამერიკის შეერთებული შტატების ქალაქ ჩიკაგოში გაიხსნა სტანდარტული ოფციონების ბირჟა. საინტერესოა მოვიყვანოთ ინვესტორების რეაგირების ზოგიერთი მაჩვენებელი ინვესტირების ახალ შესაძლებლობებთან დაკავშირებით. გახსნის დღეს, 26 აპრილს, 16 სახის აქციაზე დაიდო 911 კონტრაქტი ყიდვის ოფციონზე. ერთი წლის შემდეგ იდებოდა 20000-ზე მეტი, ხოლო სამი წლის შემდეგ 100000-ზე მეტი კონტრაქტი ყოველდღე. 1987 წელს ამ მაჩვენებელმა 700 ათასი კონტრაქტი შეადგინა 100 სახის აქციაზე, ე.ი. ყოველდღიურ ბრუნვაში იყო 70 მილიონი აქცია. საინტერესოა,

აგრეთვე, შევნიშნოთ, რომ იმავე 1987 წელს ქალაქ ნიუ-იორკის ბირჟაზე ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა 190 მილიონი აქცია.

ფინანსურ სამყაროში ასეთმა მნიშვნელოვანმა ძვრებმა ბუნებრივად გაზარდა მოსახლეობაში ფინანსურ ურთიერთობებში აქტიური მონაწილეობისა და ამის საშუალებით „ფულის კეთების“ სურვილი. თითქმის ყოველი ამერიკული ოჯახი ასობით აქციის მფლობელია და თავიანთი დანაზოგებით ინვესტირებას ეწევა ამერიკის საბაზრო ეკონომიკაში.

ფინანსურ ბაზრებზე სხვადასხვა სახის ძირითად ფასიან ქაღალდებთან ერთად ვაჭრობენ უამრავი მეორადი ფასიანი ქაღალდებით. ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების ნაწილის სახელწოდებების უბრალო ჩამონათვალითაც კი ადვილად დავინახავთ ფინანსურ ურთიერთობებში მეორადი ფასიანი ქაღალდების მნიშვნელობას და მრავალფეროვნებას: ფიუჩერსები, ფიუჩერსები ობლიგაციებზე და საბირჟო ინდექსებზე, ევროპული და ამერიკული ტიპის სანდარტული ოფციონები, ეგზოტიკური ოფციონები: ბოსტონის ოფციონი, რუსული ოფციონი, აზიური ოფციონი, კალათის ოფციონი, სვოპები, კეპები, ფლორები, სვოპციონები. ეს არის მეორადი ფასიანი ქაღალდების სახეობის არასრული ჩამონათვალი.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი აქტივისაგან – ობლიგაციებისაგან (საბანკო ანგარიშისაგან) და აქციებისაგან შემდგარ ფინანსურ ბაზრებს. შევნიშნავთ, რომ საბანკო ანგარიში ობლიგაციის ტიპის ფასიანი ქაღალდია. ჩვენ მოკლედ შევეხებით საბანკო ანგარიშთან, ობლოგაციასთან და აქციასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს.

გადმოცემულია მიმოხილვითი ხასიათის შრომები და გამოკვლეულია ფინანსური ბაზრის დისკრეტული მოდელის შექმნის ძირითადი მიმართულებები. ჩატარებული ანალიზი ადასტურებს თემის აქტუალობას და საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ კვლევის მიზანი.

1.2. ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი და ევროპული ტიპის ოფციონი

ნაშრომებში [1], [2], [3] გადმოცემულია თანამედროვე ფინანსურ ბაზართან დაკავშირებული თეორიული და პრაქტიკული ხასიათის მათემატიკური საკითხი. ამ ნაშრომებში მოყვანილია ფინანსური ბაზრის უმარტივესი, კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, სადაც მხოლოდ ორი აქტივი – ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და აქციები განიხილება. დასმულია ინვესტირების და ჰეჯირების პრობლემა თვითდაფინანსებადი და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის, ჩამოყალიბებულია ფინანსურ ბაზრებზე პრინციპული წარმოებული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული ტიპის ყიდვის და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონირების გათვლის ამოცანა, რომლის გადასაწყვეტად გამოყენებულია ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრინციპი, არათვითდაფინანსებად პროცესში იგულისხმება, რომ ინვენსტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გადიდება რაიმე მოხმარებაზე. ეს შემთხვევა საინტერესოა უფრო მათემატიკური, ვიდრე ეკონომიკური თვალსაზრისით.

განხილულია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების გადაწყვეტის ერთბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეების შემთხვევა.

შევნიშნავთ, რომ ბინომური მოდელი მიახლოებით ასახავს ფინანსურ ბაზარზე რეალურ სიტუაციას. მაგრამ მისი საშუალებებით ხდება უწყვეტ დროში უფრო ზუსტი, კარგად ცნობილი ბლერ-შოულსის მოდელის აპროქსიმირება და რიცხვითი მეთოდების დაფუძნება.

პირველი მეცნიერი მათემატიკოსი, რომელმაც დაიწყო აქციის ფასების ევოლუციის უწყვეტ დროში შესწავლა, იყო ფრანგი ლ. ბაშელიე [4]. მან აქციის ფასების ცვლილების აღწერისათვის გამოიყენება სპეციალური შემთხვევითი პროცესი, ე.წ. ბროუნის მოძრაობა. მიღებული შედეგები ბაშელიემ 1900 წელს სადოქტორო დისერტაციის სახით წარუდგინა პარიზის მათემატიკურ საზოგადოებას. რამდენიმე წლის შემდეგ, 1905 წელს, ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური საკითხების შესწავლა დაიწყო ა. აინშტაინმა [5], ხოლო ბროუნის

მოძრაობის სრულყოფილი მათემატიკური თეორია ააგო ნ. ვინერმა [6] 1923 წელს. სამეცნიერო ლიტერატურასა და ტერმინოლოგიაში ბროუნის მოძრაობა დამკვიდრდა ვინერის პროცესის სახელწოდებით.

ბაშელიეს გამოკვლევებმა საკმაოდ დიდი ხნის განმავლობაში ვერ მოიპოვა სათანადო აღიარება და გამოყენება. მხოლოდ 1965 წელს პ. სამუელსონი [7] დაინტერესდა ბაშელიეს ნაშრომით და მოუწოდა ეკონომისტებსა და მათემატიკოსებს ყურადღება მიექციათ აღნიშნული ნაშრომისათვის. თვითონ სამუელსონმა შემოგვთავაზა აქციის ფასების უწყვეტ დროში ევოლუციის აღმწერი ბაშელიეს მოდელის გაუმჯობესებული და მოდიფიცირებული ე.წ. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელი, რომელიც კიდევ „ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობის“ სახელწოდებით არის ცნობილი.

1973 წელს სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში გამოქვეყნდა ფ. ბეკის [8], მ. შოულსის [9] და რ. მერტონის [10] ნაშრომები, რომელშიც უწყვეტი დროის შემთხვევაში მიღებული იყო ოფციონის ფასის გათვლის და ჰეჯირების ფორმულები. შემდეგ 1979 წელს ფ. კოკსმა [11], რ. როსმა [12] და მ. რუბინშტეინმა [13] ანალოგიური შედეგები მიიღეს დისკრეტული დროის შემთხვევაში. კლასიკურად აღიარებულმა ამ ფუნდამენტურმა ნაშრომებმა რევოლუციური ძვრები გამოიწვია ფინანსურ სამყაროში და, კერძოდ, ფინანსურ ბაზრებზე: დაიწყო სპეციალიზებული ბირჟების გახსნა და გაიზარდა წარმოებული ფასიანი ქაღალდებით ვაჭრობა. აღსანიშნავია, რომ ფინანსურ მათემატიკაში მიღებული შედეგების ზოგიერთმა ავტორმა (მაგ. მ. შოულსმა [9], რ. მერტონმა) [10] ნობელის პრემია დაიმსახურა ეკონომიკაში.

გამოკვლევები სტოქასტიკური ფინანსური მათემატიკის თეორიული და პრაქტიკული მიმართულებებით დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში. გვინდა აღვნიშნოთ რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის ვ. სტეკლოვის სახელობის მათემატიკური ინსტიტუტი და მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, სადაც კვლევა გასული საუკუნის ოთხმოცდაათიან წლებში დაიწყო. მოსკოველ მეცნიერთა შედეგების საფუძველზე რუსეთის მთავრობის დადგენილებით 1992

წელს ქ. მოსკოვში დაარსდა აქტუალურ-ფინანსური სამეცნიერო-კვლევითი ცენტრი, რომლის სამეცნიერო საბჭოს თავმჯდომარეა მსოფლიოში ცნობილი მეცნიერ-ექსპერტი, პროფესორი ა. შირიაევი [11].

ცენტრის მრავალმხრივ საქმიანობაში შედის რუსეთის სადაზღვევო კომპანიებისა და ფინანსური ინსტიტუტების საქმიანობის თეორიული და პრაქტიკული ხასიათის გამოკვლევებით უზრუნველყოფა, იურიდიული და ფიზიკური პირებისათვის საკონსულტაციო სამსახურის გაწევა, ფუნდამენტური გამოკვლევები, პედაგოგიური მოღვაწეობა, სამეცნიერო-სასწავლო ლიტერატურის გამოშვება და მრავალი სხვა. შევნიშნავთ, რომ ანალოგიური ცენტრის შექმნა მიზანშეწონილი და სასარგებლო იქნებოდა ქ. თბილისშიც.

აქტუალურ-ფინანსური სამეცნიერო-კვლევითი ცენტრის მოღვაწეობის საფუძველზე 1993 წელს მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე გაიხსნა და წარმატებით ფუნქციონირებს ახალი საუნივერსიტეტო სპეციალობა „აქტუალური და ფინანსური მათემატიკა“. წარმატებით ერთ-ერთ მაჩვენებლად შეიძლება ჩაითვალოს ის ფაქტი, რომ ბოლო წლებში ამ ფაკულტეტზე სწავლის მსურველთა კონკურსი საკმაოდ გაიზარდა. გადაუჭარბებლად შეიძლება ითქვას, რომ მაღალ კონკურსს სტიმული სწორედ აღნიშნულმა ახალმა საუნივერსიტეტო სპეციალობამ მისცა.

აღვნიშნოთ, რომ საქართველოში ბოლო ათწლეულში საკმაოდ ნაყოფიერად მიმდინარეობს ფუნდამენტური გამოკვლევები ფინანსურ და სადაზღვევო მათემატიკაში [1].

ქართველ მეცნიერთა და მეცნიერ-პედაგოგთა აღნიშნული წარმატებები განაპირობა იმან, რომ საქართველოში არსებობს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის ძლიერი სკოლა, რომლის ჩამოყალიბება და განვითარება დაკავშირებულია პროფესორ გვანჯი მანიას სახელთან. მან, აგრეთვე, აღზარდა და მეცნიერების ფართო გზაზე გაიყვანა ათეულობით პერსპექტიული ახალგაზრდა მკვლევარი.

გვინდა აგრეთვე, აღვნიშნოთ, რომ საქართველოში ფინანსური მათემატიკით დაინტერესება დაკავშირებულია თვალსაჩინო მეცნიერის, პროფესორ რ. ჩიტაშვილის [16] სახელთან. სწორედ მან დაიწყო

სამეცნიერო სემინარები და მიიღო ფუნდამენტური შედეგები ამ მიმართულებით.

საბაზრო ეკონომიკის წარმატებით განვითარებისა და ნორმალური ფუნქციონირებისათვის მრავალი საკითხის გათვალისწინებით უდიდესი მნიშვნელობა ენიჭება ქვეყნის ეკონომეტრიკული მოდელის შექმნას (რეგრესიული ანალიზის გამოყენებას). ასეთი მოდელი ძირითადი ენდოგენური და ეგზოგენური ეკონომიკური მაჩვენებლების (მახასიათებლების) მართვისა და პროგნოზირების საშუალებას იძლევა და სრულიად აუცილებელია, მაგალითად, რეალური ბიუჯეტის ფორმირებისათვის. შევნიშნავთ, რომ რეგრესულ ანალიზს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია ფასიანი ქაღალდების ევოლუციის სტატისტიკურ გამოკვლევებში.

1.3. პირველი თავის დასკვნები

ლიტერატურის მიმოხილვიდან შეიძლება დავასკვნათ შემდეგი:

- თანამედროვე ეკონომისტისათვის აუცილებელია კარგად უნდა ფლობდეს ალბათურ-სტატისტიკურ მეთოდებს და კვლევებს;
- არ არის კარგად შესწავლილი საქართველოში ფინანსურ და სადაზღვევო მათემატიკის და ეკონომეტრიკის თანამედროვე საკითხები;
- საკმაოდ რთულადაა გადმოცემული უცხოური მათემატიკური ტესტები, რომლებიც განკუთვნილია საქართველოს ფინანსური და სადაზღვევო სტრუქტურებისათვის.

თავი 2. ფინანსური პროცესების დისკრეტული მოდელები

ფინანსური მოდელის ძირითადი ელემენტებია ფული და დრო. არსებითად ფინანსური მოდელი ამა თუ იმ ფორმით ასახავს რაოდენობრივ დამოკიდებულებას გარკვეულ თანხასა და დროის სხვადასხვა მომენტებს შორის.

ის ფაქტი, რომ დროის მიხედვით ფულის ღირებულება ცვალებადია, საპროცენტო განაკვეთის გათვალისწინებითა და მუდმივი ინფლაციის გამო, ყველასათვის ცხადია. ლარის ღირებულება დღეს, ხვალ, ერთი თვის მერე და ა.შ. სხვადასხვა სიდიდეა.

შესაძლოა ნაკლებად შესამჩნევია (ცხადია) არაეკონომისტისთვის, რომ ინფლაციის არარსებობის დროსაც დროის ფაქტორი მიუხედავად ყველაფრისა მოქმედებს ფულის ღირებულებაზე.

დავუშვათ, რომ რაიმე „თავისუფალი“ ფულის არსებობის შემთხვევაში, თქვენ გადაწყვიტეთ ჩადოთ ფული ბანკში განსაზღვრული პროცენტით. დროის მიხედვით თქვენს მიერ ბანკში ჩადებული თანხა იზრდება და ვადის გასვლის ბოლოს თქვენ იღებთ უფრო მეტ თანხას. ამის ნაცვლად თქვენ შეგეძლოთ გეყიდათ, რომელიმე კომპანიის აქციები ან ობლიგაციები, რომელთაც გარკვეულ დროში შეუძლიათ მოგიტანონ გარკვეული შემოსავალი.

ამგვარად ამ შემთხვევაშიც თქვენს მიერ ჩადებული თანხა დიდ თანხად იქცევა გარკვეულ დროში. თქვენ შეგიძლიათ ეს თანხა შეინახოთ სახლში ან ბანკის სეიფში. ამ შემთხვევაში თანხის ნომინალური მნიშვნელობა არ შეიცვლება. არ შეიცვლება არც რეალური ღირებულებაც თუ ინფლაციაც არ არის. წინააღმდეგ შემთხვევაში – შემცირდება. თუმცა-ღა თუ თქვენ გაქვთ ინვესტირების შესაძლებლობა და ამას არ აკეთებთ, ეკონომისტის თვალსაზრისით ეს საქციელი კარგი არ არის, რადგან იზარალებთ.

ამგვარად პრიმიტიული თვალთახედვა განსხვავდება ეკონომიკური თვალთახედვისგან იმით, რომ პირველი მათგანი თვლის ფული (ინფლაციას არ ვითვალისწინებთ), რომელიც ბანკის სეიფში ინახება არ კარგავს ღირებულებას. ეკონომისტის თვალსაზრისით თქვენ ცდებით; დროის მიხედბით ფულის ღირებულება ცვალებადია.

ფულის ერთიდაიგივე რაოდენობის თანხას დროის სხვადასხვა მომენტში აქვს სხვადასხვა ღირებულება. მეორეს მხრივ განსაზღვრულ კონკრეტულ პირობებში სხვადასხვა თანხები დროის სხვადასხვა მომენტებში ტოლფასია ფინანსურ-ეკონომიკური აზრით.

ეს არის ზუსტი მათემატიკური აღწერა, ძირითადი ფინანსური დებულებისა, ანუ როგორც ამბობენ რის საფუძველზეც ფორმალიზაცია შესაძლებელი ხდება.

2.1. დროის და ფულის სკალები

დროის სკალა, როგორც აღვნიშნეთ ფინანსურ ოპერაციებში დროის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტორი გახლავთ.

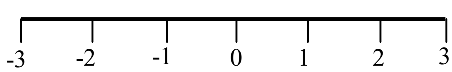
თანხების დროითი ლოკალიზაციისთვის აუცილებელია დროის სკალის მითითება, ე.ი. ხერხი, რომლითაც გამოვყოფთ ცალკეული დროის მომენტებს. დროის სკალის ცნებაში ვგულისხმობთ სისტემას დროის კოორდინატებით, რომელთა მოცემაც ხდება შემდეგნაირად:

ა) დროის ათვლის დასაწყისი;

ბ) ერთეულები (ერთეულოვანი პერიოდი ორ მომდევნო დროის შუალედს შორის ერთეულოვანი პერიოდი).

ეკონომიკაში ეს ჩვეულებრივად ერთი წლის შუალედია, სხვა შუალედები: თვე, კვარტალი, კვირა, დღე და ა.შ. არ გამოდგება.

დროის ათვლის დასაწყისის და დროის სკალის ბაზისური ერთეულის არჩევა რა თქმა უნდა განისაზღვრება მოცემული კონკრეტული პირობებით. პრინციპში მათი თავისუფლად არჩევა შესაძლებელია დროით. სკალაზე დასაშვებია თვალსაჩინო წარმოდგენა დროის ხაზის სახით, ე.ი. მოცემული უნდა იყოს წრფე, რომელზეც აღნიშნულია საწყისი წერტილი და დროის მომენტები (მასშტაბი) (ნახ. 1).



ნახ. 1. საწყისი წერტილების დროის მომენტებით

დროით სკალაზე *O* წერტილი შეესაბამება დროის ათვლის დასაწყისს. ჩვეულებრივ მისი ინტერპრეტაცია – მიმდინარე (ნამდვილი) დროის მომენტია, ე.ი. ახლა წერტილი კოორდინატით 1 შეესაბამება

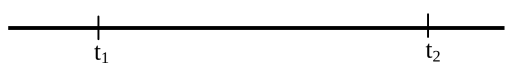
ბაზისური შუალედის ბოლოს, ე.ი. თუ ბაზისური შუალედი წელიწადია, ე.ი. ეს კოორდინატი მიუთითებს წლის ბოლოს, 2 – მეორე წლის ბოლოს და ა.შ. წერტილები კოორდინატებით -1 -2 -3 და ა.შ. შეესაბამება წინა წლების კოორდინატებს: -1 შარშან -2 შარშანწინ.

სკალას, რომელიც შედგება დროის მომენტების დისკრეტული დისკრეტული ერთობლიობისაგან, დისკრეტული სკალა ეწოდება. მისი გაიგივება შესაძლებელია სკალასთან, რომელზეც z მთელი რიცხვებია აღნიშნული. უმრავლეს შემთხვევაში ფინანსური პროცესები განიხილება უშუალოდ დისკრეტულ სკალაზე.

1 ნახაზზე აღნიშნულია მხოლოდ დროის მომენტები, რომელიც შეესაბაზემა უმოკლეს ბაზისურ მთელი დროის პერიოდს და მათ ჯერადებს. შესაძლებელია აგრეთვე განვიხილოთ დროის მომენტები, მაგ: 1 წელი და 2 კვირა. რადგანაც დრო უწყვეტია, დროითი სკალაც უწყვეტია, ე.ი. დროის მომენტები, უფრო სწორად დროის მომენტების ყველა შესაძლო კოორდინატი შესაძლებელია წარმოვადგინოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვით.

შევნიშნოთ, რომ თუმცა ფინანსთა თეორიაში ჩვეულებრივ განიხილება დროის უწყვეტი სკალა პრაქტიკაში სარგებლობენ დისკრეტული სკალით, რომელზეც აღნიშნულია ჩვეულებრივ კალენდარული წლები, თვეები და ა.შ.

დროის სკალა აღვნიშნოთ T სიმბოლოთი, დროის განსხვავებული მომენტები – t_1 და t_2-ით და ა.შ.



ნახ. 2. დროის სკალა

დროის შუალედები $t_1, t_2 \cdots$ და ა.შ.

თუ t_1 წინ უძღვის t_2-ს, მაშინ ეს ფაქტი მოიცემა $t_1 < t_2$ წინააღმდეგ შემთხვევაში $t_1 \geq t_2$.

ნებისმიერი ორი განსხვავებული t_1 და t_2 დროს მომენტები განსაზღვრავენ დროის შუალედს. ამ შუალედის სიგრძე მოიცემა არე: $T = |t_2 - t_1|$. მათემატიკაში განიხილება შემდეგი შუალედები: $[t_1 t_2]$, $(t_1 t_2)$ $[t_1 t_2)$ $(t_1 t_2]$. პირველ ორს – შუალედი ან ინტერვალი ეწოდება. შემდგომში როდესაც ჩვენ განვიხილავთ ფინანსური ოპერაციების

მათემატიკურ მოდელს, ჩვენ ყოველთვის დავაფიქსირებთ არჩეულ დროით სკალას. პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გამოიყენება წლიური სკალა.

პრაქტიკულ ამოცანებში ხშირად გვიხდება ერთი სკალიდან მეორეზე გადასვლა. წლიურიდან თვიურზე, კვარტალურზე ან პირიქით. ამიტომ საჭიროა დავადგინოთ თანაფარდობა ამ სკალების დროის კოორდინატებს შორის.

ვთქვათ T და T' ორი სკალაა, რომელთა კოორდინატები აღვნიშნოთ შესაბამისად t და t'-ით. ვთქვათ T' სკალის ათვლის სათავე შეესაბამებოდეს $^2{}_0$ წერტილს T სკალაზე, მაშინ t და t' კოორდინატებს შორის შესაბამისობა მოიცემა ასე

$$t = {}^2{}_0 + kt'.$$

თუ $^2{}_0 = 0 \Rightarrow t = kt'$.

მაგალითად, თუ t – წლიურის კოორდინატა, ხოლო t'-თვიური სკალის კოორდინატა, მაშინ $k = \frac{1}{12}$. თუ ათვლის სათავეები ერთმანეთს დაემთხვევა მაშინ მივიღებთ კარგად ცნობილ ტოლობას

$$t_{\text{წლ}} = \frac{t'a}{12}.$$

მივიღებთ, რომ T და T' დროითი სკალებისთვის სამართლიანია: $T = kT'$.

ფულის სკალა. ფინანსურ თეორიაში და პრაქტიკაში მუდმივად გვიწევს საუბარი სხვადასხვა ფულად თანხებზე ან ფინანსური აქტივების ღირებულებაზე. ეს სიდიდეები იზომება გარკვეულ ფინანსურ ერთეულებში. შევეცადოთ და განვსაზღვროთ ფულის სკალა. ფულის ერთეული – ნაციონალური ფულადი სისტემის ძირითადი ფულადი ერთეულია.

ფულადი თანხის მნიშვნელობას შეიძლება ასეც ვუწოდოთ „ფულის კოორდინატები“ თუმცაღა ფულადი სკალა განსხვავდება დროის სკალისაგან იმაზე, რომ ფულადი სკალა დისკრეტულია, რადგან 1) ყოველი ფულის სისტემა გულისხმობს მინიმალურ ფულის ერთეულს, რომლის წილიც 2) ფულადი სკალა გულისხმობს მხოლოდ დადებით

მნიშვნელობებს. თანხას გამოსახულს უარყოფით რიცხვებში, არ აქვს (უშუალო) უშუალო მნიშვნელობა. თუმცა სხვადასხვა ოპერაციებისას ფულადი თანხები სხვადასხვა როლს თამაშობს ამ ოპერაციის სხვადასხვა მონაწილეებისათვის; რაც ერთისთვის – შემოსავალია, მეორესთვის ხარჯებია (მრავალია); ერთი გაასესხებს ფულს, მეორე კი იღებს ვალში, ერთი ყიდის, მეორე ყიდულობს და ა.შ. ასეთი მდგომარეობის აღსაწერად პრაქტიკაში თანხებისთვის გამოიყენება უარყოფითი რისხვები.

ფულადი სკალა აღვნიშნოთ M-ით ფულადი სკალის არჩევისას უნდა გავითვალისწინოთ ორი რამ: ფინანსური ოპერაციების დროს ქვეყნის შიგნით (ე.ი. ნაციონალური ფულის ერთეულის სისტემის ჩარჩოებში) ფულის სკალის ერთეულის არჩევისკენ. ამასთან ერთად ფულის ერთი ერთეულიდან მეორეში გადაყვანისას (მაგ: ლარიდან თეთრებში, დოლარიდან ცენტებში).

ვღებულობთ $e = le'$, სადაც e და e'-ფულის სკალის ორი ბაზური ფულადი ერთეულებია. ასევე ნებისმიერი m და m' ფულადი თანხისათვის სამართლიანია თანაფარდობა:

$$m'e' = me\,,$$

$$m'e' = mle'\,,$$

$$m' = ml\,.$$

მაგ: ლარიდან თეთრებში გადაყვანისას გვაქვს შემდეგი თანაფარდობა

1 ლ = 100 თ.

ფულადი თანხის გარდასახვის მეორე სახეს, რომელიც დაკავშირებულია ფულის სკალასთან, ადგილი აქვს მრავალვალუტურ ოპერაციებში. ექსპორტ-იმპორტ ოპერაციებში. ასეთ დროს მუდმივად საჭიროა ეროვნული ვალუტა გადავიყვანოთ უცხოურ ვალუტაში და პირიქით. ზოგიერთ შემთხვევაში ვალუტის გაცვლითი კურსები შეიძლება დაფიქსირდეს სახელმწიფო დონეზე შეთანხმებებით, მაგრამ ასეთ შემთხვევებშიც კი, როგორც წესი, არსებობს ამ ვალუტის თავისუფალი ბაზარი, სადაც დგინდება მათი საბაზრო კურსები, თანაც ეს უკანასკნელი შეიძლება არსებითად განსხვავდებოდეს დადგენილისაგან.

ზოგადად M სკალიდან M' სკალაზე გადასვლის დროს ამოცანა ზუსტად ისევე იხსნება, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ. განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ გადასვლის l კოეფიციენტი $e = le'$ დამოკიდებულია დროზე $l = l(t) = l_t$, ე.ი.

$$e = l_t e',$$

$l_t - M$ სკალის e ერთეულის მიმდინარე ღირებულება M' სკალის e' ერთეულებში დროის t მომენტში – არის e ვალუტის გაცვლითი კურსი. თუ e'−ეროვნული ვალუტის ერთეულია, ხოლო e −უცხოური ვალუტის ერთეულია, ამ შემთხვევაში უცხოური ვალუტის ერთეული გამოისახება უშუალოდ ეროვნული ვალუტის ერთეულებში. წინააღმდეგ შემთხვევაში მას შექცეული კურსი ეწოდება.

გაცვლითი კურსის (კოტირება) l_t საშუალებას იძლევა განსხვავებული სკალებიდან სხვადასხვა ფულადი თანხების მნიშვნელობების გადაყვანისა. S ფულად თანხას მოცემულს e ერთეულებში M სკალიდან, შეესაბამება M' სკალაზე (t მომენტში)

$$S'_t = l_t S$$

მნიშვნელობა.

2.2. ფინანსური სიდიდეების ძირითადი ტიპები

ფინანსურ მათემატიკაში და საერთოდ ეკონომიკაში ყველა სიდიდე იყოფა ორ კლასად:

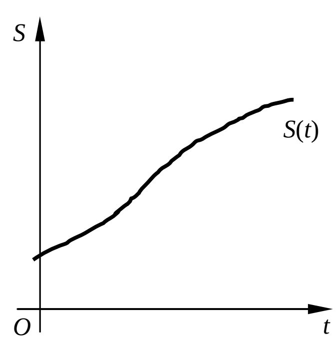
პირველ კლასში შედიან სიდიდეები დამოკიდებული დროის მომენტებზე. ისინი წარმოადგენენ დროით ფუნქციებს, ე.ი. იცვლებიან დროის მიხედვით. მათ უწოდებენ მყისიერ სიდიდეებს. ეს სიდიდეები არის ისეთი ფინანსური სიდიდეების დამახასიათებელი მყისიერი მნიშვნელობები, როგორც არის ფასი, ღირებულება, კურსი. ბალანსის ყველა მაჩვენებლებიც ამ ტიპის სიდიდეებს განეკუთვნებიან.

მეორე კლასს შეადგენენ სიდიდეები (ცვლილებები), რომლებიც დაკავშირებულია დროის შუალედებთან. მათ ინტერვალური სიდიდეები ეწოდებათ.

აღნიშნული კლასების სიდიდეებს შორის ყოველთვის არ ხერხდება მკვეთრი საზღვრის გავლება. მაგალითისთვის განვიხილოთ

დივიდენდები, რომლებიც ჩვეულებრივ აქციებზეა გადასახდელი კონკრეტული მორიგი გადახდა ხდება დროის განსაზღვრულ მომენტში. ცალკეული აქციონერისათვის ეს შეიძლება იყოს დივიდენდების გადარიცხვის მომენტი ბანკში მის ანგარიშზე ან საბროკერო კანტორაში ამიტომ ერთი შეხედვით ეს თანხა განეკუთვნება დროის მომენტს, თუმცდა დივიდენდების ეკონომიური აზრი, როგორც შემოსავლის წილი მიღებული რაიმე საწარმოდან გარკვეული დროის განმავლობაში, ცხადად მიუთითებს იმაზე, რომ დროითი შუალედის ფუნქციაა და არა დროის ფუნქცია. ამიტომ უაზრობაა ვილაპარაკოთ დივიდენდების რაოდენობაზე დღეს, ხვალ, ზეგ და ა.შ. უნდა ითქვას ერთი წლის, ორი წლის, სამი წლის განმავლობაში და ა.შ. მეორეს მხრივ სისულელეა ვილაპარაკოთ მათ საშუალო ფასზე ამ დროის განმავლობაში, ეს უკვე ინტერვალით დახასიათებაა და არა მყისიერი.

ზემოთქმული განსხვავებების გამო მყისიერ და ინტერვალურ სიდიდეებს შორის დავამყაროთ მათემატიკური თანაფარდობა. რადგან პირველი კლასის სიდიდეები წარმოადგენენ დროის ფუნქციას, ეს ჩაიწერება ასე: $S(t)$ ან S_t, სადაც S_t არის S სიდიდის მნიშვნელობა დროის t მომენტში. მაგალითად აქტივების ღირებულება. ხშირად გამოხილავენ $S(t)$ არის S სიდიდის მნიშვნელობა დროის t მომენტში. მაგალითად აქტივების ღირებულება. ხშირად განიხილავენ $S(t)$ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას, რომელიმე დროის შუალედის t სხვადასხვა მომენტებში გრაფიკულად ეს სიტუაცია მოიცემა ასე:

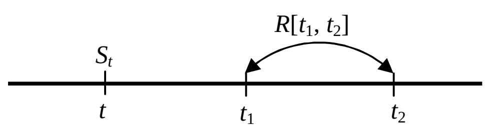


ნახ. 3. $S(t)$-ს t-ზე დამოკიდებულების გრაფიკი

$S(t)$-ს t-ზე დამოკიდებულების გრაფიკით. აქ აბსცისთა ღერძი დროის სკალაა, ორდინატთა ღერძი კი შეიძლება იყოს ფულადი სკალა.

მეორე კლასის სიდიდეები წარმოადგენენ შუალედის ფუნქციებს, ამიტომ ამ ფუნქციების განსაზღვროს არეა დროითი შუალედები. ამისათვის გამოვიყენოთ დროითი შუალედების სტანდარტული აღნიშვნა $[t_1,t_2]$ ან (t_1,t_2) და ა.შ. მეორე კლასის R სიდიდე შეიძლება ასე ჩავწეროთ $R([t_1,t_2])$, ხოლო $(t_1;t_2)$ შუალედისთვის კი $R((t_1,t_2])$. როდესაც შუალედი არ წარმოადგენს რაიმე არსებითობას, მაშინ წერენ $R(t_1 t_2)$.

ზოგჯერ ეს სიდიდე დამოკიდებულია არა შუალედის საწყის და საბოლოო კოორდინატებზე, არამედ მხოლოდ მის სიგრძეზე $T=t_2-t_1$, როცა $t_1<t_2$. ამ შემთხვევაში ზემოთ დაწერილი აღნიშვნების ნაცვლად გამოიყენება აღნიშვნა $R(T)$ ან R_T. ცხადი სახით ორივე კლასის სიდიდეები გამოისახება დროის დიაგრამებით. მაგ: S სიდიდის კონკრეტული მნიშვნელობა დროის t მომენტში, ასევე $R([t_1,t_2])$, შეიძლება გამოვსახოთ ისე, როგორც გამოსახულია ნახ. 4-ზე.



ნახ. 4. $R([t_1,t_2])$-ის გამოსახვა

დროის T და ფულადი M სკალა ერთად წარმოქმნიან ფინანსურ კოორდინატთა სისტემას, რომელსაც ეწოდება ფინანსური სივრცე ან დრო-ფულის სიბრტყე. ფორმალურად ფინანსური სივრცე არის (წარმოადგენს) უბრალოდ

$$T\times M=\{t,m/t\in T,\quad m\in M\}$$

რომელიც შედგება (t,m)-ის ყველა შესაძლო წყვილისაგან. t-დროის, m – კი ფულის კომპონენტი (კოორდინატი) გარეგნულად და ფორმით ფინანსური სივრცე ჰგავს დეკარტის კოორდინატთა სისტემას, სადაც აბსცისთა ღერძზე აღნიშნულია დროის მომენტები, ხოლო ორდინატთა ღერძზე – ფულადი თანხების მნიშვნელობები.

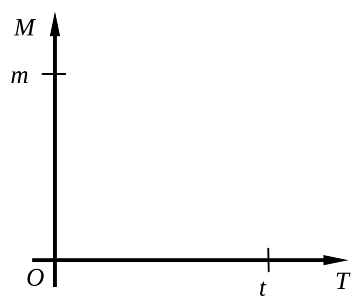
2.3. ფინანსური ხდომილობები და ნაკადები

შემოვიღოთ ორი ცნება, რომლებიც წინა პარაგრაფში ნახსენები ორი კლასის სიდიდეებს შორის წარმოქმნიან, ე.წ. თავისებურ ხიდს. საუბარია ფინანსურ ხდომილობებზე და ფინანსურ (ნაკადებზე).

ფინანსურ მათემატიკაში, როგორც უკვე აღვნიშნეთ ერთმანეთს შეუსაბამებენ ფულად თანხებს და მათ შესაბამის დროს (ან დროის შუალედებს).

განსაზღვრება 2.1. (t,C) წყვილს (t-დროის მომენტია C-ფულადი თანხა) ეწოდება მომენტალური ფინანსური ხდომილობა ან 1-ლი რიგის ხდომილობა. მათ უბრალოდ ხდომილობას უწოდებენ.

ფინანსური ხდომილობა ცხადად გამოისახება (ნახ. 5).



ნახ. 5. ფინანსური ხდომლობის გამოსახვა

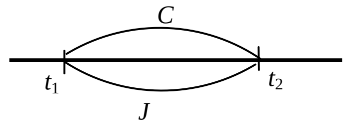
ფინანსურ ხდომილობას შეიძლება მივცეთ სხვადასხვა ინტერპრეტაცია.

ეს შეიძლება იყოს უბრალოდ აქტივების ღირებულების მითითება დროის მოცემულ მომენტში ან ეს შეიძლება იყოს ანგარიშზე რაიმე შენატანი C თანხა (ანაბარი) დროის რომელიღაც t მომენტში. ეს შეიძლება იყოს დროის რაიმე t მომენტში C თანხის ანგარიშიდან მოხსნა. პირველ შემთხვევაში $C>0$, მეორე შემთხვევაში $C<0$.

ზემოთ აღწერილი ხდომილობები (1-ლი რიგის არის მომენტალური ფინანსური სიდიდეების ფორმალური წარმოდგენა. ინტერვალური ფინანსური სიდიდეები წარმოდგება მე-2 რიგის ხდომილობებით.

განსაზღვრება 2.2. (J.C) წყვილი, სადაც $J \subseteq T-$რაიმე დროის შუალედია, ხოლო $C \in M-$ფულადი თანხა, რომელსაც ვუწოდებთ ინტერვალურ ხდომილობას ან მე-2 რიგის ხდომილობას.

დროის დიაგრამაზე ინტერვალური ხდომილობები გამოისახება ნახ. 6.



ნახ. 6. დროის დიაგრამის ინტერვალური ხდომილობა

ჩვენ განვსაზღვრავთ ორი ტიპის ფინანსური ხდომილობას, რომლებიც შეესაბამება ფინანსური სიდიდეების ორ ტიპს. თუმცა პრაქტიკაში უმრავლეს შემთხვევაში (ავიღოთ მაგ.: დივიდენტების გადახდა) შეგვიძლია გვერდი ავუაროთ II კლასის ხდომილობებს. ასეც იქცევიან. ამისათვის იყენებენ ინტერვალური გადახდის გარდაქმნას მომენტალურ გადასახადში:

$$(J,C)\to(²,C)\,.$$

უმარტივეს შემთხვევაში გადასახადის სიდიდე არ იცვლება, ხოლო გარდაქმნა მდგომარეობს გადახდის აქტუალიზაციის დროის ² მომენტის არჩევაში ამ გადახდის აქტუალიზაცია.

პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გამოიყენება (J, C) ინტერვალური გადასახადის აქტუალიზაცია ორი წესი, სადაც J – დროის შუალედში t_1 და t_2 ბოლოებით $[t_1 t_2]$. პირველ შემთხვევაში C გადასახადის გადახდა ხდება შუალედის დასაწყისში, ე.ი. $² = t_1$.

აქტუალიზაციის ასეთ სქემას ეწოდება ავანსირება (ნახ. 7, ა), მეორე შემთხვევაში C გადასახადის გადახდა ხდება შუალედის ბოლოს – $² = t_2$. ამ სქემას ფინალიზაცია ეწოდება (ნახ. 7, ბ).

ა) ბ)

ნახ. 7. აქტუალიზაციის სქემა

აქტუალიზაცია გარდაქმნის მე-2 რიგის ხდომილობების პირველი რიგის ხდომილობებში.

არსებობს მათ შორის კავშირის კიდევ ერთი სახე. საუბარია მომენტალური სიდიდის ცვლილების ოპერატორზე რაიმე დროის $J=[t_1,t_2]$ შუალედში. თუ ჩვენთვის ცნობილია ორი ხდომილობა (t_1,S_1)

და (t_2, S_2) (1-ლი კლასის), რომლებიც შეესაბამება მომენტალური სიდიდე მდგომარეობს t_1, t_2 მომენტში, მაშინ შესაძლებელია განვსაზღვროთ მე-2 კლასის ხდომილობას (J, C), სადაც $X = \Delta_J S = S(t_2) - S(t_1) - S$ სიდიდის ცვლილება J შუალედში.

ფინანსური ნაკადი. პრაქტიკაში იზოლირებული ხდომილობა იშვიათად განიხილება. უმეტეს შემთხვევაში ფინანსურ ოპერაციაში მონაწილეობს არა ერთი, არამედ მრავალი ხდომილობა.

განსაზღვრება 2.3. ფინანსური ხდომილობების მიმდევრობას

$$\{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}, \ \ n \le \infty$$

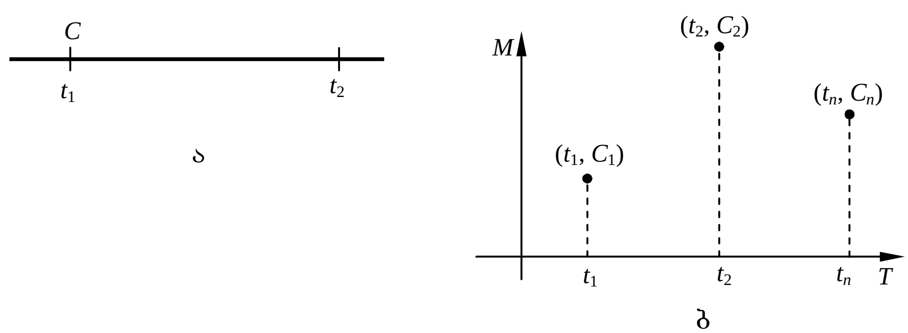
ეწოდება პირველი რიგის (დისკრეტული) ფინანსური ან ფულადი ნაკადი და აღინიშნება სიმბოლოთი CF (ინგლისურიდან $cas^h f(x_0)$)

როდესაც $n < \infty$, ეს სასრული (დისკრეტული) ფინანსური ნაკადია. ფინანსურ ლიტერატურაში განიხილავენ აგრეთვე შემთხვევას $n = \infty$. ე.ი. უსასრულო (დისკრეტულ) ნაკადს. მაგალითად ე.წ. მუდმივი რენტა.

ანგარიშის გახსნას R1000 და შემდეგ მისი ანგარიშიდან მოხსნას პირველი და მეორე წლის ბოლოს შეესაბამება ფინანსური ნაკადი:

$$CF = \{(0,\ 1000), (1,\ -400), (2,\ -300)\}.$$

ფულის ნაკადი ცხადი სახით გამოისახება ან დროის სკალაზე აღნიშნული წერტილთა მიმდევრობით (ნახ. 8, ა) ან საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილთა კოორდინატებით (ნახ. 8, ბ).



ნახ. 8. ფულის ნაკადი

ფინანსური ხდომილობის და ნაკადის გამოსახვას დროის სკალაზე ჩვეულებრივ ეწოდება დროითი დიაგრამა, ხოლო მათ გამოსახულება სიბრტყეზე – გრაფიკები.

ფინანსური ნაკადების ნამრავლი რაიმე რიცხვზე და ორი ფინანსური ჯამი (გაერთიანება) განისაზღვრება ჩვეულებრივ. ფინანსური ნაკადების გამრავლების შედეგში გულისხმობენ

$$\sim CF = \{(t_1, \sim C_1), (t_2, \sim C_2), \cdots, (t_n, \sim C_n)\}.$$

CF_1 და CF_2 ნაკადების ჯამში იგულისხმება $CF_1 + CF_2$ ნაკადი, რომელიც შედგება ყველა ფინანსური ხდომილობისაგან $(t_j^{(1)}, C_j^{(1)})$ და $(t_k^{(2)}, C_k^{(2)})$, რომლებიც შედიან CF_1 და CF_2 ნაკადებში, შესაბამისად $t_j^{(1)}$ და $t_k^{(2)}$ სხვადასხვაა. ასევე ხდომილობისგან $(t_j, C_j^{(1)} + C_j^{(2)})$, როცა $t_j^{(1)} = t_k^{(2)} = t_j$ უკანასკნელ შემთხვევაში თუ თანხების შეკრების შედეგად მივიღებთ, რომ და $C_j^{(1)} + C_j^{(2)} = 0$, მაშინ ხდომილობა $(t_j, 0)$ შეიძლება არ ჩავრთოთ შედეგების ნაკადში.

დროის იმ t_j მომენტებს, რომელთათვისაც გადასახადები არანულოვანია ვუწოდოთ კრიტიკული მომენტები. ამგვარად თუ $t_j -$ კრიტიკული მომენტია, მაშინ (t_j, C_j) ფინანსურ მომენტში უნდა შესრულდეს ტოლობა $C_j \neq 0$.

მაგალითი 2.1. ფინანსური ნაკადისთვის ხდომილობა

$$CF_1 = \{(0,\ 100), (2,\ -200), (3,\ -400), (5,\ 100), (6,\ -300)\},$$

და

$$CF_2 = \{(2,\ 400), (4,\ 700), (5,\ -150), (6,\ 650), (4,\ 800)\}.$$

ვიპოვოთ $2CF_1 + CF_2$.

ამოხსნა: უპირველეს ყოვლისა დავწეროთ $2CF_1$

$$2CF_1 = \{(0,\ 200), (2,\ -400), (3,\ \text{-}800), (5,\ 200), (6,\ -600)\},$$

მაშინ $2CF_1 + CF_2$ ნაკადისათვის საბოლოოდ მივიღებთ

$$2CF_1 + CF_2 = \{(0,\ 200), (3,\ 800), (4,\ 700), (5{,}50), (6,\ 50), (7,\ 800)\}.$$

ამასთან ერთად ხდომილობა (2,0) არ განვიხილავთ, რადგან $t = 2$ მომენტში რეალურად არანაირად ფინანსური მნიშვნელობა არა აქვს მინიჭებული.

შევნიშნოთ, რომ ფინანსურ მათემატიკაში დისკრეტული ფულადი ნაკადი ხშირად. აღიწერება არა $\{(t_k, C_k)\}_{k=1}^{n}$ მიმდევრობით, არამედ მისი გადახდის ფუნქცია $C_{CF} = C(t)$

$$C: T \to M\ ,\ \ t \to C(t)\,,$$

განსაზღვრული მთლიან დროის სკალაზე. ამასთან $C(t)$ ფუნქცია ყველგან ნულის ტოლია, გარდა კრიტიკული წერტილისა, რომელშიაც ის, ბუნებრივად ემთხვევა C_k ჯამს, რომელიც დაკავშირებულია თან, ე.ი.

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad t \neq t_k\,, \\ C_k\,, & \text{თუ} \quad t = t_k\,. \end{cases}$$

ასეთი სახის ფუნქციებს, მიღებულია, რომ ვუწოდოთ **ფინიტური** (სახსრული ნაკადებისათვის), რამდენადაც ისინი განსხვავებულები არიან ნულისაგან მხოლოდ წერტილების სასრული რაოდენობით.

ყველა მომენტების სიმრავლეს, რომელშიც ნაკადის ფულადი ფუნქცია განსხვავებულია ნულისაგან ეწოდება მისი მატარებელი და აღინიშნება *SuppCF*.

$$SuppCF = \{t \in T / C(t) \neq 0\} = \{t_1, r_2, \cdots, t_n\}.$$

ფულადი ფუნქციების მეშვეობით ადვილად განისაზღვრება ნაკადებზე ალგებრული ოპერაციები. ვთქვათ, მაგალითად, $C_1(t)$ და $C_2(t)-$ ფულადი ფუნქციებია CF_1 და CF_2-ნაკადების შესაბამისად, მაშინ მხოლოდ CF ნაკადისათვის $CF = CF_1 + CF_2$.

ფულადი ფუნქცია $C(t)$ განისაზღვრება ტოლობით $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$.

ანალოგიურად ნაკადის CF ნაკადის ფულადი ფუნქცია $\tilde{C}(t)$, არის CF ნაკადის $C(t)$ ფულადი ფუნქციის ნამრავლი ამ რიცხვზე

$$\tilde{C}(t) = ª C(t)\,.$$

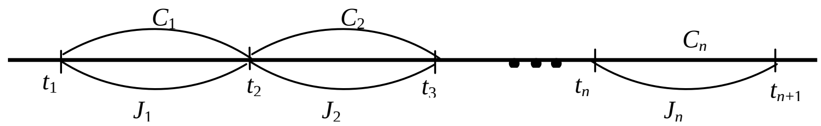
განსაზღვრება 2.4. ინტერვალური ფინანსური ნაკადი ან მეორე რიგის ფულადი ნაკადი ეწოდება მე-2 რიგის ხდომილობათა მიმდევრობას

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), (J_2, C_2), \cdots, (J_n, C_n)\}$$

სადაც $J_1, J_2, \cdots, J_n$ წყვილ-წყვილად გადამკვეთი დროის შუალედებია.

დროის დიაგრამაზე (ნახ. 9) მოყვანილია მე-2 რიგის ფულადი ნაკადის გრაფიკული ილუსტრაცია.

ზემოთ განსაზღვრული მე-2 რიგის ხდომილობა შეიძლება იოლად გადავიტანოთ ნაკადებზე. თუ ამას გამოვიყენებთ. თითოეულ მე-2 რიგის ხდომილობასთან, მივიღებთ პირველი რიგის ნაკადს.



ნახ. 9. მეორე რიგის ფულადი ნაკადის გრაფიკული ილუსტრაცია

თუმცალა აქტუალიზაციის კონკრეტული სქემის არჩევა (ავანსირება ან ფინანსირება), შეიძლება იყოს სხვადასხვა, სხვადასხვა ხდომილობებისათვის.

პრაქტიკაში ჩვეულებრივ იყენებენ ერთგვაროვან აქტუალიზაციის სქემას: ან ავანსირებას ყველა ხდომილობისათვის ან ფინალიზაციას, ასევე ყველა მე-2 ტიპის ნაკადებისათვის.

ამგვარად პირველ შემთხვევაში ინტერვალური ნაკადი $\overline{CF}$ გადაიქცევა ავანსირებულ ხდომილობათა ნაკადად

$$CF^{\sim} = \{(t_0, C_1), (t_1, C_2), \cdots, (t_{n-1}, C_n)\}$$

და მეორე – ფინალიზირებული ნაკადი

$$CF^{f} = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}.$$

ავანსირების ოპერატორი აღვნიშნოთ Adv, ხოლო ფინალიზაციის – Fin.

მაშინ

$$CF^{\sim} = Adv(\overline{CF}),$$

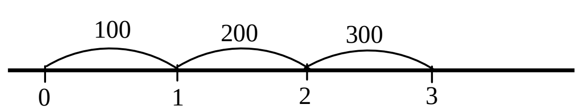
$$CF^{f} = Fin(\widetilde{CF}).$$

მაგალითი 2.2. მეორე რიგის ნაკადისათვის (ნახ. 10) იპოვეთ ამ ნაკადის შესაბამისი ხდომილობების ავანსირებული და ფინალიზირებული ნაკადები.

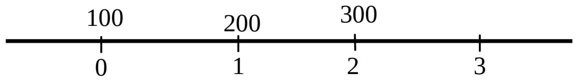
ამოხსნა:

$$CF^{\sim} = Adv(\overline{CF}) = \{(0,\ 100), (1,\ 200), (2,\ 300)\}.$$

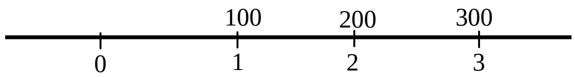
მისი დიაგრამა მოყვანილია ნახ. 11.



ნახ. 10. მეორე რიგის ხდომილობა



ნახ. 11. ავანსირებული ნაკადების დიაგრამა



ნახ. 12. ფინალიზირებული ნაკადების დიაგრამა

$\overline{CF}$ ფინალიზაციის ნაკადი იძლევა ნაკადს

$$CF^f = Fin(\overline{CF}) = \{(1,\ 100), (2,\ 200), (3,\ 300)\}.$$

მისი დიაგრამა ნაჩვენებია ნახ. 12-ზე.

ასევე შეიძლება განვიხილოთ 1-ლი ნაკადის გარდაქმნა მე-2 რიგის ნაკადად. იმ ნაკადების გარდაქმნა, რომლებიც დაკავშირებულია მომენტალური სიდიდის ცვლილებებთან. ვთქვათ

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}$$

არის ხდომილობათა ნაკადი, რომელიც დაკავშირებულია რომელიღაც მომენტალურ სიდიდესთან, მაშინ მას შეესაბამება მე-2 რიგის ნაკადი:

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), (J_2, C_2), \cdots, (J_n, C_n)\}$$

სადაც $J_k = [t_k, t_{k+1}]$, ხოლო $C_k = \Delta S_k = S(t_{k+1}) - S(t_k)$. S ცვლილება J_k შუალედში $k = 1, \cdots, n-1$.

ასეთი ოპერაციები ყველაზე ხშირად გამოიყენება რენტების თეორიაში, ე.წ. რეგულარული გადასახადების ნაკადებში.

რენტა. გადასახადების რეგულარული ნაკადები დასაშვებია ბევრ ფინანსურ კონტრაქტებში, ოპერაციებში, ობლიგაციებზე პროცენტების გადახდა, დივიდენდების გადახდა აქციონერებისათვის, პენსიის გადახდა – ეს ყველაფერი გადასახადების რეგულარული ნაკადებია.

რეგულარულობის ცნებაში არის ორი ასპექტი: დროითი და ფინანსური. დროითი ასპექტი დაკავშირებულია რეგულარობასთან. მაგალითად, გადასახადების განხორციელება ყოველი თვის ბოლოს, კვარტლის ან წლის ბოლოს.

განსაზღვრება 2.5. რენტა ეწოდება მე-2 რიგის ინტერვალურ ნაკადს.

$$\overline{CF}=\{(J_1,C_1),\cdots,(J_n,C_n)\cdots\}$$

მომიჯნავე მონაკვეთის მიმდევრობებით

$$J_1\cdots J_k\cdots J_n\cdots$$

რენტის პერიოდი, ერთიდაიგივე სიგრძით:

$$|J_1|=|J_2|=\cdots=|J_n|=\cdots=h\,.$$

$h-$ ეწოდება რენტის პერიოდი, ბოლოები

$$t_0,t_1,\cdots,t_{k-1},t_k\cdots,t_n$$

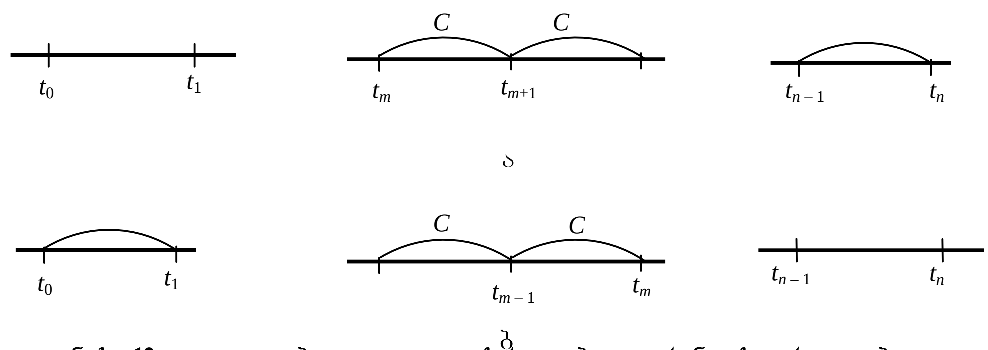
შუალედებს $J_k=(t_{k-1},t_k)$ ეწოდება რენტის კრიტიკული მომენტები. ისინი ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას: $t_n=t_0+n\cdot h,\quad n=0,1,\cdots,t_0-$ მომენტს ეწოდება რენტის დასაწყისი. თუ რენტას აქვს J_k შუალედების სასრული რიცხვი, მაშინ მას ეწოდება ვადიანი წინააღმდეგ შემთხვევაში (უვადო ან მუდმივი). ვადიანი რენტის J_n უკანასკნელი შუალედის t_n ბოლო რიცხვს $T=t_n-t_0$ ეწოდება რენტის სიგანე.

რენტის ზოგიერთი გადასახადები არის ნულოვანი. პერიოდს, რომელსაც შეესაბამება არანულოვანი. გადასახადები ეწოდება საგადასახადო პერიოდი, დანარჩენებს – ცარიელი. გადახდის პერიოდების რიცხვს ეწოდება რენტის ვადა.

რენტის პირველი გადახდითი პერიოდის დასაწყისს ეწოდება ეფექტური დასაწყისი, ხოლო ბოლოს – რენტის ეფექტური ბოლო. ამგვარად რენტის დასაწყისი და ეფექტური დასაწყისი ერთმანეთს შეიძლება არც დაემთხვეს. დამთხვევის შემთხვევაში რენტას ეწოდება მყისიერი წინააღმდეგობის შემთხვევაში გადავადებული. თუ დასასრული და ეფექტური დასასრული ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ რენტას ეწოდება დასრულებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში – არადასრულებული. 13 ნახ-ზე გამოსახულია (ა) გადავადებული და (ბ) დაუსრულებელი რენტის გრაფიკი.

თუ რენტის ყველა არანულოვანი გადასახადები თანაბარია, მაშინ რენტას მუდმივი ეწოდება. თუ რენტალური გადასახადები მონოტონურად იზრდება, მაშინ რენტა ზრდადია, თუ მონოტონურად მცირდება, მაშინ კლებადია. ორივე შემთხვევაში რენტა მონოტონურია. მონოტონურობის

ხასიათის მიხედვით (ზრდადობა/კლებადობა) რენტები არსებობს არითმეტიკული და გეომეტრიული.



ნახ. 13. გადავადებული და დაუსრულებელი რენტის გრაფიკები

არითმეტიკული მონოტონური რენტის გადასახადები შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას

$$C_{k+1} = C_k + d\ ,\ \ k = 1,2\cdots$$

ხოლო გეომეტრიულად მონოტონური რენტის გადასახადები წარმოქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას.

$$C_{k+1} = C_k q \quad (q \neq 0)\,,\ \ k = 1,2,\cdots$$

ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებები, როგორც უკვე აღვნიშნეთ რენტას განსაზღვრავენ, როგორც მე-2 რიგის $\overline{CF}$ ნაკადს. მაგრამ პრაქტიკაში რენტა რეალიზებას ახდენს, როგორც ფინანსური ხდომილობების ნაკადი. ზემოთ აღვწერეთ აქტუალიზაციის ორი წესი, ანუ ინტერვალური ნაკადის გარდაქმნის წესი ხდომილებათა ნაკადად.

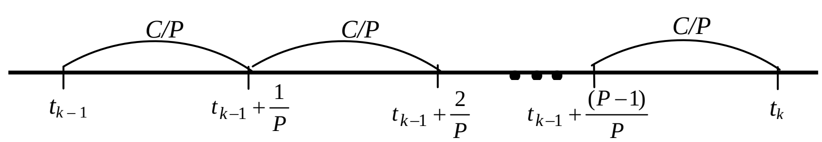
პირველ შემთხვევაში ყველა რენტაბელური გადასახადები განიხილება შესაბამისი პერიოდების დასაწყისთან. ასეთ გარდაქმნილ ნაკადს უწოდებენ ავანსირებულ წინასწარი გადახდის რენტს ან ნუმერანდო მეორე შემთხვევაში ყველა რენტალური გადასახადები განიხილება შესაბამისი პერიოდების ბოლოების მიმართ. ასეთი გარდაქმნით მიღებული ნაკადი არის ფინალური, ჩვეულებრივი რენტა ან რენტა პოსტნუმერანდო.

რენტის პერიოდები პრაქტიკაში დაკავშირებულია სტანდარტული კალენდრის პერიოდებს. მათ მიეკუთვნებათ წლიური, კვარტალური, თვიური და ა.შ. შუალედები.

რენტა, რომლის პერიოდის ერთი წელიწადი ეწოდება ანუიტეტი.

ზოგჯერ, თანხები განკუთვნილი რენტის ბუნებრივი პერიოდებისათვის, რეალიზებას ახდენს არა ერთი გადასახადით, არამედ ერთნაირი (შედარებით წვრილი) სერიული გადასახადით, რომლებიც რენტის პერიოდებით თანაბრადაა გადანაწილებული. ასე, დივიდენდების რენტის გადახდის აქციებისათვის ბუნებრივი წლიური პერიოდით, ხშირად ადგილი აქვს კვარტალურად. სხვა მაგალითისთვის გამოდგება ობლიგაციების კუპონური რენტა. წლიური პროცენტის გადახდა ობლიგაციებისა, მოცემული კუპონური ფსონით, ხშირად ხდება წელიწადში ორჯერ თანაბარი თანხით (ნახევარ წელიწადში ერთხელ).

ასეთი სახის რენტებს ეწოდება P-ჯერადი რენტის ბაზური პერიოდის მიმართ (ჩვეულებრივ წელიწადი). ასე, რომ P-ჯერადი რენტის, წლიური პერიოდით და წლიური (გადასახადით, რეალიზაცია ხდება P ერთნაირი გადასახადით $\frac{C}{P}$ სიდიდით. ეს გადასახადები თვითონ ქმნიან რენტას, რომლებსაც დავარქმევთ მიკრორენტას, რომელიც შეესაბამება რენტის ბაზურ პერიოდს (ნახ. 14).



ნახ. 14. რენტის ბაზური პერიოდის გრაფიკი

მიკრორენტა მიიღება C თანხის დაყოფა შესაბამის რომელიმე ბაზური პერიოდის მიმართ.

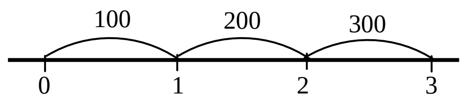
თუ ეს ოპერაცია სრულდება ყველა ჯამისათვის და ყველა პერიოდისათვის, მაშინ მიღებული რენტა მოცემული რენტის (P-ჯერადი დანაყოფით) ოპერატორი აღინიშნება $D^{(P)}$-თი.

მაგალითი 2.3.

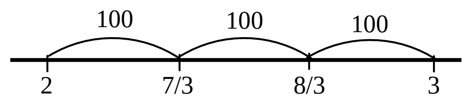
არითმეტიკულად ზრდადი ინტერვალური $\overline{CF}$ რემონტისათვის (ნახ. 15). იპოვეთ მიკრორენტა, რომელიც შეესაბამება უკანასკნელი გადასახადის 3-ჯერადად განაწილებას და რენტა, რომელიც მიღებულია მთლიანი $\overline{CF}$ რენტის 2-ჯერადად დაყოფით.

ამოხსნა. მიკრორენტა $D^{(3)}([2,3],300)$, რომელიც შეესაბამება ბოლო გადასახადის 3-ჯერადად დაყოფას, გამოსახულია (ნახ. 16)-ზე

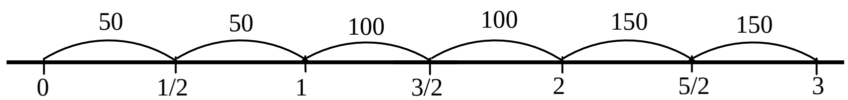
$D^{(2)}(\overline{CF})$ რენტა მიღებული $\overline{CF}$ რენტის 2-ჯერადად დანაწილების შედეგად მოცემულია ნახ. 16-ზე.



ნახ. 15. არითმეტიკულად ზრდადი ინტერვალი



ნახ. 16. რენტის 2-ჯერადად დანაწილება



ნახ. 17. რენტის 3-ჯერადად დანაწილება

დანაწილებული რენტისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ზემოთ ნახსენები ორივე ტიპის გარდაქმნა (აქტუალიზაცია). თანმიმდევრობით გამოვიყენოთ დანაწილების და აქტუალიზაციის ოპერატორები, და ჩვენ შევძლებთ მივიღოთ ხდომილობის წილადური რენტა. ამგვარად $Adv(D^{(P)}(\overline{CP}))$ რენტას, შეიძლება დავარქვათ $P-$ჯერადად ავანსირებული რენტა, ხოლო რენტა $Fin(D^{(P)}(\overline{CP})) - P$-ჯერადად ჩვეულებრივი რენტა.

მაგალითი 2.4. $\tilde{CF}$ ინტერვალური რენტისათვის წინა მაგალითიდან ვიპოვოთ ამ რენტის 2-ჯერადად დანაწილებული სხვადასხვა აქტუალიზაციები.

ამოხსნა: ცხადია, რომ

$$Adv(D^{(P)}(\overline{CP})) = \left\{(0,\ 50),\left(\frac{1}{2},\ 50\right),(1,\ 100),\left(\frac{3}{2},\ 100\right),(2,\ 150),\left(\frac{5}{2},\ 150\right)\right\},$$

ანალოგიურად

$$Fin(D^{(P)}(\overline{CP})) = \left\{\left(\frac{1}{2},\ 50\right),(0,\ 50),\left(\frac{3}{2},\ 100\right),(2,\ 100),\left(\frac{5}{2},\ 150\right),(3,\ 150)\right\}.$$

ჩვენ განვსაზღვრეთ დანაწილების ოპერატორი უშუალოდ ინტერვალური რემონტისთვის. ცხადია, რომ მისი გავრცელება იოლია ხდომილებათა რენტებზე, ამისათვის უბრალოდ ადგილებს შევუცვლით დანაწილების და აქტუალიზაციის ოპერატორებს.

ამგვარად ავანსირებული რენტის (ხდომილების) P-ჯერადი დანაწილება, შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც მოცემული ინტერვალური რენტის P-ჯერადი დანაწილების ავანსირება.

$$D^{(P)}(Adv(\overline{CF})) = Adv(D^{(P)}(\overline{CF})) .$$

ანალოგიურად განისაზღვრება ჩვეულებრივი რენტის (ხდომილების) დანაწილება

$$D^{(P)}(Fin(\overline{CF})) = Fin(D^{(P)}(\overline{CF})) .$$

ამაზე დავამთავროთ მოკლე მიმოხილვა რეგულარული ნაკადების – რენტების შესახებ.

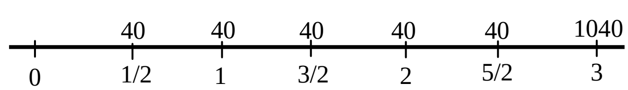
დიდი ყურადღება ეთმობა ფინანსური ხდომილებების და ნაკადების განხილვა, რადგან თანამედროვე ფინანსურ თეორიაში აქტივების ცნება უშუალოდ დაკავშირებულია გადასახადების ნაკადის ცნებასთან.

არსებითად ნებისმიერი აქტივი შეიძლება წარმოვადგინოთ გახანგრძლივებული ან გადასახადების ნაკადით.

ობლიგაცია შეიძლება აღვწეროთ ნაკადით, რომელიც შედგება ყველა პროცენტული გადასახადისაგან და ნომინალის გადასახადიდან გადასახადის ვადის დაფარვის ბოლოს.

განვიხილოთ ობლიგაცია ნომინალური ღირებულებით R1000 და მისი დაფარვის ვადა იყოს წელი.

ვთქვათ კუპონური ფსონი ტოლია წლიური 8%-ის და პროცენტების გადახდა ხდება წელიწადში 2-ჯერ, ყოველი ნახევარი წლის ბოლოს. ე.ი. ყოველი ნახევარი წლის ბოლოს უნდა გადავიხადოთ R40, მაშინ ფულის ნაკადი, წარმოებული ამ ობლიგაციის მიერ არის (ნახ. 18)



ნახ. 18. ობლიგაციების მიერ წარმოებული ფულის ნაკადი

აქტივის წარმოდგენა ფულადი ნაკადის სახით ნებას გვაძლევს ავაწყოთ მათემატიკური მოდელი, რომელიც რაოდენობრივად აღწერს თანაფარდობებს აქტივების ძირითად მახასიათებლებს შორის: მათი ფასები, შემოსავლები რისკი და სხვ.

2.4. დისკრეტული ნაკადის ნეტო-სიდიდე და უმარტივესი ბალანსის მოდელი

ფინანსური ხდომილობები, რომლებიც შეადგენენ გადასახადების 1 ტიპის ნაკადს, მიეკუთვნება დროის გარკვეულ მომენტს. ახლა შემოვიღოთ ხდომილობის ნაკადის დახასიათება, რომელიც ხდება დროის რაიმე შუალედში.

განსაზღვრება 2.6. გადასახადების ნაკადის ნეტო სიდიდე

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}.$$

J შუალედზე ეწოდება სიდიდეს $NV(CF, J) = \sum_{k:t_k \in J} C_k$, ე.ი. ეს არის C_k სიდიდეების ალგებრული ჯამი სიმბოლო NV – (ინგ-დან netto-value).

შევნიშნოთ, რომ დროის ინტერვალის განსაზღვრისას აუცილებელია მიუთითოთ ეკუთვნის თუ არა ამ შუალედს მისი საზღვრები. მაგ.: ნაკადისათვის:

$$CF = \{(3,\ 100), (-1,\ -200), (1,\ 300), (2,\ 400)\}.$$

დროის სხვადასხვა შუალედებისათვის აუცილებელია განვსაზღვროთ ნაკადის ნეტო-სიდიდეები:

$$NV(CF, [-4,0] = 100 + (-200) = -100\ ;$$

$$NV(CF, (-1;1]) = 300\ ;$$

$$NV(CF, (-3,5)) = 100 - 200 + 300 + 400 = 600\ .$$

ნაკადის ნეტო-სიდიდესთვის ადგილი აქვს: ადიტიურობის თვისებას.

ნებისმიერი $t_1 < t_2 < t_3$

$$NV(CF, [t_1 t_2]) + NV(CF, (t_2, t_3) = NV(CF, [t_1, t_3])\ .$$

ე.ი. ნაკადის ნეტო-სიდიდე გარკვეულ შუალედზე ტოლია ტოლია ნაკადების ნეტო-სიდიდეების ჯამის, რომლებიც არ შეადგენენ ამ გადაუკვეთავი ქვემონაკვეთების მონაკვეთს.

ფინანსურ მათემატიკაში ხშირად გამოიყენება ე.წ. დამაგროვებ-ლობითი მოდელი. ასეთი უმარტივესი მოდელი არის დამაგროვებლობითი. ანგარიში (ან ფონდი), რომლის მდგომარეობა დროის t მომენტში წარმოადგენს $S(t)$ მყისიერ ფულად მნიშვნელობას. დამგროვებლობით ანგარიშზე შემოსული თანხა, რომელიც მოცემულია შემოსავლითი

გადასახადების ნაკადით, აკუმულირდება ანგარიშზე, ზრდის რა მას. შესაბამისად ანგარიშიდან მოხსნილი თანხები წარმოქმნიან გამავალ ნაკადს, რომლებიც ამცირებენ ანგარიშის მდგომარეობას. ორივე მათგანი მჭიდროდ არის დაკავშირებული ანგარიშის მდგომარეობასთან. უფრო მეტიც სიტყვა „მდგომარეობა“ საჭიროებს მეტ დაზუსტებას. ამისათვის განვიხილოთ შედეგი მაგალითი:

ვთქვათ ინვესტორს ბანკში ანგარიშზე აქვს R500. დროის რომელიღაც t_0 მომენტში მან ანგარიშზე შეიტანა კიდევ R100. როგორია ანგარიშის მდგომარეობა დროის ამ მომენტში? უნდა გვახსოვდეს, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს მოდელთან გაიდეალებულ პროცესთან. რამდენადაც მოდელში ახალი თანხის შემოსვლა ანგარიშზე მყისიერია, ასევე მყისიერად უნდა შეიცვალოს ანგარიშის მდგომარეობა.

ამგვარად, წარმოიქმნება „განუსაზღვრელობა“: ჩავთვალოთ თუ არა დროის t_0 მომენტში მდგომარეობად საწყისი მნიშვნელობა R500, თუ ახალი „შევსებული“ მნიშვნელობა R600? პრაქტიკაში ასეთი კითხვა არ წარმოიშვება, რადგანაც ანგარიშის შევსება – არ არის მყისიერი აქტი, ის პროცესია, რომელსაც აქვს ხანგრძლივობა. თუმცა მათემატიკურ მოდელში აუცილებელია გავაკეთოთ არჩევანი და მივცეთ მდგომარეობას შესაბამისი განსაზღვრება. პრინციპში შესაძლებელია 3 ვარიანტი.

პირველ ვარიანტში შემოთავაზებულია თანხის შემოსვლის ან გასვლის მომენტების მდგომარეობა ჩავთვალოთ განუსაზღვრელად. მაგრამ ეს მიდგომა არ არის მოხერხებული.

მეორე ვარიანტი t_0 მომენტში მდგომარეობა ემთხვევა „უშუალოდ წინა მდგომარეობის“ მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$S(t_0) = S(t_0 - 0),$$

სადაც

$$S(t_0 - 0) = \lim_{t \to t_0 - 0} S(t)$$

არის $S(t)$-დან მარცხნივ t_1 წერტილში. ეს ნიშნავს, რომ $S(t)$ უწყვეტია მარცხნივ t_0, წერტილში.

ჩვენი მაგალითისთვის ეს შეესაბამება ანგარიშის მდგომარეობას არჩევის დროს t_0 მომენტში, როცა R500-ის.

მესამე ვარიანტში t_0 მომენტში მდგომარეობა ემთხვევა „უშუალოდ მის მომდევნო“ მდგომარეობს. ეს ნიშნავს, რომ $S(t_0) = S(t_0+0)$ $S(t_0+0) = \lim\limits_{t \to t_0+0} S(t)$ არის $S(t)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი t_0 წერტილში. ამ შემთხვევაში $S(t)$ უწყვეტია მარჯვნიდან. ჩვენს მაგალითში ამას შეესაბამება ანგარიშის მდგომარეობა t_0 მომენტში, რომელიც ტოლია R600.

ამგვარად მეორე ვარიანტში ანგარიშის მდგომარეობა t_0 მომენტში „რეაგირებას არ ახდენს“ შემოსავალზე, მესამე ვარიანტში ის „დასრულებულია“.

აქ და შემდეგშიც გამოიყენება მესამე ვარიანტი – დასრულებული მდგომარეობა. ჩვენ თუ ავირჩევდით მეორე ვარიანტს, მაშინ შუალედები ადიტიურობის თვალსაზრისით იქნებოდა ღია მარჯვნიდან, ე.ი. ექნებოდა სახე:

$$[t_1, t_2) \text{ და } [t_2, t_3).$$

ნაკადის ნეტო-ღირებულება განისაზღვრება ნაკადით:

$$S_k = NV(CF, [t_k, t_k]).$$

ამგვარად, ნეტო-ღირებულება არის კიდევ ერთი და როგორც ვნახეთ ქვემოთ უფრო ზოგადი ფორმა ფინანსური ნაკადების მოცემისა.

ფინანსურ ნაკადებს აქვს წყაროები (რესურსები), რომლებიც წარმოქმნიან ამ ნაკადებს. ფინანსური მათემატიკის თვალსაზრისით ეს არის – ფონდი.

ფონდის მოცულობა არის მოცემულ მომენტში ფონდის აქტივების ღირებულება. ეს 1-ლი კლასის სიდიდეა. ფულად ნაკადს, დაკავშირებული ფონდთან, შეუძლია შეიცვალოს მისი სიდიდე დროის რომელიღაც შუალედში. თუ დადებითი ნაკადების მნიშვნელობად მივიჩნევთ მნიშვნელობებს შემომავალი ნაკადებიდან, ხოლო უარყოფითებს გამავალი ნაკადებიდან, მაშინ მოცემული ფულადი ნაკადი დაიყოფა ორ ნაკადად: ერთი შემომავალი ფონდში, მეორე კი გამავალი მისგან. მოცემული დროის შუალედი, ფონდის სიდიდის ცვლილება ზუსტად ტოლია ამ შუალედში გადასახადების ნაკადების ალგებრული ჯამის.

მათემატიკურად ეს ფაქტი აღიწერება შემდეგნაირად. ვთქვათ V_0 – ფონდის საწყისი სიდიდეა; V_t – ფონდის სიდიდე დროის t მომენტში.

მაშინ ნებისმიერი CF ნაკადისთვის, დაკავშირებული ფონდთან, სამართლიანია თანაფარდობა:

$$V_t = V_0 + NV(CF,(0,t]), \quad t > 0 \tag{1}$$

რომელსაც ეწოდება ბალანსის განტოლება.

შემდგომში, ვთქვათ t_1 და t_2 დროის თავისუფალი მომენტებია და $t_1 < t_2$. მაშინ (1)-დან ადიტიურობის თვისების გათვალისწინებით მოვლენის ნაკადის ნეტო-სიდიდე

$$V_{t_2} = V_0 + NV(CF,(0,t_2]) = V_0 + NV(CF,(0,t_1]) + MV(CF,(t_1,t_2]) =$$

$$= V_{t_1} + NV(CF,(t_1,t_2]).$$

ამგვარად მივიღეთ თანაფარდობა:

$$V_{t_2} = V_{t_1} + NV(CF,(t_1,t_2]), \quad t_1 < t_2. \tag{2}$$

რომელსაც ასევე ბალანსის განტოლება ეწოდება.

(2) განტოლება უბრალოდ არის „შენახვის კანონის“ გამოსახულება. მართლაც, $V_{t_2} - V_{t_1}$ სხვაობა არის ფონდის მოცულობის ცვლილება დროის $(t_1,t_2]$ შუალედში. ფონდის მოცულობა. ამ შუალედში შეიცვლება ზუსტად იმდენით, რამდენი ფულადი სახსარი შემოვა ან გავა ფონდიდან. ნაკადის ნეტო-სიდიდე ზუსტად გვაძლევს ზოგად ბალანსს ფონდში შემომავალ და გამავალ თანხებზე.

მაგალითისთვის განვიხილოთ ნაკადი:

$$CF = \{(-3,\ 100),(-1,\ 200),(1,\ 300),(2,\ 400)\}.$$

ჩავთვალოთ, რომ ფონდის სიდიდე $t = 0$ მომენტში არის $V_0 = R500$, შესაძლებელია ვიპოვოთ ფონდის მდგომარეობა დროის ნებისმიერ სხვა მომენტში

$$V_1 = V_0 + R300 = R500 + R300 = R800,$$

$$V_3 = V_1 + R400 = R1200 \quad \text{და ა.შ.}$$

ზემოთმოყვანილი განსაზღვრებები და გამოთვლები, გამოსახავენ ფონდის სიდიდის დამოკიდებულებას ფინანსური მოვლენების ნაკადთან, ისე რომ, მხედველობაში არ იღებენ ფულის დროით დამოკიდებულებას. ეს წმინდა ბალანსის თანაფარდობებია. არსებობს უფრო რთული თანაფარდობები, რომლებიც ითვალისწინებენ დროის ფაქტორს. ასე,

რომ ფონდის სიდიდე შეიძლება შეიცვალოს არა მარტო დროის მიხედვით, არამედ აქტივების ფონდის ღირებულების ცვლილების გამო.

ზოგადი ფინანსური ნაკადები. პარაგრაფის ბოლოს ანალიზი გავუკეთოთ ფინანსურ ნაკადებს, კერძოდ აღვწეროთ ისინი, როგორც უწყვეტი ნაკადები, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ფინანსურ ანალიზში.

ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული მოვლენის ნაკადები: (1-ლი რიგის ნაკადები) წარმოადგენენ დისკრეტულ ნაკადებს, მე-2 რიგის ნაკადებს (ინტერვალური ნაკადები) ისინი არიან განაწილებული. მათ შორის არსებობს ორმხრივი კავშირი ინტერვალური ნაკადი შეიძლება გარდავქმნათ დისკრეტულ ნაკადად, ხოლო ნებისმიერი დისკრეტული მოვლენის ნაკადი CF – ინტერვალურში, თუ რაიმე გარკვეული წესით შევარჩევთ $J_1, J_2, \cdots, J_n$ არაგადამკვეთი შუალედების მიმდევრობს, რომლებიც შეიცავენ დისკრეტული ნაკადის ყველა მომენტებს. ამ შემთხვევაში J_k შუალედში შეიძლება ჩავსვათ შესაბამისი ინტერვალური გადასახადი

$$C_k = NV(CF, J_k),$$

C_k წარმოადგენს CF ნაკადის ნეტო-მნიშვნელობის J_k შუალედში. ამ თანაფარდობას უფრო ღრმა შინაარსი აქვს: ის საშუალებას გვაძლევს ფინანსური ნაკადის ზოგადი განსაზღვრებისა. მასში შედის როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტი ნაკადები.

ზოგადი სახის ფინანსური ნაკადის მოცემა ე.წ. ნაკადის სიდიდის დახმარებით – ფუნქციები, რომლებიც შეესაბამება $V(J)$ ნაკადის სიდიდის მნიშვნელობას T დროით სკალაზე J ყოველ შუალედს. შინაარსით ნაკადის მოცემული შუალედისთვის ტოლია ზოგადად ფულის მასის ნაკადის მიერ, რომელიც „გადატანილია“ მოცემული დროის შუალედში. ფორმალურად ეს მხოლოდ რაიმე დროის შუალედის ფუნქციაა.

განსაზღვრება 2.7. CF ფინანსური ნაკადის სიდიდე ეწოდება V_{CF} დროითი სკალის ადიტიურ ფუნქციას. ე.ი. V_{CF} ფუნქცია შეესაბამება M ფულადი სკალის $V_{CF}(J)$ რაიმე მნიშვნელობას ყოველ შუალედში. V_{CF} -

ის ადიტიურობა ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი არადამკვეთი J_1 და J_2 შუალედისათვის, რომლებიც ჯამში გვაძლევენ J შუალედს:

$$J = J_1 \bigcup J_2 \,,$$
$$J_1 \bigcap J_2 = \varnothing .$$

სრულდება ტოლობა

$$V_{CF}(J) = V_{CF}(J_1 \bigcup J_2) = V_{CF}(J_1) + V_{CF}(J_2) \,.$$

CF ნაკადს, რომელიც განისაზღვრება შესაბამისი CF სიდიდით, ვუწოდოთ ზოგადი ფინანსური ნაკადი.

შემდგომი ნაკადის სიდიდეს აღვნიშნავთ V-თი.

ზოგადი ფინანსური ნაკადის განისაზღვრება ჰგავს მე-2 რიგის ნაკადის განსაზღვრებებს, თუმცა მასში არაა ნახსენები რაიმე წინასწარ მოცემული მიმდებარე შუალედების მიმდევრობები. ფინანსური ნაკადის სიდიდის მნიშვნელობა (ან გადასახადის მოცულობა) შეესაბამება ნებისმიერ შუალედს.

შემოვიღოთ კიდევ რიგი დამატებითი განსაზღვრებებისა, რომლებიც დაკავშირებულია ზოგად ფინანსური ნაკადის ცნებასთან.

ზოგად ნაკადებზე, ისევე, როგორც დისკრეტულ ნაკადებზე შეიძლება განვსაზღვროთ ოპერაციები. ასე ამბობენ $CF = CF_1 + CF_2$ ორი ზოგადი ნაკადის ჯამზე, მოცემულებს შესაბამისად $V_1 = V_{CF_1}$ და $V_2 = V_{CF_2}$. ამასთან ერთად J შუალედში ჯამური ნაკადის სიდიდე $V(J) = V_{CF}(J)$ განისაზღვრება $V_1(J)$ და $V_2(J)$ ჯამური მნიშვნელობებით:

$$V(J) = V_1(J) + V_2(J) \,.$$

ზოგადი CF ნაკადის (მოცემული $V_{CF}(J)$ სიდიდით) ნამრავლი ª რიცხვზე გვაძლევს ªCF ნაკადს, რომლის მნიშვნელობა J შუალედში ტოლია ª$V(J)$.

ვირტვით, რომ $a \in T$ წერტილი არის ნაკადის კრიტიკული წერტილი, თუ ნებისმიერი უსასრულოდ მცირე J, შუალედებისათვის, რომელთაც $\in a$, აქვს ადგილი შემდეგ ტოლობას

$$V(J) = V(a) \,.$$

აქ a წერტილი განიხილება, როგორც $J_a = [a,a]$ შუალედი.

ფინანსური ნაკადს, მოცემულს V სიდიდით, ვუწოდოთ დისკრეტული, თუ მას აქვს $a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$ განსაკუთრებული წერტილების დისკრეტული

სიმრავლე, ისეთები, რომ J ნებისმიერი შუალედში არ შეიცავს არც ერთ განსაკუთრებულ წერტილებს. შესაბამისი V ნაკადის სიდიდის მნიშვნელობა ტოლია ნულის

$$V(J) = 0 .$$

ამ შემთხვევაში განსაკუთრებული წერტილთა ერთობლიობას ეწოდება (მატარებელი საერთო ნაკადის). ცხადია, რომ დისკრეტული ნაკადი განსაკუთრებული წერტილების ერთობლიობით $a_1 \cdots a_n \quad n \le \infty$, სხვა არაფერია თუ არა მოვლენათა ჩვეულებრივი ნაკადი. ცხადია თუ დავუშვებთ, რომ $t_k = a_k$ და $C_k = V(a_k)$, მაშინ მივიღებთ მოვლენათა ნაკადს

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\}, \ \ n \le \infty .$$

იოლია შევნიშნოთ, რომ CF ნაკადის ნეტო სიდიდე J შუალედში ემთხვევა საწყისი დისკრეტული ნაკადის V სიდიდის მნიშვნელობას.

$$NV(CF, J) = V(J) .$$

უკანასკნელი ტოლობა თავის მხრივ გვკარნახობს რომ, როგორც ჩვეულებრივი დისკრეტული ნაკადისთვის მივცეთ შესაბამისი ნაკადი, რომელიც განისაზღვრება V სიდიდით.

ახლა დავუბრუნდეთ CF ზოგად ნაკადს, რომელიც მოცემულია V სიდიდით. ვთქვათ J ნებისმიერი თავისუფალი შუალედია a და b ბოლოებით.

აღვნიშნოთ ის $J = <a, b>$. დავარქვათ მას საშუალო სიმკვრივე J შუალედში

$$\overline{«}(J) = \frac{V(J)}{|J|}$$

სადაც $|J| = b - a$ შუალედის სიგრძეა.

ვიტყვით, რომ ნაკადს აქვს სასრული სიმკვრივე $«(C)$, C წერტილში, თუ არსებობს ზღვარი

$$«(C) = \lim\{\overline{«}(J) C \in J\} = \lim_{|J| \to 0} \frac{V(J)}{|J|} .$$

ამგვარად $«(C)$ სომკვრივე C წერტილში არის ნაკადის საშუალო სიმკვრივის ზღვარი შუალედებში, რომლებიც შეიცავენ $C (C \in J)$, იმ პირობით, რომ მათი სიგრძე მიისწრაფის ნულისკენ: $|J| \to 0$, სასრული

სიმკვრივის არსებობა C წერტილში ნიშნავს, რომ საკმარისად მცირე შუალედებისათვის (სიგრძის მიხედვით) J-თვის აქვს ადგილი დაახლოებით ტოლობას:

$$V(J) \approx \text{«}(C)\,|J| = \text{«}(C)(b-a),$$

რომელიც იმდენით ზუსტია, რამდენადაც მცირეა J შუალედის სიგრძე. კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ $V(J) \to 0$, როცა $|J| \to 0$, $C \in J$. ან როგორც ამბობენ ნაკადი უწყვეტია C წერტილში. ე.ი. ნაკადის მნიშვნელობა $V(\{C\})$ ამ წერტილში ნულის ტოლია.

ნაკადი უწყვეტი ყოველ $C \in T$ წერტილში არის უწყვეტი.

ნაკადის უწყვეტობისთვის V სიდიდის მნიშვნელობა J შუალედზე $J = <a,b>$ არ არის დამოკიდებული შუალედის სახეობაზე.

$$V([a,b]) = V((a,b]) = V([a,b)) = V((a,b)).$$

ამიტომ ნაკადის უწყვეტობის სიდიდე შეიძლება განვიხილოთ არა როგორც შუალედის ფუნქცია, არამედ როგორც ორი ცვლადის (შუალედების ბოლოების) ჩვეულებრივი ფუნქცია

$$V(J) = V(a,b).$$

ადიტიურობის პირობა ამ შემთხვევაში ჩაიწერება ასე

$$V(a,c) = V(a,b) + V(b,c),$$

$$a \le b \le c.$$

კერძოდ უწყვეტი ნაკადის სიმკვრივე წერტილში არის ზღვარი

$$\text{«}(C) = \lim_{(y-x)\to 0} \frac{V(x,y)}{y-x}, \quad x \le c \le y.$$

მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ნაკადები უბან-უბან უწყვეტი სიმკვრივე. $\text{«}(x)$ ნებისმიერ T წერტილში. ასეთი ნაკადები არის აბსოლუტურად უწყვეტები.

მათემატიკურ ანალიზში ჩანს, რომ V ადიტიური ფუქცია $\text{«}(x)$ სიმკვრივით წარმოსდგება შემდეგი ინტერვალის სახით:

$$V(J) = \int_J \text{«}(x)\,dx.$$

კერძოდ

$$V[a,b] = \int_a^b \text{«}(x)\,dx.$$

ეს ფაქტი მარტივად მტკიცდება, თუ განვსაზღვრავთ ფუნქციას

$$«(t) = V(t_0, t)\,,$$

სადაც t_0 – დაფიქსირებულია. მაშინ V-ს ადიტიურობიდან და სიმკვრივის და სიმკვრივის არსებობიდან.

გამომდინარეობს

$$«'(t) = «(t)\,.$$

მართლაც

$$«'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{«(t+h) - «(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{V(t_0, t+h) - V(t_0, t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{V(t, t+h)}{h} = «(t)\,.$$

ამგვარად, $«(t)$ არის

$$\int_{t_1}^{t_2} «(t)dt = «(t_2) - «(t_1)$$

და V-ს ადიტიურობს თუ გამოვიყენებთ საბოლოოდ, მივიღებთ:

$$V(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} «(t)dt\,.$$

უწყვეტი ნაკადი ერთგვაროვნად მოიცემა თავისი სიმკვრივით. ასე, რომ თუ მივიჩნევთ სიმკვრივედ $«(x) \equiv c = const$ მუდმივ ფუნქციას, მივიღებთ ე.წ. თანაბარზომად ნაკადს, რომელშიც T სიგრძის J შუალედს შეესაბამება მნიშვნელობა

$$V(J) = cT\,.$$

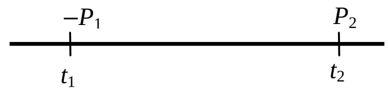
თუ გამოვიყენებთ უწყვეტ და დისკრეტულ ნაკადებს, შეიძლება შევქმნათ შერეული ნაკადები, რომლებიც წარმოადგენენ ჯამურ ნაკადებს.

2.5. ფინანსური ოპერაციები

წინა პარაგრაფში განხილული ფინანსური ნაკადები წარმოადგენს ძირითად ინსტრუმენტს ფინანსური ოპერაციების მათემატიკური მოდელის აგებისას.

ყველა მარტივი ფინანსური ოპერაციები წარმოადგენს საქონლის ყიდვა-გაყიდვას. მაგ: ფინანსური აქტივების ყიდვა-გაყიდვა. დავუშვათ, რომ რომელიღაც პირმა t_1 მომენტში იყიდა აქტივები P_1 ფარით და გარკვეული დროის გასვლის შემდეგ დროის t_2 მომენტში გაყიდა. ეს

აქტივები P_2 ფასად. თუ გავითვალისწინებთ მხოლოდ ყიდვის და გაყიდვის ფასებს, მაშინ ოპერაციის დროით დიაგრამას ექნება სახე (ნახ. 19)



ნახ. 19. დროის დიაგრამა

ნიშანი „–“ ნიშნავს, რომ მყიდველის თვალსაზრისით აქტივის შეძენა ფულად ხარჯებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ ოპერაცია ფორმალურად ჩაიწერება ნაკადით:

$$CF = \{(t_1,-P_1),(t_2,P_2)\}.$$

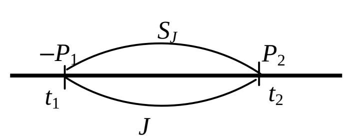
CF ნაკადს ეწოდება წარმომქმნელი.

ამასთან ერთად $\Delta P_T = P_2 - P_1$ არის ოპერაციის ფულადი შემოსავალი.

აქტივის შეძენის შემდეგ მყიდველი ხდება მისი მფლობელი $[t_1,t_2]$ პერიოდის განმავლობაში, რომელიც ოპერაციის მიმდინარეობის პერიოდს ემთხვევა. ეს ნიშნავს, რომ მფლობელს შეუძლია მიიღოს მიმდინარე შემოსავალი აქტივიდან, სანამ ის ფლობს მას. ასე, რომ პიროვნება, რომელმაც იყიდა წლის დასაწყისში, რომელიღაც კომპანიის აქტივები და გაყიდა ისინი წლის ბოლოს. მთელი წლის განმავლობაში ითვლება მის მფლობელად და უფლება აქვს დივიდენტების მიღებაზე. ანალოგიურად პიროვნებამ, რომელმაც შეიძინა ობლიგაციები, უფლება აქვს პროცენტებზე.

რეალური აქტივების მყიდველსაც კი (მაგ. უძრავი ქონების) აქვს უფლება მიიღოს მიმდინარე შემოსავალი საარენდო გადასახადის სახით.

თუ გავითვალისწინებთ მიმდინარე შემოსავლის შესაძლებლობით ოპერაციის დიაგრამა გამოისახება ისე, როგორც 20 ნახ-ზეა მოცემული.



ნახ. 20. ოპერაციის დიაგრამა

აქ D_J – სიდიდე.

ამგვარად, ფორმალურად აღწერადი გარიგება შეიძლება აღიწეროს ნაკადთა წყვილით: მოვლენათა ნაკადით (I გვარის ნაკადით)

$$CF_1 = \{(t_1, -P_1), (t_2, P_2)\}$$

და II გვარის ნაკადით $\overline{CF_2} = \{(J, D)\}$, სადაც $J = [t_1, t_2]$ არის გარიგების პერიოდი და $D = D_J = D_T$ – მიმდინარე შემოსავალი გარიგების პერიოდში, რომლის სიგრძე $|J| = T = t_2 - t_1$.

ამგვარად, აქტივის მფლობელი მიიღებს ორი სახის შემოსავალს: საფასოს – $\Delta P_T = P_2 - P_1$ და მიმდინარეს – D_T. ჯამში ეს შემოსავლები გვაძლევს ე.წ. სრულ შემოსავალს:

$$I_T = D_T + \Delta P_T.$$

მაგალითად, პირი, რომელმაც წლის დასაწყისში აქცია იქიდან $R_1 = R60$ დასად და წლის ბოლოს გაყიდა $P_1 = R80$ ფასად და მიიღო დივიდენდი R5 ოდენობით, მიიღებს სრულ შემოსავალს

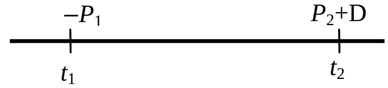
$$I = 80 - 60 + 5 = R25.$$

რასაკვირველია, პრაქტიკაში მიმდინარე შემოსავალი (მაგ. დივიდენდი) მიიღება ან ცალკეული (ერთჯერადი) გადახდით ან ასეთი გადახდების სერიით. მაგ. აქციების დივიდენდები შეიძლება გადახდილი იქნას წლის ბოლოს ერთჯერადი გადახდით. დასავლურ პრაქტიკაში ხშირია დივიდენტების კვარტალურად გადახდის შემთხვევები. მიმდინარე შემოსავლის ერთჯერადი ან სერიული გადახდა ფორმალური თვალსაზრისით ნიშნავს ინტერვალური ნაკადის აქტუალიზაციას $\overline{CF}_2 = \{(J, D)\}$.

თუ, მაგალითად, თუ შემოსავალი გადახდილია J პერიოდის ბოლოს ერთჯერადი გადახდით, მაშინ ადგილი აქვს ფინალიზაციას, ე.ი. $\overline{CF}_2$ ნაკადი გარდაიქმნება I გვარის ნაკადში

$$CF_2 = Fin(\overline{CF}_2) = \{(t_2, D)\},$$

რომელიც შედგება ერთი (t_2, D) ხდომილებისაგან (D მიმდინარე შემოსავლის გადახდა t_2 მომენტში) შედეგად ასეთი ოპერაციის დიაგრამა ღებულობს სახეს, რომელიც ნაჩვენებია 21 ნახაზზე.



ნახ. 21. ***D*** მიმდინარე შემოსავლის გადახდა ***t_2*** მომენტში

არსებითად ეს ნიშნავს, რომ ფორმალური თვალსაზრისით, მიმდინარე შემოსავლის აღრიცხვა (გადახდის მოცემული სქემით) საშუალებას გვაძლევს გარიგება აღვწეროთ არა CF_1 და $\overline{CF}_2$ სხვადასხვა გვარის ნაკადთა წყვილით, არამედ I გვარის CF_1 ფასის ნაკადისა და CF_2 შემოსავლების გარდაქმნილი ნაკადის ჯამს

$$CF = CF_1 + CF_2 .$$

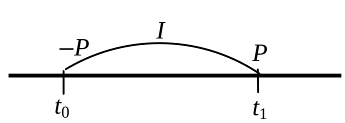
მაშ ასე, ზემოთ მოყვანილი მაგალითისათვის აქციების ყიდვა R60-ად, გაყიდვა R80-ად და წლის ბოლოს R5 დივიდენდების მიღება-გარიგების ნაკადს აქვს სახე

$$CF = \{(0,-60),(1,85)\}.$$

ამიტომ, პრაქტიკაში ფინანსური ოპერაციების ანალიზისას მათთან დაკავშირებულია შემოსავლების ფულადი ნაკადები არა ყოველთვის იყოფა „ფასური“ და „მიმდინარე“.

ხშირად გარიგების ნაკადად იღებენ „აგრეგირებულ“ ან ბაზარი „წარმომქმნელ ნაკადს“, რომლის ცალკეული ელემენტები შეიცავენ როგორც „ფასურ“, ასევე მიმდინარე (შემოსავლური) კომპონენტებს განვადებით კრედიტის დაფარვისას ცალკეული გადახდები შეიძლება შეიცავდეს როგორც პროცენტების გადასახადს, ასევე ძირითადი ვალის ნაწილობრივ დაფარვას.

განვიხილოთ, მაგალითად, უმარტივესი საკრედიტო გარიგება. ამ გარიგებაში კრედიტორი t_0 მომენტში აძლევს მევალეს P თანხას – ძირითადი ვალი, ამასთან მევალე t_1 მომენტში აბრუნებს ვალს (ე.ი. P) და იხდის მიღებულ კრედიტს I თანხით, რომელიც წარმოადგენს გარიგების პერიოდში პროცენტის ოდენობას. უბრალო საკრედიტო გარიგების დიაგრამა მოცემულია 22 ნახაზზე



ნახ. 22. უბრალო საკრედიტო გარიგების დიაგრამა

P თანხასთან ნიშანი მინუსი t_0 მომენტში, ნიშნავს იმას, რომ გარიგება აღიწერება კრედიტორის თვალსაზრისით, რომლისთვისაც კრედიტის გაცემა წარმოადგენა საკუთარი საფინანსო სახსრების ხარჯვას.

ამგვარად, როგორც ყიდვა/გაყიდვის შემთხვევაში, უბრალო კრედიტული გარიგება აღიწერება ნაკადთა წყვილით:

$$CF_1 = \{(t_0, -P), (t_1, P)\}.$$

I გვარის და

$$\overline{CF_2} = \{(J, I)\}.$$

II გვარის ნაკადით.

უბრალო საკრედიტო გარიგებაში პროცენტების გადახდა ხდება ჩვეულებრივ ერთდროულად პერიოდის ბოლოს ან დასაწყისში. პირველ $\overline{CF_2}$ საპროცენტო ნაკადი გარდაიქმნება

$$CF_2 = Fin(\overline{CF_2}) = \{t_1, I)\}.$$

ნაკადში, ბოლო გარიგების წარმოქმნილი CF ნაკადი ღებულობს სახეს

$$CF = CF_1 + CF_2 = \{(t_0, -P), (t_1, I)\}.$$

t_1 მომენტში (დაფარვის თარიღი) გადახდილი S თანხას ეწოდება ამ შემთხვევაში ვალის სრული თანხა ამ დაფარვის თანხა.

მეორე შემთხვევაში $\overline{CF_2}$ საპროცენტო ნაკადი გარდაიქმნება

$$CF_2 = A\sim v(\overline{CF}_2) = \{(t_0, I)\}.$$

ნაკადში, ხოლო გარიგების წარმომქმნელი ნაკადი ღებულობს სახეს

$$CF = CF_1 + CF_2 = \{(t_0, -P + T), (t_1, P)\}.$$

აქ $P - T = P_0 -$ გაცემული კრედიტის თანხაა, რომელიც ტოლია ვალის ძირითად თანხას, შემცირებულს გადახდილი პროცენტებით.

განვიხილოთ, მაგალითად უბრალო საკრედიტო გარიგება ძირითადი და $I = R100$ საპროცენტო განაკვეთით. წლის ბოლოს პროცენტების გადახდის ნაკადს აქვს სახე

$$CF = \{(0,\ 1000), (1,\ 1100)\},$$

ხოლო პროცენტების ავანსად გადახდის შემთხვევაში, ე.ი. წლის დასაწყისში, გადახდის ნაკადი წარმოდგინდება შემდეგი სახით:

$$CF = \{(0,\ -900), (1,\ 1000)\}.$$

ამგვარად, უმარტივეს გარიგებებში გადახდის რეალური ნაკადები დადის ორ მოვლენამდე: საწყისამდე და საბოლოომდე, რომლებიც შეიძლება განხილული იქნას გარიგების ერთერთი კონტრაგენტის

თვალსაზრისით, როგორც ფულადი სახსრების შესაბამისად გასავალი და შემოსავალი. ამასთან ჩვეულებრივ სიტუაციაში (მაგრამ არა ყოველთვის!) გასავალი წინ უსწრებს შემოსავალს.

პირს, რომლის თვალსაზრისითაც ჩვენ შემდგომში აღვწერთ გარიგებას, უწოდოთ (პირობითად) ინვესტორი. მარტივი გარიგების შემთხვევაში საწყისი მოვლენა (გასავალი) წარმოადგენს ინვესტირებას (აქტივების შესყიდვა, კრედიტების გაცემა) დროის განსაზღვრულ პერიოდში (საინვესტიციო პერიოდი), საინვესტიციო (როგორც მიმდინარე, ასევე ფასიანი) შემოსავლის მიღების მიზნით არჩეული სქემით მიმდინარე შემოსავლის გადახდისას (საშემოსავლო ნაკადის აქტუალიზაციისას) უმარტივესი საფინანსო გარიგება ფორმალური თვალსაზრისით, წარმოდგენილი იქნება ნაკადით

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2)\},$$

აქ C_1 და C_2 გადახდებს შეიძლება ჰქონდეთ ნებისმიერი ნიშანი. ხშირად შემთხვევებში $C_1 < 0$ და $C_2 > 0$.

რა თქმა უნდა პრაქტიკაში გვხვდება არა მხოლოდ მარტივი გარიგებები, რომლებიც დადიან ორ თანხამდე (მოვლენამდე). ბევრ გარიგებაში მონაწილეობენ გადასახადთა სერიები. ასე მაგალითად, გაცემული კრედიტი შეიძლება დაიფაროს არა ერთიანი გადახდით, არამედ განვადებით, ე.ი. დასაფარი გადასახადების სერიებით. გარდა ამისა, თვით კრედიტი შეიძლება გაცემული იქნას არა ერთბაშად, არამედ აგრეთვე საკრედიტო სახის სერიებითი და ბოლოს, რთული საინვესტიციო ოპერაციები როგორიცაა აქტივების პორტფელის მართვა (საფინანსო და რეალური) შეიძლება შეიცავდეს (მოიცავდეს) ელემენტების საკმაოდ დიდ რაოდენობას და აქტივების შემდგენი პორტფელის ყიდვას და გაყიდვას, მიმდინარე შემოსავლის აკუმულაციას, მის გადახდას ან რეინვესტირებას და ა.შ. მაგალითად, საპენსიო ფონდი ახდენს მონაწილეთა საწევრო შენატანების აკუმულაციას, მათ ინვესტირებას სხვადასხვა აქტივებში, მართავს მას, აწარმოებს საპენსიო გადახდებს და ა.შ.

ბევრ შემთხვევაში, როგორც ფიზიკური, ასევე იურიდიული პირების (ფინანსური ინსტიტუტების) მიერ განხორციელებული

გარიგებები, შეიძლება აღიწეროს ამ გარიგებების წარმომდგენი ფინანსური ნაკადებით. ამასთან, დეტალურად აღწერაში ცალკე ფიგურირებდნენ როგორც (ფასიანი) (კაპიტალური) საფასურიანი ნაკადები მორიგების რეალიზაციასთან დაკავშირებული. ანგარიშის მიმდევრობითი მდგომარეობასთან, ასევე საშემოსავლო (მიმდინარე) ნაკადები, მისი აქტივების შემოსავლებიდან მიღებული შემოსავლის ნაკადები. საბოლოო ანგარიშით ამ ნაკადების აქტუალიზაცია საშუალებას გვაძლევს მორიგება აღვწეროთ მოვლენების ერთი ნაკადის სახით, რომელიც სრულად წარმოადგენს მორიგებაში მონაწილე ყველა ფულადი თანხა. ასეთ ნაკადებს უწოდებენ წარმომადგენლობითებს მათთან დაკავშირებული გარიგებები. გარიგების ასეთ აღწერაში რაღაცა ხარისხით ინიღბება ფულადი სახსრების სხვადასხვა წარმომავლობა, რამდენადაც წარმომადგენლობითი ნაკადის ერთ თანხაში შეიძლება გათვალისწინებული იქნას როგორც კაპიტალური, ასევე საშემოსავლო შემდგენი ნაწილი. თუმცა ზემოთ აღნიშნული განსხვავება ქრება, მით უმეტეს რჩება საქმის კიდევ ერთი ასპექტი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს განვასხვავოთ წარმომადგენლობითი ნაკადის ცალკეული გადახდები. ის მდგომარეობს გარიგების ნაკადის წარმომდგენი მოვლენების შემადგენელი ფულადი სახსრების ნიშნებში. გარიგების კორექტული აღწერა ჩვეულებრივ გვთავაზობს გარიგებაში მონაწილე განსაზღვრული ორიენტაციის ფულადი სახსრების არჩევას. ჩვეუკებრივ, ეს ორიენტაცია აირჩევა, როგორც უკვე აღინიშნებოდა, არჩეული თვალსაზრისის შესაბამისად, მაგალითად გარიგების განმხორციელებელი ინვესტორის, ფინანსური ინსტიტუტის და ა.შ. ასეთი თვალსაზრისის არჩევა ახდენს ფულადი სახსრების ნაკადების კლასიფიკაციის ან როგორც სახსრების განზიდვა (ხარჯები, ინვესტირება, გადახდა და ა.შ.) ან როგორც მათი მოზიდვა (ამონაგები გაყიდვებიდან, მიღებული შემოსავალი, გადახდა და ა.შ.) ან როგორც მათი გაიზიდვა (ამონაგები გაყიდვებიდან, მიღებული შემოსავალი, საწევროების და გადასახადების მიღება და ა.შ.).

ამგვარად, საბოლოო ფინანსური ოპერაცია შეიძლება წარმოვადგინოთ გადასახადების ნაკადთა წყვილით:

$$CF = \{(t_1^-, C_1^-), (t_2^-, C_2^-), \cdots, (t_n^-, C_n^-)\},$$

და შემოსავლის

$$CF = \left\{(t_1^+, C_1^+), (t_2^+, C_2^+), \cdots, (t_n^+, C_n^+)\right\}.$$

ზოგიერთი სახის გარიგებებისათვის ხარჯვით ნაკადს ვუწოდოთ აგრეთვე საწყისი ან გამხსნელი გარიგება, და, შესაბამისად – შემოსავლის ნაკადს – დასკვნითი ან დამამთავრებელი. გარდა ამისა, სპეციალურ გარიგებებში ამ ნაკადებს შეიძლება ჰქონდეთ სხვა სპეციალური სახელწოდებაც, დაკავშირებული გარიგების ტიპთან. საკრედიტო გარიგებებში საწყისი ნაკადი შედგება შემოთავაზებული საკრედიტო თანხებისაგან და მას უწოდებენ საკრედიტო ნაკადებს. შესაბამისად დასკვნითი ნაკადი წარმოადგენს დამფარავი გადასახადების ნაკადს ან მოკლედ, დაფარვის ნაკადს.

საწყისი და დასკვნითი ნაკადები ჯამში გვაძლევენ წარმომადგენელ ნაკადს. მაგალითად, განზოგადოებული საკრედიტო გარიგებებისათვის (5 და 13 თავებში განხილული) საწყისი ნაკადი დადის ერთადერთ გადასახადზე – კრედიტის გაცემაზე. ამ შემთხვევაში

$$CF^- = \left\{(t_0, -P)\right\},$$

სადაც t_0 – კრედიტის გაცემის მომენტია (თარიღი), ხოლო P – ვალის საწყისი თანხა. კრედიტის იფარება დამფარავი გადასახადების სერიით, რომლებიც ქმნიან დასკვნით ნაკადს

$$CF^+ = \left\{(t_1, C_1), (t_2, C_2), \cdots, (t_n, C_n)\right\}, \quad t_1, t_2, \cdots t_n > t_a,$$

ე.ი. დაფარვის გადასახადების სერია.

ფორმალური თვალსაზრისით გარიგების აღწერა მისი წარმომადგენი ფულადი გადასახადების ნაკადით, წარმოადგენს მოხერხებულია და მკაცრს. გარიგების სხვა ყველა მახასიათებლები, როგორიცაა წმინდა (სუფთა) შემოსავალი, საპროცენტო განაკვეთი, როგორც წესი, ცალსახად განისაზღვრება მისი ნაკადით.

რასაკვირველია, პრაქტიკაში, გარიგების დროის, ფინანსური და სხვა პარამეტრების მოცემის წესი დამოკიდებულია გარიგების აღწერის კონკრეტული განსაკუთრებულობბები. ასე, განზოგადოებულ საკრედიტო გარიგებებში შეიძლება საწყის პარამეტრებად მოცემული იყოს გაცემული კრედიტის თანხა P, გარიგების ვადა T, კრედიტზე საპროცენტო განაკვეთი და დაფარვის (გადახდის) სქემა. ამ

შემთხვევაში დამფარავი გადასახადები გამოითვლება საწყისი მოცემულობებით. საბოლოო ჯამში გარიგების დასრულება ვარაუდობს გარიგების პირობების გათვალისწინებული ყველა თანხის გადახდას. მაგალითად ბუღალტერის თვალსაზრისით მხოლოდ ეს გადასახადები მნიშვნელოვანია, მაშინ როცა სხვა პარამეტრები, ისეთები როგორიცაა მაგალითად, საპროცენტო განაკვეთი, წარმოადგენენ მხოლოდ დამატებით მახასიათებლებს გარიგებისა.

რთული ფინანსური ოპერაციებისათვის, მაგალითად, ისეთი როგორიცაა აქტივების პორტფელის მართვა, რომელიც მოიცავს დიდი რაოდენობით ელემენტარული გარიგებებს (აქტივების ყიდვა/გაყიდვა, მიღებული შემოსავლის რეინვესტირება და ა.შ.), გარიგების ფინანსური ეფექტურობის მნიშვნელოვან მახასიათებლად, ინვესტორის თვალსაზრისით, წარმოადგენს ამ გარიგებების შედეგად დაგროვილი საინვესტიციო კაპიტალი. კერძოდ სხვადასხვა გარიგების გატარების მიზანს ისახავს ინვესტორის მთავარ მიზანს: მიღწეულ იქნას საინვესტიციო კაპიტალის მაქსიმალური ზრდა. ამასთან, თუმცა ყოველ ცალკეულ გარიგებას, როგორც წესი, აქვს კონკრეტული პერიოდი (გარიგების ვადა), მათი მიმდევრობა განხორციელებული ინვესტორის მიერ კაპიტალის გაზრდის მიზნით, ჩვეულებრივ არა აქვს წინასწარ მოცემული სასრული ვადა. ამ თვალსაზრისით კაპიტალის ინვესტირება შეიძლება განვიხილოთ როგორც დროში უსასრულო საინვესტიციო ან ფინანსური პროცესი.

2.6. ფინანსური პროცესები და კანონები

ფინანსური პროცესები. ზემოთ, ფინანსური გარიგებების აღწერისას, აღსანიშნავია, რომ მათი მიზანია ინვესტირებული კაპიტალის გაზრდა. უმარტივეს შემთხვევებში, მაგალითად, მარტივ საკრედიტო გარიგებაში, ასეთი ზრდა მიიღწევა გარიგების ვადის ბოლოს საინვესტიციო კაპიტალზე მეტი თანხის ერთჯერადი გადახდის. სხვა, უფრო რთულ შემთხვევებში კაპიტალის ზრდას განაპირობებს მიმდინარე შემოსავლების გადახდის სერიით, მაგალითად დივიდენტების ან პროცენტების. ამასთან მსხვილი ფინანსური ინსტიტუტებისათვის ასეთი ნაკადი შემოსავლებისა შეიძლება ჩაითვალოს პრაქტიკულად უწყვეტად. თუ

მხედველობაში მივიღებთ საფასო შემოსავასაც, მაშინ უმარტივეს ფინანსურ გარიგებაშიც კი, ისეთი როგორიცაა აქციის შესყიდვა, საინვესტიციო კაპიტალის დაგროვება შეიძლება წარმოვიდგინოთ უწყვეტი პროცესის სახით, რომელიც დაკავშირებულია მისი ფასის ზრდასთან.

ზემოთ თქმულს მივყევართ ფინანსური გარიგების აღწერის კიდევ ერთ ასპექტზე, რომელიც დაკავშირებულია მათ მდგომარეობაზე. დროის რაიმე მომენტში გარიგების მდგომარეობის ქვეშ ვიგულისხმოთ ამ მომენტისათვის დაგროვილი კაპიტალის სრული სიდიდე. მდგომარეობა – ეს არის გარიგების ინტეგრალური ფინანსური მახასიათებელი, რომელშიც გამოჩნდება დროის მოცემულ მომენტში გარიგების ფინანსური მიღწევის შედეგი.

მთლიანობაში გარიგებისათვის მდგომარეობები დროის თანმიმდევრულ მომენტებში აღწერენ დისკრეტულ ან უწყვეტ ფინანსურ პროცესს. ის წარმოადგენს დროის ფუნქციას $S(t)$, რომელიც განსაზღვრულია გარიგების ვადის ტოლ დროს მონაკვეთზე. ამასთან მდგომარეობა ითვლება მოცემულად დროის ნებისმიერ მომენტში ისეთი გარიგებებისათვისაც.

განვიხილოთ ისევ უმარტივესი საკრედიტო გარიგება კრედიტი საწყისი P_0 თანხით, რომელიც გაიცემა t_0 მომენტში და t_1 მომენტში მისაღები დასაფარავი თანხით. მკაცრად რომ ვთქვათ, რეალურად „დაგროვების“ პროცესი ამ შემთხვევაში აღიწერება დისკრეტული ნაკადით

$$\{(t_0, S_0), (t_1, S_1)\}, \quad (3)$$

სადაც $S_0 = P_0$ და $S_1 = P_1$ შუალედურ t მომენტებში $t_0 < t < t_0$ გარიგების მდგომარეობაზე წინასწარი შეთანხმებების გარეშე, რაიმე განსაზღვრულის თქმა შეუძლებელია. თუმცა, თუ, მაგალითად ეს საკრედიტო გარიგება ხდება ბანკში ვადიანი დეპოზიტის სახით, მაშინ აღიძვრება დაგროვილი ანუ დარიცხული პროცენტების ცნება, გარიგების ვადის დროის ნებისმიერი მომენტისათვის, მაშინ S_0 საწყისი კაპიტალის და t მომენტისათვის დაგროვილი I_t პროცენტების ჯამი გვაძლევს დაგროვილი კაპიტალის სიდიდეს, რომელიც შეიძლება ჩავთვალოთ დროის ამ მომენტში გარიგების მდგომარეობაც

$$S(t) = S_0 + I_t. \tag{4}$$

რასაკვირველია, დაგროვილი პროცენტების სიდიდე, და, მაშასადამე, გარიგების მდგომარეობა განისაზღვრებიან გარიგების კონკრეტული განსაკუთრებულობებით. მაგრამ ამ შემთხვევაშიც კი, თუ პროცენტების არავითარი გამოთვლა არ წარმოებს, უკიდურეს შემთხვევაში, ფორმალურად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ გარიგების მდგომარეობა $I_t = 0$ ტოლობიდან, ე.ი. დაუშვათ, რომ $S(t) = S_0$, როცა $t_0 \le t \le t_1$. ამგვარად, „წმინდა დისკრეტულ“ შემთხვევაშიც კი ჩვენ შეგვიძლია გარიგება წარმოვადგინოთ ყველგან განსაზღვრულად მთელ პერიოდზე $S(t)$ ფუნქციით.

ამგვარად, ყოველ გარიგებას ან გარიგებათა მიმდევრობას შეიძლება მიეწეროს პროცესი $S(t)$, $t_0 \le t < t_1$, რომელიც წარმოადგენს „კაპიტალის დაგროვების“ დინამიკას. ამასთან, სავსებით შესაძლებელია, რომ სხვადასხვა გარიგებებმა გამოიწვიონ ერთიდაიგივე პროცესი. ამას ჩვენ მივყავართ ფინანსური პროცესის ზოგად განმარტებამდე.

განსაზღვრა 2.8. $J = [t_0, t_1]$ შუალედზე ფინანსური პროცესი ეწოდება $S(t)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს J შუალედზე. სხვა სიტყვებით, ესაა ასახვა $S: J - M$. J შუალედისა M ფულის სკალაზე. $S(t)$ მნიშვნელობას (უფრო ზუსტად მოვლენა $(t, S(t))$) ეწოდება t მომენტში პროცესის მდგომარეობა.

ფინანსური პროცესების მეტად გავრცელებულ სახეს წარმოადგენს საინვესტიციო პროცესები. საინვესტიციო პროცესი იწყება რაიმე საწყისი კაპიტალის საწყისი ინვესტიციით. დროის საწყის t_0 მომენტში და საწყისი კაპიტალის სიდიდე S_0 ერთად აღწერენ საინვესტიციო პროცესის საწყის მდგომარეობას (t_0, S_0).

შემდგომში საინვესტიციო პროცესის მართვის შედეგად წარმოიქმნება ინვესტიციის დაგროვილი ღირებულება.

ინვესტიციის დაგროვილი ღირებულება წარმოადგენს მოცემული მომენტისათვის საინვესტიციო პროცესის მიღწეულ შედეგს – მის მიმდინარე მდგომარეობას. ფორმალური თვალსაზრისით ეს მდგომარეობა აღიწერება მოვლენით (t, S_t), სადაც t – მოცემული (მიმდინარე) მომენტია

დროის, ხოლო $S_t = S(t)$ – t მომენტისათვის ინვესტიციის დაგროვილი ღირებულება.

ფინანსური პროცესები განისაზღვრებიან ბევრი რეაქტორებით ანუ პარამეტრებით, როლებიც პირობითობის და საკმარისი წილით შეიძლება მოვაკუთვნოთ ორ ტიპს: შინაგან და გარეგანს.

შინაგან ფაქტორებს ეკუთვნიან ისინი, რომლებიც განსაზღვრავენ ძირითად, მნიშვნელოვან მახასიათებლებს ფინანსური პროცესისა. მათ მიეკუთვნება, მაგალითად, სტრუქტურული ფაქტორები, ისეთები, როგორიცაა გარიგებაში მონაწილე აქტივების პორტფელის სტრუქტურა, გარიგების საკონტაქტო მახასიათებლები, ისეთები, როგორიცაა საკრედიტო გარიგებებში პროცესების დარიცხვა, დაფარვის (გადახდის) არჩეული სქემა და ა.შ.

მათემატიკურად ფინანსური პროცესი შეიძლება აღიწეროს ფუნქციით

$$S_t = S(t; t_0, S_0; \Omega), \ t \ge t_0 . \tag{5}$$

სადაც Ω არის (t_0, S_0) საწყისი პირობებიდან განსხვავებული პროცესის პარამეტრებია. ამ პარამეტრებს შეიძლება ჰქონდეთ რთული სტრუქტურა, მაგალითად, იყვნენ დროის ფუნქციები (საილუსტრაციოდ აქ შეიძლება იყოს აქტივების მომავალი ფასები, რომლებიც ქმნიან საინვესტიციო პორტფელს).

პროცესის (5) ჩაწერა (t_0, S_0) და Ω პარამეტრების გამოყოფით ფაქტიურად გულისხმობს, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს არა ერთ ინდივიდუალურ ფინანსურ პროცესთან, არამედ მათ ოჯახთან. კერძოდ, იგულისხმება, რომ შეიძლება „გაუშვათ“ პროცესი სხვა საწყის მდგომარეობაში ან გარე პარამეტრების სხვა მნიშვნელობების დროს. შეიძლება განვიხილოთ, მაგალითად, საკრედიტო გარიგებები, განსხვავებულები მხოლოდ გაცემული კრედიტის თანხით ან საწყისი თარიღით და იდენტურები ყველა სხვა თანაფარდობებით. შეიძლება ასევე გავაანალიზოთ აქტივების პორტფელის ყოფაქცევა. ამ პორტფელის შემადგენელი აქტივების მომავალი ფასების სხვადასხვა ვარიანტებში.

ვიგულისხმოთ (5) განტოლება განსაზღვრავს არსებითად ფინანსური პროცესების ოჯახს (კლასს), რომლებიც ერთმანეთისაგან

განსხვავდებიან მხოლოდ გამოყოფილი პარამეტრებით, ჩვენ, ბუნებრივია, ჩავთვლით, რომ ყველა სხვა დანარჩენში ეს პროცესები იდენტურია, ანალოგიურია, მსგავსია და ა.შ. ეს დაშვება არა ფორმალურია, თუმცა ძალიან მნიშვნელოვანი. საქმე იმაშია, რომ არჩევა ფუნქციისაა, რომელიც წარმოადგენს ფინანსურ პროცესს, არანაირად არაა შემოსაზღვრული, მაშინ, მაგალითად, პარამეტრების მოცემული მნიშვნელობებისათვის შეიძლება ავაგოთ სუფთა ხელოვნური სახით პროცესები, რომლებიც არანაირადაა დაკავშირებული ერთმანეთთან, ე.ი. რომელთა ყოფაქცევის პროცესებში ძნელია ან საერთოდ შეუძლებელია მოიძებნოს მსგავსი ხაზები.

დეტერმინირებულ პროცესებს შორის შეიძლება გამოვყოთ ვიწრო კლასი ავტონომიური პროცესებისა, რომლებშიც საწყისი პირობებისაგან განსხვავებული (პარამეტრები მოცემული მნიშვნელობებისათვის) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$S_t = S(t;t_0,S_0)\,,\quad t \geq t_0\,. \tag{6}$$

ავტონომიური პროცესების კლასს ეკუთვნიან პროცესები, წარმოქმნილნი ბევრი საკრედიტო გარიგებებისაგან, რომელთა ძირითადი პარამეტრები მოიცემა შესაბამისი საკრედიტო კონტაქტებით (და ამგვარად არ იცვლებიან დროში).

ამ პარაგრაფში ჩვენ შემოვისაზღვრებით მხოლოდ ავტონომიური დეტერმინირებული პროცესების განხილვით, თუმცა ქვემოთ მოყვანილი რიგი ცნებები და კონსტრუქციები შეიძლება განხილული იქნეს უფრო რთულ სიტუაციებშიც.

(6) ტოლობა აღწერს საწყისი S_0 კაპიტალის ევოლუციას დროში. ის არსებითად გვაძლევს საწყისი ხდომილობის გარდაქმნას (5).

ასეთი „ოპერატიული“ მიდგომა საშუალებას გვაძლევს რამდენადმე უფრო ზოგადი თვალსაზრისით განვიხილოთ კავშირი სხვადასხვა ხდომილებებს შორის, განსაზღვრულნი მოცემული საინვესტიციო პროცესით.

ეხლა შევჩერდეთ უფრო დაწვრილებით მათემატიკური თანაფარდობის ფორმალიზაციაზე ფინანსურ ხდომილებებს შორის, რომლებიც ადგენენ ამა თუ იმ ფინანსურ პროცესს.

შენიშვნა: შემდეგში, ჩვენ ხშირად ნაცვლად ხდომილების

სრულად აღნიშვნისა (t, C) წყვილი სახით, მიუთითებთ მხოლოდ მის ჯამს C. ამ ჯამის დროსთან დაკავშირებით აუცილებლობის შემთხვევაში ჩვენ გამოვიყენებთ ინდექსებს. ამგვარად, ხდომილება (t, C) წარმოდგენილი იქნება „დათარიღებული“ ჯამით C_t.

ვთქვათ S – ავტონომიური დეტერმინირებული პროცესია და (², C) – რაიმე ხდომილება. თუ ჩავთვლით ამ ხდომილებას საწყის მდგომარეობად:

$$t_0 = ² \,,\ S_0 = C\,.$$

ჩვენ მივიღებთ კონკრეტულ (ინდივიდუალურ) პროცესს

$$S_t = S(t;²,C)\,,\ t \geq ²\,.$$

ამ შემთხვევაში S_t სიდიდეს უწოდებენ (², C) ხდომილების მომავალ ან მომავალ t მომენტამდე დაყვანილ მნიშვნელობას და წერენ სახით

$$S_t = FV_t(²,C)\,,\ t \geq ²\,. \qquad (7)$$

ამგვარად, დეტერმინირებული (ავტონომიური) პროცესი წარმოადგენს ხდომილების გარდაქმნის (დაყვანის, გადატანის) ოპერაციის გარდაქმნას წარსული მომენტებიდან მომავალზე. პრაქტიკაში ჩვეულებრივ ლაპარაკობენ ფულადი სახსრების გარდაქმნაზე ან დაყვანაზე და არა ხდომილებაზე, რაც რასაკვირველია, არასრულად კორექტულია. ზოგჯერ ჩვენ ვალაპარაკებთ დაყვანილ ფულად სახსრებზე, მაგრამ ამასთან უნდა გვახსოვდეს მათთან დაკავშირებული დროის მომენტები.

შევნიშნოთ, რომ FV აღნიშვნა წარმოადგენს ინგლისური ტერმინიდან „Future Value“ (მომავალი მნიშვნელობა). ზოგჯერ მომავალი მნიშვნელობის ნაცვლად ლაპარაკობენ მომავალ ღირებულებაზე, დაგროვილ თანხაზე და ა.შ.

დეტერმინირებულ პროცესში საწყისი მდგომარეობა სრულად განსაზღვრავს ყველა შემდეგომ (მომავალ) მდგომარეობას. ეს მდგომარეობები როგორღაც „ცვლიან“ საწყისს. ამას ჩვენ მივყავართ შემდეგ განსაზღვრამდე.

განსაზღვრა 2.9. ვიტყვით, რომ (t_2, C_2) ხდომილება უშუალოდ ცვლის (t_1, C_1) მოვლენას მოცემული დეტერმინირებული S პროცესის მიმართ, თუ

$$C_2 = S(t_2;t_1,C_1)\text{, როცა } t_2 \ge t_1,$$

ან

$$C_1 = S(t_1;t_2,C_2)\text{, როცა } t_1 \ge t_2.$$

შინაარსობრივად, ერთი მოვლენის უშუალოდ შეცვლა (შეთავსება) მეორეთი ნიშნავს, რომ ან ის მოავლენს მეორეს, როგორც ნაჩვენები პროცესის მიმართ საწყის ხდომილებას, ან თვითონ წარმოიქმნება ამ სხვა ხდომილებით, როგორც საწყისი.

ეს ნიშნავს, იმას რომ უშუალო ჩანაცვლების ფარდობა არის სიმეტრიული ფარდობა, ე.ი. თუ ერთი ხდომილება უშუალოდ ანაცვლებს მეორეს, მაშინ სამართლიანია შებრუნებულიც მეორე, ასევე უშუალოდ ანაცვლებს მისვლას. ამ დროს ორივე ხდომილება ძევს ერთ ტრაექტორიაზე, ამასთან ერთერთი მათგანი (წარმოადგენს) არის ამ ტრაექტორიის პროცესის საწყისი მდგომარეობა.

უშუალო ჩანაცვლების თანადობის სიმეტრიულობა საშუალებას გვაძლევს ხდომილობებს ვუწოდოთ (როცა ერთ-ერთი უშუალო, ანაცვლებს მეორეს) ერთმანეთის უშუალო ჩამნაცვლებლები ან ურთიერთ უშუალო ჩამნაცვლებლები.

ცხადია, რომ უშუალო ჩანაცვლების თანაფარდობას აქვს რეფლექსურობის თვისება, ე.ი. (თითოეული) ყოველი ხდომილობა უშუალოდ ჩანაცვლებას თავისთავს.

როგორც შემდეგში იქნება დანახული, ზოგად შემთხვევაში ჩანაცვლებას არა აქვს ტრანზიტულობის თვისება. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ, არსებობენ ისეთი პროცესები, რომელთათვისაც მოიძებნება სამი ხდომილება $(t_1,C_1),(t_2,C_2) \sim (t_3,C_3)$ ისეთი, რომ მეორე ხდომილობა ანაცვლებს პირველს, მესამე ანაცვლებს მეორეს, მაგრამ ვერ ჩაანაცვლებს პირველს.

ტრანზიტულობის თვისების დარღვევას მივყევართ ფინანსური პროცესის ტრაექტორიის საკმაოდ ძალიან რთულ სტრუქტურამდე. მაგალითად, მისი ტრაექტორიები შეიძლება „გადაიკვეთონ“ დრო-ფული სიბრტყეზე. დაწვრილებით ამის შესახებ წარმოდგენილი იქნება მე-3 თავში.

ტრანზიტულობის თვისების დარღვევა ნიშნავს, იმას, რომ უშუალო ჩანაცვლება არ წარმოადგენს ეკვივალენტურობის ფარდობას?

მაგრამ ფინანსურ პრაქტიკაში ხდომილების ეკვივალენტურობას განიხილავენ ჩვეულებრივ არა უშუალო ჩანაცვლების კონტექსტში, არამედ რამდენადმე უფრო ფარდობითი ჩანაცვლების ზოგად კონტექსტში, რომ განვსაზღვროთ ეს ცნება და ვაჩვენოთ, რომ მას აქვს ეკვივალენტობის ფარდობის ყველა თვისება, შემოვიღოთ დამატებითი შეზღუდვა საინვესტიციო პროცესის დეტერმინირების ხარისხზე.

ჩვენს მიერ შემოღებული პროცესის დეტერმინირების ცნება ნიშნავს დეტერმინირების მომავლის მიმართ, როცა პროცესის საწყისი მდგომარეობა ცალსახად განსაზღვრავს მომავალ მდგომარეობებს. დეტერმინირებულ პროცესებს შორის შეიძლება გამოვყოთ პროცესები, რომლებიც, რაიმე აზრით, დეტერმინირებულნი არიან წარსულის მიმართ. პროცესებს, რომლებიც ფლობენ ამგვარ „ორმხრივ“ დეტერმინირებას, ვუწოდოთ სრულიად დეტერმინირებული ან სრულად განსაზღვრული.

განსაზღვრა 2.10. ფინანსურ პროცესს ეწოდება სრულად განსაზღვრული, თუ (², *C*) ნებისმიერი მდგომარეობისათვის და დროს ყოველი ° მომენტისათვის არსებობს ერთადერთი მნიშვნელობა *V* ისეთი, რომ (°, *V*) ხდომილობა უშუალოდ ანაცვლებს (², *C*) მდგომარეობას, ამასთან დროს ° მომენტი შეიძლება როგორც მისდევდეს ² მომენტს, ასევე უსწრებდეს მას.

მოყვანილი განსაზღვრების აზრი მარტივია. სრულად განსაზღვრული პროცესები საშუალებას გვაძლევენ ხდომილებები გარდავქმნათ ამ ხდომილებების არა მარტო მომავალი, არამედ წარსული დროის ხდომილებების მიმართ.

მართლაც, თუ (°, *V*) მოვლენა უშუალოდ ანაცვლებს (ცვლის) (², *C*) მოვლენას, ამასთან $p \geq$ ², მაშინ განსაზღვრის ძალა. ეს ნიშნავს, რომ

$$V = S(p; ², C),$$

ან, რაც იგივეა

$$V = FV_p(², C).$$

თუ კი (°, *V*) მოვლენა იცვლება (², *C*) ხდომილებით, ე.ი. ² $\geq P$, მაშინ

$$C = S(², p, V),$$

ან

$$C = FV_c(p;V)\,.$$

ამგვარად, ამ შემთხვევაში, (°, V) ხდომილება არის საწყისი იმ პროცესისათვის, რომელიც მომავალში წარმოშობს მოცემულ (², C) ხდომილებას.

V მნიშვნელობა (დროის მოცემული P მომენტის მიმართ) საშუალებას გვაძლევს ვილაპარაკოთ მასზე, როგორც $P <$ ² მომენტამდე (², C) მოვლენილ დაყვანილ მნიშვნელობაზე. ამ მნიშვნელობას უწოდებენ ამ ხდომილების დაყვანილ ან მიმდინარე მნიშვნელობას და წერენ

$$V = PV_p(^2, C)\,.$$

PV აღნიშვნა არის შემოკლებული ინგლ. „Present Value“ (დღევანდელი, ახლანდელი მნიშვნელობა). ლაპარაკობენ ასევე მიმდინარე

ამგვარად, FV ოპერატორს ხდომილებები მიყავს მომავალზე, ხოლო PV ოპერაციის – ამ ხდომილობების მიმართ წარსული დროის მომენტებზე. ორივე ეს ოპერატორი საშუალებას იძლევა გარდაქმნითი ხდომილობები დროის ნებისმიერ მომენტზე. დაყვანის ეს ზოგადი ოპერაცია აღინიშნება იგივე PV სიმბოლოთი, რითაც წარსული დროის მომენტებთან დაყვანა. ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$V_p = PV_p(^2, C)\,.$$

ყველა შემთხვევაში, ე.ი. როგორც $P <$ ² შემთხვევაში, ასევე $P \geq$ ² შემთხვევაშიც. ამასთან უკანასკნელ შემთხვევაში

$$PV_p(^2, C) = FV_p(^2, C)\,. \tag{8}$$

P მომენტს, რომლის მიმართაც განისაზღვრება (², C) ხდომილობის დაყვანილი (მიმდინარე) მნიშვნელობა, ეწოდება დაყვანის მომენტი ან პოლუსი. პრაქტიკაში მას ხშირად უწოდებენ ფოკალურ თარიღს.

დაყვანის მომენტის ფიქსირება საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ფარდობითი ჩანაცვლება.

განსაზღვრა 2.11. თუ ორ (t_1, C_1) და (t_2, C_2) ხდომილებას ეწოდება ჩანაცვლებული P მომენტის მიმართ, თუ ეს ორივე ხდომილება უშუალოდ ჩანაცვლებულია ერთი და იმავე (P, V) მოვლენით.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფარდობითი ჩანაცვლება უკვე წარმოადგენს ხდომილებისათვის ეკვივალენტი მის ფარდობას. ამიტომ (t_1, C_1) და (t_2, C_2) ხდომილებები, რომლებიც ჩაენაცვლებიან P მომენტის

მიმართ ეწოდება, ასევე ფინანსურად ეკვივალენტურ ხდომილებებად. ამგვარი სახის ეკვივალენტობა აღნიშნავთ C_1, C_2. პრაქტიკოსი იტყოდა, რომ C_1 და C_2 თანხები (შესაბამისად t_1 და t_2 მომენტისათვის ეკვივალენტურია (P მიმართ), რამდენადაც P მომენტში მათ აქვთ ერთიდაიგივე დაყვანილი მნიშვნელობა. ეს სიტუაცია გამოსახულია 24 ნახაზზე.

ფინანსური კანონები. ზემოთ ნათქვამი იყო, რომ სრულად დეტერმინირებული ავტონომიურ პროცესთან დაკავშირებულია დროის ნებისმიერ მომენტამდე (პოლუსამდე) მოვლენის დაყვანის ოპერაციაა. ასევე აღნიშნულია ზოგიერთი ორსახეობა (განუსაზღვრელობა), დაკავშირებული ფინანსური პროცესის ცნებასთან: ერთი მხრივ, ესაა „ინდივიდუალური პროცესი" კონკრეტული ტრაექტორიით, მეორე მხრივ, მისთვის დასაშვებია „პარამეტრების ვარიაცია", როგორც გარდაქმნები, რომ დავძლიოთ ეს განუსაზღვრელობა, გამოვყოთ გარდამქმნელი ასპექტი, ასე ვთქვათ, სუფთა სახით.

ვთქვათ (t, C) – ნებისმიერი ხდომილებაა და P პოლუსია. ფუნქციონალურ კანონს

$$V_p = A(t, p; C) = FV_p(t, C), \quad P \geq t, \tag{9}$$

რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილების მომავალ მნიშვნელობას უწოდებენ კაპიტალიზაციის ფინანსურ კანონს.

ორმაგი სახით განისაზღვრება დისკონტირების ფინანსური კანონი:

$$V_p = D(t, p; C) = PV_p(t, C), \quad P \leq t. \tag{10}$$

ტერმინი „დისკონტირება" წარმოშობილია ინგლისურიდან discount, რაც ნიშნავს დაკლებას, ე.ი. ღირებულების შემცირება საწინააღმდეგო დაგროვებისა (კაპიტალიზაციისა). ნორმალურ სიტუაციაში საინვესტიციო პროცესიდან ელოდებიან საინვესტიციო კაპიტალის ღირებულების გაზრდას ამიტომ მოძრაობა წინ (დაყვანა დროის მომავალ მომენტზე) აღინიშნება როგორც კაპიტალიზაცია, ხოლო მოძრაობა უკან (დაყვანა წარსული დროის მომენტზე) – როგორც დისკონტირება.

ხდომილობის დაყვანას მის მიმართ წარსული დროის მომენტზე უწოდებენ დისკონტირებას, ხოლო თვით დაყვანილ მნიშვნელობას – დისკონტირებულ მნიშვნელობას. ამიტომ, იმ შემთხვევებში, როცა

საჭიროა ხაზი გაუსვათ იმას, რომ ლაპარაკი მიდის დაყვანაზე წარსული დროის მომენტზე, დისკონტირების ოპერაციისათვის იყენებენ DV_p აღნიშვნას, რამდენადაც თანამედროვე ლიტერატურაში DV_p სიმბოლო, როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, გამოიყენება უფრო ზოგად სიტუაციაში, როგორიცაა დაყვანა დროის ნებისმიერ მომენტზე.

თუმცა ერთი შეხედვით (9) და (10) განტოლებებს ცოტა სიახლე შემოაქვთ (5)-(7) განტოლებებთან შედარებით, მათში უკანასკნელთან შედარებით ასპექტები გადაადგილებულია. აქამდე ჩვენს მსჯელობებში ჩვენ ოპერირებდით ფინანსური პროცესის ცნებით, როგორც „კაპიტალის მოძრაობის“ მოდელური წარმოდგენით, რომელთა რეალიზაცია ხდება ფინანსურ გარიგებებში და ოპერაციებში. (9) და (10) განტოლებებში ეს პროცესი განიხილება. უფრო ზოგადი თვალსაზრისით. მათში მოიცემა რაიმე ზოგადი ხერხი ფინანსური პროცესის ცნება ამ შემთხვევაში თამაშობს მხოლოდ სამოტივაციო როლს დისკონტირების და კაპიტალიზაციის ფინანსური კანონების ცნებების შემოსაღებად. ფინანსური კანონები აბსტრაქციული, განზოგადებული სახით აირეკლავენ ავტონომიურ, სრულად დეტერმინირებული ფინანსური პროცესების ყოფაქცევას. ფინანსური კანონები გამოსახავენ „გაცვლის წესებს“ დღევანდელი ღირებულებისა მომავალ ღირებულებაზე და პირიქით. ე.ი. წარმოადგენს ფინანსური მათემატიკის ძირითადი პრინციპის – „ფულის დროებითი ღირებულების – ფორმალურ წარმოდგენას. ისინი წარმოადგენენ „ფინანსური სქემების“ ძირითად ელემენტებს – ფინანსური ოპერაციების აბსტრაქტული მოდელების, პროცესების და სისტემების, რომელთა შესწავლა შეადგენს ფინანსური მათემატიკის ძირითად შინაარსს.

არჩეული ფინანსური სქემების ჩარჩოებში ფიქცირდება ძირითადი რაოდენობრივი თანაფარდობები განსახილველი ოპერაციების და პროცესების მოდელებს შორის.

ფინანსურ სქემებს ეძღვნება შემდეგი პარაგრაფი, ამიტომ აქ მხოლოდ მოკლედ შევეხოთ ამ ცნებას. ფინანსური სქემა მოიცავს:

1°. გარდაქმნის წესი: ნებისმიერი (ყოველი) P მომენტისათვის შეიძლება ნაპოვნი იმის t მომენტის შესაბამისი C_t თანხის P მომენტზე დაყვანილი V_p მნიშვნელობა.

$$V_p = PV_p(C_t)\,.$$

2°. ეკვივალენტურობის და უპირატესობის დამოკიდებულების ოჯახი: ყოველი P მომენტისათვის ფინანსურ სქემაში განსაზღვრულია ხდომილების ეკვივალენტურობისა და უპირატესობის კავშირი ამ მომენტისათვის.

ამ შემთხვევაში ეკვივალენტურობის კავშირი და გარდაქმნის წესი დაკავშირებულია ბუნებრივი სახით. ხდომილებები არიან ეკვივალენტურნი P-ს მიმართ, თუ მათ ჯამს აქვთ ერთნაირი P-ზე დაყვანილი მნიშვნელობა

$$(t_1, C_1) \overset{P}{\sim} (t_2, C_2) \Leftrightarrow PV_p(C_1) = PV_p(C_2)\,.$$

ძალიან მნიშვნელოვანია, რომ გარდაქმნის წესი და მათი შესაბამისი ეკვივალენტურობის კავშირი (დამოკიდებულება) შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ აბსტრაქტულად, რაიმე ფინანსურ პროცესზე დამოუკიდებლად, უფრო ზუსტად, მათი ტოლად აღნიშვნის გარეშე. ამ შემთხვევაში გარდაქმნის წესი არის უბრალოდ ფინანსურ ხდომილებებზე რაიმე ოპერაციები.

მაგალითად, ვთქვათ

$$V_p = C_t(1 + (P - t)^2)\,, \quad P \ge t\,,$$

და

$$V_p = \frac{£_t}{1 + (t - P)^2}\,, \quad P \le t\,,$$

მივიღებთ ფინანსური ხდომილებების გარდაქმნის რაიმე წესს. მისი დახმარებით განვსაზღვროთ შესაბამისი ეკვივალენტურობის კავშირი ყოველი P პოლუსისათვის.

თუ გვექნება აბსტრაქტული ფინანსური სქემა, შეიძლება ავაგოთ ამ სქემის თეორია, ჩამოვაყალიბოთ, დავამტკიცოთ ან უარვყოთ სხვადასხვა დებულება, დაკავშირებულ, ფინანსურ ხდომილებასთან, შევიმუშავოთ, მოცემული სქემის ჩარჩოში აღძრული სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. თუმცა თვით ფინანსური სქემა, როგორც ეს ზემოთ აღვნიშნეთ, შეიძლება იყოს მოცემული ნებისმიერად, მაინც, იმისათვის, რომ სქემის თეორია იყოს შინაარსიანი, ჩვეულებრივ განიხილავენ არა ნებისმიერ ფინანსურ სქემებს, არამედ მხოლოდ ისეთებს, რომლებიც წარმოიშვებიან ფინანსური პროცესების შესაბამისი

კლასებით. სახელდობრ, ასე მიიღებიან შემდგომში ჩვენს მიერ განხილული, მარტივი და რთული პროცენტების ფინანსური სქემები.

განვიხილოთ ფინანსური სქემებისა და არა უშუალოდ ფინანსური პროცესების სხვადასხვა კლასებისა, უფრო შეესაბამება მათემატიკის სულს. სხვადასხვა ხდომილებების აღსაწერად მათემატიკური მიდგომის არსი სწორედ მდგომარეობს. განსახილველი ხდომილების ლოგიკური სტრუქტურის გამოყოფაში, ძირითადი ცნებების, ობიექტების და კავშირების ფორმალიზაცია, რომლებიც შემდეგ შეისწავლება სუფთა მათემატიკური ხერხებით.

ზემოთ ჩვენ არ დაგვიდო არავითარი შეზღუდვა კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონების სახეზე და მათთან დაკავშირებული ხდომილების გარდაქმნაზე, თუმცა, ზოგიერთ ზოგად ფინანსურ-ეკონომიკურ პრინციპებზე დაყრდნობით, ფინანსურ ანალიზში გამოყოფენ რიგ თვისებებს, რომლებსაც აკმაყოფილებენ ფინანსური კანონები. ამ თვისებებს აქვთ სხვადასხვა ხარისხი ზოგადობისა.

ჩამოვაყალიბოთ ეს თვისებები:

1*. ნორმირებულობა. თუ ხდომილების მომენტი ემთხვევა პოლუსს.

მაშინ კანონები არ ცვლიან ხდომილებიდან ჯამის მნიშვნელობას. სახელდობრ

$$A(P,P;C)=D(P,P;C)=C$$

ნებისმიერი P-სათვის.

ეს თვისება ერთერთია უნივერსალურისაგან. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მას აკმაყოფილებს ყველა ფინანსური კანონი, რამდენადაც უს ტრივიალურად სრულდება რეალური ფინანსური პროცესებისათვის.

2*. ერთგვაროვნობა ფულადი სახსრების მიმართ. ხდომილების ფინანსური ექვივალენტურობა ინვარიანტია ამ ხდომილობების შესაბამისი თანხების პროპორციული ცვლილებების მიმართ.

ამ თვისების როგორც შედეგი, აღვნიშნოთ $a(t,P)$ და $d(t,P)$ ფინანსური კანონები, როცა $C=1$, (9) და (10) ვღებულობთ, რომ

$$A(P,t,C)=CA(P;t,1)=Ca(t,P),\ \ P\geq t; \tag{11}$$

$$D(P;t,C)=CD(P;t,1)=Cd(t,P),\ \ P\leq t, \tag{12}$$

სადაც $a(P,t)-$ კაპიტალის ყოველი ერთეულისათვის P მომენტისათვის გაზრდილი მნიშვნელობა; და $d(t,p)-$ კაპიტალის ყოველი ერთეულისათვის

დისკონტური მნიშვნელობა. $a(t,p)$ და $d(t,p)$ ფუნქციებს უწოდებენ შესაბამისად ზრდის და დისკონტურობის კოეფიციენტებს. (11) და (12) განტოლებებიდან ნორმირების თვისების გათვალისწინებით უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$a(t,t) = d(t,t) = 1.$$

შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ფინანსური პროცესების უმრავლესობა აკმაყოფილებს ერთგვაროვნობის პირობას. თუმცა როგორც პრაქტიკაში, ისე თეორიაში გვხვდება პროცესები, რომლებიც არ შეიძლება მიეკუთვნოს ერთგვაროვნებას ხდომილებების ჯამის მიმართ. თუმცა ჩვენ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ერთგვაროვანი პროცესების და მათი შესაბამისი ფინანსური სქემების შესწავლით.

ფინანსური კანონების ნორმირების პირობა საშუალებას გვაძლევს ბუნებრივი სახით „შევაწებოთ" ორი კანონი: კაპიტალიზაციის და დისკონტირობის ერთ ზოგად ფინანსურ კანონად:

$$F(t,p,C) = \begin{cases} A(t,p,C), \text{ თუ } p \geq t, \\ D(t,p,C), \text{ თუ } p \leq t. \end{cases}$$

კანონების შეწებები იძლევა ასევე ერთგვაროვან კანონს კოეფიციენტით

$$F(t,p,1) = V(t,p),$$

რომელსაც ჩვეულებრივ უწოდებენ დაყვანის (დისკონტირების) განზოგადებულ კოეფიციენტს. ცხადია, რომ

$$V(t,p) = \begin{cases} a(t,p), \text{ თუ } p \geq t, \\ d(t,p), \text{ თუ } p \leq t. \end{cases}$$

ზოგად ფინანსურ კანონს შეესაბამება დაყვანის განზოგადებული ოპერატორი PV_p, რომელსაც უწოდებენ მიმდინარე ღირებულების ზოგადი ოპერატორი:

$$PV_p(t,C) = F(t,p,C) = CV(t,p).$$

3*. კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონების ზრდის/კლების თვისება. ინვესტირების აზრიანობის მოსაზრებიდან გამომდინარეობს, რომ $a(t,p)$ ფუნქცია – ზრდადია p-ს მიხედვით და კლებადია t-ს მიხედვით. მეორეს მხრივ იმის გათვალისწინებით, რომ ადამიანების უმეტესობა უფრო აფასებს იმ კაპიტალს, რაც ამჟამად გააჩნია, სხვა

კაპიტალთან შედარებით, რომელიც ფაქტიურად ახლანდელის იდენტურია, მაგრამ შესაძლოა გვქონდეს მომავალში (მომავალი შესაძლებლობების შეუფასებლობის კანონი), შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $d(t,p)$ $(p<t)$ ფუნქცია წარმოადგენს ზრდადს p-თი და კლებადს t-თი.

ამ თვისების შინაარსობრივი აზრიანობის მიხედვით, ჩვენ ჩავთვლით, რომ იგი სრულდება წიგნში განხილული ყველა მოდელისთვის.

ამასთანავე აღვნიშნავთ, რომ ბევრ ფინანსურ მოდელში $a(t,p)$ და $d(t,p)$ ფუნქციებისთვის დამახასიათებელია ყველა „კარგი" თვისება, მაგალითად, უწყვეტობა, დიფერენცირებადობა და ა.შ.

4*. ერთგვარობა დროში (სტაციონარობა). კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონები ერთგვაროვანია დროში ანუ სტაციონარულია, თუ ნებისმიერი $T>0$-სთვის შესაბამისად სრულდება ტოლობები

$$a(t+T,p+T)=a(t,p)$$

და

$$d(t+T,p+T)=d(t,p)\,.$$

ამ პირობების უცილობელი შედეგია $a(t,p)$ და $d(t,p)$ ფუნქციების შესაძლო დაყვანა მათ ცალსახად განმსაზღვრელ ერთი ცვლადის ფუნქციებზე:

$$a(t)=a(0,t)\,,\;\; t\geq 0$$

და

$$d(t)=d(t,0)\,,\;\; t\geq 0\,,$$

სახელდობრ

$$a(t,p)=a(0,p-t)=a(p-t)\,,\;\;\; p>t$$

და

$$d(t,p)=d(t-p,0)=d(t-p)\,,\;\; t>p\,.$$

ერთგვაროვან შემთხვევაში p პოლუსზე მიყვანის პროცესი (ვალორიზაციის მომენტი) ნებისმიერი სხვა t მომენტიდან დამოკიდებულია მხოლოდ t,p ბოლოების მქონე შუალედის სიგრძეზე.

სტაციონარული (დროში ერთგვაროვანი) პროცესები – ასევე საკმაოდ გავრცელებული ფინანსური პროცესების ტიპებია, ამიტომ წიგნის მნიშვნელოვანი ნაწილი ეძღვნება სტაციონარული კანონების

სისტემებს. თუმცა შემდეგ პარაგრაფებში განიხილება არასტაციონარული ფინანსური კანონების მქონე უფრო ზოგადი ფინანსური სქემები.

კაპიტალიზაციის და დისკონტირების სტაციონარულ კანონებს შეესაბამება ზოგადი სტაციონარული კანონი, რომლისთვისაც

$$v(t+h, p+h) = v(t, p)$$

ნებისმიერი $h. > 0$-სთვის. ამრიგად, როგორც ცალკეული კანონების შემთხვევაში, შესაბამისი ორგანზომილებიანი კოეფიციენტი $v(t, p)$ დაიყვანება ერთგანზომილებიანზე $v(T) = v(0, T)$:

$$v(t, p) = v(t-p, 0).$$

ჩამოვაყალიბოთ ფინანსური კანონების კიდევ ორი თვისება, რომლებიც უკვე ორგანულად არ არის მათთან დაკავშირებული. თუმცა ისინი პრინციპულად შესაძლებელია გარკვეულ პირობებში და ძალიან მნიშვნელოვანია (მათი შესრულებისას) შესაბამისი ფინანსური მოდელების შესწავლისათვის.

5*. კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონების შეუღლებადობა.

კაპიტალიზაციის და დისკონტირების ფინანსური კანონები არის შეუღლებული, თუ მათი მათი თანმიმდევრული გამოყენება ერთიდაიგივე ფინანსური მოვლენისათვის დროის ერთსადაიმავე ინტერვალში არ ცვლის ამ მოვლენას. ამრიგად, $a(t, p)$ და $d(t, p)$ შეუღლებული ფინანსური კანონებისთვის ერთდროულად სრულდება $V = Ca(t, p)$ და $C = Vd(t, p)$ ტოლობები კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონების შეუღლებადობა ნიშნავს ტოლობის შესრულებას:

$$a(t, p)\ d(t, p) = 1.$$

ყველა $t \geq p$-სთვის. შევნიშნავთ, რომ ამასთან ზოგადი ფინანსური კანონი $F(t, p, C)$ ყველა t, p-სთვის ხდება თვითშეუღლებული:

$$V(t, p) = \frac{1}{V(p, t)}.$$

უმეტეს შემთხვევაში, რომლებიც განხილული იქნება ქვემოთ, კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონები იქნება ურთიერთ-შეუღლებული. ყველა ტიპიურ შემთხვევებში დისკონტირების ოპერაციაც განისაზღვრება როგორც ოპერაცია, რომელიც კაპიტალიზაციის

შებრუნებულია. თუმცა პრაქტიკულად გვხვდება სქემები, რომლებშიც დისკონტირების ოპერაცია შეიძლება განისაზღვროს კაპიტალიზაციის ოპერაციისგან დამოუკიდებლად. ერთ-ერთი ასეთი მაგალითია დისკონტირება. სააღრიცხვო განაკვეთით პროცენტული განაკვეთით კაპიტალიზაციისას.

6*. კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონების ტრანზიტულობა

კაპიტალიზაციის ფინანსური კანონი ტრანზიტულია, თუ

$$a(t,\tau)a(\tau,p)=a(t,p) \qquad (13)$$

დროის ნებისმიერ $t<\tau<p$ მომენტში. ანალოგიურად დისკონტირების ფინანსური კანონის ტრანზიტულობა ნიშნავს შემდეგი თვისების შესრულებას

$$d(t,\tau)d(\tau,p)=d(t,p) \qquad (14)$$

დროის $t>\tau>p$ ნებისმიერ მომენტში.

(13), (14) ტოლობებით გამოსახული ფინანსური კანონების თვისებას უწოდებენ გარდამავალ თვისებას. ფინანსურ ლიტერატურაში მას ეწოდება ფინანსური კანონის გახლეჩადობის თვისება-ტერმინები „ტრანზიტულობა“ და „გახლეჩადობა“, რაღაც აზრით სიმეტრიულია და განსხვავდებიან, ასე ვთქვათ (13), (14) ტოლობების „თვალსაზრისით“. როცა გახლეჩადობაზეა საუბარი, მხედველობაში აქვთ საწყისი გარდაქმნის დაშლის (გახლეჩის) შესაძლებლობა t მომენტიდან p-სკენ ორ „ნაწილობრივ“ გარდაქმნად: t-დან τ-სკენ და τ-დან p-სკენ. ეს შეესაბამება (14), (13) ფორმულების წაკითხვის ფორმას მარჯვნიდან მარცხნივ: როცა საუბარია ტრანზიტულობაზე, გამოდიან, პირიქით, ორი თანმიმდევრული გარდაქმნიდან: t-დან τ-სკენ და τ-დან p-სკენ. შედეგად მათი კომპოზიცია იძლევა გარდაქმნას t-დან p-სკენ. ეს შეესაბამება (13), (14) ფორმულების წაკითხვის ფორმას მარცხნიდან მარჯვნივ. რაღაც აზრით ტერმინ „ტრანზიტულობის“ გამოყენების უფრო უპირატესია, რადგანაც მასთან დაკავშირებულია ეკვივალენტობის მიმართების ტრანზიტულობის თვისება, გაჩენილი ამ გარდაქმნებით. ჩვენ გამოვიყენებთ ორივე ტერმინს როგორც სინონიმებს.

კაპიტალიზაციის ფინანსური კანონის ტრანზიტულობა ნიშნავს, რომ დროის რაღაც პერიოდზე ინვესტირებული ჯამის მომეტებული

მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ დროის მოცემულ ინტერვალში ინვესტირების პროცესს დავყოფთ რამდენიმე თანმიმდევრულ ინვესტიციად, იმის დაშვებით, რომ მორიგი ინვესტიციისას იდება ჯამი, გაზრდილი (მომატებული) დროის ამ მომენტისთვის, ე.ი. რეინვესტირდება წინა ჯამი.

დისკონტირების ტრანზიტულ კანონს უკვე შეუძლებელია მიეცეს ინტერპრეტაცია, კაპიტალიზაციის კანონისთვის რეინვესტირების ანალოგიურად.

ბოლოს, კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონების ერთდროული ტრანზიტულობა ნიშნავს ზოგადი ფინანსური კანონის ტრანზიტულობას

$$v(t,p) = v(t,^{2})v(^{2},p)\,. \qquad (15)$$

შევნიშნავთ, ტრანზიტულობა ამ (ძლიერი) აზრით ნიშნავს შთანთქმის მნიშვნელოვანი თვისების შესრულებას დაყვანის განზოგადებული ოპერატორისთვის

$$PV_p(t,C) = PV_p(PV_{2}(t,C))\,. \qquad (16)$$

ნათქვამიდან ცხადია, რომ ტრანზიტულობის თვისებას ადგილი აქვს მხოლოდ გარკვეული პირობების შესრულებისას, რომლებიც დაკავშირებულია შესაბამისი ფინანსური მოდელების აგებასთან, და მაშასადამე, იგი სამართლიანია მხოლოდ გარკვეული კლასის ფინანსური მოდელებისათვის.

და, ბოლოს, ჩამოვაყალიბოთ ფინანსური კანონების ეკვივალენტურობის თვისება.

7*. ფინანსური კანონების ეკვივალენტურობა. კაპიტალიზაციის ორი a_1 და a_2 ფინანსური კანონის ეკვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t, C) ფინანსური ხდომილებისთვის ყოველი მათგანი იძლევა ერთიდაიგივე შენაცვლებად ხდომილებას დროის p მომენტში ნებისმიერი $p > t$-თვის. ანალოგიურად, დისკონტირების ორი d_1 და d_2 ფინანსური კანონი ეკვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t, C) ფინანსური ხდომილებისთვის ყოველი მათგანი იძლევა შენაცვლებად ხდომილებას დროის p მომენტში ნებისმიერი $p < t$-თვის.

გადასახადების ნაკადების მიყვანა. ზემოთ დაწერილებით განიხილებოდა ფულადი თანხების მიყვანის (გადატანის) პროცესი (ან

მოვლენების) ფინანსური კანონის შესაბამისად, რაც წარმოიქმნება საინვესტიციო პროცესებით. პრაქტიკულად მიყვანის ეს პროცედურა გამოიყენება არამარტო ცალკეული თანხისათვის, არამედ ფინანსური ნაკადებისთვისაც ან, უფრო ზუსტად გადასახადების ნაკადებისთვისაც. შინაარსობრივი აზრი ამ ოპერაციისა იგივეა, იგი მდგომარეობს გადახდათა ნაკადის შენაცვლებაში ეკვივალენტური (ამა თუ იმ აზრით) ფულადი თანხით, მიბმული რაღაც წინასწარ მოცემულ დროის მომენტზე (ვალორიზაციის მომენტზე, პოლუსზე).

2.7. მეორე თავის დასკვნები

შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) თვისებები, ფინანსური, ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოტანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

თავი III. ფინანსური ბაზრის ბინომურ მოდელი და ოფციონის ფასდადების ამოცანა

3.1. ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანა

თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში მნიშვნელოვანი ადგილი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებს მიეკუთვნება. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა რისკების შესწავლა და ანალიზი. როგორც აღვნიშნეთ ამ პრობლემატიკას შეისწავლის ფინანსური მათემატიკა, რომელიც არსებითად იყენებს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებს

ჩვენ შევეცადეთ მარტივად და მოკლედ გაგაცნოთ ფინანსური მათემატიკის ერთი კონკრეტული ამოცანა – ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის დროში ერთნაბიჯიანი ამოცანა და მისი ამოხსნა.

1. ვიგულისხმოთ, რომ დროის $n=0$ მომენტში ჩვენ გვაქვს რაიმე საწყისი თანხა $B_0>0$. თუ ეს თანხა შევიტანეთ ბანკში, მაშინ საწყის თანხას დროის მომავალ მომენტებში გარკვეული წესით დაერიცხება საპროცენტო შემოსავალი. თუ დროის ყოველ შემდეგ მომენტში ანგარიშზე არსებულ თანხას დაერიცხება საწყისი თანხის გარკვეული პროცენტი, მაშინ გვაქვს დარიცხვის მარტივი პროცენტის წესი. თუ დროის ყოველ შემდეგ მომენტში ანგარიშზე არსებულ თანხას დაერიცხება ამ თანხის გარკვეული პროცენტი, მაშინ გვაქვს დარიცხვის რთული პროცენტის წესი. ადვილი საჩვენებელია, რომ მარტივი პროცენტის შემთხვევაში თანხების რაოდენობები ქმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში – გეომეტრიულ პროგრესიას.

აღვნიშნოთ r-ით საპროცენტო განაკვეთი, რომლის მნიშვნელობა ასე დაითვლება: თუ, მაგალითად, თანხას ერიცხება 10%, მაშინ $r=0{,}1$. ამის გათვალისწინებით დროის $n=1$ და $n=2$ მომენტებში მარტივი პროცენტის შემთხვევაში გვექნება:

$$B_1 = B_0 + B_0 r = B_0(1+r),$$
$$B_2 = B_1 + B_0 r = B_0(1+r) + B_0 r = B_0 + 2B_0 r = B_0(1+2r),$$

ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში გვექნება:

$$B_1 = B_0 + B_0 r = B_0 (1 + r),$$
$$B_2 = B_1 + B_1 r = B_1 (1 + r) = B_0 (1 + r)^2 .$$

როგორც ვხედავთ, B_0, B_1 და B_2 სიდიდეების მიმდევრობა მარტივი პროცენტის შემთხვევაში არითმეტიკული პროგრესიაა, რომლის პირველი წევრია B_0, სხვაობა – $B_0 r$, ხოლო რთული პროცენტის შემთხვევაში – გეომეტრიული პროგრესია, რომლის პირველი წევრია B_0, მნიშვნელი კი – $1+r$.

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ ფულს, ისევე როგორც ფასიან ქაღალდებს, დროითი ღირებულება აქვს. მაგალითად, თუ დროის $n=0$ მომენტში გვაქვს B_0 თანხა, მაშინ r საპროცენტო განაკვეთის გათვალისწინებით დროის $n=1$ მომენტში B_0 თანხის სიდიდე (ანუ B_0-ის მომავალი ღირებულება) იქნება $B_1 = B_0(1+r)$. პირიქითაც, თუ გვინდა, რომ დროის $n=1$ მომენტში გვქონდეს B_1 თანხა, მაშინ დროის $n=0$ მომენტში უნდა გაგვაჩნდეს $B_0 = \dfrac{B_1}{1+r}$ თანხა (ანუ B_1-ის დღევანდელი ღირებულება).

შევნიშნავთ, რომ ფინანსურ ურთიერთობებში არსებობს მარტივი და რთული პროცენტის დარიცხვის უამრავი წესი, რომელსაც ჩვენ არ განვიხილავთ. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანაში გადმოცემის სიმარტივის მიზნით ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ დროის $n=0$ და $n=1$ მომენტებს.

2. განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი, სადაც ვაჭრობენ ობლიგაციებით და აქციებით. მოვიტანთ ამ ორი ფასიანი ქაღალდის მოკლე განმარტებებს.

ობლიგაცია ანუ **ბონი** – ეს არის ვალდებულება ფასიანი ქაღალდის სახით, რომელსაც უშვებს სახელმწიფო, ბანკები, კორპორაციები, სააქციო საზოგადოებები და სხვა ფინანსური ინსტიტუტები თანხის მოზიდვის მიზნით. ობლიგაციებში ინვესტირების ძირითადი მიმზიდველობა მდგომარეობს იმაში, რომ მის მფლობელს რეგულარულად უხდიან თანხას გარკვეული წესით და ობლიგაციის დაფარვის მომენტში კი ხდება სრული თანხის გადახდა. ობლიგაციის

მთლიანად ურისკო ფასიან ქაღალდად მიჩნევა არ შეიძლება, მაგალითად, იმიტომ, რომ არსებობს კორპორაციის გაკოტრების რისკი.

აქცია – ეს არის ფასიანი ქაღალდი, რომელსაც უშვებენ კორპორაციები, კომპანიები, ფირმები თანხის მოზიდვის მიზნით (ისე, როგორც ობლიგაციების შემთხვევაში). აქციები ძირითადად ორი სახისაა – ჩვეულებრივი და პრივილეგიური. ჩვეულებრივი აქციის მფლობელი კომპანიის მოგებიდან ღებულობს დივიდენდს, რომლის სიდიდე კომპანიის წარმატებულ საქმიანობაზეა დამოკიდებული. კომპანიის გაკოტრების შემთხვევაში ასეთი აქციონერი მთლიანად კარგავს თავის ინვესტიციას. პრივილეგიური აქციის მფლობელს კი გარანტირებული აქვს თავისი ინვესტიციის მთლიანად დაკარგვის ნაკლები რისკი. სამაგიეროდ, ასეთი ინვესტორი კომპანიისგან ღებულობს დივიდენდს, რომლის სიდიდე არ იზრდება კომპანიის შემოსავლის ზრდასთან ერთად.

აქცია რისკიანი ფასიანი ქაღალდია, რადგან მისი მნიშვნელობები დროში შემთხვევით იცვლება და დამოკიდებულია უამრავ ფაქტორზე. აქციებში თანხის ინვესტირება ძირითადად მიმზიდველია არა დივიდენდების მიღებით, არამედ სწორედ აქციის ფასების შესაძლო მკვეთრი ცვლილებებით: ინვესტორს აქვს შანსი მიიღოს დიდი მოგება აქციის დაბალ ფასში ყიდვით და მისი მაღალ ფასში გაყიდვით.

ვიგულისხმოთ, რომ ერთი ობლიგაციის ფასი საწყის $n=0$ მომენტში არის $B_0>0$, ხოლო ერთი აქციის ფასი – $S_0>0$. დროის $n=1$ მომენტში ობლიგაციის და აქციის ფასები გამოითვლება შემდეგი ტოლობებით:

$$B_1 = B_0(1+r), \tag{17}$$

$$S_1 = S_0(1+{}^\circ), \tag{18}$$

სადაც $r>0$ რთული საპროცენტო განაკვეთია, ხოლო ° შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც იღებს მხოლოდ ორ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობას: ან a-ს, ან b-ს, $a<r<b$, შევნიშნავთ, რომ აქციის მომავალი ფასების განსაზღვრა ცალსახად შეუძლებელია, რადგანაც წინასწარ ჩვენ არ ვიცით რომელ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობას მიიღებს ° შემთხვევითი სიდიდე.

ფინანსური ბაზრის (17), (18) სახის ზოგადი, დროში დისკრეტული

მოდელი შემოთავაზებული და შესწავლილი იყო გასული საუკუნის სამოცდაათიან წლებში ფ. კოკსის, რ. როსის და მ. რუბინშტეინის მიერ. ითვლება, რომ ამ ავტორების ნაშრომებმა რევოლუციური ძვრები გამოიწვია ფინანსურ სამყაროში. საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ ზოგიერთმა ავტორმა (მაგალითად მ. შოულსმა, რ. მერტონმა) ნობელის პრემია დაიმსახურა ეკონომიკაში.

ფინანსური ბაზრის ზოგადი სახის დისკრეტული მოდელი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი რეკურენტული განტოლებების საშუალებით

$$B_n = B_{n-1}(1+r)\,, \quad B_0 > 0,$$

$$S_n = S_{n-1}(1+ \circ_n), \quad S_0 > 0,$$

სადაც $n = 1,\dots,N$ $S_0 > 0$, ხოლო $\circ_n$ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც დროის ყოველი $n = 1,\dots,N$ მომენტისთვის იღებს მხოლოდ ორ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობას: ან $a-$ს ან $b-$ს ტოლ მნიშვნელობას. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ რადგანაც აქციის ფასი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ამიტომ მოდელის *r*, *a* და *b* პარამეტრები უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს: $-1 < a < r < b$.

გარდა ამისა გვაქვს, რომ თუ $r \le a$, მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ აქციები, ხოლო თუ $r \ge b$, მაშინ ჯობს შევიძინოთ მხოლოდ ობლიგაციები ან თანხა დავდოთ საბანკო ანგარიშზე. ამ მოსაზრებების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ მარტივი რიცხვითი მაგალითები.

დავუშვათ, $B_0 = 20,$ $S_0 = 100$ და დროის საწყის $n = 0$ მომენტში ჩვენი თანხა 100-ის ტოლია. ვთქვათ, $r < a$ და $r = \frac{1}{5}$, $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{3}{5}$.

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ვიყიდოთ ერთი აქცია ან ხუთი ობლიგაცია. ვნახოთ, რა შეიძლება მოხდეს დროის შემდეგ $n = 1$ მომენტში. ერთი ობლიგაციის ფასი იქნება

$$B_1 = (1+r)B_0 = (1+\frac{1}{5})\cdot 20 = 24,$$

ხოლო ხუთი ობლიგაციის კი-120. თუ $\circ_1 = a = \frac{2}{5}$ მაშინ

$$S_1 = (1+\circ_1)S_0 = (1+\frac{2}{5})\cdot 100 = 140$$

და გვექნება $5B_1 < S_1$. თუ $\circ_1 = b = \frac{3}{5},$ მაშინ

$$S_1=(1+{}^{\circ}{}_1)S_0=(1+\frac{3}{5})\cdot 100=160$$

და კვლავ გვექნება $5B_1 < S_1$.

ვთქვათ, ახლა

$$r > b \quad \text{და} \quad a=\frac{1}{10},\quad b=\frac{2}{10},\quad r=\frac{3}{10}.$$

დროის $n=1$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასი იქნება

$$B_1=(1+r)B_0=(1+\frac{3}{10})\cdot 20=26,$$

ხოლო ხუთი ობლიგაციის კი-130. ${}^{\circ}{}_1=a=\frac{1}{10}$ და ${}^{\circ}{}_1=b=\frac{2}{10}$ შემთხვევებში, შესაბამისად, გვექნება:

$$S_1=(1+{}^{\circ}{}_1)S_0=(1+\frac{1}{10})\cdot 100=110,$$

$$S_1=(1+{}^{\circ}{}_1)S_0=(1+\frac{2}{10})\cdot 100=120$$

და ამრიგად, ორივე შემთხვევაში $5B_1 > S_1$. ანალოგიური სიტუაციები გვექნება დროის შემდეგ მომენტებშიც.

ადვილი მისახვედრია, რომ ზოგადი მოდელის შემთხვევაშიც B_n და S_n სიდიდეები, $n=0,1,\dots,N$ ქმნის შესაბამისად არითმეტიკულ და გეომეტრიულ პროგრესიებს.

3. შემოვიტანოთ ახლა პოპულარული ფასიანი ქაღალდის – ერთი კონკრეტული სახის ევროპული ოფციონის განმარტება. შევნიშნავთ, რომ სიტყვა „ევროპული“ ნიშნავს იმას, რომ ოფციონის მფლობელს მისი განაღდება შეუძლია ხელშეკრულებით განსაზღვრული ვადის მხოლოდ ბოლო მომენტში.

ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი (ოფციონური ხელშეკრულება, კონტრაქტი) გადახდის ფუნქციით

$$f(S_1)=\max(S_1-K,0) \tag{19}$$

არის ფასიანი ქაღალდი, რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას იყიდოს აქცია დროის ბოლო მომენტში (ჩვენს შემთხვევაში დროის $n=1$ მომენტში) წინასწარ შეთანხმებულ $K>0$ ფასად. თუ $S_1>K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი გაანაღდებს ოფციონს, ანუ იყიდის აქციას

K ფასად, მყისვე გაყიდის მას S_1 ფასად და მიიღებს მოგებას $f(S_1)= S_1 - K$. თუ $S_1 \le K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანაღდებს ოფციონს, რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

შევნიშნავთ, რომ (19) ტოლობაში გამოყენებული აღნიშვნის შინაარსი შემდეგია: $\max(S_1 - K, 0)$ ნიშნავს $S_1 - K$ და 0 რიცხვებს შორის უდიდესს (მაქსიმუმს). მაგალითად, $\max(3,0) = 3$, $\max(-2,0) = 0$.

ოფციონის გამომშვების – ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ძირითადი ამოცანა: რა უმცირეს (სამართლიან) ფასად უნდა გაყიდოს მან ოფციონი, რომ საჭიროების შემთხვევაში შეძლოს ხელშეკრულებით გათვალისწინებული თანხის გადახდა. ამისათვის ემიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით უნდა ააგოს ობლიგაციებით და აქციებით ვაჭრობის ისეთი ოპტიმალური გეგმა ანუ სტრატეგია, რომ $S_1 > K$ შემთხვევაში გააჩნდეს დროის $n = 1$ მომენტში ზუსტად $f(S_1)$ თანხა.

სწორედ ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნა და ოპტიმალური სტრატეგიის აგება შეადგენს ოფციონის გათვლის ამოცანას.

ოფციონის ერთ-ერთი ძირითადი მიმზიდველობა მდგომარეობს იმაში, რომ იგი იაფი ღირს და მისი საშუალებით შეიძლება (გარკვეული რისკის ხარჯზე) დიდი მოგების მიღება.

მართლაც, ვთქვათ, დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენი საწყისი თანხა $X_0 = 10000$, $S_0 = 100$, $K = 100$, ხოლო ყიდვის სტანდარტული ოფციონის ფასია $C = 10$ განაღდების $n = 10$ მომენტით. ცხადია, X_0 თანხა სხვადასხვანაირად შეიძლება გამოვიყენოთ ოფციონებისა და აქციების ყიდვისათვის. მაგალითისათვის განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა:

1) ვთქვათ, ვიყიდეთ მხოლოდ ოფციონები, ე.ი. 1000 ოფციონი. თუ $S_{10} > K$ და, მაგალითად, $S_{10} = 150$, მაშინ ერთი ოფციონი მოგვცემს $150 - 100 = 50$-ის ტოლ თანხას, ხოლო 1000 ოფციონი მოგვცემს 50000-ის ტოლ თანხას და ჩვენი სუფთა მოგება იქნება $50000 - 10000 = 40000$-ის ტოლი თანხა. თუ კი $S_{10} \le K$, მაშინ ჩვენ დავკარგავთ მთლიან საწყის თანხას.

2) ვთქვათ, ვიყიდეთ მხოლოდ აქციები, ე. ი. 100 აქცია. თუ $S_{10}=150$, მაშინ 100 აქცია მოგვცემს 15000-ის ტოლ თანხას და ჩვენი სუფთა მოგება იქნება $15000-10000=5000$-ის ტოლი თანხა. თუ $S_{10}\le K$ და, მაგალითად, $S_{10}=80$, მაშინ 100 აქცია მოგვცემს 8000-ის ტოლ თანხას და ჩვენი დანაკარგი იქნება $10000-8000=2000$-ის ტოლი თანხა.

4. ვიგულისხმოთ, რომ $n=0$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასია B_0, ხოლო ერთი აქციის ფასია S_0 და ინვესტორმა შეიძინა, შესაბამისად, ${}_0$ და $\yen_0$ რაოდენობების ობლიგაცია და აქცია. შევნიშნავთ, რომ ${}_0$ და $\yen_0$ სიდიდეები შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი რიცხვებიც. მაგალითად, ${}_0=\dfrac{3}{2}$ ნიშნავს ერთნახევარი ობლიგაციის ყიდვას, ხოლო $\yen_0=-\dfrac{1}{2}$ ნიშნავს ნახევარი აქციის სესხებას.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\circledR_0=({}_0,\yen_0)$, რომელსაც $n=0$ მომენტში ინვესტორის პორტფელი (სტრატეგია) ეწოდება. საწყისი X_0 თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_0=X_0^{\circledR}={}_0B_0+\yen_0S_0. \tag{20}$$

დროის $n=1$ მომენტის დადგომამდე ინვესტორს შეუძლია გარკვეული მოსაზრებების გამო (მაგალითად, აქციის ფასის მოსალოდნელი ცვლილების გამო) $\circledR_0=({}_0,\yen_0)$ შეცვალოს ახალი $\circledR_1=({}_1,\yen_1)$ პორტფელით, ${}_1\ne{}_0$, $\yen_1\ne\yen_0$. მაშინ (4) თანხა ასე ჩაიწერება

$$X_0^{\circledR}={}_1B_0+\yen_1S_0. \tag{21}$$

გამოვაკლოთ (21) ტოლობას (20) ტოლობა. მაშინ მივიღებთ ინვესტორის პორტფელის (სტრატეგიის) ე.წ. თვითდაფინანსებადობის შემდეგ პირობას:

$$\Delta{}_1B_0+\Delta\yen_1S_0=0,$$

სადაც $\Delta{}_1={}_1-{}_0$, $\Delta\yen_1=\yen_1-\yen_0$. სტრატეგიის თვითდაფინანსებადობა სხვანაირად ნიშნავს იმას, რომ სტრატეგიების აგების დროს გამოიყენება მხოლოდ ინვესტორის საწყისი თანხა და ინვესტირების პროცესში არ ხდება არც რაიმე დამატებითი თანხის გადინება ან

სემოდინება. შევნიშნავთ, რომ ობლიგაციის ან აქციის გარკვეული რაოდენობის შესაბამისი თანხის სესხება დასაშვებია.

ცხადია, ინვესტორის სურვილია ააგოს ოპტიმალური სტრატეგია, ანუ ისეთი $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ პორტფელი, რომ დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ახალი B_1 და S_1 ფასების გათვალისწინებით შესრულდეს ტოლობა

$$X_1^{\pi} = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 = f(S_1), \tag{22}$$

სადაც f არის (19) ტოლობით განმარტებული გადახდის ფუნქცია.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$S_{1,0} = S_0(1+a), \quad S_{1,1} = S_0(1+b),$$
$$f_{1,0} = f(S_{1,0}), \quad f_{1,1} = f(S_{1,1}).$$

ამ აღნიშვნებისა და (17), (18) ტოლობების გამოყენებით (23) ტოლობა ჩაიწერება უცნობი β_1 და γ_1 სიდიდეების მიმართ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა შემდეგი სისტემის სახით:

$$\begin{cases} \beta_1(1+r)B_0 + \gamma_1(1+a)S_0 = f_{1,0} \\ \beta_1(1+r)B_0 + \gamma_1(1+b)S_0 = f_{1,1} \end{cases}. \tag{24}$$

ამ სისტემის ამონახსნი ანუ ოპტიმალური სტრატეგია $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0}, \tag{25}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0}. \tag{26}$$

რაც შეეხება ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნას, ამისათვის β_1^* და γ_1^* სიდიდეების (25) და (26) მნიშვნელობები შევიტანოთ (21) ტოლობაში. აღვნიშნოთ ოფციონის სამართლიანი ფასი C_1-ით. მარტივი ალგებრული გარდაქმნების შემდეგ გვექნება

$$C_1 = X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \cdot B_0 + \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0} \cdot S_0 =$$

$$= \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-a}{b-a} f_{1,1} + \frac{b-r}{b-a} f_{1,0} \right). \tag{27}$$

ამრიგად, ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია: (27) ტოლობით

გამოთვლილია სამართლიანი ფასი, ხოლო (25) და (26) ტოლობებით აგებულია ოპტიმალური სტარტეგია.

5. ბოლოს გვინდა მოვიტანოთ ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ამოცანის რიცხვითი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

$$B_0 = 20, \quad r = \frac{1}{5}, \quad S_0 = 100, \quad ° = a = -\frac{2}{5} \;\text{ ან }\; ° = b = \frac{3}{5}, \quad K = 100.$$

გადავწყვიტოთ ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ამოცანა.

ამოხსნა. ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$1 + a = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}, \quad 1 + b = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}, \quad b - a = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1,$$

$$\frac{r-a}{b-a} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}}{1} = \frac{3}{5}, \quad \frac{b-r}{b-a} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}}{1} = \frac{2}{5},$$

$$1 + r = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}, \quad \frac{1}{1+r} = \frac{5}{6},$$

$$S_{1,0} = S_0 (1 + a) = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60,$$

$$S_{1,1} = S_0 (1 + b) = 100 \cdot \frac{8}{5} = 160,$$

$$f_{1,0} = \max(S_{1,0} - K, 0) = \max(60 - 100, 0) = 0,$$

$$f_{1,1} = \max(S_{1,1} - K, 0) = \max(160 - 100, 0) = 60.$$

გამოვთვალოთ ახლა C_1 სამართლიანი ფასი. (27) ტოლობის თანახმად გვექნება:

$$C_1 = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 60 + \frac{2}{5} \cdot 0 \right) = 30 .$$

დროის $n = 0$ მომენტში ავაგოთ ოპტიმალური სტრატეგია $®_1^* = \left({}_1^*, ¥_1^* \right)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ ოფციონის სამართლიანი ფასის $C_1 = 30$-ის ტოლი თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) უნდა გვქონდეს შემდეგი;

1) თუ $S_1 = S_{1,0} = 60$, მაშინ $X_1^{®^*} = {}_1^* B_1 + ¥_1^* S_{1,0} = 0$, $f_{1,0} = 0$,

2) თუ $S_1 = S_{1,1} = 160$, მაშინ $X_1^{®^*} = {}_1^* B_1 + ¥_1^* S_{1,1} = 60$, $f_{1,1} = 60$.

(25) და (26) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$ {}_1^* = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 60}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = -\frac{3}{2}, \qquad ¥_1^* = \frac{60-0}{1\cdot 100} = \frac{3}{5}. $$

ამრიგად, ოპტიმალური სტრატეგიაა $®_1^* = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$. ახლა გავაანალიზოთ თუ რა ოპერაციები გვაქვს ჩასატარებელი. ჩვენ გვაქვს ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხა $C_1 = 30$ და, აგრეთვე, $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის სესხებით მიღებული $\frac{3}{2}\cdot 20 = 30$ -ის ტოლი თანხა. ჯამური თანხით ჩვენ ვიყიდეთ $\frac{3}{5}$ აქცია, რისი საშუალება მართლაც გვაქვს, რადგანაც $\frac{3}{5}\cdot 100 = 60 = 30 + 30$. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასია

$$ B_1 = (1+r)B_0 = \frac{6}{5}\cdot 20 = 24. $$

ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$ X_1^{®^*} = -\frac{3}{2}\cdot 24 + \frac{3}{5}\cdot 160 = 60, $$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას $f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 60$.

ამრიგად, დროის $n = 1$ მომენტში გავყიდით $\frac{3}{5}$ აქციას და მივიღებთ $\frac{3}{5}\cdot 160 = 96$ -ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან გავისტუმრებთ $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2}\cdot 24 = 36$ -ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $96 - 36 = 60$ -ის ტოლი თანხით შევასრულებთ ოფციონის ვალდებულებას.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$ X_1^{®^*} = -\frac{3}{2}\cdot 24 + \frac{3}{5}\cdot 60 = 0, $$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

დროის $n=1$ მომენტში გავყიდით $\frac{3}{5}$ აქციას და მივიღებთ $\frac{3}{5}\cdot 60 = 36$ -ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გავისტუმრებთ $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2}\cdot 24 = 36$-ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით არაფერს ვიხდით, რადგან $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

3.2. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანა

განვიხილოთ ფინანსური (B, S)-ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, რომელიც ფუნქციონირებს დროის მომენტებში $n = 0,1,\dots,N$, $N < \infty$ და შედგება მხოლოდ ორი აქტივისგან: $B = (B_n)$ არის ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და $S = (S_n)$ არის აქციები. ამ მოდელის თანახმად B_n და S_n სიდიდეების ევოლუცია დროში აღიწერება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებებით:

$$B_n = (1+r)B_{n-1}\,,\ B_0 > 0, \tag{28}$$

$$S_n = S_{n-1}(1+{}^\circ{}_n),\quad S_0 > 0, \tag{29}$$

სადაც $r \geq 0$ არის საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო ${}^\circ = {}^\circ(n)$, $n = 0,1,\dots,N$, არის ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა და ყოველი ${}^\circ{}_n$ იღებს ან $a-$ს ან $b-$ს ტოლ მნიშვნელობას. ამასთან იგულისხმება, რომ $< a < r < b$ [1], [2].

წარმოვიდგინოთ ახლა ინვესტორი, რომელსაც დროის საწყის $n = 0$ მომენტში გააჩნია თანხა $X_0 = x > 0$ და მას სურს (28), (29) ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით თავისი საწყისი თანხა დროის N მომენტში გახადოს f_N თანხის ტოლი. ინვესტორის ამ სურვილს საინვესტიციო პრობლემა ეწოდება. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ გვაქვს გარკვეულ ფუნქციათა მიმდევრობა $g = (g_n)$, $n = 0,1,\dots,N$, $g_0 = 0$.

ვთქვათ, დროის $n = 0$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასია B_0, ხოლო ერთი აქციის ფასია S_0 და ინვესტორმა იყიდა შესაბამისად $_0$

და $¥_0$ რაოდენობების ობლიგაცია და აქცია. ამასთან ჩვენ ვუშვებთ, რომ $\ _0$ და $¥_0$ სიდიდეები შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი რიცხვებიც. მაგალითად $\ _0=\frac{5}{2}$ ნიშნავს, რომ ნაყიდია ორნახევარი ობლიგაცია, ხოლო $¥_0=-\frac{1}{4}$ ნიშნავს, რომ ნასესხებია მეოთხედი აქცია. რიცხვების წყვილს $®_0=(\ _0,¥_0)$ ეწოდება ინვესტორის პორტფელი (სტრატეგია) საწყის $n=0$ მომენტში. ცხადია ინვესტორის საწყისი თანხა ($®_0$ პორტფელის შესაბამისი თანხა) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_0=X_0^{®}=\ _0B_0+¥_0S_0. \tag{30}$$

დროის $n=1$ მომენტის დადგომამდე ინვესტორმა შეიძლება გარკვეული მოსაზრებების გამო $®_0=(\ _0,¥_0)$ პორტფელი შეცვალოს ახალი $®_1=(\ _1,¥_1)$ პორტფელით g ფუნქციის გათვალისწინებით ისე, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$X_0^{®}=\ _1B_0+¥_1S_1+g_1. \tag{31}$$

ამრიგად, თუ $g_1>0$, მაშინ $X_0^{®}$ თანხა მცირდება g_1 სიდიდით (მაგალითად ხდება g_1 თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე), ხოლო თუ $g_1<0$, მაშინ $X_0^{®}$ თანხა იზრდება g_1 სიდიდით (მაგალითად დივიდენდების ხარჯზე). დროის $n=1$ მომენტში ახალი B_1 და S_1 მნიშვნელობების გათვალისწინებით გვექნება

$$X_1^{®}=\ _1B_1+¥_1S_1. \tag{32}$$

(31), (32) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\Delta X_1^{®}=\ _1\Delta B_1+¥_1\Delta S_1-g_1, \tag{33}$$

სადაც $\Delta X_1^{®}=X_1^{®}-X_0^{®}$, $\Delta B_1=B_1-B_0$, $\Delta S_1=S_1-S_0$.

სავსებით ანალოგიურად, დროის $n-1$ და n მომენებში გვექნება:

$$X_{n-1}^{®}=\ _{n-1}B_{n-1}+¥_{n-1}S_{n-1}, \tag{34}$$

$$X_{n-1}^{®}=\ _nB_{n-1}+¥_nS_{n-1}+g_n, \tag{35}$$

$$\Delta X_n^{®}=\ _nB_n+¥_nS_n, \tag{36}$$

$$X^{®}_{n-1} = \quad {}_n\Delta B_n + ¥_n \Delta S_n - g_n\,, \tag{37}$$

სადაც $\Delta X^{®}_n = X^{®}_n - X^{®}_{n-1}$, $\Delta B_n = B_n - B_{n-1}$, $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$. (34)-(37) ტოლობებიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობებს:

$$X^{®}_n = \quad {}_n\Delta B_n + ¥_n \Delta S_n + \quad {}_n\Delta B_{n-1} + ¥_n \Delta S_{n-1}\,, \tag{38}$$

$$\Delta \quad {}_n B_{n-1} + \Delta ¥_n S_{n-1} + g_n = 0\,. \tag{39}$$

(39) ტოლობას არათვითდაფინანსებადობის პირობა ეწოდება და ასეთ შემთხვევაში $®_n = (\quad {}_n, ¥_n)$ სტრატეგიას არათვითდაფინანსებადი ეწოდება. თუ $g_n \equiv 0$, მაშინ $n = 0,1,\ldots,N$, მაშინ $®_n = (\quad {}_n, ¥_n)$ სტრატეგიას თვითდაფინანსებადი ეწოდება. შევნიშნავთ, რომ (36) ტოლობას ინვესტორის კაპიტალის პროცესი ეწოდება.

სტრატეგიას $® = ®_n = (\quad {}_n, ¥_n)$ ეწოდება (x, f, N)-ჰეჯი, თუ

$$X^{®}_0 = X_0 = x\,,\;\; X^{®}_N \geq f_N\,, \tag{40}$$

სადაც $f = f_N$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა. თუ $X^{®}_N = f_N$, მაშინ ® სტრატეგიას მინიმალური ჰეჯი ეწოდება. აღვნიშნოთ $\Pi(x, f, N)$ სიმბოლოთი ყველა ჰეჯის ერთობლიობა. გამოსახულებას

$$C_N = \min\{x > 0 : \Pi(x, f, N) \neq \Phi\}, \tag{41}$$

სადაც Φ აღნიშნავს ცარიელ სიმრავლეს, ეწოდება საინვესტიციო თანხა.

ფინანსურ ბაზრებზე უამრავ ფასიან ქაღალდებს შორის ივაჭრება ერთ-ერთი პოპულარული ფასიანი ქაღალდი – ევროპული ტიპის ოფციონი ანუ ოფციონური კონტრაქტი. იგი წარმოადგენს ორ მხარეს – ოფციონის გამყიდველსა (ემიტენტსა) და მყიდველს შორის შეთანხმებას რაიმე აქტივის ყიდვა-გაყიდვის შესახებ, რომლის პირობები განსაზღვრულია f_N გადახდის ფუნქციით. სიტყვა ევროპული ნიშნავს იმას, რომ ოფციონის მფლობელს უფლება აქვთ გაანაღდოს ოფციონი შეთანხმების მხოლოდ ბოლო N მომენტში, ანუ იყიდოს ან გაყიდოს რაიმე აქტივი. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ აქციის ყიდვა-გაყიდვის ევროპულ ოფციონს. ასეთ შემთხვევაში გადახდის ფუნქცია ცხადია დამოკიდებულია აქციის ფასზე. ჩვენ ვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც გადახდის ფუნქცია დამოკიდებულია ბოლო მომენტში აქციის ფასის მნიშვნელობაზე ანუ $f_N = f(S_N)$ სახის გადახდის ფუნქციას.

შევნიშნავთ, რომ ემიტენტმა ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით ისე უნდა ივაჭროს ობლიგაციებით და აქციებით, რომ საჭიროების შემთხვევაში დროის ბოლო N მომენტში მას გააჩნდეს არანაკლები ვიდრე $f(S_N)$ თანხა. ამასთან ერთად მან ოფციონი უნდა გაყიდოს გარკვეული აზრით სამართლიან ფასად. ოფციონის სამართლიან ფასად მიღებულია (41) სიდიდე.

ამრიგად, საჭიროა C_N სამართლიანი ფასის დადგენა, მინიმალური $®^*_n = (\ ^*_n, ¥^*_n)$ ჰეჯის აგება, $n = 0,1,\ldots,N-1$ და ამ ჰეჯის შესაბამისი $X^{®^*}_n$ კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა.

2. ვიგულისხმოთ ახლა, რომ რაიმე ზომად სივრცეზე ფილტრაციით $(\Omega, \mathsf{F}, \mathsf{F}_n)$ მოცემული გვაქვს P ალბათურ ზომათა ოჯახი $\boldsymbol{P} = \{P\}$. ყოველი $P \in \boldsymbol{P}$ ალბათური ზომისთვის (ალბათობისთვის) $° = (°_n(\mu))$ არის დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\mathbf{P}(°_n = b) = p\,,\ \mathbf{P}(°_n = a) = 1 - p = q\,,\ \ a < b\,,\ \ n = 0,1,\ldots,N\,. \tag{42}$$

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი წარმოდგენები [4]:

$$°_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}£_b = a + (b-a)¢_n\,,$$

$$£_n = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Leftrightarrow ¢_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow °_n = \begin{cases} b \\ a \end{cases}.$$

შემოვიღოთ აგრეთვე შემდეგი აღნიშვნები:

$$P^* = \frac{r-a}{b-a}\,, \tag{43}$$

$$F_x(x; p^*) = E^*\Bigg[\sum_{k=0}^{n} f(x(1+b)^k (1+a)^{n-k} C_n^k (p^*)^k (1-p^*)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{N} (1+r)^{n-k+1} g^k(\mathsf{F}_n)\Bigg]\,, \tag{44}$$

სადაც E^* აღნიშნავს p^* ალბათური ზომით გასაშუალებას.

თეორემა. ვთქვათ, (28), (29) ფინანსურ (B, S)-ბაზარზე ვიხილავთ ევროპული ტიპის ოფციონს $f_N = f(S_N)$ გადახდის ფუნქციით და $g = (g_n)$ არის F_{n-1}-ზომად ფუნქციათა მიმდევრობა. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულებები:

1. მინიმალური $\text{®}_n^* = ({}_n^*, \text{¥}_n^*)$ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი განიმარტება ტოლობით

$$X_n^{\text{®}*} = (1+r)^{-N+n} \cdot F_{N-n}(S_n; p^*) . \tag{45}$$

2. ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = (1+r)^{-N} \cdot F_N(S_0; p^*), \tag{46}$$

სადაც p^* და $F_N(x; p^*)$ განმარტებულია შესაბამისად (43), (44) ტოლობებით.

3. არსებობს არათვითდაფინანსებადი მინიმალური ჰეჯი $\text{®}_n^* = ({}_n^*, \text{¥}_n^*)$, რომლის კომპონენტები მოიცემა ტოლობებით:

$$
\begin{aligned}
{}_n^* = \frac{1}{B_N} \{ F_{N-n+1}(S_{n-1}; p^*) - \\
- (1+r) [F_{N-n}(S_{n-1} \cdot (1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1} \cdot (1+b); p^*)] \},
\end{aligned} \tag{47}
$$

$$\text{¥}_n^* = \frac{(1+r)^{-N+n}}{S_{n-1}(b-a)} [F_{N-n}(S_{n-1} \cdot (1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1} \cdot (1+b); p^*)] \}. \tag{48}$$

დამტკიცება. 1. ფინანსური ბაზრის (28), (29) მოდელში შემავალი °_k შემთხვევითი სიდიდეების სტრუქტურის თანახმად შეიძლება დავწეროთ შემდეგი ტოლობა

$$\prod_{n<k\le N} (1+ \text{°}_k) = (1+b)^{\Delta_N - \Delta_n} \cdot (1+a)^{(N-n)-(\Delta_N - \Delta_n)},$$

სადაც $E^* [f (x(1+b)^{\Delta_N - \Delta_n} \cdot (1+a)^{(N-n)-(\Delta_N-\Delta_n)})] = F_{N-n}(x; p^*)$.

შემდეგ გვაქვს [4] ნაშრომის (2.43) ტოლობის თანახმად

$$
\begin{aligned}
X_n^{\text{®}*} &= E^* \left[(1+r)^{-(N-n)} \cdot f(S_N) + \sum_{k=n+1}^{N} (1+r)^{n+1-k} \cdot g_k / \mathsf{F}_n \right] = \\
&= E^* \left[(1+r)^{-(N-n)} \cdot f(S_N) + \sum_{k=n+1}^{N} (1+r)^{n+1-k} \cdot g_k / S_n \right] = \\
&= (1+r)^{-(N-n)} \cdot F_{N-n}(S_0; p^*) .
\end{aligned}
$$

2. განმარტების თანახმად, თუ $\text{®}_n^* = ({}_n^*, \text{¥}_n^*)$, $n = 0,1,\ldots,N$, წარმოადგენს მინიმალურ ჰეჯს, მაშინ გვექნება

$$C_N = X_0^{\text{®}*} = (1+r)^{-N} \cdot F_N(S_0; p^*) .$$

3. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა $\text{®}_n^* = ({}_n^*, \text{¥}_n^*)$ მინიმალური ჰეჯისთვის

$$M_N = M_{(\Delta_N)} = \frac{X_N^{\circledR *}}{B_N} = \frac{f(S_N)}{B_N} = \frac{f(S_0(1+b)^{\Delta_N}(1+a)^{N-\Delta_N}}{B_N}.$$

ერთი მხრივ გვაქვს

$$M_{(\Delta_N)} = M_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\yen_N^* S_{n-1}}{B_n}(°_n - r) = M_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\yen_N^* S_{n-1}}{B_n}(b-a)(\text{¢}_n - p^*),$$

ხოლო მეორეს მხრივ [15] ნაშრომის ლემა 4-ის თანახმად გვექნება

$$M_N = M_0 + \sum_{n=1}^{N} \sim_n^{(\text{¢})} \cdot (\text{¢}_n - p^*),$$

სადაც $\sim_n^{(\text{¢})}$ განიმარტება [15] შემდეგნაირად

$$\sim_n^{(\text{¢})} = \frac{1}{B_N} \sum_{k=0}^{N-n} \left[f\left(S_{n-1}(1+a)^{N-(n-1)} \cdot \left(\frac{1+b}{1+a} \right)^{k+1} \right) - \right.$$

$$\left. - f(S_{n-1}(1+a)^{N-(n-1)} \left(\frac{1+b}{1+a} \right)^{k} \right] C_{N-n}^{k} (p^*)(1-p^*)^{N-n-k}.$$

მაშინ გვექნება

$$\yen_n^* = \yen_n^*(S_{n-1}) = \frac{\sim_n^{(b)} B_n}{S_{n-1}(b-a)} = (1+r)^{-N+n} \times$$

$$\times \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{n-1}(1+a); p^*)}{S_{n-1}(b-a)}.$$

შემდეგ გვაქვს

$${}_n^* = \frac{X_{n-1}^{\circledR *}}{B_{n-1}} - \frac{\yen_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{F_{N-n+1}(S_{n-1}; p^*)}{S_N} -$$

$$-(1+r)^{-N+n} \cdot \frac{F_{N-n}(S_{n-1}(1+b); p^*) - F_{N-n}(S_{N-n}(1+a); p^*)}{S_{n-1}(b-a)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. განვიხილოთ ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით [14], [18]

$$f_N = \max(S_N - K, O),$$

სადაც K შეთანხმების ფასია, ხოლო $g = (g_n)$ ფუნქციის როლში განვიხილოთ შემდეგი სახის ფუნქცია

$$g_n = c_1 \;{}_n B_{n-1} + c_2 \yen_n S_{n-1}, \quad 0 \le c_1 \le 1, \ 0 \le c_2 \le 1.$$

განვმარტოთ ახლა $\widetilde{p}$ ალბათური ზომა ტოლობით

$$\tilde{p} = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)} .$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $c_1 = c_2 \equiv 0$, მაშინ $\tilde{p} = p^*$. სამართლიანია კოქსის, როსის და რუბინშტეინის შედეგის ანალოგიური ფორმულა C_N სამართლიანი ფასისთვის

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (\tilde{p})^k (1-\tilde{p})^{N-k} \left(\frac{(1+c_1)(1+a)}{1+r} \right)^N \cdot \left(\frac{1+b}{1+a} \right)^k -$$

$$- K \left(\frac{1+c_1}{1+r} \right)^N \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (\tilde{p})^k (1-\tilde{p})^{N-k} ,$$

სადაც K_0 ის უმცირესი რიცხვია, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$S_0 \left[(1+a)(1+c_1) \right]^N \left(\frac{1+b}{1+a} \right)^{k_0} > K .$$

3.3. არათვითფინანსებადი სტრატეგიები

ევროპული ტიპის ოფციონის ფასწარმოქმნის ამოცანა გამოკვლეულია ფინანსური (B,S) ბაზრის თვალსაზრისით ცნობილი კოქსი-როსსი-რუბინშტეინის მოდელის მიხედვით. განხილული ზოგადი გადახდის ფუნქცია გამომდინარე მთელი რეალიზაციის აქციების კურსის მიხედვით. ოფციონის სამართლიანი ფასის ფორმა მოძებნილია არათვითფინანსებადი სტრატეგიები ერთი კლასისათვის; აგებულია მინიმალური ჰეჯი და ინვესტორს კაპიტალის პროცესი. მიღებული შედეგები იძლევა საშუალებას ავაგოთ კომპლექსური პროგრამები რიცხვითი მაგალითებისათვის.

1. ჩვენ განვიხილავთ ფინანსური (B, S) ბაზრის ცნობილი კოქსი-როსსი-რუბინშტეინის დისკრეტული მოდელს

$$B_n = (1+r) B_{n-1} , \;\; B_0 > 0 , \tag{49}$$

$$S_n = (1+ {}^\circ{}_n) S_{n-1} , \;\; S_0 > 0 . \tag{50}$$

დავუშვათ, რომ ალბათობის ოჯახის {**P**} ზომა განისაზღვრება გასაზომ სივრცეში $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{F}_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$ ფილტრაციის მეშვეობით [1].

განტოლებებში (49), (50), $r > 0$ წარმოადგენს საპროცენტო ფსონს და ${}^\circ{}_n$ ნებისმიერი ალბათობისათვის ზომა P∈p წარმოადგენს

დამოუკიდებელი, თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი ცვლადების თანმიმდევრობას მხოლოდ ორი a და b მნიშვნელობებით; აგრეთვე

$$P(°_n - b) = p\,,\;\; P(°_n - a) = 1 - p \quad \text{და} \quad -1 < a < r < b\,.$$

ადვილად შესაძლებელია დავრწმუნდეთ, რომ თუ r აღემატება b-ს, მაშინ შესაძლებელია ურჩიოთ თანხის დაბანდება საბანკო ანგარიშზე (ფულის ინვესტირება m ობლიგაციებში), მაგრამ თუ r ნაკლებია ვიდრე a, მაშინ უმჯობესია ერთი აქციებიდ შეძენა

მოდელებში (49), (50) დაშვებულია, რომ B_n წარმოადგენს გადასახადებიდან თავისუფალ აქტივებს (საპროცენტო ფსონი r მუდმივია) და S_n წარმოადგენს სარისკო აქტივებს რადგან საფონდო ფასი შემთხვევითი ცვლადია [18], [35].

ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს რამდენიმე ინვესტორი, რომლებსაც აქვთ საწყისი კაპიტალი $X_0 = x > 0$ და სურთ მომავალში გაზარდონ კაპიტალი (B, S) ბაზრის შესაძლებლობის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში გვაქვს საქმე ე.წ. ინვესტიციების ამოცანასთან.

დავუშვათ, რომ ერთი ობლიგაციის ფასი არის B_0 და ფასის ერთი აქციის ფასი არის S_0 საწყის მომენტში. დავუშვათ, რომ ამ დროის ამ მომენტში $n = 0$ ინვესტორმა შეიძინა β_0 რაოდენობის ობლიგაციები და $¥_0$ რაოდენობის აქციები. გავითვალისწოთ, რომ $_0$ β_0 და $¥_0$ შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი სიდიდე. მაგალითად, $_0 = -0{,}2$ ნიშნავს სესხის აღებას $0.2B_0$ ოდენობით, ხოლო γ_0=0.5 ნიშნავს აქციების ნახევარის შეძენას. ამგვარად ინვესტორის საწყისი კაპიტალის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით

$$X_0 = X_0^{®} = \;_0B_0 + ¥_0 S_0$$

სადაც $® = ®_0 = (\;_0, ¥_0)$ ნათქვამია ინვესტორის პორტფელის ან სტრატეგიის ფორმირებისათვის დროის მომენტში $n = 0$.

ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს გასაზომი ფუნქციების $g = (g_n)$ $n = 0,1,\ldots,N$, $g_0 = 0$ თანმიმდევრობა F_{n-1} დავუშვათ, რომ დროის მომენტამდე $n = 1$, ინვესტორმა გადააქცია მისი პორტფელის $®_0 = (\;_0, ¥_0)$ ახალ პორტფელად portfolio $®_1 = (\;_1, ¥_1)$ იმის გათვალისწინებით, რომ ტოლობა

$$X_0^{\circledR} = \ {}_1B_0 + \yen_1 S_0 + g_1,$$

დაკმაყოფილებულია. ამგვარად, თუ $g_1 \ge 0$, მაშინ საწყისი კაპიტალის მცირდება სიდიდით g_1, თუ $g_1 \le 0$, მაშინ იზრდება სიდიდით g_1.

დროის მომენტის $n=1$ დადგომის შემდეგ, ინვესტორს ექნება კაპიტალი

$$X_0^{\circledR} = \ {}_1B_1 + \yen_1 S_1 \ ,$$

სადაც B_1 და S_1 წარმოადგენენ შესაბამისად ერთი ობლიგაციისა და ერთი აქციის ახალი ფასებს დროის მომენტში დრო $n=1$. ჩვენ გვექნება

$$X_0^{\circledR} = \ {}_1\Delta B_1 + \yen_1 \Delta S_1 - g_1,$$

სადაც $\Delta X_1^{\circledR} = X_0^{\circledR} - X_0^{\circledR}$, $\Delta B_1 = B_1 - B_0$, $\Delta S_1 = S_1 - S_0$.

ანალოგიურად, დროის მომენტებში ნებისმიერი $n-1$ და n ჩვენ გვექნება

$$X_{n-1}^{\circledR} = \ {}_{n-1}B_{n-1} + \yen_{n-1} S_{n-0};$$

$$X_{n-1}^{\circledR} = \ {}_nB_{n-1} + \yen_n S_{n-1} + g_n;$$

$$X_n^{\circledR} = \ {}_nB_n + \yen_n S_n,$$

$$X_n^{\circledR} = \ {}_nB_n + \yen_n \Delta S_n - g_n,$$

სადაც

$$\Delta X_n^{\circledR} = X_n^{\circledR} - X_{n-1}^{\circledR}, \ \Delta B_n = B_n - B_{n-1}, \Delta S_n = S_n - \sin \yen_{-1}.$$

თუ სტრატეგია $\circledR$ აგებულია g_n მნიშვნელობის მხედველობაში მიღებით, მაშინ მას ეწოდება არათვიდაფინანსებადი. როდესაც $g_n \equiv 0$, სტრატეგიას $\circledR$ ეწოდება თვითდაფინანსებადი. ჩვენ გვაქვს

$$\Delta \ {}_nB_{n-1} + \Delta \yen_n S_{n-1} + g_n = 0 \qquad (51)$$

როდესაც $g_n \equiv 0$, (51) განტოლებიდან ჩვენ გვაქვს თვითდაფინანსებადი სტრატეგიის პირობა:

$$\Delta \ {}_nB_{n-1} + \Delta \yen_n S_{n-1} = 0. \qquad (52)$$

2. სტრატეგიას $\circledR = (\circledR_n) = (\ {}_n, \yen_n)$ ეწოდება $(x, f, N)-$ჰეჯი, თუ

$$X_0^{\circledR} = X_0 = x,$$

$$X_N^{\circledR} \ge f_N,$$

სადაც $f = f_N$ წარმოადგენს გარკვეულ გადახდის ფუნქციას.

თუ ჩვენ გვაქვს ტოლობა $X_N^{®} \geq f_N$, მაშინ ®-ს ეწოდება მინიმალური ჰეჯი.

$X_0 = x > 0$ და $f = f_N$-სათვის აღვნიშნოთ $\Pi(x, f, N)$ ყველა $(x, f, N)-$ჰეჯის ნაკრები.

ახლა მოდით განვსაზღვროთ სტანდარტული ევროპული ოფციონი. იგი წარმოადგენს გადახდის ფუნქციის წარმოებულ (მეორე რიგის) უსაფრთხოებას

$$f = f_N = (N_N - K)^+ = \max(S_N - K, 0)\,.$$

ამ ოფციონის მფლობელს აქვს უფლება შეიძინოს აქციები k ფასში დროის გარკვეულ მომენტში N. თუ $S_N > k$, მაშინ ოფციონის მფლობელი შეიძენს აქციებს k ფასში, გაყიდის მათ ერთჯერადად S_N ფასში და მიიღებს მოგებას

$$f_N = S_N - k\,.$$

მისი მოგება უდრის

$$f_N = S_N - k - C_N$$

სადაც C_N წარმოადგენს სტანდარტული ევროპული ოფციონის ე.წ. სამართლიანი (რაციონალური) ფასს. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონი მფლობელი არ განახორციელებს ოპერაციას თავის ოფციონით და მისი დაკარგი ტოლი იქნება C_N.

ინვესტორის ამოცანა (ოფციონის გამყიდველი) მდგომარეობს შემდეგში: გამოიყენოს ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = \inf\{x > 0 : \Pi(x, f, N) \neq \varnothing\}. \tag{53}$$

რაც მოეთხოვება მინიმალური ჰეჯის $®_0^* = ({}_0^*, ¥_0^*)$ აგებისათვის.

3. განვიხილოთ ფინანსური (B, S)-ბაზარი (49), (50) და არათვით-დაფინანსებადი სტრატეგიები $®_n$. დავუშვათ რომ $f = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ თანმიმდევრობა F_{n-1}-გასაზომი ფუნქციების $g = (g_n)$ განსაზღვრულია ტოლობით

$$g_n = c¥_n S_{n-1}, \;\; 0 < x < 1\,. \tag{54}$$

ლემა 1. დავუშვათ, რომ (B, S) ბაზარზე (49), (50) სტრატეგია ® წარმოადგენს $(x, f, N)-$ჰეჯს. მაშინ

$$x \geq E * \left[\left(\frac{1}{1+r} \right)^N \cdot f_N \right]. \tag{355}$$

თუ (x, f, N)-ჰეჯის დანამატი ® მინიმალურია, მაშინ

$$x = E * \left[\left(\frac{1}{1+r} \right)^N \cdot f_N \right] \ . \tag{56}$$

დამტკიცება. (54) ტოლობის გათვალისწინებით ჩვენ გვექნება

$$X^{®}_{n-1} = \ \ _nB_{n-1} + ¥_nS_{n-1} + c¥_nS_{n-1} = \ \ _nB_{n-1} + ¥_nS_{n-1}(1+c)\,, \tag{57}$$

$$X^{®}_n = rX^{®}_n + ¥_nS_{n-1} + (° - r^*)\,, \tag{58}$$

სადაც

$$r^* = r + c(1+r)\,. \tag{59}$$

(58) ტოლობიდან

$$X^{®}_n - X^{®}_{n-1}(1+r) = ¥_nS_{n-1}(°_n - r^*)\,. \tag{60}$$

მოცემულია

$$M^*_n = \frac{X^{®}_n}{B_n}\,, \tag{61}$$

და (60) განტოლების გათვალისწინებით ჩვენ მივიღებთ

$$\Delta M^*_n = \frac{1}{B_n} ¥_nS_{n-1}(°_n - r^*)\,. \tag{62}$$

მოცემული

$$m_n = \sum_{k-1}^{n} \left(°_k - r^* \right), \qquad \Delta m_n = °_k - r^*\,. \tag{63}$$

ჩვენ გვაქვს

$$M^{®}_n = M^{®}_0 + \sum_{k-1}^{n} \Delta M^{®}_k = M^{®}_0 + \sum_{k-1}^{n} \frac{1}{B_k} ¥_kS_{k-1}\Delta m_k\,. \tag{64}$$

გარდა ამისა ჩვენ გვაქვს

$$E(°_n - r^*) = np + a(1-p) - r^*\,, \tag{65}$$

სადაც E აღნიშნავს საშუალო P∈**P** ღონისძიების მიმართებაში.

ახლა განვსაზღვროთ p* ტოლობის მეშვეობით

$$p^* = \frac{r^* - a}{b-a} = \frac{r + c(1+r) - a}{(b-a)}\,,\ 0 < p^* < 1\,. \tag{66}$$

დავუშვათ რომ P*∈**P** წარმოადგენს ღონისძიების ალბათობას რას შეესაბამება მის სიდიდეს p^* და გამოისახება როგორც

$$P^*(°_n = b) = p^*, \quad P^*(°_n - a) = 1 - p^*. \tag{67}$$

ადვილია ვაჩვენოთ, რომ თანმიმდევრობა $(m_n, \mathsf{F}_n \cdot \mathrm{P}^*)$ აყალიბებს მარტინგალს

$$E^*\left(m_n / \mathsf{F}_{n-1}\right) = m_{n-1} \quad , \tag{68}$$

სადაც E^* წარმოადგენს ღონისძიების P^* საშუალოს.

ფარდობის (64) გამოყენებით, გამომდინარე რომ F_{n-1} ღონისძიების დადგენა $¥_k S_{k-1}/B_k$ სიდიდით, ადვილად ჩანს რომ $(M_n, \mathsf{F}_n, \mathrm{P}^*)$ თანმიმდევრობა აგრეთვე წარმოადგენს მარტინგალს და ამრიგად ყოველი სტრატეგიისათვის ® ჩვენ გვექნება $E^* M_N^{\circledR} = M_0^{\circledR}$. მაშინ

$$E^* M_N^* = E^*\left(\frac{X_N^{\circledR}}{B_N}\right) = M_0^{\circledR} = \frac{x}{B_0}. \tag{69}$$

მაშასადამე თუ სტრატეგია არის $\circledR \in \Pi(x, f, N)$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$x \ge E^*\left[(1+r)^{-N} \cdot X_N^{\circledR}\right],$$

თუმცა, გარდა ამისა, თუ ჰეჯი მინიმალურია, მაშინ ჩვენ გვექნება

$$x = E^*\left[(1+r)^{-N} \cdot X_N^{\circledR}\right]$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.

ლემა 2. დავუშვათ საწყისი კაპიტალია $x > 0$ და გადახდის ფუნქცია არის $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$. მაშინ კლასში $\Pi(x, f, N)$ არსებობს მინიმალური (x, f, N)-ჰეჯი ®*.

დამტკიცება.

მოცემულია

$$M_N^* = E^*\left(\frac{f_N}{B_N} \Big/ \mathsf{F}_N\right), \tag{70}$$

სადაც E* წარმოადგენს საშუალოს ღონისძიების P* მიმართ. ნათელია, რომ

$$M_N^* = E^*\left(\frac{f_N}{B_N}\right), \quad M_N^* = \left(\frac{f_N}{B_N}\right) \tag{71}$$

და თანმიმდევრობა $(M_N, \mathsf{F}_N, \mathrm{P}^*)$ აყალიბებს მარტინგალს. ლემა 3-ის

თანახმად [30], მარტინგალი $(M_N, \mathsf{F}_N, \mathrm{P}^*)$ შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$M_n^{\text{®}} = M_0^{\text{®}} + \sum_{k+1}^{n} \sim_k^{\text{®}} \left(\text{°}_1,\ldots,\text{°}_{k-1}\right)\Delta m_k . \tag{72}$$

ზოგიერთი F_{k-1}-გამზომი ფუნქციებია $a_k^* = a_k^*(\text{°}_1,\ldots,\text{°}_{k-1})$, $k \ge 2$, $a_1^* = const$ და $\Delta m_k = \text{°}_k - r^*$.

შემდგომ დავადგინოთ $\sim_n^*$ სიდიდეები ფარდობიდან

$$\Delta M_N^* = \sim_n^* \Delta m_m = \Delta M_N^{\text{®}*} = \text{¥}_n^* \frac{S_{n-1}}{B_n}\Delta m_n . \tag{73}$$

ჩვენ გვაქვს

$$\text{¥}_n^* = \frac{\sim_n^* B_n}{S_{n-1}}, \qquad \sim_n^* = \text{¥}_n^* \frac{S_{n-1}}{B_n} . \tag{74}$$

და მართლაც, რაკი

$$\text{¥}_1^* = \sim_1^* \frac{B_1}{S_0},$$

ჩვენ განვსაზღვრავთ $\sim_n^*$ ფარდობიდან

$$x = {}_1^* B_0 + \text{¥}_1^* S_0(1+c) .$$

ჩვენ მივიღებთ

$${}_1^* = \frac{x - \text{¥}_n^* S_0 (1+c)}{B_0} .$$

ნათელია, რომ პორტფელის კაპიტალი მიუხედავად ამისა შესაძლებელია განისაზღვროს როგორც

$$X_1^{\text{®}*} = {}_1^* B_1 + \text{¥}_1^* S_1 .$$

გარდა ამისა ჩვენ გვაქვს

$$\begin{aligned}
\Delta M_N^{\text{®}*} &= \frac{X_1^{\text{®}*}}{B_1} = \left(B_1^* + \text{¥}_1^* \frac{S_1}{B_1}\right) = \frac{x - \text{¥}_1^* S_0(1+c)}{B_0} + \text{¥}_1^* \frac{S_1}{B_1} = \\
&= \frac{x}{B_0} + \text{¥}_1^* \left[\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0}(1+c)\right] = \frac{x}{B_0} + \sim_1^* \frac{B_1}{S_0}\left[\frac{S_1}{B_1} - \frac{S_0}{B_0}(1+c)\right] = \\
&= \frac{x}{B_0} + \sim_1^* \left[\frac{S_1}{S_0} - (1+c)\frac{B_1}{B_0}\right] == \frac{x}{B_0} + \sim_1^* \left[1 + \text{°}_1 - (1+c)(1+r)\right] = \\
&= M_0^* + \sim_1^* \left(\text{°}_1 - r^*\right) = M_1^* .
\end{aligned}$$

თუ ჩავსვამთ $n = 0,1,\ldots,N$ ჩვენ გვექნება $\Delta M_n^{\text{®}*} = \Delta M_n^*$.

გარდა ამისა ჩვენ გვაქვს

$$\frac{X_1^{\text{®}^*}}{B_1} = M_n^{\text{®}^*} = M_n^* = E^*\left[\frac{f_N}{B_N}\Big/ \mathsf{F}_N\right],$$

რაც გულისხმობს

$$X_N^{\text{®}^*} = E^*\left[(1+r)^{-(N-n)}\cdot\frac{f_N}{B_N}\Big/ \mathsf{F}_N\right].$$

კერძოდ, $X_n^{\text{®}*} \ge 0$ ყველა n-სათვის და $X_n^{\text{®}*} = f_N$. ეს ტოლობა აგრეთვე სრულდება ყველა $\mu \in \Omega$-სათვის, რაც $X_n^{\text{®}*} = x$ ტოლობასთან ერთად და აგებული სტრატეგია ®^* არის მინიმალური (x, f, N)-ჰეჯი.

ლემა 2 დამტკიცებულია.

თეორემა. დავუშვათ რომ ფინანსური ბაზარი (49), (50) არის განხილული და თანმიმდევრობა F_{n-1}-გამზომი ფუნქციებისა $g=(g_n)$ მოცემულია (33) განტოლების მეშვეობით მაშინ

1) ევროპული ტიპის ოფციონის სამართლიანი ფასი C_N გადახდის ფუნქციასთან ერთად $f_N = f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$C_N = E*\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^N \cdot f_N\right]. \qquad (75)$$

სადაც E* წარმოადგენს საშუალოს P*∈**P** ღონისძიების მიმართ, როგორიც არის

$$P^*(°_n = b) = p^*,\ \ P^*(°_n = a) = 1 - p^*,\quad 0 < p^* < 1,$$

$$p^* = \frac{r + c(1+r) - a}{(b-a)},$$

2) არსებობს მინიმალური (x, f, N)-ჰეჯი $\text{®}^* = (\text{®}_n^*) = ({}_n^*, ¥_n^*)$, $n = 0,1,\ldots,N$, რომლის F_{n-1}-ზომითი კომპონენტი განისაზღვრება ფორმულებით

$${}_n^* = \frac{X_{n-1}^* - ¥_n^* S_{n-1}(1+c)}{B_{n-1}}, \qquad (76)$$

$$¥_n^* = \frac{\sim_n^* B_n}{S_{n-1}}, \qquad (77)$$

სადაც $a_k^* = a_k^*(°_1, \ldots, °_{k-1})$, $k \ge 2$, $a_1^* = const$, წარმოადგენენ განსაზღვრულ F_{n-1}-ზომითი ფუნქციებს.

3) კაპიტალი $X_n^{\circledR *} = (X_n^{\circledR *})$, $n = 0,1,\ldots,N$, რომელიც შეესაბამება ჰეჯს $\circledR^* = (\circledR_n^*)$ მოცემულია ფორმულით

$$X_n^{\circledR} = E^*\left[\left(\frac{1}{1+r}\right)^{N-n} \cdot f_N / \mathrm{F}_n\right]. \tag{78}$$

დამტკიცება. გავითვალისწინოთ რომ თეორემის დებულებები 1), 2), 3) ფაქტიურად დამტკიცებულია ლემებში 1, 2.

თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა 1. მინიმალური სტრატეგიის კაპიტალი განისაზღვრება ტოლობით

$$X_n^{\circledR *} = \frac{1}{1+r}\left[p^* f((1+b)S_n) + (1-p^* f((1+a)S_n)\right]$$

სადაც p^* განისაზღვრება ტოლობით (66).

დასკვნა 2. სამართლიანია შემდეგი რეკურენტული ტოლობები:

$$X_n^{\circledR *} = \frac{1}{1+r}\left[p^* C_{N-k+1,j+1} + (1-p^*)C_{N-k+1,j}\right],$$

სადაც $k = 1,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,N-k$, p^* განისაზღვრება ტოლობით (66).

3.4. მესამე თავის დასკვნები

შესწავლილია ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელის შემთხვევაში:

აქციის ფასის ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე დამოკიდებული გადახდის ფუნქციისათვის მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები.

გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.

თავი IV. ევროპული ოფციონის ფასდადების რიცხვითი მაგალითები და გამოყენებითი პროგრამების პაკეტების ფინანსური ფუნქციები

4.1. ყიდვის სტანდარტული ოფციონი

მაგალითი 4.1. განვიხილოთ (17), (18) ტოლობებით განსაზღვრული ფინანსური (B, S) – ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული მოდელი

$$B_n = (1-R)B_{n-1}, \ \ B_0 > 0, \tag{79}$$

$$S_n = (1+\circ_n)S_{n-1}, \ \ S_0 > 0, \ \ n = 0,1,\ldots,N. \tag{80}$$

$N = 1$, ე.ი. $n = 0,1$. შესრულებულია პირობები.

$$B_0 = 20, \quad \Gamma = \frac{1}{5}, \tag{81}$$

$$S_0 = 100, \quad \circ_n = b = \frac{3}{5} \quad \text{ან} \tag{82}$$

$$P_n = a = -\frac{2}{5}, \quad n = 0,1,\ldots,N, \tag{83}$$

$$K = 100. \tag{84}$$

მაგალითი 4.1.1. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 1$, ე.ი. $n = 0,1$. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია პირობები.

$$\text{I.} \ \ B_0 = 20, \ \ \Gamma = \frac{1}{5}, \tag{85}$$

$$\text{II.} \ \ S_0 = 100, \quad \circ_n = b = \frac{3}{5}, \tag{86}$$

ან

$$P_n = a = -\frac{2}{5}, \quad n = 0,1,\ldots,N. \tag{87}$$

დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1 = f(S_1) = \max(S_1 - K, 0). \tag{88}$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n=1$ მომენტში აქციისა და ოფციონის შესაძლო ფასების მნიშვნელობები, (88) და (I) (49)-(54) ტოლობების თანახმად, შესაბამისად ტოლი იქნება:

$$S_{1,0}=S_0(1+a)=100\cdot\frac{3}{5}=60\,, \tag{89}$$

$$S_{1,1}=S_0(1+b)=100\cdot\frac{8}{5}=160\,, \tag{90}$$

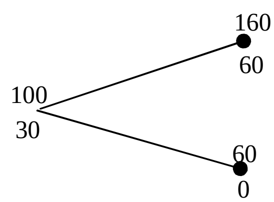
$$f_{1,0}=\max(S_{1,0}-K,0)=\max(60-100,0)=0\,. \tag{91}$$

$$f_{1,1}=\max(S_{1,1}-K,0)=\max(160-100,0)=60\,. \tag{92}$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, დროის $n=0$ მომენტში ოფციონის საწყისი ფასი ანუ ოფციონის სამართლიანი ფასი. (87) ტოლობების გათვალისწინებით და გვექნება

$$C_1=(1+r)^{-1}\left[p^*f_{1,1}+(1-p^*)f_{1,0}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 60+\frac{2}{5}\cdot 0\right)=30\,. \tag{93}$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 23. ერთნაბიჯიან ბინომური ხე

გამოვთვალოთ C_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, კოკსის, როსის და რუბინშტეინის (17)-(18) ფორმულების საშუალებით. ამისათვის გამოვიყენოთ $N=1$ შემთხვევაში. გვექნება

$$S_0(1+a)\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{K_0}>K\,.$$

ვთქვათ, $k_0=0$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^0>100\,.$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ $\frac{3}{5}>1$, ამიტომ $k_0=0$ მნიშვნელობა k_0-ის განმარტების თანახმად არ გამოდგება.

ვთქვათ, $k_0 = 1$, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^{0} > 100,$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{8}{5} > 1$. ამრიგად, $k_0 = 1$. შევნიშნავთ, რომ k_0-ის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე, (89) ფორმულის გამოყენებით. (90) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$C_1 = S_0 C_1^1 \cdot p^*(1-p^*)^0 \cdot \frac{1+a}{1+r}\cdot\frac{1+b}{1+a} - K\cdot(1+r)^{-1}\cdot C_1^2 p^*(1-p^*)^0 =$$

$$=100\cdot 1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{0}\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}} - 100\cdot\frac{5}{6}\cdot 1\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{0} = 30.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით დროის $n = 0$ მომენტში მან უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $\text{®}_1^* = ({}_1^*, \text{¥}_1^*)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ C_1 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) მან უნდა შეიძინოს ${}_1^*$ რაოდენობა ობლიგაცია და ¥_1^* რაოდენობის აქცია, ანუ ააგოს $\text{®}_1^* = ({}_1^*, \text{¥}_1^*)$ პორტფელი, რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_1)$ სიდიდის ტოლი იქნება.

(79), (80) ფორმულების თანახმად გვექნება

$${}_1^* = \frac{(1+b) f_{1,0} - (1+a) f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 60}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 60} = -\frac{3}{2}, \qquad (94)$$

$$\text{¥}_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{60-0}{1\cdot 100} = \frac{3}{5}. \qquad (95)$$

ამრიგად, მივიღებთ $\text{®}_1^* = ({}_1^*, \text{¥}_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში (დროის $n = 1$ მომენტის დადგომამდე) შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = \ {}_1^{*}B_0 + ¥_1^{*}S_0 = -\frac{3}{2}20 + \frac{3}{5}100 = 30\ , \qquad (96)$$

$$X_0^{®*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*)\, f_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 60 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 30\,. \qquad (97)$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n=0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 30-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{3}{2}$ ობლიგაცია ანუ $\frac{3}{2}\cdot 20 = 30$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{3}{5}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{3}{5}100 = 60 = 30 + 30 = 60\,.$$

დროის $n=1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, $®_1^{*} = (\ {}_1^{*}, ¥_1^{*}) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = \ {}_1^{*}B_1 + ¥_1^{*}S_1 = -\frac{3}{2}B_1 + \frac{3}{5}S_1 = f(S_1)\,. \qquad (98)$$

ნახაზ 23-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასია

$$B_1 = (1+r)B_0 = \frac{6}{5}\cdot 20 = 24\,.$$

ასეთ შემთხვევაში (98)-ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{®*} = -\frac{13}{4}24 + \frac{3}{5}\cdot 160 = 60\ ,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 60$.

ამრიგად, დროის $n=1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{3}{5}$ აქციას და მიიღებს $\frac{3}{5}160 = 96$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2}24 = 36$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $96 - 36 = 60$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში (98)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{®*} = -\frac{3}{2}24 + \frac{3}{5}\cdot 60 = 0\,,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{3}{5}$ აქციას და მიიღებს $\frac{3}{5} = 60 = 36$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრება $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2}24 = 36$-ის ტოლ თანხას, ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს იხდის, რადგან $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

ამრიგად, მაგალითი 4.1.1-ის პირობები ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგალითი 4.1.2. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 2$, ე.ი. $n = 0$, 1, 2 ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (19)-(21) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2 = f(S_2) = \max(S_2 - K_2 0)\,. \tag{99}$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n = 1$ მომენტში ბინომური ხის სამ ფინალურ (ბოლო) კვანძში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებისათვის გვექნება:

$$S_{2,0} = S_0(1+b)^0(1+a)^2 = 100\left(\frac{8}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 36\,, \tag{100}$$

$$S_{2,1} = S_0(1+b)(1+a) = 100\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5} = 96\,, \tag{101}$$

$$S_{2,2} = S_0(1+b)^2(1+a)^0 = 100\left(\frac{8}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 256\,, \tag{102}$$

$$f_{2,0} = f(S_{2,0}) = \max(S_{2,0} - K, 0) = \max(36 - 100, 0) = 0\,, \tag{103}$$

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}) = \max(S_{2,1} - K, 0) = \max(96 - 100, 0) = 0\,, \tag{104}$$

$$f_{2,2} = f(S_{2,2}) = \max(S_{2,2} - K, 0) = \max(256 - 100, 0) = 156\,. \tag{105}$$

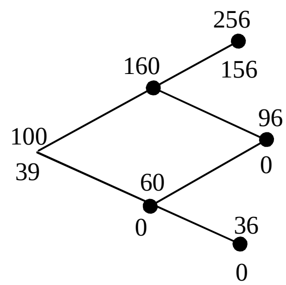
დროის $n = 1$ მომენტში შესაბამის ორ კვანძში ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს აქციის შესაძლო ფასები (89), (90) ტოლობებით, რომლის თანახმად $S_{1,0} = 60$, $S_{1,1} = 160$. შემდეგ

$$C_{1,0}=(1+r)^{-1}\left[p^{*}f_{2,1}(1-p^{*})\,f_{2,2}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}0+\frac{2}{5}0\right)=0\,, \tag{106}$$

$$C_{1,1}=(1+r)^{-1}\left[p^{*}f_{2,2}+(1-p^{*})\,f_{2,1}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}156+\frac{2}{5}0\right)=78\,, \tag{107}$$

$$C_{2}=(1+r)^{-1}\left[p^{*}C_{1,1}(1-p^{*})C_{1,0}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 78+\frac{2}{5}0\right)=39\,. \tag{108}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 24. ორნაბიჯიანი ბინომური ხე

გამოვთვალოთ C_2 სიდიდის მნიშვნელობა საშუალებით. $N=2$ შემთხვევაში:

$$S_0(1+a)\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{K_0}>K\,.$$

ვთქვათ, $k_0=0$, მაშინ გვექნება

$$100\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^{0}>100\,.$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ $\frac{9}{25}>1$. ვთქვათ $k_0=1$, მაშინ გვექნება

$$100\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\cdot\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}>100\,,$$

საიდანაც მივიღებთ კვლავ არასწორ უტოლობას $\frac{24}{25}>1$. ვთქვათ, $k_0=2$, მაშინ გვექნება

$$100\left(\frac{3}{5}\right)^{2}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^{0}>100\,,$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{64}{25}>1$. ამრიგად, $k_0=2$. კიდევ ერთხელ შევნიშნავთ, რომ k_0-ის მნიშვნელობა შეიძლება უშუალოდ გამოვთვალოთ (17) ფორმულით.

(18) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$C_2 = S_0 C_2^2 (p^*)^2 (1-p^*)^0 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^2 \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^2 - K(1+r)^{-2} C_2^2 (p^*)^2 (1-p^*)^0 =$$

$$=100\cdot 1\cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2 \left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 - 100\cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1\cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right)^0 = 39.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა: ოფციონის გაყიდვით მიღებული C_2 თანხით დროის (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) დროის $n=0$ მომენტში მან უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $®_1^* = (\ {}_1^*, ¥_1^*)$. დროის $n=1$ მომენტში ამ პორტფელის შესაბამისი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $®_2^* = (\ {}_2^*, ¥_2^*)$, რომლის შესაბამისი კაპიტალი, დროის $n=2$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_2)$ სიდიდის ტოლი იქნება.

(25), (26) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$ {}_1^* = \frac{(1+b) f_{1,0} - (1+a) C_{1,1}}{(1+r)(b-a) B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 78}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = -\frac{39}{20}, \tag{109}$$

$$¥_1^* = \frac{C_{1,1} - C_{1,0}}{(b-a) S_0} = \frac{78-0}{1\cdot 100} = \frac{39}{50}. \tag{110}$$

ამრიგად, მივიღებთ $®_1^* = (\ {}_1^*, ¥_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=0$ მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = \ {}_1^* B_0 + ¥_1^* S_0 = -\frac{39}{20} 20 + \frac{39}{50} 100 = 39, \tag{111}$$

$$X_0^{®*} = (1+r)^{-1} \left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0} \right] = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{5} 78 + \frac{2}{5} 0 \right) = 39. \tag{112}$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n=0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 39-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{39}{20}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{39}{20}\cdot 20=30$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{50}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{39}{50}100=78=39+39=78.$$

დროის $n=1$ მომენტში $®_1^*=(\ {}_1^*,¥_1^*)=\left(-\frac{39}{20},\frac{39}{50}\right)$. პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{®^*}=\ {}_1^*B_1+¥_1^*S_1=-\frac{39}{20}B_1+\frac{39}{50}S_1=f(S_1). \tag{113}$$

ნახაზ 24-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1=S_{1,1}=60$. ობლიგაციის ფასი $B_1=24$. ასეთ შემთხვევაში (113)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{®^*}=-\frac{39}{20}24+\frac{39}{50}160=78, \tag{114}$$

შევნიშნოთ, რომ (114) ტოლობით გამოთვლილი $X_1^{®^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობის დროის $n=1$ მომენტში ნახაზ 24-ზე მოცემული $S_{1,1}$ კვანძში ოფციონის $C_{1,1}$ ფასის მნიშვნელობის ტოლია.

დროის $n=1$ მომენტში $X_1^{®^*}=78$-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $®_1^*=(\ {}_1^*,¥_1^*)$. გვექნება

$$\ {}_2^*=\frac{(1+b)C_{2,1}-(1+a)f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_1}=\frac{\frac{8}{5}0-\frac{3}{5}156}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24}=-\frac{13}{4}, \tag{115}$$

$$¥_2^*=\frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}}=\frac{156-0}{1\cdot 160}=\frac{39}{40}. \tag{116}$$

ამრიგად, მივიღებთ $®_2^*=(\ {}_2^*,¥_2^*)=\left(-\frac{13}{4},\frac{39}{40}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = \ {}_2^{*}B_1 + ¥_2^{*}S_{1,1} = -\frac{13}{4}24 + \frac{39}{40}160 = 78\,, \tag{117}$$

$$X_1^{®*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*)\, f_{2,1}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}156 + \frac{2}{5}0\right) = 78\,. \tag{118}$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n=1$ მომენტში. მას აქვს 78-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{13}{4}$ ობლიგაცია ანუ $\frac{13}{4}24=78$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{40}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{39}{40}160 = 156 = 78 + 78 = 156\,.$$

დროის $n=2$ მომენტში, $®_2^{*} = (\ {}_2^{*}, ¥_2^{*}) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{®*} = \ {}_2^{*}B_2 + ¥_2^{*}S_2 = -\frac{13}{4}B_1 + \frac{39}{40}S_2 = f(S_2)\,. \tag{119}$$

ნახაზ 24-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა I-ის შემდეგი ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$. ობლიგაციის ფასია

$$B_2 = (1+r)\cdot B_1 = \frac{6}{5}24 = \frac{144}{5}\,.$$

ასეთ შემთხვევაში (4.1.41)-ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{®*} = -\frac{13}{4}\frac{144}{5} + \frac{39}{40}256 = 156\,,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,2} = f(S_{2,2}) = 156$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40}256 = \frac{1248}{5}$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{1248}{5} - \frac{468}{5} = 156$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,2} = 156$.

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში (118)-ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\text{®}*} = -\frac{13}{4}\frac{144}{5} + \frac{39}{40}96 = 0.$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 0$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40}96 = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს იხდის, რადგან $f_{2,1} = 0$.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$, ასეთ შემთხვევაში (113)-ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\text{®}*} = -\frac{39}{20}\cdot 24 + \frac{39}{50}60 = 0, \tag{120}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $C_{1,0}$-ის მნიშვნელობას.

ააგოს ამ შემთხვევაში მინიმალური ჰეჯი $\text{®}_2^* = ({}_2^*, \text{¥}_2^*)$. (25), (26) ფორმულების თანახმად გვექნება

$${}_2^* = \frac{(1+b)f_{2,0} - (1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5}0 - \frac{3}{5}0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24} = 0, \tag{121}$$

$$\text{¥}_2^* = \frac{f_{2,1} - f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}} = \frac{0-0}{1\cdot 60} = 0. \tag{122}$$

ამრიგად, მივიღებთ $\text{®}_2^* = ({}_2^*, \text{¥}_2^*) = (0,0)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{\text{®}*} = {}_2^* B_1 + \text{¥}_2^* S_{1,0} = 0\cdot 24 + 0\cdot 60 = 0, \tag{123}$$

$$X_1^{\text{®}*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}0\right) = 0. \tag{124}$$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n=1$ მომენტში. იგი გაყიდვის $\frac{39}{50}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{50}60 = \frac{234}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{39}{20}$ ობლიგაციის ვალს

ანუ $\frac{39}{20}\cdot 24=\frac{234}{5}$-ის ტოლ თანხას. განხილული შემთხვევა II-ის ორივე ქვეშემთხვევაში დროის $n=2$ მომენტში ემიტენტი არაფერს იხდის $f_{2,1}=f(S_{2,1})=0$, $f_{2,0}=f(S_{2,0})=0$.

ამრიგად, მაგალითი 4.1.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

ბოლოს კიდევ ერთხელ გვინდა შევნიშნოთ, რომ რეალურ სიტუაციებში ემიტენტს დროის $n=0$ და $n=1$ მომენტებში მხოლოდ თითოეულ მოუწევს ერთნაბიჯიანი შემთხვევების განხილვა.

4.2. გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი

მაგალითი 4.2. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N=1$, ე.ი. $n=0$, 1. ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (19)-(21) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1=f(S_1)=\max(K-S_1,0). \tag{125}$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n=1$ მომენტში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობები ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს (86), (87) ტოლობებით, რომლის თანახმად

$$S_{1,0}=60,\qquad S_{1,1}=160. \tag{126}$$

გამოვთვალოთ დროის $n=1$ მომენტში ოფციონის გადახდის ფუნქციის (ოფციონის ფასების) შესაძლო მნიშვნელობები ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის ორ ფინალურ (ბოლო) კვანძში. შესაბამისად გვექნება:

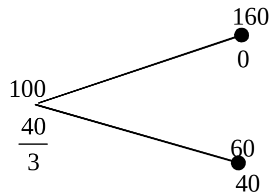
$$f_{1,0}=\max(K-S_{1,0},0)=\max(100-60,0)=40, \tag{127}$$

$$f_{1,1}=\max(k-S_{1,1},0)=\max(100-160,0)=0. \tag{128}$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, ოფციონის სამართლიანი ფასის P_1-ის მნიშვნელობა. (84) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება

$$P_{1,0}=(1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1}(1-p^*)f_{1,1}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}0+\frac{2}{5}40\right)=\frac{40}{3}, \tag{129}$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 25. ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე

საინტერესოა, გამოვთვალოთ P_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, „ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის“

$$P_N = C_N = S_0 + K(1+r)^{-N} \tag{130}$$

ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიან ამოცანაში (93) ტოლობით მოცემული $C_1 = 30$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება

$$P_1 = C_1 = S_0 + K(1+r)^{-1} = 300 - 100 + 100\frac{5}{6} = \frac{40}{3}.$$

ააგოთ დროის $n=0$ მომენტში მინიმალური ჰეჯი $®_1^* = (\ _1^*, ¥_1^*)$. (94), (95) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\ _1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}40 - \frac{3}{5}0}{\frac{6}{5}\cdot 1 \cdot 20} = \frac{8}{3}, \tag{130'}$$

$$¥_1^* = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{0-40}{1\cdot 100} = -\frac{2}{5}. \tag{131}$$

ამრიგად, მივიღებთ $®_1^* = (\ _1^*, ¥_1^*) = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=0$ მომენტში (25), (28) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = \ _1^* B_0 + ¥_1^* S_0 = \frac{8}{3}20 - \frac{2}{5}100 = \frac{40}{3}, \tag{132}$$

$$X_0^{®*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}40\right) = \frac{40}{3}. \tag{133}$$

დანარჩენი მსჯელობა 4.1-ის ანალოგიურია.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში გვექნება

$$X_1^{\circledR *} = \frac{8}{2}24 - \frac{2}{5}160 = 0\,, \tag{134}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 0$.

დროის $n=1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{8}{3}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{8}{3}24 = 64$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{2}{5}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{2}{5}160 = 64$-ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით კი იგი არაფერს იხდის, რადგან $f_{1,1} = 0$.

შემთხვევა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში (134)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\circledR *} = \frac{8}{3}24 - \frac{2}{5}60 = 40\,,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 40$.

დროის $n=1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{8}{3}$. ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{8}{3}\cdot 24 = 64$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს $\frac{2}{5}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{2}{5}60 = 24$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $64 - 24 = 40$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

ამრიგად, მაგალითი 4.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგალითი 4.3. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N=2$, ე.ი. $n=0$, 1, 2 ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (19)-(21) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2 = f(S_2) = \max(K - S_2, 0)\,. \tag{135}$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n=2$ მომენტში ბინომური ხის სამ ფინალურ (ბოლო) კვანძში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებისათვის, (100)-(102) ტოლობების თანახმად, შესაბამისად გვაქვს $S_{2,0}=36$, $S_{2,1}=96$, $S_{2,2}=256$. შემდეგ (135) ტოლობის თანახმად, შესაბამისად გვექნება:

$$f_{2,0}=f(S_{2,0})=\max(K-S_{2,0},0)=\max(100-36,0)=64\,, \tag{136}$$

$$f_{2,1}=f(S_{2,1})=\max(K-S_{2,1},0)=\max(100-96,0)=4\,, \tag{137}$$

$$f_{2,2}=f(S_{2,2})=\max(K-S_{2,2},0)=\max(100-256,0)=0\,. \tag{138}$$

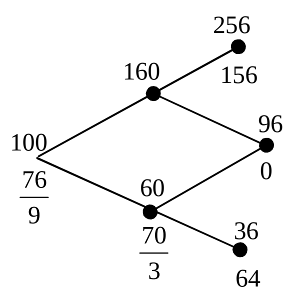
დროის $n=1$ მომენტში შესაბამის ორ კვანძში, გვაქვს $S_{1,0}=60$, $S_{1,1}=160$:

$$P_{1,0}=(1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1}(1-p^*)\,f_{2,0}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{2}{5}\cdot 64\right)=\frac{70}{3}\,, \tag{139}$$

$$P_{1,1}=(1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2}+(1-p^*)\,f_{2,1}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}0+\frac{2}{5}\cdot 4\right)=\frac{4}{3}\,, \tag{140}$$

$$P_2=(1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1}(1-p^*)C_{1,0}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\frac{70}{3}\right)=\frac{76}{9}\,. \tag{141}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 26. ორნაბიჯიანი ბინომური ხე

გამოვთვალოთ P_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, „ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის“ (130) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიან ამოცანაში, (108) ტოლობით მოცემული $C_2=39$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით, გვექნება

$$P_2=C_2-S_0+K(1+r)^{-2}=39-100+100\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}=\frac{76}{9}\,.$$

(21), (22) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\;^*_1 = \frac{(1+b)P_{1,0}-(1+a)P_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\frac{70}{3}-\frac{3}{5}\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{137}{90}, \tag{142}$$

$$\text{¥}^*_1 = \frac{P_{1,1}-P_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{70}{3}}{1\cdot 100} = -\frac{11}{50}. \tag{143}$$

ამრიგად, მივიღებთ $\text{®}^*_1 = (\;^*_1, \text{¥}^*_1) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=0$ მომენტში, შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\text{®}*} = \;^*_1 B_0 + \text{¥}^*_1 S_0 = \frac{137}{90}\cdot 20 - \frac{11}{50}\cdot 100 = \frac{76}{9}, \tag{144}$$

$$X_0^{\text{®}*} = (1+r)^{-1}\left[p^* P_{1,1} + (1-p^*)P_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\frac{70}{3}\right) = \frac{76}{9}. \tag{145}$$

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში (145)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\text{®}*} = \frac{137}{90}\cdot 24 - \frac{11}{50}160 = \frac{4}{3}, \tag{146}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,1}$-ის მნიშვნელობას.

დროის $n=1$ მომენტში $X_1^{\text{®}*} = \frac{4}{3}$-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $\text{®}^*_2 = (\;^*_2, \text{¥}^*_2)$. (25), (26) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\;^*_2 = \frac{(1+b)\,f_{2,1}-(1+a)\,f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 4 - \frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24} = \frac{2}{9}, \tag{147}$$

$$\text{¥}^*_2 = \frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{0-4}{1\cdot 160} = \frac{1}{40}. \tag{148}$$

ამრიგად, მივიღებთ $\text{®}^*_2 = (\;^*_2, \text{¥}^*_2) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში (27), (28) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = {}_2^{*}B_1 + ¥_2^{*}S_{1,1} = \frac{2}{9}24 - \frac{1}{40}\cdot 160 = \frac{4}{3}, \tag{149}$$

$$X_1^{®*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 4\right) = \frac{4}{3}. \tag{150}$$

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$. ობლიგაციის ფასი $B_1 = \frac{144}{5}$. ასეთ შემთხვევაში (150)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{®*} = \frac{2}{9}\frac{144}{5} - \frac{1}{40}\cdot 256 = 0, \tag{151}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,2} = f(S_{2,2}) = 0$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{2}{9}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{2}{9}\frac{144}{5} = \frac{32}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{1}{40}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{1}{40}\cdot 256 = \frac{32}{5}$-ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით კი ის არაფერს იხდის რადგან $f_{2,2} = 0$.

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში (150)-ის თანახმად, გვექნება

$$X_1^{®*} = \frac{9}{9}\frac{144}{5} - \frac{1}{40}\cdot 96 = 4,$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 4$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{2}{9}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{2}{9}\frac{144}{5} = \frac{32}{6}$-ის თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს $\frac{1}{40}$ ობლოგაციის ვალს ანუ $\frac{1}{40}\cdot 96 = \frac{12}{5}$-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{32}{5} - \frac{12}{5} = 4$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1} = 4$..

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში (150)-ის თანახმად, გვექნება

$$X_1^{®*} = \frac{137}{90}\cdot 24 - \frac{11}{50}\cdot 60 = \frac{70}{3}, \tag{152}$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,0}$-ის მნიშვნელობას.

დროის $n=1$ მომენტში $X_1^{\text{®}*}=\frac{70}{3}$-ის ტოლი თანხით ააგოს მინიმალური ჰეჯი $\text{®}_1^*=(\ _1^*,\text{¥}_1^*)$. (25), (26) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\ _2^*=\frac{(1+b)f_{2,0}-(1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1}=\frac{\frac{8}{5}\cdot 64-\frac{3}{5}\cdot 4}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24}=\frac{125}{36}\,, \tag{153}$$

$$\text{¥}_2^*=\frac{f_{2,1}-f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}}=\frac{4-64}{1\cdot 60}=-1\,. \tag{154}$$

ამრიგად, მივიღებთ $\text{®}_2^*=(\ _2^*,\text{¥}_2^*)=\left(\frac{125}{36},-1\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში. (27), (28) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{\text{®}*}=\ _2^*B_1+\text{¥}_2^*S_{1,1}=-\frac{13}{4}24+\frac{39}{40}160=78\,, \tag{155}$$

$$X_1^{\text{®}*}=(1+r)^{-1}\left[p^*f_{2,1}+(1-p^*)f_{2,0}\right]=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{2}{5}\cdot 64\right)=\frac{70}{3}\,. \tag{156}$$

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2=S_{2,1}=96$. ობლიგაციის ფასი $B_2=\frac{144}{5}$. ასეთ შემთხვევაში (156)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\text{®}*}=\frac{125}{36}\cdot\frac{144}{55}-96=4\,, \tag{157}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1}=f(S_{2,1})=4$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{125}{36}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{125}{36}\cdot\frac{144}{5}=100$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს ერთი აქციის ვალს ანუ 96-ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $100-96=4$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1}=4$.

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2=S_{2,0}=36$. გვაქვს $B_2=\frac{144}{5}$. ასეთ შემთხვევაში, (157)-ის თანახმად, გვექნება

$$X_1^{\text{®}*}=\frac{125}{36}\cdot\frac{44}{5}-36=64\,, \tag{158}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,0}=f(S_{2,0})=64$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{125}{36}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{125}{36}\cdot\frac{144}{5}=100$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან გაისტუმრებს ერთი აქციის ვალს ანუ 36-ის თანხას, ხოლო დარჩენილი $100-36=64$-ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,0}=f(S_{2,0})=64$.

ამრიგად, მაგალითი 2.2-ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

4.3. ყიდვის სტანდარტული ოფციონი და $c_1B_{n-1}+c_2S_{n-1}$ სახის მოხმარება

მაგალითი 4.3. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N=1$, ე.ი. $n=0$, 1. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (19)-(21) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1=f(S_1)=\max(S_1-K,0). \tag{159}$$

ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე ობლიგაციისა და აქციის ფასების პროპორციულად (I) (5.9) ტოლობის გათვალისწინებით

$$\begin{aligned}&g_n=c_1B_n+c_2S_{n-1},\quad n=0,1,\\&g_0=0,\ \ 0<c_1<1,\ \ 0<c_2<1.\end{aligned} \tag{160}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $c_1=\frac{1}{40}$ და $c_2=\frac{1}{50}$. ამრიგად, გვექნება

$$g_n=\frac{1}{40}B_{n-1}+\frac{1}{50}S_{n-1},\quad n=0,1;\ \ g_0=0. \tag{161}$$

ჩვენი მიზანია, (161) ტოლობის გათვალისწინებით, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

(25)-(26) ტოლობის თანახმად გვაქვს:

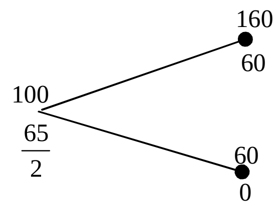
$$S_{1,0}=60,\quad S_{1,1}=160, \tag{162}$$

$$f_{1,0} = 0\,, \qquad f_{1,1} = 60\,. \tag{163}$$

შემდეგ გვექნება

$$C_1 = C_1 + g_1 = C_1 + c_1 B_0 + c_2 S_0 = 30 + \frac{1}{40}\cdot 20 + \frac{1}{50}\cdot 100 = \frac{65}{2}\,. \tag{164}$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 27. ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ აგებული გვაქვს მინიმალური ჰეჯი $\text{®}_1^* = (\ _1^*, \text{¥}_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში გვექნება:

$$X_0^{\text{®}*} = \ _1^* B_0 + \text{¥}_1^* S_0 + c_1 B_0 + c_2 S_0 = -\frac{3}{2}\cdot 20 + \frac{3}{5}\cdot 100 + \frac{1}{40}\cdot 20 + \frac{1}{50}\cdot 100 = \frac{65}{2}\,, \tag{165}$$

$$X_0^{\text{®}*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] + c_1 B_0 + c_2 S_0 =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 60 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) + \frac{1}{40}\cdot 20 + \frac{1}{50}\cdot 100 = \frac{65}{2}\,. \tag{166}$$

ემიტენტმა ოფციონის გაყიდვით მიღებული $C_1 = \frac{65}{2}$-ის ტოლი თანხიდან ($\text{®}_1^* = (\ _1^*, \text{¥}_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\text{®}*} = \frac{65}{2}$ კაპიტალიდან) მოხმარებაზე გადადო

$$g_1 = c_1 B_0 + c_2 S_0 = \frac{1}{40}\cdot 20 + \frac{1}{50}\cdot 100 = \frac{5}{2}$$

სიდიდის ტოლი თანხა. ამის შემდეგ ემიტენტს დარჩა $\frac{65}{2} - \frac{5}{2} = 30$-ის ტოლი თანხა. მან ისესხა $\frac{3}{2}$ ობლიგაცია ანუ $\frac{3}{2}20 = 30$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{3}{5}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{3}{5}100 = 60 = 30 + 30 = 60\,.$$

დროის $n=1$ მომენტში $\text{®}_1^* = ({}_1^*, \text{¥}_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\text{®}*} = {}_1^* B_1 + \text{¥}_1^* S_1 = -\frac{3}{2} B_1 + \frac{3}{5} S_1 = f(S_1) . \tag{167}$$

4.4. გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი და $c_1B_{n-1} + c_2S_{n-1}$ სახის მოხმარება

მაგალითი 4.4. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N=1$, ე.ი. $n=0$, 1. ვიგულისხმოთ, რომ გარდა ამისა, შესრულებულია (19)-(21) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1 = f(S_1) = \max(K - S_1, 0) . \tag{168}$$

ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე ობლიგაციისა და აქციის ფასების პროპორციულად

$$\begin{aligned} &g_n = c_1 B_n + c_2 S_{n-1}, \quad n = 0,1, \\ &g_0 = 0, \ \ 0 < c_1 < 1, \ \ 0 < c_2 < 1. \end{aligned} \tag{169}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $c_1 = \dfrac{1}{40}$ და $c_2 = \dfrac{1}{50}$. ამრიგად, გვექნება

$$g_n = \frac{1}{40} B_{n-1} + \frac{1}{50} S_{n-1} , \quad n = 0,1 ; \ \ g_0 = 0 . \tag{170}$$

ჩვენი მიზანია, (170) ტოლობის გათვალისწინებით, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

(169)-(170) ტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$S_{1,0} = 60 , \quad S_{1,1} = 160 , \tag{171}$$

$$f_{1,0} = 40 , \qquad f_{1,1} = 0 . \tag{172}$$

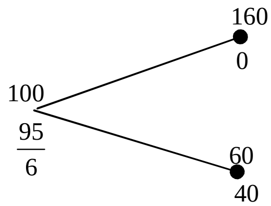
შემდეგ (172) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$P_1 = P_1 + g_1 = P_1 + c_1 B_0 + c_2 S_0 = \frac{40}{3} + \frac{1}{40} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 100 = \frac{95}{6} . \tag{173}$$

შევნიშნოთ, რომ „ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის“ (130) ფორმულა ამ შემთხვევაშიც შეიძლება გამოვიყენოთ. მართლაც, (164) ტოლობით გამოთვლილი $C_1 = \frac{65}{2}$ მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება

$$P_1 = C_1 - S_0 + K(1+r)-1 = \frac{65}{2} - 100 + 100 \cdot \frac{5}{6} = \frac{95}{6}.$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 28. ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე

შევნიშნოთ, რომ (130), (131) ტოლობებით ჩვენ აგებული გვაქვს მინიმალური ჰეჯი $®_1^* = ({}_1^*, ¥_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=0$ მომენტში ფორმულების თანახმად, შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{®*} = {}_1^* B_0 + ¥_1^* S_0 + c_1 B_0 + c_2 S_0 =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot 20 - \frac{2}{5} \cdot 100 + \frac{1}{40} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 100 = \frac{95}{6}. \qquad (174)$$

$$X_0^{®*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] + c_1 B_0 + c_2 S_0 =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}0 + \frac{2}{5}40\right) + \frac{1}{40} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 100 = \frac{95}{6}. \qquad (175)$$

ემიტენტმა ოფციონის გაყიდვით მიღებული $P_1 = \frac{95}{6}$-ის ტოლი თანხიდან ($®_1^* = ({}_1^*, ¥_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი $X_0^{®*} = \frac{95}{6}$ კაპიტალიდან) მოხმარებაზე გადადო

$$c_1 B_0 + c_2 S_0 = \frac{1}{40} \cdot 20 + \frac{1}{50} \cdot 100 = \frac{5}{2}$$

სიდიდის ტოლი თანხა. ამის შემდეგ ემიტენტს დარჩა $\frac{95}{6} - \frac{5}{2} = \frac{40}{3}$-ის

ტოლი თანხა. მან ისესხა $\frac{2}{5}$ აქცია ანუ $\frac{2}{5}100 = 40$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{8}{3}$ ობლიგაცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{8}{3}20 = \frac{160}{3} = \frac{40}{3} + 40 = \frac{160}{3}.$$

დროის $n = 1$ მომენტში (I) (5.19) ფორმულის თანახმად, $®_1^* = (\ {}_1^*, ¥_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{®*} = \ {}_1^* B_1 + ¥_1^* S_1 = \frac{8}{3}B_1 - \frac{2}{5}S_1 = f(S_1). \tag{176}$$

4.5. $c_1 B_{n-1} + c_2 S_{n-1}$ სახის მოხმარება

მაგალითი 4.5. განვიხილოთ (17), (18) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 1$, ე.ი. $n = 0$, 1. გარდა ამისა, ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (19)-(21) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1 = f(S_1) = \max(S_1 - K_1, 0). \tag{177}$$

ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის გადადება რაიმე მოხმარებაზე,

$$\begin{aligned} g_n &= c_1 \ {}_n B_{n-1} + c_2 ¥_n S_{n-1}, \quad n = 0,1, \\ g_0 &= 0, \quad 0 < c_1 < 1, \quad 0 < c_2 < 1. \end{aligned} \tag{178}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $c_1 = \frac{1}{40}$ და $c_2 = \frac{1}{50}$. ამრიგად, გვექნება

$$g_n = \frac{1}{40} B_n B_{n-1} + \frac{1}{50} ¥_n S_{n-1}, \quad n = 0,1; \ g_0 = 0. \tag{179}$$

ჩვენი მიზანია, (179) ტოლობის გათვალისწინებით, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

გამოვთვალოთ p^* და $1 - p^*$ სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობები. გვექნება:

$$p^* = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{40}\frac{3}{5} + \frac{1}{50}\frac{6}{5} + \frac{2}{5}}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{40}\right)} =$$

$$= \frac{60}{41 \cdot 25} = \frac{609}{1025}\,. \tag{180}$$

$$1 - p^* = 1 - \frac{609}{1025} = \frac{416}{1025} = \frac{416}{41 \cdot 25}\,. \tag{181}$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, შემდეგი სიდიდეები:

$$\frac{1+c_1}{1+r} = \frac{1+\frac{1}{40}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{41}{48},$$

$$1 + c_1 = 1 + \frac{1}{40} = \frac{41}{40}, \quad 1 + c_2 = 1 + \frac{1}{50} = \frac{51}{50}\,.$$

შევნიშნავთ, რომ გამოთვლების გამარტივების მიზნით შემდგომში სიდიდების რიცხვით გამოსახულებებს ხშირად ჩავწერთ ხოლმე რიცხვების ნამრავლის სახით.

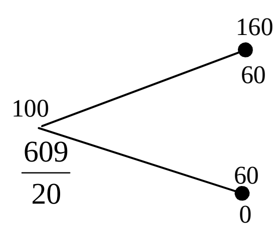
ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს (23)-(26) ტოლობებით შემდეგი სიდიდეები:

$$S_{1,0} = 60\,, \quad S_{1,1} = 160\,,$$

$$f_{1,0} = 40\,, \quad f_{1,1} = 0\,.$$

$$C_1 = \frac{1+c_1}{1+r}\left[p^* f_{1,1} (1-p^*)\, f_{1,0}\right] = \frac{41}{48}\left(\frac{609}{41 \cdot 25}60 + \frac{416}{41 \cdot 25}0\right) = \frac{609}{20}\,. \tag{182}$$

ამრიგად, ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახ. 29. ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე

შევნიშნოთ, რომ (22), (23) ტოლობებით ჩვენ აგებული გვაქვს მინიმალური ჰეჯი $®_1^* = (\ {}_1^*, ¥_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი

კაპიტალი დროის $n=0$ შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\text{®}*} = (1+c_1)\ {}_1^*B_0 + (1+c_2)\text{¥}_1^*S_0 = -\frac{41}{40}\frac{3}{2}20 + \frac{51}{50}\frac{3}{5}100 = \frac{609}{20}. \qquad (183)$$

$$C_0^{\text{®}*} = \frac{1+c_1}{1+r}\left[p^* f_{1,1}(1-p^*) f_{1,0}\right] = \frac{41}{48}\left(\frac{609}{41\cdot 25}60 + \frac{416}{41\cdot 25}0\right) = \frac{609}{20}. \qquad (184)$$

ემიტენტმა ოფციონის გაყიდვით მიღებული $C_1 = \frac{609}{20}$ -ის ტოლი თანხიდან ($\text{®}_1^* = (\ {}_1^*, \text{¥}_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\text{®}*} = \frac{609}{20}$ კაპიტალიდან) მოხმარებაზე გადადო

$$g_1 = c_1\ {}_1^*B_0 + c_2\text{¥}_1^*S_0 = -\frac{1}{40}\frac{3}{2}20 + \frac{1}{50}\frac{3}{5}100 = \frac{9}{20}$$

სიდიდის ტოლი თანხა. ამის შემდეგ ემიტენტს დარჩა $\frac{609}{20} - \frac{9}{20} = 30$ -ის ტოლი თანხა. მან ისესხა $\frac{3}{2}$ ობლიგაცია ანუ $\frac{3}{2}20 = 30$ -ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{3}{5}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{3}{5}100 = 60 = 30 + 30 = 60.$$

დროის $n=1$ მომენტში $\text{®}_1^* = (\ {}_1^*, \text{¥}_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\text{®}*} = \ {}_1^*B_1 + \text{¥}_1^*S_1 = -\frac{3}{2}B_1 + \frac{3}{5}S_1 = f(S_1). \qquad (185)$$

4.6. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის პროგრამა

საწყისი პარამეტრების განსაზღვრა

a=-2/5

b=3/5

r=0.2

S_0=100

K=100

B_0=20

Null

$-\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$

0.2

100

100

20

დამხმარე პარამეტრების განსაზღვრა

$S_{1.0}=S_0(1+a)$

$S_{1.1}=S_0(1+b)$

60

160

ძირითადი ფუნქციის განსაზღვრა

F[x_]:=Max[x-K,0]

Null

დამხმარე ფუნქციის განსაზღვრა

$f_{1,0}=f[S_{1,0}]$

$f_{1,1}=f[S_{1,1}]$

0

60

ოპტიმალური სტრატეგიის პარამეტრების განსაზღვრა

$$ {}_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0}-(1+b)af_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} $$

$$ ¥_1^* = \frac{f_{1.1}-f_{1.0}}{(b-a)S_0} $$

Null

-1.5

$\frac{3}{5}$

ოფციონის სამართლიანი ფასის განსაზღვრა

$C_1 = \ {}_1^*B_0 + ¥_1^*S_0$

30

დროის **n=0** მომენტში ოპტიმალური სტრატეგიის $®_1^* = \left({}_1^*, ¥_1^* \right)$ განსაზღვრა

$S_1=S_{1.0}=60$

60

${}_1^*$

-1.5

$\frac{3}{5}$.

ოპტიმალური სტრატეგია განისაზღვრება ინტერვალით $®_1^* = (-3/2, 3/5)$

4.7. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამა

საწყისი პარამეტრების შეტანა

L=10
A=-2/5
b=3/5
c1=0.5
c2=0.5
s0=1000
K=1000
r=0.2
10
$-\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$
0.5
0.5
1000
1000
0.2

დამხმარე პარამეტრების განსაზღვრა

$\tilde{p} = (r - c1(1 + a) * c2(1 + r) - a)/(b - a) * (1 + c1)$
1.35
$CC[N\_, k\_] := \frac{N!}{k!(N-k)!}$
$Y1 = \frac{K}{S0 * ((1 + a) * (1\_c1)) \wedge L}$
2.86797
$Y2 = \frac{1+b}{1+a}$
$\frac{8}{3}$
$K = Min\left[Round\left[Log\left[\frac{1+b}{1+a}, Y1\right]\right] + 1, Round\left[Log\left[\frac{1+b}{1+a}, Y1\right]\right]\right]$

საინვესტიციო თანხის დათვლა

$$CN = S0\sum_{k2=k}^{L} CC[L,k2]*(\tilde{p})\wedge k2*1-\tilde{p}\wedge(L-k2)*\left(\left(\frac{(1+c1)*(1+a)}{1+r}\right)\wedge L\right)*$$

$$*\left(\frac{1+b}{1+a}\right)\wedge k2-K*\left(\frac{1+c1}{1+r}\right)\wedge L*\sum_{k2=k}^{L}CC[L,k2]*\hat{p}\wedge k2*(1-\tilde{p})\wedge(L+k2)$$

$7.39434\text{x}10^{6}$

4.8. არათვითფინანსირებადი სტრატეგიების აგების ამოცანის პროგრამა

საწყისი პარამეტრების განსაზღვრა

a=1/5

b=4/5

r=0.2

S_0=10

K=5

k=8

c=4

n=20

Null

$\frac{1}{5}$

$\frac{4}{5}$

0.2

10

5

8

4

20

დამხმარე პარამეტრების განსაზღვრა

$$p^{*} = \frac{r + c(1+r) - a}{(b-a)}$$

8.

ძირითადი ფუნქციების განსაზღვრა

S[n_, j_] : = $(1 - a)^{n} (1 - b)^{n-j}$

f [x_] : Max [x – K, 0]

Null

მინიმალური სტრატეგიის კაპიტალის განსაზღვრა

$$X^{®^*} = \frac{1}{(1+r)}\left(p^* * f[(1+b)*S[n,j]]\right) + \left(1 - p^* * f[(1+b)*S[n,j]]\right)$$

Null

4.9. მინიმალური სტრატეგიების კომპიუტერული გამოთვლა

საწყისი პარამეტრების განსაზღვრა

In[16] : = **a=1/5**

b=4/5

r=0.2

S_0=10

K=5

k=8

c=4

n=20

Null

Out[16] $=\frac{1}{5}$

Out[17] $=\frac{4}{5}$

Out[18] =0.2

Out[19] =10

Out[20] =5

Out[21] =8

Out[22] =4

Out[23] =20

დამხმარე პარამეტრების განსაზღვრა

In[25]: = $p^* = \dfrac{r + c(1+r) - a}{(b-a)}$

Out[25]= -4. 8.

ძირითადი ფუნქციების განსაზღვრა

In[26] : = S[n_, j_] : = (1 - a) ^{n} (1 - b) $^{n-j}$

f [x_] : Max [x – K, 0]

Null

მინიმალური სტრატეგიის კაპიტალის განსაზღვრა

In[29]: = $X^{®^*} = \dfrac{1}{(1+r)}\left(p^* * f\left[(1+b)*S[n,j]\right]\right) + \left(1 - p^* * f\left[(1+b)*S[n,j]\right]\right)$

Null

Out[29] = 43.134

4.10. პროგრამა MS Excel-ი

პაკეტში Excel არსებობს ფუნქციების ჯგუფი, განკუთვნილი საფინანსო ოპერაციები გაანგარიშებისადმი კრედიტებზე, სესხებზე (кредитам, ссудам, займам). უმეტეს ფუნქციებს აქვს საბაზისო არგუმენტების ერთი და იგივე ნაკრები: ставка - პროცენტული ფსონი (შემოსავლიანობის ნორმა ან სასესხო საშუალებათა ღირებულება - i); кпер – ოპერაციის ჩატარების ვადა (n პერიოდების რაოდენობა), выплата - პერიოდული გადახდის მნიშვნელობა (R): нз - საწყისი მნიშვნელობა (სიდიდე P), бс - მომავალი მნიშვნელობა (სიდიდე S). [тип] – პროცენტის დარიცხვის ტიპი (1 - პერიოდის დასაწყისი, 0 - პერიოდის ბოლო), არასავალდებულო არგუმენტი.

გაანგარიშებების ზოგად ფორმულას, დაკავშირებულს ფულად ნაკადებთან, აქვს შემდეგი სახე

$$R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1 + n \cdot type) + P(1+i)^n + S = 0. \qquad (186)$$

როცა $i = 0$ გამოყენება ფორმულა $Rn + P + S = 0$.

გაანგარიშებების განხორციელებისათვის MS Excel –ში მოცემულ ფორმულებთან შესაბამისად გამოიყენება ფუნქციები БЗ, ПЗ, КПЕР, НОРМА, ППЛАТ.

მომავალი და მიმდინარე ღირებულების განსაზღვრა

ფუნქცია БЗ გამოითვლის პერიოდული მუდმივი გადასახადები მომავალ ღირებულებას და ანაბრის ან სესხის ერთიანი თანხის მომავალი მნიშვნელობა მუდმივი საპროცენტო ფსონის საფუძველზე (სიდიდე S ფორმულიდან (1)).

Функция ***Б***З(ставка; кпср; выплата; нз; [тип])

ფუნქცია ПЗ განკუთვნილია როგორც ანაბრის (სესხის) ერთიანი თანხის, ასევე ფიქსირებული პერიოდული გადასახადების მიმდინარე ღირებულების გასაანგარიშებლად. ეს გაანგარიშება წარმოადგენს შებრუნებულს მომავალი ღირებულების განსაზღვრისათვის БЗ ფუნქციის გამოყენებით (სიდიდე P ფორმულიდან (186)).

Функция **П***З*(ставка; кпер; выплата; бс; [тип])

ставка -ს მნიშვნელობა, როგორც წესი, მოცემულია ათობითი წილადის სახით. თუ პროცენტების დარიცხვა ხორციელდება m ჯერ წელიწადში, არგუმენტები აუცილებლად უნდა იყვნენ შესაბამისად კორექტირებულნი: $i=1/m$, $n=n\cdot m$.

ფუნქციების გამოყენების ვარიანტები.

1. მომატებული თანხის და ანაბრის მიმდინარე ღირებულების გაანგარიშების კლასიკური ფორმულა რთული პროცენტების მეთოდის მიხედვით.

$$S = P(1+\mathrm{i})^{n}; \qquad P = \frac{S}{(1+\mathrm{i})^{n}}\,. \tag{187}$$

მიმართვა ფუნქციებისადმი:

=БЗ(ставка;кпер;;пз) =ПЗ(ставка;кпер;;бс)

2. პრენუმერანდო და პოსტნუმერანდო გადასახადები.

გადასახადების მომავალი ღირებულების და დაყვანილი რენტის მიმდინარე ღირებულების გაანგარიშების ფორმულა (პრენუმერანდო):

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)\,; \quad S = R\frac{1-(1+i)^{n}}{i}(1+i)\,. \tag{188}$$

მიმართვა ფუნქციებისადმი

=БЗ(ставка; кпер; выплата;;1) =ПЗ(ставка; кпер; выплата;;1)

გადასახადების მომავალი ღირებულების და ჩვეულებრივი რენტის მიმდინარე ღირებულების გაანგარიშების ფორმულა (პოსტნუმერანდო):

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}; \qquad P = R\frac{1-(1+i)^n}{i}. \tag{189}$$

მიმართვა ფუნქციებისადმი:

=БЗ(ставка; кпер; выплата) =ПЗ(ставка; кпер; выплата).

ამოცანა 1. განისაზღვროს ანაბრის ოდენობა, რომელიც უნდა დაიდოს 2 თვიანი ვადით წლიური 10%-ით, რომ ვადის ბოლოს მივიღოთ 101 667 ლარი

ამონახსნი.

ПЗ(0.1*2, 12;1::-101607) (შედეგი: 100 ათასი ლარი)

ამოცანა 2. რა თანხა აღმოჩნდება ანგარიშზე, თუ 27 ათასი ლარი შეტანილია 33 წლით 13,55%-ით წელიწადში? პროცენტები ირიცხება ყოველ ექვს თვეში

ამონახსნი.

БЗ(0,1335/2:66:-27) (შედეგი: 2012,07 ათასი ლარი)

არგუმენტი საწყისი მნიშვნელობა – нз აღებულია უარყოფითი ნიშანით, რადგან მეანაბრეს თვალსაზრისით ეს ოპერაცია იწვევს მისი ფულადი სახსრების გადინებას.

ამოცანა 3. განიხილება სახლის შეძენის ორი ვარიანტი: მთლიანი გადასახადი 99 მილიონი ლარი, ან გადახდა განვადებით 940 ათასი ლარის ოდენობით ყოველთვიური გადახდით 15 წლის განმავლობაში. განისაზღვროს, რომელი ვარიანტია უპირატესი, თუ საპროცენტო ფსონი შეადგენს - 8% წელიწადში?

ამონახსნი.

ПЗ(0,08/12:15* 12:-940) (შედეგი: 98362.16 ათასი ლარი. მეორე ვარიანტი).

გადახდის ვადის გაანგარიშება

ფუნქცია **КПЕР**() ითვლის პროცენტის *n* დარიცხვის პერიოდების რაოდენობას გამომდინარე ცნობილი სიდიდეებიდან *i*, *S* და *P*

განტოლებიდან (186). არგუმენტებს нз და бс უნდა ჰქონდეს საპირისპირო ნიშნები.

Функция КПЕР(ставка;выплата;нз;бс;[тип])

გამოყენების ვარიანტები.

1. ანაბრის выплат *n* პერიოდების საერთო რაოდენობა (ფორმულა 187).

КПЕР(ставка;;нз;бс)

2. დაყვანილი რენტის (პრენუმერანდო) და ჩვეულებრივი რენტის (პოსტნუმერანდო) *n* პერიოდების საერთო რაოდენობა (ფორმულები (188) და (189)).

=КПЕР(ставка;выплата;; бс;1) =КПЕР(ставка;выплата;;бс)

3. სესხის დაფარვისას ზომით нз თანაბარი გადახდებით ყოველი საანგარიშგებო პერიოდის ბოლოს პერიოდების რაოდენობა, რომლის დროსაც მოხდება სრული დაფარვა, უდრის

КПЕР(ставка;выплата;нз)

ამოცანა 4. გამოთვალეთ რამდენი წლის შემდეგ ანაბარი 1 მილიონი ლარის ოდენობით მიაღწევს 1 მილიარდ ლარს, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთი ანაბარზე 16,79%-ია და პროცენტების დარიცხვა სწარმოებს ყოველკვარტალურად.

ამონახსნი.

КПЕР(0.1679 4:;-1000000;1000000000) (შედეგი: 168. კვარტალების რიცხვი 168/4 42 წელი).

ამოცანა 5. ფონდში მიედინება სახსრები მუდმივი წლიური პოსტპუმერანდო რენტის სახით. ერთიანი გადახდის ოდენობაა 16 მილიონი ლარი. შემოსულ შემოსატანებზე ირიცხება 11,18% წლიური პროცენტი. უნდა განისაზღვროს, როდის გაუტოლდება ფონდის სიდიდე 100 მილიონი ლარს.

ამონახსნი.

КПЕР(0,1118;-16;;100) (შედეგი: 5 წელი).

საპროცენტო ფსონის გაანგარიშება

ფუნქცია НОРМА გამოიყენება საპროცენტო ფსონის *i* გაანგარიშებისათვის ერთი საანგარიშო პერიოდის განმავლობაში ფორმულიდან (186). წლიური საპროცენტო ფსანის დასადგენად

მიღებული მნიშვნელობა უნდა გამრავლდეს სანგარიშო პერიოდების რაოდენობაზე, რომლებიც ქმნიან წელიწადს.

Функция НОРМА(кпср;выплата;нз;бс;[тип|)

ფუნქციების нз და бс არგუმენტებს უნდა ჰქონდეს საწინააღმდეგო ნიშნები.

ფუნქციების გამოყენების ვარიანტები.

1. ცნობილია ორივე ღირებულება და პერიოდების რაოდენობა ფორმულაში (187).

НОРМА (кпср;;нз;бс)

2. პრენუმერანდო და პოსტნუმერანდო გადასახადები (ფორმულები (188) და (189)).

=Н0РМА(кпер;выплата;;бс ; 1;) =Н0РМА(кпер;выплата;;бс;;)

3. სესხის საპროცენტო ფსონის ოდენობით нз ჩვეულებრივი პერიოდული გადახდებით თანაბარი დაფარვისას, იმ პირობით, რომ სესხი მთლიანად იფარება, სწარმოებს ფორმულით

Н0РМА(кпер:выплата;нз)

ამოცანა 6. კომპანიას სჭირდება 100,000 ლარი 2 წლის შემდეგ. კომპანია მზად არის დღეს შეიტანოს დეპოზიტზე 40 000 ათასი ლარი. როგორი უნდა იყოს საპროცენტო განაკვეთი, რომ საჭირო თანხის მიღება გახდეს შესაძლებელი მეორე წლის ბოლოს?

ამონახსნი.

12*НОРМА(24;;-40000; 100000) (Результат: 46,7)

ამოცანა 7. ნაგულისხმევია ყოველკვარტალური პოსტნუმერანდო შენატანების გზით 35 მილიონი ლარის ოდენობით 3 წლის განმავლობაში შეიქმნას ფონდი 500 მილიონი ლარი. როგორი უნდა იყოს წლიური საპროცენტო განაკვეთი?

ამონახსნი.

НОРМА(3*4;-35;;500).

ამოცანა 8. კლიენტი იღებს ბანკში შემნახველი ანაბრებს 5 წლის ვადით. შენატანებით 2.5 ათასი ლარის ოდენობით ყოველი კვარტლის ბოლოს; წლის ბოლოსთვის დაგროვილი 83.506 ლარი: განისაზღვროს საპროცენტო ფსონი პერიოდის (კვარტალის) განმავლობაში.

ამონახსნი.

НОРМА(20;2.5:;-83.506;1) Результат: г 0.046635 (4.6635%).

მუდმივი პერიოდული გადასახადების გადახდა

ფუნქცია ППЛАТ() ითვლის გადასახადების სიდიდეს ფიქსირებული პერიოდული გადახდების და მუდმივი საპროცენტო ფსონის საფუძველზე. გადასახადები მოიცავენ ძირითად გადასახადებს და გადასახადებს პროცენტებზე. შედეგს წარმოადგენს R მნიშვნელობა ფორმულიდან (186).

Функция ППЛАТ (станка;кпер;нз;[бс];[тип])

ფუნქციის გამოყენების ვარიანტები.

1. სარგებელის გაანგარიშება, თუ ცნობილია სარგებელის *S* მომავალი ღირებულება, რომლების სწარმოებს ყოველი პერიოდის დასაწყისში ან ბოლოს (ფორმულები 3 და 4).

ППЛАТ(ставка;кпер;;бс;тип)

2. განსაზღვრა თანაბარი პერიოდული გადახდების *R* სესხზე Р ოდენობით, რომლებიც აუცილებელია სესხის სრულად დასაფარად кпер პერიოდების შემდეგ ფსონის ცნობილი ფსონით (ფორმულები (188) და (189)).

=ППЛАТ(ставка;кпер;из;;тип) или =ППЛАТ(ставка;кпер;нз)

ამოცანა 9. საჭიროა დაგროვდეს 4000 ათასი ლარი 3 წლის განმავლობაში, ყოველი თვის ბოლოს მუდმივი თანხის გადადებით. როგორი უნდა იყოს ეს თანხა, თუ ანაბრის საპროცენტო ნორმა შეადგენს 12% წელიწადში.

ამონახსნი.

ППЛАТ(0.12 12;12*3::-4000) (შედეგი: 92,86 ათასი ლარი).

ამოცანა 10. ბანკმა გასცა სესხის სახით 200 მილიონი ლარი 4 წლის განმავლობაში 18%-ით წელიწადში. სესხი გაიცა წლის დასაწყისში, და დაფარვა იწყება წლის ბოლოს ერთნაირი გადახდებებით. განისაზღვროს სესხის ყოველწლიური დაფარვის ოდენობა.

ამონახსნი.

ППЛАТ(18 100;4;-200) (შედეგი:74,35 მლნ ლარი).

ამოცანა 11. გამოითვალეთ გადახდის მიმდინარე მნიშვნელობა თამასუქის 3 წლის შემდეგ გათვალისწინებით 100 ათასი ლარის ოდენობით, რომელიც დისკონტირებულია ყოველკვარტალურად ნომინალური სააღრიცხვო ფსონით 18%.

ამონახსნი.

БЗ(-0.18/4;12;;-100) (შედეგი: 57.549 ათასი ლარი).

ეფექტური და ნომინალური საპროცენტო განაკვეთების გაანგარიშება.

ფუნქციები НОМИНАЛ()და ЭФФЕКТ() გამოითვლიან შესაბამისად ეფექტური და ნომინალური საპროცენტო განაკვეთებს.

=H0МИНАЛ(эф_ставка;кпер) =ЭФФЕКТ(ном_ставка;кпер)

ამ ფუნქციების გამოყენება მოსახერხებელია ოპერაციების შედარებისას პროცენტების დარიცხვის სხვადასხვა პერიოდებით. ფუნქცია ЭФФЕКТ() გამოითვლება ფორმულით

$$i/m)^{m} - 1 \quad .$$

ფუნქციის НОМИНАЛ() მნიშვნელობაა -

არგუმენტი j.

ამოცანა 12. ეფექტური ფსონი შეადგენს 28%, ხოლო პროცენტების დარიცხვა სწარმოებს ყოველთვიურად. გამოითვალეთ ნომინალური ფსონი.

ამონახსნი.

НОМИНАЛ(28; 12) (შედეგი *),2494 ან 24,29%).

ამოცანა 13. ბანკის ფსონი ვადიანი სავალუტო დეპოზიტებზე შეადგენს 18% წელიწადში. განისაზღვროს ანაბრის რეალური შემოსავალი (ანუ ეფექტური ფსონი) თუ პროცენტის გადახდა ყოველთვიურად ხორციელდება.

ამონახსნი.

ЭФФЕКТ(0,18;12) (შედეგი: 0,1956 ან 19,56%)

4.11. მეოთხე თავის დასკვნები

მიღებული საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნა ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით.

გადმოცემული ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამა; ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანის პროგრამა და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების პროგრამა.

დასკვნა

- შესწავლილია ფინანსური ხდომილობებისა და ფინანსური ნაკადების (კერძოდ, რენტის) თვისებები, ფინანსური ოპერაციები და ფინანსური ნაკადები. მოტანილია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები;
- შესწავლილია ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისთვის ორაქტივიანი ფინანსური ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელის შემთხვევაში;
- აქციის ფასის ბოლო მომენტში მნიშვნელობაზე დამოკიდებული გადახდის ფუნქციისათვის მიღებულია ოფციონის სამართლიანი ფასისა და მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები;
- გამოკვლეულია არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ზოგადი და კერძო ამოცანები.
- მიღებულია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნა ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით;
- გადმოცემულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამა; ევროპული ოფციონის გათვლის ამოცანის პროგრამა და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების აგების პროგრამა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. დოჭვირი ბ., მელაძე ჰ. ფინანსური მათემატიკა, ალბათობა და სტატისტიკა (ელემენტები). თსუ, თბილისი, 2003.
2. ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები. ფინანსურ და სადაზღვევო მათემატიკა. ფინანსური ინჟინერია / ლაზრიევა ნ., მანია გ., მირზაშვილი გ., ტორონჯაძე თ., ღლონტი ო., ჯამბურია ლ. // თ. ტორონჯაძის რედაქციით. გამომცემლობა ევრაზია. თბილისი. 1999. 696 გვ.
3. ღლონტი ო. სტოქასტიკური ფინანსური მათემატიკა. თსუ, თბილისი, 2002.
4. Bachelier L. Theorie de la speculation. Ann. Ecole Norm. Sup., vol. 17, 21-86, 1990.
5. Einshtein Albert. Zum gegebwärtigen stad des strahlungs problems, Band 10, selte,Siens auch. 1909. 185-193.
6. Wiener Norbert. htt://www. britannica. com. Ebchecked/topic/ 643306/Norbert. Wiener.
7. Самуэльсон П. Экономика. Пер. с англ. М.: НПО Алгол, ВНИИСИ, 1992.
8. Beck Matthias. htt://math. sfsu. edu/beck/301. html.
9. Scholes Myron, Black, Fisher. The pricing of options and corporate Liabilities. // Journal of political Economu. 81(3). 1971. pp. 637-654.
10. Merton R. Continuous – time finance. Cambridge. Ma: Blackwell, 1993.
11. Cox F. On a class of interpolation functiond for a system of grading // Journal of Experimental Education. N 15. 1947. pp. 331-341.
12. Rose P. Commercial bank management. Second edition. IRWIN, Boston, 1993.
13. Rubinstein M. Exotic options. Finance working paper. December, Inst. of Business and Economic Research University of California, Berkley, No 220, 1991.
14. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. т. 1. Факты, модели. т. 2. «Фазис». Москва, 1998.
15. Ширяев А.Н.. Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. I. Дискретное время. Теория вероятности и ее применение. т. 39. в. 1, 23-79, 1994.
16. Chitiachvili R., Mania M. Stochastic line inregrals with respect to local matingales and semimantigales. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 120(1999), 1-16.
17. მანია გვანჯი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თსუ. თბილისი. 1976.
18. დოჭვირი ბ. ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონი. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. თბილისი. 2005. – 133 გვ.
19. გაგნიძე ა. საფინანსო ანალიზის მათემატიკური საწყისები. „უნივერსიტეტი“, თბილისი, 2002.
20. როდე ე. ბანკები, ბირჟები და სავალუტო ოპერაციები კაპიტალისტურ ქვეყნებში. „სარანგი“, ქუთაისი, 1993.
21. ვეკუა თ., ქირთბაია მ., ქირია ვ. ფინანსური პრაქტიკის რიცხვითი მოდელები. „ულტრა დიზაინი“. თბილისი. 2008. – 198 გვ.
22. ინგოროყვა ა., ცაავა გ. ფინანსური მენეჯმენტი. თეორია, მეთოდები და პრაქტიკა. ტომი I. გამომცემლობა „გრაალი“. თბილისი. 2011. – 469 გვ.

23. ინგოროყვა ა., ცაავა გ. ფინანსური მენეჯმენტი. თეორია, მეთოდები და პრაქტიკა. ტომი II. გამომცემლობა „გრაალი“. თბილისი. 2011. – 701 გვ.
24. ორჯონიკიძე ნ., ყიფიანი ლ., ბაგდასარიანი ვ. ბიზნესის საფუძვლები. თბილისი. სტუ, 2007. 206 გვ.
25. ორჯონიკიძე ნ., ყიფიანი ლ., ბაგდასარიანი ვ. მცირე ბიზნესი. თბილისი. სტუ, 2007. 152 გვ.
26. Мельников А. Финансовые рынки. ТВП, Москва, 1997.
27. Уотшем Т., Паррамоу К. Количественные методы в финансах «Юнити». Москва, 1998.
28. Abuladze T., Danelia A., Dochviri B., Shashiashvili M. The American bookbuck call oprion. // Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. 165. N 1. 2002.
29. Abuladze T., Dochviri B. On the pricing of the European option. Bull. Georg. Acad. Sci. Vol. 169. N 1. 2004. p. 13-15.
30. Danelia A., Dochviri B., Shashiashvili M. Stochastic variational inequalities and optimal stopping, stochastics and stochastics reports, Vol. 75. N 6. 2003. pp. 407-423.
31. Лаврушина Л.Е., Молчанова Л.А. Модели финансовой математики. Изд-во Дальневосточного университета. Владивосток. 2006. – 35 с.
32. Агапов С.Е., Кудрявцев О.Е. Финансовая математика. Дискретные модели. Изд-во Ростовский Государственный университет. Ростов-на-Дону. 2004. – 43 с.
33. ყიფიანი ლ. საბაზრო ეკონომიკა და მისი სოციალური საკითხები // საქართველოს საავტომობილო-საგზაო ინსტიტუტის შრომები № 2. თბილისი. 2005. გვ. 221-224.
34. Кикнадзе Н., Кипиани Л. Методы и задачи совершенствования организационных структур системы управления производственно-экономичкскими объектами // Труды международная научно-техническая конференция Грузинского автомобильно-дорожного института. № 2. Тбилиси. 2005. с. 229-233.
35. Babilua Petre, Kipiani Lia. On one problem of furopean option pricing // Georgian International journal of science and Technology. Tom 3. N 2 New York. 2011. pp. 237-248.
36. ყიფიანი დ., ყიფიანი ლ. ტესებრი კვეთის წიბოებით გამაგრებული გარსების საანგარიშო ალგორითმი // რესპუბლიკური ღია სამეცნიერო კონფერენციის „მშენებლობა და ოცდამეერთე საუკუნე“ მოხსენებათა თეზისები. თბილისი. 2005. – გვ. 4.
37. ქურდაძე მ., ყიფიანი ლ., ერემეიშვილი ნ., ნარეკლიშვილი თ. ფუნქციურად გადაწყობადი ოპტოელექტრონული სტრუქტურების დახასიათება და ანალიზი საიმედოობის თეორიის ძირითადი ცნებებითა და განმარტებები // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 1-3. თბილისი. 2006. გვ. 16-22.
38. ქურდაძე მ., ერემეიშვილი ნ., ხუციშვილი ლ., ყიფიანი ლ. ფუნქციურად გადაწყობილი ოპტოელექტრონული სტრუქტურების სპეციფიკური თავისებურებები და მათი საიმედოობის გათვლის ანალიზის სირთულეები // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 4-6. თბილისი. 2006. გვ. 9-12.

39. ქურდაძე მ., ყიფიანი ლ., ერემეიშვილი ნ. ოპტოელექტრონული სტრუქტურების ფუნქციური შესაძლებლობების ანალიზი და მათი გამოყენების აქტუალურობა გამოთვლითი ტექნიკისა და მართვის სისტემების მოწყობილობებში // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 7-9. თბილისი. 2006. გვ. 6-9.
40. ბაბუციძე ჰ., ყიფიანი ლ. შენობა-ნაგებობათა სადიაგნოსტიკო კომპიუტერული სისტემები // საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ყოველთვიური სამეცნიერო-რეფერირებული ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“ № 10-12. თბილისი. 2006. გვ. 15-17.
41. Долидзе К.Г., Кипиани Л.Г., Тодуа М.Н. Особенности программирования при численной реализации алгоритма расчета нелинейно деформируемых оболочек с изломами // Грузинский автомобильно-дорожный институт. Труды № 3. Тбилиси. 2007. – с. 188-190.
42. ქურდაძე მ., კაიშაური თ., ყიფიანი ლ., სულაშვილი გ. გადაწყობის ალგორითმისა და საიმედოობის კონტროლის ალგორითმის დამუშავება ფუნქციონალურად – გადაწყობადი ოპტოელექტრონული სტრუქტურების ფუნქციონირების რეჟიმში // საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციის „თანამედროვე ტექნოლოგიები და მასალები“, მოხსენებათა თეზისები. ქუთაისი. 2008. გვ. 215-216.
43. ყიფიანი გ., ყიფიანი დ., ყიფიანი ლ. ფენოვან სისტემებში სამკუთხა სასრული ელემენტის (სე) სიხისტის მატრიცის შედგენა განივი ძვრის გათვალისწინებით // ინტელექტუალი № 8. თბილისი. 2009. გვ. 161-164.
44. კაიშაური თ., ყიფიანი ლ., ხართიშვილი ი. კონუსური გარსის ფიზიკურად არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანის გადაწყვეტის ალგორითმი // საერთაშორისო-სამეცნიერო ტექნიკური კონფერენციის „სამშენებლო მექანიკის პრობლემების“ შრომების კრებული. (ნომერი ეძღვნება სტუ-ს სამშენებლო მექანიკისა და სიესმომედეგომის კათედრის 50 წლის იუბილეს). თბილისი. სტუ. 2010. გვ. 259-253.
45. ყიფიანი ლ. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ამოცანა და პროგრამა // ინტელექტი № 2, თბილისი. 2012.
46. ყიფიანი ლ. ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანის გათვლა და პროგრამა // ინტელექტუალი № 3, თბილისი. 2012.