

# საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ელგუჯა კურცხალია

„მაკროსისტემების მდგრადობა, სტრუქტურული ცვლილებები და ქაოსი  
ურბანული სისტემების მაგალითზე“

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად  
სადოქტორო პროგრამა „ინფორმატიკა“ შიფრი 0401

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
თბილისი, 0175, საქართველო  
2016 წელი

საავტორო უფლება © 2016 წელი, ელგუჯა კურცხალია  
თბილისი  
2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში  
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი  
ინტერდისციპლინური ინფორმატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. მერაბ ახოზაძე

რეცენზენტები: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

დაცვა შედგება \_\_\_\_\_ წლის "\_\_\_\_\_" \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ საათზე  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის  
სხდომაზე, კორპუსი \_\_\_\_\_, აუდიტორია \_\_\_\_\_  
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,  
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ელგუჯა კურცხალიას მიერ შესრულებულ სადოქტორო ნაშრომს დასახელებით: „მაკროსისტემების მდგრადობა, სტრუქტურული ცვლილებები და ქაოსი ურბანული სისტემების მაგალითზე“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფ. მერაბ ახოზაძე

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
2016

ავტორი: ელგუჯა კურცხალია

დასახელება: „მაკროსისტემების მდგრადობა, სტრუქტურული ცვლილებები და ქაოსი ურბანული სისტემების მაგალითზე“

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების ნაშრომის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

---

#### ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა ის მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

## რეზიუმე

ახლა მეცნიერებაში შეიმჩნევა მრავალი განსხვავებული სამეცნიერო დისციპლინების ინტეგრირება, რათა მთელი რიგი მოვლენები, თუ ობიექტები შესწავლილნი იქნან როგორც ერთიანი სისტემები, რადგანაც ყველაფერი ურთიერთკავშირში და ურთიერთდამოკიდებულებაშია, ამასთანავე, ყველაფერი კონფლიქტურია. მდგრადი სტრუქტურების შექმნა კი შესაძლებელია, მხოლოდ ურთიერთდაპირისპირებული ელემენტების ერთიანობით, მათი ერთობლივი ქმედებით.

აქედან გამომდინარე ფუნდამენტური, თუ პრაქტიკული პრობლემის გადაჭრისას, გადაწყვეტილების მიღებისას, აუცილებელია ვიცოდეთ განსახილველი მოვლენის თუ ობიექტის მათემატიკური მოდელი, მითუმეტეს, როდესაც საქმე გვაქვს ისეთ სიტუაციასთან, როდესაც საკვლევი სისტემა, როგორც ერთიანი, მიეკუთვნება დეტერმინირებულ სისტემათა კლასს, მაშინ როცა მისი შემადგენელი ნაწილების ქცევა შემთხვევით ხასიათს ატარებს. ასეთ სისტემებს მაკროსისტემას ვუწოდებთ.

ურბანული სისტემის მოდელირებისას, მისი სტრუქტურული და სისტემური ანალიზის დროს, საქმე გვაქვს ერთდროულად მიმდინარე პროცესებთან, როგორც სტოქასტიკურ (ურბანული სისტემის შემადგენელ თითოეული ელემენტისათვის დამახასიათებელი) ასევე, აგრეგირებულ, დეტერმინირებულ (რომელიც შედეგია სტოქასტიკური ქმედებების ერთობლიობისა) პროცესებთან.

ურბანული სისტემების ფუნქციონირებისა და განვითარების სირთულე, მისი მრავალფაქტორიანობა, თხოულობს მთელი რიგი კონკრეტული პრობლემების ერთდროულ გადაწყვეტას ისეთი განსხვავებული სფეროებიდან, როგორცაა ეკონომიკა, დემოგრაფია, სოციალური განვითარება, გარემოს დაცვა და სხვა. ამ დროს გათვალისწინებული უნდა იქნას სხვადასხვა კატეგორიებით მოაზროვნე და სხვადასხვა „ენაზე“ მოლაპარაკე მრავალი მიმართულების სპეციალისტების (სოციოლოგების, ეკოლოგების, იურისტების, დემოგრაფების, ეკონომისტების და სხვა) რეკომენდაციები, რჩევები, აზრები და შენიშვნები. სხვადასხვა „ენაზე“ მოაზროვნე სპეციალისტების ერთ ენაზე დაყვანა კი შესაძლებელია მხოლოდ მათემატიკის საფუძველზე.

ჩვენი მიდგომა, ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესების მოდელირებისა ეყრდნობა მაკროსისტემურ მიდგომას, კერძოდ ენტროპიის მაქსიმიზაციის პრინციპს და ალგებრული ტოპოლოგიის  $Q$ -ანალიზის მეთოდებს.

მაკროსისტემებში მიკრო დონეზე ელემენტების შემთხვევითი ქცევა ტრანსფორმირდება მდორედ მიმდინარე პროცესებად, რომელსაც მაკრომდგომარეობა ჰქვია. პრინციპიალური თვისება მაკროსისტემებისა მდგომარეობს იმაში, რომ რელაქსაციის დრო მიკრო და მაკრო დონეებზე მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

მაკროსისტემების ამ თვისებამ საშუალება მოგვცა გამოგვეყენებინა ლოკალური წონასწორობის პრინციპი, რომელსაც ადგილი აქვს თერმოდინამიკაში. ეს საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ურბანული სისტემების სივრცულ-დროითი ევოლუცია, როგორც ლოკალურ-სტაციონალურ მდგომარეობათა თანმიმდევრობა, სადაც, ყოველი მდგომარეობა ხასიათდება პირობითი ენტროპიის მაქსიმუმით.

მაკროსისტემები ზოგადად წარმოადგენენ არაწრფივ სისტემებს, სადაც პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობების დროს სისტემაში ჩნდება ბიფურკაციის წერტილები და იწყება ქაოსი.

ქაოსის თეორიის თანახმად, ჩვენს მიერ დაშვებულ პატარა შეცდომას, შეიძლება შემდეგში მოყვეს გამოუსწორებელი შედეგები. აქედან გამომდინარე, მდგრადი განვითარების პრინციპი გვაგადაღებულებს შევქმნათ ისეთი ექსპერტული სისტემები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ შევაფასოთ დაპროექტების დროს მიღებული ყოველი ჩვენი გადაწყვეტილება, რათა დაშვებული არ იქნას ისეთი შეცდომები, რომელიც შემდგომ კატასტროფამდე მიგვიყვანს.

ურბანული სისტემის გეგმარებითი პროცესის ორგანიზაციის აშკარა ჩამორჩენის ფონზე, სატრანსპორტო პრობლემების გადაჭრა დღითიდღე მეტ აქტუალობას იძენს. ისეთი საკითხების შესწავლა როგორებიცაა, სატრანსპორტო ქსელის ოპტიმალური ტოპოლოგია, კომპლექსური, ინტელექტუალური სატრანსპორტო სისტემის შექმნა და სხვა შეუძლებელია მათემატიკური აპარატის, მეთოდების და „ფიზიკური კონცეფციების“ გამოყენების გარეშე.

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული რთული სისტემების სტრუქტურული ანალიზისა და მართვის ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდები და მიღებული შედეგები, საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ არსებული სატრანსპორტო ნაკადის ოპტიმალური მართვა და მივაწოდოთ რეკომენდაციები ახალი სატრანსპორტო ქსელის დაგეგმარებისა და ძველის რეკონსტრუქციისათვის.

ჩვენს მიერ შექმნილმა ურბანული სისტემის იმიტაციურმა მოდელმა, მართვის მეთოდებმა და ალგორითმებმა საშუალება მოგვცა შეგვექმნა ურბანული სისტემის ფუნქციურ-სივრცული განვითარების შეფასების ექსპერტული სისტემის მაკეტი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს, არა მარტო ოპერატიულად შევაფასოთ ქალაქში მიმდინარე პროცესები, არამედ განვსაზღვროთ ქალაქის სტრატეგიული მართვის პოლიტიკა და დროულად მოვახდინოთ რეაგირება წარმოქმნილ სიტუაციაზე, მიზანდასახულად, სისტემური მიდგომის საფუძველზე, ჩვენს მიერ არჩეული კრიტერიუმის მიხედვით, პროგნოზირება გავუკეთოთ ურბანული სისტემის მახასიათებელ მაკროპარამეტრებს და ვმართოთ სოციალური, ეკონომიკური, დემოგრაფიული და სხვა პროცესები.

## Abstract

Nowadays many different scientific disciplines are observed to be integrated to study a number of events and the objects as a single system since they are all interconnected and interdependent and conflicting as well. Sustainable structures may be developed by the unity of opposing elements and their joint action.

Therefore, for the fundamental or practical problem solving and decision-making process require knowledge of mathematical model related to the considered phenomenon or the object, especially when dealing with such a situation, when research system as a whole system belongs to the determined system class while the behavior of its constructs are of sporadic character. These systems are called as macrosystems.

Within urban system modeling, its structural and systematic analysis we are dealing with the simultaneously existing processes including stochastic (typical for each element of urban system) as well as aggregated, determined processes (resulted from the stochastic actions combination).

The complexity of urban system functioning and its development, its multifunctionality require simultaneous solution of various areas, such as economics, demographics, social development, environmental protection, etc. Within this process should be taken into account the recommendations of experts and specialists of different fields (such as sociologists, ecologists, lawyers, demographers, economists, etc.), their considerations and observations. Finally these various conclusions may be considered on the mathematical basis.

Our approach of the modeling of urban system processes is based on microsystem approach, in particular on the methods of entropy maximization principle and algebraic topology analysis.

Casual behavior of element on micro level in macrosystems is transformed as flowing processes called as macrostate and its specific feature lies in the fact that the relaxation time of the micro and macro levels significantly differs.

This feature of microsystems enables us to use thermodynamics local equilibrium principle thus considering the spatial-time evolution of the system as a sequence of local-stationary states where each state is characterized by conditional maximum entropy.

Generally macrosystems represent nonlinear systems, where bifurcation points are occurred at the certain values of parameters and the chaos begins.

According to the chaos theory, a small error in the former will produce an enormous error in the latter. Therefore due to the sustainable development principle we should develop expert systems enabling evaluation of each our decision made during the design process to avoid further disastrous results.

Solving of transportation problem is quite actual in light of existing urban system planning process delays. Study of optimal topology of transportation network, development of complex, intelligent transportation systems and etc. are impossible without appropriate mathematical apparatus, methods and “physical concepts”.

Proposed structural analysis of complex systems and algebraic topological methods in management together with obtained results enable to maintain optimal control for traffic flow and to provide relevant recommendations to design new transportation network and update old one.

Developed urban system simulation models, control methods and algorithms made possible to create expert system model for assessment of urban system functional and spatial development thus enabling not only to promptly evaluate ongoing processes in the city, but also to define the strategic management policy and to timely respond to emerging situations. Herewith on the basis of systematic approach and due to selected criteria this model will provide prediction of urban system’s characteristic parameters and manage the social, economic, demographic and other processes.



# შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი.....	14
<b>თავი 1. მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირების ზოგადი პრინციპები</b>	
1.1 ლიტერატურის მიმოხილვა.....	18
1.2 ურბანული სისტემა, როგორც მაკროსისტემა.....	32
1.3 მასობრივი მომსახურების პროცესების მათემატიკური მოდელირებისათვის.....	37
პირველი თავის შედეგები.....	42
<b>თავი 2. ურბანულ სისტემაში მიმდინარე სივრცული ეკონომიკური და დემოგრაფიული პროცესების მათემატიკური მოდელირება ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე და მართვა.</b>	
2.1 ა) სივრცული ეკონომიკური პროცესების ანალიზი საინვესტიციო პოლიტიკის განსაზღვრისათვის.....	43
2.1 ბ) ურბანული სისტემის დემორესურსების დინამიკის მოდელი მოსახლეობის ჯგუფების ინტერესების გათვალისწინებით.....	45
2.2 არაუარყოფითი წონასწორობის მდგომარეობების პოვნა. მდგრადობის არეები.....	53
2.3 ბიფურკაციის წირები.....	82
2.4 ბიფურკაციები და ქაოსი არაწრფივ სისტემებში.....	90
2.5 რეკონსტრუქციის გეგმის განხორციელებისას მოსალოდნელი რისკების შეფასება.....	97
2.4 საწყისი მონაცემების (ინფორმაციის) ანალიზი ენტროპიული მეთოდით.....	102
მეორე თავის შედეგები.....	105
<b>თავი 3. მაკროსისტემების სტრუქტურული ანალიზი <math>Q</math> ანალიზის მეთოდის გამოყენებით</b>	
3.1 $Q$ ანალიზის მეთოდი.....	107
3.2 სისტემის სტრუქტურის გაუმჯობესების ოპტიმალური გზის პოვნა $Q$ ანალიზის მეთოდის გამოყენებით.....	109
3.3 $Q$ ანალიზის მეთოდის პრაქტიკული გამოყენების მაგალითები.....	115

3.4 ექსპერტული სისტემის აგების პრინციპები და ალგორითმი საინვესტიციო პოლიტიკის შემუშავებისათვის.....	129
3.5 პროგრამა, სისტემის სტრუქტურის ვექტორისკოორდინატებისა და ექსცენტრისიტეტის გამოსაანგარიშებლად.....	137
მესამე თავის შედეგები.....	151
ძირითადი დასკვნები.....	152
ლიტერატურა.....	154
დანართი.....	157

## ცხრილების ნუსხა

ცხრილი 1.....	157
ცხრილი 2.....	157
ცხრილი 3.....	158
ცხრილი 4.....	158
ცხრილი 5.....	159
ცხრილი 6.....	160
ცხრილი 7.....	161

## ნახაზების ნუსხა

ნახაზი 1 .....	24
ნახაზი 2 .....	34
ნახაზი 3 .....	35
ნახაზი 4 .....	38
ნახაზი 5 .....	52
ნახაზი 6 .....	53
ნახაზი 7 .....	56
ნახაზი 8 .....	58
ნახაზი 9 .....	60
ნახაზი 10 .....	64
ნახაზი 11 .....	67
ნახაზი 12 .....	67
ნახაზი 13 .....	69
ნახაზი 14 .....	70
ნახაზი 15 .....	72
ნახაზი 16 .....	72
ნახაზი 17 .....	73
ნახაზი 18 .....	75
ნახაზი 19 .....	75
ნახაზი 20 .....	76
ნახაზი 21 .....	77
ნახაზი 22 .....	79
ნახაზი 23 .....	80
ნახაზი 24 .....	80

ნახაზი 25 .....	81
ნახაზი 26 .....	93
ნახაზი 27 .....	95
ნახაზი 28 .....	95
ნახაზი 29 .....	98
ნახაზი 30 .....	100
ნახაზი 31 .....	101
ნახაზი 32 .....	117
ნახაზი 33 .....	118
ნახაზი 34 .....	119
ნახაზი 35 .....	129

## შესავალი

ახლა მეცნიერებაში შეიმჩნევა მრავალი განსხვავებული სამეცნიერო დისციპლინების ინტეგრირება, რათა მთელი რიგი მოვლენები, თუ ობიექტები შესწავლილნი იქნან როგორც ერთიანი სისტემები, რადგანაც, ყველაფერი ურთიერთკავშირში და ურთიერთდამოკიდებულებაშია, ამასთანავე, ყველაფერი კონფლიქტურია. მდგრადი სტრუქტურების შექმნა კი შესაძლებელია, მხოლოდ ურთიერთდაპირისპირებული ელემენტების ერთიანობით, მათი ერთობლივი ქმედებით.

აქედან გამომდინარე ფუნდამენტური, თუ პრაქტიკული პრობლემის გადაჭრისას, გადაწყვეტილების მიღებისას, აუცილებელია ვიცოდეთ განსახილველი მოვლენის თუ ობიექტის მათემატიკური მოდელი, მითუმეტეს, როდესაც საქმე გვაქვს ისეთ სიტუაციასთან, როდესაც სისტემა, როგორც ერთიანი ავლენს სხვა ბუნებასა და თვისებებს, ვიდრე მისი შემადგენელი ნაწილები. ხშირად საკვლევი სისტემა, როგორც ერთიანი, მიეკუთვნება დეტერმინირებულ სისტემათა კლასს, მაშინ როცა მისი შემადგენელი ნაწილების ქცევა შემთხვევით ხასიათს ატარებს. ასეთ სისტემებს მაკროსისტემას ვუწოდებთ [1]. მაგალითად, დახურულ ჭურჭელში მოთავსებული გაზის მოლეკულები ქაოსურად მოძრაობენ, მაგრამ შედეგად გაზს აქვს განსაზღვრული წნევა, მოცულობა და ტემპერატურა. ანალოგიურად, ურბანულ სისტემაში ცალკეული ინდივიდის გადაადგილება შეიძლება განხილული იქნას როგორც შემთხვევითი პროცესი, ხოლო შედეგი – მომსახურების ცენტრების განლაგება, სატრანსპორტო კომუნიკაციები, ტრანსპორტის ნაკადი და სხვა წარმოვადგინოთ დეტერმინირებული პარამეტრების სახით.

ურბანული სისტემის მოდელირებისას, მისი სტრუქტურული და სისტემური ანალიზის დროს, საქმე გვაქვს ერთდროულად მიმდინარე პროცესებთან, როგორც სტოქასტიკურ (ურბანული სისტემის შემადგენელ თითოეული ელემენტისათვის დამახასიათებელი) ასევე, აგრეგირებულ, დეტერმინირებულ (რომელიც შედეგია სტოქასტიკური ქმედებების ერთობლიობისა) პროცესებთან.

აქედან გამომდინარე ურბანული სისტემა მიეკუთვნება სტოქასტიკურ-დეტერმინირებულ სისტემათა კლასს და მისი შესწავლა უნდა მოხდეს შესაბამისი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით.

ურბანული სისტემების ფუნქციონირებისა და განვითარების სირთულე, მისი მრავალფაქტორიანობა, თხოულობს მთელი რიგი კონკრეტული პრობლემების ერთდროულ გადაწყვეტას ისეთი განსხვავებული სფეროებიდან, როგორცაა ეკონომიკა, დემოგრაფია, სოციალური განვითარება, გარემოს დაცვა და სხვა. ამ დროს გათვალისწინებული უნდა იქნას სხვადასხვა კატეგორიებით მოაზროვნე და სხვადასხვა „ენაზე“ მოლაპარაკე მრავალი მიმართულების სპეციალისტების (სოციოლოგების, ეკოლოგების, იურისტების, დემოგრაფების, ეკონომისტების და სხვა) რეკომენდაციები, რჩევები, აზრები და შენიშვნები. სხვადასხვა „ენაზე“ მოაზროვნე სპეციალისტების ერთ ენაზე დაყვანა კი შესაძლებელია მხოლოდ მათემატიკის საფუძველზე.

ჩვენი მიდგომა, ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესების მოდელირების, ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების შეფასებისა და მართვისათვის, ეყრდნობა მაკროსისტემურ მიდგომას [1], კერძოდ ენტროპიის მაქსიმოზაციის პრინციპს და ალგებრული ტოპოლოგიის  $Q$ -ანალიზის მეთოდებს [2-4].

მაკროსისტემებში მიკრო დონეზე ელემენტების შემთხვევითი ქცევა ტრანსფორმირდება მდორედ მიმდინარე პროცესებად, რომელსაც მაკრომდგომარეობა ჰქვია. პრინციპიალური თვისება მაკროსისტემებისა მდგომარეობს იმაში, რომ რელაქსაციის დრო მიკრო და მაკრო დონეებზე მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

მაკროსისტემების ამ თვისებამ საშუალება მოგვცა გამოგვეყენებინა ლოკალური წონასწორობის პრინციპი, რომელსაც ადგილი აქვს თერმოდინამიკაში. ეს საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ურბანული სისტემების სივრცულ-დროითი ევოლუცია, როგორც ლოკალურ-სტაციონალურ მდგომარეობათა თანმიმდევრობა, სადაც, ყოველი მდგომარეობა ხასიათდება პირობითი ენტროპიის მაქსიმუმით.

ამავდროულად, ურბანული სისტემის, როგორც რთული სისტემის მდგომარეობა არ უნდა შევაფასოთ მხოლოდ ერთი კრიტერიუმით,

რადგანაც სისტემის მდგომარეობის მახასიათებელი პარამეტრის (ან პარამეტრების) გაუმჯობესებას ერთი რომელიღაც კრიტერიუმით, ხშირად მივეყვართ მის გაუარესებამდე სხვა კრიტერიუმის მიხედვით. აუცილებელია განზოგადოებული კრიტერიუმის ფორმირება, რომელიც მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია მაკროსისტემის დაგეგმარების კონკრეტულ ამოცანაზე. მრავალფაქტორიანი კრიტერიუმის მიხედვით გადაწყვეტილების მიღება კი შეუძლებელია თანამედროვე მართვის თეორიისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების გამოყენების გარეშე [5].

მეტად მნიშვნელოვანი ფაქტორია, ის, რომ მაკროსისტემები ზოგადად წარმოადგენენ არაწრფივ სისტემებს, სადაც პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობების დროს სისტემაში ჩნდება ბიფურკაციის წერტილები და იწყება ქაოსი.

ქაოსის თეორიის თანახმად, ჩვენს მიერ დაშვებულ პატარა შეცდომას, შეიძლება შემდეგში მოყვეს გამოუსწორებელი შედეგები. აქედან გამომდინარე, მდგრადი განვითარების პრინციპი გვაავალდებულებს შევქმნათ ისეთი ექსპერტული სისტემები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ შევაფასოთ დაპროექტების დროს მიღებული ყოველი ჩვენი გადაწყვეტილება, რათა დაშვებული არ იქნას ისეთი შეცდომები, რომელიც შემდგომ კატასტროფამდე მიგვიყვანს, მნიშვნელოვანია დადგენილი იქნას ურბანული სისტემის განვითარების მდგრადობის არეები და ბიფურკაციის წერტილები [6].

მაკროსისტემის განვითარების, რეკონსტრუქციის დროს იცვლება მაკროსისტემის სტრუქტურა. ამ დროს მნიშვნელოვანია არსებული რესურსების პირობებში მოძებნილი იქნას მაკროსისტემის სტრუქტურის ცვლილების ოპტიმალური გზა.

ურბანული სისტემის ფორმირება, ფუნქციონალურ-სივრცული სტრუქტურის ჩამოყალიბება და განვითარება მნიშვნელოვანწილად განისაზღვრება მოსახლეობის ინტერესებით და ქმედებით. ჩვენს მიერ შექმნილი მათემატიკური მოდელიც ეფუძნება და გამომდინარეობს მოსახლეობის ინტერესებისა და ქცევისაგან. მოდელს საფუძვლად უდევს ის ჰიპოტეზა, რომ თითოეული მოქალაქის ესა თუ ის არჩევანი არის დამოუკიდებელი, შემთხვევითი. მიუხედავად იმისა, რომ



თითოეული მოქალაქის ქცევა არის შემთხვევითი, ზოგადად განსაზღვრულია მათი ინტერესები და მიდრეკილებები. მაგალითად, სოციოლოგიური გამოკითხვის შედეგად ყოველთვის გვაქვს ინფორმაცია მოსახლეობის თითოეული ფენის ინტერესების თაობაზე.

ურბანული სისტემის გეგმარებითი პროცესის ორგანიზაციის აშკარა ჩამორჩენის ფონზე, სატრანსპორტო პრობლემების გადაჭრა დღითიდღე მეტ აქტუალობას იძენს. ისეთი საკითხების შესწავლა როგორებიცაა, სატრანსპორტო ქსელის ოპტიმალური ტოპოლოგია, კომპლექსური, ინტელექტუალური სატრანსპორტო სისტემის შექმნა და სხვა შეუძლებელია მათემატიკური აპარატის, მეთოდების და „ფიზიკური კონცეფციების“ გამოყენების გარეშე.

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული რთული სისტემების სტრუქტურული ანალიზისა და მართვის აღგებრული ტოპოლოგიის მეთოდები და მიღებული შედეგები, საშუალებას გვაძლევენ განვახორციელოთ სატრანსპორტო ნაკადის ოპტიმალური მართვა არსებული სატრანსპორტო ქსელის რეკონსტრუქციის გარეშე და მივაწოდოთ რეკომენდაციები ახალი სატრანსპორტო ქსელის დაგეგმარებისა და ძველის რეკონსტრუქციისათვის.

ჩვენს მიერ შექმნილმა ურბანული სისტემის იმიტაციურმა მოდელმა, მართვის მეთოდებმა და აღგორითმებმა საშუალება მოგვცა შეგვექმნა ურბანული სისტემის ფუნქციურ-სივრცული განვითარების შეფასების ექსპერტული სისტემის მაკეტი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს, არა მარტო ოპერატიულად შევაფასოთ ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესები, არამედ განვსაზღვროთ ურბანულ სისტემის სტრატეგიული მართვის პოლიტიკა და დროულად მოვახდინოთ რეაგირება წარმოქმნილ სიტუაციაზე, მიზანდასახულად, სისტემური მიდგომის საფუძველზე, ჩვენს მიერ არჩეული კრიტერიუმის მიხედვით, პროგნოზირება გავუკეთოთ ურბანული სისტემის მახასიათებელ მაკროპარამეტრებს და ვმართოთ სოციალური, ეკონომიკური, დემოგრაფიული და სხვა პროცესები.

## თავი 1

# მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირების ზოგადი პრინციპები

### 1.1 ლიტერატურის მიმოხილვა

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, ჩვენი მიდგომა, ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესების მოდელირების, ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების შეფასებისა და მართვისათვის, ძირითადად ეყრდნობა მაკროსისტემურ მიდგომას, კერძოდ ენტროპიის მაქსიმოზაციის პრინციპს და ალგებრული ტოპოლოგიის  $Q$ -ანალიზის მეთოდს. ენტროპიის მაქსიმოზაციის პრინციპი პირველად გამოყენებული იქნა ვილსონის მიერ ქალაქის სატრანსპორტო ნაკადის მოდელირებისათვის [1]. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მაკროსისტემების მოდელირებისა და მართვის თეორიული ბაზის ფორმირებას ახლა ეყრდნობა საფუძველი. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია მოსკოვის სისტემური კვლევის ინსტიტუტის მეცნიერთა შრომები, რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრ-კორესპოდენტის ი. ს. პოპკოვის ხელმძღვანელობით. მათ მიერ ძირითადად ჩამოყალიბებული იქნა მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირების პრინციპები გარკვეული შეზღუდვების დროს და მიღებული შედეგები გავრცობილი იქნა ურბანული სისტემების მათემატიკური მოდელირებისა და მართვისათვის პრობლემების გადასაჭრელად [7,8]. ამ მეთოდის ძირითადი ნაკლი იყო ის, რომ მოდელში არ მონაწილეობდნენ პარამეტრები, რომლებიც განსაზღვრავდნენ სისტემაში მიმდინარე ყველა დინამიკური პროცესების მიმდინარეობას. ჩვენს მიერ შემოტანილი იქნა მოსახლეობის ინტერესების დაკმაყოფილების პარამეტრი, რომელმაც აღნიშნული ხარვეზი გამოასწორა. მიღებული შედეგი მოხსენებული იქნა მოსკოვის სისტემური კვლევის ინსტიტუტის სემინარზე და გამოქვეყნდა სტატიის სახით ამავე ინსტიტუტის შრომათა კრებულში [9].

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ აღნიშნული მოდელის კვლევა არ მიმდინარეობდა კატასტროფებისა და ქაოსის თეორიის საფუძველზე. ჩვენს მიერ შემოტანილი მოსახლეობის დინამიკის პარამეტრებმა

საშუალება მოგვცა შეგვექმნა გამოყენებითი ალგორითმები ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების შეფასებისა და მართვისათვის და ქაოსის თეორიის საფუძველზე შეგვესწავლა ურბანული სისტემის რაოდენობრივ-თვისობრივი თანაფარდობის განსაკუთრებული წერტილები.

მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირების მეთოდები დაედო საფუძვლად საქართველოს პოლიტექნიკური უნივერსიტეტის არქიტექტურის ფაკულტეტზე შექმნილ იმიტაციური მოდელირებისა და მართვის ლაბორატორიის კვლევების მიმართულებას. კერძოდ, ლაბორატორიის ძირითადი თემატიკა იყო ურბანული სისტემების მათემატიკური მოდელირებისა და მართვის საკისები. აღნიშნულ ლაბორატორიაში შექმნილი კვლევები გამოქვეყნდა სტატიებისა და მონოგრაფიები სახით [6], [10-15]. ამავე ლაბორატორიაში შესრულდა ქ. თბილისის მერიისათვის ქალაქგეგმარებითი პროექტების შეფასების სამუშაოები.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი მეცნიერთა შრომები და კვლევები ძირითადად ეყრდნობოდა სივრცე-დროითი არესათვის დამახასიათებელი უწყვეტი მათემატიკის პრინციპებს (დიფერენციალური და ინტეგრალური განტოლებები). რაც, რიგ შემთხვევაში არასაკმარისი იყო მაკროსისტემაში მიმდინარე ინტელექტუალური პროცესების მოდელირებისა და მართვისათვის და მოითხოვდა ალგებრული და ტოპოლოგიური მეთოდების გამოყენებას. ჩვენ კვლევებში ორივე მიმართულება იქნა გამოყენებული: უწყვეტი და დისკრეტული - ალგებრული ტოპოლოგიისა და სიმრავლეთა მესერის თეორიები.

სიმრავლეთა მესერის თეორია, რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ, ძირითადად ეყრდნობა მეცნიერთა ჯგუფის (მაკაროვი ი.მ., ახრემი ა.ა., რახმანკულოვი ვ.ზ.) შრომებს [16]. ამ მეთოდის გამოყენებამ საშუალება მოგვცა გაგვეზარდა ურბანული სისტემების იდენტიფიკაციის სიზუსტე და პარამეტრის ძებნის სისწრაფე.

კვლევის არსებული მეთოდები არ ეხებოდა მაკროსისტემების სტრუქტურულ ანალიზს, რაც აუცილებელია ურბანული სისტემების ანალიზის და მართვისათვის, სატრანსპორტო ქსელის მოდელირებისათვის, სატრანსპორტო ნაკადის მართვისათვის.

ალგებრული ტოპოლოგიი მეთოდები, რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ, ეყრდნობა ინგლისელი მეცნიერის ეტკინის შრომებს [2-4]. მის მიერ შემოტანილი იქნა  $Q$  ანალიზის მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ მაკროსისტემების სტრუქტურის მდგრადობა მასზე მოქმედი შეშფოთებების მიმართ, კერძოდ მის მიერ შემოტანილი წინააღმდეგობის ვექტორისა და ექსცენტრისიტეტის საშუალებით. ამ იდეოლოგიაზე დაყრდნობით ჩვენს მიერ შექმნილი იქნა ალგორითმი სტრუქტურის ვექტორის გაუმჯობესების ოპტიმალური გზის ძებნისათვის, კერძოდ დადგენილი იქნა ორი აუცილებელი პირობა, რომელთა გათვალისწინებითაც შესაძლებელია მნიშვნელოვნად შევამციროთ მაკროსისტემის სტრუქტურის გაუმჯობესების ოპტიმიზაციისათვის საჭირო გამოთვლების რაოდენობა. აღნიშნული მეთოდების საფუძველზე ჩვენს მიერ შემოთავაზებული რთული სისტემების სტრუქტურული ანალიზისა და მართვის ალგებრული ტოპოლოგიის მეთოდები და მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს განვახორციელოთ სატრანსპორტო ნაკადის ოპტიმალური მართვა არსებული სატრანსპორტო ქსელის რეკონსტრუქციის გარეშე და მივაწოდოთ რეკომენდაციები ახალი სატრანსპორტო ქსელის დაგეგმარებისა და ძველის რეკონსტრუქციისათვის.

შექმნილმა ურბანული სისტემის იმიტაციურმა მოდელმა, მართვის მეთოდებმა და ალგორითმებმა საშუალება მოგვცა შეგვექმნა ურბანული სისტემის ფუნქციურ-სივრცული განვითარების შეფასების ექსპერტული სისტემის მაკეტი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს, არა მარტო ოპერატიულად შევაფასოთ ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესები, არამედ განვსაზღვროთ ურბანულ სისტემის სტრატეგიული მართვის პოლიტიკა და დროულად მოვახდინოთ რეაგირება წარმოქმნილ სიტუაციაზე, მიზანდასახულად, სისტემური მიდგომის საფუძველზე, ჩვენ მიერ არჩეული კრიტერიუმის მიხედვით, პროგნოზირება გავუკეთოთ ურბანული სისტემის მახასიათებელ მაკროპარამეტრებს და ვმართოთ სოციალური, ეკონომიკური, დემოგრაფიული და სხვა პროცესები.

**1.1 ა). მაკროსისტემების მოდელირება ფუნქციონალური  
მწკრივების საშუალებით**

მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირების (იდენტიფიკაციის) ამოცანა ზოგადად შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ  $F$  ოპერატორი, რომელიც ამყარებს კავშირს საკვლევი ობიექტზე  $x(t)$  ზემოქმედებასა და ამ ზემოქმედებაზე ობიექტის  $y(t)$  რეაქციას შორის:  $y(t) = Fx(t)$ .

განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $F$  ოპერატორი მიეკუთვნება უწყვეტ ოპერატორთა კლასს და  $\int_0^t y^2(t)dt < \infty$ . ამ შემთხვევაში  $F$  ოპერატორის წარმოდგენა შეიძლება ვოლტერას მწკრივის საშუალებით, რომელსაც სტაციონალური არაწრფივი ობიექტის შემთხვევისას აქვს შემდეგი სახე [18]:

$$Fx(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t g^{(i)}(t-t_1, \dots, t-t_i) \prod_{k=1}^i (x(t_k) dt_1 \dots dt_i) \quad (1)$$

იდენტიფიკაციის ამოცანას შეადგენს, გავიგოთ იმპულსური  $g^{(i)}(t_1, \dots, t_i)$  ფუნქციები  $[0; T]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $x(t)$  და  $y(t)$  ფუნქციების საშუალებით.

ვთქვათ,  $N$  ფიქსირებული რიცხვია და  $h = T/N$ . შემოვიტანოთ მრავალი ცვლადის მახასიათებელი ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$\Phi_{m_1 \dots m_i}(t_1, \dots, t_i) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } (t_1, \dots, t_i) \in [(m_1-1)h; m_1h] \times \dots \times [(m_i-1)h; m_ih] \\ 0, & \text{როცა } (t_1, \dots, t_i) \notin [(m_1-1)h; m_1h] \times \dots \times [(m_i-1)h; m_ih] \end{cases}$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას:

$$g_{m_1 \dots m_i}^{(i)} = \frac{1}{h^i} \int_{(m_1-1)h}^{m_1h} \dots \int_{(m_i-1)h}^{m_ih} g^{(i)}(t_1 \dots t_i) dt_1 \dots dt_i,$$

მაშინ  $g^{(i)}(t_1 \dots t_i)$  ფუნქციისათვის შეიძლება დაიწეროს შემდეგი აპროქსიმაციული ტოლობა:

$$g^{(i)}(t_1, \dots, t_i) = \sum_{m_1=1}^N \dots \sum_{m_i=1}^N g_{m_1 \dots m_i}^{(i)} \Phi_{m_1 \dots m_i}(t_1, \dots, t_i) \quad (2)$$

იდენტიფიკაციის ამოცანის ამოხსნის ალგორითმის თვალსაჩინოდ ჩვენებისათვის (1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ავიღოთ მხოლოდ ორი შესაკრები [10].

ჩანაწერის გამარტივების მიზნით ყველგან მივიღოთ, რომ  $g^{(1)}(t) \equiv g(t)$ , ხოლო  $g^{(2)}(t_1, t_2) \equiv G(t_1, t_2)$ . ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, (1) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$y(t) = \int_0^t g(t-t_1)x(t_1)dt_1 + \int_0^t \int_0^t G(t-t_1, t-t_2)x(t_1)x(t_2)dt_1dt_2 \quad (3)$$

ყოველი  $P = \overline{1, N}$ -თვის  $[(p-1)h; ph]$  შუალედი (როცა  $p=1$ , მაშინ  $[0; h]$  შუალედი) დავეყოთ  $p+1$  ტოლ ნაწილად და განვიხილოთ  $\left[ (p-1)h + \frac{q-1}{p+1}h; (p-1)h + \frac{q}{p+1}h \right]$  შუალედის მახასიათებელი ფუნქცია:

$$\varphi_{pq}(t) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } t \in \left[ t_{pq-1}; t_{pq} \right] \\ 0, & \text{როცა } t \notin \left[ t_{pq-1}; t_{pq} \right] \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{სადაც } t_{pq} = (p-1)h + \frac{q}{p+1}h.$$

ცხადია შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\Phi_m(t) = \sum_{r=1}^{m+1} \varphi_{mr}(t).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x_{pq} = \frac{p+1}{h} \int_{t_{pq-1}}^{t_{pq}} x(t)dt; \quad p = \overline{1, N} \quad q = \overline{1, p+1}; \quad (5)$$

$$y_{pq} = \frac{p+1}{h} \int_{t_{pq-1}}^{t_{pq}} y(t)dt; \quad p = \overline{1, N} \quad q = \overline{1, p+1}.$$

თუ გავითვალისწინებთ (4) და (5) ტოლობებს, მაშინ გვექნება შემდეგი აპროქსიმაციული ტოლობები:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{p+1} x_{pq} \cdot \varphi_{pq}(t); \\ y(t) &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{p+1} y_{pq} \cdot \varphi_{pq}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

ჩვენი ამოცანის გადასაწყვეტად დაგვჭირდება  $\varphi_{pq} * \varphi_{mr}$  ფუნქციათა ნახვევის პოვნა:

$$(\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t) = \int_0^t \varphi_{pq}(t-\tau) \varphi_{mr}(\tau) d\tau = \int_{t_{mr-1}}^{t_{mr}} \varphi_{pq}(t-\tau) d\tau = \int_{t-t_{mr}}^{t-t_{mr-1}} \varphi_{pq}(\tau) d\tau.$$

რადგან  $\varphi_{pq} * \varphi_{mr} = \varphi_{mr} * \varphi_{pq}$ , ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $p \leq m$  და ნახვევი ჩავწეროთ უფრო მოხერხებული ფორმით:

$$\varphi_{pq} * \varphi_{mr}(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t \leq t_{pq-1} + t_{mr-1}; \\ t - (t_{pq-1} + t_{mr-1}), & \text{როცა } t_{pq-1} + t_{mr-1} < t \leq t_{pq-1} + t_{mr}; \\ \frac{h}{m+1}, & \text{როცა } t_{pq-1} + t_{mr} < t \leq t_{pq} + t_{mr-1}; \\ t_{pq} + t_{mr} - t, & \text{როცა } t_{pq} + t_{mr-1} < t \leq t_{pq} + t_{mr}; \\ 0, & \text{როცა } t > t_{pq} + t_{mr}. \end{cases} \quad (7)$$

თუ გავითვალისწინებთ (2) და (6) ტოლობებს, მაშინ (3) გამოსახულება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} y_{pq} \cdot \varphi_{pq}(t) &= \int_0^t \sum_{m=1}^N g_m \Phi_m(t-\tau) \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} \cdot \varphi_{pq}(\tau) d\tau + \\ &+ \iint_{00}^t \sum_{m=1}^N G_{mk} \Phi_m(t-t_1) \cdot \Phi_k(t-t_2) \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} \cdot \varphi_{pq}(t_1) \times \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} \cdot \varphi_{pq}(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &\sum_{m=1}^N g_m \sum_{r=1}^{m+1} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} (\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t) + \sum_{m,k=1}^N G_{mk} \sum_{r=1}^{m+1} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} \cdot (\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t) \times \\ &\times \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} \cdot (\varphi_{pq} * \varphi_{mk})(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ავიღოთ  $t = t_{ij}$  და შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_{ij}^{(m)} = \sum_{r=1}^{m+1} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{P+1} x_{pq} \cdot (\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t_{ij}),$$

მაშინ (8) ტოლობიდან გვექნება:

$$y_{ij} = \sum_{m=1}^N g_m A_{ij}^{(m)} + \sum_{m,k=1}^N G_{mk} A_{ij}^{(m)} \cdot A_{ij}^{(k)} \quad (9)$$

ვთქვათ,  $m \geq i+1$ , მაშინ:

$$t_{pq-1} + t_{mr-1} = \left( p-1 + \frac{q-1}{p+1} + m-1 + \frac{r-1}{m+1} \right) h \geq \left( p-1 + \frac{q-1}{p+1} + i + \frac{r-1}{m+1} \right) h \geq$$

$$\geq (i-1+p)h \geq \left( i-1 + \frac{j}{i+1} \right) h = t_{ij}$$

ამიტომ (7)-ის ძალით  $(\varphi_{mr} * \varphi_{pq})(t_{ij}) = 0$ , როცა  $m \geq i+1$ , ეს კი ნიშნავს, რომ  $A_{ij}^{(m)} = 0$ , როცა  $m \geq i+1$ . ამ შენიშვნის გათვალისწინებით (9)-დან გვექნება:

$$y_{11} = g_1 \cdot A_{11}^{(1)} + G_{11} (A_{11}^{(1)})^2;$$

$$y_{12} = g_1 \cdot A_{12}^{(1)} + G_{11} (A_{12}^{(1)})^2;$$

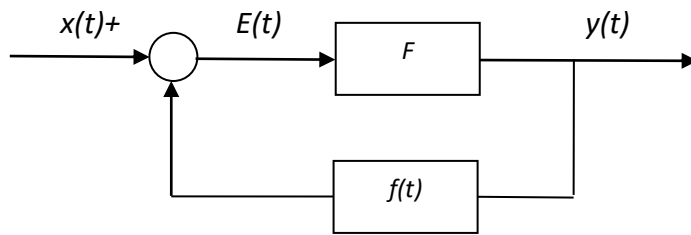
$$y_{21} = g_1 A_{21}^{(1)} + g_2 A_{21}^{(2)} + G_{11} (A_{21}^{(1)})^2 + (G_{12} + G_{21}) A_{21}^{(1)} \cdot A_{21}^{(2)} + G_{22} (A_{21}^{(2)})^2;$$

$$y_{22} = g_1 A_{22}^{(1)} + g_2 A_{22}^{(2)} + G_{11} (A_{22}^{(1)})^2 + (G_{12} + G_{21}) A_{22}^{(1)} A_{22}^{(2)} + G_{22} (A_{22}^{(2)})^2;$$

$$y_{23} = g_1 A_{23}^{(1)} + g_2 \cdot A_{23}^{(2)} + G_{11} (A_{23}^{(1)})^2 + (G_{12} + G_{21}) A_{23}^{(1)} A_{23}^{(2)} + G_{23} (A_{23}^{(2)})^2.$$

განტოლებათა პირველი წევრიდან ვპოულობთ  $g_1$ -ს და  $G_{11}$ -ს. შემდეგ სამი განტოლებიდან ვპოულობთ  $g_2$ -ს,  $G_2$ -ს და  $(G_{12} + G_{21})$ -ს, შემდეგ განვიხილავთ ოთხი განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას და ა.შ.

ახლა განვიხილოთ ჩაკეტილი მართვის სისტემა (იხ. ნახ. 1):



ნახ. 1

სადაც  $F$  ფუნქციონალი წარმოადგენს არაწრფივ, სტაციონარულ ობიექტის თვისებებს.  $x(t)$  და  $y(t)$  შესაბამისად შემავალი და გამომავალი სიგნალებია,  $f(t)$  უკუკავშირის წრედის იმპულსური გარდამავალი ფუნქციაა. განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $F$



ოპერატორი მიეკუთვნება უწყვეტ ოპერატორთა კლასს და  $\int_0^t y^2(t)dt < \infty$ .

ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს ტოლობას:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t g^{(i)}(t-t_1, \dots, t-t_i) \prod_{k=1}^i \left( x(t_k) - \int_0^{t_k} f(t_k - \tau) y(\tau) d\tau \right) dt_1 \cdots dt_i \quad (10)$$

ჩაკეტილი მართვის სისტემის შემთხვევაში განვსაზღვროთ იმპულსური  $g^{(i)}(t_1, \dots, t_i)$  ფუნქციები  $[0, T]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $f(t)$  ფუნქციების საშუალებით [11].

ზოგადობის შეუზღუდავად (10) ტოლობის მარჯვენა მხარეში ავიღოთ მხოლოდ ორი შესაკრები და ამ შემთხვევისათვის ვაჩვენოთ იდენტიფიკაციის მიღებული ალგორითმები [12].

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$E(t) \equiv x(t) - \int_0^t f(t - \tau) y(\tau) d\tau \quad (11)$$

(11) აღნიშვნის გათვალისწინებით (10) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$y(t) = \int_0^t g(t-t_1) E(t_1) dt_1 + \int_0^t \int_0^{t_1} G(t-t_1, t-t_2) E(t_1) E(t_2) dt_1 dt_2 \quad (12)$$

შემოღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{i+1}{h} \int_{t_{ij-1}}^{t_{ij}} E(t) dt = \frac{i+1}{h} \int_{t_{ij-1}}^{t_{ij}} \left( x(t) - \int_0^t f(t - \tau) y(\tau) d\tau \right) dt = \\ &= x_{ij} - \frac{i+1}{h} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{p+1} \sum_{m=1}^N \sum_{r=1}^{m+1} f_{pq} \cdot y_{mr} \int_{t_{ij-1}}^{t_{ij}} (\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t) dt, \end{aligned}$$

სადაც:

$$(\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t) = \begin{cases} 0, & \text{როცა } t \leq t_{pq-1} + t_{mr-1}; \\ t - t_{pq-1} + t_{mr-1}, & \text{როცა } t_{pq} + t_{mr-1} < t \leq t_{pq-1} + t_{mr}; \\ \frac{h}{m+1}, & \text{როცა } t_{pq-1} + t_{mr} < t \leq t_{pq} + t_{mr-1}; \\ t_{pq} + t_{mr} - t, & \text{როცა } t_{pq} + t_{mr-1} < t \leq t_{pq} + t_{mr}; \\ 0, & \text{როცა } t > t_{pq} + t_{mr}. \end{cases} \quad (13)$$

$E_{ij}$ -ს გამოსათვლელ ფორმულაში შევა ის შესაკრებები, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $p+m=i$  ან  $p+m=i+1$ .

თუ  $t = t_{ij}$  და შემოვიღებთ აღნიშვნას:  $A_{ij}^{(m)} = \sum_{r=1}^{m+1} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{p+1} E_{pq} \cdot (\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t_{ij})$ ,

მაშინ გვექნება:

$$y_{ij} = \sum_{m=1}^N g_m A_{ij}^{(m)} + \sum_{m,k=1}^N G_{mk} A_{ij}^{(m)} \cdot A_{ij}^{(k)} \quad (14)$$

ვთქვათ,  $m \geq i+1$ , მაშინ:

$$t_{pq-1} + t_{mr-1} = \left( p-1 + \frac{q-1}{p+1} + m-1 + \frac{r-1}{p+1} \right) h \geq \left( i-1 + \frac{j}{i+1} \right) h = t_{ij}.$$

ამიტომ (13) ტოლობის ძალით  $(\varphi_{pq} * \varphi_{mr})(t_{ij}) = 0$ , როცა  $m \geq i+1$ , ეს კი ნიშნავს, რომ  $A_{ij}^{(m)} = 0$ , როცა  $m \geq i+1$ . ამ შენიშვნის გათვალისწინებით (14)-დან გვექნება:

$$\begin{aligned} y_{11} &= g_1 \cdot A_{11}^{(1)} + G_{11} (A_{11}^{(1)})^2; \\ y_{12} &= g_1 \cdot A_{12}^{(1)} + G_{11} (A_{12}^{(1)})^2; \\ y_{21} &= g_1 A_{21}^{(1)} + g_2 A_{21}^{(2)} + G_{11} (A_{21}^{(1)})^2 + (G_{12} + G_{21}) A_{21}^{(1)} \cdot A_{21}^{(2)} + G_{22} (A_{21}^{(2)})^2; \\ y_{22} &= g_1 A_{22}^{(1)} + g_2 A_{22}^{(2)} + G_{11} (A_{22}^{(1)})^2 + (G_{12} + G_{21}) A_{22}^{(1)} A_{22}^{(2)} + G_{22} (A_{22}^{(2)})^2; \\ y_{23} &= g_1 A_{23}^{(1)} + g_2 \cdot A_{23}^{(2)} + G_{11} (A_{23}^{(1)})^2 + (G_{12} + G_{21}) A_{23}^{(1)} A_{23}^{(2)} + G_{23} (A_{23}^{(2)})^2. \end{aligned}$$

პირველი ორი განტოლებით შედგენილი სისტემიდან ვპოულობთ  $g_1$ -ს და  $G_{11}$ -ს, შემდეგი სამი განტოლებით შედგენილი სისტემიდან ვპოულობთ  $g_2$ -ს,  $(G_{12} + G_{21})$ -ს,  $G_{22}$ -ს და შემდეგ განვიხილავთ ოთხი განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას და ა.შ.

მიღებული გამოსახულებები საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ მაკროსისტემების იდენტიფიკაცია მრავალი ცვლადის მახასიათებელი ფუნქციის საშუალებით ჩაკეტილი სისტემის შემთხვევაში, რაც საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ადაპტური მართვის სისტემები.

### 1.1 ბ). მაკროსისტემების იდენტიფიკაცია ენტროპიის მაქსიმიზაციის პრინციპის საფუძველზე

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მაკროსისტემას ვუწოდებთ ისეთ სისტემებს, რომლებიც, როგორც ერთიანი, ავლენენ განსხვავებულ ბუნებასა და თვისებებს, ვიდრე მათი შემადგენელი ნაწილები.

უმეტესწილად მაკროსისტემა, როგორც ერთიანი, განეკუთვნება დეტერმინირებულ სისტემათა კლასს, მაშინ, როდესაც მისი შემადგენელი ნაწილების ქცევა სტოქასტიკურია.

ზოგადად მაკროსისტემა აღიწერება შემდეგი განტოლების საშუალებით:  $x'(t) = f(x(t)) + \Delta y$ , სადაც  $x(t)$  არის მაკროსისტემის მახასიათებელი პარამეტრი, ხოლო  $\Delta y$  კი არის სტოქასტიკური მდგენელი.

მაკროსისტემებში მიკრო დონეზე ელემენტების შემთხვევითი ქცევა ( $\Delta y$ ) ტრანსფორმირდება მდორედ მიმდინარე პროცესად, რომელსაც მაკრომდგომარეობას ( $x(t)$ ) ვუწოდებთ. მაკროსისტემების ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს მაკროსისტემების მოდელირებისას გამოვიყენოთ ენტროპიის მაქსიმიზაციის პრინციპი [8].

აღნიშნულ მიმართულებას საფუძველი ჩაუყარა ლ. ბოლცმანმა და იგი მდგომარეობს შემდეგში.

ვთქვათ სისტემა მოიცავს  $N$  ერთგვაროვან ნაწილაკს. განვიხილოთ  $n$ -განზომილებიანი  $L$  სივრცე. ყოველი  $i$ -ური ნაწილაკის მდგომარეობა ამ სივრცეში ხასიათდება  $n$  განზომილებიანი ვექტორით:  $x^i = \{q_1; q_2; q_3; p_1; p_2; p_3\}$ , სადაც  $q = (q_1; q_2; q_3)$  და  $\bar{p} = (p_1; p_2; p_3)$  შესაბამისად ნაწილაკის სივრცული კოორდინატებისა და იმპულსების ვექტორებია. ეს წერტილები (ნაწილაკები) წარმოქმნიან  $S(t)$  სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს  $N$  ფაზურ წერტილს. თითოეული წერტილი კი, ესაა ვექტორი  $\{q(t); p(t)\}$ .

დროის ფიქსირებული  $t$  მომენტისათვის  $S(t)$  სიმრავლე შეიძლება დავახასიათოთ  $f(q; p; t)$  განაწილების სიმკვრივის ფუნქციით. ჯ. მაქსველმა დაამტკიცა, რომ გარკვეული დროის შემდეგ ფაზური წერტილების განაწილება  $f(q; p; t)$  სივრცეში მიისწრაფის სტაციონარული განაწილებისაკენ. აქედან გამომდინარე,  $f^\circ(q; p)$  განაწილება წარმოადგენს განხილული სისტემის მაკრო მახასიათებელს.

ლ. ბოლცმანს ეკუთვნის განაწილების  $f(q; p; t)$  ფუნქციის ევოლუციის აღმწერი კინეტიკური განტოლება. ამ განტოლების

ამოხსნათა თვისებების კვლევისათვის კი, გამოყენებულ იქნა ენტროპია  $H(t)$ , რომელიც აღნიშნულ ტერმინებში გამოისახება შემდეგი სახით:

$$H(t) = - \int f(q, p, t) \cdot \ln f(q, p, t) dpdq.$$

აღმოჩნდა, რომ ბოლცმანის კინეტიკური განტოლების ამოხსნათა სიმრავლეზე  $dH(t)/dt > 0$  და  $dH(t)/dt = 0$ , როდესაც  $f(q, p, t) = f^\circ(q, p)$  - ფაზური წერტილების განაწილება მიისწრაფის სტაციონარული  $f^\circ(q; p)$  განაწილებისაკენ და ამ დროს ენტროპია არის უდიდესი.

ვთქვათ  $\{S_1, S_2, \dots, S_M\}$  მაკროსისტემის ელემენტთა შესაძლო მდგომარეობების სიმრავლეა.  $a_n$ -ით აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ ელემენტი იმყოფება  $S_n$  მდგომარეობაში ( $\sum_{n=1}^M a_n = 1$ ).  $N_n$ -ით აღვნიშნოთ იმ ელემენტთა რაოდენობა, რომლებიც იმყოფებიან  $S_n$  მდგომარეობაში.

**მაკროსისტემები სხვადასხვა სტატისტიკით. I) მაკროსისტემები ფერმის სტატისტიკით.** ფერმის სტატისტიკის შემთხვევაში ყოველი  $S_n$  მდგომარეობის თითოეულ უჯრედში შეიძლება იმყოფებოდეს არაუმეტეს ერთი ელემენტისა. ამასთანავე თითოეული ელემენტის არჩევანი დამოუკიდებელია მეორე ელემენტის არჩევანისაგან. ყოველი  $n \in \overline{1; M}$ -სათვის მაკროსისტემის ელემენტის  $S_n$  მდგომარეობის რომელიმე უჯრედში მოხვედრის ალბათობა ერთნაირია ყოველი უჯრედისათვის [19].

ვთვლით, რომ  $S_n$  ქვესიმრავლის ტევადობა  $G_n$  აპრიორი მოცემულია. ცხადია, რომ  $0 \leq N_n \leq G_n$  - ფერმის სტატისტიკის შემთხვევაში ელემენტების მაქსიმალური რაოდენობა, რომლებიც შეიძლება მოხვდნენ  $S_n$  ქვესიმრავლეში ტოლია  $G_n$ . დავაფიქსიროთ ელემენტების რაღაც რაოდენობა  $N_n$ . ალბათობა იმისა  $S_n$ -ში იქნება  $N_n$  ელემენტი ტოლია:

$$P_F(N_n) = C_{G_n}(N_n) a_n^{N_n} (1 - a_n)^{G_n - N_n}$$

როგორც ვხედავთ ალბათობათა განაწილების ფუნქცია წარმოადგენს ბინომიალურ განაწილებას (ანუ ბერნულის განაწილებას).

იზოლირებულ მაკროსისტემებისათვის ალბათობათა განაწილების ფუნქციას ფერმის სტატისტიკისათვის აქვს სახე:

$$P_F(N) = \prod_{n=1}^m \frac{G_n!}{N_n!(G_n - N_n)!} \tilde{a}_n^{N_n} (1 - a_n)^{G_n}$$

სადაც  $\tilde{a}_n = \frac{a_n}{1 - a_n}$ , ამასთანავე  $\sum_{n=1}^M N_n = N$ .

მაკროსისტემების კვლევისათვის მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ფიზიკური ენტროპია:  $E(N) = K \ln A P(N)$ , სადაც  $A$  მანორმირებელი მუდმივაა.

ეს გამოსახულება უფრო ხშირად იწერება შემდეგი სახით:

$$E(N) = E_0 + K \ln P(N)$$

სადაც  $E_0 = K \ln A$ ,  $K$  - პარამეტრია, რომელიც ახასიათებს ენტროპიის განზომილებათა ერთეულებს (თერმოდინამიკური სისტემებისათვის მას უწოდებენ ბოლცმანის მუდმივას).

მაკროსისტემებისათვის ფერმის სტატისტიკის შემთხვევაში ფიზიკური ენტროპია:

$$E_F(N) = K \sum_{n=1}^M (\ln G_n! + N_n \ln \tilde{a}_n + G_n \ln(1 - a_n) - \ln N_n! - \ln(G_n - N_n)!) + E_0$$

რადგან რეალური მაკროსისტემების შემთხვევაში  $G_n$  და  $N_n$  სიდიდეები დიდი რიცხვებია, ამიტომ თუ ვისარგებლებთ სტირლინგის მიახლოებით ტოლობით, ენტროპიის გამოსათვლელად გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$E_F(N) = C - K \sum_{n=1}^M (N_n \ln \frac{N_n}{\tilde{a}_n} + (G_n - N_n) \ln(G_n - N_n)),$$

სადაც  $C = K \sum_{n=1}^M G_n (\ln G_n + \ln(1 - a_n)) + E_0$ .

ფუნქციას:

$$\tilde{H}_F(N) = - \sum_{n=1}^M N_n \ln \frac{N_n}{\tilde{a}_n} + (G_n - N_n) \ln(G_n - N_n)$$

უწოდებენ ფერმი-დირაკის განზოგადებულ ინფორმაციულ ენტროპიას მოცემული ერთგვაროვანი სისტემისათვის.

**II) მაკროსისტემები აინშტაინი-ბოზეს სტატისტიკით.** ასეთი კლასის მაკროსისტემებში ყოველ უჯრედში შეიძლება იმყოფებოდეს ელემენტების ნებისმიერი რაოდენობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $S_n$  ქვესიმრავლეში, ტევადობით  $G_n$ , შეიძლება იყოს  $N_n$  ელემენტი, ამასთან ყველა  $N_n$  ელემენტი შეიძლება იყოს პირველ უჯრედში, ხოლო დანარჩენი  $G_n - 1$  უჯრედები  $S_n$  ქვესიმრავლისა იქნებიან ცარიელები.

$N_n$  ელემენტების განთავსება  $S_n$  ქვესიმრავლეში ტევადობით  $G_n$ , ექვივალენტურია  $N_n$  ელემენტების განთავსებისა ფერმის სტატისტიკით რომელიც დამხმარე  $\bar{S}_n$  ქვესიმრავლეში, როცა მისი ტევადობაა  $R_n = N_n + G_n - 1$ .

აღბათობა იმისა, რომ  $\bar{S}_n$  ქვესიმრავლეში იქნება  $N_n$  ელემენტი ტოლია:

$$P_E(N_n) = \frac{(G_n + N_n - 1)!}{N_n!(G_n - 1)!} a_n^{N_n} (1 - a_n)^{G_n - 1}$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით ვღებულობთ იზოლირებული ჩაკეტილი მაკროსისტემის შესაძლებელ მაკრომდგომარეობათა აღბათობის განაწილების ფუნქციას:

$$P_E(N) = \prod_{n=1}^M \frac{(G_n + N_n - 1)!}{N_n!(G_n - 1)!} a_n^{N_n} (1 - a_n)^{G_n - 1}$$

ფიზიკურ ენტროპიას გამოსახულებას ექნება შემდეგი სახე

$$E_E(N) = C - K \sum_{n=1}^M N_n \ln \frac{N_n}{a_n} - (G_n + N_n) \ln(G_n + N_n)$$

სადაც  $C = K \sum_{n=1}^M (G_n - 1)(\ln(1 - a_n) - \ln(G_n - 1)) + E_0$ .

აინშტაინ-ბოზეს სტატისტიკის მაკროსისტემის განზოგადებულ ინფორმაციულ ენტროპიას ექნება სახე:

$$\tilde{H}_E(N) = - \sum_{n=1}^M N_n \ln \frac{N_n}{a_n} - (G_n + N_n) \ln(G_n + N_n)$$

III) მაკროსისტემები ბოლცმანის სტატისტიკით. მაკროსისტემები ბოლცმანის სტატისტიკით წარმოადგენენ ფერმის და აინშტაინის მაკროსისტემების ზღვრულ სისტემებს, ანუ როდესაც  $S_n$  ქვესიმრავლის ტევადობა  $G_n$  გაცილებით დიდია მათში ელემენტების შესაძლო რაოდენობის  $N_n$  სიდიდეზე.

დავუშვათ  $N_n \ll G_n$  და  $a_n G_n = \text{const}$ , მაშინ:

$$\frac{G_n!}{(G_n - N_n)!} \approx G_n^{N_n}, \quad (1 - a_n)^{G_n - N_n} \approx (1 - a_n)^{G_n}, \quad \frac{(G_n + N_n - 1)!}{(G_n - 1)!} \approx G_n^{N_n},$$

$$(1 - a_n)^{G_n - 1} \approx (1 - a_n)^{G_n}.$$

აქედან გამომდინარე  $P_F(N_n)$  და  $P_E(N_n)$  ფუნქციები ერთნაირი არიან და მიიღებენ სახეს (ბოლცმანის განაწილება):

$$P_B(N_n) = A_n \frac{(G_n a_n)^{N_n}}{N_n!} (1 - a_n)^{G_n}$$

სადაც  $A_n$  მანორმირებელი კოეფიციენტია, რომელიც განისაზღვრება

$$\text{პირობით: } \sum_{N_n=0}^{\infty} P_B(N_n) = 1.$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას  $q_n = a_n G_n$ , მაშინ მოცემული შემთხვევისათვის:

$$A_n (1 - a_n)^{G_n} \sum_{N_n=0}^{\infty} \frac{q_n^{N_n}}{N_n!} = 1.$$

რადგანაც  $\sum_{N_n=0}^{\infty} \frac{q_n^{N_n}}{N_n!} = e^q$ , ამიტომ  $A_n = \frac{e^{-a_n G_n}}{(1 - a_n)^{G_n}}$  და მაშინ ალბათობა

იმისა  $S_n$ -ში იქნება  $N_n$  ელემენტი ტოლია:

$$P_B(N_n) = e^{-a_n G_n} \frac{(a_n G_n)^{N_n}}{N_n!}$$

საბოლოოდ მაკროსისტემის ალბათობათა განაწილების ფუნქციისათვის გვექნება:

$$P(N) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{-a_n G_n} \frac{(a_n G_n)^{N_n}}{N_n!}$$

ენტროპიის გამოსახულებას ბოლცმანის სტატისტიკისათვის ექნება სახე:

$$E_B(N_n) = C - K \sum_{n=1}^M N_n \ln \frac{N_n}{a_n G_n e},$$

სადაც  $C = -K \sum_{n=1}^M a_n G_n + E_0$ .

ბოლცმანის განზოგადებულ ინფორმაციულ ენტროპიას კი ექნება სახე:

$$\tilde{H}_B(N) = - \sum_{n=1}^M N_n \ln \frac{N_n}{a_n G_n e}.$$

სტატისტიკურ თერმოდინამიკაში გამოყენებულ სქემებში [19] იგულისხმება, რომ მაკროსისტემის ელემენტების სხვადასხვა მდგომარეობებში ( $S_n$  ქვესიმრავლეებში) მოხვედრა არის თანაბარ ალბათური. ზემოთმოყვანილი გამოსახულებები, კერძოდ ალბათობათა განაწილების და ინფორმაციული ენტროპიის ფუნქციები მიიღებენ „თერმოდინამიკურ“ სახეს, თუ ჩავთვლით, რომ აპრიორული ალბათობები ერთნაირია ყველა  $S_n$ -სათვის.

შემდეგში ყველგან ვიგულისხმებთ, საქმე გვაქვს მაკროსისტემებთან ფერმის სტატისტიკით.

## 12. ურბანული სისტემა, როგორც მაკროსისტემა

ურბანული სისტემა, წარმოადგენს საზოგადოებრივი განვითარების ყველა სფეროს მატერიალურ ასახვას, რომლის ფორმირება მიმდინარეობს ხანგრძლივი დროის განმავლობაში.

ურბანული სისტემა წარმოადგენს ცოცხალ ორგანიზმს, იგი მოიცავს და აერთიანებს: პროექტებს, იდეებს, სტიქიურ მოვლენებს, შემთხვევით და დაგეგმილ პროცესებს. იგი მოიხმარს მატერიალურ, ფინანსურ, ინტელექტუალურ და სხვა რესურსებს, „იცილებს“ მის მიერვე გადამუშავებულ მატერიალურ რესურსებს, გამოყენებულ პროდუქტებს.

თანამედროვე არქიტექტურა სოციალური პრობლემების გადაჭრაზეა ორიენტირებული, ამიტომ ურბანული სისტემის განვითარების,



რეკონსტრუქციის პროექტების შექმნისას არქიტექტორებს და ურბანისტებს ევალებათ გაითვალისწინონ და განახორციელონ სხვადასხვა კატეგორიებით მოაზროვნე და სხვადასხვა ენაზე მოლაპარაკე მრავალი მიმართულების სპეციალისტების (სოციოლოგების, ეკოლოგების, იურისტების, დემოგრაფების, ეკონომისტების და სხვა) რეკომენდაციები, რჩევები, აზრები და შენიშვნები. არქიტექტორებმა და ურბანისტებმა უნდა განჭვრიტონ, თუ როგორი იქნება საზოგადოება მრავალი წლის შემდეგ, როგორი იქნება: ეკონომიკა, პოლიტიკა, კულტურა და ა.შ. სხვა.

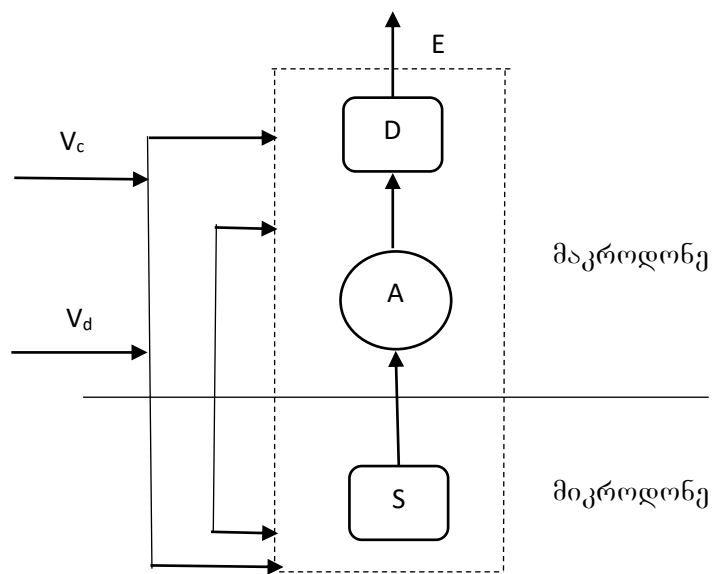
ურბანული სისტემის განვითარების კონცეფცია ერთდროულად უნდა მოიცავდეს როგორც კონსერვატულ, ასევე ახალ, დინამიკურ ფაქტორებს. თითოეული სახლის, კვარტლის აშენება, რეკონსტრუქცია უნდა იწყებოდეს მიზნის ჩამოყალიბებით, ხოლო მიზანი უნდა იქნეს შესაბამის ფორმას.

მიუხედავად იმისა, რომ გეგმარებით გადაწყვეტილებებს ხშირად გარკვეული დონის სუბიექტივიზმი ახასიათებს, ურბანული სისტემის დამპროექტებლების მიერ აუცილებლად არის გასათვალისწინებელი ზოგადსისტემური კანონზომიერებანი, კერძოდ ის, რომ ურბანული სისტემა, როგორც სამყაროს განუყოფელი ნაწილი, ერთი მთლიანი, დაუყოფელი დინამიური ერთობაა. მასში ყველაფერი ურთიერთკავშირში და ურთიერთდამოკიდებულებაშია, ამასთანავე ყველაფერი კონფლიქტურია. ადამიანის არსებობისათვის კომფორტული, დაბალანსებული, მდგრადი სტრუქტურების შექმნა კი შესაძლებელია მხოლოდ ურთიერთდაპირისპირებულთა ერთიანობით, მათი ერთობლივი ქმედებით [20].

თანამედროვე მეცნიერული მიმართულების ქაოსის თეორიის თანახმად, ჩვენს მიერ დაშვებულ პატარა შეცდომას, შეიძლება შემდეგში მოყვეს გამოუსწორებელი შედეგები. აქედან გამომდინარე, მდგრადი განვითარების პრინციპი გვაგადასდებულებს შევქმნათ ისეთი ექსპერტული სისტემები, რომლებიც საშუალებას მოგვცემენ შევაფასოთ დაპროექტების დროს მიღებული ყოველი ჩვენი გადაწყვეტილება, რათა დაშვებული არ იქნას ისეთი შეცდომები, რომელიც შემდგომ კატასტროფამდე მიგვიყვანს [21].

როგორც ცნობილია, ურბანული სისტემის ფორმირება, ფუნქციონალურ-სივრცული სტრუქტურის ჩამოყალიბება და განვითარება მნიშვნელოვანწილად განისაზღვრება მოსახლეობის ინტერესებით და ქმედებით. ჩვენს მიერ გამოყენებული და შექმნილი მეთოდოლოგიაც ეფუძნება და გამომდინარეობს მოსახლეობის ინტერესებისა და ქცევისაგან [9]. მოდელს საფუძვლად უდევს ის ჰიპოტეზა, რომ თითოეული ინდივიდის ესა თუ ის არჩევანი არის დამოუკიდებელი, შემთხვევითი. მიუხედავად იმისა, რომ თითოეული ინდივიდის ქცევა არის შემთხვევითი, ზოგადად განსაზღვრულია მათი ინტერესები და მიდრეკილებები. მაგალითად, სოციოლოგიური გამოკითხვის შედეგად ყოველთვის გვაქვს აპრიორული ინფორმაცია მოსახლეობის თითოეული ფენის ინტერესების თაობაზე. აღნიშნული ფაქტორები, მნიშვნელოვანწილად განსაზღვრავენ ფუნქციონალურ-სივრცული მოდელის და ფუნქციონალურ-სივრცული სტრუქტურის რეალური და ფორმირებული სურათის ურთიერთ ადეკვატურობის ხარისხს.

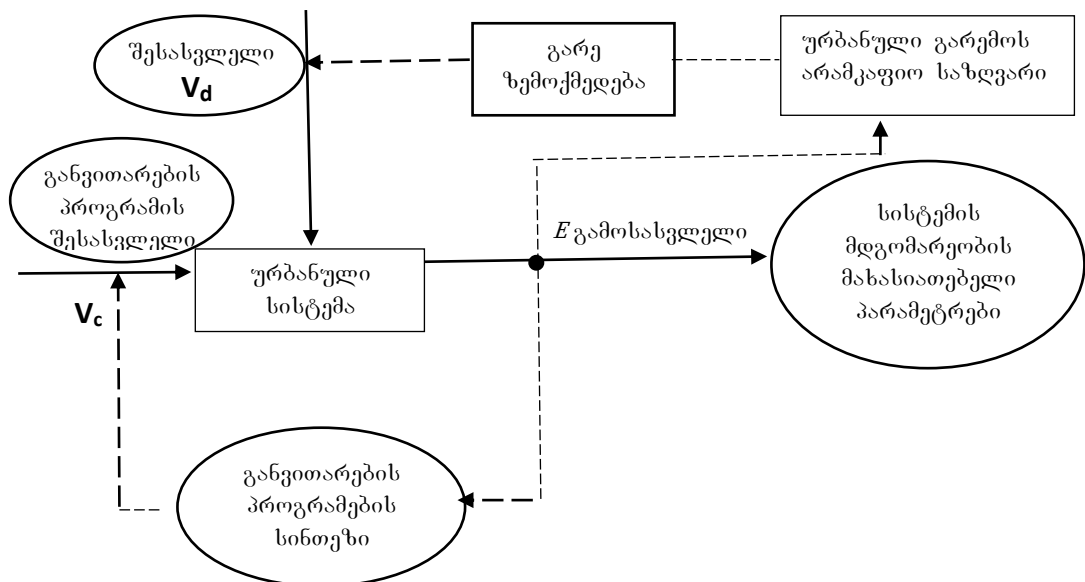
ურბანული სისტემის მოდელირებისას, მისი სტრუქტურული და სისტემური ანალიზის დროს, საქმე გვაქვს ერთდროულად მიმდინარე პროცესებთან, როგორც სტოქასტიკურ (ქაღალის შემადგენელ თითოეული ელემენტისათვის დამახასიათებელი) ასევე, აგრეგირებულ, დეტერმინირებულ (რომელიც შედეგია სტოქასტიკური ქმედებების ერთობლიობისა) პროცესებთან.



ნახ. 2

ურბანული სისტემა სტოქასტიკურ-დეტერმინირებული სისტემაა (ნახ. 2). მიკრო დონეზე ოპერირებს მრავალრიცხოვანი ელემენტები: მაცხოვრებლები, ტრანსპორტის საშუალებები და სხვა. ხოლო მაკრო დონეზე გვაქვს შედარებით მცირე რაოდენობის პარამეტრები, რომლებიც ასახავენ მიკროდონის ელემენტების აგრეგირებულ (ინტეგრირებულ) მახასიათებლებს: მოსახლეობის განაწილება სისტემაში, სატრანსპორტო ქსელი და სხვა. მიკრო დონის ელემენტების ქცევა არადეტერმინირებულია სტოქასტიკურია და აღიწერება  $N$  ბლოკით. მიკრო დონის ელემენტების მრავალრიცხოვანი ურთიერთქმედებებით მიღებული აგრეგირებული მახასიათებლები აღიწერება  $A$  ბლოკით. კოლექტიურ ქცევას აქვს დეტერმინისტული ხასიათი.  $D$  ბლოკში ხორციელდება აგრეგირებული მახასიათებლების წარმოდგენა ურბანული სისტემის ქცევის ამსახველ  $V_c$  და  $V_d$  პარამეტრებად.

ურბანული სისტემის მათემატიკური მოდელის სტრუქტურულ სქემას აქვს სახე (ნახ. 3):



ნახ. 3

პუნქტირებით ნაჩვენებია ის კავშირები, რომლებიც ურბანული სისტემის მმართველების მიერ განისაზღვრება.

რადგანაც ურბანული სისტემა მიეკუთვნება სტოქასტიკურ-დეტერმინირებულ სისტემათა კლასს და აქედან გამომდინარე მისი შესწავლა აუცილებლად უნდა მოხდეს შესაბამისი მათემატიკური აპარატის გამოყენებით.

ჩვენი მიდგომა, ურბანული სისტემაში მიმდინარე პროცესების მოდელირებისა და ფუნქციონალურ სივრცული სტრუქტურის აგებისა, ეყრდნობა მაკროსისტემურ მიდგომას. ურბანული სისტემა, როგორც მაკროსისტემა განხილულია, როგორც ქვესისტემების (რეგიონების, რაიონების) ერთობლიობა, რომელთა შორის მიმდინარეობს რესურსების გაცვლა გარკვეული შეზღუდვების დროს.

ურბანულ სისტემაში მაცხოვრებელი ადამიანების (სისტემის ელემენტები) მიერ მომსახურების ობიექტების არჩევათა სიმრავლე ქმნის მიკროდონეს. მაკროდონის ფორმირება კი ხორციელდება ეთგვაროვანი ფუნქციონალური ქვესისტემების ფორმირებით, რომელთა მდგომარეობა ხასიათდება დეტერმინირებული პარამეტრებით (სამუშაო ადგილების რაოდენობა, საცხოვრისის მოცულობა, დემოგრაფიული პარამეტრები და სხვა).

მაკროსისტემები ზოგადად წარმოადგენენ არაწრფივ სისტემებს, სადაც პარამეტრების გარკვეული მნიშვნელობების დროს სისტემაში ჩნდება ბიფურკაციის წერტილები და იწყება ქაოსი.

მაკროსისტემებში მიკრო დონეზე ელემენტების შემთხვევითი ქცევა ტრანსფორმირდება მდორედ მიმდინარე პროცესებად, რომელსაც მაკრომდგომარეობა ჰქვია. პრინციპიალური თვისება მაკროსისტემებისა მდგომარეობს იმაში, რომ რელაქსაციის დრო მიკრო და მაკრო დონეებზე მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

მაკროსისტემების ამ თვისებამ საშუალება მოგვცა გამოგვეყენებინა ლოკალური წონასწორობის პრინციპი, რომელსაც ადგილი აქვს თერმოდინამიკაში. ეს საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ურბანული სისტემების სივრცულ-დროითი ევოლუცია, როგორც ლოკალურ-სტაციონალურ მდგომარეობათა თანმიმდევრობა, სადაც, ყოველი მდგომარეობა ხასიათდება პირობითი ენტროპიის მაქსიმუმით.

ურბანული სისტემის ფუნქციონირების იმიტაციური მოდელი საშუალებას გვაძლევს, არა მარტო ოპერატიულად შევაფასოთ

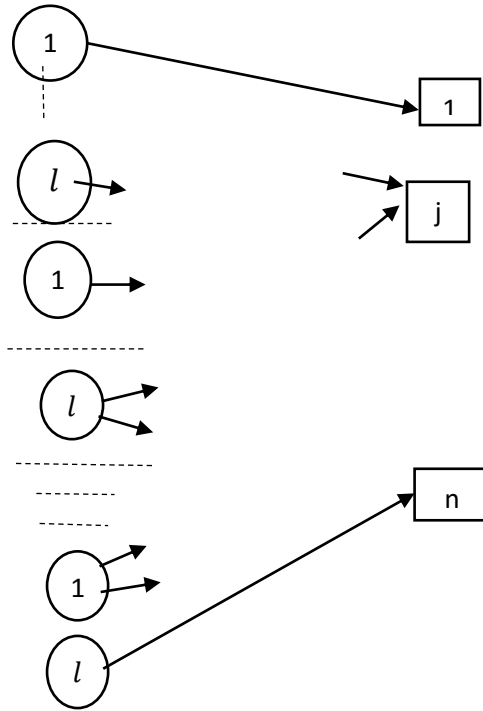
ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესები, არამედ განვსაზღვროთ ურბანული სისტემების სტრატეგიული მართვის პოლიტიკა და დროულად მოვახდინოთ რეაგირება წარმოქმნილ სიტუაციაზე. მიზანდასახულად, სისტემური მიდგომის საფუძველზე, ჩვენს მიერ არჩეული კრიტერიუმის მიხედვით, ვმართოთ სოციალური, ეკონომიკური, დემოგრაფიული და სხვა პროცესები.

ჩვენს მიერ შექმნილი ურბანული სისტემების ფუნქციონალურ-სივრცული მათემატიკური მოდელი, რომელიც წარმოადგენს ექსპერტული სისტემის ბაზისს დინამიკური სისტემური მოდელია. მასში ასახულია ურბანულ სისტემაში მიმდინარე სოციალური, ეკონომიკური, ეკოლოგიური, დემოგრაფიული და სხვა ფაქტორები. აქვე აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ ექსპერტული სისტემა ოპერირებს იმ ინფორმაციასთან, რომლითაც ხელმძღვანელობს ურბანისტი, რომელიც მუშაობს ურბანული სისტემის გენერალური გეგმზე, ან რეგიონის თუ რაიონის რეკონსტრუქციაზე. მათემატიკური მოდელი საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ ე.წ. რეზონანსული მართვა, რაც გულისხმობს უმცირესი დანახარჯებით მივაღწიოთ ჩვენს მიზანს.

### **1.3 მასობრივი მომსახურების პროცესების მათემატიკური მოდელირებისათვის**

**მასობრივი მომსახურების ობიექტების განთავსება ურბანულ სისტემაში.** ურბანულ სისტემაში მასობრივი მომსახურების ობიექტების მოდელირებისას ჩვენ ვყვრდნობით მაკროსისტემურ მოდელირების კონცეფციას. თითოეული მომსახურების ობიექტებს განვიხილავთ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად, რადგანაც ვთვლით, რომ თითოეული ჯგუფის თითოეული ადამიანის არჩევანი დამოუკიდებელია.

დავუშვათ მომსახურების ობიექტები უნდა გადანაწილდეს  $i = 1, 2 \dots n$  რაიონებში, რომლებიც უნდა მოემსახუროს  $l$  სხვადასხვა ჯგუფის ადამიანებს. (ნახ. 4).



ნახ.4

აქ  $i = 1, 2 \dots n$  რაიონებია, სადაც განთავსებულია საყოფაცხოვრებო მომსახურების ობიექტები. ხოლო მოსახლეობის სხვადასხვა ჯგუფები  $t$  დროის გარკვეული მომენტისათვის იმყოფებიან ამათუიმ მომსახურების ცენტრში.

მაკროსისტემებში მასობრივი მომსახურების პროცესების მათემატიკური მოდელები ძირითადად გამოისახება ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემების საშუალებით, რომელთა ზუსტი ამონახსნების პოვნა დიდ სირთულეებთანაა დაკავშირებული [22, 23].

ქვემოთ მოყვანილია აღნიშნული ტიპის ინტეგრალური განტოლების ამოსხნის ჩვენს მიერ შექმნილი ალგორითმი [24], კერძოდ, ორცვლადიანი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი მოძებნილია მწკრივის სახით. ინფორმატიკის თანამედროვე ტექნიკური საშუალებანი და გამოყენებითი პროგრამული სისტემები, საშუალებას გვაძლევენ დავადგინოთ ყოველი კონკრეტული შემთხვევისათვის მწკრივის კრებადობა და საკმარისი წევრთა რაოდენობა.

როგორც ცნობილია [25], ვოლტერას მეორე გვარის ერთცვლადიან განტოლებას

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathfrak{R}(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (15)$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი (აქ  $\mathfrak{R}$  უწყვეტი ფუნქციაა  $0 \leq y \leq x \leq a$  სამკუთხედზე,  $a \in \mathcal{R}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ), რომელიც მოიცემა ე.წ. ნეიმანის მწკრივის სახით:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (K^k f)(x)$$

სადაც  $K$  ოპერატორი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathfrak{R}(x, y) f(y) dy$$

ჩვენ განვიხილავთ საკითხს შემდეგი ორცვლადიანი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების

$$\varphi(t, x) = \lambda \int_0^t \int_0^x \mathfrak{R}_1(x, y, \tau) \varphi(\tau, y) dy d\tau + \mathfrak{R}_2(t) \int_0^t \varphi(\tau, x) d\tau \quad (16)$$

არატრივიალური ამონახსნების არსებობის შესახებ.

განვიხილოთ მასობრივი მომსახურების რაიმე სისტემაზე შემომავალი ორდინარული ნაკადი უკუქმედების გარეშე [23]. ეს კერძოდ ნიშნავს იმას, რომ ყოველი  $k > 1$ -სათვის გვაქვს:

$$P_{>1}(t, t + \Delta t) = \bar{\sigma}(\Delta t) \quad (17)$$

სადაც  $P_{>1}(t_1, t_2)$  აღნიშნავს ალბათობას იმისა, რომ დროის  $[t_1, t_2]$  შუალედში შემოვა ერთზე მეტი მოთხოვნა. დაუშვათ, რომ თითო მოთხოვნის მომსახურების დრო წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს  $Q(x)$  განაწილებით. დაუშვათ, რომ არსებობს ზღვრები:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_0(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} = \mathfrak{R}_2(t) \quad (18)$$

$$Q'(x - y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = -\lambda \mathfrak{R}_1(x, y, t) \quad (19)$$

სადაც  $P_k(t_1, t_2)$  აღნიშნავს ალბათობას იმისა, რომ დროის  $[t_1, t_2]$  შუალედში სისტემაში შემოვა ზუსტად  $k$  მოთხოვნა.

$B(t)$  სიმბოლოთი აღნიშნოთ ჯამი ყველა იმ მოთხოვნების მომსახურებისათვის აუცილებელი დროებისა, რომლებიც შემოვა

სისტემაში დროის  $t$  მომენტამდე ( $t$  მომენტის ჩათვლით), ხოლო  $\varphi(t, x)$  სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ  $B(t) < x$ . ყოველი  $x, t, \Delta t > 0$ -სათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\varphi(t + \Delta t, x) = \varphi(t, x)P_0(t, t + \Delta t) + P(t, t + \Delta t)P_{>0}(t, t + \Delta t),$$

სადაც  $P(t, t + \Delta t)$  არის ალბათობა იმისა, რომ  $[t, t + \Delta t]$  დროის შუალედში შემოსული საქმეების მომსახურებისათვის აუცილებელი დროისა და  $B(t)$ -ს ჯამი არ აღემატება  $x$ -ს. რადგანაც  $P(t, t + \Delta t)$  შემოსაზღვრული ფუნქციაა, ამიტომ (3)-ს გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t + \Delta t, x) - \varphi(t, x)}{\Delta t} &= \\ &= \varphi(t, x) \frac{P_0(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t} + \frac{P(B(t) + B_1 < x)P_1(t, t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\bar{o}(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

როცა  $\Delta t \rightarrow 0$  ზღვარზე გადასვლით და (1.18)-ს გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \varphi(t, x)\mathfrak{R}_2(t) + P(B(t) + B_1 < x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t, t + \Delta t)}{\Delta t}$$

როგორც ცნობილია [22]:

$$\begin{aligned} P(B(t) + B_1 < x) &= \int_0^x P(B(t) < x - y)Q'(y)dy = \int_0^x \varphi(t, x - y)Q'(y)dy \\ &= - \int_0^x \varphi(t, y)Q'(x - y)dy, \end{aligned}$$

საიდანაც:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \varphi(t, x)\mathfrak{R}_2(t) - \int_0^x \varphi(t, y)Q'(x - y)dy \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t, t + \Delta t)}{\Delta t}$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (19)-ს, დავასკვნით, რომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \varphi(t, x)\mathfrak{R}_2(t) + \lambda \int_0^x \varphi(t, y)\mathfrak{R}_1(x, y, t)dy,$$



რომლის ინტეგრირებითაც ვღებულობთ (16) ტოლობას. ამრიგად  $\varphi$  აკმაყოფილებს (16) ტოლობას და ამასთან, ცხადია, არ არის ტრივიალური.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ  $\varphi$  ფუნქცია, შევნიშნოთ, რომ

$$\varphi(t, x) = P_0(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} P(B_1 + B_2 + \dots + B_k < x) P_k(0, t) \quad (20)$$

სადაც  $B_i$  არის ის დრო, რომელიც აუცილებელია შემოსული  $i$ -ური მოთხოვნის მომსახურებისათვის. შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციური ოპერატორი:

$$K_Q(f)(x) = \int_0^x Q(x-y)f'(y)dy$$

მაშინ, როგორც ეს ადვილი დასაბუთებია

$$P(B_1 + B_2 + \dots + B_k < x) = K_Q^{k-1}(Q)(x)$$

ყოველი  $k > 1$ -სათვის. ამიტომ (20) ღებულობს სახეს:

$$\varphi(t, x) = P_0(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_Q^{k-1}(Q)(x) P_k(0, t) \quad (21)$$

მოთხოვნათა ნაკადის და მოთხოვნათა მომსახურებისათვის აუცილებელი დროის განაწილების კანონის ვარირებით მივიღებთ სხვადასხვა (16) განტოლებებს და შესაბამისად (21) კერძო ამონახსნს. მაგალითად, თუ ავიღებთ უმარტივეს ნაკადს:

$$P_k(t, t + \Delta t) = \frac{(\mu \Delta t)^k}{k!} e^{-\mu \Delta t}$$

მაშინ  $\mathfrak{R}_2(t) = -\mu$  და  $\mathfrak{R}_1(t) = \frac{\mu}{\lambda} Q'(x-y)$ , განტოლება (16) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\varphi(t, x) = \mu \int_0^t \int_0^x Q'(x-y)\varphi(\tau, y) dy d\tau - \mu \int_0^t \varphi(\tau, x) d\tau \quad (22)$$

ხოლო (21) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\varphi(t, x) = e^{-\mu t} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} K_Q^{k-1}(Q)(x) \right) \quad (23)$$

კერძოდ მივიღებთ, რომ (23) წარმოადგენს (22)-ის ამონახსნს ყოველი ისეთი  $Q$  ფუნქციისათვის, რომელიც წარმოადგენს რაიმე შემთხვევითი

სიდიდის განაწილების ფუნქციას. მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს მათემატიკური მოდელირების პროგრამული სისტემების გამოყენებით, ყოველი კონკრეტული პროცესისათვის, დავადგინოთ (23) შემაჯავლი მწკრივის კრებადობა და განვსაზღვროთ მოთხოვნილი სიზუსტის მისაღწევად საჭირო მწკრივის წევრთა რაოდენობა.

### პირველი თავის შედეგები

1. მიღებულია ალგორითმი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ იმპულსური  $g^{(i)}(t_1; \dots; t_i)$  ფუნქციების აპროქსიმაცია მრავალი ცვლადის მახასიათებელი ფუნქციების საშუალებით ღია სისტემის შემთხვევაში.

2. მიღებულია ალგორითმი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ იმპულსური  $g^{(i)}(t_1; \dots; t_i)$  ფუნქციების აპროქსიმაცია მრავალი ცვლადის მახასიათებელი ფუნქციების საშუალებით ჩაკეტილი სისტემის შემთხვევაში.

3. სხვადასხვა სტატისტიკების შემთხვევებში (ფერმის სტატისტიკა, აინშტაინი-ბოზეს სტატისტიკა, ბოლცმანის სტატისტიკა) მიღებულია ენტროპიისა და შესაძლებელ მდგომარეობათა განაწილების ალბათობების გამოსათვლელი ფორმულები.

4. შექმნილი მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ორცვლადიანი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი ჩაიწეროს ფორმალური მწკრივის სახით, რაც საშუალებას იძლევა ინფორმატიკის თანამედროვე ტექნიკური მიღწევებისა და პროგრამული სისტემები საშუალებით მოვახდინოთ იდენტიფიკაცია რეალურ პროცესსა და შესაბამის მათემატიკურ მოდელს შორის.

## თავი 2

### ურბანულ სისტემაში მიმდინარე სივრცული ეკონომიკური და დემოგრაფიული პროცესების მათემატიკური მოდელირება ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე და მართვა

#### 2.1 ა). სივრცული ეკონომიკური პროცესების ანალიზი საინვესტიციო პოლიტიკის განსაზღვრისათვის.

თანამედროვე ეკონომიკა – სივრცული ეკონომიკაა. ტრადიციულ ეკონომიკაში ეკონომიკური პროცესის ანალიზი დაიყვანება წონასწორული მდგომარეობების პოვნაზე. როდესაც გარემო პირობების ცვლილება ეკონომიკურ პროცესზე უმნიშვნელოა, როდესაც ეკონომიკური სისტემა მცირედ გადაიხრება წონასწორული მდგომარეობიდან, მის მდგრადობას უზრუნველყოფენ საბაზრო მექანიზმები. სივრცული ეკონომიკის დროს კი გვაქვს ურთიერთდამოკიდებული და ურთიერთმოქმედი დინამიკური ეკონომიკური პროცესები, რომლებიც მიმდინარეობენ დროის სხვადასხვა მასშტაბებში. ამ პროცესების აღმოჩენა და მათზე დაკვირვება შეუძლებელია როგორც წონასწორულ მდგომარეობაში, ასევე მეგასისტემასთან ურთიერთობისას. როდესაც გარემო პირობები მნიშვნელოვნად იცვლება, ხშირად საბაზრო მექანიზმები უძლებები არიან შეინარჩუნონ ეკონომიკური სისტემის წონასწორობა „ძველი“ მდგომარეობის ან „ახლის“ მიმართ.

ჩვენს მიერ ზემოთ განხილული მეთოდები საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ რეგიონში ინვესტიციების განხორციელების მდგრადობის არეები, რაც აუცილებელია ურბანულ სისტემაში მდგრადი საინვესტიციო პოლიტიკის განხორციელებისათვის.

განვიხილოთ ეკონომიკური სივრცე რომელი შედგება  $N$  ქვესისტემისაგან (რაიონისაგან). დავუშვათ, განსახილველ ეკონომიკურ სივრცეში აწარმოებენ გარკვეული ტიპის პროდუქტს. ვგულისხმობთ, რომ  $m$  ქვესისტემის შესაძლებლობანი აღნიშნული ტიპის პროდუქციის წარმოებისათვის დამოკიდებულია ყველა დანარჩენი ქვესისტემის ეკონომიკურ მაჩვენებლებზე.

განვიხილოთ ინვესტირების პროცესი. თითოეული  $m$  ქვესისტემა დროის მოცემულ  $t$  მომენტისათვის დავახასითოთ იმ ინვესტიციებით  $I_m(t)$ , რომლებიც იღება ამ ქვესისტემაში. ინვესტიციების ქვეშ ვგულისხმობთ ნაკადურ ცვლადს, ანუ, დროის ერთეულში განხორციელებულ ინვესტიციების მოცულობას.  $I_m(t)$  ინვესტიციების ნაკადი თითოეულ ქვესისტემაში განვსაზღვროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების საშუალებით:

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = \alpha_m \cdot I_m(t) + \Delta x_m(t) \quad (24)$$

სადაც  $\Delta x_m$  ინვესტიციის ჯამური ნაკადია  $m$  ქვესისტემაში,  $\alpha_m = \alpha_m(x; y)$  ორი ცვლადის ფუნქციაა, რომელიც ზრდადია პირველი ცვლადის (მაგალითად, შემოსავლების) მიმართ და კლებადი მეორე ცვლადის (დანახარჯები, ამორტიზაცია) მიმართ. განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $m$  ქვესისტემიდან სხვა ქვესისტემაში განხორციელებული ჯამური ინვესტიცია პროპორციულია  $I_m(t)$ -სი:

$$\sum_{s \neq m} x_{ms}(t) = h_m \cdot I_m(t) \quad (25)$$

სადაც  $x_{sm}$  ინვესტიციის ნაკადია განხორციელებული  $s$  ქვესისტემიდან  $m$  ქვესისტემაში,  $h_m = \varphi(c_m; \mu)$  არის ორი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც კლებადია პირველი ცვლადის და ზრდადია მეორე ცვლადის მიმართ.  $c_m$  არის  $m$  ქვესისტემის მახასიათებელი პარამეტრი (რაც უფრო უკეთესი საინვესტიციო პირობებია  $m$  ქვესისტემაში, მით უფრო დიდია  $c_m$ ).  $\mu$  სისტემური პარამეტრია (საერთო ყველა ქვესისტემისათვის), რომელიც ახასიათებს ქვესისტემებს შორის ეკონომიკურ ურთიერთკავშირს  $0 \leq \mu \leq 1$  (როდესაც ქვესისტემებს შორის არ არსებობს ურთიერთკავშირი, მაშინ  $\mu = 0$ ; როცა ყველა ქვესისტემა ერთმანეთთანაა დაკავშირებული, მაშინ  $\mu = 1$ ).

ფერმას ტიპის მოდელის თანახმად უაღბათესი იქნება  $x_{sm}(t)$  სიდიდეების ისეთი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ფუნქცია

$$S(x(t)) = - \sum_{m=1}^N \sum_{s=0}^N x_{sm}(t) \cdot \ln \frac{x_{sm}(t)}{v_s(t)}$$

აღწევს მაქსიმუმს, ამასთან  $x_{sm}(t) \geq 0$  და  $x_{sm}(t)$  სიდიდეებმა უნდა დააკმაყოფილოს (25) პირობა.  $v_s(t) = I_m(t)(S_k - I_m(t))$  მიზიდვის ლოგისტიკური ფუნქციაა.

მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის პოვნის ლაგრანჟის მეთოდის თანახმად მივიღებთ:

$$x_{sm}(t) = \frac{v_m(t)}{\sum_{k=0}^N v_k(t)} h_s \cdot I_s(t), \quad m, s \in \overline{1, N}.$$

ამიტომ (24) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = (\alpha_m - h_m) \cdot I_m(t) + \frac{I_m(t)(S_k - I_m(t))}{\sum_{k=1} I_k(t)(S_k - I_k(t))} \cdot \sum_{k=1} h_k \cdot I_k(t). \quad (26)$$

## 2.2 ბ). ურბანული სისტემის დემორესურსების დინამიკის მოდელი მოსახლეობის ჯგუფების ინტერესების გათვალისწინებით

დავუშვათ განსახილველი ურბანული სისტემა დაყოფილია  $N$  რაიონად, ხოლო მოსახლეობა დაყოფილია  $P$  ჯგუფად მათი ინტერესების შესაბამისად (ერთ ჯგუფში შემავალ ადამიანებს აქვთ ერთნაირი ინტერესები) [9]. ვთქვათ  $A^p$  აღნიშნავს  $p$  ჯგუფის ადამიანთა ყველა ინტერესების სიმრავლეს, ხოლო  $A_m$  კი აღნიშნავს იმ ინტერესების სიმრავლეს, რომელთა დაკმაყოფილება შესაძლებელია  $m$  რაიონში.  $A_m^p$ -თი ავლნიშნოთ  $p$  ჯგუფის ადამიანთა იმ ინტერესების სიმრავლე, რომელთა დაკმაყოფილება შესაძლებელია  $m$  რაიონში:  $A_m^p = A_m \cap A^p$ ,  $m_i^p$ -თი ავლნიშნოთ  $a_i^p \in A^p$  ინტერესის წონა

$\left( \sum_{a_i^p \in A^p} m_i^p = 1 \right)$ .  $\eta_{im}^p$ -თი ავლნიშნოთ  $m$  რაიონში  $p$  ჯგუფის ადამიანების

$a_i^p$  ინტერესის დაკმაყოფილების პარამეტრი. სიდიდეებს

$\lambda_m^p = \sum_{a_i^p \in A_m^p} \eta_{im}^p \cdot m_i^p$  ვუწოდოთ  $m$  რაიონის მახასიათებელი პარამეტრი  $p$

ჯგუფისათვის.

დავუშვათ  $x_m^p(t)$  აღნიშნავს  $p$  ჯგუფის იმ ადამიანთა რიცხვს, რომლებიც დროის  $t$  მომენტისათვის ცხოვრობენ  $m$  რაიონში;  $\alpha_m^p$  --  $m$  რაიონში  $p$  ჯგუფის ადამიანთა აღწარმოების კოეფიციენტი.  $p$  ჯგუფის იმ ადამიანთა რიცხვი, რომლებიც დროის  $t$  მომენტში  $m$  რაიონიდან საცხოვრებლად გადადიან  $s$  რაიონში, აღვნიშნოთ  $y_{ms}^p(t)$ -თი. განვიხილავთ მიგრაციის მიმართ ღია რეგიონს. რეგიონის გარე არე ჩავთვალოთ ნულოვანი ნომრის მქონე რაიონად. მოსახლეობის სტრუქტურის დინამიკის დასახასიათებლად გვექნება დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემა [26]:

$$\frac{dx_m^p(t)}{dt} = \alpha_m^p x_m^p(t) + \sum_{s=1}^N y_{sm}^p(t) - \sum_{s=0}^N y_{ms}^p(t). \quad m \in \overline{1, N}; q \in \overline{1, Q} \quad (27)$$

შევაფასოთ  $y_{ms}^p(t)$  სიდიდეები. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც რაიონის მიზიდვის ფუნქცია წარმოადგენს ლოგისტიკურ ფუნქციას:

$$v_m^p(t) = \lambda_m^p \cdot x_m^p(t) \cdot (V_m - x_m^p(t)), m \in \overline{1, N}; \quad (28)$$

$$v_0^p = V^2, \quad p \in \overline{1, P}.$$

სადაც  $V_m$  აღნიშნავს  $m$  რაიონის ტევადობას.

ვისარგებლოთ ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპით. ფერმას ტიპის მოდელის თანახმად უაღბათესი იქნება  $y_{ms}^p(t)$  სიდიდეების ისეთი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ფუნქცია:

$$S(y^p(t)) = - \sum_{m=1}^N \sum_{s=0}^N y_{ms}^p(t) \cdot \ln \frac{y_{ms}^p(t)}{v_s^p(t)} \quad (29)$$

აღწევს მაქსიმუმს, ამასთან  $y_{ms}^p(t)$  სიდიდეებმა უნდა დააკმაყოფილოს პირობები:

$$\sum_{s=0}^N y_{ms}^p(t) \leq (1 - \frac{\lambda_m^p}{\max_{0 \leq s \leq N} \{\lambda_s^p\}}) x_m^p(t) \quad (30)$$

$$\sum_{m=1}^N y_{ms}^p(t) \leq B_s^p(t) \quad (31)$$

$$y_{ms}^p(t) \geq 0 \quad (32)$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა [14]:

**თეორემა:** არსებობს  $y_{ms}^p(t)$  ცვლადების ერთადერთი მნიშვნელობა, რომლებიც აკმაყოფილებენ (30)-(32) პირობებს და რომლებზედაც  $S(y^p(t))$  ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს.

**დამტკიცება:** ვთქვათ,  $L^p$  აღნიშნავს იმ  $y_{ms}^p(t)$ -ების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (30)-(32) პირობებს. ცხადია, რომ  $L^p$  ჩაკეტილი სიმრავლეა. (31) და (32) პირობების ძალით ყოველი  $m, s \in \overline{1, N}$ -თვის  $|y_{ms}^p(t)| \leq \max_{0 \leq s \leq N} \{B_s^p(t)\}$ , ამიტომ  $L^p$  არის ჩაკეტილი, შემოსაზღვრული სიმრავლე. ვაიერშტრასის თეორემის ძალით ჩაკეტილ, შემოსაზღვრულ სიმრავლეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია ამ სიმრავლეზე აღწევს თავის მაქსიმუმს და მინიმუმს, ე.ი. (29)-(32) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი.

ვაჩვენოთ ამონახსნის ერთადერთობა. ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \text{Ln}(x_i / a_i), \quad a_i > 0.$$

ვთქვათ  $y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$  არანულოვანი ვექტორია (არსებობს ერთი მაინც  $i \in \overline{1, n}$  ისეთი, რომ  $y_i \neq 0$ ).

$$f(x+y) - f(x) - (\nabla f(x), y) = \sum_{i=1}^n \left[ (x_i + y_i) \text{Ln} \left( 1 + \frac{y_i}{x_i} \right) - y_i \right] \quad (33)$$

რადგან ფუნქცია  $g(x) = x \cdot \text{Ln} \frac{x}{a}$  არის მკაცრად ამოზნექილი ფუნქცია

$(g''(x) = \frac{1}{x} > 0, \text{ როცა } x > 0)$ , ამიტომ  $y_i \neq 0$ -ის შესაბამისი შესაკრები

(33) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მეტია 0-ზე. ეს კი ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქცია არის მკაცრად ამოზნექილი.

(30)-(32) პირობებით განსაზღვრული  $L^p$  სიმრავლე არის ამოზნექილი, რადგან ამოზნექილ სიმრავლეზე მკაცრად ამოზნექილ ფუნქციას გააჩნია არა უმეტეს ერთისა მინიმუმის წერტილი, ამიტომ (29)-(32) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი. თეორემა

დამტკიცებულია.

ვიპოვოთ (29)-(32) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი. ჩაწერის გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\left( 1 - \frac{\lambda_m^p}{\max_{0 \leq s \leq N} \{\lambda_s^p\}} \right) x_m^p(t) = C_m^p(t)$$

განვიხილოთ ლაგრანჟიანი:

$$L(U, y^p(t)) = \begin{cases} \sum_{m,s} y_{ms}^p(t) L_n \frac{y_{ms}^p(t)}{v_s^p(t)} + \sum_{s=0}^N (\sum_{m=1}^N y_{ms}^p(t) - B_s^p(t)) \lambda_s + \sum_{m=1}^N (\sum_{s=0}^N y_{ms}^p(t) - C_m^p(t)) \mu_m, & y^p \in E_+^{N(N+1)}, U \in E_+^{2M+1} \\ -\infty, & \text{როცა } y^p \in E_+^{N(N+1)}, U \notin E_+^{2M+1} \\ +\infty, & \text{როცა } y^p \notin E_+^{N(N+1)} \end{cases}$$

რადგან  $L^p$  ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო (30)-(32) პირობებით განსაზღვრული ფუნქციები ამოზნექილია  $L^p$ -ზე, ამასთანავე (29)-(32) ამოცანის ამონახსნთა სიმრავლე არაცარიელია, ამიტომ არსებობს ერთი მაინც  $U^* = (\lambda_0^*; \lambda_1^*; \dots; \lambda_N^*; \mu_1^*; \mu_2^*; \dots; \mu_N^*)$  კუნ-ტაკერის ვექტორი. თუ  $\overline{y^p(t)}$  წარმოადგენს (29)-(32) ამოცანის ამოხსნას, მაშინ, წერტილი  $(U^*, \overline{y^p(t)})$  არის ლაგრანჟიანის უნაგირა წერტილი;

$$-\infty < \inf_{y^q(t)} L(U^*, y^p(t)) = \sup_u \overline{L(u, y^p(t))} = \inf_{y^p(t)} (\sup_u L(u, y^p(t)))$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$g(u) = \inf_{y^q(t)} \{L(u, y^p(t))\} \quad (34)$$

$L(u; y^p(t))$  ფუნქცია ამოზნექილია როგორც  $y^p(t)$ -ს ფუნქცია, ამიტომ  $y^p(t)$  არის მინიმუმის წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $\nabla_{y^p} L(u, y^p(t)) = 0$ .

$$\frac{\partial L}{\partial y_{ms}^p(t)} = 1 + L_n \frac{y_{ms}^p(t)}{v_s^p(t)} + \lambda_s + \mu_m.$$

$$y_{ms}^p(t) = v_s(t) e^{-1} - \lambda_s - \mu_m \quad (35).$$

(29)-ის ძალით:



$$g(u) = \begin{cases} \sum_{m,s} v_s^p e^{-\lambda_s - \mu_m} - \sum_{s=0}^N B_s^p(t) \lambda_s - \sum_{m=1}^N C_m^p(t) \mu_m, & u \in E_+^{2m+1} \\ -\infty, & u \notin E_+^{2m+1} \end{cases}$$

ვიპოვოთ,  $g(u)$  ფუნქციის მაქსიმუმი  $E_+^{2m+1}$  სიმრავლეზე.

ვთქვათ,  $u^{(0)}$  არის რაიმე დასაშვები მნიშვნელობა  $E_+^{2m+1}$  სიმრავლეზე.  $u^*$ -ის საპოვნელად ვისარგებლოთ გრადიენტის პროექციის მეთოდით.

$$u^{(k+1)} = P_{E_+^{2m+1}}(u^{(k)} - \gamma_k \nabla g(u^{(k)}))$$

სადაც  $\gamma_k \rightarrow 0$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty$ .  $u$  ვექტორის  $\bar{u}$  პროექცია  $E_+^{2m+1}$

ორტანტზე გამოითვლება შემდეგნაირად;

$$\bar{u}_k = \max\{u_k, 0\}$$

ვიპოვოთ რა ამ მეთოდით  $u^*$ -ს, (32)-დან მივიღებთ  $y_{ms}^p(t)$  სიდიდეების საძებნ მნიშვნელობებს [15].

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (30) და (31) პირობების ნაცვლად  $y_{ms}^p(t)$  სიდიდეები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_{s=0}^N y_{ms}^p(t) = \varphi(\lambda_m^p / \max_{0 \leq s \leq N} \{\lambda_s^p\}) x_m^p(t), \quad m \in \overline{1, N} \quad (36)$$

სადაც  $\varphi$  კლებადი ფუნქციაა, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს (0.1) სიმრავლიდან. ( $\lambda_0^p$  სიდიდეს - რეგიონის გარე არეს მახასიათებელ პარამეტრს - ვაფასებთ სტატისტიკური მონაცემების საფუძველზე). (36) პირობა ნიშნავს, რომ ყოველი რაიონისათვის მიგრაციის პროცესში მონაწილეობს რაიონის მოსახლეობის ფიქსირებული ნაწილი. ამ ნაწილის სიდიდე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რა პირობებია მოცემულ რაიონში და რეგიონში მთლიანად.

თუ ვისარგებლებთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის პოვნის ლაგრანჟის მეთოდით, მივიღებთ, რომ (29), (36) ამოცანის ამონახნია:

$$y_{ms}^p(t) = \frac{v_s^p(t)}{\sum_{k=0}^N v_k^p(t)} h_m^p x_m^p(t), \quad m, s \in \overline{1, N} \quad (37)$$

სადაც  $h_m^p = \varphi\left(\lambda_m^p / \max_{0 \leq s \leq N} \{\lambda_s^p\}\right)$  მობილურობის კოეფიციენტი. (28) და

(37) ტოლობების გათვალისწინებით (27)-დან გვექნება:

$$\frac{dx_m^p(t)}{dt} = (\alpha_m^p - h_m^p)x_m^p(t) + \frac{\lambda_m^p x_m^p(t)(V_m - x_m^p(t))}{V^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k^p x_k^p(t)(V_k - x_k^p(t))} \sum_{k=0}^N h_k^p x_k^p(t) \quad (38)$$

ჩვენი მიზანია ყოველი  $p \in \overline{1, P}$  ჯგუფისათვის შევისწავლოთ რეგიონში წონასწორობის მდგომარეობა. თუ არსებობს  $m \in \overline{1, N}$  ისეთი, რომ  $\alpha_m^p > h_m^p$ , მაშინ  $m$ -ური რაიონის  $p$  ჯგუფის მოსახლეობა უსასრულოდ იზრდება. თუ  $\alpha_m^p = h_m^p$  მაშინ  $m$ -ური რაიონის  $p$  ჯგუფის მოსახლეობა იზრდება მანამ, სანამ  $x_m^p = V_m$ . ამიტომ ჩვენთვის საინტერესოა ისეთი შემთხვევა, როცა სრულდება პირობა:

$$\alpha_m^p < h_m^p, \quad m \in \overline{1, N}$$

შეგნიშნოთ რომ, თუ რომელიმე  $t_0$  მომენტისათვის  $0 \leq x_m^p(t_0) \leq V_m$ , მაშინ (38) პირობის ძალით გვექნება, რომ ნებისმიერი  $t > t_0$ -თვის  $0 \leq x_m^p(t) \leq V_m$ .

რეგიონში წონასწორობის პირობას აქვს სახე:

$$\frac{\lambda_m^p x_m^p (V_m - x_m^p)}{v^2 + \sum_{k=1}^M \lambda_k^p x_k^p (V_k - x_k^p)} \sum_{k=1}^N h_k^p x_k^p = (h_m^p - \alpha_m^p) x_m^p \quad m \in \overline{1, N} \quad (39)$$

განტოლებათა (39) სისტემას გააჩნია ნულოვანი ამონახსნი:  $x_m^p = 0$ ,  $m \in \overline{1, N}$ . (39) სისტემის ისეთ ამონახსნს, რომლის არც ერთი კოორდინატი არაა უარყოფითი და ერთი მაინც კოორდინატი არის დადებითი, ვუნდოთ დადებითი წონასწორობა. ჩვენი მიზანია სწორედ ასეთი ამონახსნების პოვნა.

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ (39)-დან მივიღებთ:

$$\left( \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k^p (h_k^p - \alpha_k^p)}{\lambda_k^p} \right) \cdot (U_m^p)^2 - \left( \sum_{k=1}^N \alpha_k^p e_k \right) \cdot U_m^p + 1 = 0, m \in \overline{1, N} \quad (40)$$

სადაც  $e_m = \frac{V_m}{V}$ ;  $U_m^p = \frac{\lambda_m^p (V_m - x_m^p)}{V (h_m^p - \alpha_m^p)}$ .

თუ (40) განტოლებას აქვს ამონახსნი, მაშინ ეს ამონახსნი დადებითია. შევნიშნოთ, რომ შეიძლება (40) განტოლებას გააჩნდეს ამონახსნი, მაგრამ შესაბამისი  $x_m^p$  იყოს არადადებითი. ამიტომ, (40)-ის დისკრიმინანტის არაუარყოფითობას შეიძლება ეუნოდოთ დადებითი წონასწორობის არსებობის აუცილებელი პირობა. რადგან (40) განტოლების კოეფიციენტები არაა დამოკიდებული  $m$ -ზე ( $m \in \overline{1, N}$ ), ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას:

**თეორემა:** თუ რომელიმე  $m_0 \in \overline{1, N}$ -თვის სრულდება დადებითი წონასწორობის არსებობის აუცილებელი პირობა, მაშინ იგივე პირობა შესრულდება ნებისმიერი  $m \in \overline{1, N}$ -თვის.

იმისდამხედვით, თუ როგორია (38)-ში შემავალი განტოლებათა კოეფიციენტები, გვაქვს ერთი (ნულოვანი), ორი, ან სამი წონასწორობის მდგომარეობა. ჩვენ გვინტერესებს პასუხი შემდეგ კითხვებზე: 1) თუ პარამეტრების ( $\lambda_m^p$  და  $V_m$  პარამეტრების,  $m \in \overline{1, N}, p \in \overline{1, P}$ ) რომელიდაც მნიშვნელობებისათვის რაიონში არსებობს წოწასწორობის რამდენიმე მდგომარეობა, ამ მდგომარეობებიდან რომელში აღმოჩნდება სისტემა? 2) რა შემთხვევაში იწვევს პარამეტრების ( $\lambda_m^p$  და  $V_m$  პარამეტრების) „უმნიშვნელო“ ცვლილება სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის „მკვეთრ“ ცვლილებას? 3) შესაძლებელია თუ არა მოცემული მდგომარეობიდან ახალ მდგომარეობაში გადასვლა კატასტროფის (მდგომარეობის მკვეთრი ცვლილების) გარეშე?

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად ვსარგებლებთ ტომის საკლასიფიკაციო თეორემით [27] (ანალოგიურად სივრცული ეკონომიკური პროცესების მათემატიკური მოდელის შემთხვევაში [28]). თუ შემოვიღებთ სათანადო აღნიშვნებს, მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას [14]:

$$(u_m^p)^3 - C_{1m}^p (u_m^p)^2 + C_{2m}^p u_m^p - C_{3m}^p = 0, m \in \overline{1, N} \quad (41)$$

ტომის საკლასიფიკაციო თეორემის ძალით არსებობს კოორდინატთა

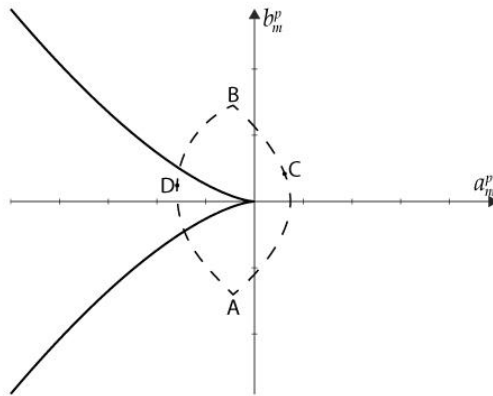
სისტემის ისეთი გლუვი გარდაქმნა, რომლის შედეგადაც შესაძლებელია (41)-ის წარმოდგენა ელემენტარული კატასტროფების შვიდი მოდელიდან ერთ-ერთის საშუალებით [14].

$$(t_m^p)^3 + a_m^p \cdot t_m^p + b_m^p = 0 \quad (42)$$

მაშასადამე გვაქვს "წყობის" ტიპის კატასტროფა.

$\lambda_m^p$  და  $M_m$  სიდიდეების ცვლილებით (42) ზედაპირზე მიიღება რაღაც წირი. იმისდამხედვით, ჰკვეთს თუ არა  $(a_m^p, b_m^p)$  სიბრტყეზე მიღებული შესაბამისი წირი არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია  $16(a_m^p)^3 + 27(b_m^p)^2 = 0$  წირით (ნახ. 5), შეგვიძლია ვუბასუხოთ კითხვებს: 1) შეიძლება თუ არა წონასწორობის ერთი მდგომარეობიდან მეორე მდგომარეობაში გადასვლა კატასტროფის გარეშე?

2) თუკი ასეთი გადასვლა შესაძლებელია, მაშინ როგორ ვცვალოთ  $\lambda_m^p$  და  $e_m$  სიდიდეები აღნიშნული გადასვლის განსახორციელებლად?



ნახ. 5

## 2.2 არაუარყოფითი წონასწორობის მდგომარეობების პოვნა.

### მდგრადობის არეები

თვალსაჩინოდ ჩვენებისათვის განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $N=2$  და  $P=1$ . ამ შემთხვევაში დიფერენციალურ განტოლებათა (38)

სისტემა (ანალოგიურად (26) სისტემა ეკონომიკური პროცესების მოდელირებისას) მიიღებს სახეს:

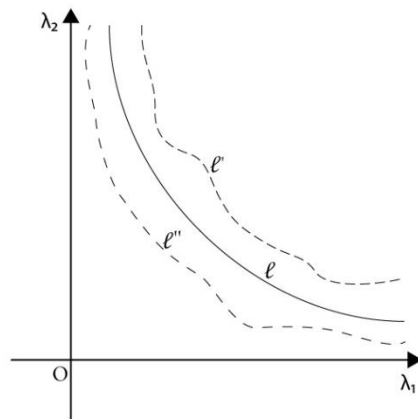
$$\begin{cases} x_1' = (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{h}_1)x_1 + \frac{\tilde{\lambda}_1 x_1 (\tilde{V}_1 - x_1)(\tilde{h}_1 x_1 + \tilde{h}_2 x_2)}{\tilde{V}^2 + \tilde{\lambda}_1 x_1 (\tilde{V}_1 - x_1) + \tilde{\lambda}_2 x_2 (\tilde{V}_2 - x_2)} \\ x_2' = (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{h}_2)x_2 + \frac{\tilde{\lambda}_2 x_2 (\tilde{V}_2 - x_2)(\tilde{h}_1 x_1 + \tilde{h}_2 x_2)}{\tilde{V}^2 + \tilde{\lambda}_1 x_1 (\tilde{V}_1 - x_1) + \tilde{\lambda}_2 x_2 (\tilde{V}_2 - x_2)} \end{cases} \quad (43)$$

ამ გამოსახულებაში  $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i + \Delta\alpha_i$ ,  $\tilde{h}_i = h_i + \Delta h_i$ ,  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \Delta\lambda_i$ ,

$\tilde{V}_i = V_i + \Delta V_i$  სიდიდეები წარმოადგენენ სტატისტიკური კვლევის შედეგად მიღებულ მონაცემებს, რომლებიც ყოველთვის მოიცავენ გარკვეულ ცდომილებებს. აქედან გამომდინარე მაკროსისტემების მოდელირებისას და მართვისას გათვალისწინებული უნდა იქნას აღნიშნული ცდომილებები.

ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდის საილუსტრაციოდ, ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთვლით, რომ ცდომილება 0-ის ტოლია და ვსაზღვრავთ ბიფურკაციის წირებს და მდგრადობის არეებს.

შემდეგ, პრაქტიკული, კონკრეტული ამოცანის გადაწყვეტისას, საწყისი მონაცემების ანალიზის მიხედვით, მოხდება მიღებული შედეგების დამატებითი კორექცია (შედეგები იქნება არა  $l$  წირის წერტილები, არამედ წერტილები  $l$  წირის მიდამოში - ნახ 6-ზე  $l'$  და  $l''$  წირებით შემოსაზღვრული არე).



ნახ. 6

ქვემოთ ნაჩვენებია პარამეტრების კორექციის მეთოდი ინფორმაციის ენტროპიული ანალიზის (სიმრავლეთა მესერის თეორიის გამოყენებით) როდესაც სისტემაში შემოვიდა დამატებითი ინფორმაცია ამოცანის

საწყისი პარამეტრების შესახებ [16]. იმ შემთხვევაში, როდესაც ცდომილება გამოწვეულია გამოთვლებისას მიღებული რიცხვების დამრგვალებით, შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები [29].

[30] ნაჩვენებია, რომ დიფერენციალურ განტოლებათა (43) სისტემას ზღვრული ციკლები არ გააჩნია და მისი ამონახსნები მიისწრაფვიან მუდმივი მნიშვნელობისაკენ – წონასწორობის მდგომარეობისაკენ. სისტემის არაუარყოფითი წონასწორობის მდგომარეობების პოენისათვის საჭიროა ვიპოვოთ ყველა ამონახსნი შემდეგი განტოლებათა სისტემისა:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1 x_1 (V_1 - x_1)(h_1 x_1 + h_2 x_2)}{V^2 + \lambda_1 x_1 (V_1 - x_1) + \lambda_2 x_2 (V_2 - x_2)} = (h_1 - \alpha_1) x_1 \\ \frac{\lambda_2 x_2 (V_2 - x_2)(h_1 x_1 + h_2 x_2)}{V^2 + \lambda_1 x_1 (V_1 - x_1) + \lambda_2 x_2 (V_2 - x_2)} = (h_2 - \alpha_2) x_2 \end{cases} \quad (44)$$

I)  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის განტოლებათა (44) სისტემას გააჩნია ტრივიალური ამონახსნი:

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

II) დავადგინოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრები იმისათვის, რომ განტოლებათა (44) სისტემას გააჩნდეს  $x_1 > 0, x_2 = 0$  სახის ამონახსნი. (44)-ის მეორე განტოლებიდან:

$$\frac{\lambda_1 h_1 x_1 (V_1 - x_1)}{V^2 + \lambda_1 x_1 (V_1 - x_1)} = h_1 - \alpha_1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\lambda_1 x_1 (V_1 - x_1) = u_1 \quad (45),$$

მაშინ მიღებული განტოლება ასე გადაიწერება:

$$h_1 u_1 = (h_1 - \alpha_1)(V^2 + u_1)$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$u_1 = \frac{(h_1 - \alpha_1)V^2}{\alpha_1}.$$

(45)-ის თანახმად:

$$\lambda_1 x_1 (V_1 - x_1) = \frac{(h_1 - \alpha_1) V^2}{\alpha_1} \Leftrightarrow (x_1)^2 - V_1 \cdot x_1 + \frac{(h_1 - \alpha_1) \cdot V^2}{\alpha_1 \cdot \lambda_1} = 0 \quad (46)$$

რადგან ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $h_1 - \alpha_1 > 0$ , ამიტომ თუ (46) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი, ის აუცილებლად დადებითი რიცხვია. აქედან გამომდინარე, იმისათვის, რომ (46) განტოლებას გააჩნდეს დადებითი ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია მისი დისკრიმინანტი იყოს არაუარყოფითი:

$$(V_1)^2 - \frac{4 \cdot (h_1 - \alpha_1) \cdot V^2}{\alpha_2 \cdot \lambda_1} \geq 0 \quad (47)$$

(47)-დან ვღებულობთ, რომ რეგიონში არსებობს  $x_1 > 0, x_2 = 0$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lambda_1 \geq \frac{4 \cdot (h_1 - \alpha_1) \cdot V^2}{\alpha_1 \cdot (V_1)^2} \quad (48)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს  $\begin{cases} K_i = \alpha_i \cdot (h_i - \alpha_i) \\ e_i = \frac{V_i}{V}, \end{cases}$  მაშინ (48) პირობა ასე

ჩაიწერება:

$$\lambda_1 \geq \frac{4 \cdot K_1}{(\alpha_1)^2 \cdot (e_1)^2} \quad (49).$$

(წირს, რომლის წერტილები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{4 \cdot K_2}{(\alpha_2)^2 \cdot (e_2)^2}, \text{ დავარქვათ } l_1 \text{ წირი).} \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

მაშასადამე, თუ სრულდება (49) პირობა, მაშინ რეგიონში გვაქვს

$\left( \begin{smallmatrix} \pm \\ x_1; 0 \end{smallmatrix} \right)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა, სადაც:

$$\pm x_1 = \frac{V_1}{2} \pm \frac{V}{2\alpha_1} \sqrt{(\alpha_1)^2 \cdot (e_1)^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1}}.$$

(ნახ 7-ზე წერტილები, რომლებთათვისაც რეგიონში არსებობს

$\left( \begin{smallmatrix} \pm \\ x_1; 0 \end{smallmatrix} \right)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა, მდებარეობენ  $l_1$  წირის

მარჯვნივ).

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ თუ სრულდება პირობა:

$$\lambda_2 \geq \frac{4 \cdot K_2}{(\alpha_2)^2 \cdot (e_2)^2} \quad (50)$$

(წირს, რომლის წერტილები აკმაყოფილებენ პირობებს

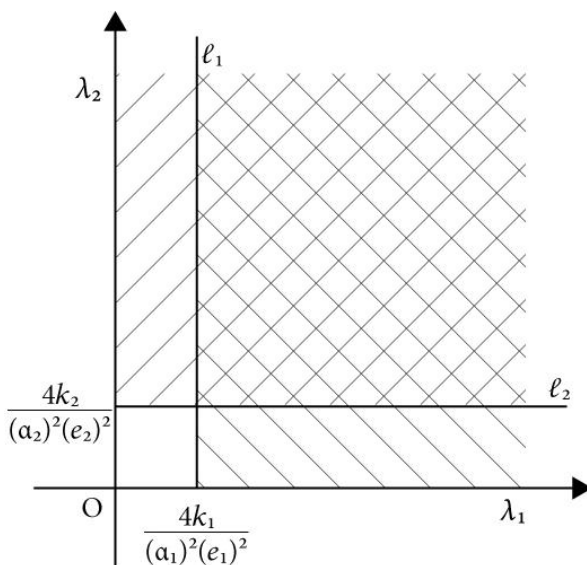
$$\begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 = \frac{4 \cdot K_2}{(\alpha_2)^2 \cdot (e_2)^2}, \text{ დაგარქვათ } l_2 \text{ წირი), მაშინ რეგიონში გვაქვს} \end{cases}$$

$(0; x_2^\pm)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა, სადაც:

$$x_2^\pm = \frac{V_2}{2} \pm \frac{V}{2\alpha_2} \sqrt{(\alpha_2)^2 \cdot (e_2)^2 - \frac{4K_2}{\lambda_2}}.$$

(ნახ 7-ზე წერტილები, რომლებათვისაც რეგიონში არსებობს

$(0; x_2^\pm)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა, მდებარეობენ  $l_2$  წირის ზემოთ).



ნახ. 7

III) ვეძებთ რეგიონში დადებითი წონასწორობის მდგომარეობებს: რა პირობები უნდა დააკმაყოფილოს  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრებმა, რომ რეგიონში არსებობდეს  $x_1 > 0, x_2 > 0$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა. ასეთ შემთხვევაში (44)-დან მივიღებთ:



$$\begin{cases} \frac{\lambda_1 \cdot (V_1 - x_1) \cdot (h_1 x_1 + h_2 x_2)}{V^2 + \lambda_1 \cdot x_1 \cdot (V_1 - x_1) + \lambda_2 \cdot x_2 \cdot (V_2 - x_2)} = h_1 - \alpha_1 \\ \frac{\lambda_2 \cdot (V_2 - x_2) \cdot (h_1 x_1 + h_2 x_2)}{V^2 + \lambda_1 \cdot x_1 \cdot (V_1 - x_1) + \lambda_2 \cdot x_2 \cdot (V_2 - x_2)} = h_2 - \alpha_2 \end{cases} \quad (51)$$

(51) სისტემის პირველი განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\frac{\lambda_1 (V_1 - x_1) \left( \frac{h_1 V_1 + h_2 V_2}{V} - \frac{h_1 (h_1 - \alpha_1)}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1 (V_1 - x_1)}{V(h_1 - \alpha_1)} - \frac{h_2 (h_2 - \alpha_2)}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2 (V_2 - x_2)}{V(h_2 - \alpha_2)} \right)}{V(h_1 - \alpha_1)} = 1$$

$$1 + \sum_{i=1}^2 (h_i - \alpha_i) \frac{\lambda_i (V_i - x_i)}{V(h_i - \alpha_i)} \left( \frac{V_i}{V} - \frac{h_i - \alpha_i}{\lambda_i} \cdot \frac{\lambda_i (V_i - x_i)}{V(h_i - \alpha_i)} \right)$$

როგორც (51)-დან ჩანს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\frac{\lambda_1 \cdot (V_1 - x_1)}{h_1 - \alpha_1} = \frac{\lambda_2 \cdot (V_2 - x_2)}{h_2 - \alpha_2}$$

ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\frac{\lambda_1 \cdot (V_1 - x_1)}{V(h_1 - \alpha_1)} = z$ , მივიღებთ:

$$\frac{z \left( \frac{h_1 V_1 + h_2 V_2}{V} - \frac{h_1 (h_1 - \alpha_1)}{\lambda_1} \cdot z - \frac{h_2 (h_2 - \alpha_2)}{\lambda_2} \cdot z \right)}{1 + (h_1 - \alpha_1) \cdot z \cdot \left( \frac{V_1}{V} - \frac{h_1 - \alpha_1}{\lambda_1} \cdot z \right) + (h_2 - \alpha_2) \cdot z \cdot \left( \frac{V_2}{V} - \frac{h_2 - \alpha_2}{\lambda_2} \cdot z \right)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \left( \frac{h_1 (h_1 - \alpha_1)}{\lambda_1} + \frac{h_2 (h_2 - \alpha_2)}{\lambda_2} \right) \cdot z^2 + \frac{h_1 V_1 + h_2 V_2}{V} \cdot z =$$

$$= - \left( \frac{(h_1 - \alpha_1)^2}{\lambda_1} + \frac{(h_2 - \alpha_2)^2}{\lambda_2} \right) \cdot z^2 + \left( \frac{(h_1 - \alpha_1) \cdot V_1}{V} + \frac{(h_2 - \alpha_2) \cdot V_2}{V} \right) \cdot z + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\alpha_1 \cdot (h_1 - \alpha_1)}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2 \cdot (h_2 - \alpha_2)}{\lambda_2} \right) \cdot z^2 - \frac{\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2}{V} \cdot z + 1 = 0 \quad (52)$$

თუ შემოვიტანთ კიდევ ერთ აღნიშვნას:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \equiv A \quad (53)$$

მაშინ (52) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) \cdot z^2 - A \cdot z + 1 = 0 \quad (54)$$

იმისათვის, რომ (54) განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი, საჭიროა მისი დისკრიმინანტი იყოს არაუარყოფითი:

$$A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) \geq 0 \quad (55).$$

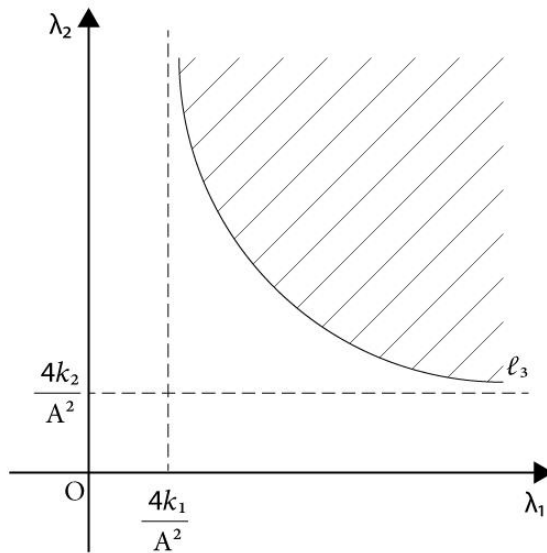
ესაა არე, რომელიც მდებარეობს

$$A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) = 0 \quad (56)$$

ტოლობით მოცემულია ჰიპერბოლის ზევით (წირს, რომლის წერტილები აკმაყოფილებენ (56) პირობას, დავარქვათ  $l_3$  წირი – ნახ.

8). აღნიშნული ჰიპერბოლის ასიმპტოტებია:

$$\lambda_1 = \frac{4K_1}{A^2}, \quad \lambda_2 = \frac{4K_2}{A^2}.$$



ნახ. 8

თუ სრულდება (55) პირობა, მაშინ (54) განტოლების ამონახსნი

მოიცემა ტოლობით:  $z^\pm = \frac{A \pm \sqrt{D}}{2 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)}$ , სადაც  $A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) \equiv D$

თუ გავისხენებთ, რომ  $\frac{\lambda_1 \cdot (V_1 - x_1)}{h_1 - \alpha_1} = \frac{\lambda_2 \cdot (V_2 - x_2)}{h_2 - \alpha_2} = z$ , მაშინ მივიღებთ:

$$x_i^\pm = V_i - V(h_i - \alpha_i) \frac{A \pm \sqrt{D}}{2\lambda_i \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} \quad (57)$$

შეგნიშნოთ, რომ (55) პირობა არის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი იმისათვის, რომ რეგიონში არსებობდეს დადებითი წონასწორობის მდგომარეობა. ვნახოთ დამატებით კიდევ რა პირობები უნდა დააკმაყოფილოს  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრებმა იმისათვის, რომ  $x_1^+ > 0$ ,  $x_2^+ > 0$ ,  $x_1^- > 0$ ,  $x_2^- > 0$ .

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ . ვნახოთ ამ შემთხვევაში გარდა (55) პირობისა კიდევ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრები იმისათვის, რომ  $x_1^+$  იყოს დადებითი.

$$\begin{aligned} V_1 - V(h_1 - \alpha_1) \frac{A + \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} > 0 &\Leftrightarrow \frac{2V_1}{V(h_1 - \alpha_1)} (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) - \lambda_2 A > \lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{2V_1 K_1}{V(h_1 - \alpha_1)} - A \right) \lambda_2 + \frac{2V_1 K_2}{V(h_1 - \alpha_1)} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{2e_1 K_1}{h_1 - \alpha_1} - A \right) \lambda_2 + \frac{2e_1 K_2}{h_1 - \alpha_1} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) \lambda_2 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \end{aligned}$$

უკანასკნელი უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობათა სისტემის:

$$\begin{cases} (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) \lambda_2 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 \geq 0 & (58) \\ (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)^2 (\lambda_2)^2 + \frac{4\alpha_1 e_1 (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) K_2}{K_1} \lambda_1 \lambda_2 + \\ + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^2 > (\lambda_2)^2 D & (59) \end{cases}$$

რადგან  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , ამიტომ (58) უტოლობა ტოლფასია უტოლობის:

$$\lambda_2 \leq \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1} \lambda_1 \quad (60)$$

ვიპოვოთ  $\lambda_2 = \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1} \lambda_1$  წრფისა და  $l_3$  წირის თანაკვეთის

წერტილი:

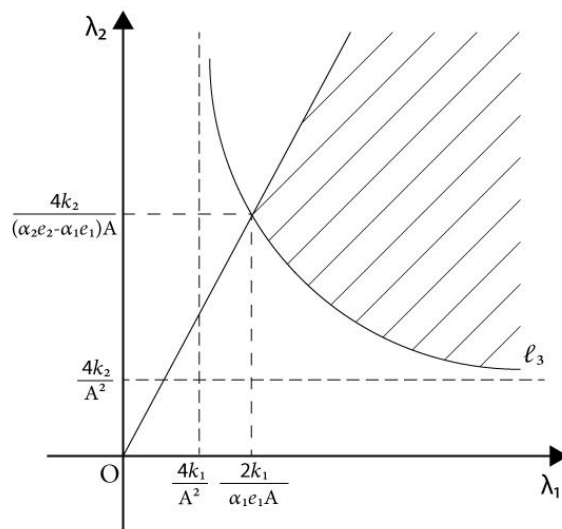
$$A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1} \lambda} \right) = 0 \Leftrightarrow A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1}{2\alpha_1 e_1 \lambda_1} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1} \cdot \left( 1 + \frac{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1)}{2\alpha_1 e_1} \right) = 0 \Leftrightarrow A^2 - \frac{2K_1 A}{\alpha_1 e_1 \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A}.$$

მაშასადამე,  $\lambda_2 = \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1} \lambda_1$  წრფე და  $l_3$  წირი ერთმანთს

ჰკვეთენ წერტილში:  $\left( \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A}; \frac{4K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) A} \right)$ .

მივიღოთ, როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^+$ -ის დადებითობისათვის აუცილებელია რომ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  წერტილი ეკუთვნოდეს (ნახ. 9)-ზე დაშტრიხულ არეს.



ნახ. 9

ენახოთ კიდევ რა პირობა უნდა დააკმაყოფილონ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  პარამეტრებმა იმისათვის, რომ შესრულდეს (59) პირობა, ანუ იმისათვის რომ  $x_1^+$  იყოს დადებითი.

(59)-დან ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_2)^2 - 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 (\lambda_2)^2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 (\lambda_2)^2 + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2}{K_1} \lambda_1 \lambda_2 - \\
& - \frac{4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_2}{K_1} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^2 > (\lambda_2)^2 A^2 - \frac{4K_1 (\lambda_2)^2}{\lambda_1} - 4K_2 \lambda_2 \\
& [(\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 \lambda_1 - A^2 \lambda_1 + 4K_1] (\lambda_2)^2 + \\
& + \left[ \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2}{K_1} (\lambda_1)^2 - \frac{4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_2}{K_1} (\lambda_1)^2 + 4K_2 \lambda_1 \right] \lambda_2 + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^3 > 0 \\
& [-\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + K_1] (\lambda_2)^2 + \frac{K_2 \lambda_1}{K_1} [(\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2] \lambda_1 + K_1 \lambda_2 + \\
& + \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^3 > 0 \tag{61}
\end{aligned}$$

რადგან ჩვენ განვიხილავთ  $\lambda_1$ -ს იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც  
 მეტია ან ტოლი  $\frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A}$ -ზე, ამიტომ:

$$\begin{aligned}
-\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + K_1 & \leq -\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A} + K_1 = K_1 \left( -\frac{2\alpha_2 e_2}{A} + 1 \right) = K_1 \left( \frac{\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2}{A} \right) < 0 \\
-\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + K_1 & \leq -\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A} + K_1 = K_1 \left( -\frac{2\alpha_2 e_2}{A} + 1 \right) = K_1 \left( \frac{\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2}{A} \right) < 0 \tag{62}
\end{aligned}$$

ეს კი ნიშნავს, რომ (61) არის კვადრატული უტოლობა  $\lambda_1$ -ს მიმართ.  
 თუ ამოვხსნით (61) უტოლობის შესაბამის კვადრატულ განტოლებას,  
 ვნახავთ, რომ მისი ფესვებია:

$$\lambda_2^+ = -\frac{K_2 \lambda_1}{K_1}; \quad \lambda_2^- = \frac{\alpha_1^2 e_1^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}$$

ამიტომ (38) უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობის:

$$\left( \lambda_2 + \frac{K_2 \lambda_1}{K_1} \right) \left( \lambda_2 - \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \right) < 0 \tag{63}$$

რადგან  $\lambda_2 + \frac{4K_2 \lambda_1}{K_1} > 0$ , ამიტომ (2.40) ტოლფასია უტოლობის:

$$\lambda_2 < \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \tag{64}$$

შევისწავლოთ წირი:

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \quad (65)$$

(დავარქვათ (65) ტოლობით მოცემულ წირს  $l_4$  წირი).

მისი ვერტიკალური ასიმპტოტია  $\lambda_1 = \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ . რადგან ჩვენ

ვიხილავთ შემთხვევას  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , ამიტომ

$$(\alpha_1)^2 (e_1)^2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 > 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \text{ და}$$

$$\frac{4K_1}{A^2} = \frac{4K_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 + 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} < \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ  $l_4$  წირის ვერტიკალური ასიმპტოტი მდებარეობს  $l_3$  წირის ვერტიკალური ასიმპტოტის ზემოთ.

ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი:

$$k = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 \lambda_1}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} = \frac{\alpha_1 e_1 K_2}{\alpha_2 e_2 K_1}$$

$$b = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} - \frac{\alpha_1 e_1 K_2}{\alpha_2 e_2 K_1} \lambda_1 \right) =$$

$$= \frac{\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 (\lambda_1)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 (\lambda_1)^2 + K_1 \lambda_1}{(\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1) \alpha_2 e_2} \right) = \frac{K_2}{(\alpha_2)^2 (e_2)^2}$$

მაშასადამე დახრილი ასიმპტოტია:

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_1 e_1 K_2}{\alpha_2 e_2 K_1} \lambda_1 + \frac{K_2}{(\alpha_2)^2 (e_2)^2} \quad (66)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ, როცა  $\lambda_1 > \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ , მაშინ (65) წირი

მდებარეობს (66) ასიმპტოტის ზემოთ.

ვიპოვოთ (65) ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები და ექსტრემუმი:

$$(\lambda_2)' = \frac{\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \frac{(\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - 2K_1) \lambda_1}{(\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)^2}.$$

რადგან  $\lambda_1 > 0$ , ამიტომ  $\lambda_2 = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}$  ფუნქცია ზრდადია,

როცა  $\lambda_1 > \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  და კლებადია, როცა  $\lambda_1 < \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ ;  $\frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$

არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და ეს მინიმუმი ტოლია:

$$\frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2}{K_1} \frac{4(K_1)^2}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\alpha_2)^2 (e_2)^2} \cdot \frac{1}{K_1} = \frac{4K_2}{(\alpha_2)^2 (e_2)^2}.$$

ეს ნიშნავს, რომ (65) წირი ეხება  $\lambda_2 = \frac{4 \cdot K_2}{(\alpha_2)^2 \cdot (e_2)^2}$  წრფეს  $-l_2$  წირს.

ენახოთ კვეთს თუ არა ერთმანეთს  $A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) = 0$  ( $l_3$  წირი) და

$\lambda_2 = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}$  ( $l_4$  წირი) წირები საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში.

$$(56)\text{-დან: } \lambda_2 = \frac{4K_2 \lambda_1}{A^2 \lambda_1 - 4K_1}, \quad \frac{4K_2 \lambda_1}{A^2 \lambda_1 - 4K_1} = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$A^2 (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4\alpha_1 e_1 K_1 A \lambda_1 + 4(K_1)^2 = 0 \quad (67)$$

ანუ  $(A\alpha_1 e_1 \lambda_1 - 2K_1) = 0$ .

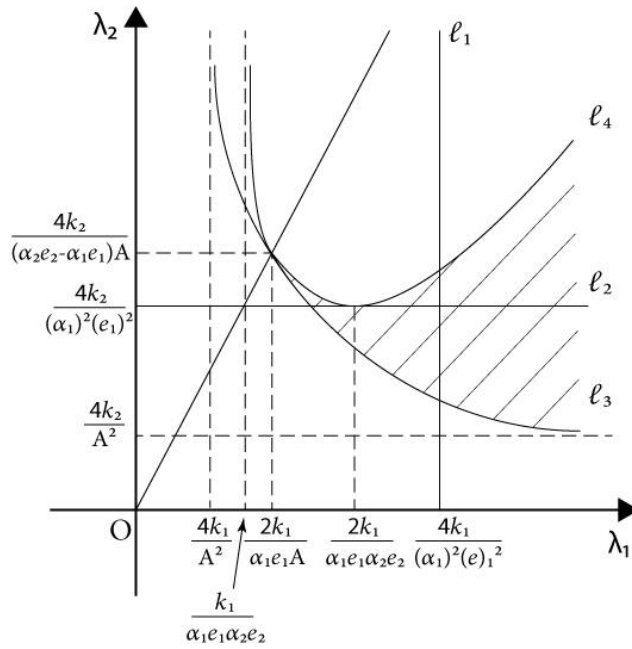
ეს კი ნიშნავს, რომ (56) და (65) წირები ერთმანეთს ეხებიან წერტილში:

$$\left( \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A}; \frac{4K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) A} \right)$$

მაშასადამე, (56) და (65) წირები ერთმანეთს ეხებიან წერტილში,

რომელშიც  $l_3$  წირი და  $\lambda_2 = \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1} \lambda_1$  წრფე ერთმანეთს ჰკვეთენ.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^+$  დადებითია ნახ. 10-ზე დაშტრიხულ სიმრავლეზე.



ნახ. 10

ახლა ვნახოთ, რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრებს იმისათვის, რომ  $x_2^+$  იყოს დადებითი (იგულისხმება, რომ  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ ):

$$x_2^+ = V_2 - V(h_2 - \alpha_2) \frac{A \pm \sqrt{D}}{2\lambda_2 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} \quad (68)$$

თუ ჩავატარებთ იმის ანალიტიკურ გარდაქმნებს, რაც ჩავატარეთ  $x_1^+$ -ის დადებითობის არის დასადგენად მივიღებთ, რომ (68) ტოლფასია უტოლობის:

$$(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_1 + \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{K_2} \lambda_2 > \lambda_1 \sqrt{D} \quad (69)$$

რადგან ჩვენ განვიხილავთ შემდგომეხვევას, როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , ამიტომ (69) უტოლდება მარცხენა მხარე  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს და (69) ტოლფასია უტოლობის:



$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)^2 (\lambda_1)^2 + \frac{4\alpha_2 e_2 (\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1}{K_2} \lambda_1 \lambda_2 + \\
& + \frac{4(\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2}{(K_2)^2} (\lambda_2)^2 \geq (\lambda_1)^2 D
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
& [-\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + K_2] (\lambda_1)^2 + \frac{K_1 \lambda_2}{K_2} [((\alpha_2)^2 (e_2)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2) \lambda_2 + K_2] \lambda_1 + \\
& + \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2}{(K_2)^2} (\lambda_2)^3 > 0
\end{aligned} \tag{71}$$

თუ  $(\lambda_1)^2$ -ის კოეფიციენტი არის 0-ის ტოლი, ანუ თუ  $\lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ ,

მაშინ ასეთი  $\lambda_2$ -თვის:

$$\left( (\alpha_2)^2 (e_2)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \right) \lambda_2 + K_2 = \left( (\alpha_2)^2 (e_2)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \right) \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} + K_2 = \frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} K_2 > 0$$

ამიტომ (71) უტოლობა სრულდება ყოველი დადებითი  $\lambda_1$ -თვის. ეს ნიშნავს, რომ თუ  $\lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ , მაშინ  $x_2^+$  დადებითია (56) პირობით განსაზღვრული არის ყოველ შესაბამის წერტილზე.

თუ  $\lambda_2 \neq \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  და ჩავატარებთ იმის ანალოგიურ გარდაქმნას,

რაც ჩავატარეთ (61) უტოლობის ამოხსნისას, მივიღებთ, რომ (71) უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობის:

$$\left( -\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + K_2 \right) \left( \lambda_1 - \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} \right) > 0 \tag{72}$$

თუ  $\lambda_2 < \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ , მაშინ (72) უტოლობა სრულდება ყოველი

დადებითი  $\lambda_1$ -თვის, ამიტომ ასეთი  $\lambda_2$ -თვის  $x_2^+$  დადებითია (56) პირობით განსაზღვრული არის ყოველ შესაბამის წერტილზე; თუ

$\lambda_2 > \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ , მაშინ (72) უტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როცა  $\lambda_1 < \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}$ .

შევისწავლოთ წირი:

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} \quad (73)$$

(წირს  $\lambda_1 = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}$  დავარქვათ  $l_5$  წირი). (73) წირის

ჰორიზონტალური ასიმპტოტია  $\lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  წრფე ( $l_5$  წირის

ჰორიზონტალური ასიმპტოტი მდებარეობს  $l_3$  წირის ჰორიზონტალური ასიმპტოტის ზემოთ), ხოლო დახრილი ასიმპტოტია წრფე:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_2 e_2 K_1}{\alpha_1 e_1 K_2} \lambda_2 + \frac{K_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2}.$$

$(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში (73)

ფუნქციის მინიმუმის წერტილია:  $\left( \frac{4K_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2}; \frac{2K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} \right)$ .

ვნახოთ აქვთ თუ არა (56) და (73) წირებს საერთო წერტილი  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში:

$$(56)\text{-დან: } \lambda_1 = \frac{4K_1 \lambda_2}{A^2 \lambda_2 - 4K_2}, \quad \frac{4K_1 \lambda_2}{A^2 \lambda_2 - 4K_2} = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}.$$

მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ:

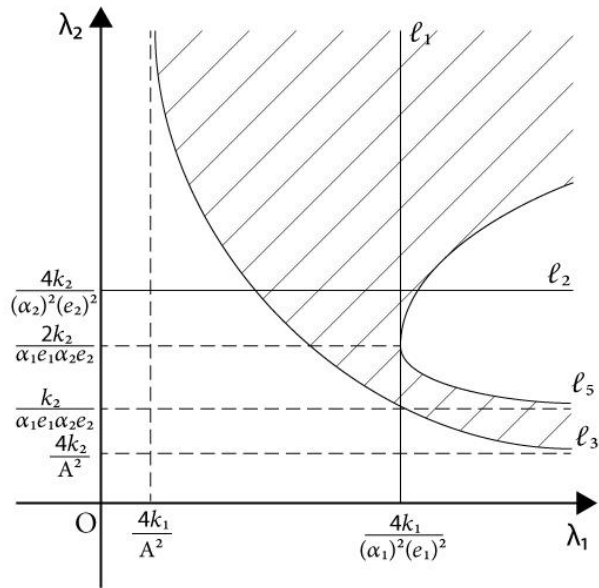
$$\alpha_2 e_2 A \lambda_2 - 2K_2 = 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ (56) და (73) წირების საერთო წერტილია

$$\left( \frac{4K_1}{A(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)}; \frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A} \right)$$

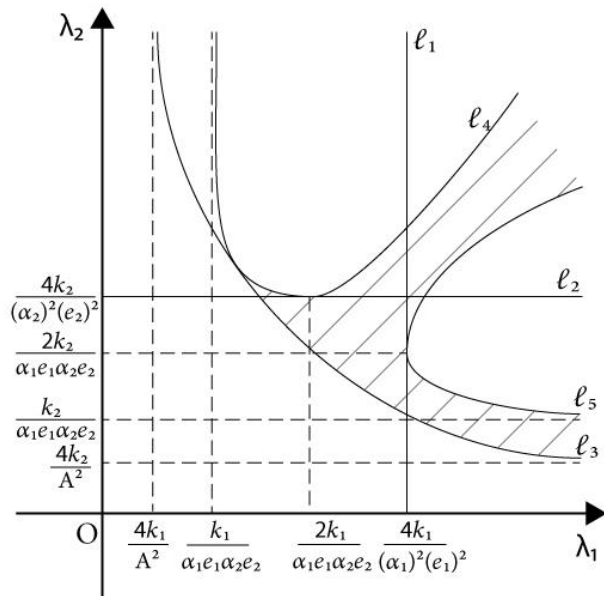
რადგან ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , ამიტომ (56) და (73) წირებს  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში საერთო წერტილი არ აქვთ.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ  $x_2^+$  დადებითია  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში იმ წერტილებზე, რომლებიც დაშტრიხულია ნახ. 11-ზე.



ნახ. 11

მაშასადამე,  $x_1^+$  და  $x_2^+$  სიდიდეები ორივე ერთად დადებითია ნახ. 12-ზე დაშტროხულ არეში.



ნახ. 12

ახლა ვნახოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდნენ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  პარამეტრები იმისათვის, რომ  $x_1^-$  იყოს დადებითი (იგულისხმება, რომ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ ):

$$V_1 - V(h_1 - \alpha_1) \frac{A - \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} > 0 \Leftrightarrow \left( \frac{2V_1 K_1}{V(h_1 - \alpha_1)} - A \right) \lambda_2 + \frac{2V_1 K_2}{V(h_1 - \alpha_1)} \lambda_1 > -\lambda_2 \sqrt{D}$$

$$\left( \frac{2e_1 K_1}{h_1 - \alpha_1} - A \right) \lambda_2 + \frac{2e_1 K_2}{h_1 - \alpha_1} \lambda_1 > -\lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow \left( \frac{2e_1 K_1}{h_1 - \alpha_1} - A \right) \lambda_2 + \frac{2e_1 K_2}{h_1 - \alpha_1} \lambda_1 > -\lambda_2 \sqrt{D}$$

$$(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_2 - \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 < \lambda_2 \sqrt{D}.$$

თუ  $(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_2 - \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 < 0$ , ან რაც იგივეა

$$\lambda_2 < \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)} \lambda_1, \text{ მაშინ}$$

$$(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_2 - \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 < \lambda_2 \sqrt{D}$$

პირობა შესრულდება ყოველი  $\lambda_1$ -თვის.

როცა  $\lambda_2 > \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)} \lambda_1$ , მაშინ  $x_1^-$  არის დადებითი, თუ

სრულდება პირობა:

$$(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_2)^2 - 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 (\lambda_2)^2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 (\lambda_2)^2 + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2}{K_1} \lambda_1 \lambda_2 -$$

$$- \frac{4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_2}{K_1} \lambda_1 \lambda_2 + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^2 < (\lambda_2)^2 A^2 - \frac{4K_1 (\lambda_2)^2}{\lambda_1} - 4K_2 \lambda_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [-\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + K_1] (\lambda_2)^2 + \frac{K_2 \lambda_1}{K_1} [((\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2) \lambda_1 + K_1] \lambda_2 +$$

$$+ \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^3 < 0$$

ესაა კვადრატული უტოლობა  $\lambda_1$ -ს მიმართ. რადგან ჩვენ განვიხილავთ  $\lambda_1$ -ს იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც მეტია ან ტოლი

$\frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A}$ -ზე, ამიტომ:

$$-\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + K_1 \leq -\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \frac{2K_1}{\alpha_1 e_1 A} + K_1 = K_1 \left( \frac{\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2}{A} \right) < 0.$$

მიღებული უტოლობის შესაბამისი კვადრატულ განტოლების ფესვებია:

$$\lambda_2^+ = -\frac{K_2 \lambda_1}{K_1}; \quad \lambda_2^- = \frac{\alpha_1^2 e_1^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1(\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}$$

ამიტომ მოცემული უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობის:

$$\left( \lambda_2 + \frac{K_2 \lambda_1}{K_1} \right) \left( \lambda_2 - \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \right) > 0 \Leftrightarrow \lambda_2 > \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}$$

მაშასადამე, როცა  $\lambda_2 > \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1 (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)} \lambda_1$ , მაშინ  $x_1^-$  არის დადებითი,

თუ სრულდება პირობა:

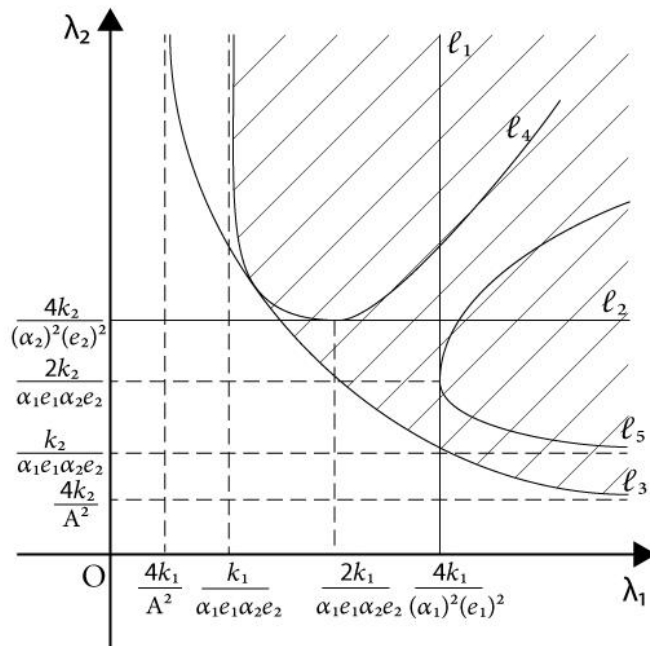
$$\lambda_2 > \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)}$$

რაც შეეხება  $x_2^-$ -ს, ის დადებითია, როცა სრულდება პირობა:

$$(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_1 + \frac{2\alpha_2 e_2 K_2}{K_1} \lambda_1 > -\lambda_2 \sqrt{D} \quad (74)$$

რადგან  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , ამიტომ (74) უტოლობა სრულდება  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის ყოველ წერტილზე.

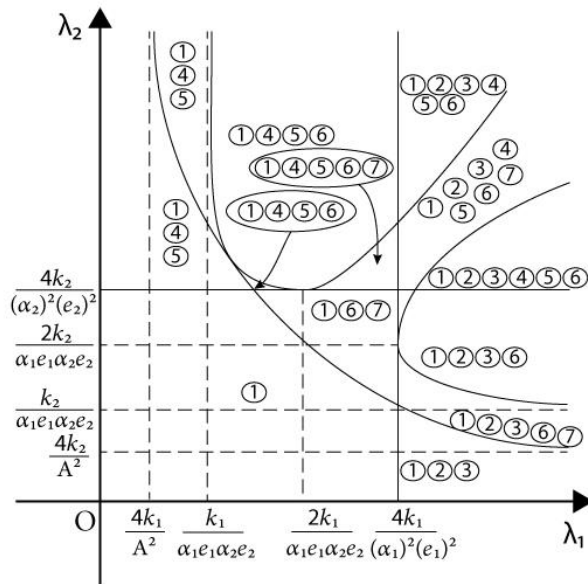
მაშასადამე, თუ  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^-$  და  $x_2^-$  სიდიდეები ორივე ერთად არაუარყოფითია ნახ. 13-ზე დაშტრახულ არეში:



ნახ. 13

თუ ჩვენ 1-ს ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს წონასწორობის  $(0;0)$  მდგომარეობა, 2-ს ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს  $(\bar{x}_1; 0)$  წონასწორობის მდგომარეობა, 3-ს

ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს წონსასწორობის  $\begin{pmatrix} + \\ x_1; 0 \end{pmatrix}$  მდგომარეობა, 4-ს ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს წონსასწორობის  $\begin{pmatrix} - \\ 0; x_2 \end{pmatrix}$  მდგომარეობა, 5-ს ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს წონსასწორობის  $\begin{pmatrix} + \\ 0; x_2 \end{pmatrix}$  მდგომარეობა, 6-ს ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს წონსასწორობის  $\begin{pmatrix} - \\ x_1; x_2 \end{pmatrix}$  მდგომარეობა, 7-ს ჩავწერთ იმ არეში, რომელშიც არსებობს წონსასწორობის  $\begin{pmatrix} + \\ x_1; x_2 \end{pmatrix}$  მდგომარეობა, მაშინ, როცა  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , მივიღებთ ნახ. 14-ზე მოცემულ სურათს:



ნახ. 14

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$ . იმისათვის, რომ  $x_1^+$  იყოს დადებითი, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$V_1 - V(h_1 - \alpha_1) \frac{A + \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} > 0 \Leftrightarrow (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) \lambda_2 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \quad (75)$$

რადგან  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$ , ამიტომ (75) უტოლობის მარცხეხა მხარეში მდგარი გამოსახულება  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ

მეოთხედში ღებულობს დადებით მნიშვნელობას და (75) უტოლობა ტოლფასია უტოლობის:

$$\begin{aligned} & [-4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 + 4K_1](\lambda_2)^2 + \frac{4K_2 \lambda_1}{K_1} \left[ ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2) \lambda_1 + K_1 \right] \lambda_2 + \\ & + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^3 > 0 \end{aligned} \quad (76)$$

თუ  $(\lambda_2)^2$ -ის კოეფიციენტი არის 0-ის ტოლი, ანუ თუ  $\lambda_1 = \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ ,

მაშინ ასეთი  $\lambda_1$ -თვის:

$$\left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \right) \lambda_1 + K_1 = \left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \right) \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} + K_1 = \frac{\alpha_1 e_1}{\alpha_2 e_2} K_1 > 0$$

ამიტომ (76) უტოლობა სრულდება ყოველი დადებითი  $\lambda_2$ -თვის. ეს

ნიშნავს, რომ თუ  $\lambda_1 = \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$ , მაშინ  $x_1^+$  დადებითია (76) პირობით

განსაზღვრული არეს ყოველ შესაბამის წერტილზე.

თუ  $\lambda_1 \neq \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  და ჩავატარებთ იმის ანალოგიურ გარდაქმნებს, რაც

ჩავატარეთ (61)-ის ამოსხნისას, მივიღებთ, რომ (76) ტოლფასია უტოლობის:

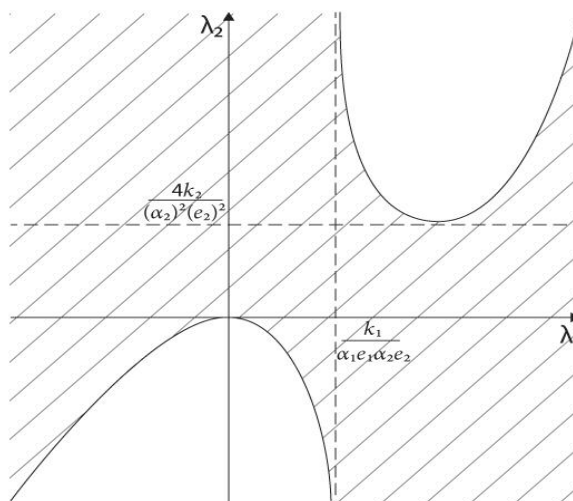
$$\left( -\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + K_1 \right) \left( \lambda_2 - \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 < \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} \\ \lambda_2 > \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \end{cases} \quad (77)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 > \frac{K_1}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} \\ \lambda_2 < \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_1)} \end{cases}$$

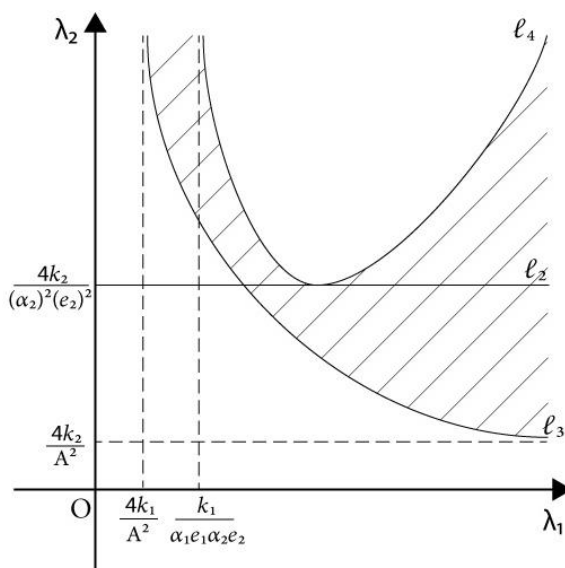
თუ გავიხსენებთ  $\lambda_2 = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 - K_1)}$  წირის გრაფიკს, მივიღებთ,

რომ (77) სრულდება ნახ. 15-ზე მოცემულ დაშტრიხულ არეში:



ნახ.15

თუ გავიხსენებთ, რომ  $x_1^+$ -ის დადებითობისათვის აუცილებელია შესრულდეს (56) პირობა და ამასთან  $\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0$ , მივიღებთ, რომ  $x_1^+ > 0$  როცა  $(\lambda_1; \lambda_2)$  ეკუთვნის ნახ. 16-ზე დაშტრიხულ არეს.



ნახ. 16

ახლა ვნახოთ, თუ რა სიმრავლეზეა დადებითი  $x_2^+$  იმ შემთხვევაში, როცა  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$  - ამოვხსნათ (69) უტოლობა იმ შემთხვევაში, როცა  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$ . ამ შემთხვევაში (69) ტოლფასია უტოლობათა სისტემის:



$$\begin{cases} (\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_1 + \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{K_2} \lambda_2 \geq 0 & (78.1) \\ (\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1)^2 (\lambda_1)^2 + \frac{4\alpha_2 e_2 (\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) K_1}{K_2} \lambda_1 \lambda_2 + \\ + \frac{4(\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2}{(K_2)^2} (\lambda_2)^2 \geq (\lambda_1)^2 D & (78.2) \end{cases}$$

(78.1) ტოლფასია უტოლობის:  $\lambda_1 \leq \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) K_2} \lambda_2$ .

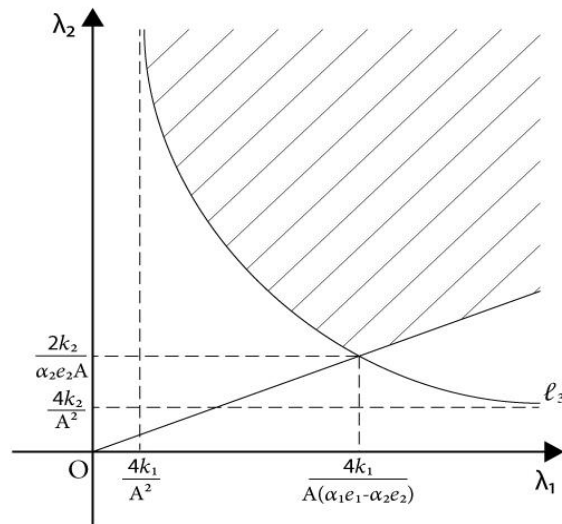
ვიპოვოთ  $\lambda_1 = \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) K_2} \lambda_2$  და  $A^2 - 4 \cdot \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) = 0$  წირების

თანაკვეთის წერტილი:

$$A^2 - 4 \cdot \left( \frac{(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) K_2}{2\alpha_2 e_2 \lambda_2} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right) = 0;$$

$$\lambda_2 = \frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A}; \lambda_1 = \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) K_2} \cdot \frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A} = \frac{4K_1}{(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) A}$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ  $x_2^+$  იყოს დადებითი, აუცილებელია  $(\lambda_1; \lambda_2)$  წერტილი ეკუთვნოდეს ნახ. 17-ზე დაშტრიხულ არეს.



ნახ.17

ახლა ვნახოთ, რა პირობები უნდა დააკმაყოფილოს  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრებმა იმისათვის, რომ შესრულდეს (78.2) პირობა. თუ ჩავატარებთ იგივე გარდაქმნებს, რომელთა საშუალებითაც მივიღეთ, რომ (69) უტოლობა ტოლფასია (71)-ის, გვექნება, რომ (78.2) ტოლფასია უტოლობის:

$$\begin{aligned} & [-4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + 4K_2](\lambda_1)^2 + \frac{4K_1 \lambda_2}{K_2} [((\alpha_2)^2 (e_2)^2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2) \lambda_2 + K_2] \lambda_1 + \\ & + \frac{4(\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2}{(K_2)^2} (\lambda_2)^3 > 0 \end{aligned} \quad (79)$$

რადგან ჩვენ განვიხილავთ  $\lambda_2$ -ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც მეტია ან ტოლი  $\frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A}$ , ამიტომ:

$$\begin{aligned} -4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + 4K_2 &\leq -4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 \cdot \frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A} + 4K_2 = \\ &= 4K_2 \left( \frac{-2\alpha_1 e_1}{A} + 1 \right) = 4K_2 \frac{\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1}{A} < 0 \end{aligned}$$

ამიტომ (79) არის კვადრატული უტოლობა  $\lambda_1$ -ს მიმართ. შესაბამისი კვადრატული განტოლების ფესვებია:

$$\lambda_1^+ = -\frac{K_1 \lambda_2}{K_2}; \quad \lambda_1^- = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}.$$

ამიტომ (79) ტოლფასია უტოლობის:

$$\left( -4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + 4K_2 \right) \left( \lambda_1 + \frac{K_1 \lambda_2}{K_2} \right) \left( \lambda_1 - \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} \right) > 0 \quad (80)$$

რადგან  $-4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + 4K_2 < 0$ ,  $\lambda_1 + \frac{K_1 \lambda_2}{K_2} > 0$ , ამიტომ (80) უტოლობა

ტოლფასია უტოლობის:

$$\lambda_1 - \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} < 0 \quad (81)$$

წირი  $\lambda_1 = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}$  იგივეა, რაც (73) ტოლობით მოცემული

წირი. როგორც ვნახეთ, მისი ვერტიკალური ასიმპტოტია  $\lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$

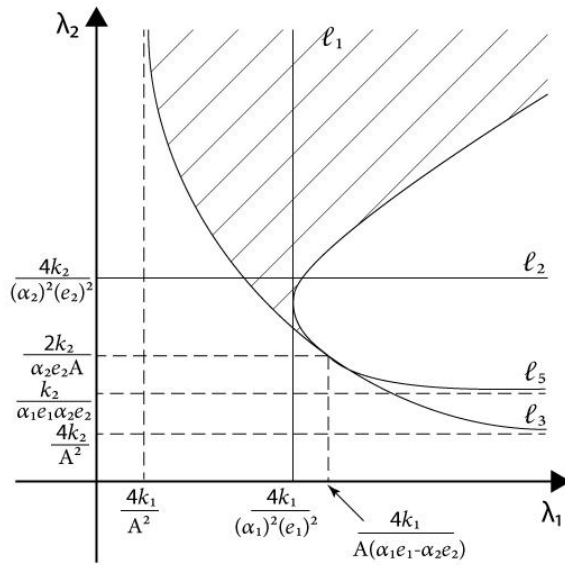
წრფე, ხოლო დახრილი ასიმპტოტია  $\lambda_1 = \frac{\alpha_2 e_2 K_1}{\alpha_1 e_1 K_2} \lambda_2 + \frac{K_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2}$  წრფე.

$(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში მისი მინიმუმის

წერტილია:  $\left( \frac{4K_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2}; \frac{2K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2} \right)$ .

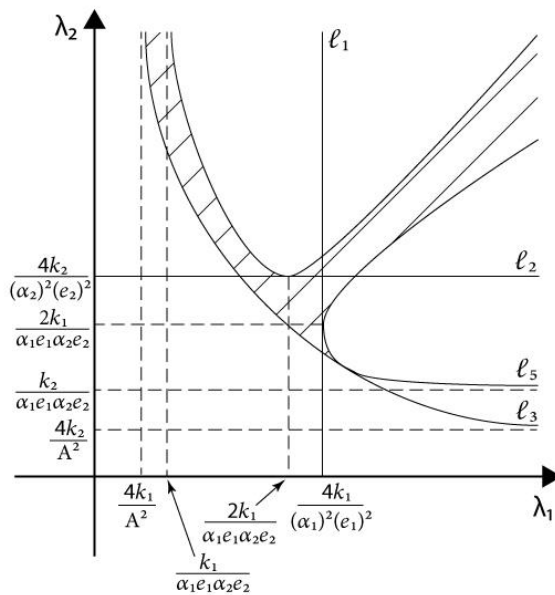
ამ წირის (56) წირთან შეხების წერტილია  $\left( \frac{4K_1}{A(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)}; \frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A} \right)$ .

ყოველივე ზემოთქმულს თუ გავითვალისწინებთ მივიღებთ, რომ  $x_2^+$  დადებითია  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში იმ წერტილებზე, რომლებიც დაშტრიხულია ნახ. 18-ზე.



ნახ.18

მაშასადამე, თუ  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^+$  და  $x_2^+$  სიდიდეები ორივე ერთად დადებითია ნახ. 19-ზე დაშტრიხულ არეში.



ნახ. 19

ახლა ვნახო, რა პირობები უნდა დააკმაყოფილონ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  წერტილის კოორდინატებმა იმისათვის, რომ  $x_1^-$  იყოს დადებითი.

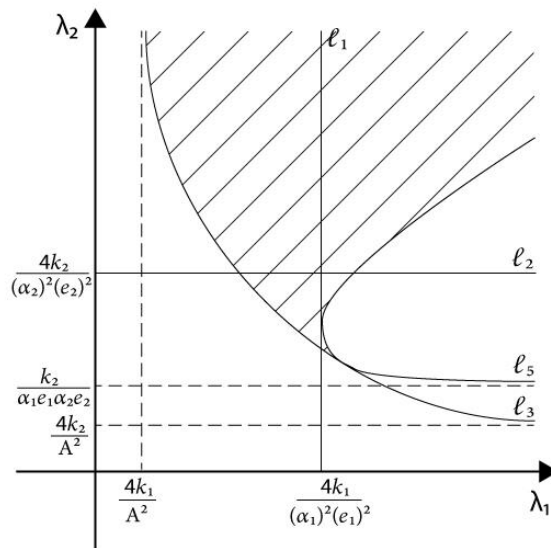
$$(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) \lambda_2 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 > -\lambda_2 \sqrt{D} \quad (82)$$

რადგან  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$ , ამიტომ (82) პირობა სრულდება  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის ყოველ წერტილზე.

ახლა ვნახოთ  $x_2^-$ -ს დადებითობის პირობა:

$$(\alpha_2 e_2 - \alpha_1 e_1) \lambda_1 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_1}{K_2} \lambda_2 > -\lambda_1 \sqrt{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 < \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{K_2(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)} \lambda_2 \\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \\ \lambda_1 > \frac{2\alpha_2 e_2 K_1}{K_2(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)} \lambda_2 \\ \lambda_1 > \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2(\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_1 - K_2)} \end{cases}$$

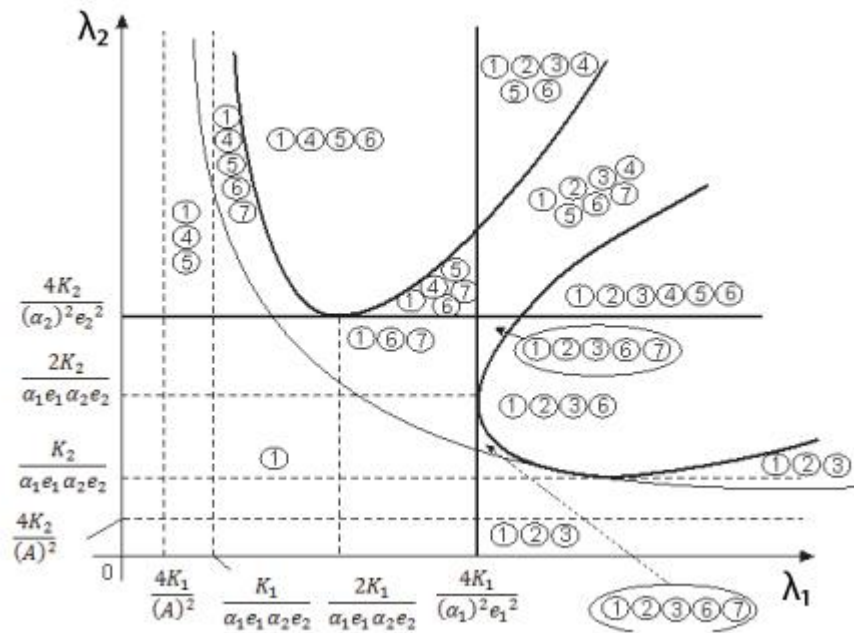
მაშასადამე, თუ  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^-$  და  $x_2^-$  სიდიდეები ორივე ერთად დადებითია ნახ. 20-ზე დაშტრიხულარეზე.



ნახ. 20

თუ გამოვიყენებთ იმავე აღნიშვნებს, რომლებიც გამოვიყენეთ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის არეებში წონასწორობის მდგომარეობის აღსანიშნავად იმ შემთხვევაში, როცა

$\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $\alpha_1 e_1 > \alpha_2 e_2$  შემთხვევაში გვექნება ნახ. 21-ზე მოცემული სურათი:



ნახ. 21

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ . ამოგხსნათ  $x_1^+ > 0$  უტოლობა ამ შემთხვევაში.

$$V_1 - V(h_1 - \alpha_1) \frac{A + \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} > 0 \Leftrightarrow (2\alpha_1 e_1 - A)\lambda_2 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)\lambda_2 + \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow \frac{2\alpha_1 e_1 K_2}{K_1} \lambda_1 > \lambda_2 \sqrt{D} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^3 > A^2 (\lambda_2)^2 \lambda_1 - 4K_1 (\lambda_2)^2 - 4K_2 \lambda_1 \lambda_2 \Leftrightarrow$$

$$\left( -A^2 \lambda_1 + 4K_1 \right) (\lambda_2)^2 + 4K_2 \lambda_1 \lambda_2 + \frac{4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2}{(K_1)^2} (\lambda_1)^3 > 0 \quad (83)$$

(55) პირობის ძალით, იმისათვის, რომ არსებობდეს  $x_1^+$  აუცილებელია, რომ  $\lambda_1 > \frac{4K_1}{A^2}$  (იხ. ნახ. 6), ამიტომ  $-A^2 \lambda_1 + 4K_1 < 0$  და

(83) არის კვადრატული უტოლობა  $\lambda_2$ -ს მიმართ. (83) უტოლობის შესაბამისი კვადრატული განტოლების ფესვებია:

$$\lambda_2^+ = -\frac{K_2 \lambda_1}{K_1}; \quad \lambda_2^- = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)}.$$

ამიტომ (83) უტოლობა ტოლფასია უტოლობის:

$$\begin{aligned} & \left( -4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 + 4K_1 \right) \left( \lambda_2 + \frac{K_2 \lambda_1}{K_1} \right) \left( \lambda_2 - \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)} \right) > 0 \Leftrightarrow \\ & \lambda_2 < \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)} \end{aligned} \quad (84)$$

შევსწავლოთ წირი:

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)} \quad (85)$$

მისი ვერტიკალური ასიმპტოტია:  $\lambda_1 = \frac{K_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2}$ .

როგორც ვხედავთ, როცა  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ , მაშინ (85) წირის ვერტიკალური ასიმპტოტი იგივეა, რაც (56) წირის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 \lambda_1}{K_1 ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)} = \frac{K_2}{K_1} \\ b &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} (\lambda_2 - k\lambda_1) = \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1 ((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)} - \frac{K_2}{K_1} \lambda_1 \right) = \\ &= \frac{K_2}{K_1} \lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 + K_1 \lambda_1}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1} \right) = \frac{K_2}{(\alpha_1)^2 (e_1)^2} \end{aligned}$$

მაშასადამე, (85) წირის დახრილი ასიმპტოტია:  $\lambda_2 = \frac{K_2}{K_1} \lambda_1 + \frac{K_2}{(\alpha_2)^2 (e_2)^2}$ .

ვიპოვოთ (85) წირის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები და მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილები:

$$(\lambda_2)' = \frac{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2}{K_1} \frac{((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - 2K_1) \lambda_1}{((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - K_1)^2}$$

რადგან  $\lambda_1 > 0$ , ამიტომ  $\lambda_2 = \frac{(\alpha_1)^2(e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1((\alpha_1)^2(e_1)^2 \lambda_1 - K_1)}$  ფუნქცია ზრდადია,

როცა  $\lambda_1 > \frac{2K_1}{(\alpha_1)^2(e_1)^2}$  და კლებადია, როცა  $\lambda_1 < \frac{2K_1}{(\alpha_1)^2(e_1)^2}$ ;  $\frac{2K_1}{(\alpha_1)^2(e_1)^2}$

არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და ეს მინიმუმია  $\lambda_2 = \frac{4K_2}{(\alpha_2)^2(e_2)^2}$ .

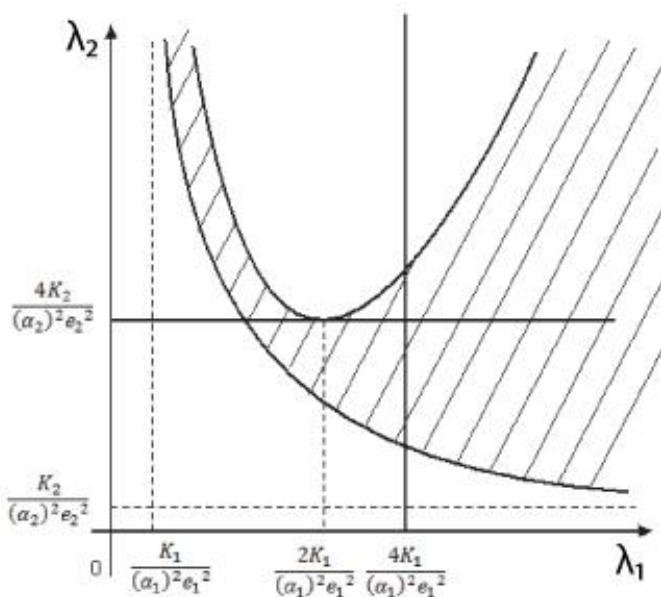
ეს ნიშნავს, რომ (85) წირი ეხება  $\lambda_2 = \frac{4 \cdot K_2}{(\alpha_2)^2 \cdot (e_2)^2}$  წრფეს ( $l_1$  წირი).

გნახოთ, როცა  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ , მაშინ აქვთ თუ არა საერთო წერტილი  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში (56) და (85) წირებს. (56)-დან:

$$\lambda_2 = \frac{K_2 \lambda_1}{(\alpha_1)^2(e_1)^2 \lambda_1 - K_1} \Rightarrow \frac{K_2 \lambda_1}{(\alpha_1)^2(e_1)^2 \lambda_1 - K_1} = \frac{(\alpha_1)^2(e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2}{K_1((\alpha_1)^2(e_1)^2 \lambda_1 - K_1)}$$

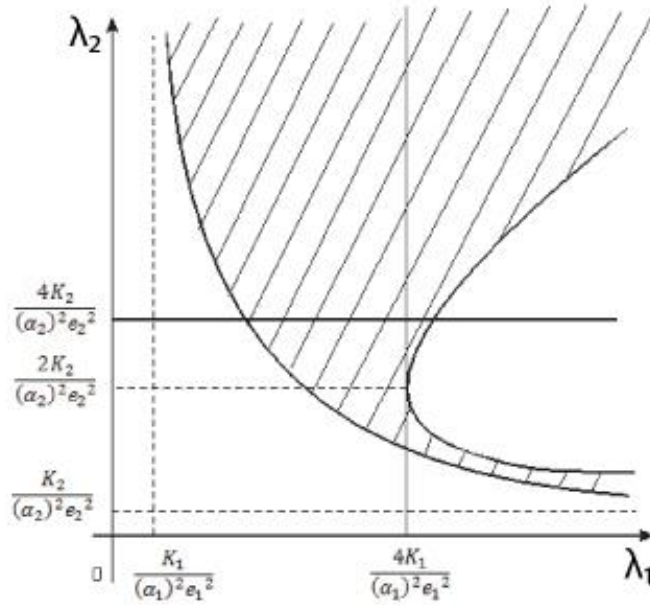
რადგან ჩვენ განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $\lambda_1 > 0$  და  $\lambda_2 > 0$ , ამიტომ (56) და (85) წირებს საერთო წერტილები არ გააჩნიათ.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ როცა  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^+$  დადებითია ნახ. 22-ზე დაშტრიხულ სიმრავლეზე.



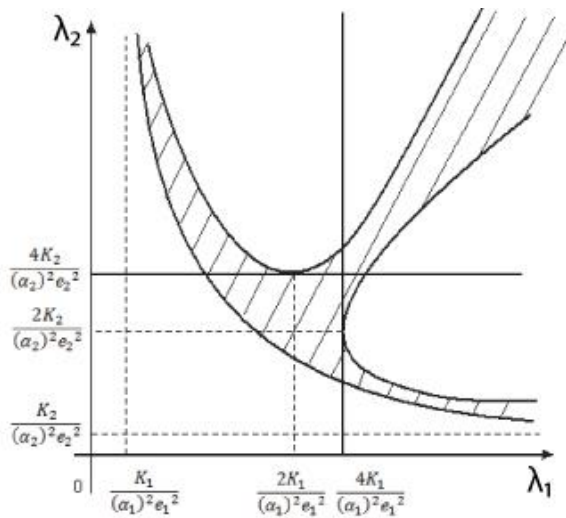
ნახ. 22

ზუსტად ისევე, როგორც დავადგინეთ  $x_1^+$ -ს დადებითობის არე, შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ  $x_2^+$ -ის დადებითობის არეა ნახ. 23-ზე მოცემული დაშტრიხული სიმრავლე.



ნახ. 23

მაშასადამე, თუ  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^+$  და  $x_2^+$  სიდიდეები ორივე ერთად დადებითია ნახ. 24-ზე დაშტრიხულ სიმრავლეზე:



ნახ. 24

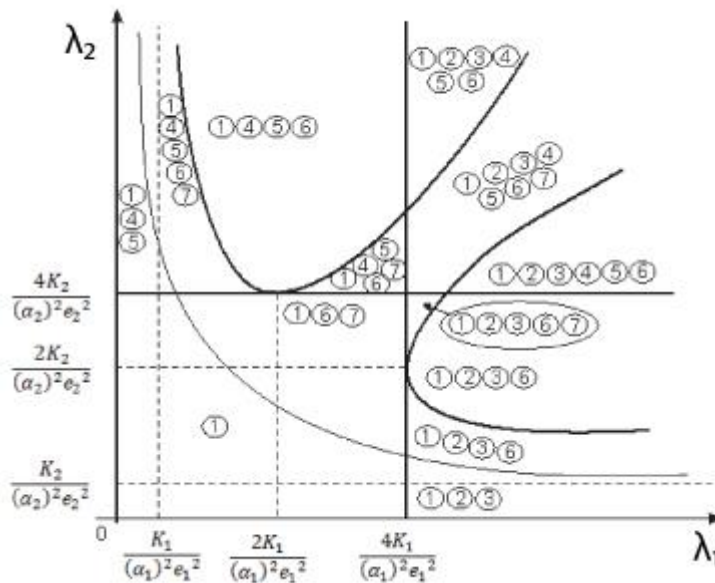
თუ  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ , მაშინ  $x_1^- > 0$  უტოლობა ტოლფასია უტოლობის:



$$\frac{2\alpha_i e_i K_j}{K_i} \lambda_i > -\lambda_j \sqrt{D}.$$

(აქ თუ  $i = 1$ , მაშინ  $j = 2$ ; თუ  $i = 2$ , მაშინ  $j = 1$ )

ეს უკანასკნელი პირობა სრულდება  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის ყოველ წერტილზე, ანუ თუ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  წერტილი ეკუთვნის (56) პირობით განსაზღვრულ არეს, მაშინ აუცილებლად  $x_1^- > 0, x_2^- > 0$ . მაშასადამე, როცა  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ , მაშინ გვაქვს ნახ. 25-ზე მოცემული სურათი:



ნახ. 25

მივიღეთ, რომ, იმისდამიხედვით, თუ რა მნიშვნელობებს ღებულობენ  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრები, რეგიონში არსებობს სხვადასხვა სახის წონასწორობის მდგომარეობები: I) ნულოვანი წონასწორობის მდგომარეობა; II.1)  $\left(x_1^\pm; 0\right)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა; II.2)  $\left(0; x_2^\pm\right)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა; III.1)  $\left(x_1^+; x_2^+\right)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა და III.2)  $\left(x_1^-; x_2^-\right)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობა.

## 2.3 ბიფურკაციის წირები

$x_i = 0$ ,  $x_i^+$ ,  $x_i^-$ ,  $x_i^+$  და  $x_i^-$  ფუნქციების გრაფიკები აღვნიშნოთ შესაბამისად  $0_i, I_i^+, I_i^-, I_i^+, I_i^-$ . თითოეული ფუნქცია განსაზღვრულია  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის გარკვეულ არეში.  $\pi^p(A)$ -თი აღვნიშნოთ  $A$  სიმრავლის პროექცია  $(\lambda_1; \lambda_2)$  სიბრტყეზე. ვთვლით, რომ მაკროსისტემა ერთი სახის წონასწორობის მდგომარეობიდან გადავა მეორე სახის წონასწორობის მდგომარეობაში მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ა) პარამეტრების ახალი (შეცვლილი) მნიშვნელობებისათვის არ არსებობს საწყისი სახის წონასწორობის მდგომარეობა, ან ბ)  $(\lambda_1; \lambda_2)$  პარამეტრების რომელიღაც მნიშვნელობებისთვის განსხვავებული სახის წონასწორობის მდგომარეობები ღებულობენ ერთსა და იმავე მნიშვნელობებს. ყოველი ამის გამო ჩვენთვის მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ შემდეგი პროექციები:

$$\begin{aligned}
 & \pi\left(0_i \cap I_i^+\right), \pi\left(0_i \cap I_i^-\right), \pi\left(0_i \cap I_i^+\right), \pi\left(0_i \cap I_i^-\right), \pi\left(I_i^+ \cap I_i^-\right), \\
 & \pi\left(I_i^+ \cap I_i^+\right), \pi\left(I_i^+ \cap I_i^-\right), \pi\left(I_i^- \cap I_i^+\right), \pi\left(I_i^- \cap I_i^-\right), \pi\left(I_i^+ \cap I_i^-\right).
 \end{aligned}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ჩვენი მიზანია  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში მოვძებნოთ  $(\lambda_1; \lambda_2)$  პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომლებისთვისაც სრულდება ერთ-ერთი მაინც შემდეგი ტოლობებიდან:

$$\begin{aligned}
 & x_i^+ = 0, \quad x_i^- = 0, \quad x_i^+ = 0, \quad x_i^- = 0, \quad x_i^+ = x_i^-, \quad x_i^- = x_i^+, \quad x_i^+ = x_i^-, \quad x_i^- = x_i^+, \\
 & x_i^- = x_i^-, \quad x_i^+ = x_i^+.
 \end{aligned}$$

1.  $x_i^+ = 0$

$$x_i^+ = 0 \frac{V_i}{2} + \frac{V}{2\alpha_i} \sqrt{(\alpha_i)^2 e^2 - \frac{4K_i}{\lambda_i}} = 0 \tag{86}$$

მარცხენა მხარეში მდგომი პირველი შესაკრები დადებითია, მეორე კი არაუარყოფითი, ამიტომ (86) განტოლებას ამონახსნი არა აქვს.

$$2. \bar{x}_i = 0 \Leftrightarrow \frac{V_i}{2} - \frac{V}{2\alpha_i} \sqrt{(\alpha_i)^2 (e_i)^2 - \frac{4K_i}{\lambda_i}} = 0 \quad (87)$$

$$\frac{V_i}{2} - \frac{V}{2\alpha_i} \sqrt{(\alpha_i)^2 (e_i)^2 - \frac{4K_i}{\lambda_i}} = \frac{V_i}{2} - \frac{V_i}{2} \sqrt{1 - \frac{4K_i}{(\alpha_i)^2 (e_i)^2 \lambda_i}} > 0$$

ამიტომ (87) განტოლებას ამონახსნი არ აქვს:

$$\pi\left(0_i \cap \bar{I}_i\right) = \emptyset$$

$$3. x_i^+ = 0 \Leftrightarrow V_i - V(h_i - \alpha_i) \frac{A + \sqrt{D}}{2\lambda_i \left(\frac{K_i}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2}\right)} = 0 \Leftrightarrow \quad (88)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_i e_i - \alpha_j e_j) \lambda_j + \frac{2\alpha_i e_i K_j}{K_i} \lambda_i = \lambda_j \sqrt{D} \quad (89)$$

3.1  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ . თუ გავყვებით  $x_1^+ > 0$  და  $x_2^+ > 0$  უტოლობების ამონახსნის გზას, ვნახავთ, რომ  $x_1^+ = 0$  ტოლობა სრულდება  $l_4$  წირის იმ წერტილებზე, რომელთა  $\lambda_1$  კოორდინატი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\lambda_1 \geq \frac{2K_i}{\alpha_i e_i A}, \text{ ხოლო } x_2^+ = 0 \text{ ტოლობა სრულდება } l_5 \text{ წირის ყველა}$$

წერტილზე.

3.2  $\alpha_1 e_1 < \alpha_2 e_2$ . ამ შემთხვევაში  $x_1^+ = 0$  ტოლობა სრულდება  $l_4$  წირის ყველა წერტილზე, ხოლო  $x_2^+ = 0$  პირობა კი  $l_5$  წირის იმ წერტილებზე, რომელთა  $\lambda_2$  კოორდინატი აკმაყოფილებს პირობას:

$$\lambda_2 \geq \frac{2K_2}{\alpha_2 e_2 A}.$$

3.3  $\alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2$ . ამ შემთხვევაში  $x_1^+ = 0$  ტოლობა სრულდება  $l_4$  წირის ყველა წერტილზე, ხოლო  $x_2^+ = 0$  პირობა კი  $l_5$  წირის ყველა წერტილზე.

რადგან  $(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველ მეოთხედში  $l_4$  და  $l_5$  წირები არ თანაიკვეთებიან, ამიტომ არ არსებობს  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$

პარამეტრების ისეთი დადებითი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც  $\begin{cases} x_1^+ = 0 \\ x_2^+ = 0 \end{cases}$

$$4. \begin{cases} x_1^- = 0 \\ x_2^- = 0 \end{cases} \quad (90)$$

$(\lambda_1; \lambda_2)$  საკოორდინატო სიბრტყის პირველი მეოთხედის იმ წერტილებზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (55) პირობას,  $x_i^+ \geq x_i^-$ . რადგან არ არსებობს წერტილი, რომელზედაც სრულდება ორივე

$$\text{პირობა: } \begin{cases} x_1^+ = 0 \\ x_2^+ = 0 \end{cases}, \text{ ამიტომ მით უფრო არ იარსებებს წერტილი რომელ}$$

წერტილზედაც შესრულდება (90) პირობა.

$$5. x_i^+ = x_i^- \Leftrightarrow \frac{V_i}{2} + \frac{V}{2\alpha_i} \sqrt{(\alpha_i)^2 e_i^2 - \frac{4K_i}{\lambda_i}} = \frac{V_i}{2} - \frac{V}{2\alpha_i} \sqrt{(\alpha_i)^2 (e_i)^2 - \frac{4K_i}{\lambda_i}}$$

ეს უტოლობა სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\sqrt{(\alpha_i)^2 (e_i)^2 - \frac{4K_i}{\lambda_i}} = 0, \text{ ანუ როცა } \lambda_i = \frac{4K_i}{(\alpha_i)^2 (e_i)^2}.$$

$$6. x_i^+ = x_i^-$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება იმ შემთხვევაში, როცა  $i = 1$  (ანალოგიურად ამოიხსნება განტოლება იმ შემთხვევაში, როცა  $i = 2$ ):

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V}{2\alpha_1} \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1}} = V_1 - V(h_1 - \alpha_1) \frac{A + \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1}} = \alpha_1 e_1 - K_1 \frac{A + \sqrt{D}}{\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1} = \alpha_1 e_1 \lambda_1 - K_1 \frac{(A + \sqrt{D}) \lambda_1 \lambda_2}{K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 e_1 \lambda_1 - \frac{K_1 A \lambda_1 \lambda_2}{K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1} = \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1} + \frac{K_1 \sqrt{D} \lambda_1 \lambda_2}{K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 e_1 K_2 \lambda_1 - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2) \lambda_1 =$$

$$= (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1} + K_1 \sqrt{D} \lambda_1 \lambda_2 \quad (91)$$

ავიყვანოთ (91) ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2 (\lambda_1)^4 - 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_1 K_2 (\lambda_1)^3 \lambda_2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 = \\
& = \left( (K_1)^2 (\lambda_2)^2 + 2K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2 + (K_2)^2 (\lambda_1)^2 \right) \left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1 \right) + \\
& + 2(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) K_1 \sqrt{\left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1 \right) \frac{A^2 \lambda_1 \lambda_2 - 4(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2} \lambda_1 \lambda_2 +} \\
& + (K_1)^2 \left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 + 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1} - \frac{4K_2}{\lambda_2} \right) (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2 (\lambda_1)^4 - 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_1 K_2 (\lambda_1)^3 \lambda_2 + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 = \\
& = (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_1)^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 + 2(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_1 K_2 (\lambda_1)^3 \lambda_2 + (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_2)^2 (\lambda_1)^4 - \\
& - 4(K_1)^3 \lambda_1 (\lambda_2)^2 - 8(K_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2 \lambda_2 - 4K_1 (K_2)^2 (\lambda_1)^3 + \\
& + (\alpha_1)^2 (e_1)^2 (K_1)^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 + 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 (K_1)^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 + \\
& + (\alpha_2)^2 (e_2)^2 (K_1)^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 - 4(K_1)^3 \lambda_1 (\lambda_2)^2 - 4(K_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2 \lambda_2 + \\
& + 2(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) K_1 \sqrt{\left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - 4K_1 \right) \left( A^2 \lambda_1 \lambda_2 - 4(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \right) \lambda_2} \cdot \lambda_1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_1 (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) (\lambda_1)^2 \lambda_2 + 2(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_1 (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \lambda_1 - \\
& - 8(K_1)^2 (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \lambda_1 \lambda_2 - 4K_1 K_2 (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) (\lambda_1)^2 = \\
& = -2(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) K_1 \sqrt{\left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - 4K_1 \right) \left( A^2 \lambda_1 \lambda_2 - 4(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \right) \lambda_2} \cdot \lambda_1 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow -\alpha_1 e_1 A \lambda_1 \lambda_2 + 4K_1 \lambda_2 + 2K_2 \lambda_1 = \\
& = \sqrt{\left( (\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - 4K_1 \right) \left( A^2 \lambda_1 \lambda_2 - 4(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \right) \lambda_2} \tag{92}
\end{aligned}$$

ავიყვანოთ (92) ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში:

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1)^2 (e_1)^2 A^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 + 16(K_1)^2 (\lambda_2)^2 + 4(K_2)^2 (\lambda_1)^2 - \\
& - 8\alpha_1 e_1 K_1 A \lambda_1 (\lambda_2)^2 - 4\alpha_1 e_1 K_2 A (\lambda_1)^2 \lambda_2 + 16K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2 = \\
& = (\alpha_1)^2 (e_1)^2 A^2 (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 - 4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_1 \lambda_1 (\lambda_2)^2 - 4(\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_2 (\lambda_1)^2 \lambda_2 - \\
& - 4K_1 A^2 \lambda_1 (\lambda_2)^2 + 16(K_1)^2 (\lambda_2)^2 + 16K_1 K_2 \lambda_1 \lambda_2 \Leftrightarrow \\
& (K_2)^2 \lambda_1 - 2\alpha_1 e_1 K_1 A (\lambda_2)^2 - \alpha_1 e_1 K_2 A \lambda_1 \lambda_2 + (\alpha_1)^2 (e_1)^2 K_1 (\lambda_2)^2 +
\end{aligned}$$

$$+(\alpha_1)^2(e_1)^2 K_2 \lambda_1 \lambda_2 + K_1 A^2 (\lambda_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}$$

მივიღეთ ჩვენთვის ნაცნობი  $l_5$  წირის განტოლება.

$l_5$  წირის განტოლება ჩვენ მივიღეთ (91) ტოლობის ორივე მხარეს კვადრატში აყვანის შედეგად, ამიტომ საჭიროა ვიპოვოთ  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებიც არაა გარეშე ფესვი (91) განტოლებისათვის. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებისთვისაც (91) და (92) განტოლების მარცხენა მხარე არის არაუარყოფითი. ჯერ ვახვენოთ, რომ  $l_5$  წირის ყველა წერტილზე (91) ტოლობის მარცხენა მხარე არის არაუარყოფითი:

$$\alpha_1 e_1 K_2 \lambda_1 - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2 = \alpha_1 e_1 K_2 \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2 =$$

$$\alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2 \frac{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - \alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 + K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2} = \frac{\alpha_2 e_2 K_1 K_2 \lambda_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2}$$

რადგან  $\lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  წრფე წარმოადგენს  $l_5$  წირის ასიმპტოტებს,

ამიტომ  $l_5$  წრფის ყოველი წერტილისათვის  $\lambda_2 > \frac{K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  და ამიტომ

$\frac{\alpha_2 e_2 K_1 K_2 \lambda_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2} > 0$ . ეს კი ნიშნავს, რომ  $l_5$  წრფის ყოველ წერტილზე

(91) უტოლობის მარცხენა მხარე არის დადებითი და (91)  $\Leftrightarrow$  (92).

ახლა ვიპოვოთ  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომელ წერტილებზეც (92) უტოლობის მარცხენა მხარე არის არაუარყოფითი:

$$-\alpha_1 e_1 A \lambda_1 \lambda_2 + 4K_1 \lambda_2 + 2K_2 \lambda_1 = -(\alpha_1 e_1 A \lambda_2 - 2K_2) \lambda_1 + 4K_1 \lambda_2 =$$

$$-(\alpha_1 e_1 A \lambda_2 - 2K_2) \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} + 4K_1 \lambda_2 =$$

$$-K_1 \lambda_2 \frac{\alpha_1 e_1 A (\alpha_2)^2 (e_2)^2 (\lambda_2)^2 - 2(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_2 \lambda_2 - 4\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 K_2 \lambda_2 + 4(K_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)} =$$

$$\begin{aligned}
& -K_1\lambda_2 \frac{(\alpha_1)^2(e_1)^2(\alpha_2)^2(e_2)^2(\lambda_2)^2 - 4\alpha_1e_1\alpha_2e_2K_2\lambda_2 + 4(K_2)^2}{K_2(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - K_2)} - \\
& -K_1\lambda_2 \frac{(\alpha_2)^2(e_2)^2(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - 2K_2)\lambda_2}{K_2(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - K_2)} = \\
& = -K_1\lambda_2 \cdot \frac{[(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - 2K_2)^2 + (\alpha_2)^2(e_2)^2(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - 2K_2)\lambda_2]}{K_2(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - K_2)}.
\end{aligned}$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ, წერტილი  $\left(\frac{4K_1}{(\alpha_1)^2(e_1)^2}; \frac{2K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2}\right)$  არის  $l_2$

და  $l_5$  წირების შესხების წერტილი. წერტილებისთვის, რომლებიც მდებარეობენ ამ წერტილის ზემოთ,  $\lambda_2 > \frac{2K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2}$ , ამიტომ მიღებული

წილადის მრიცხველი არის უარყოფითი.

$$\text{თუ } \frac{K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2} < \lambda_2 < \frac{2K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2} \text{ (გავიხსენოთ, რომ } \lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2} \text{ წრფე}$$

არის  $l_5$  წირის მხები წრფე), მაშინ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებულ გამოსახულებას ასე ჩავწერთ:

$$(\alpha_1e_1\alpha_2e_2\lambda_2 - 2K_2)(\alpha_2e_2A\lambda_2 - 2K_2) \quad (93)$$

თუ  $\alpha_1e_1 \leq \alpha_2e_2$ , მაშინ:

$$\begin{aligned}
& \alpha_2e_2A\lambda_2 - 2K_2 > \alpha_2e_2A \frac{K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2} - 2K_2 = \\
& = K_2 \left( \frac{A}{\alpha_1e_1} - 2 \right) \geq K_2 \left( \frac{2\alpha_1e_1}{\alpha_1e_1} - 2 \right) = 0
\end{aligned}$$

თუ  $\alpha_1e_1 > \alpha_2e_2$ , მაშინ ჩვენ გვაინტერესებს  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებისთვისაც  $\lambda_2 < \frac{2K_2}{\alpha_2e_2A}$  (როცა  $\lambda_2 = \frac{2K_2}{\alpha_2e_2A}$ , მაშინ  $l_5$  წირი ეხება  $l_3$  წირს). ასეთი  $\lambda_2$ -თვის (93)-ის მეორე თანამართავი არის დადებითი.

მაშასადამე, (92) განტოლების ამონახსნია  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებისთვისაც  $x_1^+ > 0$ ,  $x_2^+ > 0$  და რომლებიც მდებარეობენ

$$\lambda_2 = \frac{2K_2}{\alpha_2e_2A} \text{ წრფის ქვემოთ.}$$

ანალოგიურად ამოიხსნება განტოლება  $x_2^+ = x_2^+$  და მიიღება, რომ ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ  $l_4$  წირის ის წერტილები, რომლებისთვისაც  $x_2^+ > 0$  და რომლებიც მდებარეობენ  $\lambda_2 = \frac{2K_2}{\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2}$  წრფის მარცხნივ.

7.  $x_i^+ = x_i^-$

ამოვხსნათ ეს განტოლება  $i = 1$ -თვის:

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V}{2\alpha_1} \sqrt{(\alpha_1)^2 \cdot (e_1)^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1}} = V_1 - V(h_1 - \alpha_1) - \frac{A - \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} \quad (94)$$

თუ ჩავატარებთ იმის ანალოგიურ გარდაქმნებს, რაც ჩავატარეთ  $x_i^+ = x_i^+$  განტოლების ამოხსნისას, მივიღებთ, რომ (94) ტოლფასია შემდეგი განტოლების:

$$(\alpha_1 e_1 K_2 \lambda_1 - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2) \lambda_1 = (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1} - K_1 \sqrt{D} \lambda_1 \lambda_2 \quad (95)$$

ტოლობის ორივე მხარის კვადრატში აყვანით და შემდგომი გამარტივებით (ისევე, როგორც (91) განტოლების შემთხვევაში) მივიღებთ:

$$\alpha_1 e_1 A \lambda_1 \lambda_2 - 4K_1 \lambda_2 - 2K_2 \lambda_1 = \sqrt{((\alpha_1)^2 (e_1)^2 \lambda_1 - 4K_1) (A^2 \lambda_1 \lambda_2 - 4(K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1))} \lambda_2 \quad (96)$$

(96) ტოლობის ორივე მხარის კვადრატში აყვანით და შემდგომი გამარტივებით (ისევე, როგორც (92) განტოლების შემთხვევაში) მივიღებთ, რომ (96) განტოლების ამონახსნია  $l_5$  წირის წერტილები:

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha_2)^2 (e_2)^2 K_1 (\lambda_2)^2}{K_2 (\alpha_1 e_1 \alpha_2 e_2 \lambda_2 - K_2)}$$

ვიპოვოთ  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებიც არაა გარეშე ფესვი (95) განტოლებისათვის. ამისათვის საკმარისია, რომ ვიპოვოთ  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებისთვისაც სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

(I)  $(\alpha_1 e_1 K_2 \lambda_1 - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2) \lambda_1 + K_1 \sqrt{D} \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$



$$(II) (K_1\lambda_2 + K_2\lambda_1)^2((\alpha_1)^2(e_1)^2(\lambda_1)^2 - 4K_1\lambda_1) - (\alpha_1e_1K_2\lambda_1 - \alpha_2e_2K_1\lambda_2)^2(\lambda_1)^2 - \\ - (K_1)^2(\lambda_1)^2(\lambda_2)^2 D = 2(\alpha_1e_1K_2\lambda_1 - \alpha_2e_2K_1\lambda_2)K_1\sqrt{D}(\lambda_1)^2\lambda_2.$$

ტოლობის ორივე მხარეში იდგეს ერთნაირი ნიშნის გამოსახულებები.

როგორც ზემოთ ვნახეთ (როდესაც ვახევენთ, რომ (91) ტოლობის მარცხენა მხარე არის დადებითი),  $l_5$  წირის წერტილებისთვის  $\alpha_1e_1K_2\lambda_1 - \alpha_2e_2K_1\lambda_2 > 0$ , ამიტომ (I) პირობას აკმაყოფილებს  $l_5$  წირის ყოველი წერტილი, ხოლო (II) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი გამოსახულება არის დადებითი. დაგვრჩა ვიპოვოთ  $l_5$  წირის ის წერტილები, რომლებისთვისაც (II) ტოლობის მარცხენა მხარე არის დადებითი:

$$\lambda_2 = \frac{2K_2}{\alpha_2e_2A} \quad (97)$$

თუ  $\alpha_1e_1 \leq \alpha_2e_2$ , მაშინ:

$$\frac{2K_2}{\alpha_2e_2A} = \frac{2K_2}{\alpha_2e_2(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2)} \leq \frac{2K_2}{\alpha_2e_2 \cdot 2\alpha_1e_1} = \frac{K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2}$$

მაგრამ წრფე  $\lambda_2 = \frac{K_2}{\alpha_1e_1\alpha_2e_2}$  არის  $l_5$  წირის კორიზონტალური

ასიმპტოტი. ეს ნიშნავს, რომ თუ  $\alpha_1e_1 \leq \alpha_2e_2$ , მაშინ  $l_5$  წირის არც ერთი წერტილი არ აკმაყოფილებს (97) პირობას და ამიტომ ტოლობას  $x_1^+ = x_1^-$  ადგილი არ ექნება  $l_5$  წირის არც ერთ წერტილზე. ამ შემთხვევაში  $\pi(I_1^+ \cap I_1^-) = \emptyset$ .

თუ  $\alpha_1e_1 > \alpha_2e_2$ , მაშინ  $\lambda_2 = \frac{2K_2}{\alpha_2e_2A}$ -თვის  $l_5$  წირი ეხება  $l_3$  წირს.

ამიტომ (97) პირობა შესრულდება  $l_5$  წირის იმ ნაწილზე, რომელიც მდებარეობს  $l_5$  და  $l_3$  წირის შეხების წერტილის ქვემოთ.

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ როცა  $\alpha_1e_1 \geq \alpha_2e_2$ , მაშინ  $\pi(I_2^+ \cap I_2^-) = \emptyset$ , ხოლო, როცა  $\alpha_1e_1 < \alpha_2e_2$ , მაშინ ტოლობას  $x_2^+ = x_2^-$

ადგილი აქვს  $L_4$  წირის იმ ნაწილზე, რომელიც მდებარეობს  $L_4$  და  $L_3$  წირების შეხების წერტილის მარცხნივ.

$$8. \bar{x}_i = x_i^+$$

ამოვხსნათ ეს განტოლება იმ შემთხვევაში, როცა  $i = 1$ :

$$\frac{V_1}{2} - \frac{V}{2\alpha_1} \sqrt{(\alpha_1)^2 \cdot (e_1)^2 - \frac{4K_1}{\lambda_1}} = V_1 - V(h_1 - \alpha_1) \frac{A + \sqrt{D}}{2\lambda_1 \left( \frac{K_1}{\lambda_1} + \frac{K_2}{\lambda_2} \right)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 e_1 K_2 \lambda_1 - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2) \lambda_1 = K_1 \sqrt{D} \lambda_1 \lambda_2 - (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1}$   
 ისევე, როგორც წინა შემთხვევაში, ამ ტოლობის კვადრატში აყვანით და მიღებული ტოლობის გამარტივების შემდეგ კიდევ ერთხელ კვადრატში აყვანით მივიღებთ, რომ ტოლობას ადგილი აქვს  $L_5$  წირზე.

$$9. \bar{x}_i = x_i^-$$

ამოვხსნათ განტოლება, როცა  $i = 1$ .

$$(\alpha_1 e_1 K_2 \lambda_1 - \alpha_2 e_2 K_1 \lambda_2) \lambda_1 = -K_1 \sqrt{D} \lambda_1 \lambda_2 - (K_1 \lambda_2 + K_2 \lambda_1) \sqrt{(\alpha_1)^2 (e_1)^2 (\lambda_1)^2 - 4K_1 \lambda_1}$$

როგორც ვნახეთ  $L_5$  წირის წერტილებისათვის ტოლობის მარცხენა მხარე არის დადებითი, ხოლო მაჯვენა მხარე კი უარყოფითი, ამიტომ  $\bar{x}_1 = x_1^-$  განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე არის ცარიელი სიმრავლე.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ  $\bar{x}_2 = x_2^-$  განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა.

$$10. x_i^+ = x_i^-.$$

ამ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ, როცა  $D = 0$ , ანუ ტოლობას ადგილი აქვს  $L_3$  წირზე.

## 2.4 ბიფურკაციები და ქაოსი არაწრფივ სისტემებში

ჩვენ განვიხილავთ დინამიკურ სისტემებს. დინამიკური სისტემა ესაა სტრუქტურა, რომელიც დროში იცვლება. თვალსაჩინოებისათვის ჩვენ განვიხილავთ დინამიკურ სისტემებს, რომელთა დახასიათება, მოდელირება შეიძლება ერთი ცვლადის  $f$  ფუნქციის საშუალებით [31].

ვთქვათ  $x_0$  რაიმე ფიქსირებული რიცხვია.  $x_0$  წერტილის ორბიტა ეწოდება მიმდევრობას, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით:

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^{(n)}(x_0)$$

როგორც ვიცით, თუ  $f$  არის კუმშვითი ასახვა, მაშინ  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  მიმდევრობა ყოველთვის კრებადია  $f$  ფუნქციის უძრავი წერტილისაკენ ( $f(a)=a$ ) და ზღვარის მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული საწყისი წერტილის არჩევაზე. ეს ნიშნავს, რომ თუ დინამიკური სისტემა აღიწერება კუმშვითი ასახვის საშუალებით, მაშინ ეს სისტემა ყოველთვის მიისწრაფვის ერთი და იგივე მდგომარეობისაკენ. ჩვენ განვიხილავთ ისეთ დინამიკურ სისტემებს, რომელთა მახასიათებელი ფუნქციები არ წარმოადგენენ კუმშვით ასახვებს. ცხადია იმისათვის, რომ ფუნქციას ჰქონდეს უძრავი წერტილი, არაა აუცილებელი, რომ ეს ფუნქცია იყოს კუმშვითი. საკმარისია, რომ განტოლებას  $f(x)=x$  ჰქონდეს ამონახსნი.

ვთქვათ  $a$  არის  $f(x)$  ფუნქციის უძრავი წერტილი. ვიტყვით, რომ უძრავი წერტილი არის მიზიდვის წერტილი თუ არსებობს  $a$  წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოდან აღებული ნებისმიერი წერტილის ორბიტა კრებადია  $a$ -კენ.

ვიტყვით, რომ უძრავი წერტილი არის განმზიდავი, თუ არსებობს  $a$  წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოდან აღებული ნებისმიერი წერტილის ორბიტა  $a$ -ს შორდება. მტკიცდება, რომ I) თუ  $a$  არის  $f$  ფუნქციის უძრავი წერტილი,  $f$  ფუნქციის წარმოებული უწყვეტია და  $|f'(a)| < 1$ , მაშინ  $a$  მიზიდვის წერტილია; II) თუ  $a$  არის  $f$  ფუნქციის უძრავი წერტილი,  $f$  ფუნქციის წარმოებული უწყვეტია და  $|f'(a)| > 1$ , მაშინ უძრავი  $a$  წერტილი იქნება განმზიდავი [31].

შენიშვნა: განმზიდავი წერტილის განმარტებისას ვთქვით, რომ არსებობს ისეთი  $B_\delta(a)$  მიდამო, რომ ამ მიდამოდან ყოველი წერტილის ორბიტა შორდება  $a$ -ს. „შორდება“ ასე უნდა გავიგოთ: თუ  $x_n \in B_\delta(a)$ , მაშინ  $|x_{n+1} - a| > |x_n - a|$ . მაგრამ ეს სულაც არ ნიშნავს, რომ ნებისმიერი  $n$ -თვის  $|x_{n+1} - a| > |x_n - a|$ . შეიძლება ორბიტის რომელიმე წერტილი

$x_n \notin B_\delta(a)$ , მაგრამ  $x_{n+1} \in B_\delta(a)$ . ე.ი. წერტილის ორბიტა შორდება  $a$  წერტილს  $B_\delta(a)$  მიდამოს შიგნით.

თუ  $|f(a)|=1$ , მაშინ  $a$  წერტილი შეიძლება იყოს მიზიდვის, განმზიდველი, ან არც ერთი და არც მეორე.

ვიტყვი, რომ  $x_0$  წერტილის ორბიტა პერიოდულია  $p$  პერიოდით, თუ არსებობს ისეთი  $p \in \mathbb{N}$ , რომ  $x_{n+p} = x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . ცხადია, რომ თუ  $p$  არის ორბიტის პერიოდი, მაშინ ყოველი  $k \in \mathbb{N}$ -თვის, პერიოდი იქნება  $kp$ -ც. შემდეგში, ყოველთვის პერიოდის ქვეშ ვიგულისხმებთ უმცირესს პერიოდებს შორის.

თუ ტოლობას  $x_{n+p} = x_n$  ადგილი აქვს მაშინ, როცა  $n \geq n_0 > 0$ , მაშინ ვიტყვი, რომ ორბიტა არის საბოლოო ჯამში პერიოდული.

ჩვენს მიერ შესწავლილ მათემატიკურ მოდელებში მიზიდვის ფუნქციები ლოგისტიკური ფუნქციებია, ამიტომ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა დინამიკური სისტემა აღიწერება ლოგისტიკური ფუნქციის საშუალებით:  $f(x) = cx(1-x)$  (მიუხედავად ამ ფუნქციის მარტივი სახისა, მრავალი დინამიკური სისტემა შეიძლება აღიწეროს ამ ფუნქციით, ან ფუნქციით რომელსაც „აქვს მსგავსი თვისებები“).

$f(x) = cx(1-x)$  ფუნქციის უძრავი წერტილებია  $\xi = 0$  და  $\eta = \frac{c-1}{c}$  წერტილები. თუ  $c \in (-1; 1)$ , მაშინ  $\xi = 0$  არის მიზიდვის წერტილი, ხოლო  $\eta = \frac{c-1}{c}$  კი განზიდვის წერტილი. თუ  $1 < c < 3$ , მაშინ პირიქით:

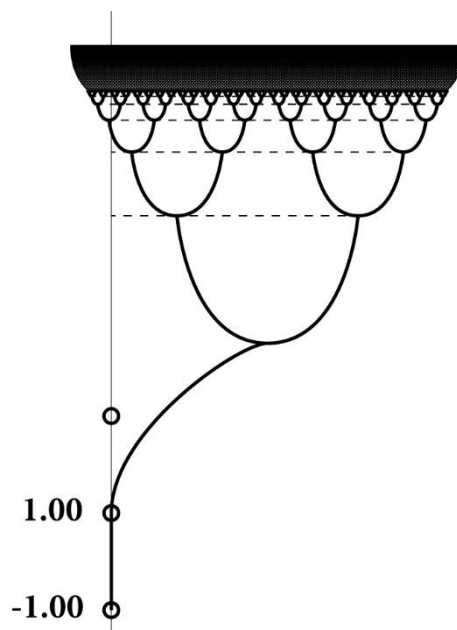
$\xi = 0$  არის განზიდვის წერტილი, ხოლო  $\eta = \frac{c-1}{c}$  კი მიზიდვის წერტილი. მაშასადამე,  $c_0 = 1$ -თვის სისტემა განიცდის თვისობრივ ცვლილებას: მიზიდვის წერტილი გარდაიქმნება განზიდვის წერტილად, ხოლო განზიდვის წერტილი კი მიზიდვის წერტილად.  $c$ -ს ზრდასთან ერთად  $|f'(\eta)|$  იზრდება და შემდეგი თვისობრივი ცვლილება ხდება  $c_1 = 3$  წერტილზე: როცა  $c > 3$ , მაშინ  $|f'(\eta)| > 1$  და  $\eta$  ხდება განმზიდავი წერტილი, ამავე დროს ჩნდება  $f^{(2)}(x) = f(f(x))$  ფუნქციის 2 ახალი

მიმზიდავი უძრავი წერტილი:  $\frac{c+1+\sqrt{(c-3)(c+1)}}{2c}$  და  $\frac{c+1-\sqrt{(c-3)(c+1)}}{2c}$

(ცხადია, რომ ამ წერტილების ორბიტები არიან პერიოდული ორბიტები პერიოდით 2). ასეთ დროს ამბობენ, რომ  $f$  ფუნქცია განიცდის პერიოდის გაორმაგების ბიფურკაციას, როცა  $c$  გადაივლის  $c_1 = -3$  წერტილზე. პერიოდის გაორმაგების ეს პროცესი გრძელდება  $c$ -ს შემდეგი მნიშვნელობებისათვისაც, ვლებულობთ 4, 8, 16, 32, ... პერიოდულ წერტილებს, რომელთა ორბიტების პერიოდია შესაბამისად 8; 16; 32; . . . ფეიგენბაუმის მიერ დამტკიცებული იქნა, რომ ფუნქციათა საკმაოდ ფართე კლასისთვის ეს პროცესი (პერიოდის გაორმაგება ბიფურკაციის წერტილებში) გრძელდება უსასრულოდ [30] და თუ  $c_n$ -ით აღვნიშნავთ  $2^n$  პერიოდის შესაბამის ბიფურკაციის წერტილებს, მაშინ არსებობს ზღვარი  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c_\infty$ .

$c_\infty$ -ს ზოგჯერ ფეიგენბაუმის რიცხვს უწოდებენ. სიმრავლეს  $c$ -ებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $c > c_\infty$ , ქაოსის არე ეწოდება.

თუ ორდინატთა ღერძზე გადავზომავთ  $c$ -ს მნიშვნელობებს, ხოლო აბსცისათა ღერძზე კი პერიოდული ორბიტის მქონე წერტილებს, მივიღებთ შემდეგ სურათს (ნახ 26):



ნახ. 26

შედეგი, რომელიც მიიღო ფეიგენბაუმმა, მდგომარეობს შემდეგში: არსებობს ზღვარი:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n}.$$

$d$ -ს მნიშვნელობა ფუნქციათა საკმაოდ ფართე კლასისათვის ერთი და იგივეა და ტოლია 4,669162... ამიტომ  $d$ -ს უწოდებენ ფეიგენბაუმის უნივერსალურ მუდმივას.  $d$ -ს მნიშვნელობა გამოიყენება ქაოსის დადგომის წინასწარმეტყველებისათვის.

ვთქვათ  $\lambda_n = c_n - c_{n-1}$ . რადგან  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}$ . ამიტომ შეგვიძლია

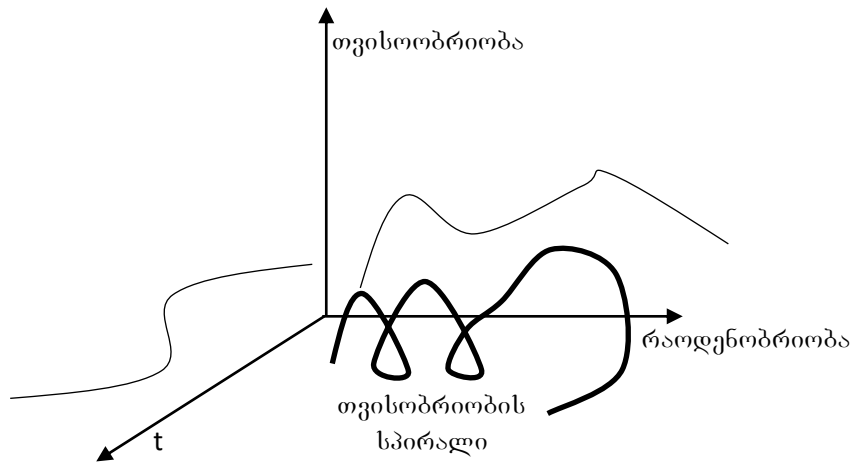
დავწეროთ შემდეგი მიახლოებითი ტოლობები:  $\lambda_n = \frac{\lambda_{n-1}}{d} = \dots = \frac{\lambda_1}{d^{n-1}}$ .

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n-1} + \lambda_n = c_{n-1} + \frac{\lambda_1}{d^{n-1}} = c_{n-2} + \lambda_{n-1} + \frac{\lambda_n}{d^{n-1}} \approx \\ &\approx c_{n-2} + \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{d^{n-1}} \right) \lambda_1 = \dots = c_0 + \left( 1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \dots + \frac{1}{d^{n-1}} \right) \lambda_1 \end{aligned}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა  $n \rightarrow \infty$ , მივიღებთ:  $c_\infty = c_0 + \frac{d}{d-1} \lambda_1$

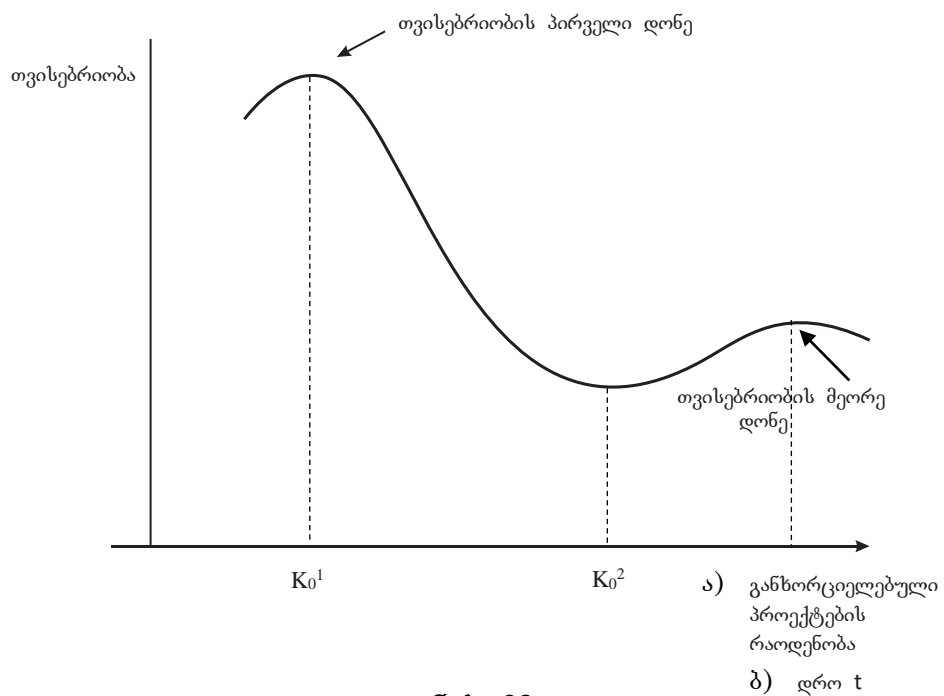
**ქაოსი ურბანულ სისტემაში.** ურბანული სისტემის განვითარების დინამიკის ობიექტური და კომპლექსური შესწავლისათვის, მისი ადეკვატური ინტერპრეტაციისათვის აუცილებელია დავადგინოთ კავშირი ურბანული სისტემის “რაოდენობრივ” ცვლილებასა და მის “თვისობრიობას” შორის. მითუმეტეს, როდესაც კავშირი მათ შორის არაწრფივია. ამ დროს რაოდენობრივი პარამეტრების, მაგალითად სატრანსპორტო მაგისტრალების ცვლილებისას, ან სხვადასხვა ობიექტების მშენებლობისას შესაძლებელია მოხდეს ურბანული სისტემის თვისობრივი მახასიათებლის მკვეთრი ცვლილება, ადგილი ჰქონდეს ბიფურკაციებსა და ქაოსს.

ურბანული სისტემის ერთი თვისობრივი მდგომარეობიდან მეორეში გადასვლა ხორციელდება არაწრფივი კანონის სახით. „თვისობრიობასა“ და „რაოდენობრიობას“ და დროით კავშირს აქვს სპირალის ხასითი (ნახ 27).



ნახ. 27

სოციალური სისტემების სხვადასხვა ნაწილების ურთიერთქმედებათა კანონების არაწრფივობა წარმოადგენს თვითორგანიზაციის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს პირობას დროსა და სივრცეში. რაოდენობრივი ცვლილების გადასვლა თვისობრივში და პირიქით ეფუძნება დიალექტიკის კანონს. ცნობილია, რომ თვისობრივი მახასიათებლის ერთი დონიდან მეორეზე გადასვლა ხდება არაწრფივი კანონის შესაბამისად. ანალოგიური კანონზომიერებაა დროშიც (ნახ. 28), რომელსაც აქვს „ლოჯისტიკური“ ფუნქციის სახე.



ნახ. 28

მოყვანილი კანონზომიერებანი მნიშვნელოვანია ურბანული სისტემების განვითარების შესწავლისას.

$K_a$  „თვისობრიობასა“ და  $K_o$  „რაოდენობრიობას“ შორის დამოკიდებულებას აქვს ლოჯისტიკური ფუნქციის სახე:

$$K_a = \frac{k}{1 + be^{-cK_o}}$$

სადაც  $k$  გაჯერების სიდიდეა,  $c$  კონსტანტაა.  $K_a$ -ს საწყისი მნიშვნელობაა  $K_a = \frac{k}{1+b}$ , როცა  $K_o = 0$ .

„რაოდენობრიობის“ ( $K_o$ ) ცვლილება დროში შეიძლება აღვწეროთ მოდიფიცირებული ექსპონენტით:

$$K_o = R - ae^{nt}$$

სადაც  $R$  გაჯერების სიდიდეა,  $n$  მუდმივი სიდიდეა.  $K_o$ -ის საწყისი მნიშვნელობაა  $K_o = R - a$ .

$K_o$ -ის გამოსათვლელი ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$K_a = \frac{ke^{cR}}{e^{cae^{nt}}(e^{cK_o} + b)}$$

ეს დამოკიდებულება “რაოდენობრიობასა” და “თვისობრიობას” შორის საშუალებას გვაძლევს კომპლექსურად და ობიექტურად შევისწავლოთ ურბანული სისტემის განვითარების დინამიკა.  $K_o^1$  და  $K_o^2$  რაოდენობრივი ცვლილების დროს, შესაძლებელია ურბანულმა სისტემამ “შეიძინოს” ისეთი ფუნქცია, რომელიც ადრე მას არ გააჩნდა. ან წარმოიშვას ისეთი პროცესი, რომლის მართვა შეუძლებელია, არსებული მმართველობითი სისტემის დროს. აქედან გამომდინარე აუცილებელია თვალი მივადევნოთ ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესების რაოდენობრივ მახასიათებლებს, რათა  $K_o^1$  და  $K_o^2$  არეში „შეჭრისას“ ან მიახლოებისას მივიღოთ შესაბამისი ზომები, რათა საფუძველი არ დაედოს ისეთ მოვლენებს. რომლებიც შემდგომ კატასტროფულ შედეგებამდე მიგვიყვანს. ექსპერტული სისტემა საშუალებას გვაძლევს პროგნოზირება გავუკეთოთ



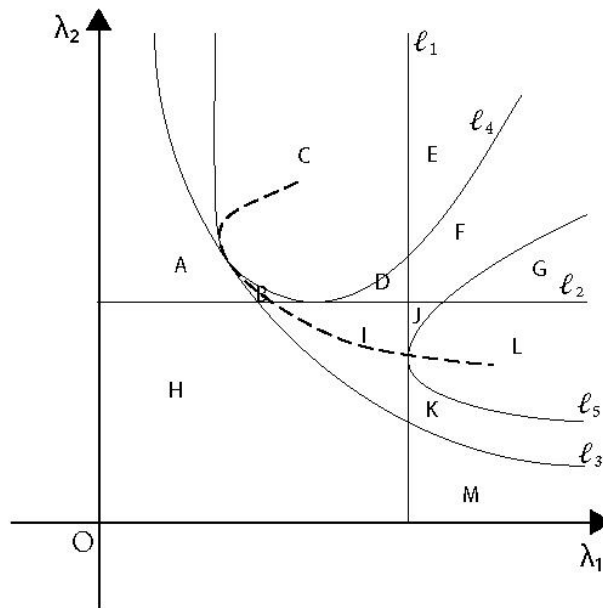
აღნიშნული პარამეტრების სიდიდეებს და გვაძლევს რეკომენდაციებს იმ ქმედებათა თაობაზე, რომელთა განხორციელების შემთხვევაში ავიცილებთ ყოველგვარ კატაკლიზმებს.

## 2.5 რეკონსტრუქციის გეგმის განხორციელებისას მოსალოდნელი რისკების შეფასება

რეგიონში განხორციელებული ცვლილების შედეგად  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრების შესაბამისი წერტილი მოძრაობს რაღაც წირის გასწვრივ. ადვილი დასანახია, რომ იმის გასარკვევად, მოხდება თუ არა კატასტროფა, მნიშვნელობა აქვს არა წირის ფორმას, არამედ იმას, თუ არეების რა თანმიმდევრობას და ორი მეზობელი არეს საერთო საზღვრის რომელ წერტილს გაივლის წირი.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ საწყის მომენტში სისტემა იმყოფებოდა წონასწორობის რომელიღაც მდგომარეობაში (ვთქვათ  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრების შესაბამისი წერტილი ეკუთვნის  $C$  არეს და სისტემა იმყოფება  $(x_1^-; x_2^-)$  სახის წონასწორობის მდგომარეობაში) (ნახ. 29). ორი არეს გამყოფ საზღვარზე ( $C$  და  $B$  არეს გამყოფ საზღვარზე) წონასწორობის მოცემული სახის მდგომარეობის მნიშვნელობა ემთხვევა სხვა სახის წონასწორობის მნიშვნელობას (მაგალითად  $x_i^+ = x_i^-$ ). მეზობელ არეში ( $B$  არეში) არსებობს წონასწორობის ორივე სახის მდგომარეობა. ამ შემთხვევაში ჩვენ ცალსახად ვერ ვიტყვი, თუ ამ ორიდან რომელ მდგომარეობაში აღმოჩნდება სისტემა. ცვლილებების გაგრძელების შედეგად წირი შეიძლება გადავიდეს ისეთ არეში ( $L$  არეში), რომელშიც არსებობს ამ ორიდან ერთ-ერთი სახის (მაგალითად  $(x_1^-; x_2^-)$  სახის) წონასწორობის მდგომარეობა, მაგრამ არ არსებობდეს მეორე სახის (მაგალითად  $(x_1^+; x_2^+)$  სახის) წონასწორობის მდგომარეობა, ამასთან ამ ორი არეს გამყოფ საზღვარზე ( $I$  და  $L$  არეს გამყოფ საზღვარზე) მეორე სახის წონასწორობის მდგომარეობის მნიშვნელობა არ ემთხვეოდეს წონასწორობის მდგომარეობის არც ერთ სხვა მნიშვნელობას (მაგალითად  $(x_1^+; x_2^+)$  არ ემთხვევა არც ერთი სხვა სახის

წონასწორობის მდგომარეობას). თუ მეორე არეში გადასვლისას სისტემა დარჩებოდა წონასწორობის პირველი სახის მდგომარეობაში ( $x_1^-; x_2^-$ ) სახის წონასწორობის მდგომარეობაში), მაშინ  $L$  არეში გადასვლისას კატასტროფას ადგილი არ ექნება, ხოლო თუ მეორე არეში გადასვლისას სისტემა გადავიდოდა წონასწორობის მეორე სახის მდგომარეობაში ( $x_1^+; x_2^+$ ) სახის წონასწორობის მდგომარეობაში), მაშინ  $L$  არეში გადასვლისას ადგილი ექნება კატასტროფას (ნახ. 29).



ნახ. 29

მაშასადამე, ზოგჯერ შეუძლებელია ცალსახა პასუხის გაცემა კითხვაზე: როდესაც სისტემაში განხორციელებული ცვლილებების შედეგად ადგილი ექნება თუ არა კატასტროფას? ამიტომ მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ შესაბამისი ხდომილობის ალბათობა.

უნდა აღინიშნოს, რომ რეგიონის დემოგრაფიულ მდგომარეობაზე გაველენას ახდენს არა მარტო ის, თუ რა სამუშაოები შესრულდება რეგიონში, არამედ ამ სამუშაოების შესრულების თანმიმდევრობაც. მაგალითად, განვიხილოთ რეგიონი, რომელიც შედგება ორი რაიონისაგან, რომელთაგან ერთი გათვალისწინებულია 30 ათას მცხოვრებზე, მეორე კი 27 ათასზე. ვთქვათ, რომ მოსახლეობის მიგრაციისათვის არსებობს ოთხი ინტერესი, რომელთა წონებია შესაბამისად:  $m_1 = 0,5$ ,  $m_2 = 0,2$ ,  $m_3 = 0,2$  და  $m_4 = 0,1$ .

$\eta_{im}$ -ით აღნიშნოთ  $m$  რაიონში  $a_i$  ინტერესის დაკმაყოფილების პარამეტრი. პირველ რიგში აღვწეროთ, თუ როგორ შეიძლება დავითვალოთ  $m$  რაიონში რაიმე  $a_i$  ინტერესის დაკმაყოფილების პარამეტრის მნიშვნელობა. ვთქვათ  $K_m$  არის  $m$  რაიონის ობიექტების სიმრავლე. ყოველი  $k \in K_m$  ობიექტისათვის  $\delta_i^k$  სიმბოლოთი აღნიშნოთ  $k$  ობიექტის სიმძლავრე  $i$  ინტერესის მიმართ (მაგალითად სკოლისათვის სიმძლავრე შეიძლება იყოს რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენ მოსწავლეზეა ეს სკოლა გათვლილი, ხოლო მაღაზიისათვის - სავაჭრო ფართობი). ყოველი  $i$  ინტერესისათვის განვიხილოთ სიდიდე:  $r_{im} = \sum_{k \in K_m} \delta_i^k$

იგივე სიდიდე რაიმე „ნორმალური“ რაიონისათვის (ე.ი. ისეთისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს ყველა არქიტექტურულ ნორმას) აღნიშნოთ  $r_i'$  სიმბოლოთი. ვთქვათ 30 ათას მცხოვრებზე გათვალისწინებული „ნორმალური“ რაიონისათვის  $r_1' = 25\ 000$ ,  $r_2' = 3\ 150$ ,  $r_3' = 3\ 250$ ,  $r_4' = 1\ 475$ .

$$\eta_{im} \text{ პარამეტრი გამოვთვალოთ ფორმულით } \eta_{im} = \max \left\{ 1; \frac{r_{im}}{r_i'} \right\},$$

რეგიონის მახასიათებელი პარამეტრი გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$\lambda_m = \sum_{i=1}^4 \eta_{im} \cdot m_i.$$

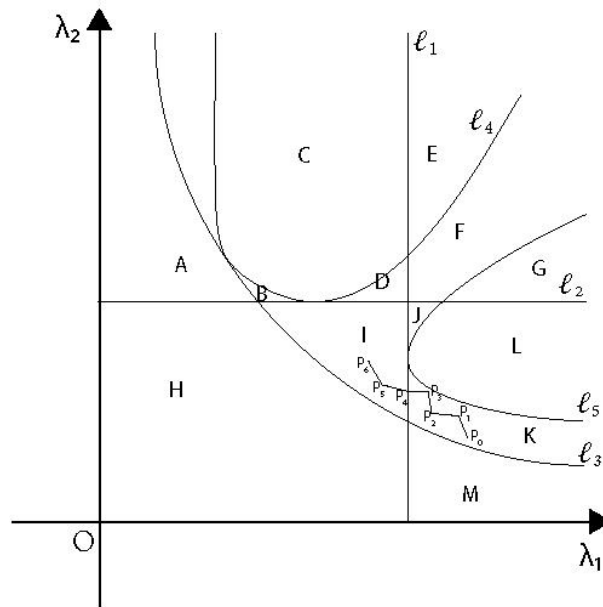
დავუშვათ, რომ  $\alpha_1 = 0,1$ ,  $h_1 = 0,3$ ,  $\alpha_2 = 0,11$ ,  $h_2 = 0,35$ ,  $V = 9600$ . საწყის მომენტში  $\lambda_1 = 0,8$ ,  $\lambda_2 = 0,42$  და მიმდინარე წონასწორობის მდგომარეობა არის „7“.

დავუშვათ, რომ რეგიონის რეკონსტრუქციისათვის საჭიროა I) გარკვეული ობიექტების დანგრევა ისე, რომ  $\sum_{m=1}^2 \sum_{k \in K'_m} \delta_2^k = 450$ ,

$\sum_{m=1}^2 \sum_{k \in K'_m} \delta_3^k = 300$ , სადაც  $K'_m$  არის დასანგრევი ობიექტების სიმრავლე  $m$  რაიონში; II) ასაშენებელია სხვადასხვა სიმძლავრეების 6 ობიექტი:  $\delta_1^1 = 200$ ,  $\delta_2^2 = 150$ ,  $\delta_4^2 = 300$ ,  $\delta_3^3 = 300$ ,  $\delta_1^4 = 350$ ,  $\delta_4^5 = 100$ ,  $\delta_2^6 = 120$ .

განვიხილოთ ამ სამუშაოების ჩატარების ორი გეგმა. ვთქვათ, პირველი გეგმაა: I) დროის  $t_1$  მომენტში პირველ რაიონში დაინგრეს  $\delta_2^{k1} = 200$  ობიექტი, ხოლო მეორე რაიონში აშენდეს  $\delta_2^2 = 150$ ,  $\delta_4^2 = 300$  ობიექტი; II) დროის  $t_2$  მომენტში პირველ რაიონში დაინგრეს  $\delta_3^{k2} = 100$  ობიექტი, ხოლო მეორე რაიონში აშენდეს  $\delta_1^1 = 200$  ობიექტი; III) დროის  $t_3$  მომენტში პირველ რაიონში დაინგრეს  $\delta_2^{k3} = 100$  ობიექტი, აშენდეს  $\delta_4^5 = 100$  ობიექტი, ხოლო მეორე რაიონში აშენდეს  $\delta_1^4 = 350$  ობიექტი; IV) დროის  $t_4$  მომენტში პირველ რაიონში დაინგრეს  $\delta_3^{k4} = 200$  ობიექტი, ხოლო მეორე რაიონში აშენდეს  $\delta_3^3 = 300$  ობიექტი; V) დროის  $t_5$  მომენტში პირველ რაიონში დაინგრეს  $\delta_2^{k5} = 150$  ობიექტი; VI) მეორე რაიონში აშენდეს  $\delta_2^6 = 120$  ობიექტი.

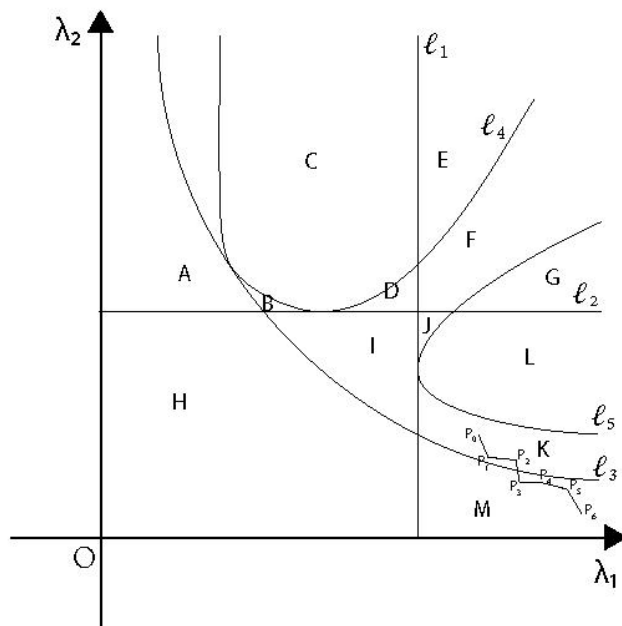
ამ გეგმის ჩატარების პროცესში  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრების მიერ მიღებული მნიშვნელობები შეესაბამება  $L_0, L_1, \dots, L_6$  წერტილების მიმდევრობას  $(\lambda_1; \lambda_2)$  სიბრტყეზე (ნახ. 30):



ნახ. 30

რადგან  $l_1$  წირზე „7“ სახის წონასწორობის მდგომარეობა არ ემთხვევა არც ერთი სხვა სახის წონასწორობის მდგომარეობას და  $I$  არეში არსებობს „7“ სახის წონასწორობის მდგომარეობა, ამიტომ ამ გეგმის განხორციელების დროს ადგილი არ ექნება დემოგრაფიულ აფეთქებას.

ვთქვათ, რომ მეორე გეგმა მიიღება პირველი გეგმისაგან რაიონების გადანაცვლებით. ამ გეგმის განხორციელების შედეგად  $\lambda_1$  და  $\lambda_2$  პარამეტრების მიერ მიღებული მნიშვნელობები შეესაბამება  $L_0, L_1, \dots, L_6$  წერტილების მიმდევრობას  $(\lambda_1; \lambda_2)$  სიბრტყეზე (ნახ. 31).



ნახ. 31

$l_3$  წირზე „7“ სახის წონასწორობის მდგომარეობა ემთხვევა მხოლოდ „6“ სახის წონასწორობის მდგომარეობას, მაგრამ  $I$  არეში არ არსებობს არც „6“ და არც „7“ სახის წონასწორობის მდგომარეობა, ამიტომ ამ გეგმის განხორციელების დროს ადგილი ექნება დემოგრაფიულ აფეთქებას.

## 2.6. საწყისი მონაცემების (ინფორმაციის) ანალიზი ენტროპიული მეთოდით.

მაკროსისტემების მოდელირებისას ჩვენ ვეყრდნობით გარკვეულ საწყის ინფორმაციას განსახილველი სისტემის შესახებ. ხშირ შემთხვევაში ეს ინფორმაცია არასაკმარისია (ან შეიცავს ხელშეშლებს). ცხადია, დამატებითი, ახალი ინფორმაციის მიღებისას, თავდაპირველად უნდა მოხდეს ამ ინფორმაციის ანალიზი, მისი შედარება უკვე არსებულ ინფორმაციასთან და საჭიროების შემთხვევაში უნდა მოხდეს მისი გამოყენება. ასეთი კვლევის მნიშვნელობა განსაკუთრებით მაშინ დგება, როდესაც მაკროსისტემის მახასიათებელი პარამეტრების მნიშვნელობები უახლოვდებიან ბიფურკაციის წერტილებს.

ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდი ეყრდნობა ე.წ. მესერული სიმრავლეების თეორიას [16, 17]. განვიხილოთ მესერული სიმრავლეების თეორიის ძირითადი ელემენტები. ვთქვათ  $X$  რაიმე სიმრავლეა.  $X$  სიმრავლის ქვესიმრავლეთა  $A$  სიმრავლეს ეწოდება  $X$  სიმრავლის მესერი თუ სრულდება შემდეგი ოთხი პირობა.

- 1)  $X \in A$  ,  $\emptyset \in A$
- 2) თუ  $a \in A$  და  $b \in A$  მაშინ  $a \cup b \in A$ .
- 3) თუ  $a \in A$  და  $b \in A$  მაშინ  $a \cap b \in A$ .
- 4) თუ  $a \in A$  და  $b \in A$  მაშინ  $a - b \in A$ .

ვიტყვიით, რომ  $A$  მესერის  $a_1$  და  $a_2$  ელემენტები არიან დიზიუნქციურები, თუ  $a_1 \cap a_2 = \emptyset$ .

ვთქვათ  $A$  არის  $X$  სიმრავლის მესერი.  $a \in A$  ელემენტს ეწოდება  $A$  მესერის ატომი, თუ  $a \neq \emptyset$  და  $A$ -ში არ არსებობს ისეთი  $b \neq \emptyset$  ელემენტი, რომ  $b \neq a$  და  $b \subset a$ .

ვთქვათ  $A$  არის  $X$  სიმრავლის მესერი.  $X$  სიმრავლის ქვესიმრავლეთა  $B$  სიმრავლეს ეწოდება  $A$  მესერის შკალა, თუ  $A$  მესერის ყოველი ელემენტი შეიძლება გამოისახოს  $B$  სიმრავლის ელემენტების გაერთიანების, თანაკვეთის და სხვაობის საშუალებებით.

$A$  მესერის  $B$  შკალას ეწოდება საბაზო, თუ  $B$ -ს არც ერთი ელემენტი არ შეიძლება გამოისახოს  $B$  სიმრავლის სხვა ელემენტების გაერთიანების, თანაკვეთის და სხვაობის საშუალებით.

$A$  მესერის  $B$  შკალას ეწოდება ატომური შკალა, თუ მისი ყოველი ელემენტი არის ატომი.

ვთქვათ  $X$  ელემენტთა (ინფორმაციათა) ნებისმიერი სიმრავლეა,  $A$  არის  $X$ -ის მესერი,  $BS$  კი  $A$  მესერის ატომური შკალა:  $BS = \{b_k, k \in K\}$ , სადაც  $K$  არის სასრული ან თვლადი სიმრავლე.

დავუშვათ, რომ ყოველი  $x_0 \in X$  ელემენტისათვის მოცემულია სანდლობის დისკრეტული განაწილება  $BS$  შკალაზე, ე.ი. მოცემულია არაუარყოფითი რიცხვითი ფუნქცია  $p(b_k; x_0)$ ,  $p(b_k; x_0) \geq 0$ , ამასთან სრულდება ნორმირების პირობა:

$$\sum_{b_k \in BS} p(b_k; x_0) = 1.$$

მოცემულ სანდლობის დისკრეტულ განაწილებას ეწოდება  $x_0 \in X$  ელემენტის სანდლობის საწყისი განაწილება  $A$  მესერის მიმართ (რადგან ყოველ მესერს აქვს ერთადერთი ატომური შკალა, ამიტომ ეს განმარტება არის კორექტული).

ყოველი  $\sigma \in A$  სიმრავლისათვის სიდიდეს:  $\sum_{b_k \in \sigma} p(b_k; x_0)$  ეწოდება

სანდლობა (აღბათობა) ფაქტისა, რომ  $x_0 \in \sigma$ .

რადგან  $p(b_k; x_0) \geq 0$  ყოველი  $b_k \in BS$ -თვის, და  $\sum_{b_k \in BS} p(b_k; x_0) = 1$ ,

ამიტომ ცხადია, რომ  $0 \leq p \leq 1$ .  $p = 1$  შეიძლება გავიგოთ როგორც აუცილებელი ხდომილობა ფაქტისა  $x_0 \in \sigma$ , ხოლო  $p = 0$  კი როგორც შეუძლებელი ხდომილობა ფაქტისა  $x_0 \in \sigma$ .

ვთქვათ  $x_0 \in X$  წერტილისათვის ცნობილია სანდლობის საწყისი განაწილება.  $x_0$  წერტილის შესახებ ყოველი  $\sigma(x_0) \in B$  ინფორმაციისათვის განვმარტოთ  $x_0$  წერტილის სანდლობის მეორადი განაწილება ბაიესის ფორმულის საშუალებით:

$$p_{\sigma}(b_k; x_0) = \begin{cases} 0; & \text{თუ } b_k \notin \sigma \\ \frac{p(b_k; x_0)}{\sum_{b_i \in \sigma} p(b_i; x_0)}, & \text{თუ } b_k \in \sigma \end{cases}$$

$x_0$  წერტილის სანდოობის საწყისი განაწილების შესაბამისი ენტროპია გამოითვლება ფორმულით:

$$H(X(x_0)) = - \sum_{b_k \in X} p(b_k; x_0) \cdot \log_2 p(b_k; x_0)$$

სოლო  $x_0$  წერტილის სანდოობის მეორადი განაწილების შესაბამისი ენტროპია კი გამოითვლება ფორმულით:

$$H(\sigma(x_0)) = - \sum_{b_k \in \sigma} p_{\sigma}(b_k; x_0) \cdot \log_2 p_{\sigma}(b_k; x_0)$$

საწყისი და მეორადი განაწილების შესაბამისი ენტროპიების სხვაობას ეწოდება  $\sigma$  სიმრავლის მიერ მოტანილი ინფორმაციის რაოდენობა.

შევნიშნოთ, რომ ეს სხვაობა შესაძლებელია იყოს როგორც დადებითი ასევე 0, ან უარყოფითი.  $\sigma$  სიმრავლის მიერ მოტანილი ინფორმაციის რაოდენობა (ენტროპიების სხვაობა) არის უარყოფითი ნიშნავს, რომ  $\sigma$  კონფლიქტშია საწყის განაწილებასთან.

მოვიყვანოთ მაგალითი ზემოთ მოყვანილი მეთოდის საილუსტრაციოდ. ვთქვათ გადაწყვეტილია სხვადასხვა ობიექტების აშენება  $b_1; b_2; \dots; b_{10}$  თითოეული  $b_k, k \in \overline{1; 10}$  ობიექტისათვის ცნობილია მისი რეალიზაციის ალბათობა:

$$p(b_k) = \begin{cases} c_1, & \text{თუ } k \in \overline{1; 6} \\ c_2, & \text{თუ } k \in \overline{7; 10} \end{cases}$$

ნორმირების პირობის ძალით  $6 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 = 1$ .

გამოვთვალოთ საწყისი განაწილების შესაბამისი ენტროპია:

$$H(X) = - \sum_{k=1}^{10} p(b_k) \cdot \log_2 p(b_k) = -6 \cdot c_1 \cdot \log_2 c_1 - 4 \cdot c_2 \cdot \log_2 c_2.$$

ვთქვათ, ჩვენთვის ცნობილი გახდა რაღაც  $\sigma$  ინფორმაცია, რომლის გამო გადავწყვიტეთ, რომ ინვესტიცია ჩავდეთ  $b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6$  ობიექტებიდან ერთ-ერთში.  $\sigma$  ინფორმაციის შესაბამისი სანდოობის მეორადი განაწილება მოიცემა ფორმულით:



$$p_{\sigma}(b_k) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{თუ } k \in \overline{1; 6} \\ 0, & \text{თუ } k \in \overline{7; 10} \end{cases}$$

მეორადი განაწილების შესაბამისი ენტროპიაა:

$$H(\sigma) = -\sum_{k=1}^{10} p_{\sigma}(b_k) \cdot \log_2 p_{\sigma}(b_k) = \log_2 6.$$

$\sigma$  ცნობის მიერ მოტანილი ინფორმაციის რაოდენობაა:

$$I(\sigma) = -6 \cdot c_1 \cdot \log_2 c_1 - 4 \cdot c_2 \cdot \log_2 c_2 - \log_2 6.$$

I) თუ  $c_1 = c_2 = 0,1$  (თუ საწყისი განაწილება არის თანაბარი განაწილება), მაშინ

$$I(\sigma) = \log_2 10 - \log_2 6 = \log_2 \frac{5}{3}.$$

II) თუ  $c_1 = \frac{1}{6}$ ,  $c_2 = 0$ , მაშინ  $I(\sigma) = \log_2 6 - \log_2 6 = 0$  -  $\sigma$  ცნობა არავითარ ახალ ინფორმაციას არ გვაწვდის;

III) თუ  $c_1 = 0$ ;  $c_2 = \frac{1}{4}$ , მაშინ  $I(\sigma) = \log_2 4 - \log_2 5 = \log_2 \frac{4}{5} < 0$  -  $\sigma$  ცნობა კონფლიქტშია საწყის განაწილებასთან.

ურბანული სისტემის გენგეგმის შესახებ ახლი ინფორმაციის ანალიზის შედეგად ზუსტდება მოსახლეობის ინტერესების დაკმაყოფილების პარამეტრის მნიშვნელობა, რაც საბოლოო ჯამში საშუალებას იძლევა გავაკეთოთ სწორი პროგნოზი მოსახლეობის სტრუქტურის ცვლილების თაობაზე.

### მეორე თავის შედეგები

1. ენტროპიის მაქსიმიზაციის პრინციპის საფუძველზე აგებულია ურბანული სისტემის დემორესურსების დინამიკის მათემატიკური მოდელი, სადაც ჩვენს მიერ შემოტანილია მოსახლეობის ინტერესების დაკმაყოფილების პარამეტრი, რომელიც განსაზღვრავს მოსახლეობის დინამიკას.

2. დამტკიცებულია, რომ არსებული შეზღუდვების პირობებში ამოცანას გააჩნია ამონახსნი და ის ერთადერთია.

3. დამტკიცებულია თეორემა: თუ არსებობს ერთი მაინც რაიონი, რომლისთვისაც სრულდება დადებითი წონასწორობის აუცილებელი პირობა, მაშინ ეს პირობა შესრულდება ნებისმიერი სხვა რაიონისთვისაც.

4. შექმნილია ალგორითმი, რომელიც საშუალებას იძლევა გამოვეყნოთ მაკროსისტემის მდგრადობის არეები და ბიფურკაციის წირები.

5. დადგენილია ბიფურკაციის წირებზე ის მონაკვეთები, რომელ მონაკვეთებზედაც სხვადასხვა სახის წონასწორობათა მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან.

6. შექმნილია მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევაფასოთ რეკონსტრუქციის გეგმის განხორციელებისას მოსალოდნელი რისკები.

7. განხილულია მეთოდი, რომელიც, მესერული სიმრავლეების თეორიის გამოყენებით, საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ მაკროსისტემის შესახებ ახალი ცნობის ინფორმაციულობა საწყის, საბაზო ინფორმაციებთან მიმართებაში.

### თავი 3

## მაკროსისტემების სტრუქტურული ანალიზი $Q$ ანალიზის მეთოდის გამოყენებით

### 3.1 $Q$ ანალიზის მეთოდი

მაკროსისტემა წარმოადგენს გარკვეული მიზნით ურთიეთდაკავშირებულ ელემენტთა ერთობლიობას. სისტემის, როგორც ერთიანის, განსაზღვრულის, ძირითადი მახასიათებლები განისაზღვრება მისი სტრუქტურით - მისი შემადგენელი ნაწილების, ელემენტების ურთიერთკავშირით.

მაკროსისტემების სტრუქტურის, შესასწავლად ვიყენებთ  $Q$ -ანალიზის მეთოდს. კვლევის აღნიშნული მეთოდი პირველად გამოყენებული იქნა ინგლისელი მათემატიკოსის, ეტკინის მიერ [2-4].

ვთქვათ  $X$  და  $Y$  სასრული სიმრავლეებია და  $\lambda \subset X \times Y$  არის  $X$  და  $Y$  სიმრავლეებს შორის რაიმე მიმართება. ამ მიმართების შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცია  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  მატრიცია, სადაც:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } (x_i; y_j) \in \lambda \\ 0, & \text{თუ } (x_i; y_j) \notin \lambda \end{cases}$$

ყოველი ასეთი  $\lambda$  მიმართება წარმოქმნის სიმპლიციულურ  $K_Y(\lambda; X)$  კომპლექსს. აღნიშნული კომპლექსში  $p$  განზომილებიანი  $\sigma_p$  სიმპლექსი დავარქვათ  $X$  სიმრავლის ისეთ  $\{x_1; x_2; \dots; x_p; x_{p+1}\}$  ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც არსებობს ერთი მაინც  $y_j \in Y$  ისეთი, რომ  $(x_i; y_j) \in \lambda$  ყოველი  $i$ -თვის,  $i \in \overline{1; p+1}$ .  $\{x_1; x_2; \dots; x_p; x_{p+1}\}$  სიმრავლის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ეწოდება სიმპლექსის წახნაგი.

ვიტყვიან, რომ ორი  $\sigma_p$  და  $\sigma_k$  სიმპლექსი არის  $q$  ბმული, თუ არსებობს  $\sigma_{\alpha_1}; \sigma_{\alpha_2}; \dots; \sigma_{\alpha_r}$  სიმპლექსების ისეთი მიმდევრობა, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები;

- I)  $\sigma_{\alpha_1}$  არის  $\sigma_p$  სიმპლექსის წახნაგი;
- II)  $\sigma_{\alpha_r}$  არის  $\sigma_k$  სიმპლექსის წახნაგი;

III) ყოველ ორი მეზობელი  $\sigma_{ai}$  და  $\sigma_{ai+1}$  სიმპლექსის საერთო წახნაგის განზომილება არაა ნაკლები  $q$ -ზე.

სიმპლექსებს შორის აღნიშნული მიმართება ( $q$  ბმულობის მიმართება) არის ექვივალენტობის მიმართება, ამიტომ  $K_Y(\lambda; X)$  კომპლექსის იმ სიმპლექსების სიმრავლე, რომელთა განზომილება არაა ნაკლები  $q$ -ზე, დაიყოფა ექვივალენტობის კლასებად. ვთქვათ  $Q_q$  აღნიშნავს ექვივალენტობის კლასების რაოდენობას.

ვექტორს  $Q = (Q_0; Q_1; \dots; Q_N)$  ეწოდება  $K_Y(\lambda; X)$  კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორი, ხოლო  $K_Y(\lambda; X)$  კომპლექსის ანალიზს  $Q$  ვექტორის კოორდინატების მოძებნის გზით, ეწოდება  $Q$  ანალიზი.  $Q$  ვექტორი გვიჩვენებს, თუ რამდენად კარგად არიან სიმპლექსები ერთმანეთთან ბმულნი სხვადასხვა დონეზე (სხვადასხვა  $q$ -თვის).

$Q$  ანალიზი გამოიყენება, სოციალური, ეკონომიკური, საგადასახადო, საარჩევნო, ტექნიკური და ა.შ. სისტემების და პროცესების ანალიზისათვის, მათემატიკური მოდელირებისა და მართვისათვის.

$Q$  ანალიზის საშუალებით სისტემის კვლევისას ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ცნებაა სიმპლექსის ექსცენტრისიტეტის ცნება, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რამდენად განსხვავდება მოცემული სიმპლექსი დანარჩენი სიმპლექსებისგან. ექსცენტრისიტეტი გვიჩვენებს არა მარტო იმას, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია მოცემული სიმპლექსი მთლიანი კომპლექსისათვის (რომელიც გამოიხატება მისი განზომილებით), არამედ იმასაც, თუ რამდენად მნიშვნელოვანია ეს სიმპლექსი კომპლექსის ბმულობისათვის (ეს გამოიხატება იმ წვეროების მაქსიმალური რაოდენობით, რომლებიც საერთოა აგრეთვე სხვა სიმპლექსებისთვისაც). რაც უფრო დიდ რიცხვს წარმოადგენს სიმპლექსის ექსცენტრისიტეტი, მით უფრო „უცნაურია“ ეს სიმპლექსი. ექსცენტრისიტეტი საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ სისტემის „ანომალური“ ელემენტები, მიგვანიშნებს რა მიმართულებით უნდა ვიკვლიოთ სისტემა და რა ზემოქმედება უნდა მოვახდინოთ მასზე, რომ გაუმჯობესდეს მისი მახასიათებლები - პირველ რიგში მისი მდგრადობა გარე ზემოქმედებების და შეშფოთებების მიმართ.

სიმპლექსის ექსცენტრისიტეტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$ecc(\sigma) = \frac{\hat{q} - \check{q}}{\check{q} + 1}$$

სადაც  $\hat{q}$  არის  $\sigma$  სიმპლექსის განზომილება, ხოლო  $\check{q}$  კი არის უდიდესი რიცხვი ისეთ  $q$  რიცხვებს შორის, რომლებისთვისაც მოიძებნება კომპლექსის ერთი მაინც  $\sigma'$  სიმპლექსი ისეთი, რომ  $\sigma$  და  $\sigma'$  სიმპლექსები არიან  $q$  ბმულნი.

### 3.2 სისტემის სტრუქტურის გაუმჯობესების ოპტიმალური გზის

#### პონა $Q$ ანალიზის მეთოდის გამოყენებით

რაც უფრო დიდია  $Q$  ვექტორის კოორდინატები, მით უფრო მეტადაა “დაშორებულნი” სიმპლექსები ერთმანეთს, მით უფრო რთულია რაიმე ცვლილების გატარება სისტემაში.  $Q$ -ანალიზის თვალსაზრისით იდეალურია შემთხვევა როცა ყოველი  $x_i$  არის  $\lambda$  მიმართებაში ყოველ  $y_j$ -თან - ყოველი  $q$ -თვის,  $Q_q = 1$ ,  $q \in \overline{1; N}$ , მაგრამ ამ შემთხვევაში მოსალოდნელია სისტემის ზოგიერთი მახასიათებელი პარამეტრის გაუარესება (მაგალითად თუ  $t_{ij}$  აღნიშნავს  $(x_i, y_j)$  კავშირის განხორციელებისათვის საჭირო ხარჯებს, მაშინ მოსალოდნელია ამ ხარჯების უზომოდ გაზრდა, რაც არაა მიზანშეწონილი). ამიტომ დღის წესრიგში დგება შემდეგი ამოცანა: ყველა შესაძლო ცვლილებათა შორის (ცვლილების ქვეშ ვგულისხმობთ რომელიმე სიმპლექსისათვის იმ წვეროს მიერთებას, რომელიც მას არ ეკუთვნოდა) რომელია ის ცვლილება, რომლის შედეგად მიღებული  $Q$  ვექტორი დანარჩენებზე „უკეთესია“. დავუშვათ  $q$  არის უმცირესი ინდექსი, რომლისთვისაც  $Q_q > 1$ . იმ სიმპლექსების სიმრავლედან, რომელთა განზომილება არაა ნაკლები  $q$ -ზე, ავირჩიოთ რომელიმე ორი  $[y_m]$  და  $[y_n]$ , რომლებიც არ არიან  $q$  ბმულნი (ასეთი სიმპლექსები აუცილებლად არსებობს, რადგან  $Q_q > 1$ ) და გავხადოთ

ისინი  $q$  ბმული ერთ-ერთი სიმპლექსის, მაგალითად  $[y_m]$ -ის შეცვლით ისეთი სიმპლექსით, რომელიც მიიღება მისთვის  $[y_n]$  სიმპლექსის იმ წვეროს მიერთებით, რომელიც მას არ ეკუთვნოდა. ცხადია, რომ ასეთი მიერთების შედეგად  $Q_q$ -ს მნიშვნელობა არ გაიზრდება. განვიხილავთ ყველა შესაძლო ასეთ ცვლილებას და მათ შორის ავირჩევთ ისეთს, რომლის შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორის  $q$  კოორდინატი იქნება უმცირესი (ცხადია, რომ  $Q_0; Q_1; \dots; Q_{q-1}$  კოორდინატები ისევ 1-ის ტოლი იქნებიან). თუ ასეთი ცვლილება არის რამდენიმე, მაშინ მათ შორის ავირჩიოთ ისეთი, რომლის შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორის  $(q+1)$  კოორდინატი არის უმცირესი და ა.შ.

თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ მარტივი მაგალითი. ვთქვათ განსახილველი სისტემის ინციდენტურობის მატრიცია:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda\Lambda^T - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - \\ 0 & 2 & 1 \\ - & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$[y_2]$  და  $[y_3]$  არიან უდიდესი განზომილების მქონე, სიმპლექსები და მათ განზომილება 2-ის ტოლია.  $Q$  - ანალიზის შედეგად მივიღებთ:

$$q = 2, Q_2 = 2, \text{ კერძოდ } \{[y_2]\}, \{[y_3]\};$$

$$q = 1, Q_1 = 2, \text{ კერძოდ } \{[y_1]\}, \{[y_2], [y_3]\};$$

$$q = 0, Q_0 = 1, \text{ კერძოდ } \{[y_1], [y_2], [y_3]\}.$$

მაშასადამე მოცემული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია:

$$Q(1,2,2).$$

უმცირესი  $q$  ინდექსი, რომლისთვისაც  $Q_q > 1$ , არის  $q = 1$ . განვიხილოთ სიმპლექსებისათვის ისეთი წვერის მიერთებას ყველა შესაძლო ვარიანტი, რომელიც მას არ ეკუთვნოდა.

1)  $[y_1]$  სიმპლექსს მიუერთოთ  $x_3$  წვერო. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი ადენიშნოთ  $\Lambda^{(1,3)}$ -ით:

$$\Lambda^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(1,3)} \cdot (\Lambda^{(1,3)})^T - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$q = 2, Q_2 = 3$ , კერძოდ  $\{y_1\}, \{y_2\}, \{y_3\}$ ;

$q = 1, Q_1 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 0, Q_0 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ .

მიღებული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(1,3)}(1,1,3)$ .

2)  $[y_1]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_4$  წვერი. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი აღვნიშნოთ  $\Lambda^{(1,4)}$ -ით.

$$\Lambda^{(1,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(1,4)} \cdot (\Lambda^{(1,4)})^T - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

მივიღეთ ისეთივე მატრიცი, როგორც  $\Lambda^{(1,3)}$ -ის შემთხვევაში, ამიტომ  $Q^{(1,4)}(1,1,3)$ .

3)  $[y_1]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_5$  წვერი. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი აღვნიშნოთ  $\Lambda^{(1,5)}$ -ით.

$$\Lambda^{(1,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(1,5)} \cdot (\Lambda^{(1,5)})^T - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$q = 2, Q_2 = 3$ , კერძოდ  $\{[y_1]\}, \{y_2\}, \{y_3\}$ ;

$q = 1, Q_1 = 2$ , კერძოდ  $\{[y_1]\}, \{[y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 0, Q_0 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ .

მიღებული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(1,5)}(1,2,3)$ .

4)  $[y_2]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_1$  წვერი. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი აღვნიშნოთ  $\Lambda^{(2,1)}$ -ით.

$$\Lambda^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(2,1)} \cdot (\Lambda^{(2,1)})^T - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & - \\ 1 & 3 & 1 \\ - & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$q = 3: Q_3 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_2]\}$ ;

$q = 2: Q_2 = 2$ , კერძოდ  $\{[y_2]\}, \{[y_3]\}$ ;

$q = 1: Q_1 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 0, Q_0 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ .

მიღებული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(2,1)}(1,1,2,1)$ .

5)  $[y_2]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_5$  წვერი. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი აღვნიშნოთ  $\Lambda^{(2,5)}$ -ით.

$$\Lambda^{(2,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(2,5)} \cdot (\Lambda^{(2,5)})^T - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - \\ 0 & 3 & 2 \\ - & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$q = 3: Q_3 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_2]\}$ ;

$q = 2: Q_2 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 1, Q_1 = 2$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 0, Q_0 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ .

მიღებული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(2,5)}(1,2,1,1)$ .

6)  $[y_3]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_1$  წვერი. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი აღვნიშნოთ  $\Lambda^{(3,1)}$ -ით.

$$\Lambda^{(3,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(3,1)} \cdot (\Lambda^{(3,1)})^T - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$



$q = 3: Q_3 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_3]\}$ ;

$q = 2: Q_2 = 2$ , კერძოდ  $\{[y_2]\}, \{[y_3]\}$ ;

$q = 1, Q_1 = 2$ , კერძოდ  $\{y_1\}, \{[y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 0: Q_0 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ .

მიღებული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(3,1)}(1,2,2,1)$ .

7)  $[y_3]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_2$  წვერი. შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი აღვნიშნოთ  $\Lambda^{(3,2)}$ -ით.

$$\Lambda^{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda^{(3,2)} \cdot \lambda^{(3,2)T} - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$q = 3: Q_3 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_3]\}$ ;

$q = 2: Q_2 = 2$ , კერძოდ  $\{[y_2]\}, \{[y_3]\}$ ;

$q = 1, Q_1 = 2$ , კერძოდ  $\{y_1\}, \{[y_2], [y_3]\}$ ;

$q = 0: Q_0 = 1$ , კერძოდ  $\{[y_1], [y_2], [y_3]\}$ .

მიღებული კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(3,2)}(1,2,1,1)$ .

ყველა განხილულ შემთხვევაში  $Q_0 = 1$ . მხოლოდ პირველ  $([y_1] -$ ს მიუყვართოთ  $x_3$  წვერი), მეორე  $([y_1] -$ ს მიუყვართოთ  $x_4$  წვერი) და მეოთხე შემთხვევაში  $([y_2] -$ ს მიუყვართოთ  $x_1$  წვერი)  $Q_1 = 1$ . შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორია  $Q^{(1,3)}(1,1,3)$ ,  $Q^{(1,4)}(1,1,3)$ ,  $Q^{(2,1)}(1,1,2,1)$ . მათ შორის უმცირესი  $Q_2$  კოორდინატი აქვს  $Q^{(2,1)}$  ვექტორს. მაშასადამე სხვა მოთხოვნების (დამატებითი პირობების) არ არსებობის შემთხვევაში სტრუქტურის ვექტორის გასაუმჯობესებლად ოპტიმალური ვარიანტია 4) ვარიანტი - როცა  $[y_3]$  სიმპლექსს მიუყვართოთ  $x_1$  წვეროს.

როგორც ვხედავთ სტრუქტურის ვექტორის გაუმჯობესების ოპტიმალური ვარიანტის მოძებნა ამ მარტივ შემთხვევაშიც კი საკმაოდ შრომატევადი პროცესია, ამიტომ ჩვენ უნდა ვეცადოთ ეს პროცესი როგორმე გავამარტივოთ.



ახნიშნული მიმართების შესაბამისი სიმპლიციური კომპლექსის სტრუქტურის ვექტორი -  $Q = (Q_0; Q_1; \dots; Q_N)$  გვიხვენებს, თუ როგორია მოსახლეობის სხვადასხვა ჯგუფებს შორის ბმულობა (კავშირი) იმ პირობებში, როცა ყოველი ჯგუფის ყოველი ინტერესი არის დაკმაყოფილებული.

ახლა განვიხილავთ შემთხვევას, როცა  $X = A_m^p$ ,  $Y = \{1; 2; \dots; P\}$ ,

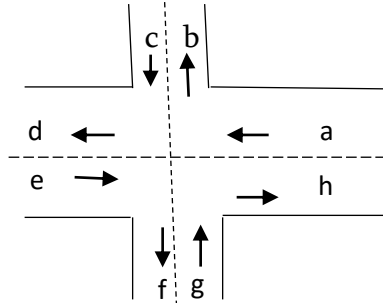
$\lambda_{ij}^m = \begin{cases} 1, & \text{თუ } j \text{ ჯგუფის ადამიანის } i \text{ ინტერესი კმაყოფილდება } m \text{ რაიონში} \\ 0, & \text{თუ } j \text{ ჯგუფის ადამიანის } i \text{ ინტერესი არ კმაყოფ. } m \text{ რაიონში} \end{cases}$   
 (აქ შესაძლებელია კვეთის შემოტანა: თუ  $m$  რაიონში რომელიმე ინტერესის დაკმაყოფილების პარამეტრი არ აღემატება წინასწარ შეთანხმებულ რიცხვს, მაშინ ჩავთვლით, რომ ეს ინტერესი მოცემულ რაიონში არ კმაყოფილდება). ვთქვათ  $Q^m = (Q_0^m; Q_1^m; \dots; Q_{N_m}^m)$  არის შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორი.  $Q = (Q_0; Q_1; \dots; Q_N)$  და  $Q^m = (Q_0^m; Q_1^m; \dots; Q_{N_m}^m)$  ვექტორების კოორდინატების შედარება საშუალებას გვაძლევს შევავასოთ რამდენად კარგი (რამდენად ცუდი) ვითარებაა მოცემულ რაიონში მოსახლეობის ჯგუფების სტრუქტურის თვალსაზრისით, როგორ შეიცვლება მოსახლეობის სტრუქტურა რაიონში განხორციელებული ამა თუ იმ ცვლილების გამო. ზემოთ მოყვანილი ალგორითმის დახმარებით შესაძლებელია მოიძებნოს ის ცვლილება (ცვლილებები), რომელი ცვლილებაც (ცვლილებებიც) რაიონის მოსახლეობის სტრუქტურას ყველაზე მეტად გააუმჯობესებს.

### 3.3 Q ანალიზის მეთოდის პრაქტიკული გამოყენების მაგალითები

**მაგალითი 1.** ტრანსპორტის ნაკადის მართვის ალგორითმი Q ანალიზის მეთოდის გამოყენებით. იმ შემთხვევაში, როცა რომელიმე დამაკავშირებელი მონაკვეთის გამტარუნარიანობა ნაკლებია, ვიდრე ნაკადის სიდიდე ამ მონაკვეთზე, გზაგვარედინზე წარმოიქმნება ე.წ. საცობები. საცობების თავის ასარიდებლად ხშირად მიმართავენ რომელიმე (ერთ ან რამდენიმე) მარშრუტის გადაკეტვის ხერხს. ჩვენ შევეცდებით Q ანალიზის დახმარებით პასუხი გავცეთ კითხვას:

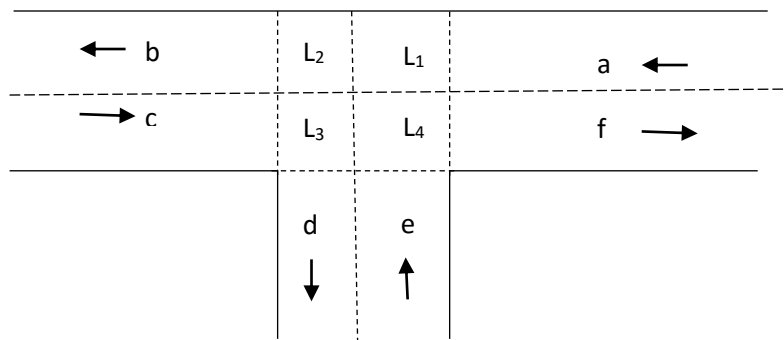
არსებული მარშუტიდან რომელი მარშუტის შეზღუდვა (გადაკეცვა) შეუშლის ყველაზე მეტად ხელს საცობების წარმოქმნას [32].

თუ ჩვენ განვიხილავთ შემდეგი ტიპის გზაჯვარედინს:



(გვაქვს 12 განსხვავებული მარშუტი) და დავუშვებთ, რომ ყველა მარშუტი ერთნაირად მნიშვნელოვანია, მაშინ ამ შემთხვევაში ჩვენ ვერ ავირჩევთ იმ ერთადერთ მარშუტს, რომელი შეზღუდვაც მოგვცემს ყველაზე კარგ ეფექტს.

ამიტომ  $Q$  ანალიზის მეთოდის საილუსტრაციოდ უმჯობესია განვიხილოთ შემდეგი ტიპის გზაჯვარედინი:



გზაჯვარედინი შედგება ოთხი დამაკავშირებელი მონაკვეთისაგან:  $L_1; L_2; L_3; L_4$ . არსებობს გზაჯვარედინის გადაკვეთის ექვსი მარშუტი  $R_1 - ab, R_2 - ad, R_3 - cd, R_4 - cf, R_5 - ef, R_6 - eb$ .

$L = \{L_1, L_2; L_3; L_4\}$  სიმრავლიდან  $R = \{R_1; R_2; R_3; R_4; R_5; R_6\}$  სიმრავლეში  $\lambda$  მიმართება განესაზღვროთ შემდეგი წესით:  $(L_i; R_j) \in \lambda$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა  $R_j$  მარშუტი გადის  $L_i$  დამაკავშირებელ მონაკვეთზე. ამ მიმართების შესაბამისად ინციდენტობის მატრიცას აქვს სახე:

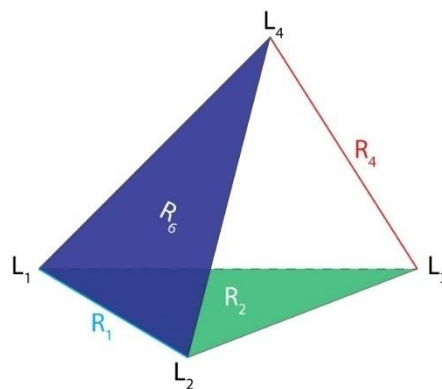
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$K_R(L; \lambda)$  და  $K_L(R; \lambda^{-1})$  კომპლექსების  $Q$  ანალიზისათვის განვიხილოთ მატრიცები  $\Lambda \Lambda^T$  და  $\Lambda^T \Lambda$ :

$$\Lambda \cdot \Lambda^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{matrix} \quad \Lambda^T \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

$K_R(L; \lambda)$  კომპლექსის  $Q$  ანალიზის შედეგად ვღებულობთ, რომ ესაა ორგანზომილებიანი კომპლექსი, რომლის სტრუქტურის ვექტორია  $Q = (1, 2, 3)$ ;  $R_2$  და  $R_6$  არიან ორგანზომილებიანი სიმპლექსები, მაგრამ ისინი არ არიან ბმული ამ დონეზე, ამიტომ  $Q_2 = 2$ ,

$q = 1$ -თვის  $Q_1 = 2$ , კერძოდ  $\{R_1 R_2 R_6\}$ ,  $\{R_4\}$ . ამ დონეზე  $R_4$  მარშუტი განცალკავებულია დანარჩენი ერთგანზომილებიანი მარშუტისაგან. ხომ არ ნიშნავს ეს, რომ ყველაზე უფრო ხელსაყრელი იქნება სწორედ  $R_4$  მარშუტის შეზღუდვა? აღნიშნულ კითხვაზე პასუხის გაცემაში დაგვეხმარება  $K_2(R, \lambda^{-1})$  კომპლექსის  $Q$  ანალიზი.

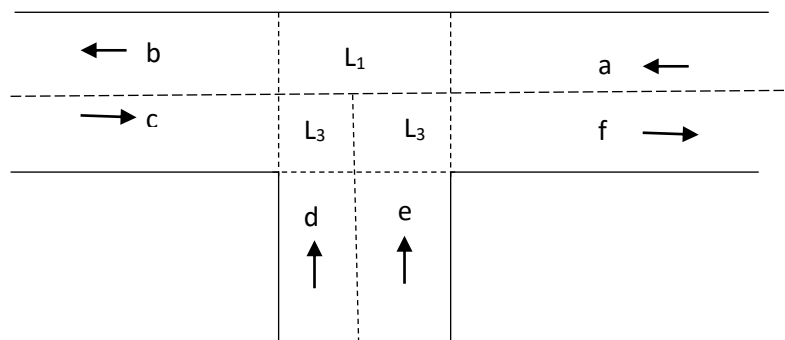


ნახ. 32

ყოველ დამაკავშირებელ მონაკვეთზე (ის  $\Lambda^T \Lambda$  მატრიცი) გადის სამი მარშუტი, მაგრამ  $L_3$  და  $L_4$  დამაკავშირებელ მონაკვეთებზე გადიან ურთიერთმართობული მარშუტები, ამიტომ ყველაზე მეტად საცობი

შესაძლებელია გაჩნდეს ამ ორი დამაკავშირებელი მონაკვეთის გამოერთ-ერთი მარშუტი, რომელიც გადის ორივე  $L_3$  და  $L_4$  მონაკვეთებზე, არის  $R_4$  მარშუტი, ამიტომ ყველაზე უფრო მოსახერხებელი იქნება სწორად  $R_4$  მარშუტის შეზღუდვა.

ცხადია, რომ რაც უფრო მცირე რაოდენობის დამაკავშირებელ მონაკვეთებისაგან შედგება გზაჯვარედინი და რაც უფრო მცირე მარშუტები გადაკვეთავენ ამ გზაჯვარედინს, მით უფრო მარტივია იმ მარშუტის დადგენა, რომლის შეზღუდვაც მოგვცემს ყველაზე მეტ ეფექტს. განვიხილოთ შემდეგი ტიპის გზაჯვარედინი:



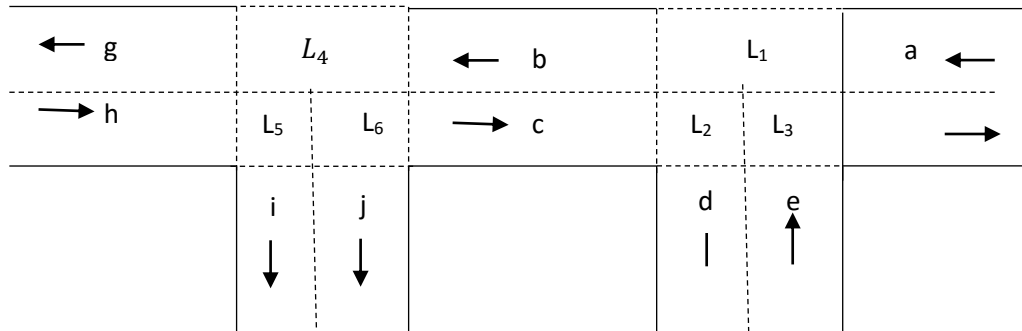
ნახ. 33

გზაჯვარედინი შედგება სამი დამაკავშირებელი მონაკვეთისგან:  $L_1$ ,  $L_2$  და  $L_3$ . არსებობს გზაჯვარედინის გადაკვეთის ოთხი მარშრუტი:  $R_1 - ab$ ,  $R_2 - cf$ ,  $R_3 - db$ ,  $R_4 - ef$ .

	$L_1$	$L_2$	$L_3$
$R_1$	1	0	0
$R_2$	0	1	1
$R_3$	1	1	0
$R_4$	0	0	1

როგორც ინციდენტობის მატრიციდან ჩანს, ყველაზე დიდ წინააღმდეგობას ქმნიან  $R_2$  და  $R_3$  მარშრუტები. ისინი ერთმანეთს ჰკვეთენ  $L_2$  დამაკავშირებელ მონაკვეთზე, ამიტომ საცობის თავიდან ასაცილებლად უმჯობესი იქნება  $R_2$  და  $R_3$  მარშრუტის გადაკეტვა. თუ ამ ორი მარშრუტის შესახებ ჩვენთვის დამატებით არაფერია ცნობილი, მაშინ მნიშვნელობა არ აქვს იმას, თუ რომელს გადავკეტავთ, მაგრამ თუ ჩვენ „მოვიძიებთ” ინფორმაციის მეზობელი გზაჯვარედინის შესახებ,

მაშინ ამ ინფორმაციის საფუძველზე ჩვენ შეიძლება უპირატესობა მივცეთ რომელიმე მარშრუტს. მაგალითად, ვთქვათ „უფრო ვრცელი“ სურათი ასეთია (ნახ. 34):



ნახ. 34

არსებობს ექვსი განსხვავებული მარშრუტი:

$$R_1 - ag, R_2 - aj, R_3 - hi, R_4 - hf, R_5 - dg, R_6 - ef.$$

	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$L_6$
$R_1$	1	0	0	1	0	0
$R_2$	1	0	0	1	0	1
$R_3$	0	0	0	0	1	0
$R_4$	0	1	1	0	1	1
$R_5$	1	1	0	1	0	0
$R_6$	0	0	1	0	0	0

როგორც ამ მატრიციდან ვხედავთ, ყველაზე დიდ წინააღმდეგობას ქმნის  $R_4$  მარშრუტი. ის გადის ოთხ დამაკავშირებელ მონაკვეთზე, ამასთან  $R_2$  მარშრუტს  $L_6$  მონაკვეთზე, ხოლო  $R_5$  მარშრუტს  $L_2$  მონაკვეთზე ჰკვეთს მართი კუთხით, ამიტომ, ბუნებრივია, ყველაზე უფრო ხელსაყრელია  $R_4$  მარშრუტის შეზღუდვა.

**მაგალითი 2. დასასვენებელი პარკები და Q-ანალიზი.** ვთქვათ  $X$  აღნიშნავს თბილისის დასასვენებელი პარკების სიმრავლეს, ხოლო  $Y$  კი რაიონების სიმრავლეს.  $X$  და  $Y$  სიმრავლეებს შორის მიმართება მოცემულია შემდეგი წესით [32]:  $x_i$  პარკი მიმართებაშია  $y_j$  რაიონთან, თუ  $y_j$  რაიონის მოსახლეობა სარგებლობს  $x_i$  პარკით. ვთქვათ ამ მიმართების შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცაა:

ვაკის პარკი	მზიური	მთაწმინდის პარკი	მუშტაიდი	იპოდრომი	რიყე	დედაენის ბაღი	ვარდების ბაღი	ვეტერანთა პარკი	კუს ტბა	ღისის ტბა	თბილისის ზღვა
ვაკე	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
საბურთალო	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
დიდუბე	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
ჩუღურეთი	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
ისანი	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
სამგორი	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
მთაწმინდა	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
გლდანი	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
ნაძალადევი	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1



შევადგინოთ  $\Lambda \cdot \Lambda^T$  მატრიცი:

	გაკმ	საბურთალო	დიდუბე	ჩუღურეთი	ისანი	სამგორი	მთაწმინდა	გლდანი	ნაძალადევი
გაკმ	5	5	0	0	0	0	0	0	0
საბურთალო	5	5	0	0	0	0	0	0	0
დიდუბე	0	0	2	1	0	0	0	1	0
ჩუღურეთი	0	0	1	6	2	0	4	0	2
ისანი	0	0	0	2	2	0	2	0	0
სამგორი	0	0	0	0	0	0	0	0	0
მთაწმინდა	0	0	0	4	2	0	4	0	0
გლდანი	0	0	1	0	0	0	0	2	1
ნაძალადევი	0	0	0	2	0	0	0	1	2

$$\Lambda \cdot \Lambda^T - I = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{ვაკე} \\ \text{საბურთალო} \\ \text{დიდუბე} \\ \text{ჩუღურეთი} \\ \text{ისანი} \\ \text{სამგორი} \\ \text{მთაწმინდა} \\ \text{გლდანი} \\ \text{ნაძალადევი} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 4 & - & - & - & - & - & - \\ 4 & 4 & - & 0 & - & - & 0 & - \\ - & - & 1 & 5 & 1 & - & 3 & - & 1 \\ - & - & 0 & 1 & 1 & - & 1 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 3 & 1 & - & 3 & - & - \\ - & - & 0 & - & - & - & 1 & 0 & - \\ - & - & - & 1 & - & - & - & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

როგორც ვხედავთ, უდიდესი განზომილების სიმპლექსია „ჩუღურეთი“, მისი განზომილებაა 5. ცხადია, რომ ის არაა  $q = 5$  ბმულობის კომპონენტში არცერთ სხვა რაიონთან:  $Q_5 = 1$ .

$q = 4$ . 4 და მეტ განზომილებიანი სიმპლექსებია „ვაკე“, „საბურთალო“ და „ჩუღურეთი“. „ვაკე“ და „საბურთალო“ არიან ერთმანეთთან 4-ად ბმული, მაგრამ ისინი არ არიან 4-ად ბმული „ჩუღურეთთან“.

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ  $q = 3, q = 2, q = 1, q = 0$ -თვის, მივიღებთ, რომ მოცემული ინციდენტურობის მატრიცის შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორს აქვს სახე:

$q = 5; Q_5 = 1$  კერძოდ {„ჩუღურეთი“};

$q = 4; Q_4 = 2$  კერძოდ {„ვაკე“, „საბურთალო“}, {„ჩუღურეთი“};

$q = 3; Q_3 = 2$  კერძოდ {„ვაკე“, „საბურთალო“}, {„ჩუღურეთი“, „მთაწმინდა“};

$q = 2; Q_2 = 2$  კერძოდ {„ვაკე“, „საბურთალო“}, {„ჩუღურეთი“, „მთაწმინდა“};

$q = 1; Q_1 = 4$  კერძოდ {„ვაკე“, „საბურთალო“}, {„დიდუბე“}, {„ჩუღურეთი“, „ისანი“, „მთაწმინდა“, „ნაძალადევი“}, {„გლდანი“};

$q = 0; Q_0 = 2$  კერძოდ {„ვაკე“, „საბურთალო“}, {„ჩუღურეთი“, „ისანი“, „მთაწმინდა“, „ნაძალადევი“, „გლდანი“, „დიდუბე“};

როგორც ვხედავთ, თბილისის რაიონები დასასვენებელი პარკების მომსახურების მიხედვით საკმაოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისგან, წინააღმდეგობის ვექტორს ყველაზე დიდი კოორდინატი აქვს  $q = 1$ -თვის:  $Q_1 = 3$  - ის რვა რაიონი, რომლებსაც აქვთ ორი მაინც დასასვენებელი პარკი, იყოფა 4 ჯგუფად. ეს ნიშნავს, რომ ყველაზე რთული გასატარებელი იქნება რეფორმა, რომელიც მიზანს ისახავს ეს

რაიონები ერთმანეთს დაუკავშიროთ  $q = 1$  დონეზე – ყოველი ორი რაიონი ერთმანეთს დაუკავშირდეს „ორპარკიანი ჯაჭვით“.

გამოვთვალოთ ექსცენტრისიტეტის სიდიდე თითოეული რაიონისთვის,

$$ecc(\text{ვაკე}) = \frac{4 - 4}{4 + 1} = 0;$$

$$ecc(\text{"საბურთალო"}) = \frac{4 - 4}{4 + 1} = 0;$$

$$ecc(\text{"დიდუბე"}) = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1;$$

$$ecc(\text{"ჩუღურეთი"}) = \frac{5 + 3}{3 + 1} = \frac{1}{2};$$

$$ecc(\text{"ისანი"}) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0;$$

$$ecc(\text{"სამგორი"}) = \frac{-1 + 1}{-1 + 1} - \text{განუსაზღვრელი};$$

$$ecc(\text{"მთაწმინდა"}) = \frac{3 - 3}{3 + 1} = 0;$$

$$ecc(\text{"გლდანი"}) = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1;$$

$$ecc(\text{"ნაძალადევი"}) = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0;$$

როგორც ვხედავთ ვაკე, საბურთალო, ისანი, მთაწმინდა და ნაძალადევის რაიონების ექსცენტრისიტეტები ტოლია ნულის. ეს ნიშნავს, რომ აღნიშნული რაიონები სხვა რაიონების მიმართ „კეთილგანწყობილი“ რაიონებია – ყველა პარკი, რომელიც ემსახურება ამ რაიონებს, ემსახურება კიდევ ერთ მაინც სხვა რაიონს. რაც შეეხება სამგორის რაიონს, მისი ექსცენტრისიტეტი საერთოდ განუსაზღვრელია. ეს ნიშნავს, რომ პირველ რიგში უნდა აშენდეს პარკი, რომელიც მოემსახურება სამგორის რაიონს. კარგი იქნება, თუ ეს პარკი აშენდება ისე, რომ ის მოემსახურება კიდევ ერთ რაიონს მაინც. ამით სამგორის რაიონი 0 დონეზე მაინც შეუერთდება სხვა რაიონებს.

რაც შეეხება ვაკისა და საბურთალოს რაიონებს, ეს რაიონები განსაკუთრებით „კეთილგანწყობილნი“ არიან ერთმანეთის მიმართ, მათ ერთმანეთისგან განსხვავებული ინტერესები არ გააჩნიათ, მაგრამ ისინი „იზოლირებული“ არიან სხვა რაიონებისგან, რაც გასათვალისწინებელია მომავალში (დაპროექტებისას).

მაგალითი 3. ოპტიმალური კავშირების მოძებნის ალგორითმი სისტემის ქსელის ზედმეტად დატვირთვის შემთხვევაში. განვიხილოთ ურბანული სისტემა, რომელიც დაყოფილია 2 რაიონად, სადაც ფუნქციონირებს 5 საწარმო, რომელთაც ჰყავთ 7 ნედლეულის მომწოდებელი [34]. მომწოდებლებსა და საწარმოებს შორის ინციდენტურობის მატრიცას აქვს სახე:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

განვიხილოთ მატრიცი:

$$C = \Omega \cdot \Omega^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$C$  მატრიცის  $C_{sm}$  ელემენტი ( $s \neq m$ ) გვიჩვენებს რამდენი საერთო მომწოდებელი ჰყავს  $s$  და  $m$  საწარმოს.  $d_{sm}$ -ით აღვნიშნოთ  $s$  და  $m$  საწარმოების მომწოდებელთა რიცხვის შორის უდიდესი (მაგალითად  $d_{15} = \max\{4; 5\} = 5$ ;  $d_{23} = \max\{4; 4\} = 4$ ).  $p_{sm} = \frac{C_{sm}}{d_{sm}}$ . გამოვითვალოთ რეგიონის მახასიათებელი პარამეტრი:

$$\mu = \frac{2 \sum_{s=1}^M \sum_{m=i+1}^M p_{sm}}{M(M-1)} = \frac{2 \cdot \left( \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right)}{5 \cdot 4} = 0,5$$

საწარმოების მოგების კოეფიციენტები წლების მიხედვით მოცემულია დანართში, ცხრილი 1-ში, გადაიარაღების კოეფიციენტები წლების მიხედვით მოცემულია დანართში, ცხრილი 2-ში, მოსახლეობის ცალკეული ჯგუფებისთვის რაიონების მახასიათებელი პარამეტრები მოცემულია დანართში, ცხრილი 3-ში, ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ რა მოცულობის ინვესტიციის ათვისება შეუძლია მოცემულ საწარმოს (ინფორმაცია საწარმოს ტევადობის შესახებ) მოცემულია დანართში, ცხრილი 4-ში.

$\sigma_{sm}$ -ით აღნიშნავთ  $q$ -ს მნიშვნელობას რომლისთვისაც  $s$  და  $m$  საწარმოს არიან ბმულნი.  $\sigma_{sm}$ -ის მნიშვნელობა მოცემულია შემდეგი მატრიცით:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$dim R_m$ -ით აღნიშნოთ  $m$ -ურ საწარმოს (სიმპლექსის) განზომილება. ჩვენს შემთხვევაში საწარმოს განზომილებათა ვექტორს აქვს სახე:

$$(3, 3, 3, 2, 4).$$

გამოვთვალოთ მიზიდვის ფუნქციის კოეფიციენტი:

$$\delta_{sm} = (\sum_{p=1}^p \lambda_k^{(p)} \eta^{(p)} + \sum_{i=1}^I \beta_m^{(i)} \gamma_m^{(i)} + \sum_{i=1}^I \alpha_m^{(i)} \omega^{(i)}) \frac{\sigma_{sm}}{dim R_m}.$$

(აქ  $K$  აღნიშნავს იმ რაიონის ნომერს, რომელსაც ეკუთვის  $m$ -ური საწარმო)

მიზიდვის კოეფიციენტები მოიცემა შემდეგი მატრიცით:

$$\delta = \begin{pmatrix} 0,404 & 0,1417 & 0,1373 & 0,2215 & 0,2255 \\ 0,1347 & 0,425 & 0,2746 & 0,2215 & 0,1126 \\ 0,1347 & 0,2834 & 0,412 & 0,2215 & 0,2255 \\ 0,1347 & 0,1417 & 0,1373 & 0,443 & 0,1126 \\ 0,1347 & 0,2834 & 0,2746 & 0,2215 & 0,451 \end{pmatrix}$$

$X_{sm}(t)$  აღნიშნავს ინვესტიციის სიდიდეს, რომელიც დროის  $T$  მომენტისათვის  $S$  საწარმოდან იდება  $m$  საწარმოში. ეს სიდიდეები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\sum_{s=1}^M x_{sm}(t) = h_m I_m(t), \quad m \in \overline{[1, M]}$$

$h_m$  პროპორციულობის კოეფიციენტები მოცემულია ვექტორის სახით:

$$h = (0,82; 0,74; 0,62; 0,71; 0,68)$$

თუ ჩაწერის გამარტივების მიზნით  $\alpha_m^{(i)}$ -ის ნაცვლად დავწერთ  $\alpha_m$ -ს, მაშინ ინვესტიციის სიდიდეების გამოსათვლელად გვექნება დიფერენციალური განტოლებების შემდეგი სისტემა

$$\frac{dI_m(t)}{dt} = (\alpha_m - \mu h_m) I_m(t) + \mu \sum_{s=0}^M \frac{v_{sm}(t)}{\sum_{k=0}^M v_{sm}(t)} h_s I_s(t)$$

სადაც  $v_{sm}$  არის მიზისდვის ფუნქცია, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$v_{sm}(t) = \delta_{sm} I_m(t) (V_m - I_m(t))$$

ყოველი  $m \in \overline{[1, M]}$ -სთვის (ჩვენს შემთხვევაში  $M = 5$ ) ვპოულობთ  $I_m(t)$ -ს (მ-ურ საწარმოში ჩადებული ჯამური ინვესტიციის სიდიდე დროის  $t$  მომენტისათვის).

საწარმოებს შორის კავშირის გაუმჯობესების ოპტიმალური გზის საპოვნელად ვპოულობთ მომწოდებლებსა და საწარმოებს შორის კავშირის ამსახველი ინციდენტურობას  $\Omega$  მატრიცის სტრუქტურის ვექტორს. ამისათვის ვპოულობთ მატრიცას:

$$\Omega \cdot \Omega^T - I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

სადაც  $I$  არის მატრიცი, რომლის ყოველი ელემენტი 1-ის ტოლია. ვპოულობთ შესაბამის სტრუქტურის ვექტორის კოორდინატებს:

$$\text{როცა } q = 4, Q_4 = 1$$

$$\text{როცა } q = 3, Q_3 = 4$$

$$\text{როცა } q = 2, Q_2 = 3$$

$$\text{როცა } q = 1, Q_1 = 1$$

$$\text{როცა } q = 0, Q_0 = 1$$

სტრუქტურის ვექტორია (1; 4; 3; 1; 1). თუ ერთმანეთთან დავაკავშირებთ №3 მომწოდებელსა და ი.ს. „ბრეგვაძეს“, მაშინ შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორი იქნება (2,4,1,1,1) და ეს კავშირი არის ოპტიმალური.

რეგიონში განხორციელებული ყოველი ცვლილება იწვევს საწყისი პარამეტრების ცვლილებას, რაც თავის მხრივ ცვლის  $I_m$  ფუნქციას. განიხილება რეგიონის რეკონსტრუქციის ორი გეგმა. თითოეული გეგმის შემთხვევაში ვითვლით ინვესტიციის მოსალოდნელ სიდიდეს, ვაფასებთ ობიექტების დატვირთულობას (მათ შორის მომწოდებლებისა და გასაღების ობიექტების დატვირთულობას), ვეძებთ ოპტიმალურ კავშირებს იმ შემთხვევაში, თუ სისტემა ვერ უძლებს შეშფოთებას [34].

იმისათვის, რომ პასუხი გავცეთ კითხვას, გაუძლებს თუ არა მომწოდებლებსა და საწარმოებს შორის კავშირის ქსელი დატვირთვას ამა თუ იმ გეგმის შემთხვევაში, გვჭირდება ვიცოდეთ თუ მაქსიმუმ რა მოცულობის ნედლეულის მოწოდება შეუძლია ამათა თუ იმ მომწოდებელს; რა მოცულობის ნედლეულია საჭირო ამა თუ იმ საწარმოსათვის; როგორია თითოეული საწარმოს წილი მომწოდებლის მიერ მოწოდებულ ნედლეულის საერთო რაოდენობაში; როგორია თითოეული მომწოდებლის წილი საწარმოს მიერ მოხმარებული ნედლეულის რაოდენობაში.

ინფორმაცია მომწოდებლების დატვირთულობის შესახებ მოცემულია დანართში, ცხრილი 5-ში, ინფორმაცია გასაღების ბაზრის დატვირთულობის შესახებ მოცემულია დანართში, ცხრილი 6-ში.

ექსცენტრისიტეტის გამოსათვლელად ვსარგებლობთ ფორმულით:

$$E_{ccm} = \frac{d_{im}R_m - \check{q}}{\check{q} + 1}$$

სადაც  $\check{q}$  აღნიშნავს  $q$ -ს უდიდეს მნიშვნელობას, რომლისთვისაც  $m$ -ური საწარმო  $q$  ბმულია ყველა დანარჩენ საწარმოსთან. ამიტომ მომწოდებლებთან არსებული კავშირების შემთხვევაში საწარმოების ექსცენტრისიტეტი იქნება:

საწარმოს დასახელება	ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა
შ.პ.ს. „მუხა“	1,00
შ.პ.ს. „ალფა“	1,00
ი.ს. „ნადიბაიძე“	1,00
ი.ს. „ბრეგვაძე“	0,50
ასოციაცია „კომპლექსი“	1,50

გეგმა 1-ის შემთხვევაში საწარმოთა ექსცენტრისიტეტი არ იცვლება.

გეგმა 2-ის შემთხვევაში არსებული ქსელი დატვირთვას ვერ გაუძლებს. საჭიროა შ.პ.ს. „მუხა“ მომარაგდეს №5 მომწოდებლითაც,

ხოლო ასოციაცია „კომპლექსი“ – №4 მომწოდებლითაც. ამ შემთხვევაში ინციდენტურობის მატრიცას ექნება სახე:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega \cdot \Omega^T - I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

შესაბამისი სტრუქტურის ვექტორის კოორდინატებია

- როცა  $q = 5Q_5 = 1$  {№5}
- როცა  $q = 4Q_4 = 4$  {№1}, {№5}
- როცა  $q = 3Q_3 = 3$  {№1; №2; №5} {№3}
- როცა  $q = 2Q_2 = 1$  {№1; №2; №3; №4; №5}
- როცა  $q = 1Q_1 = 1$  {№1; №2; №3; №4; №5}
- როცა  $q = 0Q_0 = 1$  {№1; №2; №3; №4; №5}

საწარმოთა ექსცენტრისიტეტებია:

საწარმოს დასახელება	ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა
შ.პ.ს. „მუხა“	0.67
შ.პ.ს. „ალფა“	0.33
ი.ს. „ნადიბაიძე“	0.33
ი.ს. „ბრეგვაძე“	0
ასოციაცია „კომპლექსი“	1.00

$\pi$  მოდელი და მოდელის ნაზრდი სხვადასხვა გეგმის შემთხვევაში მოცემულია დანართში, ცხრილი 7-ში

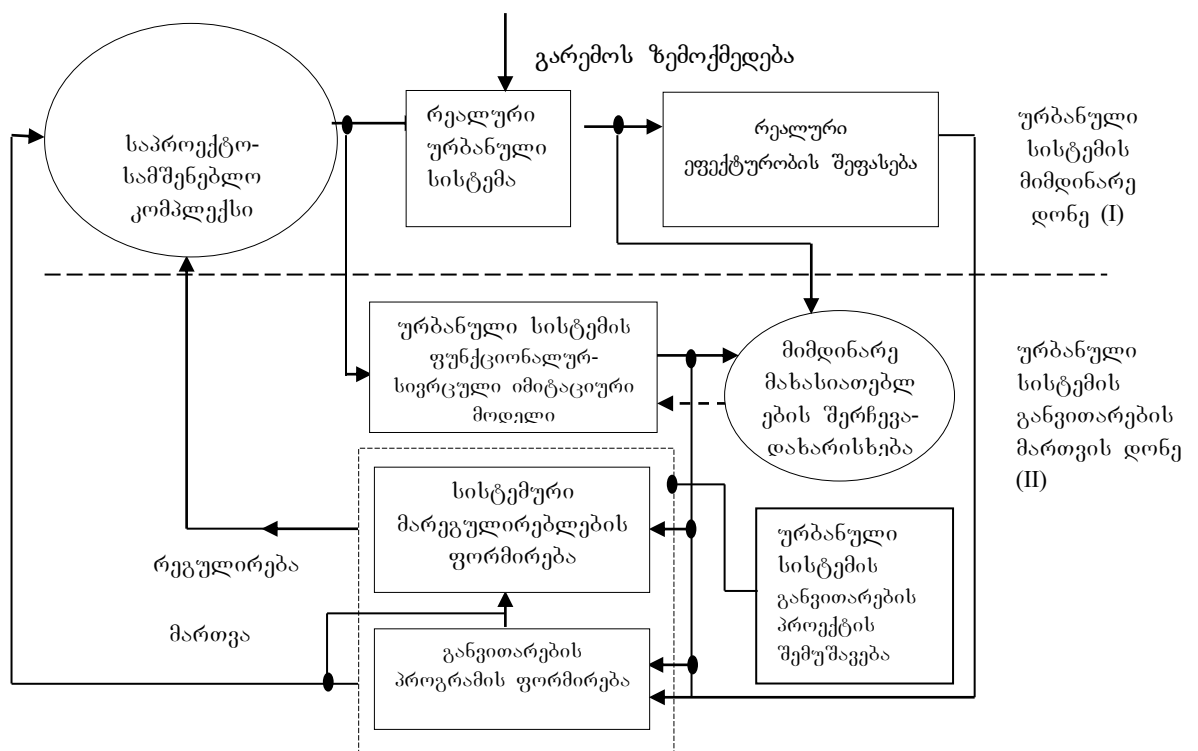


### 3.4 ექსპერტული სისტემის აგების პრინციპები და ალგორითმი საინვესტიციო პოლიტიკის შემუშავებისათვის.

ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული სტრუქტურის რეალიზაცია მიმდინარეობს დროის ორ მასშტაბში – ოპერატიული (მართვა) და სტრატეგიული (რეგულირება).

დინამიკური სისტემური ანალიზის პროცედურის ძირითადი მდგენელებია [33]:

1. ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული პროცესების სისტემური მოდელირება, იმიტაციური მოდელის შექმნა.
2. რეალურ ურბანულსისტემაში მიმდინარე პროცესების კონტროლი და ანალიზი.
3. ურბანული სისტემის განვითარების სისტემური პროექტის (გენგეგმის) შემუშავება.



ნახ. 35

4. კონკრეტული გადაწყვეტილების მიღება გენგეგმის აღსრულებისათვის და აღსრულების გეგმის შემუშავება (რეგულირება, მართვა), რაც გულისხმობს მმართველი და მარეგულირებელი

ზემოქმედებების სინთეზს და ურბანული სისტემის იმიტაციური მოდელის საშუალებით მათი ეფექტურობის შეფასებას.

პროცედურა ორ დონიანია. მისი ბირთვია თავად ურბანული სისტემა (I დონე), რომელიც ხასიათდება გარკვეული, მხოლოდ მისთვის დამახასიათებელი, პარამეტრების ჯგუფით. ამ პარამეტრების დროში ცვლილება – არის ურბანული სისტემის განვითარების პროგრამების რეალიზაციის და რეალურ ურბანულ სისტემაში მოქმედი გარე ფაქტორების ზემოქმედების შედეგი, რომელთა დიდი ნაწილის კონტროლირება შეუძლებელია.

ურბანულ სისტემაში მიმდინარე პროცესების მახასიათებელ პარამეტრებზე დაკვირვება და ანალიზი ხორციელდება რეალური ეფექტურობის შეფასების-მონიტორინგის ბლოკში, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ფორმალიზება გავუკეთოთ იმ კრიტერიუმების ერთობლიობას, რომლის ფარგლებში ფასდება ურბანული სისტემის განვითარების პროგრამები.

დინამიკური სისტემური ანალიზის პროცედურის მეორე დონე - ესაა ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების ოპერატიული და სტრატეგიული მართვა. მის ბირთვს წარმოადგენს ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული მოდელი. ის საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ ურბანული სისტემის რეაქციის იმიტირება მისი განვითარების შესაძლო პროექტებზე და ვიწინასწარმეტყველოთ ყოველი გადაწყვეტილების მოსალოდნელი შედეგი. ფუნქციონალურ-სივრცული მოდელი - დინამიკური სისტემური მოდელია იმ გაგებით, რომ მასში გათვალისწინებულია სხვადასხვა ფაქტორები (სოციალური, ეკონომიკური, ეკოლოგიური, რესურსებთან დაკავშირებული, დემოგრაფიული და სხვ.), რომლებიც ძირითადად განსაზღვრავენ ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცულ განვითარებას.

ამ დონეზე ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესია განვითარების პროგრამის ფორმირების და სისტემური რეგულირების ფორმირების ბლოკები. ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების პროგრამა – ესაა დაგეგმილი პარამეტრები ნატურალურ

გამოსახულებაში და ფინანსური რესურსები, ის, რაც სჭირდება მათ შესრულებას.

განვითარების პროგრამა შედგება მმართველი და რეგულირებადი ნაწილებისაგან. პირველი შეიცავს მართველ ზემოქმედებას. კერძოდ, იმ მატერიალური და ფინანსური ნაკადების განაწილებას, რომლებიც მიეცემა საპროექტო-სამშენებლო კომპლექსს.

მართვა - ესაა რეალური მატერიალური, ფინანსური ნაკადი - როგორც ცენტრალური სახელმწიფოებრივი წყაროებიდან, ასევე კერძო ინვესტორებიდან.

მეორე ნაწილი მოიცავს მარეგულირებელ ზემოქმედებას, რომელიც გულისხმობს, როგორც “თამაშის წესების” შემუშავებას ურბანული სისტემის განვითარების პროცესში. ასევე, იმ მაკრო პარამეტრების დაწესებას, რომლებიც დამახასიათებელია კონკრეტული ურბანული სისტემისათვის და აუცილებელია შესასრულებლად ყველასათვის ვინც ურბანულ სისტემზე რაიმე “ზემოქმედებას” ახორციელებს. მათი აგრეგირება შეიძლება, ძირითადად, ხუთ კლასად: ადმინისტრაციულ-ნორმატიული, მიწის (საკადასტრო), საბიუჯეტო-საგადასახადო, ორგანიზაციულ-სამართლებრივი, ხელშეკრულებითი, ისტორიული ფასეულობების, სოციალური სტრუქტურის მიხედვით და სხვა.

აღნიშნული პროცედურის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს ბლოკს წარმოადგენს ფუნქციონალურ-სივრცითი მოდელის პარამეტრების დახარისხების, შერჩევის ბლოკი.

ფუნქციურ-სივრცითი განვითარების მოდელის პარამეტრების პერიოდული დახარისხება, შერჩევა აუცილებელია იმისათვის, რომ ამა თუ იმ პროგრამის განხორციელების დროს ურბანულმა სისტემამ შეიძლება მიიღოს სულ სხვა ისეთი თვისებები, რომლის იმიტირება უკვე შეუძლებელია მოდელის არსებული პარამეტრებით.

ურბანულ სისტემის როგორც რთული სისტემის მდგომარეობა არ უნდა შევაფასოთ მხოლოდ ერთი კრიტერიუმით. რადგანაც, გარემოს გაუმჯობესებას ერთი რომელიღაც კრიტერიუმით, ხშირად მიყვევართ მის გაუარესებამდე სხვა კრიტერიუმის მიხედვით. ამისათვის აუცილებელია განზოგადოებული კრიტერიუმის ფორმირება, რომელიც

მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია ურბანული სისტემის დაგეგმარების კონკრეტულ ამოცანაზე.

მრავალფაქტორიანი კრიტერიუმის მიხედვით გადაწყვეტილების მიღება კი შეუძლებელია თანამედროვე მართვის თეორიისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების გამოყენების გარეშე.

ზემოთ მოცემული მონაცემებისათვის მოვიყვანოთ ჩვენს მიერ შექმნილი ალგორითმებისა და მეთოდების საილუსტრაციო მაგალითი:

პროგრამის ჩართვისას ეკრანზე გამოდის შემდეგი ფანჯარა

მენიუს ჩანართი „ზოგადი ინფორმაცია“:

ზოგადი ინფორმაცია	რეგიონის რუკა	ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ	ცალკეულ საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა	ერაზვიები	რაიონის მდგომარეობა	ანალიზი	ვლილებისათვის გეგმა	მომწოდებლებისა და გასაფხვის ობიექტების დატვირთულობა	ჩ მოდელი
-------------------	---------------	-------------------------------------	--	-----------	---------------------	---------	---------------------	---	----------

### ზოგადი ინფორმაცია

რეგიონში საწარმოების რაოდენობა - 8  
რეგიონის მახასიათებელი პარამეტრები (h) - 0,7

რეგიონში რაიონების რაოდენობა: - 2  
რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობა: -

რაიონში: <b>26000</b>
რაიონში: <b>30000</b>
<b>სულ: 56000</b>

ალწარმოების კოეფიციენტი:

რაიონში: <b>0,1</b>
რაიონში: <b>0,11</b>

მომბილურების კოეფიციენტი:

რაიონში: <b>0,3</b>
რაიონში: <b>0,35</b>

ტევადობა:

რაიონში: <b>30000</b>
რაიონში: <b>36000</b>
გარე არე: <b>28000</b>

მოსახლეობის ინტერესების დაკმაყოფილების პარამეტრის სიდიდე:

რაიონში: <b>0,72</b>
რაიონში: <b>0,81</b>

მიმწოდებელი	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
საწარმო							
შ.პ.ს „ბუნა“	1	1	0	1	0	0	1
შ.პ.ს „ალფა“	1	0	0	1	1	1	0
ი.ს „ნადიბაიბე“	1	1	1	0	1	0	0
ი.ს „ბრეგვაბე“	1	0	1	1	0	0	0
ასოციაცია „კომპლექსი“	1	0	1	0	1	1	1

საწარმო	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8
შ.პ.ს „ბუნა“	1	1	1	1	1	0	1	0
შ.პ.ს „ალფა“	1	0	1	1	0	0	1	0
ი.ს „ნადიბაიბე“	1	1	0	1	1	1	0	1
ი.ს „ბრეგვაბე“	0	1	1	1	0	1	0	0
ასოციაცია „კომპლექსი“	1	1	1	1	1	1	1	1

ჩანართი მოიცავს სხვადასხვა მონაცემებს რეგიონის შესახებ. მაგალითად, რეგიონში რაიონების რაოდენობა, რაიონებში მოსახლეობის რაოდენობა, რაიონების მახასიათებელი პარამეტრები, რეგიონში საწარმოების რაოდენობა, რეგიონის მახასიათებელი პარამეტრის მნიშვნელობა, მომწოდებლებსა და საწარმოებს შორის, ასევე საწარმოებსა და წარმოებული პროდუქციის გასაღების ობიექტებს შორის კავშირის შესაბამისი ინციდენტურობის მატრიცი.

მენიუს ჩანართი „ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ“:

ზოგადი ინფორმაცია	რეგიონის რუკა	ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ	ცალკეულ საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა	გრაფიკები	რაიონის მდგომარეობა	ანალიზი	ცვლილებათა გეგმა	მომწოდებლებისა და გასაღების ობიექტების დატვირთულობა	ჩ მოდელი
-------------------	---------------	-------------------------------------	--	-----------	---------------------	---------	------------------	---	----------

### ინფორმაცია ცალკეული საწარმოს შესახებ

საწარმოს დასახელება : ასოციაცია „კომპლექსი“

პარამეტრი	ზომის ერთეული	სიდიდე
საწარმოს ტევადობა	ლარი	2 500 000
ინვესტიციის სიდიდე წინა წელს	ლარი	1 500 000
მოგების სიდიდე წინა წელს	ლარი	210 000
მოგების კოეფიციენტი წინა წელს	-	0,140
ინვესტიციის სიდიდე 2 წლის წინ	ლარი	1 300 000
მოგების სიდიდე 2 წლის წინ	ლარი	190 000
მოგების კოეფიციენტი 2 წლის წინ	-	0,138
გადაიარაღების კოეფიციენტი წინა წელს	-	0,050
გადაიარაღების კოეფიციენტი 2 წლის წინ	-	0,061
ექსცენტრისიტეტი	-	0,67

ინფორმაცია მომწოდებლების შესახებ

ინფორმაცია გასაღების ნაზრის შესახებ

ჩანართი „ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ“ გვაწვდის სხვადასხვა ინფორმაციას ჩვენს მიერ არჩეული საწარმოს შესახებ, მაგალითად, ინფორმაციას საწარმოს ტევადობის შესახებ, წინა წლებში განხორციელებული ინვესტიციების შესახებ, წლების მიხედვით საწარმოს მოგების სიდიდისა და მოგების კოეფიციენტების შესახებ, წლების მიხედვით გადაიარაღების კოეფიციენტების სიდიდის შესახებ, საწარმოს ექსცენტრისიტეტის შესახებ.

ვანჯარაზე „ინფორმაცია მომწოდებლების შესახებ“ დაწკაპუნების შემდეგ ეკრანზე გამოდის შემდეგი სურათი:

ზოგადი ინფორმაცია	რეგიონის რუკა	ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ	ცალკეულ საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა	გრაფიკები	რაიონის მდგომარეობა	ანალიზი	ცვლილებათა გეგმა	მომწოდებლებისა და გასაღების ობიექტების დატვირთულობა	ჩ მოდელი
-------------------	---------------	-------------------------------------	--	-----------	---------------------	---------	------------------	---	----------

ინფორმაცია მომწოდებლების შესახებ

ინფორმაცია გასაღების ნაზრის შესახებ

საწარმოს დასახელება : ასოციაცია „კომპლექსი“

### ინფორმაცია მომწოდებლის შესახებ

წედლეულის მომწოდებელი	სულ რა მოცულობის წედლეული რაოდენობაა შესაძლებელი		მთლიანი მოცულობის რა ნაწილი მიეწოდება „ასოციაცია კომპლექსი“		მომწოდებლის მიერ მოწოდებული წედლეულის წილი „ასოციაცია კომპლექსისათვის“ საჭირო წედლეულში	
	რაოდენობა	თანხა	წილი	თანხა	წილი	თანხა
№ 1	8 000	1 200 000	0,41	4 921 000	0,492	
№ 2	6 500	975 000	-	-	-	
№ 3	12 000	1 800 000	0,12	316 000	0,216	
№ 4	6 000	900 000	-	-	-	
№ 5	2 000	300 000	0,18	108 000	0,108	
№ 6	3 200	480 000	0,20	96 000	0,096	
№ 7	18 735	1 760 000	0,05	88 000	0,088	
				1 000 000		

მასზე მოცემულია ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ რომელი მომწოდებელი რა მოცულობის ნედლეულს აწვდის საწარმოს, როგორია ცალკეული მომწოდებლის მიერ საწარმოსთვის მოწოდებული ნედლეულის წილი მომწოდებლის მიერ გაცემული ნედლეულის მთლიან მოცულობაში და როგორია მომწოდებლის ნედლეულის წილი საწარმოსთვის საჭირო ნედლეულის მთლიან მოცულობაში.

ფანჯარაზე „ინფორმაცია გასაღების ბაზრის შესახებ“ დაწკაპუნების შემდეგ ეკრანზე გამოდის შემდეგი სურათი:

ინფორმაცია მომწოდებლების შესახებ	ინფორმაცია გასაღების ბაზრის შესახებ				
საწარმოს დასახელება : ასოციაცია „კომპლექსი“					
ინფორმაცია გასაღების ბაზრის შესახებ					
გასაღების ობიექტი	სულ რა მოცულობის საქონლის გასაღებაა შესაძლებელი		„ასოციაცია კომპლექსი“ მიერ წარმოებული საქონლის რა ნაწილის რეალიზაცია ხდება მოცულ ობიექტზე		ობიექტის მიერ რეალიზებული პროდუქტის რა ნაწილს შეადგენს „ასოციაცია კომპლექსი“ მიერ მოწოდებული საქონელი
	რაოდენობა	თანხა			
№ 1	50 000	2 000 000	0,10	200 000	0,114
№ 2	40 000	1 600 000	0,12	192 000	0,112
№ 3	31 000	1 240 000	0,20	248 000	0,145
№ 4	20 000	800 000	0,05	40 000	0,023
№ 5	20 000	800 000	0,08	64 000	0,037
№ 6	45 000	1 800 000	0,25	450 000	0,263
№ 7	30 000	1 200 000	0,17	204 000	0,119
№ 8	60 000	2 400 000	0,13	312 000	0,182
				1 710 000	

მასზე მოცემულია ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ მოცემული საწარმოს მიერ წარმოებული საქონლის რა რაოდენობა და რა ნაწილის რეალიზაცია ხდება მოცულ ობიექტზე, ასევე ინფორმაცია იმის შესახებ, თუ ობიექტის მიერ რეალიზებული მთლიანი საქონლის პროდუქტის რა ნაწილს შეადგენს მოცემული საწარმოს მიერ მიერ მოწოდებული საქონელი.

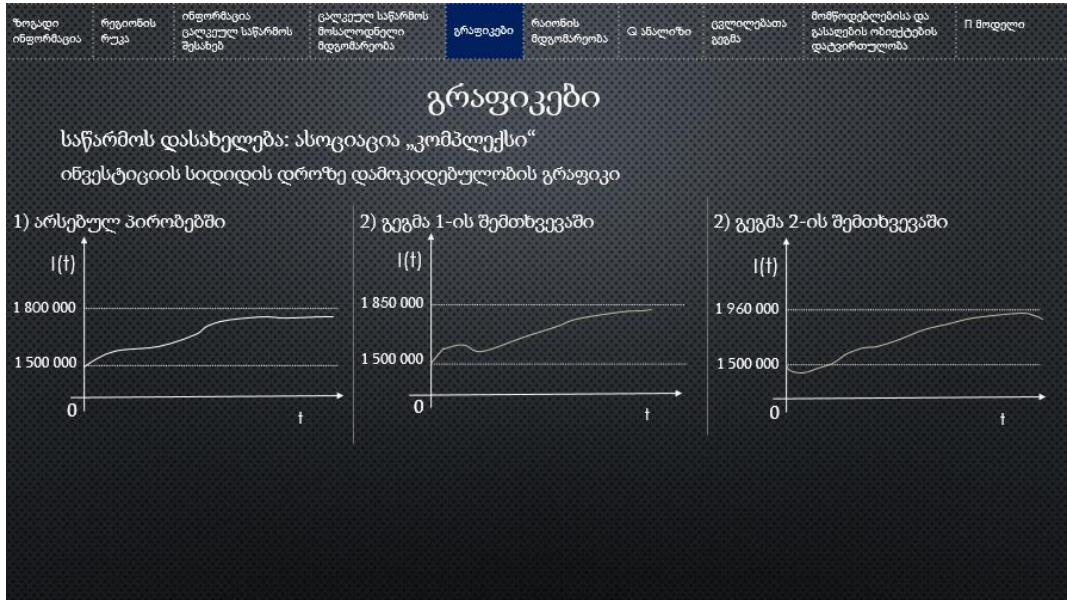
მენიუს ჩანართი „ცალკეული საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა“:

მენიუს ჩანართი „ცალკეული საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა“ გვაწვდის ინფორმაციას ცალკეულ საწარმოში განხორციელებული ინვესტიციების, წარმოებული პროდუქციისა და მოგების მოსალოდნელი სიდიდის შესახებ სხვადასხვა გეგმის

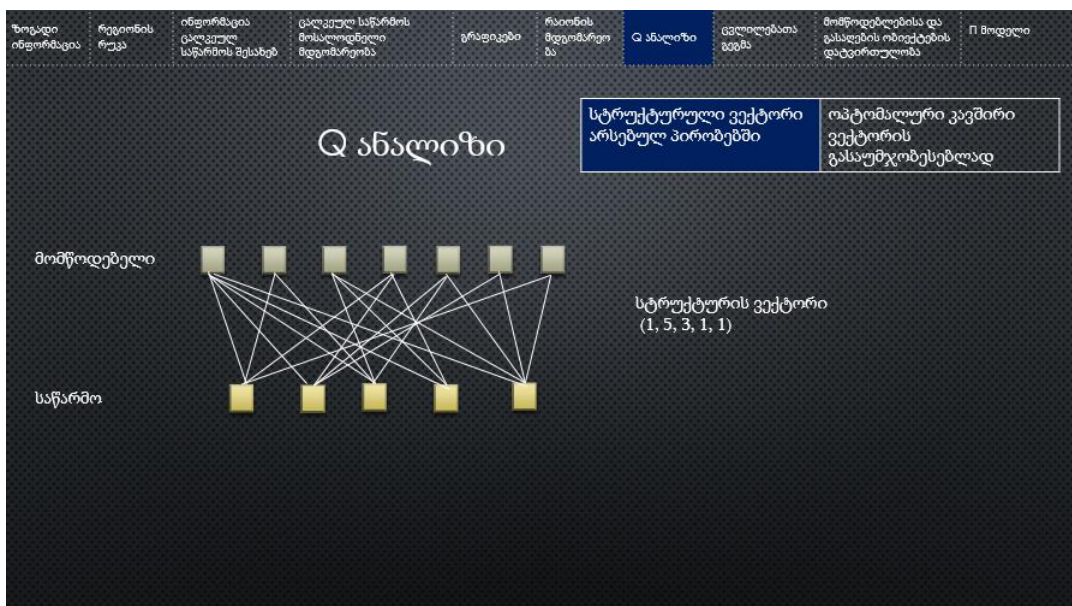
შემთხვევაში, რაც საშუალებას გვაძლევს იმიტაციურად განვახორციელოთ რამოდენიმე გენგემა.

მენიუს ჩანართი „გრაფიკები“:

პროგრამა საშუალებას იძლევა განხორციელებული გეგმის შესაბამისი ინფორმაცია გამოსახოს გრაფიკულად.



ტარდება **Q ანალიზი**. **Q ანალიზი** ასახავს ობიექტების დამოკიდებულებას ერთმანეთთან. პროგრამა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ოპტიმალური კავშირი სტრუქტურის ვექტორის გასაუმჯობესებლად.



ზოგადი ინფორმაცია	რეგიონის რუკა	ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ	ცალკეულ საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა	გრადიენტი	რაიონის მდგომარეობა	Q ანალიზი	ცვლილებათა გეგმა	მომწოდებლების და გასადების ობიექტების დატვირთულობა	მ მოდელი
-------------------	---------------	-------------------------------------	--	-----------	---------------------	-----------	------------------	--	----------

## Q ანალიზი

სტრუქტურული ვექტორი არსებულ პირობებში

ოპტიმალური ვაგშირი ვექტორის გასაუმჯობესებლად

მომწოდებელი

საწარმო

სტრუქტურის ვექტორი (1,4, 1, 1, 1)

მენიუს ჩანართი „მომწოდებლებისა და გასადების ობიექტების დატვირთულობა“:

ზოგადი ინფორმაცია	რეგიონის რუკა	ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ	ცალკეულ საწარმოს მოსალოდნელი მდგომარეობა	გრადიენტი	რაიონის მდგომარეობა	Q ანალიზი	ცვლილებათა გეგმა	მომწოდებლების და გასადების ობიექტების დატვირთულობა	მ მოდელი
-------------------	---------------	-------------------------------------	--	-----------	---------------------	-----------	------------------	--	----------

### მომწოდებლების და გასადების ობიექტების დატვირთულობა

მომწოდებლების დატვირთულობა

გასადების ობიექტების დატვირთულობა

1) არსებულ პირობებში მიწოდებელთა ქსელი დატვირთვას გაუმჯობესებს, რადგან სისტემის

$$\begin{cases} \sum_{j \in B_i} x_{ij} = M_i \\ \sum_{i \in A_j} x_{ij} \geq F_j \end{cases}$$

აზონანსში აქვს  $\{ \sum_{j \in B_i} x_{ij} = M_i \}$  არის პროდუქციის რაოდენობა, რომელსაც  $i$ -ური მომწოდებელი აწვდის  $i$ -ურ საწარმოს,  $M_i$  არის ნედლეულის რაოდენობა, რომლის მიწოდებაც შეუძლია  $i$ -ური მიწოდებელი,  $B_i$  არის იმ საწარმოთა ნომრების სიმრავლე, რომლებიც ამარაგებს  $i$ -ურ მომწოდებელს;  $F_j$  არის  $j$ -ური საწარმოსათვის საჭირო ნედლეულის მოცულობა;  $A_j$  არის იმ მიწოდებლების სიმრავლე, რომლებიც ამარაგებენ  $j$ -ურ საწარმოებს).

2) გეგმა 1-ის შემთხვევაში ქსელი დატვირთვას გაუმჯობესებს

3) გეგმა 2-ის შემთხვევაში არსებული ქსელი დატვირთვას ვერ გაუმჯობესებს, საჭიროა დამატებით მ.პ.ს "მუხა" მომარაგდეს №5 მიწოდებლით, ასოციაცია „კოალეჯი“ მომარაგდეს №4 მიწოდებლით

იმ შემთხვევაში, თუ რომელიმე ობიექტის დატვირთვა გადააჭარბებს ნორმას, ჩანართი გვაწვდის ინფორმაციას დატვირთვის გადანაწილების ოპტიმალური ვარიანტის შესახებ.



მენიუს ჩანართი „II მოდელი“:

შოკადი ინფორმაცია	რეგიონის რუკა	ინფორმაცია ცალკეულ საწარმოს შესახებ	ცალკეულ საწარმოს მოსალოდნელი მფლობელობა	გრავიკები	ჩაიონის მფლობელობა	კანალიზი	ეკოლოგიათა გეგმა	მომწოდებლებისა და განადგობის ობიექტების დატვირთვალება	II მოდელი
	მოდელი	შ.პ.ს "მუხა"	შ.პ.ს "ალფა"	ი.ს "ნადირაძე"	ი.ს "ბრეგვაძე"	ასოციაცია "კოპლექსი"	სულ		
არსებულ პირობებში	II	3 688 000	1 740 000	2 700 000	2 050 000	1 800 000	11 958 000		
გეგმა 1	IIr	3 820 000	1 770 000	2 685 000	2 125 000	1 850 000	12 250 000		
	IIi	152 000	30 000	- 15 000	75 000	50 000	292 000		
გეგმა 2	II2	3 770 000	1 810 000	2 720 000	2 140 000	1 900 000	12 340 000		
	II2	102 000	70 000	20 000	90 000	100 000	380 000		

მენიუს ჩანართი „II მოდელი“ გვაწვდის ინფორმაციას მოდელისა და მოდელის ნაზრდის შესახებ სხვადასხვა გეგმის შემთხვევაში.

**3.5 პროგრამა სისტემის სტრუქტურის ვექტორის კოორდინატებისა და ექსცენტრისიტეტის გამოსაანგარიშებლად**

პროგრამა დაწერილია javascript-ზე. პროგრამის გაშვების შემდეგ ეკრანზე ჩნდება სარკმელი, რომელიც ითხოვს ინციდენტურობის მატრიცის განზომილებების შეტანას. განზომილებების შეტანის შემდეგ ეკრანზე ჩნდება შესაბამისი მართკუთხა ცხრილი – შესავსები ინციდენტურობის მატრიცი. ვაგსებთ ინციდენტურობის მატრიცს და ვაწვებით ღილაკს „გაგრძელება“. ამის შემდეგ პროგრამა ეკრანზე გამოიტანს სტრუქტურის ვექტორის კოორდინატებს და ექსცენტრისიტეტების მნიშვნელობებს. მიღებული მნიშვნელობები მოიცემა სვეტოვანი დიაგრამის სახითაც. q-ს ყოველი მნიშვნელობისთვის მოიცემა ექვივალენტობის კლასები (ეკრანზე გამოდის ინფორმაცია რომელი სიმპლექსი რომელ ექვივალენტობის კლასშია).

```

function makeMatrixButtonDown()
    var input1Val = $('#input1').val();
    var input2Val = $('#input2').val();

    document.body.innerHTML = "";

    drawInputs(input1Val, input2Val);
}

window.onresize = function () {
    centerInputs();

    var marginLeft = window.innerWidth / 2 - (vertical1 * 75 - 5) / 2;
    marginLeft = marginLeft.toString() + "px";
    console.log(marginLeft)
    $('.matrixInputs').css('margin-left', marginLeft);

    var left = (window.innerWidth / 2 - 75).toString() + "px";
    $('#fillMatrix').css('left', left);
}

var vertical1;
//მატრიცის შესავსებო input-ების დახატვა
function drawInputs(horrorizontal, vertical) {
    vertical1 = vertical;

    for (var i = 0; i < horrorizontal; i++)
        for (var j = 0; j < vertical; j++) {

```

```

var left = (j * 75).toString() + "px";
var top = (i * 45).toString() + "px";

$(document.body).append("<input class='matrixInputs' maxlength='1'
id='" + (i * vertical + j).toString() + "' style='left:" + left + "; top:" + top + "'/>")
    };

var marginLeft = window.innerWidth / 2 - (vertical * 75 - 5) / 2;
marginLeft = marginLeft.toString() + "px";
$('.matrixInputs').css('margin-left', marginLeft);

$(document.body).append("<button id='fillMatrix'>მატრიცის
შევსება</button>");
var left = (window.innerWidth / 2 - 75).toString() + "px";
$('#fillMatrix').css('left', left);

//მატრიცის შევსების შემდეგ რაც უნდა გააკეთოს
document.getElementById('fillMatrix').addEventListener('click', function () {
    Matrices.fillMatrices(horizontal, vertical);
    Qs.findQs();
    Diagrams.DrawQsDiagram();
    Diagrams.DrawSecondDiagram();
    Diagrams.DrawYs();
});
}

var Matrices = {
    firstMatrix: [],
    transformMatrix: [],

```

```

finalMatrix: [],

//თავდაპირველი მატრიცის შევსება input-ების მიხედვით
fillMatrices: function (horizontal, vertical) {
  for (var i = 0; i < horizontal; i++)
    for (var j = 0; j < vertical; j++) {

      var value = $('#' + (i * vertical + j).toString()).val();

      if (value == "" || value != 0 && value != 1) {
        var errorMessage = "რომელიღაც ველ(ებ)ი შეუვსებელია ან
განსხვავებულია 0-სგან და 1-სგან !";
        alert(errorMessage);
        throw "ERROR: " + errorMessage;

        this.firstMatrix = [];
        return;
      }

      if (this.firstMatrix[i] == undefined)
        this.firstMatrix[i] = [];

      this.firstMatrix[i][j] = value;
      this.transformMatrix = this.findTransformMatrix(this.firstMatrix);
      this.finalMatrix = this.multiplyMatrices(this.firstMatrix,
this.transformMatrix);
    }
  },

```

//მატრიცის ტრანსფორმირების პოვნა

```
findTransformMatrix: function (array1) {  
  array2 = [];  
  for (var i = 0; i < array1.length; i++)  
    for (var j = 0; j < array1[i].length; j++) {  
      if (array2[j] == undefined)  
        array2[j] = [];  
  
      array2[j][i] = array1[i][j];  
    }  
  return array2;  
},
```

//ორი მატრიცის გადამრავლების ფუნქცია

```
multiplyMatrices: function (array1, array2) {  
  var result = [];  
  
  for (var i = 0; i < array1.length; i++) {  
  
    for (var k = 0; k < array2[0].length; k++) {  
      var elem = 0;  
  
      for (var j = 0; j < array1[i].length; j++)  
        elem += array1[i][j] * array2[j][k];  
  
      if (result[i] == undefined)  
        result[i] = [];  
      result[i].push(elem - 1);  
    }  
  }  
}
```

```

    }

    return result;
}
}

var Qs = {
  q: 0,
  Qarr: [],
  findQs: function () {

    //პირველად უნდა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა q მაქსიმალურია
    var maxElem = Matrices.finalMatrix[0][0];
    for (var i = 0; i < Matrices.finalMatrix.length; i++)
      for (var j = 0; j < Matrices.finalMatrix[i].length; j++) {

        if (Matrices.finalMatrix[i][j] > maxElem)
          maxElem = Matrices.finalMatrix[i][j];

      }

    this.q = maxElem;

    while (this.q >= 0) {
      var arr = [];

      for (var i = 0; i < Matrices.finalMatrix.length; i++)
        for (var j = 0; j < Matrices.finalMatrix[i].length; j++) {
          if (Matrices.finalMatrix[i][j] >= this.q && arr.indexOf(i) == -1)

```

```

        arr.push(i);
    }

    var index = 0;
    var yArrays = [];

    for (var k = 0; k < arr.length; k++) {
        if (this.notContains(yArrays, arr[k])) {

            yArrays[index] = [];
            for (var j = 0; j < Matrices.finalMatrix[arr[k]].length; j++) {
                if (Matrices.finalMatrix[arr[k]][j] >= this.q &&
                    this.notContains(yArrays, j) && arr.indexOf(j) != -1)
                    yArrays[index].push(j);
            }

            //თითოეული Y(i)-სთვის შევამოწმოთ შესაბამისი სტრიქონი
            var currentArr = yArrays[index];

            for (var i = 1; i < currentArr.length; i++) {
                for (var j = 0; j < Matrices.finalMatrix[currentArr[i]].length; j++)
                    if (Matrices.finalMatrix[currentArr[i]][j] >= this.q &&
                        currentArr.indexOf(j) == -1)
                        currentArr.push(j);
            }

            yArrays[index] = currentArr;

            index++;
        }
    }

```

```

        }
    }

    this.q--;

    this.Qarr.push(yArrays);
}

},
notContains: function (array, element) {
    for (var qq = 0; qq < array.length; qq++)
        if (array[qq].indexOf(element) != -1)
            return false;

    return true;
}
}

var Diagrams = {
    canvas: undefined,
    context: undefined,

    _canvas: undefined,
    _context: undefined,

    //კანვასის შექმნა Q-ების დიაგრამისთვის
    InitializeQsCanvas: function () {
        document.body.innerHTML = "";
        $(document.body).append("<div id='QsCanvas' class='canvasDiv'></div>");
    }
}

```



```

    $('#QsCanvas').append("<canvas id='canvas1' class='canvas'></canvas>");

    this.canvas = document.getElementById("canvas1");
    this.context = this.canvas.getContext("2d");
},

//კანვასის შექმნა Q-ების დიაგრამისთვის
InitializeSecondCanvas: function () {
    $(document.body).append("<div id='secondCanvas'
class='canvasDiv'></div>");
    $('#secondCanvas').append("<canvas id='canvas2'
class='canvas'></canvas>");

    this._canvas = document.getElementById("canvas2");
    this._context = this._canvas.getContext("2d");
},

//მართკუთხედების ხატვის ფუნქცია დიაგრამაში გამოსაყენებლად
DrawRectangle: function (context, left, height, maxHeight) {
    var width = (this.canvas.width - 40) / (context == this.context ?
Qs.Qarr.length : Matrices.finalMatrix.length);

    height = (this.canvas.height - 7) * height / maxHeight;
    var top = this.canvas.height - height + 5;

    context.save();
    context.beginPath();
    context.rect(left, top, width, height);

```

```

var grd = this.context.createLinearGradient(0, 0, this.canvas.width,
this.canvas.height);

grd.addColorStop(0, '#8ED6FF');
grd.addColorStop(1, '#004CB3');

context.fillStyle = grd;
context.fill();

context.lineWidth = 0.6;
context.stroke();
context.restore();
},
//x და y ღერძების ხაზვა
DrawLines: function (context) {
context.save();

context.beginPath();
context.moveTo(0, 0);
context.lineTo(0, this.canvas.height);
context.lineWidth = 2.1;
context.strokeStyle = "#382527";
context.stroke();

context.beginPath();
context.moveTo(0, this.canvas.height);
context.lineTo(this.canvas.width, this.canvas.height);
context.lineWidth = 2.1;
context.strokeStyle = "#382527";
context.stroke();
}

```

```

    context.restore();
},

//Q-ების დიაგრამის დახატვა
DrawQsDiagram: function () {
    this.InitializeQsCanvas();

    //მაქსიმალური სიმაღლის გამოთვლა ზომების პროპორციულად
    ასაღებად
    var maxHeight = 0;
    for (var i = 0; i < Qs.Qarr.length; i++)
        if (Qs.Qarr[i].length > maxHeight)
            maxHeight = Qs.Qarr[i].length;

    //Q-ების შესაბამისი მართკუთხედების დახატვა დიაგრამაზე
    for (var i = Qs.Qarr.length - 1; i >= 0; i--) {
        var left = 10 + (Qs.Qarr.length - 1 - i) * ((this.canvas.width - 20 -
        Qs.Qarr.length * 9) / Qs.Qarr.length + 9);
        this.DrawRectangle(this.context, left, Qs.Qarr[i].length, maxHeight);

        this.context.save();
        this.context.lineWidth = 1;
        this.context.font = '9pt Calibri';
        this.context.fillStyle = '#1E0202';
        this.context.fillText("Q" + (Qs.Qarr.length - 1 - i).toString() + "=" +
        Qs.Qarr[i].length.toString(), left + ((this.canvas.width - 40) / Qs.Qarr.length) / 2 -
        15, this.canvas.height - 4.5);
        this.context.restore();
    }
}

```

```

    }
    this.DrawLines(this.context);
},
//თითოეული q-სთვის Y-ების სიმრავლეების ჩვენება
DrawYs: function () {
    for (var i = Qs.Qarr.length - 1; i >= 0; i--) {
        var id = i.toString();

        $(document.body).append("<h2 id=" + i + " class='Ys'></h2>");

        $(document.getElementById(i)).append("<span >როცა q უდრის " +
(Qs.Qarr.length - 1 - i) + "-ს: </span>");

        for (var j = 0; j < Qs.Qarr[i].length; j++) {
            $(document.getElementById(i)).append("<span>{");

            var sortedArray = Qs.Qarr[i][j].sort(function (a, b) { return a - b });

            for (var k = 0; k < Qs.Qarr[i][j].length; k++)
                $(document.getElementById(i)).append("<span>Y" + sortedArray[k]
+ (k != Qs.Qarr[i][j].length - 1 ? ", " : "") + "</span>");

            $(document.getElementById(i)).append("<span>}");
        }
    }
},
DrawSecondDiagram: function () {
    this.InitializeSecondCanvas();
}

```

```

var resultArr = [];

for (var i = 0; i < Matrices.finalMatrix.length; i++) {
    var left = 10 + (Qs.Qarr.length - 1 - i) * ((this.canvas.width - 20 -
Matrices.finalMatrix.length * 9) / Matrices.finalMatrix.length + 9);

    var maxInLine = Matrices.finalMatrix[i][0];
    var maxJ = 0;
    for (var j = 0; j < Matrices.finalMatrix[i].length; j++)
        if (Matrices.finalMatrix[i][j] > maxInLine) {
            maxInLine = Matrices.finalMatrix[i][j];
            maxJ = j;
        }

    var secondMaxInLine = -100;
    for (var j = 0; j < Matrices.finalMatrix[i].length; j++)
        if (Matrices.finalMatrix[i][j] > secondMaxInLine && j != maxJ) {
            secondMaxInLine = Matrices.finalMatrix[i][j];
        }
    var result = (maxInLine - secondMaxInLine) / (secondMaxInLine + 1);

    resultArr.push(result);
}

//დიაგრამის სვეტების და შესაბამისი რიცხვების ხატვა
for (var i = 0; i < Matrices.finalMatrix.length; i++) {
    var left = 10 + i * ((this.canvas.width - 20 - Matrices.finalMatrix.length *
9) / Matrices.finalMatrix.length + 9);

    var height = resultArr[i];
    var maxHeight = resultArr[0];

```

```

    for (var k = 0; k < resultArr.length; k++)
        if (resultArr[k] > maxHeight)
            maxHeight = resultArr[k];

    this.DrawRectangle(this._context, left, height, maxHeight);

    this._context.save();
    this._context.lineWidth = 1;
    this._context.font = '9pt Calibri';
    this._context.fillStyle = '#1E0202';
    //თუ ათწილადში მძიმის შემდეგ სამ ციფრზე მეტია, ჩამოვაჭრათ
    ამ 3 ციფრის შემდეგი ციფრები
        var resultString = resultArr[i].toString();
        var bool = resultArr[i] % 1 != 0 &&
resultString.substr(resultString.indexOf(".") + 1).length > 3;
        var resultNum = bool ? resultArr[i].toFixed(3).toString() :
resultArr[i].toString();

        this._context.fillText(resultNum, left + ((this.canvas.width - 40) /
Matrices.finalMatrix.length) / 2 - 8, this.canvas.height - 4.5);
        this._context.restore();
    }

    this.DrawLine(this._context);
}
}

```

## მესამე თავის შედეგები

1. **Q** ანალიზის მეთოდის გამოყენებით შექმნილია სისტემის სტრუქტურის გაუმჯობესების ოპტიმალური გზის მოძებნის ალგორითმი.
2. დადგენილია ორი აუცილებელი პირობა, რომელთა გათვალისწინებითაც შესაძლებელია მნიშვნელოვნად შევამციროთ მაკროსისტემის სტრუქტურის გაუმჯობესებისათვის ოპტიმალური ცვლილების მოსაძებნად საჭირო გამოთვლების რაოდენობა.
3. შექმნილია ტრანსპორტის ნაკადის მართვის ალგორითმი **Q** ანალიზის მეთოდის საფუძველზე.
4. მოყვანილია **Q** ანალიზის მეთოდის პრაქტიკული გამოყენების რამდენიმე მაგალითი.
5. სტრუქტურის ვექტორის პოვნის ალგორითმის საფუძველზე შექმნილია **Q** ვექტორის კოორდინატებისა და ექსცენტრისიტეტის გამოთვლის პროგრამა.

## ძირითადი დასკვნები

1. შექმნილია არაწრფივი ობიექტების და მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირებისა (იდენტიფიკაციის) და მართვის მეთოდები და ალგორითმები. იმ შემთხვევაში, როდესაც უცნობია კვლევის ობიექტის სტრუქტურა მისი იდენტიფიკაციისათვის გამოიყენება ფუნქციონალური მწკრივები. ნაშრომში, მრავალი ცვლადის მახასიათებელი ფუნქციის გამოყენებით შექმნილია იტერაციული ალგორითმი იმპულსური გარდამავალი ფუნქციების მნიშვნელობების პოვნისათვის დროის დისკრეტული მომენტებისათვის.
2. როდესაც მაკროსისტემის სტრუქტურა ცნობილია, შესაბამისი მათემატიკური მოდელი ჩაიწერება დიფერენციალური განტოლების სახით, მისი ერთერთი მდგენელი შემთხვევითი ფუნქციონალია. ნაშრომში მაკროსისტემების იდენტიფიკაციისა და მართვისათვის შექმნილია ალგორითმები ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე.
3. კატასტროფების თეორიის საფუძველზე გამოკვლეულია ურბანულ სისტემაში წონასწორობის პირობის ამსახველი განტოლება. დადგენილია, რომ ადგილი აქვს წყობის ტიპის კატასტროფას.
4. ხშირ შემთხვევაში, ურბანულ სისტემაში მასობრივი მომსახურების ობიექტების განთავსებისა და დატვირთულობის მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებას, რომლის ზუსტი ამონახსნის პოვნა დიდ სირთულეებთანაა დაკავშირებული. ნაშრომში ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი მოძებნილია ფუნქციონალური მწკრივის სახით.
5. შექმნილია მაკროსისტემების მდგრადობის არეების პოვნის ალგორითმი. ბიფურკაციის წირების განტოლებები განსაზღვრულია ცხადი სახით.
6. ჩვენს მიერ შემოტანილია მოსახლეობის ინტერესების დაკმაყოფილების პარამეტრი, რამაც საშუალება მოგვცა შეგვექმნა ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული მდგრადი განვითარების ალგორითმი.



7. დამტკიცებულია თეორემები, რომლებიც განსაზღვრავენ რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობის მდგრადობის პირობებს. ნაჩვენებია, რომ ფერმის სტატისტიკის შემთხვევაში მიგრაციული ნაკადის წონასწორული მდგომარეობა ერთადერთია.
8. შექმნილია ურბანული სისტემის ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების პროცესის შეფასების ექსპერტული სისტემის აგების პრინციპები, რომლის საფუძველს წარმოადგენს ჩვენს მიერ შემუშავებული ურბანული სისტემის სისტემური მათემატიკური მოდელი.
9. დადგენილია და გამოკვლეულია კავშირი ურბანული სისტემის განვითარების “რაოდენობრივ” და “თვისობრივ” მახასიათებლებს შორის. დადგენილია ურბანულ სისტემის განვითარების ბიფურკაციის წერტილები, როდესაც კავშირი “რაოდენობრივ” და “თვისობრივ” მახასიათებლებს შორის წარმოადგენს ლოგისტიკურ ფუნქციას.
10. ინფორმაციის ანალიზის ენტროპიული მეთოდის საფუძველზე მოცემულია ალგორითმი, რომელიც ახალი ინფორმაციის ანალიზზე დაყრდნობით ზრდის იდენტიფიკაციის სიზუსტეს.
11. ალგებრული ტოპოლოგიის Q ანალიზის მეთოდის საფუძველზე შექმნილია ალგორითმი, რომელიც საშუალებას იძლევა ჩავატაროთ მაკროსისტემის სტრუქტურული ანალიზი და განვსაზღვროთ მისი მდგრადობა სხვადასხვა შემოთავაზებების დროს.
12. Q ანალიზის მეთოდის საფუძველზე შემუშავებულია ურბანული სისტემის სატრანსპორტო ქსელის ანალიზის მეთოდი და სატრანსპორტო ნაკადის პარამეტრების გაუმჯობესების ალგორითმები, რაც საშუალებას გვაძლევს ექსპერტიზა ჩაუტარდეს ახალი რაიონების განაშენიანების პროექტებს.
13. ჩვენს მიერ შექმნილი მეთოდებისა და ალგორითმების მიხედვით წარმოდგენილია ქ. თბილისის დასასვენებელი პარკების ტერიტორიული განაწილების ანალიზი და რეკომენდაციები აღნიშნული ქსელის ოპტიმიზაციისათვის

ლიტერატურა

1. Wilson A. G. Entropy in Urban and Regional Modeling. London: Pion Ltd., 1970
2. R. H. Atkin. int. man-Machine studies, 6, 1974
3. R. H. Atkin. From Cohomology in Physics to q-coconvecting in Social Science. int. man-Machine studies, 4, 1972
4. R. H. Atkin. Mathematical structure in Human affairs, Heinemann Educational Books LTD. London, 1974.
5. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია, ზოგადსისტემური კანონზომიერებანი და გადაწყვეტილების მიღების ტექნოლოგიები, თბილისი, 2013, სტუ-ს ბიბლიოთეკა CD/1364, 279 გვ.
6. მ. ახოზაძე. მაკროსისტემების მათემატიკური მოდელირებისა და მართვის საკითხები. მონოგრაფია თბილისი, 1997.
7. Попков Ю.С. Системный анализ и проблемы развития городов. М. Наука. 1983.
8. Popkov I.S. The Basics of Theory of dynamic systems with the entropic operator and its appendix; Automation and Telemechanics. 2006 #6 page 75-105
9. М. Ахобадзе. Э. Курцхалия. Модел динамики деморесурсов с учетом интересов различных групп населения. ВНИИСИ Сборник трудов. Вып.13. Москва. 1990.
10. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია. არაწრფივი ობიექტების იდენტიფიკაცია მახასიათებელი ფუნქციის საშუალებით. სტუ. სამეცნიერო შრომები №13 (352). 1990.
11. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია. არაწრფივი ობიექტების იდენტიფიკაციის რეკურსული ალგორითმი. სტუ. სამეცნიერო შრომები №13(369), 1990.
12. Akhobadze M. Identifikation of nonlinear closed dynamic systems by their block impulse functions. IFAC. Tbilisi, USSR, 1989
13. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია. დემოგრაფიული პროცესის პროგნოზირების ერთი მეთოდი რეგიონალური სისტემების. სტუ. სამეცნიერო შრომები №3 (376) 1991.

14. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია. დემოგრაფიული პროცესის მართვის იმიტაციური მოდელი. საქ. მეცნიერებათა აკადემიის მოამბე. ტ. 145. №2 1992წ.
15. ე. კურცხალია. სხვაობიანი სქემა დემოგრაფიული პროცესის პროგნოზირების მათემატიკური მოდელირებისათვის. სტუ. 405 (9) 1993წ.
16. И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов. Об основных понятиях математической теории решетчатых множеств. Труды ИСА РАН, 2009. с. 220-227.
17. И. М. Макаров, А. А. Ахрем, В. З. Рахманкулов. Энтропийные методы анализа информации. Труды ИСА РАН. Том 61. 1/2011.
18. Пупков К. Ф. Капалин В. И. и др. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М. Наука. 1976.
19. Ландау Л.Д. Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М. Наука, 1970.
20. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია, თ. ბახტაძე. ქალაქის ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების იმიტაციური მოდელირება და მართვა. სტუ-ს შრომები №3, 2014.
21. ა. ფრანგიშვილი, მ. ახოზაძე, გ. მიქიაშვილი, ქალაქის ფუნქციონალურ-სივრცული განვითარების შეფასების და მართვის ექსპერტული სისტემა, ურბანისტთა საერთაშორისო კონფერენციის მასალები, თბილისი, 2014.
22. Гнеденко Б. В., Коваленко И.Н., Введение в теорию массового обслуживания., М. Наука, 1997.
23. Akhobadze M., Zangurashvili D., Simulation model of court functioning on the basis of queueing proc. II unit. conf. "parallel computations and control problems", Moscow 2004, 350-360.
24. M.Akhobadze and E. Kurtsskhalia. For mathematical modeling of mass service processes. „საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის მოამბე“. 2013 წელი, ტ. 7, №2
25. Владимирова В. С., Уравнения математической физики. М., Наука, 1981.
26. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია, ლ. შავერდაშვილი, დემოგრაფიული პროცესის პროგნოზირების იმიტაციური მოდელი, "ინტელექტი" №1 (42), 2012, გვ. 185-187.
27. Постон Т. Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения М. Мир, 1980.

28. მ. ახოზაძე, ე. კურცხალია. სივრცული ეკონომიკური სისტემების ანალიზი კატასტროფების თეორიის საფუძველზე, სტუ-ს დაარსებიდან 90 წლისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, 21 საუკუნის მეცნიერებისა და ტექნოლოგიების განვითარების ძირითადი პარადიგმები, შრომები II, თბილისი, 2012, გვ. 258-260.
29. E. kurtskhalia. On One Property of a Periodic Decimal Fraction, Inverse to a Prime Number. Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Number, **152** (2010), 89-100
30. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Наука, 1978.
31. Р. М. Кроновер. Фрактали и хаос в динамических системах. М. Постмаркет, 2000.
32. M. Axobadze, O. Zumburidze, E. Kurtskhalia. Analysis of the Spatial Economic Processes for Defining the Investment Policy. მათემატიკური კონფერენცია „ლის ჯგუფები, დიფერენციალური განტოლებები და გეომეტრია“ (მოხსენებათა კრებული), ივნისი, ბათუმი, 2013.
33. მერაბ ახოზაძე, ბაჩუკი მესაბლიშვილი, ელგუჯა კურცხალია. სივრცული ევოლუციური ეკონომიკური პროცესების ფენომენოლოგია და საინვესტიციო პოლიტიკა. სტუ, საქართველოს საინჟინრო აკადემია. ბიზნეს-ინჟინერინგი. ყოველკვარტალური რეფერირებადი და რეცენზირებადი სამეცნიერო ჟურნალი. №1, 2015
34. მერაბ ახოზაძე, ელგუჯა კურცხალია. სივრცული ეკონომიკური პროცესების სტრუქტურული ანალიზი საინვესტიციო რისკების პრევენციისათვის. აკადემიკოს ივერი ფრანგიშვილის დაბადების 85 წლისთავისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია „საინფორმაციო და კომპიუტერული ტექნოლოგიები, მოდელირება, მართვა“. შრომები, საქართველო, თბილისი, 3-5 ნოემბერი, 2015 წელი

## დანართი

### ცხრილი 1

საწარმოს დასახელება	მოგების კოეფიციენტი წინა წლის				მოგების კოეფიციენტი 2 წლის წინ			
	მნიშვნელობა		წონა		მნიშვნელობა		წონა	
	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე
შ.პ.ს. „მუხა“	$\alpha_1^{(1)}$	0,164	$\omega_1^{(1)}$	0,22	$\alpha_1^{(2)}$	0,171	$\omega_1^{(2)}$	0,21
შ.პ.ს. „აღფა“	$\alpha_2^{(1)}$	0,183	$\omega_2^{(1)}$	0,21	$\alpha_2^{(2)}$	0,173	$\omega_2^{(2)}$	0,21
ი.ს. „ნადიბაიძე“	$\alpha_3^{(1)}$	0,175	$\omega_3^{(1)}$	0,21	$\alpha_3^{(2)}$	0,162	$\omega_3^{(2)}$	0,20
ი.ს. „ბრეგვაძე“	$\alpha_4^{(1)}$	0,172	$\omega_4^{(1)}$	0,23	$\alpha_4^{(2)}$	0,170	$\omega_4^{(2)}$	0,22
ასოციაცია „კომპლექსი“	$\alpha_5^{(1)}$	0,14 0	$\omega_5^{(1)}$	0,20	$\alpha_5^{(2)}$	0,135	$\omega_5^{(1)}$	0,19

### ცხრილი 2

საწარმოს დასახელება	გადაიარაღების კოეფიციენტი წინა წლის				გადაიარაღების კოეფიციენტი 2 წლის წინ			
	მნიშვნელობა		წონა		მნიშვნელობა		წონა	
	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე
შ.პ.ს. „მუხა“	$\beta_1^{(1)}$	0,081	$\gamma_1^{(1)}$	0,12	$\beta_1^{(2)}$	0,079	$\gamma_1^{(2)}$	0,07
შ.პ.ს. „აღფა“	$\beta_2^{(1)}$	0,078	$\gamma_2^{(1)}$	0,11	$\beta_2^{(2)}$	0,082	$\gamma_2^{(2)}$	0,08
ი.ს. „ნადიბაიძე“	$\beta_3^{(1)}$	0,093	$\gamma_3^{(1)}$	0,13	$\beta_3^{(2)}$	0,087	$\gamma_3^{(2)}$	0,06
ი.ს. „ბრეგვაძე“	$\beta_4^{(1)}$	0,092	$\gamma_4^{(1)}$	0,12	$\beta_4^{(2)}$	0,102	$\gamma_4^{(2)}$	0,07
ასოციაცია „კომპლექსი“	$\beta_5^{(1)}$	0,095	$\gamma_5^{(1)}$	0,10	$\beta_5^{(2)}$	0,073	$\gamma_5^{(2)}$	0,09

ცხრილი 3

საწარმოს დასახელება	I რაიონი				II რაიონი			
	მნიშვნელობა		წონა		მნიშვნელობა		წონა	
	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე	აღნიშვნა	სიდიდე
№1	$\lambda_1^{(1)}$	0,87	$\eta^{(1)}$	0,061	$\lambda_2^{(1)}$	0,79	$\eta^{(1)}$	0,058
№2	$\lambda_1^{(2)}$	0,83	$\eta^{(2)}$	0,068	$\lambda_2^{(2)}$	0,85	$\eta^{(2)}$	0,070
№3	$\lambda_1^{(3)}$	0,76	$\eta^{(3)}$	0,062	$\lambda_2^{(3)}$	0,81	$\eta^{(3)}$	0,063
№4	$\lambda_1^{(4)}$	0,72	$\eta^{(4)}$	0,092	$\lambda_2^{(4)}$	0,82	$\eta^{(4)}$	0,094
№5	$\lambda_1^{(5)}$	0,71	$\eta^{(5)}$	0,076	$\lambda_2^{(5)}$	0,72	$\eta^{(5)}$	0,078
№6	$\lambda_1^{(6)}$	0,85	$\eta^{(6)}$	0,071	$\lambda_2^{(6)}$	0,80	$\eta^{(6)}$	0,067

ცხრილი 4

საწარმოს დასახელება	აღნიშვნა	ტევადობა
შ.პ.ს. „მუხა“	$V_1$	2.500.000
შ.პ.ს. „აღფა“	$V_2$	1.800.000
ი.ს. „ნადიბაიძე“	$V_3$	2.200.000
ი.ს. „ბრეგვაძე“	$V_4$	1.750.000
ასოციაცია „კომპლექსი“	$V_5$	2.500.000
გარე არე	$V_0$	3.500.000

ცხრილი 5

ნედლეულის მომწოდებელი	სულ რა რაოდენობის ნედლეულის მიწოდება შესაძლებელი			შ.პ.ს. „მუხა“ $F_1=2.542.000$			შ.პ.ს. „აფფა“ $F_2=1.074.000$			ი.ს. „ნადიბაიძე“ $F_3=1.732.500$			ი.ს. „ბრეგვაძე“ $F_4=1.242.000$			ასოციაცია „კომპლექსი“ $F_5=1.000.000$							
	აღნიშვნა	რაოდენობა	თანხა (ლარი)	აღნიშვნა	მომწოდებლის წილი	რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	მომწოდებლის წილი	რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	მომწოდებლის წილი	რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	მომწოდებლის წილი	რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	მომწოდებლის წილი	რაოდენობა	თანხა
№1	$M_1$	10.000	1.500.000	$y_{11}$	0.047	800	120.000	$y_{12}$	0.335	2.400	360.000	$y_{13}$	0.069	800	120.000	$y_{14}$	0.087	720	108.000	$y_{15}$	0.492	3280	492.000
№2	$M_2$	8.000	1.200.000	$y_{21}$	0.177	3.000	450.000	$y_{22}$	0	0	0	$y_{23}$	0.030	3.500	52.500	$y_{24}$	0	0	0	$y_{25}$	0	0	0
№3	$M_3$	15.000	2.250.000	$y_{31}$	0	0	0	$y_{32}$	0	0	0	$y_{33}$	0.485	5.600	840.000	$y_{34}$	0.599	4960	744.00	$y_{35}$	0.216	1440	216.000
№4	$M_4$	8.000	1.200.000	$y_{41}$	0.118	2.000	300.000	$y_{42}$	0.196	1.400	210.000	$y_{43}$	0	0	0	$y_{44}$	0.314	2.600	390.000	$y_{45}$	0	0	0
№5	$M_5$	3.000	450.000	$y_{51}$	0	0	0	$y_{52}$	0.112	800	120.000	$y_{53}$	0.416	480	72.000	$y_{54}$	0	0	0	$y_{55}$	0.108	720	108.000
№6	$M_6$	4.000	600.000	$y_{61}$	0	0	0	$y_{62}$	0.357	2.560	384.000	$y_{63}$	0	0	0	$y_{64}$	0	0	0	$y_{65}$	0.096	640	96.000
№7	$M_7$	15.000	2.250.000	$y_{71}$	0.658	11.147	1.672.000	$y_{72}$	0	0	0	$y_{73}$	0	0	0	$y_{74}$	0	0	0	$y_{75}$	0.088	587	88.000

ცხრილი 6

გასაღების ობიექტი	სულ რა მოცულობის საქონლის გასაღებაა შესაძლებელი			შ.პ.ს. „მუსა“ $E_1=3.668.000$				შ.პ.ს. „ალფა“ $E_2=1.720.000$				ი.ს. „ნადიბაიძე“ $E_3=2.685.000$				ი.ს. „ბრეგვაძე“ $E_4=1.987.000$				ასოციაცია „კომპლექსი“ $E_5=1.710.000$			
	აღნიშვნა	რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	გასაღების ობიექტის რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	გასაღების ობიექტის რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	გასაღების ობიექტის რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	გასაღების ობიექტის რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	გასაღების ობიექტის რაოდენობა	თანხა	აღნიშვნა	გასაღების ობიექტის რაოდენობა	თანხა		
№1	G <sub>1</sub>	6.000	2.400.000	Z <sub>11</sub>	0.404	3700	1.480.000	Z <sub>12</sub>	0.116	500	200.000	Z <sub>13</sub>	0.045	300	120.000	Z <sub>14</sub>	0	0	0	Z <sub>15</sub>	0.117	500	200.000
№2	G <sub>2</sub>	5.000	2.000.000	Z <sub>21</sub>	0.282	2590	1.036.000	Z <sub>22</sub>	0	0	0	Z <sub>23</sub>	0.032	2125	85.000	Z <sub>24</sub>	0.144	7175	287.000	Z <sub>25</sub>	0.112	480	195.000
№3	G <sub>3</sub>	4.000	1.600.000	Z <sub>31</sub>	0.162	930	372.000	Z <sub>32</sub>	0.070	300	120.000	Z <sub>33</sub>	0	0	0	Z <sub>34</sub>	0.252	1250	500.000	Z <sub>35</sub>	0.145	620	248.000
№4	G <sub>4</sub>	2.500	1.000.000	Z <sub>41</sub>	0.016	150	60.000	Z <sub>42</sub>	0.291	1250	500.000	Z <sub>43</sub>	0.037	250	100.000	Z <sub>44</sub>	0.050	250	100.000	Z <sub>45</sub>	0.023	100	40.000
№5	G <sub>5</sub>	2.500	1.000.000	Z <sub>51</sub>	0.034	310	124.000	Z <sub>52</sub>	0.291	1250	500.000	Z <sub>53</sub>	0.042	280	112.000	Z <sub>54</sub>	0	0	0	Z <sub>55</sub>	0.038	160	64.000
№6	G <sub>6</sub>	4.500	1.800.000	Z <sub>61</sub>	0	0	0	Z <sub>62</sub>	0	0	0	Z <sub>63</sub>	0.067	450	180.000	Z <sub>64</sub>	0.554	2925	1.100.000	Z <sub>65</sub>	0.263	1125	450.000
№7	G <sub>7</sub>	3.000	1.200.000	Z <sub>71</sub>	0.162	1490	596.000	Z <sub>72</sub>	0.232	1000	400.000	Z <sub>73</sub>	0	0	0	Z <sub>74</sub>	0	0	0	Z <sub>75</sub>	0.119	510	204.000
№8	G <sub>8</sub>	6.000	2.400.000	Z <sub>81</sub>	0	0	0	Z <sub>82</sub>	0	0	0	Z <sub>83</sub>	0.777	5200	2.088.000	Z <sub>84</sub>	0	0	0	Z <sub>85</sub>	0.183	780	312.000



ცხრილი 7

	მოდელი	შ.პ.ს. „მუსა“	შ.პ.ს. „ალფა“	ი.ს. „ნადიბაიძე“	ი.ს. „ბრეგვაძე“	ასოციაცია „კომპლექსი“	სულ
არსებულ პირობებში	$\pi$	3.668.000	1.740.000	2.700.000	2.050.000	1.800.000	11.958.000
გეგმა 1	$\pi_1$	3.820.000	1.770.000	2.685.000	2.125.000	1.850.000	12.250.000
	$\delta\pi_1$	152.000	30.000	-15.000	75.000	50.000	292.000
გეგმა 2	$\pi_2$	3.770.000	1.810.000	2.720.000	2.140.000	1.900.000	12.340.000
	$\delta\pi_2$	102.000	70.000	20.000	90.000	100.000	382.000