

გიორგი რეხვიაშვილი

ფილებისა და გარსების გაანგარიშების ზოგიერთი  
საკითხი ჩვეულებრივი დიფერენციალური  
განტოლებების ინტეგრების გზით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის  
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
თბილისი, 0175, საქართველო  
თვე, წელი

საავტორო უფლება © 2009, გიორგი რეხვიაშვილი

# საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

## სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავაცანით გიორგი რეხვიაშვილის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „ფილებისა და გარსების გაანგარიშების ზოგიერთი საკითხი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების გზით“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტი სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

ხელმძღვანელი:  
ტ.მ.დ. \_\_\_\_\_ რევაზ ცხველაძე  
რეცენზენტი:  
ტ.მ.დ. \_\_\_\_\_ ნუგზარ შაიშმელაშვილი  
რეცენზენტი:  
ტ.მ.კ. \_\_\_\_\_ ვაჟა ლომიძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2009 წელი

ავტორი: გიორგი რეხვიაშვილი

დასახელება: ფილებისა და გარსების გაანგარიშების ზოგიერთი საკითხი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების გზით

ფაკულტეტი : სამშენებლო

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: 25.03. 2009 წ.

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ შემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

---

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

## რეზიუმე

ნაშრომი ეხება თხელკედლიანი სივრცული კონსტრუქციების გაანგარიშების საკითხს, რომელთა მთავარ შემადგენელ ელემენტებს წარმოადგენენ ფილები და ცილინდრული გარსები. მათი შესწავლის აქტუალობა განპირობებულია იმ მზარდი მოთხოვნილებით, რომელსაც მას უყენებს თანამედროვე ტექნიკა და მშენებლობა. ისინი ფართოდ გამოიყენება სამრეწველო და სამოქალაქო მშენებლობაში, გემთმშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, ავიამშენებლობაში, აეროდრომების მშენებლობაში და სხვა. აღნიშნული სისტემების ასეთი პოპულარობა განპირობებულია ერთის მხრივ მათი სიმტკიცის მაღალი მაჩვენებლებით, მეორეს მხრივ კი კონსტრუქციის წონის მკვეთრად შემცირების შესაძლებლობით, რასაც გადაწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება მფრინავი აპარატების (თვითმფრინავები, რაკეტები და სხვა) განხორციელებისას. გარსთა ტექნიკური თეორია, რომელიც ძირითადად ვ. რეისნერისა და ვ. ვლასოვის მიერ დაფუძნებულია ჰიპოთეზაზე ხისტი ნორმალის შესახებ. გადაწყვეტ განტოლებათა სისტემა მე-8-ე რიგისაა, ხოლო სასაზღვრო პირობები კი მართკუთხა ფორმის გარსის თითოეულ კიდეზე ხუთი. შეუსაბამობა, რომელიც გაჩნდა სასაზღვრო პირობებსა და განტოლებათა რიგს შორის ხელოვნური «რეკონსტრუქცია» გაუკეთა კირხჰოფმა, რომელმაც შემოიღო ე.წ. «განზოგადებული» განივი ძალის ცნება და ხუთი სასაზღვრო პირობა დაიყვანა ოთხზე. აღნიშნულ შეუსაბამობას თავიდანვე მიაქცია ყურადღება მრავალმა ცნობილმა მეცნიერმა. შეიქმნა მრავალი ე.წ. დაზუსტებული თეორიები. აღნიშნული საკითხის ზუსტი გადაწყვეტა მოგვცა ი. ვეკუამ, რომელმაც მე-8-ე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა აიყვანა. მე-10-ე რიგამდე, რითაც შესაბამისობა დაამყარა სასაზღვრო პირობებსა და განტოლებათა რიგს შორის.

ნაშრომის კვლევის ობიექტს წარმოადგენს ცილინდრული გარსი სხვადასხვა სახის ჩამაგრების პირობებით, თავისუფლად დაყრდნობილი მართკუთხა ფილა კონტურის გასწვრივ მოქმედი განაწილებული ცვლადი მომენტების ქმედებით, მართკუთხა ფილა, რომლის ორი მიმდებარე გვერდი ჩამაგრებულია ხისტად ან სახსრულად, ხოლო ორი მოსაზღვრე კი თავისუფალია და კონსოლური ფილა.

კვლევის მიზანია მოცემულ იქნეს აღნიშნული ობიექტების გაანგარიშებაზე ნებისმიერი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის ახალი მეთოდი კლასიკური დრეკადობის თეორიაში დაკანონებული კირხჰოფის ჰიპოთეზის გამოყენების გარეშე, რომლის რიცხვითი რეალიზაციისას მთლიანად იქნება გამორიცხული მათემატიკური ხასიათის სირთულეები.

სამუშაოში დასახული კვლევის მიზანი მიღწეულია უწყვეტ ტანთა მექანიკაში ი. ლუდუშაურის მიერ შექმნილი ახალი მიმართულების «დრეკადობის თეორია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში»

გამოყენებით, დამუშავებული ალგორითმების საფუძველზე პერსონალური კომპიუტერისათვის შედგენილია პროგრამები, რომელთა რეალიზაციის შედეგები მოყვანილია დისერტაციაში.

#### **ნაშრომის მეცნიერული სიახლე.**

- ახალი მეთოდის «დრეკადობის თეორია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში» გამოყენებით ცილინდრული გარსის გაანგარიშებისას გათვალისწინებულია ძვრის ძალების გავლენა, რაც კლასიკურ გარსთა თეორიაში უგულებელყოფილია სასაზღვრო პირობების არასრულყოფილობის გამო.
- კონტურის გასწვრივ განაწილებული ცვლადი მომენტური დატვირთვის შემთხვევისათვის შესწავლილია მართკუთხა ფილის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა.
- მოცემულია მუდმივკვეთიანი კონსოლური ფილის თავისუფალ ბოლოზე სხვადასხვა ძალოვანი ფაქტორების მოქმედებისას ღუნვის ამოცანების ზუსტი გადაწყვეტა.
- შესწავლილია მართკუთხა ფილა, რომლის ორი მოსაზღვრე გვერდი თავისუფალია, დანარჩენი ორი კი შეიძლება იყოს ხისტად ჩამაგრებული ან სახსრულად დაყრდნობილი.
- ნაჩვენებია, რომ ახალი თეორია სიზუსტით ადეკვატურია კლასიკური დრეკადობის თეორიისა და ამასთან ერთად მკვეთრად ამარტივებს გარსების და ფილების გაანგარიშებაზე ნებისმიერი ამოცანის გადაწყვეტას, რაც მიიღწევა მათი ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე დაყვანის გზით.

**ნაშრომის პრაქტიკული ღირებულება.** ა) მასში მიღწეულია სწორკუთხედის ფორმის თხელი ფილების ახალი მეთოდის დამუშავება, რომლის პრაქტიკული რეალიზაცია კირხჰოფის ჰიპოთეზის გამოყენების გარეშე მკვეთრად არის გამარტივებული; ბ) ადვილად მიიღწევა მოცემული მეთოდის არსის განზოგადოება გარსთა თეორიის ამოცანებზე; გ) ნაშრომში განხილული კონკრეტული ამოცანისათვის მოცემულია მათემატიკური ალგორითმი და პროგრამა, რომელიც გამოირჩევა კომპაქტურობით და სიმარტივით. ადვილად შეიძლება გამოყენებული იქნას საპროექტო და სამეცნიერო-კვლევითი დაწესებულებების მიერ ფილებისა და გარსების გაანგარიშებისა და პროექტირებისას.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იქნა:

1. პროფესორ ნ. მოწონელიძის 80 წლის იუბილესთან დაკავშირებულ საერთაშორისო სიმპოზიუმზე « თბილისი (1-2). 11.2000 წ;
2. პროფესორ ლ. გველესიანის 70 წლის იუბილესადმი მიძღვნილი რესპუბლიკური სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენცია «სამშენებლო კონსტრუქციები», თბილისი, 2001 წ.;
3. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის კათედრის მეთოდ-სემინარზე (თბილისი, 2003 წ.);

4. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის; სამშენებლო მექანიკის და სეისმომდეგობის კათედრების გაფართოებულ სხდომაზე (თბილისი, 2005 წ.);
5. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო მექანიკისა და სეისმომდეგობის კათედრაზე (თბილისი, 2006 წ.)  
დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია 4 სამეცნიერო შრომა.

პირველ თავში მოცემულია ფილებისა და გარსების გაანგარიშებაზე არსებული თეორიის განვითარების მოკლე მიმოხილვა. ნაჩვენებია, რომ ამ დარგში არსებული პუბლიკაციათა სიმრავლის მიუხედავად, ჩატარებულ თეორიულ გამოკვლევათა შედეგები საჭიროებენ შემდგომ დამუშავებას მათი სიზუსტის გაზრდისა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. ნაშრომში განსაკუთრებითაა აღნიშნული, რომ არსებული თეორიების სრულყოფის გარეშე იქმნება საშიშროება მათი თითქმის მთლიანად უგულვებელყოფისა პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტის საქმეში, რაც ამჟამად უკვე შეიმჩნევა სასრულო ელემენტების რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით შედგენილი მზა პროგრამების საზღვარგარეთიდან მრავლად შემოტანის გზით. ასეთი საშიში ტენდენცია კი ნაკარნახევია მხოლოდ იმით, რომ სასრულ ელემენტთა მეთოდი, არსებულ ანალიზურ მეთოდებთან შედარებით გაცილებით მარტივია მათემატიკური თვალსაზრისით. ამიტომ ამ საშიში ტენდენციის აცილება შესაძლებელია სწორედ ახალი კონკურენტუნარიანი ანალიზური მეთოდების დამუშავების გზით. რაც შეეხება რიცხვით მეთოდებს, მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული მათი უდაო უპირატესობა ძალიან რთული სტრუქტურის ობიექტების განხილვისას.

ჩატარებული კვლევის საფუძველზე ჩამოყალიბებულია ძირითადი დასკვნები:

1. ნაჩვენებია, რომ ი. ლუდუშაურის თეორიით მიღებული ამოხსნები გამოირჩევიან სწრაფი კრებადობით და მაღალი სიზუსტით. იგი მეტად მარტივია მათემატიკური თვალსაზრისით. უნარი აქვს წარმატებით გაუწიოს კონკურენცია რიცხვით მეთოდებს მარტივი სტრუქტურის მქონე ობიექტების განხილვისას.
2. კონკრეტული მაგალითების განხილვით დისერტაციაში მიღებული შედეგები პრაქტიკულად არ განსხვავდებიან კლასიკური დრეკადობის თეორიით სასაზღვრო პირობებით მიღებულ შედეგებისაგან, რაც ჩატარებული გამოკვლევის საიმედოობაზე მიუთითებს.
3. ფიქტიური სისტემების ურთიერთქმედების ძალები ხისტად ჩამაგრებული გვერდების გადაკვეთის წერტილიდან გამომავალ დიაგონალის გასწვრივ ნულის ტოლია, რაც ფიზიკური მოსაზრებებით მოსალოდნელიც იყო და კვლავ მიუთითებს ჩატარებული გამოკვლევის საიმედოობაზე.

4. ნაჩვენებია დამრეცი ცილინდრული გარსის გაანგარიშებისას ი. ლუდუშაურის მეთოდის უპირატესობა კლასიკურ მეთოდებთან შედარებით.

ჩატარებულია მთელი რიგი რიცხვითი ექსპერიმენტები მათემატიკური ალგორითმის სიზუსტისა და ამოხსნის კრებადობის დასადგენად.

## Summary

The work concerns the issue of analysis of thin-walled spatial shell structures, the general composing elements of which the slabs and cylindrical shells are. The actuality of its study has been conditioned by the growing demands of up-to-date engineering and construction. They are widely used in industrial and civil engineering shipbuilding, machine-building, aircraft construction, construction of airports and so on. The high popularity of mentioned systems is conditioned, on the one hand, by high characteristics of strength, and on another - by possibility of significant decreasing of the structure weight that has the decisive importance in building of aircraft (airplanes, rockets and so on). In the theory of engineering of shells that by V. Reisner and V. Vlasov is mainly based on hypothesis about rigid normal, the system of solving equations are of 8th degree, and the number of boundary conditions on each edge of the rectangular shell is five. With the purpose to solve the disparity, emerged between boundary conditions and degree of equations, Kirchhof has made the artificial "reconstruction" that consists in bringing in of the concept of so called "generalized" transversal force and reducing the number of boundary conditions from five to four. Many famous scientists have paid an attention to mentioned disparity from the very outset. Many so called specified theories were elaborated. The precise solution of mentioned issue is given by I. Vekua via the rise of the degree of the system of differential equations from 8 to 10 that has allowed to establish the accordance between boundary conditions and degree of equations. The object of research of the present work there are the cylindrical shell with different boundary conditions, freely supported rectangular slab subjected to effect of variable moments distributed along the contour, the rectangular slab, two bordering to each other edges of which are embedded rigidly or jointed, and other two ones are free, and the cantilever slab.

The goal of investigation is elaboration of the new method of solution of any practical tasks connected to mentioned structures without using the Kirchhof hypothesis, legal in classic theory of elasticity, in numerical realization of which the difficulties of mathematical character will be entirely excluded.

The goal, assigned in work, is achieved using the new direction in mechanics of continued bodies "Theory of elasticity in common differential equations", elaborated by I. Gudushauri. On the basis of elaborated algorithms the programs for personal computers are elaborated, the results of realization of which are given in dissertation.

### **The scientific novelty of the work**

- Using the new method "Theory of elasticity in common differential equations" in analysis of cylindrical shells there is considered the influence of shear forces that in classic theory of shells has been ignored due to incompleteness of boundary conditions.
- The mode of deformation of rectangular slab under effect of variable moment loading, distributed along the contour, is examined.
- The precise solution of task of bending of cantilever slab with permanent cross-section, subjected to different force factors acting on the free end is given.
- There is examined the rectangular slab, two bordering to each other edges of which are free, and other two ones can be embedded rigidly or supported by joints.
- There has been shown that the new theory has preciseness adequate to classic theory of elasticity and the same time significantly simplifies the solution of any



task of analysis of shells and slabs that is achieved via bringing them to integration of common differential equations.

### **The practical importance of the work**

a) There is elaborated the new method of analysis of rectangular thin slabs, the practical realization of which without using the Kirchhof hypothesis is significantly simplified; b) The generalization of the essence of given method on the tasks of theory of shells is easily achievable; c) for the concrete task, examined in the work, there is given the mathematical algorithm and program that is distinguished with compactness and simplicity. It easily can be used by the design and scientific-research institutions in analysis and design of slabs and shells.

The main results of dissertation were reported on:

1. International Symposium dedicated to 80 year anniversary of professor N. Motsonelidze, Tbilisi, 2000.
2. Scientific-Engineering Conference of Georgia -"Building Structures", dedicated to 70 year anniversary of professor L. Gvelesiani, Tbilisi, 2001.
3. Seminar of the faculty of resistance of materials and theory of elasticity of Georgian Technical University (Tbilisi, 2003)
4. The extended meeting of faculties of structural mechanics and seismic resistance, and structural mechanics and seismic resistance of Georgian Technical University (Tbilisi, 2005).
5. Faculty of structural mechanics and seismic resistance of Georgian Technical University (Tbilisi, 2006).

In first chapter there is given the short survey of development of existing theories of analysis of slabs and shells. The has been shown that, despite the plurality of publications in this field, the results of carried out theoretical research need further development in respect to rising of its preciseness and practical use. In the work there is particularly indicated that without accomplishment of existing theory there is aroused the danger of their almost entire ignoring in issue of solving of practical tasks that at present has been already seen on tendency of bringing from foreign countries of ready programs, using the numerical method of finite elements. This dangerous tendency is dictated by the circumstance that the method of finite elements is far simply in the view of mathematics comparatively to existing analytical methods. Therefore, the avoiding of this dangerous tendency is possible exactly by elaboration of new, competitive analytical methods. What about numerical methods, their doubtless preference should be considered in examination of objects of very complex structure.

On the basis of carried out research the following general inferences are formulated:

1. There is shown that the solutions, obtained by the theory of I. Gudushauri are distinguished by quick convergence and high preciseness. This method is very simply in the view of mathematics. It capable to compete successfully with numerical methods in examination of objects of simply structure.
2. Results, obtained via examination of case studies in dissertation do not practically differ from results, obtained using the boundary conditions of classic theory of elasticity that indicates the reliability of carried out research.
3. The forces of interacting of fictitious systems along the diagonal outgoing from the point of intersection of rigidly embedded sides is equal to zero that in physical point of view was expected and again indicates the reliability of implemented research.

4. There is shown the preference of method by I. Gudushaury in cylindrical shell analysis comparatively to the classic method.

The series of numerical experiments are realized with the purpose of verification of the preciseness of mathematical algorithm and establishment of solution mathematical convergence.

# შინაარსი

შესავალი;

1. ლიტერატურის მიმოხილვა;

1.1. ზოგიერთი ცნობები ფილებისა და გარსთა თეორიის თანამედროვე მდგომარეობის შესახებ;

1.1.1. ფილებისა და გარსების თეორიის განვითარების ეტაპები;

1.1.2. თხელი გლუვი დრეკადი იზოტროპული გარსების ზოგადი წრფივი თეორია;

1.1.3. დრეკადი გარსების გეომეტრიულად არაწრფივი ტექნიკური თეორია;

1.1.4. ნახვრეტებისა და ბზარების მქონე ფირფიტები, ფილები და გარსები. სიმტკიცის საკითხები;

1.1.5. ფირფიტებისა და გარსების ოპტიმიზაცია;

1.1.6. კერძო სახეობის შუა ზედაპირის მქონე ფილები და გარსები;

1.1.7. ფილებისა და გარსების თეორიის მათემატიკური აპარატი;

1.1.8. ტექნიკის დარგში ფირფიტებისა და გარსების თეორიის გამოყენების შესახებ;

1.1.9. ფილებისა და გარსების გაანგარიშება ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებებში;

2. შედეგები და მათი განსჯა;

2.1. თხელი ფილების და ცილინდრული გარსების ღუნვაზე გაანგარიშების ზოგადი თეორია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში;

2.1.1. ნაშრომში გამოყენებული თეორიის არსი;

2.1.2. თხელი ფილების ღუნვაზე გაანგარიშების მაგალითები;

- 2.1.2.1. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის ღუნვა კონტურზე მოქმედი განაწილებული მომენტების გათვალისწინებით;
  - 2.1.2.2. ორი მიმდებარე გვერდით ხისტად ჩამაგრებული ფილის ღუნვის ამოცანის გადაწყვეტა სასაზღვრო პირობების ზუსტად დაკმაყოფილების შემთხვევაში;
  - 2.1.2.3. კონსოლური ფილის ღუნვა თანაბრად განაწილებული დატვირთვის შემთხვევაში;
  - 2.1.2.4. ჰიდროსტატიკური დატვირთვის გავლენით კონსოლური ფილის «ცილინდრული ღუნვის» შესწავლა ი. ლუდუშაურის მეთოდით;
- 2.2. ცილინდრული გადახურვის გაანგარიშება ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებებში;
- 2.2.1. საკითხის დასმა;
  - 2.2.2. მოცემული ამოცანის გადამწყვეტ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის შედგენა;

3. დასკვნა;

გამოყენებული ლიტერატურა;

დანართები.

## ცხრილების ნუსხა

- ცხრილი 1. ალგებრულ განტოლებათა სისტემა  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  უცნობი კოეფიციენტებისათვის.
- ცხრილი 2. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილა.
- ცხრილი 3. კონსოლური ფილა თანაბრად განაწილებული დატვირთვით.
- ცხრილი 4. კონსოლური ფილა ჰიდროსტატიკური დატვირთვით.
- ცხრილი 5. ცილინდრული გარსი.

## ნახაზების ნუსხა

- ნახ. 1. უსასრულოდ მცირე ელემენტის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა.
- ნახ. 2. ფილის უსასრულოდ მცირე ელემენტი.
- ნახ. 3. თავისუფლად დაყრდნობის ფილა კონტურზე განაწილებული მომენტებით.
- ნახ. 4. ფიქტიური სისტემებში შიგა ძალების განაწილების კანონი.
- ნახ. 5. კოლოკაციის ხერხი.
- ნახ. 6. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 7. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 8. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 9. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 10. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 11. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 12. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა.
- ნახ. 13. ორი მიმდევარი გვერდით ხისტად ჩამაგრებული ფილა თანაბრად განაწილებული დატვირთვით.
- ნახ. 14. ელემენტების ნუმერაცია.
- ნახ. 15. მიმდებარე გვერდით ხისტად ჩამაგრებული ფილა.
- ნახ. 16. გადაადგილების ეპიურა.
- ნახ. 17.  $M_x, M_y$  მღუნავი მომენტის და  $Q_x$  განივი ძალის ეპიურები.
- ნახ. 18. კონსოლური ფილა თანაბრად განაწილებული დატვირთვით.
- ნახ. 19. მგრეხავი მომენტის ეპიურა.
- ნახ. 20. განივი ძალის ეპიურა.
- ნახ. 21. მღუნავი მომენტის ეპიურა.
- ნახ. 22. ჩაღუნვის ეპიურა.
- ნახ. 23. კონსოლური ფილა ჰიდროსტატიკური დატვირთვით.

ნახ. 24. ცილინდრული გადახურვა.

ნახ. 25. ცილინდრული გარსიდან გამოყოფილი ელემენტი.

ნახ. 26.  $T_x$  ფიქტიური სისტემა.

ნახ. 27.  $T_y$  ფიქტიური სისტემა.

## შესავალი

**სამუშაოს აქტუალობა.** ნაშრომი ეხება თხელკედლიანი სივრცული კონსტრუქციების გაანგარიშების საკითხს, რომელთა მთავარ შემადგენელ ელემენტებს წარმოადგენენ ფილები და ცილინდრული გარსები. მათი შესწავლის აქტუალობა განპირობებულია იმ მზარდი მოთხოვნილებით, რომელსაც მას უყენებს თანამედროვე ტექნიკა და მშენებლობა. ისინი ფართოდ გამოიყენება სამრეწველო და სამოქალაქო მშენებლობაში, გემთმშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, ავიამშენებლობაში, აეროდრომების მშენებლობაში და სხვა. აღნიშნული სისტემების ასეთი პოპულარობა განპირობებულია ერთის მხრივ მათი სიმტკიცის მაღალი მაჩვენებლებით, მეორეს მხრივ კი კონსტრუქციის წონის მკვეთრად შემცირების შესაძლებლობით, რასაც გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება მფრინავი აპარატების (თვითმფრინავები, რაკეტები და სხვა) განხორციელებისას. შრომები, რომელიც ცილინდრული გარსების გაანგარიშების თეორიას ეძღვნება შეიძლება დავეყოს სამ ჯგუფად. პირველს მიეკუთვნება სამუშაოები, რომელიც ემყარება ლიავის გარსთა თეორიას, მეორეს – სამუშაოები, რომლებიც დაფუძნებულია დრეკადობის თეორიის ზოგად მეთოდებზე, ხოლო მესამეს კი ცილინდრული გარსების პრაქტიკული გაანგარიშება გარკვეული გამარტივებული დაშვებების გათვალისწინებით.

პირველი ჯგუფი მოიცავს ს. ტიმოშენკოს [1], ი. ბუზნოვის [2, 3] და ჰ.პაპკოვიჩის [4] შრომებს, მეორე ჯგუფი მოიცავს ა.გვოზდევის [5], აგოლდენვეიზერის [6], ვ. ვლასოვის [7, 8], პ. პასტერნაკის [9], ი.მილეიკოვსკის [10, 11], ი. ვეკუას [12, 13, 14], ა. გუზის [15], ი. ლუდუშაურის [16], მ.მიქელაძის [17, 18, 19, 20], ი. ონიაშვილის [21] და სხვათა შრომებს [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31].

თხელკედლიანი კონსტრუქციების და ნაგებობების მთავარ შემადგენელ ელემენტს წარმოადგენს სხვადასხვა ფორმის თხელი ფილა,



რომლის გაანგარიშება ხასიათდება სასაზღვრო პირობების მრავალფეროვნებით, რაც გამოწვეულია მისი კონტურის ჩამაგრების ნაირსახეობით.

პირველი შედეგები ფილების ღუნვის თეორიაში, რომელიც კვლევის ხასიათს ატარებდა, მიღებული იყო ჯერ კიდევ მე-19 საუკუნის 20-იან წლებში ა.კოშის [32] და ს. პუასონის [33] მიერ, სადაც პირველად აისახა თეორიის ანალიზური მოდელის არსი ე.წ. «უსასრულოდ მცირე ელემენტის» შესახებ და მის საფუძველზე სივრცითი ამოცანებისათვის ზოგადი სახით იქნა მიღებული ყველა ის ძირითადი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც დღემდე არ დაუკარგავს თავისი უდიდესი პრაქტიკული მნიშვნელობა. მას შემდეგ რაც ჩამოყალიბებული იქნა ჟ.კირხჰოფის [3] ცნობილი ჰიპოთეზა, აღნიშნული თეორია, რომელიც ფილის ღუნვის ტექნიკური (მიახლოებით) თეორიის სახელწოდებით არის ცნობილი, მრავალი მეცნიერის კვლების საგანი გახდა. პირველი ფუნდამენტალური შედეგები გადმოცემული იქნა ა. ლიავის [34], ლ.ნავიეს [35], ი.ბუზნოვის [2, 3], ს. ტიმოშენკოს [1], ბ.გალიორკინის [36, 37, 38], ჰ. პაპკოვიჩის [4] და სხვათა შრომებში [39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64], რომლებმაც სათავე დაუდეს აღნიშნული თეორიის საანგარიშო მეთოდების დახვეწა სრულყოფას და განვითარებას.

ზემოთ აღნიშნული ამოცანები სამშენებლო მექანიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ამოცანათა რიცხვს განეკუთვნებიან. მოხსენებული ავტორების ნაშრომების ანალიზმა დაგვანახა, რომ მიუხედავად აღნიშნული უდიდესი მიღწევისა, კლასიკური დრეკადობის თეორიის ფართო პრაქტიკული გამოყენება სხვადასხვა ჰიპოთეზური დაშვებების გარეშე, მნიშვნელოვნადაა შეზღუდული მისი მათემატიკური სირთულეების გამო. ამ სირთულეებთან არის დაკავშირებული

მსოფლიო საინჟინრო პრაქტიკაში ამჟამად არსებული მრავალი სახის პრობლემა, რომლებიც მნიშვნელოვნად აფერხებს ტექნიკურ პროგრესს.

კერძოდ, ყველა კონკრეტული ამოცანის განხილვისას ზუსტი (მკაცრი) ანალიზური მეთოდის ნაცვლად, გამოიყენება სხვადასხვა მიახლოების რიცხვითი მეთოდები, მხოლოდ მისი მათემატიკური სიმარტივის გამო, მიუხედავად რიცხვითი მეთოდის ცნობილი ნაკლოვანი მხარისა, მკაცრ ანალიზურ მეთოდთან შედარებით.

უკანასკნელ წლებში, კლასიკურ გარსთა თეორიის საფუძველზე დამუშავდა უამრავი ახალი ანალიზური მეთოდი, რომლებიც გამიზნულნი არიან გარსის თავისუფალ წახნაგზე არსებული ხუთი რეალური სასაზღვრო პირობის ოთხ პირობაზე დაყვანისათვის, ხოლო თხელი ფილების კლასიკურ თეორიაში კი – სამი რეალური სასაზღვრო პირობის ორ პირობაზე დაყვანისათვის. თითოეული დამატებითი ფაქტორის გათვალისწინება კი, ცხადია სათანადოდ ართულებს ამოცანის გადამწყვეტ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას, რადგან საჭირო ხდება ახალი საძიებელი ფუნქციების შემოტანა. ამასთან ერთად, რიგი მეცნიერების (ს. ტიმოშენკოს [1], ე. რეისნერის [65, 55, 67, 68, 69], ა. კრენის [70] და სხვათა) გამოკვლევებში, რომლებიც არ იზიარებენ მოსაზრებას რეალური სასაზღვრო პირობების რიცხვის ხელოვნურად შემცირების შესაძლებლობის შესახებ კირხჰოფის ჰიპოთეზის გამოყენებით, შეიძლება ჩავთვალოთ გარსთა თეორიის შექმნის წარმატებულ მცდელობად, ამ ჰიპოთეზის გამოყენების გარეშე. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია ი. ვეკუას [12, 13, 14] შრომები, რომლებშიც დასახული მიზანი წარმატებითაა მიღწეული (ამოცანის გადაწყვეტა განტოლებათა სისტემის მე-8 რიგიდან და მე-10 რიგამდე გაზრდით), მაგრამ როგორც ცნობილია დღემდე ნაკლებად არის მიღწეული აღნიშნული გამოკვლევის რიცხვითი რეალიზაცია მათი მათემატიკური სირთულის გამო.

კლასიკური დრეკადობის თეორიის საფუძველზე მრავალი ღირსშესანიშნავი შედეგია მიღებული, განსაკუთრებით ბრტყელი ამოცანების გადაწყვეტისას კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის გამოყენებით, რაც საბოლოო სახით ჩამოყალიბებულია ნ. მუსხელიშვილის [71] ცნობილ მონოგრაფიაში.

ამ მიმართულებით მრავალ უცხოელ მეცნიერებთან ერთად მნიშვნელოვანი წვლილი აქვთ შეტანილი მსოფლიოში აღიარებულ ქართველ მეცნიერებსაც: ი.ვეკუას [13], ვ. კუპრამეს [72], შ. მიქელამეს [73, 74], ი. ლუდუშაურს [16, 47, 53, 75, 76, 77, 78, 79, 90] გ. ყიფიანის [47, 71], მ. ყალაბეგიშვილის [66, 81], ჯ. ბიჭიაშვილის [82], რ. ბანცურს [83], თ. ვაშაყმაძეს [84], დ. გორდეზიანს [85], ლ. მუხამეს [86], თ.ზონენაშვილს [87] და მრავალ მათ მოწაფეს.

მათემატიკური სიმარტივის თვალსაზრისით დრეკადობის თეორიის ამოცანის ზუსტი გადაწყვეტა ადვილად მიიღწევა, თუ მისი განხილვისას კლასიკური დრეკადობის თეორიის ნაცვლად გამოვიყენებთ დრეკადობის თეორიას ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში, რომელიც დამუშავებულია ი.ლუდუშაურის [16] მონოგრაფიაში. მასში მოცემულია დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის ზოგადი ანალიზური მეთოდი, რომელიც მათემატიკური თვალსაზრისით გამოირჩევა განსაკუთრებული სიმარტივით და მეტად მოხერხებულია პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. ამ მეთოდის გამოყენებისას დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე. ეს მიიღწევა მასში ჩადებული ორიგინალური ანალიზური მოდელის საფუძველზე, რომლის თანახმადაც მოცემული სამგანზომილებიანი სხეულის უსასრულოდ მცირე ელემენტის მუშაობა წარმოდგენილია ამ ელემენტის ტოლდინი სამი ერთგანზომილებიანი ფიქტიური ელემენტის ერთობლივი მუშაობით.

მოცემულ მონოგრაფიაში აღნიშნული თეორია დამუშავებულია კლასიკური დრეკადობის თეორიის დაშვებების სიზუსტით. ამ მეთოდს უნარი აქვს გაუწიოს კონკურენცია რიცხვით მეთოდებს მარტივი სტრუქტურის მქონე ობიექტების განხილვის დროს. აღნიშნული მეთოდი საშუალებას იძლევა ადვილად იქნეს მიღწეული ნებისმიერი ამოცანის (მათ შორის სივრცითის) ზუსტი გადაწყვეტა, რაიმე ჰიპოთეზური დაშვებების (მათ შორის სენ-ვენანის პრინციპის) გამოყენების გარეშე.

ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით, წარმოდგენილ სადისერტაციო ნაშრომს «ფილებისა და დამრეცი გარსების გაანგარიშების ზოგიერთი საკითხი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრების გზით», რომელიც გამიზნულია ფილების თხელკედლიანი სივრცითი კონსტრუქციების (ცილინდრული გარსები) გაანგარიშების სიზუსტის გაზრდისა და პროექტირებისას მნიშვნელოვანი ეკონომიური ეფექტის მიღწევისაკენ, ცხადია დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა უნდა მიენიჭოს, რაც ამ თემის აქტუალობაზე მეტყველებს.

**ნაშრომის კვლევის ობიექტი, მიზანი და მეთოდები.** კვლევის ობიექტს წარმოადგენს ცილინდრული გარსი სხვადასხვა სახის ჩამაგრების პირობებით, კონსოლური ფილა დატვირთვის სხვადასხვა შემთხვევებით, სახსრულად დაყრდნობილი მართკუთხა ფილა დატვირთული საზღვრის გასწვრივ განაწილებილი ცვლადი სიდიდეს მომენტებით და მართკუთხა ფილა, რომლის ორი მიმდებარე გვერდი ჩამაგრებულია ხისტად ან სახსრულად, ხოლო ორი მოსაზღვრე კი თავისუფალია.

**კვლევის მიზანი.** მოცემული იქნეს აღნიშნული ობიექტების გაანგარიშებაზე ნებისმიერი პრაქტიკული ამოცანის გადაწყვეტის ახალი მეთოდი კლასიკური დრეკადობის თეორიაში დაკანონებული კირხჰოფის ჰიპოთეზის გამოყენების გარეშე, რომლის რიცხვითი რეალიზაციისას მთლიანად იქნება გამორიცხული მათემატიკური ხასიათის სირთულეები.

**კვლევის მეთოდოლოგია.** სამუშაოში დასახული კვლევის მიზანი მიღწეულია უწყვეტ ტანთა მექანიკაში ი. ლუდუშაურის მიერ შექმნილი ახალი მიმართულების «დრეკადობის თეორია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში» გამოყენებით, დამუშავებული ალგორითმების საფუძველზე პერსონალური კომპიუტერისათვის შედგენილია პროგრამები, რომელთა რეალიზაციის შედეგები მოყვანილია დისერტაციაში.

#### **ნაშრომის მეცნიერული სიახლე.**

1. აღნიშნული ახალი თეორიით ცილინდრული გარსის გაანგარიშებისას გათვალისწინებულია ძვრის ძალების გავლენა, რაც კლასიკურ გარსთა თეორიაში უგულებელყოფილია სასაზღვრო პირობების არასრულყოფილობის გამო.
2. მოცემულია მუდმივკვეთიანი კონსოლური ფილის ღუნვის ამოცანების ზუსტი გადაწყვეტა თავისუფალ ბოლოზე სხვადასხვა ძალოვანი ფაქტორების მოქმედებისას.
3. შესწავლილია მართკუთხა ფილა, რომლის ორი მოსაზღვრე გვერდი თავისუფალია, დანარჩენი ორი კი შეიძლება იყოს ხისტად ჩამაგრებული ან სახსრულად დაყრდნობილი.
4. გაანალიზებულია სახსრულად დაყრდნობილი მართკუთხა ფილის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა კონტურის გასწვრივ მოქმედი სიდიდის მომენტური დატვირთვების შედეგად.
5. ნაჩვენებია, რომ ახალი თეორია სიზუსტით ადეკვატურია კლასიკური დრეკადობის თეორიისა და ამასთან ერთად მკვეთრად ამარტივებს გარსების და ფილების გაანგარიშებაზე ნებისმიერი ამოცანის გადაწყვეტას, რაც მიიღწევა მათი ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე დაყვანის გზით.

**ნაშრომის პრაქტიკული ღირებულება.** ა) მასში მიღწეულია სწორკუთხედის ფორმის თხელი ფილების გაანგარიშების ახალი მეთოდის დამუშავება, რომლის პრაქტიკული რეალიზაცია კირხჰოფის

ჰიპოთეზის გამოყენების გარეშე მკვეთრად არის გამარტივებული; ბ) ადვილად მიიღწევა მოცემული მეთოდის არსის განზოგადოება გარსთათეორიის ამოცანებზე; გ) ნაშრომში განხილული კონკრეტული ამოცანისათვის მოცემულია მათემატიკური ალგორითმი და პროგრამა, რომელიც გამოირჩევა კომპაქტურობით და სიმარტივით. ადვილად შეიძლება გამოყენებული იქნას საპროექტო და სამეცნიერო-კვლევითი დაწესებულებების მიერ ფილებისა და გარსების გაანგარიშებისა და პროექტირებისას.

**მიღებული შედეგების საიმედოობა** მიღწეულია პირველ რიგში გამოყენებული მათემატიკური აპარატით და მათი ამოხსნის სიზუსტით. ამავე დროს დამუშავებული ალგორითმების და პროგრამების საფუძველზე ფილებისა და გარსების ამოცანებისათვის შესრულებული გამოთვლების შედეგების შედარებით ლიტერატურიდან ცნობილ შედეგებთან:

**ნაშრომის აპრობაცია.** დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იქნა:

6. პროფესორ ნ. მოწონელიძის 80 წლის იუბილესთან დაკავშირებულ საერთაშორისო სიმპოზიუმზე « თბილისი (1-2). 11/2000 წ.;
7. პროფესორ ლ. გველესიანის 70 წლის იუბილესადმი მიძღვნილი რესპუბლიკური სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენცია «სამშენებლო კონსტრუქციები», თბილისი, 2001 წ.;
8. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის კათედრის მეთოდ-სემინარზე (თბილისი, 2003 წ.);
9. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის კათედრის გაფართოებულ სხდომაზე (თბილისი, 2005 წ.);

10. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო მექანიკისა და სეისმომედეგობის კათედრაზე არსებულ საქალაქო სემინარზე (თბილისი, 2006 წ.)

**პუბლიკაციები.** დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია 5 სამეცნიერო შრომა.

**პირველ თავში** მოცემულია ფილებისა და გარსების გაანგარიშებაზე არსებული თეორიის განვითარების მოკლე მიმოხილვა. ნაჩვენებია, რომ ამ დარგში არსებული პუბლიკაციათა სიმრავლის მიუხედავად, ჩატარებულ თეორიულ გამოკვლევათა შედეგები საჭიროებენ შემდგომ დამუშავებას მათი სიზუსტის გაზრდისა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. ნაშრომში განსაკუთრებითაა აღნიშნული, რომ არსებული თეორიების სრულყოფის გარეშე იქმნება საშიშროება მათი თითქმის მთლიანად უგულვებელყოფისა პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტის საქმეში, რაც ამჟამად უკვე შეიმჩნევა სასრულო ელემენტების რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით შედგენილი მზა პროგრამების საზღვარგარეთიდან მრავლად შემოტანის გზით. ასეთი საშიში ტენდენცია კი ნაკარნახევია მხოლოდ იმით, რომ სასრულ ელემენტთა მეთოდი, არსებულ ანალიზურ მეთოდებთან შედარებით გაცილებით მარტივია მათემატიკური თვალსაზრისით. ამიტომ ამ საშიში ტენდენციის აცილება შესაძლებელია სწორედ ახალი კონკურენტუნარიანი ანალიზური მეთოდების დამუშავების გზით. რაც შეეხება რიცხვით მეთოდებს, მხედველობაში უნდა იქნეს მიღებული მათი უდაო უპირატესობა რთული სტრუქტურის ობიექტების განხილვისას.

ბოლო პარაგრაფში ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული თვალსაზრისით კონკურენტუნარიანი ანალიზური მეთოდების რიცხვს მიეკუთვნება ი. ლუდუშაურის მეთოდი რომელიც გამოყენებულია დისერტაციაში დასმული ამოცანების გადაწყვეტისას.

**მეორე თავში** მოცემულია თხელი ფილების ღუნვაზე გაანგარიშების ზოგადი თეორიის არსი ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში, რომელიც დამუშავებულია ი. ლუდუშაურის მიერ. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის მაგალითზე ნაჩვენებია, რომ ამ თეორიის გამოყენებით მკვეთრად მარტივდება კლასიკურ თეორიაში ცნობილი მათემატიკური ხასიათის სირთულეები. გარდა ამისა ნაჩვენებია მისი ეფექტურობაც ნებისმიერი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების საკითხის მკვეთრად გამარტივების თვალსაზრისით. ამის საჩვენებლად მოცემულია ი. ლუდუშაურის თეორიის გამოყენებით კონსოლური ფილისა და ორი მიმდებარე გვერდით ხისტად ჩამაგრებული ფილის ღუნვაზე გაანგარიშების საკითხი. გამოთვლილია ყველა საძიებელი სიდიდეები, აგებულია მათი ცვლილების გრაფიკები და გაკეთებულია შედარებები სხვა ავტორების მიერ სხვადასხვა გზით მიღებულ შედეგებთან.

**მესამე თავში** განხილულია ცილინდრული გარსის ღუნვაზე გაანგარიშების საკითხი ი. ლუდუშაურის მეთოდის გამოყენებით. გარსთა ტექნიკური თეორიისაგან განსხვავებით გამოყენებულია რეალური სასაზღვრო პირობები. შემოღებულია სამი უგანზომილები პარამეტრი  $\eta$ ,  $\beta$  და  $\gamma$ , რომელთა ცვლილებების მიხედვით დახასიათებულია მოკლე, საშუალო და გრძელი ცილინდრული გადახურვების დამაბუღ-დეფორმირებული მდგომარეობები. მიღებული შედეგები შედარებულია ლიტერატურიდან ცნობილ შედეგებთან. შედგენილია მათემატიკური ალგორთმი ყველა სასაზღვრო პირობების ზუსტად დაკმაყოფილებით და შესაბამისი პროგრამა კომპიუტერისათვის.

**ძირითად დასკვნებში** გადმოცემულია სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები.

**დანართში** მოცემულია პროგრამები კომპიუტერული რეალიზაციისათვის.



# 1. ლიტერატურის მიმოხილვა

## 1.1. ზოგიერთი ცნობები ფილებისა და გარსთა თეორიის თანამედროვე მდგომარეობის შესახებ

### 1.1.1. ფილებისა და გარსების თეორიის განვითარების ეტაპები

გარსებისა და ფილების თეორია წარმოადგენს მყარი დეფორმადი ტანის მექანიკის ვრცელ განშტოებას, რომელსაც გააჩნია რთული სტრუქტურა და მისი გაანგარიშების საკითხი, როგორც მკაცრი საინჟინრო დისციპლინისა დაიწყო მე-19-ე საუკუნის პირველი ნახევრიდან ლ. ნაივეს, ა. კომის და ს. პუასონის შრომების გამოქვეყნებით. ამჟამად ფილებისა და გარსების თეორიას ეძღვნება რამოდენიმე ათასი ნაშრომი. გამოქვეყნებული ლიტერატურის მოკლე ანოტაციები მოცემულია მიმოხილვებში: ნ. ალუმაეს [88], ო. ონიაშვილის [4], გ. ჯანელიძის [89], ი. ნემიშის [90], პ. ნაგდის [91] და სხვ.

ცნობილია, რომ გარსების მშენებლობამ ბევრად გაუსწრო წინ მათი გაანგარიშების თეორიას. ერთის მხრივ ინჟინრები კონკრეტული პროექტების შესრულებისას ქმნიდნენ გარსების გამარტივებულ მოდელებს და ამის საფუძველზე გაანგარიშებები დაჰყავდათ რიცხვით ფორმაზე. მეორეს მხრივ, იქმნებოდა გლუვი თხელი გარსების ზოგადი წრფივი თეორია.

ქართულ მეცნიერებს შორის ფილებისა და გარსების თეორიაში დიდი ღვაწლი მიუძღვით: ნ. მუსხელიშვილს [71], ი. ვეკუას [12], ი. ლუდუშაურს [82], მ. მიქელაძეს [17-20], ა. კაკუშაძეს [92], თ. ვაშაყმაძეს [84], თ. ზონენაშვილს [87], გ. გაბრიჩიძეს [93], ლ. მუხაძეს [86], მ. ყალაბეგაშვილს [81], ო.ონიაშვილს [21], რ. ბანცურს [83], დ. გორდეზიანს [85], გ. ყიფიანს [47] და სხვებს [28, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100].

XX საუკუნის 40-50 წლებში დაიწყო გარსთა თეორიის შექმნის მესამე ეტაპი. იგი ვითარდება სხვადასხვა, ხშირად გადამკვეთი

მიმართულებებით. განიხილება გარსული ტიპის ისეთი კონსტრუქციებიც როგორცაა მათში შრეების, წიბოების, დიაფრაგმების, კონტურის ელემენტების, ნახვრეტების არსებობა. განვითარდა გარსთა თეორიის საკონტაქტო ამოცანა და ლოკალური ზემოქმედებების გავლენის შეფასება. გარდა წონასწორული დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დამყარებისა, ხდება მისი მდგრადობის გამოკვლევაც. განიხილება მასალის უფრო რთული თვისებები: არაწრფივი დრეკადობა, ანიზოტროპიულობა, პლასტიკურობა, სიბლანტე. მცირე დეფორმაციების განხილვიდან გადავიდნენ დიდზე – ვითარდება გეომეტრიულად არაწრფივი თეორია და მის ბაზაზე – კონსტრუქციის კრიტიკულს მიღმა ყოფაქცევის თეორია. შეისწავლება კონსტრუქციის ყოფაქცევა როგორც სტატიკურ, ასევე დინამიკურ (მათ შორის არასტაციონალურ) ზემოქმედებაზე, განიხილება გარსების ურთიერთქმედება სითხესთან და გაზთან – კონსტრუქციის ჰიდრო და აეროდრეკადობა. გარსზე ძალოვან ზემოქმედებასთან ერთად შეისწავლება თბურიც – კონსტრუქციის თერმოდრეკადობა და ელექტრომაგნიტური დრეკადობა.

საკმაოდ გაფართოვდა მათემატიკური აპარატის გამოყენება როგორც უკვე დაყენებული პრობლემის რეალიზაციისათვის, ასევე ახალი პრობლემების უზრუნველსაყოფად. თეორიულს პარალელურად გამოიყენება კვლევის ექსპერიმენტალური გზა. რთული პრობლემის რიცხვით შედეგებამდე მიყვანა შესაძლებელი გახდა კომპიუტერებმა. ფართოდ გამოიყენება რიცხვითი მეთოდები და დისკრეტული საანგარიშო მოდელები.

### **1.1.2. თხელი გლუვი დრეკადი იზოტროპული გარსების ზოგადი წრფივი თეორია**

პირველად ზოგადი თეორია, რომელიც ეყრდნობოდა გ. კირხჰოფის ჰიპოთეზას, შემოთავაზებული იყო გ. არონის მიერ. მაგრამ ეს თეორია შეიცავდა უზუსტობებს, რომლებიც გაასწორა ა. ლიავმა.

ფილებისა და გარსების ზოგადი თეორიის ჩამოყალიბებაში გარკვეული როლი შეასრულა ი. ბუზნოვის [2], ბ. გალიორკინის [37-38], ს. ტიმოშენკოს მონოგრაფიებმა [1].

დაწყებული XX საუკუნის 30-იანი წლებიდან გარსთა თეორია საინტერესოდ ვითარდებოდა. მაშინ იკვლევდნენ ზოგად საკითხებს: მიიღეს და ყოველმხრივ გაანალიზეს თხელი დრეკადი გარსების წრფივი ტექნიკური თეორიის ძირითადი განტოლებები და მათი სხვადასხვა გამარტივებული ვარიანტები (უმომენტო თეორია, დამრეცი გარსების თეორია). ამ პერიოდში გარსების თეორიის განვითარებაში შესახებ დიდი წვლილი მიუძღვით ბ. გალიორკინს [37-38], ვ.ვლასოვს [8], ა. ლურიეს [101], ა.გვოზდოვს [5], ვ. ნოვოჟილოვს [102], ა.გოლდენვეიზერს [27], ი. რაბიტნოვს [103], ი. ალუმაეს [6] და სხვებს.

გარსების ზოგადი და კერძო თეორიების აგების დარგში არსებული მრავალრიცხოვანი შედეგები განზოგადოებული იყო მთელ რიგ მონოგრაფიებში, რამაც დიდი როლი შეასრულა მექანიკის ამ დარგის განვითარებაში. მათ რიცხვშია ა. ლურიეს [101], ვ. ვლასოვის [8], ვ. ნოვოჟილოვის [102], ა.გოლდენვეიზერის [27] მონოგრაფიები.

ბრუნვით გარსებს ეძღვნება ა. ლურიეს [101], უ. ალუმაეს [6], დ.ვინბერგისა და ვ. ჟდანის [24], ე. მეისნერის [104-105], ე. რეისნერი [68] და სხვათა შრომები [24, 28, 42, 96, 97, 105, 106], ხოლო ცილინდრულ გარსებს – პ. პასტერნაკის [9], ვ. ვლასოვის [7, 8] და სხვათა შრომები [9, 107, 108, 109, 110].

ამჟამად დრეკადი გარსების წრფივი ტექნიკური თეორიის სტატიკური პრობლემა ზოგადი კონცეპციისა და განტოლებების ფორმირების თვალსაზრისით გადაწყვეტილია. შრომები, რომლებიც ეძღვნება გარსთა ზოგად თეორიას, უფრო მცირეა.

აღვნიშნოთ, ზოგადი თეორიისადმი მიძღვნილი ზოგიერთი სტატია: ესენია: ა.გოლდენვეიზერი [27] ი. ვოროვიჩი [41], ვ. ვლასოვი [8].

ზოგადი თეორიის სისტემისადმი მიძღვნილია ი. ვეკუას [12], ნ. ახოვსკის, ნ. ანდრეევის შრომები და ა. დერუგის [11] წიგნი. მასში ცნობარის ფორმითაა წარმოდგენილი დრეკადობის თეორიის და გარსთა თეორიის ვარიაციული პრინციპების სისტემური გამოკვლევების შედეგები. რ. კურანტისა და დ. გილბერტის ვარიაციული გარდაქმნის პრინციპების შესაბამისად. მიღებულია სრული და კერძო ფუნქციონალების სისტემა, მათ შორის – შერეულის: რიგი ცნობილი და ახლად შემოთავაზებული ფუნქციონალებისთვის დადგენილია სტაციონარობის, ექსტრემალურობის, თვისებები. მოცემულია გარსთა თეორიის სტატიკურ-გეომეტრიული ანალოგიის ვარიაციული ფორმა და გაკეთებულია გლუვი ერთგვაროვანი იზოტროპიული გარსების შედეგების განზოგადება წიბოვან, მრავალკავშირიან, მრავალშრიან და კონსტრუქციულად ანიზოტროპიულ გარსებზე.

გარსთა ზოგადი წრფივი თეორიის ფორმირების პროცესთან ერთად ხდებოდა მიღებული განტოლებების ამოხსნის მეთოდების ძიება და შედეგების დაყვანა რიცხვებამდე, აგრეთვე გარსთა მუშაობის ანალიზი სხვადასხვა პარამეტრებთან დამოკიდებულებაში, რომლებიც ახასიათებენ გარსის გეომეტრიას და მასზე მოქმედ დატვირთვას ანალიზური გადაწყვეტებს, რიცხვითი მეთოდების და ექსპერიმენტების საფუძველზე, რომლებიც ხორციელდებოდა გარსებზე და მათ მოდელებზე.

### 1.1.3. დრეკადი გარსების გეომეტრიულად არაწრფივი ტექნიკური თეორია

გეომეტრიულად არაწრფივი თეორიის ინტენსიური განვითარება აიხსნება იმით, რომ ამ პირობებში მუშაობს დიდი რაოდენობის გარსული კონსტრუქციები.

მთელი რიგი შრომები, რომელთაც პრინციპული მნიშვნელობა აქვთ გეომეტრიულად არაწრფივი გარსებისათვის, გამოაქვეყნა ი.

ვოროვიჩმა [25, 112]. ამ შრომებში განხილულია გადაწყვეტის არსებობის საკითხები და არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის მეთოდები. გარსების არაწრფივ თეორიას ეძღვნება ვ.კოიტერის, ი. ალუმოაეს [3, 4, 6, 88] შრომები.

ერთ-ერთი პირველი პუბლიკაცია, რომელიც ეხებოდა გარსთა გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიას ეკუთვნის ვ. ფეოდოსიევს, რომელშიც მოყვანილია დრეკადი ბრუნვითი გარსების ზოგადი განტოლებები და განხილულია მათი გამოყენება სილფონების, გოფრირებული მემბრანების, ბრტყელი მრგვალი მემბრანების მიმართ.

გეომეტრიულად არაწრფივი გარსების თეორიაში გამოკვლევების განზოგადოება მოცემულია ა. ვოლმირის [42] მონოგრაფიაში. 1957 წელს გამოქვეყნდა ხ. მუშტარის და კ. გალიმოვის [113] მონოგრაფია. უნდა აღინიშნოს აგრეთვე ა.ვოლმირის [43] წიგნი.

ე. გრიგოლიუკისა და ვ. ტოლკაჩევის [114] ნაშრომში განიხილება ფირფიტებისა და გარსების ურთიერთქმედება ხისტ სხეულებთან, აგრეთვე გარსებს უშუალოდ შორის ურთიერთქმედება. კერძოდ, განიხილება სიხისტის წიბოსა და ფირფიტის ან გარსის ურთიერთქმედების ამოცანის მიახლოებითი გადაწყვეტა. ცილინდრული გარსებისათვის აგებულია გრინის მატრიცები და გადაწყვეტილია საინტერესო განტოლებები. საინტერესოა ამოცანა ცილინდრული გარსების ბატარეების შესახებ, რომლებიც შეერთებულია მსახველების მონაკვეთებში.

ე. გრიგოლიუკის და ვ. კაბანოვის წიგნში [29] შემოთავაზებულია ცილინდრული გარსების გაანგარიშებისას ლოკალურ რადიალურ დატვირთვებზე და ლოკალურ ტემპერატურული ველების გათვალისწინებაზე, მერვე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის გადაყვანა მეოთხე რიგისაზე, ასეთი გზით განიხილება სასრული, ნახევრად სასრული და უსასრულო სიგრძის გარსები.

#### 1.1.4. ნახვრეტებისა და ბზარების მქონე ფირფიტები, ფილები და გარსები. სიმტკიცის საკითხები

ფირფიტებისა და გარსების თეორია, რომელიც არის მყარი დეფორმადი სხეულების მექანიკის ნაწილი, ერთის მხრივ, საზრდოობს მისი სხვა დარგების იდეებითა და მეთოდებით, ხოლო მეორეს მხრივ, აყალიბებს საფუძველს მექანიკის ახალი დარგების განვითარებისათვის. ასე მოხდა, როდესაც შემოიტანეს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის გამოყენების იდეა დრეკადობის თეორიაში, რომელიც გამოთქვა გ. კოლოსოვმა [115] და განავითარა ნ.მუსხელიშვილმა [71], ეს იდეა ფართოდ გამოიყენება გარსებში ნახვრეტებთან ახლოს დაბვათა კონცენტრაციის ამოცანათა გადასაწყვეტად. კერძოდ, გ. სავინისა და მისი მოწაფეების მიერ [54, 55]. ეს შედეგები მთელ რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვანია ბზარების თეორიისას, და ამგვარად, რღვევის მექანიკის განვითარებისათვის.

ნახვრეტების სიახლოვეში დაბვების კონცენტრაციის შესახებ ფუნდამენტური შრომა გამოაქვეყნა გ. სავინმა [54]. ამ მონოგრაფიაში წარმოდგენილ გამოკვლევას, გარდა თეორიული ინტერესისა, აქვთ პრაქტიკული მნიშვნელობა.

ამავე პრობლემას ეძღვნება გ. სავინისა და ვ. ტულჩიას [54] მონოგრაფია, რომელიც შეიცავს ნახვრეტის სიახლოვეში დაბვათა კონცენტრაციის თეორიულ და ექსპერიმენტალურ გამოკვლევებს ბრტყელი დეფორმაციისა და განზოგადოებული ბრტყელი დამაბული მდგომარეობის პირობებში. შედეგები წარმოდგენილია გრაფიკებისა და ცხრილების სახით.

ნახვრეტების სიახლოვეში დაბვების კონცენტრაციას იკვლევენ ა. გუზი და მისი თანამშრომლები [15]. [107-45] მონოგრაფიაში განხილულია დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა მრავალკავშირიანი არეებისათვის. გამოკვლეულია გარსების დრეკად-პლასტიკური მდგომარეობა საბოლოო ჩალუნვების გათვალისწინებით, განხილულია სამფენოვანი და

ნახვრეტებიანი გარსები, რომლებიც დამზადებულია კომპოზიციური მასალებისაგან.

მაბვების კონცენტრაციას ეხება დ. ვაინბერგის, ა. სინიასკის [96] და ბ.პელეხას [30] წიგნები. [33] წიგნში ნახვრეტების სიახლოვეში არსებული მაბვები განისაზღვრებიან განივი ძვრის გათვალისწინებით. განიხილება არმირებული პლასტმასისაგან დამზადებულ გარსებში ნახვრეტების სიახლოვეში დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის საკითხი. [30] შრომაში განიხილება ბზარების გაჩენის გამო აღძრული მაბვათა კონცენტრაცია ფირფიტებისა და გარსების დატვირთვით ან ტემპერატურით გამოწვეული ღუნვის შემთხვევაში.

ბზარების მქონე თხელკედლიან კონსტრუქციებს ეძღვნება ა. გუზის [107] წიგნი. მასში განიხილება არატრადიციული მიდგომა ბზარების მქონე თხელი სხეულების რღვევის პრობლემისადმი. იგულისხმება, რომ რღვევამდე ხდება მდგრადობის დაკარგვა ბზარის არეში. ამ დანაკარგის გავლენა რღვევის კინემატიკაზე გაითვალისწინება. განსაზღვრულია ამოცანის საკუთარი რიცხვები საკოორდინატო ფუნქციების სხვადასხვა რაოდენობის დროს ვარიაციული მეთოდით. ნაპოვნია მაბვების კრიტიკული მნიშვნელობები კონსტრუქციული მასალების ფართო კლასისათვის, რომლებიც შეესაბამებიან მდგრადობის ლოკალურ დაკარგვას. გამოკვლეულია ამ მაბვების ფორმები, განხორციელებულია ბზარების მქონე ფირფიტების რღვევის ექსპერიმენტალური გამოკვლევა.

[116-117] მონოგრაფიაში სხვა საკითხებთან ერთად განიხილება მაბვის ინტენსიურობის კოეფიციენტები, მათ შორის თერმული მაბვებისათვის ფირფიტებში, რომელთაც აქვთ წვეტიანი უბნები და სხვა დეფექტები, მრუდწირული ღუნვის, გაჭიმვისა და გრეხის პირობებში. გაანალიზებულია მაბვათა ინტენსივობის კოეფიციენტებზე მასალის ანიზოტროპიულობის, გადამჭრელი ძალების და მაბვათა ტენზორის

არასიმეტრიულობის გავლენა. წარმოდგენილია გაანგარიშების შედეგების საფუძველზე აგებული გრაფიკები.

### 1.1.5. ფირფიტებისა და გარსების ოპტიმიზაცია

საიმედოობის შეფასებაზე არანაკლებად მნიშვნელოვანია მასთან დაკავშირებული კონსტრუქციის ოპტიმიზაცია, კერძოდ, გამაძლიერებელი ელემენტების (წიბოების) განლაგება და მასალის განაწილება ამ წიბოებსა და გარსს შორის. ისეთ კონსტრუქციებში, როგორც საფრენი აპარატებია, რომელთათვისაც წონის შემცირება საიმედოობის შენარჩუნებასთან ერთად ძალიან მნიშვნელოვანია, ოპტიმიზაციის პრობლემა ფრიად აქტუალურია. ოპტიმიზაციის კრიტერიუმებს სხვადასხვა სიტუაციაში შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვა ბუნება. სწორკუთხა განიკვეთის მქონე წიბოებით გაძლიერებული ცილინდრული გარსების ოპტიმალური პროექტირება ფორმულირებულია არაწრფივი პროგრამირების ტერმინებში. განიხილება კონსტრუქციულად ორთოტროპიული გარსის როგორც დისკრეტული, ასევე კონტინუალური სქემები. გამოკვლევები ჩატარებულია მდგრადობის ბმულად დაკარგვის არაწრფივი თეორიის საფუძველზე, რომელიც ითვალისწინებს გარსის ზოგადი გამოზურცვისა და წიბოების ადგილობრივი გამოზურცვის ურთიერთქმედებას. აქვია წარმოდგენილი გრძივად გაძლიერებული ცილინდრული გარსების ექსპერიმენტალური გამოკვლევის შედეგები.

### 1.1.6. კერძო სახეობის შუა ზედაპირის მქონე ფილები და გარსები

ყურადღებას იპყრობენ კერძო ფორმის მქონე გარსები, ისეთები, როგორიცაა: სფერული, კონუსური, ჰიპერბოლურ-პარაბოლოიდური (ჰიპარული) ფორმით და სხვა. ასეთი კერძო ფორმის გარსები



განიხილება კონსტრუქციის, მასალის, გარეგანი ზემოქმედებების თავისებურებებთან ერთად (ფენოვანობა, ნახვრეტების არსებობა, დინამიკური დატვირთვა, ტემპერატურის მოქმედება და ა.შ.).

წვეროში ღია ბრუნვით გარსებს ეძღვნება დ. ვაინბერგისა და ვ. ჟდანოვის [25] ნაშრომი. ავტორები ასეთი ფორმის გარსებს წარმოადგენენ მოკლე ცილინდრული და კონუსური გარსების საშუალებით, რომლებიც ერთმანეთთან არიან დაკავშირებულნი. დიფერენციალური განტოლებების ჩაწერისა და ამოხსნისათვის ყოველ ეტაპზე გამოიყენება მატრიცული ფორმალიზმი. ასეთი მიდგომის იდეა ენათესავება სასრული ელემენტებისა და საწყისი ფუნქციების მეთოდების იდეას.

ი. გრიგორენკოს ნაშრომში [98] განხილულია ფენოვანი (იზოტროპიული და ანიზოტროპიული ფენებით) ბრუნვითი გარსები ნებისმიერი მოხაზულობის მერიდიანით, რომელიც უბნების მიხედვით დატვირთულია არაერთგვაროვანი დატვირთვით და არასტაციონალური ტემპერატურული ველით. ჩატარებულია დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის ანალიზი კონსტრუქციის ფორმის პარამეტრების მნიშვნელობებთან დამოკიდებულებაში.

ვ. ვლასოვის [8] ნაშრომში ბრუნვით გარსებთან ერთად, რომლებიც განივად გოფირებულია, განიხილება გრძივად გოფირებული სქელკედლიანი ცილინდრული გარსებიც. დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა განისაზღვრება კონსტრუქციისა და მასალის პარამეტრების გათვალისწინებით. მთელი ინფორმაცია წარმოდგენილია გრაფიკებისა და რიცხვების სახით.

ბრუნვითი გარსები ფიგურირებენ სხვა შრომებშიც [26, 28, 90, 99, 100, 113, 118, 119, 120, 121, 122, 125].

სვერულ გარსებს ეძღვნება ა. გუზისა და მისი თანაავტორების [15, 45, 107] ა. ლურიეს [101], ე. გრიგოლიუკის [29, 114] შრომები. ამ უკანასკნელში მიმოხილულია ექსპერიმენტალური გამოკვლევები

სფერული გარსებისათვის, რომლებიც ჩატარდა მათი მდგრადობისა და რხევების დასადგენად. მოცემულია კონსტრუქციების გაანგარიშების ნახევრად ემპირიული ფორმულები.

სფერული გარსების შესწავლას ეძღვნება აგრეთვე სხვა ნაშრომებიც [8, 19, 24, 42, 108, 124].

არასტანდარტული ფორმის ცილინდრული გარსები განხილულია ი.გრიგორენკოს, ა. ვასილენკოსა და ნ. პანკრატოვის [98] ნაშრომში. მასში წარმოდგენილია ფენოვანი ორთოტროპული გარსები, კერძოდ, გრძივად გოფირებული, გრძივწიბოებიანი, წრიული, რომლებსაც აქვთ ცვლადი სისქე. გამოკვლეულია დამაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობაზე.

ცილინდრული გარსები განიხილება ს. კანისა და ი. კაპლანის [32], გ.შაპიროს [57, 58] ნაშრომებში. რომლებშიც შემოთავაზებულია დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მიახლოებითი განსაზღვრა, მოცემულია უგანზომილები სიდიდეების ფორმულები, გრაფიკები და ცხრილები, გამოყენებულია კონტურის უჭიმვობის პირობა და ძვრის არ არსებობა.

კონუსური გარსების გაანგარიშების თეორია გაშუქებულია ი. ობრაზცოვის [125] შრომაში. მოცემულია ზუსტი ამოხსნები წრიული ფირფიტებისა და ბრუნვითი გარსებისათვის, რომლებიც მიიღება სპეციალური ფუნქციების გამოყენებით. გრაფიკებში და ცხრილებში წარმოდგენილია რიცხვითი შედეგები.

ი. მილეიკოვსკისა და ა. კუნაპის ნაშრომში [10-11] წარმოდგენილია ჰიპარგარსების არქიტექტურულ-კონსტრუქციული გადაწყვეტის მიმოხილვა, აღწერილია დამრეცი ჰიპარების უმომენტო და მომენტური თეორიები, შემოთავაზებულია გაანგარიშების პრაქტიკული ვარიაციული მეთოდი გადაადგილებათა ტერმინებში. მოყვანილია გრაფიკები და ცხრილები კვადრატული გეგმის მქონე ოთხი გარსისაგან შედგენილი სისტემისათვის.

გარსები, რომელთა შუა ზედაპირი არის დადებითი, ნულოვანი და უარყოფითი განიხილება კ. ეიპლენდის [126] ნაშრომში. მასში

გადატანის დამრეცი გარსებისათვის წრფივი მომენტური თეორია წარმოდგენილია ერთი განტოლებით, ხოლო იმ გარსებისათვის, რომლებიც გეგმით სწორკუთხაა, ეს განტოლება შეიძლება ამოიხსნას წრიული ცილინდრული გარსების ანალოგიურად. აქვე განიხილება გარსების ორთოტროპიულობა და ამასთანავე გარსში შეიძლება იყოს ფენოვანი და ყოველ შრეში ორთოტროპიულობის მიმართულება პარალელური დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის მთავარი მიმართულებებისა.

დამრეც გარსებს ეძღვნება ი. ვეკუას [13] და ბ. კანტორის [127] ნაშრომები. ბ. კანტორის მიერ გამოკვლეულია საკითხების ფართო წრე: ცვლადი სისქის მქონე არაერთგვაროვანი დამრეცი სფერული გუმბათებისა და ფირფიტების თეორიის ფიზიკურად და გეომეტრიულად არაწრფივი ამოცანები, რომელზედაც მოქმედებენ დატვირთვები და ტემპერატურული ველის ცვლილება. შესწავლილია პლასტიკურობის კრიტერიუმები მასალის კუმშვადობისა და განმტკიცების გათვალისწინებით. გათვალისწინებულია აგრეთვე არაერთგვაროვნება პლასტიკური თვისებებისა თერმული დამუშავების, ზედაპირული ციკლედვის, ჩქარი ნეიტრონების ნაკადით დასხივების შემდეგ.

დამკვიდრდა სახელწოდება «ს. ტიმოშენკოს ტიპის გარსების გაანგარიშების მეთოდები». ამ მეთოდებში შემოთავაზებულია ძვრების გათვალისწინება კოჭებში საკუთარი რხევების სიხშირეების განსაზღვრისათვის. ტიმოშენკოს ტიპის გარსების თეორიის აგება საშუალებას იძლევა დავძლიოთ წინააღმდეგობა განტოლებათა სისტემის რიგსა და სასაზღვრო პირობების რაოდენობას შორის.

ამავე თავსებადობის საკითხს ეხება ე. რეისნერის [128] სტატია. ე. რეისნერი გამოდის დრეკადი ფირფიტების ღუნვის სამგანზომილებიანი შეფასებისათვის, დაწყებული მეოთხე რიგის განტოლებების თეორიით, რომელიც ეყრდნობა კირხჰოფის ჰიპოთეზებს. სამგანზომილებიანი

პრობლემის სხვადასხვა ვარიაციის განსჯის შემდეგ შეინიშნება ორგანოზომილებიანი თეორიის განვითარება, რომელსაც მივყავართ მეექვსე რიგის განტოლებამდე (ბოლეს, ჰენკის, მინდლინისა და რეისნერის თეორიები) განივი ძვრის ეფექტის გათვალისწინების შემთხვევაში. კიდევ ერთხელ განიხილება ლევის ადრინდელი გადაწყვეტა, რომელიც აგებს ორგანოზომილებიან მათემატიკურ აპარატს, რასაც ახორციელებს პირდაპირი მეთოდით და დაჰყავს მეექვსე რიგის განტოლებამდე. ფენოვანი ფირფიტებისათვის განიხილება აგრეთვე უფრო მაღალი რიგის განტოლება, ვიდრე მეექვსე რიგისაა. განიხილება აგრეთვე მეექვსე რიგის განტოლების ასიმპტოტური ამოხსნა, რომელიც საშუალებას იძლევა შევამციროთ განტოლების რიგი მეოთხემდე.

### 1.1.7. ფილებისა და გარსების თეორიის მათემატიკური აპარატი

მათემატიკური აპარატის გამოყენება ფილებისა და გარსების ამოცანების გადაწყვეტისათვის განიხილებოდა ადრე მრავალრიცხოვან შრომებში.

გარსების თეორიაში გამოიყენება მრავალგვარი მათემატიკური აპარატი, გარდა ძირითადი აპარატისა (დიფერენციალური განტოლებები, და კერძოდ, მათი მიღების ვარიაციული გზები) გამოიყენება განტოლებათა ვარიაციული ფორმა (ე.რეისნერის, ვ. ნოვოჟილოვის, კ. ჩერნიხის, ჯ. სანდერსის და სხვათა შრომები), ინტეგრალურ განტოლებათა აპარატი (ნ. კილჩევსკი და სხვები), ინტეგრალური გარდაქმნები (ლ. სლეპიანი და სხვები), სპეციალური ფუნქციები (ა. კოვალენკო და სხვები), ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის აპარატი (ვ.ბოლოტინი), წრფივი და არაწრფივი პრობლემების ასიმპტოტური გადაწყვეტა (ა.გოლდენვეიზერი, ნ. ალუმიანე და სხვები), პარამეტრის მიხედვით გადაწყვეტის გაგრძელების მეთოდი (ე. გრიგოლიუკი, ვ. შალაშინი და სხვა) და ა.შ.

დამატებით აღსანიშნავია შრომები, რომლებშიც მათემატიკური მეთოდი პირველ ადგილზეა დაყენებული [31, 39, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139].

[117] წიგნის მეორე თავში წარმოდგენილია ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენება თხელი დრეკადი გარსების გაანგარიშებაში (კრიტიკულამდე დეფორმაციები, სასაზღვრო ეფექტები ტემპერატურული, შემთხვევითი თერმოდრეკადი ძაბვები, საწყის არასრულფასოვნებათა გათვალისწინება). აგრეთვე განიხილება გარსთა გაანგარიშება სტატისტიკური მეთოდების ასპექტში.

ი. ვეკუამ გამოაქვეყნა წიგნი [13], რომელიც ეძღვნება ტენზორულ ანალიზს.

#### **1.1.8. ტექნიკის დარგში ფირფიტებისა და გარსების თეორიის გამოყენების შესახებ**

მთელ რიგ შრომებში გაშუქებულია თვითმფრინავებისა და გემების თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშება. ამ შრომათა ნაწილი უკვე განხილულია ჩვენს მიერ. აღვნიშნოთ კიდევ რამოდენიმე.

თვითმფრინავების სამშენებლო მექანიკის შესახებ მთელი რიგი შრომებში ეკუთვნის ი. ობრაზცოვს [125, 140, 141]. ი. ობრაზცოვი იყო რედკოლეგიის თავმჯდომარე მთელი რიგი გამოცემებისა, რომლებიც ეძღვნებოდა თვითმფრინავის სამშენებლო მექანიკის პრობლემებს.

აღვნიშნოთ კიდევ რამოდენიმე შრომა, რომლებიც აშუქებენ თვითმფრინავმშენებლობასთან დაკავშირებულ საკითხებს. ეს არის კ. ბალუბახის სამი სტატია, სადაც წარმოდგენილია თვითმფრინავის კონსტრუქციის ფრაგმენტების გაანგარიშება; ს. კანისა და ი. პანოვკოს და ა. უმანსკის ნაშრომები თვითმფრინავის სამშენებლო მექანიკის შესახებ. პირველ ტომში არის ოთხი თავი, რომლებშიც წარმოდგენილია ფირფიტების ღუნვისა და მდგრადობის საკითხები, მათი დრეკადობის მიღმა მუშაობის ჩათვლით, აგრეთვე ცილინდრული გარსების თეორიის ელემენტები. მეორე ტომში განიხილება თვითმფრინავის ფრთის

ზოგადი სიმტკიცე და სიხისტე. მესამე ტომში სხვა საკითხებთან ერთად წარმოდგენილია თვითმფრინავის ჰერმეტიკული კაბინის სიმტკიცის საკითხები და მისი ნაწილების დრეკადი რხევები. ნაშრომში თვითმფრინავის კონსტრუქციის ელემენტების გაანგარიშების გარდა, მოცემულია ფიუზელაჟის და ფრთის კონსტრუქციის მზიდუნარიანობის განსაზღვრა. ა.უმანსკიმ შექმნა ჩაკეტილი განივკვეთის მქონე თხელკედლიანი ღეროს გაანგარიშების თეორია, რომელიც აგრეთვე გამიზნულია თვითმფრინავის კონსტრუქციებისათვის.

ს. კანის ნაშრომიც ეხება თვითმფრინავმშენებლობას, თუმცა განიხილავს თეორიის და გაანგარიშების ზოგად საკითხებს.

ა. ალექსანდროვისა და ლ. კურშინის რედაქციით გამოქვეყნებულ ორ კრებულში განიხილება სამფენოვანი პანელებისა და გარსების გაანგარიშება საავიაციო კონსტრუქციების ელემენტების დაპროექტების მიზნით. ამ კრებულის გამოცემა წინ უსწრებდა სპეციალურად სამფენოვანი პანელებისადმი მიძღვნილ ნაშრომს.

აღსანიშნავია აგრეთვე სამი კრებული: (ვ. კაბანოვის რედაქციით), (ი.ობრაზცოვისა და ა. ვოლმირის რედაქციით) და (ვ. ვასილიევის რედაქციით), სადაც წარმოდგენილია თვითმფრინავის კონსტრუქციების გაანგარიშება. გამოკვლეულია კონსტრუქციაზე არასტაციონალური ველის გავლენა, წარმოდგენილია დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრა ფრთის გამლიერებულ გარსში და გამოკვლეულია არაწრფივი დეფორმაცია და მდგრადობა. განხილულია საფრენი აპარატების საიმედოობის პრობლემები მათი გამოცდის, ნავიგაციისა და მანევრირების შემთხვევაში.

ფირფიტების დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრა და მდგრადობის შეფასება მათი გემის კონსტრუქციებში გამოყენების თვალსაზრისით განთავსებულია ფუნდამენტალური ნაშრომი «გემის სამშენებლო მექანიკა». ფირფიტების გაანგარიშებას ეძღვნება აგრეთვე ი. შიმანსკის ნაშრომი.

გემთმშენებლობაში გამოყენებული სამფენოვანი კონსტრუქციებისადმი წაყენებულ მოთხოვნებს ეხება ბ. პროხოროვისა და ვ. კობელევის ნაშრომი. მასში კერძოდ გამოკვლეულია დეფექტების გაჩენის მიზეზები და მოცემულია სამფენოვანი კონსტრუქციების ტექნიკურ-ეკონომიკური შეფასება. განსაკუთრებული სპეციფიკისაა გარსები, რომლებსაც იყენებენ მშენებლობაში. ამ კონსტრუქციების გამოყენების ძირითადი სფეროა შენობათა სახურავები. პირველი ნაშრომი, რომელშიც გარსები განიხილებოდა ამ ასპექტში იყო ფ. დიშინგერის [118]. შემდეგი იყო ი. შტაერმანის ნაშრომი [142], რომელშიც დამრეცი რკინაბეტონის გარსის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა განიხილება მისი განქარგილების პროცესში, ე.ი. იმ პერიოდში, როდესაც ბეტონს ჯერ კიდევ არა აქვს მიღებული საანგარიშო სიმტკიცე. უფრო მოგვიანებით გამოვიდა მისი ნაშრომი «შეაფრებული ფილები, დაპროექტება და მშენებლობა».

### 1.1.9. ფილებისა და გარსების გაანგარიშება ჩვეულებრივ დიფერენციალური განტოლებებში

როგორც წინა პარაგრაფების ანალიზიდან ჩანს დეფორმადი სხეულის მექანიკის ამოცანების გადაწყვეტისათვის მრავალი მეთოდია ამჟამად დამუშავებული. ცხადია, რომ გამოთვლითი ტექნიკის პრაქტიკაში არ არსებობის პერიოდში ყველაზე უფრო ეფექტურ მეთოდად ითვლებოდა ის მეთოდები, რომლებიც მყარი ტანის მექანიკის ამოცანების ამოხსნის მიღებას შესძლებდნენ ისეთი მარტივი ანალიზური გამოსახულების სახით, რომლებიც არ ითხოვდნენ დიდი მოცულობის გამოთვლების შესრულებას მათ პრაქტიკაში დასანერგავად. ასეთი სახის მეთოდების დამუშავება კი დამოკიდებული იყო მათემატიკური ხასიათის სირთულეების გადალახვასთან, რაც

მიიღწეოდა მხოლოდ ორიგინალური მათემატიკური მიდგომის გამოყენებით.

რაც შეეხება თანამედროვე კომპიუტერების არსებობის პერიოდს, აქ დეფორმირებადი სხეულის მექანიკის ამოცანის ამოხსნის მეთოდით, ეფექტურობის შეფასება მკვეთრად იცვლება. ამ ეტაპზე გამოთვლითი სამუშაოების შესრულება (ძალიან დიდი მოცულობითაც კი) აღარ წარმოადგენს უკვე რაიმე დაბრკოლებას მათი პრაქტიკაში დანერგვის საქმეში. ამიტომ თანამედროვე კომპიუტერის არსებობის შემთხვევაში ყველაზე უფრო ეფექტურად მიიჩნევიან უკვე ისეთი მეთოდები, რომლებიც მოიცავენ ამოცანების ფართო წრეს და გამოირჩევიან განსაკუთრებული მათემატიკური სიმარტივით, რაც ხშირად მიიღწევა გამოთვლითი სამუშაოების გაზრდის გზითაც მათი რიცხვითი რეალიზაციის დროს. ასეთი მეთოდების რიცხვს მიეკუთვნებიან, პირველყოვლისა, რიცხვითი მეთოდები: სასრულო სხვაობათა მეთოდი, რომელიც მართალია დამუშავებული იყო ძალიან ადრე, მაგრამ მან პრაქტიკული გამოყენება ჰპოვა მხოლოდ თანამედროვე კომპიუტერების პერიოდში. პრაქტიკაში მეტად ფართო გავრცელება ჰპოვა საინჟინრო ნაგებობებისა და კონსტრუქციების პროექტირების საქმეში რიცხვითმა მეთოდმა, რომელიც ცნობილია სასრულო ელემენტთა მეთოდის სახელწოდებით [39], [131], [72], [143], [134], [135], [144]. უნდა აღინიშნოს, რომ სასრულ ელემენტთა მეთოდი ეფექტურია ძალიან რთული სტრუქტურის მქონე ობიექტების (გეომეტრიული და ფიზიკური აზრით) განხილვისას. მაგრამ, ცნობილია, მას აქვს მნიშვნელოვანი ნაკლოვანებებიც: თხოულობს დიდი რაოდენობის საწყისი ინფორმაციის დამუშავებას; განხილული ამოცანის ამოხსნისას საჭიროებს მეტად მაღალი რიგის ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნას; არასაკმარისადაა დახასიათებული უსასრულო და ნახევრად უსასრულო არეებისათვის და სხვა. თუმცა უკანასკნელ პერიოდში, ცნობილი მეცნიერების გამოკვლევების წყალობით მიღწეულია მნიშვნელოვნად



დახვეწა მისი არსის მათემატიკური ინტერპრეტაციისა, რამაც მკვეთრად გაამარტივა სასრულო ელემენტების მეთოდის კომპიუტერზე რიცხვითი რეალიზაციის პროცედურა. მნიშვნელოვანი წვლილი ამ საქმეში შეიტანა უკრაინელ მეცნიერთა სკოლამ. ამ გამოკვლევების შედეგად დამუშავებულია აღნიშნული მეთოდის რამდენიმე ვარიანტი: სასაზღვრო ელემენტების მეთოდი, სუპერელემენტების მეთოდი, ნახევრად ანალიზური მეთოდი და სხვა.

2008 წლის აპრილის ბოლოს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში ჩატარდა საერთაშორისო კონფერენცია რიცხვითი მეთოდების, კერძოდ «ლირას» გამოყენებით სამშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშების თაობაზე. ცნობილმა სპეციალისტმა პროფ. გოროდეცკიმ თავის გამოსვლაში აღნიშნა, რომ მიუხედავად დიდი წარმატებისა პროგრამა «ლირას» არასწორი და არასპეციალისტის გამოყენების შედეგად მეტად საშიში იარაღია, რომელმაც შეიძლება გამოიწვიოს ნაგებობების ნგრევა და აუნაზღაურებელი მატერიალური ზარალი. ამიტომაც საჭიროა სახელმწიფოში შეიქმნას სამეცნიერო დაწესებულება, რომელიც კონტროლს გაუწევს პროგრამა «ლირას» სწორ მომსახურების საქმეს.

აღნიშნული მეთოდებიდან შედარებით ფართო გამოყენება ჰპოვა სასაზღვრო ელემენტთა მეთოდმა, რასაც ადასტურებს ცნობილი მეცნიერების დიდი ყურადღება მისი შემდგომი განვითარების საქმეში, სასაზღვრო ელემენტთა მეთოდის იდეა, რომლის თანახმადაც დგინდება საძიებელი ფუნქციების დამოკიდებულება სხეულის შიგნით და მის საზღვრებზე, ჩასახული იყო უფრო ადრე, როცა დრეკადობის თეორიის ამოცანების რიცხვითი მეთოდების დამუშავებისას ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებით შეიცვალა კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების განხილვა. ამ იდეის რეალიზაციას მიყვავართ აღნიშნული დიფერენციალური განტოლებების, ურთიერთდამოკიდებულების შეცვლაზე პრაქტიკულად ექვივალენტური

ინტეგრალური განტოლებებით, რომლებშიც აღნიშნული საძიებელი სიდიდეების მნიშვნელობები მოცემულია მხოლოდ განსახილველი არეების საზღვრებზე. ამიტომ მათ უწოდებენ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებებს, ხოლო ამ მიდგომას დეფორმირებული სხეულის მექანიკის ამოცანების ამოხსნისას – სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდს. მის შექმნაში დიდი წვლილი მიუძღვით ნ. მუსხელიშვილს [71], ვ. კუპრაძეს და მის მოწაფეებს [72], ი. ვეკუას [13], [14] და სხვა.

ი. ლუდუშაურის მონოგრაფია [16] მიეკუთვნება სწორედ იმ ახალი თეორიული გამოკვლევების კატეგორიას, რომლებიც ეძღვნება დეფორმირებადი სხეულების მექანიკის ამოცანების ამოხსნისათვის ეფექტური ანალიზური მეთოდის დამუშავებას თანამედროვე ეგმ-ის არსებობის პერიოდში. მასში მოცემულია დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის ზოგადი ანალიზური მეთოდი, რომელიც მათემატიკური თვალსაზრისით გამოირჩევა გასაკუთრებული სიმარტივით და მეტად მოხერხებულია პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. ამ მეთოდის რეალიზაციის მათემატიკური გამარტივება მდგომარეობს იმაში, რომ მისი გამოყენებისას დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე. ეს მიიღწევა მასში ჩადებული ორიგინალური ანალიზური მოდელის საფუძველზე, რომლის თანახმადაც მოცემული სამგანზომილებიანი სხეულის უსასრულოდ მცირე ელემენტის მუშაობა წარმოდგენილია ამ ელემენტის ტოლდონი სამი «ერთგანზომილებიანი» ფიქტიური ელემენტის ერთობლივი მუშაობით «ერთგანზომილებიანის» ქვეშ აქ იგულისხმება ფიქტიური სისტემის ფიზიკური დახასიათება, რომ მის უსასრულოდ მცირე ელემენტს უნარი აქვს იმუშაოს გაჭიმვაზე (კუმშვაზე) მხოლოდ რომელიღაც ერთი ორთოგონალური მიმართულებით, რომელიც წოდებულია მის მუშა მიმართულებად. ამასთან ერთად, აღნიშნული სამი ფიქტიური სისტემის

მუშა მიმართულებები ურთიერთორთოგონალურნი არიან მოცემული ობიექტის ნებისმიერ წერტილში.

მოცემულ ეტაპზე ი. ლუდუშაურის აღნიშნული თეორია დამუშავებულია კლასიკური დრეკადობის თეორიის დაშვებების სიზუსტით. მის მონოგრაფიაში განხილული მრავალი რიცხვითი მაგალითები მოწმობენ, რომ ამ თეორიით მიღებული დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნები გამოირჩევიან სწრაფი კრებადობით და მაღალი სიზუსტით. გარდა ამისა, აღნიშნული თეორია მეტად მარტივია მათემატიკური თვალსაზრისით და თავისუფალია ზემოთ აღნიშნული ნაკლოვანებებისაგან. ამიტომ მას უნარი აქვს წარმატებით გაუწიოს კონკურენცია რიცხვით მეთოდებს მარტივი სტრუქტურის მქონე ობიექტების განხილვისას, ე.ი. როცა ობიექტის ფიზიკურ-გეომეტრიული მახასიათებლები და სასაზღვრო პირობები ექვემდებარებიან ზუსტ ანალიზურ ჩაწერას მოცემული ობიექტის არის ფარგლებში.

## 2. შედეგები და მათი განსჯა

### 2.1. თხელი ფილების და ცილინდრული გარსების ღუნვაზე გაანგარიშების ზოგადი თეორია ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში

#### 2.1.1. ნაშრომში გამოყენებული თეორიის არსი

ქვემოთ გამოყენებული თეორია ეფუძნება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში დრეკადობის თეორიას, რომელიც ზოგად დამუშავებულ იქნა ი.დუდუშაურის მიერ [16]. ამ ახალი თეორიის მიზანს წარმოადგენს კლასიკური დრეკადობის თეორიის გამოყენებით ფილებისა და გარსების გაანგარიშებისას წარმოშობილი მათემატიკური ხასიათის სიმწიფეების გვერდის ავლა, გაანგარიშების სიზუსტის დაკარგვის გარეშე, რაც მიღწეულია კლასიკური დრეკადობის თეორიის ანალიზური მოდელის არსის ახლებური ინტერპრეტაციის გზით.

როგორც ცნობილია, კლასიკურ დრეკადობის თეორიას [71], [1], [145] საფუძვლად უდევს ანალიზური მოდელი უსასრულოდ მცირე ელემენტების შესახებ, რომლებიც ჩვენს წარმოდგენაში ამოიკვეთება მოცემული დრეკადი  $T$  სხეულიდან და განიხილება მის ექვსივე წახნაგზე მოქმედი შინაგანი ძაბვის ყველა კომპონენტის (ნორმალური და მხები) გათვალისწინებით (ნახ. 1, ა) წონასწორობისა და დეფორმაციების ყველა განტოლებებისა და დამოკიდებულებების მისაღებად. აღნიშნული განტოლებები ჩაიწერება რთული სტრუქტურის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების სახით, რომელთა ამოხსნა ამოცანის სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, როგორც ცნობილია მათემატიკური ხასიათის რთული დაბრკოლებებთან არის დაკავშირებული. კლასიკური დრეკადობის თეორიის ფუძემდებელ აკად. ნ. მუსხელიშვილი თავის ცნობილ მონოგრაფიაში [ ] წერს: «თუ დავსვავთ საკითხს ჩვენი ღეროს წონასწორობის შესახებ ყველა პირობის სრულად დაკმაყოფილების მიზნით, მაშინ მივდივართ მათემატიკურ

ამოცანამდე ყველა საძიებელი სიდიდისათვის.  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, u, v, w$  ისეთი მნიშვნელობის განსაზღვრის შესახებ, რომლებიც ღეროს მიერ დაკავებული  $v$  არეში ზუსტად დააკმაყოფილებენ სივრცითი დრეკადობის თეორიის ყველა განტოლებას და ამის გარდა ამოცანის ყველა სასაზღვრო პირობას. ასეთნაირად დასმული ამოცანა გადაწყვეტა დაკავშირებულია მნიშვნელოვან მათემატიკურ სირთულეებთან, თუ მოიძებნება არა მარტო თეორიული, არამედ ისეთი ამონახსნიც, რომელიც ექვემდებარება რიცხვით რეალიზაციას.

საბედნიეროდ ირკვევა, რომ პრაქტიკული მიზნებისათვის უმეტეს შემთხვევაში არ არის საჭირო (და თანაც აზრი არა აქვს) ამოცანის დასმას ასეთი სირთულით». ასევე რთულ მათემატიკურ პრობლემებზეა ლაპარაკი «ბიბლიას» სახელწოდებით ცნობილ ოთხი ავტორის (ვ. კუპრაძე, მ. ბაშალეიშვილი, თ. გეგელია, თ. ბურჭულაძე) მონოგრაფიაში.

ამ ამონარიდიდან ჩანს, რომ თუმცა მათემატიკური თვალსაზრისით ყველა ამოცანა გადაწყვეტილია, მაგრამ ამოხსნის რიცხვითი რეალიზაცია ყოველთვის მოსახერხებელი არ არის. სწორედ ამ დაბრკოლებების წარმატებით გადალახვაა მიღწეული ი.ღუდუშაურის ზემოთ მოხსენებულ თეორიაში.

უნდა ითქვას, რომ სწორედ აღნიშნული დაბრკოლებების გადალახვის მიზნითაა ამჟამად დამუშავებული მრავალი სახის რიცხვითი მეთოდი (სასრულო სხვაობების, სასრულო ელემენტების და სხვა), რომელთა რეალიზაცია დაკავშირებულია დიდი მოცულობის გამოთვლით სამუშაოსთან და, ამიტომ, მათი პრაქტიკაში დანერგვა შესაძლებელი გახდა მხოლოდ მაღალი კლასის თანამედროვე გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებით. მაგრამ ეს რიცხვითი მეთოდები, ანალიზურ მეთოდებთან შედარებით, როგორც ცნობილია, გაცილებით დაბალი სიზუსტით ხასიათდებიან ნაგებობის საერთო დამაბუღ-დეფორმირებული მდგომარეობის გამოკვლევისას.

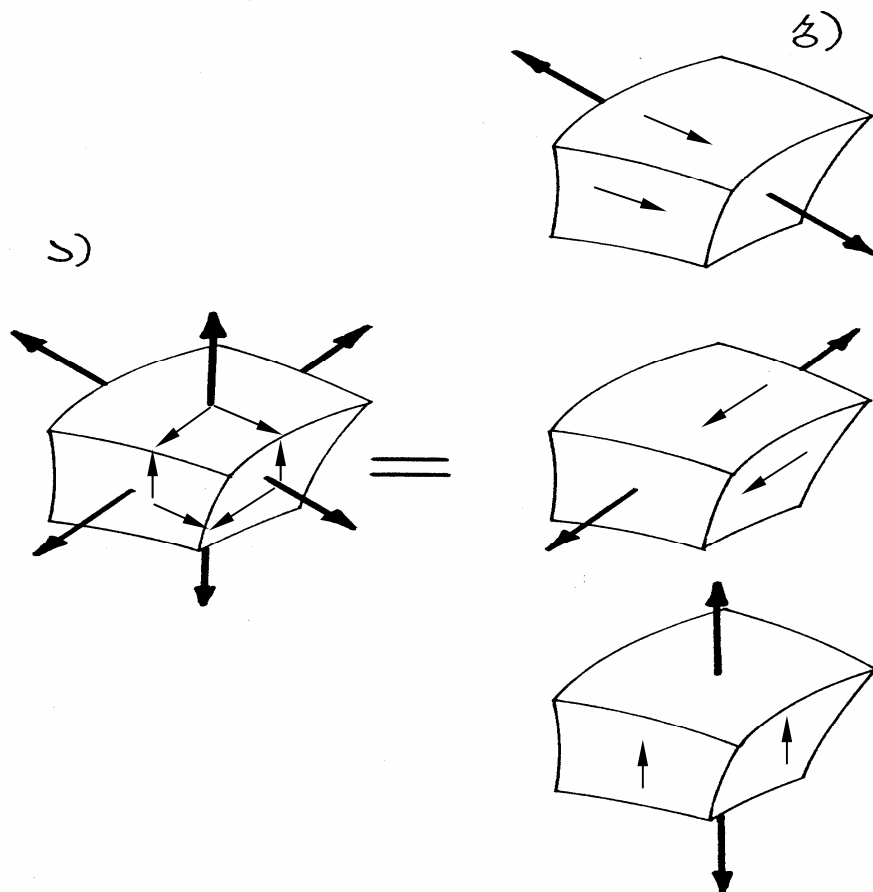
ი. ლუდუშაურის აღნიშნულ თეორიაში გამოყენებული ანალიზური მოდელის თანახმად, რომელიც სიზუსტით კლასიკური ანალიზური მოდელის (ნახ. 1, ა) ადეკვატურია, ნებისმიერი დრეკადი  $T$  სხეულის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა, გამოწვეული გარე ზემოქმედებით (მალოვანი, ტემპერატურული და სხვა), წარმოიადგინება «ერთგანზომილებიანი» სამი ფიქტიური სისტემის  $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$  ერთობლივი მუშაობის სახით. ეს ფიქტიური სისტემები გეომეტრიულად ადეკვატურნი არიან მოცემული სამგანზომილებიანი  $T$  სხეულისა, ხოლო მათი ფიზიკური მახასიათებლები კი უზრუნველყოფენ ამოცანის დაყვანას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში გამოყენებული ცნობილი ჰიპოთეზური დაშვებების სიზუსტით. თითოეული ამ ფიქტიური სისტემის უსასრულოდ მცირე ელემენტს უნარი შესწევს იმუშაოს გაჭიმვაზე (კუმშვაზე) მხოლოდ ისეთი მიმართულებით, რომელიც ემთხვევა მისი ინდექსის შესაბამისი საკოორდინატო წირის მხებს. ფიქტიური სისტემების ასეთი «მუშა» მიმართულებები, რომლებიც ნაჩვენებია მათი ინდექსებით, აღნიშნული განმარტების თანახმად, ცხადია, ურთიერთ ორთოგონალური იქნებიან, რაც გამოიწვევს განსახილველი  $T$  სხეულის მცირე ელემენტზე (ნახ. 1, ა) მოქმედ შინაგანი ძაბვის კომპონენტების შესაბამის გადანაწილებას ფიქტიური სისტემების უსასრულოდ მცირე ელემენტებს შორის (ნახ. 1, ბ).

კლასიკური დრეკადობის თეორიის ანალიზური მოდელის (ნახ. 1, ა, ბ), არსის აღნიშნულ ახლებურ ინტერპრეტაციას ი. ლუდუშაური უყენებს შემდეგ ორ ძირითად მოთხოვნას:

1. ფიქტიურ  $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$  სისტემათა ერთობლივი მუშაობისა და მოცემული  $T$  რეალური სხეულის მუშაობის ადეკვატურობის უზრუნველყოფა, კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში გამოყენებულ ცნობილ ჰიპოთეზურ დაშვებათა სიზუსტით (ცხადია, კირხჰოფის ზემოთ მოხსენებული ჰიპოთეზის გარდა);

2. კლასიკური დრეკადობის თეორიის ნებისმიერი ამოცანის დაყვანას ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე.

ამრიგად, აღნიშნული გზით კლასიკური დრეკადობის თეორიის ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ამოცანა დაიყვანება რაღაც «სივრცით საკონტაქტო» ამოცანაზე  $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$  ფიქტიურ სისტემათა ერთობლივი მუშაობის შესახებ, რომლებშიც საძიებელი მოცულობითი რეაქციული ურთიერთქმედების ძალების (ძალები და მომენტები) განისაზღვრებიან აუცილებელი და საკმარისი «საკონტაქტო» პირობებიდან. ეს უკანასკნელი, იგიური ტოლობების სახით, ავტომატურად მიიღებიან უშუალოდ ზემოთ აღნიშნული პირველი მთავარი პირობის შესრულებისას.



ნახ. 1. უსასრულოდ მცირე ელემენტის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა

ამ რეაქციული ძალების საძიებელი ფუნქციები წინასწარ წარმოდგინდებიან საერთო ფორმის მწკრივების სახით, რომლებიც ზოგად მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში  $\alpha, \beta, \gamma$  ჩაიწერებიან შემდეგი საერთო ფორმით:

$$y_i^* = \sum_{m_i} \sum_{n_i} \sum_{k_i} A_{mnk}^i \varphi_m^i(\alpha) \psi_n^i(\beta) f_k^i(\gamma) + \sum_{j=1}^{\infty} [\xi_j^i(\alpha) \eta_j^i(\beta, \gamma) + \nu_j^i(\beta) \mu_j^i(\alpha, \gamma) + \lambda_j^i(\gamma) g(\alpha, \beta)], \quad (1)$$

სადაც  $y_i^*$  – ფიქტიურ სისტემათა  $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$  ურთიერთქმედების გამომხატველი რომელიღაც  $i$ -ური რეაქტიული ძალვაა;  $A_{mnk}^i$  – საძიებელი მუდმივი კოეფიციენტებია;  $\varphi_m^i(\alpha), \psi_n^i(\beta), f_k^i(\gamma)$  – ნებისმიერი მაინტერპოლირებული ფუნქციებია, რომლებიც, მათ წარმოებულებთან ერთად, არ განიცდიან წყვეტას  $T$  სხეულის ფარგლებში;  $\alpha, \beta, \gamma$  – უგანზომილები კოორდინატებია.

რაც შეეხება მისი ერთმაგი მწკრივის სამ წევრს, რომელთა დანიშნულებაა შესაბამისი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილება, როგორც წესი, შეინარჩუნება მხოლოდ ერთი, ან ყველა ისინი მიიჩნევიან ნულის ტოლად (განსახილველ კონკრეტულ ამოცანაში მოცემული სასაზღვრო პირობების ხასიათის მიხედვით). თანაც, თითოეული მათგანის პირველი ფუნქცია, რომელიც ერთ კოორდინატაზეა დამოკიდებული, უნდა აკმაყოფილებდეს ზემოთ აღნიშნული მაინტერპოლირებული ფუნქციებისადმი წაყენებულ მოთხოვნებს. მეორე ფუნქცია კი რომელიც ორ კოორდინატაზეა დამოკიდებული, საძიებელია და განისაზღვრება შესაბამისი სასაზღვრო პირობიდან.

განსაკუთრებით აღსანიშნავია ი. ლუდუშაურის თეორიაში გამოყენებული კლასიკური დრელადობის თეორიის ანალიზური მოდელის (ნახ. 1, ა) ახლებური ინტერპრეტაციის (ნახ. 1, ბ) არსის კიდევ ერთი



მეტად მნიშვნელოვანი მხარე, რომლის თანახმად შინაგანი მხევი ძაბვები:

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha} = \tau_{\alpha\beta}^*, \quad \tau_{\alpha\gamma} = \tau_{\gamma\alpha} = \tau_{\alpha\gamma}^*, \quad \tau_{\beta\gamma} = \tau_{\beta\beta} = \tau_{\beta\gamma}^*, \quad (2)$$

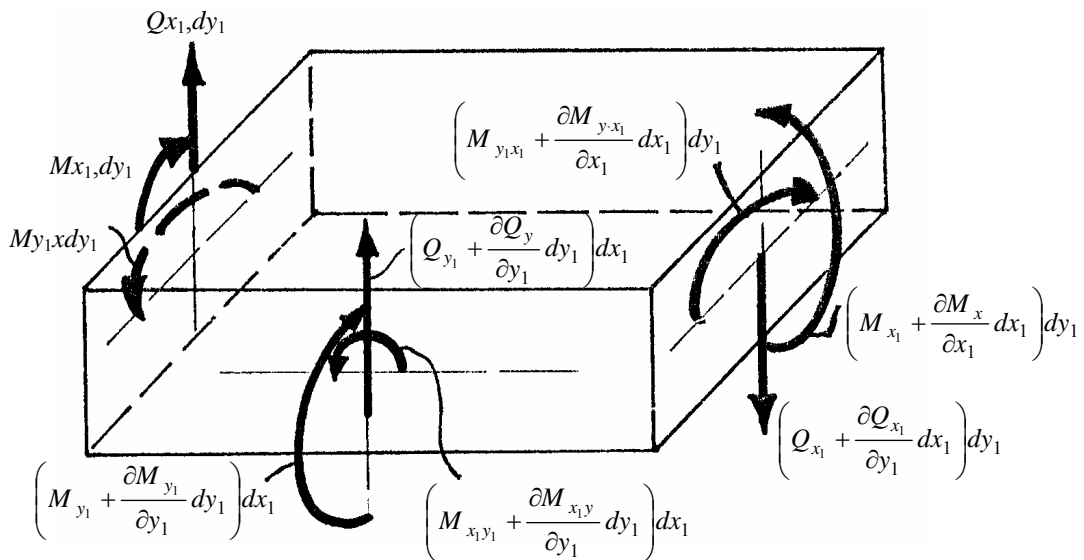
მათი წარმოშობის ბუნების გამო, მიეკუთვნებიან  $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$  ფიქტიურ სისტემათა ურთიერთქმედების გამოხატველი ძალების ჯგუფს და ამიტომ მათი საძიებელი ფუნქციებიც წარმოდგინდებიან წინასწარ (1) ფორმის მწკრივის სახით. ამასთან ერთად, ურთიერთქმედების ზემოთ აღნიშნული რეაქციული ძალებისაგან განსხვავებით, მათ დამატებით წაყენება მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ (1) ფორმის მწკრივების სახით წარმოდგენილი შინაგანი მხევი ძაბვების  $\tau_{\alpha\beta}^*, \tau_{\alpha\gamma}^*, \tau_{\beta\gamma}^*$  საძიებელი ფუნქციები ზუსტად უნდა აკმაყოფილებდნენ მათ შესაბამის სასაზღვრო პირობებსაც, რაც ადვილად მიიღწევა ამ მწკრივებში მაინტერპოლირებული ფუნქციების შერჩევის ეტაპზევე.

უნდა ითქვას, რომ ამ უკანასკნელი მოთხოვნის შესრულება ერთ-ერთი ძირითადია ი. ლუდუშაურის ზოგად თეორიაში. საქმე იმაშია, რომ სწორედ მისი შესრულებით მიიღწევა მეტად ეფექტური სახით: კლასიკური დრეკადობის თეორიის ამოცანათა დაყვანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნაზე; დანარჩენი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების საკითხის მკვეთრად გამარტივება და, რაც მოცემული ნაშრომის ავტორისათვის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია, თხელი გარსებისა და ფილების გაანგარიშებისას სასაზღვრო პირობების ზუსტად დაკმაყოფილება, კლასიკურ გარსთა თეორიაში დაკანონებული ჰიპოთეზური დაშვებების გამოყენების გარეშე, რომელთა რიცხვს მიეკუთვნება კირხჰოფის ცნობილი ჰიპოთეზაც.

## 2.1.2. თხელი ფილების ღუნვაზე გაანგარიშების მაგალითები

### 2.1.2.1. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის ღუნვა კონტურზე მოქმედი განაწილებული მომენტების გათვალისწინებით

ჩვენ შემოვიფარგლებით სწორკუთხედის ფორმის ფილის ღუნვაზე გაანგარიშების ძირითადი დიფერენციალური განტოლებებით, რომელთა მისაღებად განიხილება ფილის უსასრულოდ მცირე ელემენტები  $h dx_1 dy_1$ , რომლის ვერტიკალურ წახნაგებზე მოქმედებენ შინაგანი ძალები  $Q_{x_1}$ ,  $Q_{y_1}$ ,  $M_{x_1}$ ,  $M_{y_1}$  და  $H^* = M_{x_1 y_1} = M_{y_1 x_1}$  მგრები მომენტი (ნახ. 2), ხოლო კონტურზე კი გარე განაწილებული



დატვირთვა.  $x_1$  და  $y_1$  დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატებია.

#### ნახ. 2. ფილის უსასრულოდ მცირე ელემენტი

ფილის აღნიშნული ელემენტის წონასწორობის დიფერენციალური განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{y_1}}{\partial y_1} &= q \\ \frac{\partial M_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial H^*}{\partial y_1} &= Q_{x_1} \\ \frac{\partial M_{y_1}}{\partial y_1} + \frac{\partial H^*}{\partial x_1} &= Q_{y_1} \end{aligned} \quad (3)$$

აღნიშნული შიგა ძალები კლასიკურ დრეკადობის თეორიაში გამოისახებიან ფილის  $W$  ჩაღუნვის საშუალებით

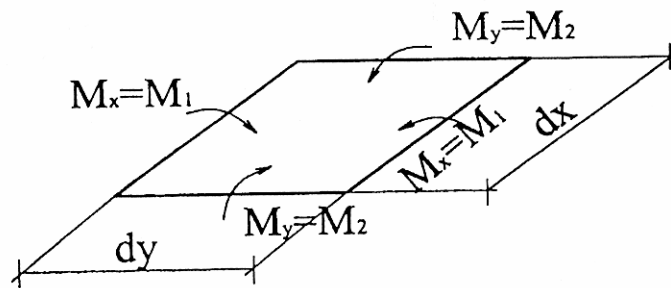
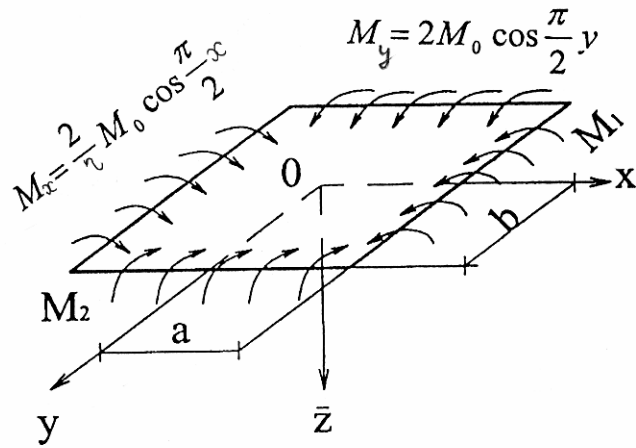
$$\left\{ \begin{array}{l} M_{x_1} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} \right) \\ M_{y_1} = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right) \\ H^* = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial y_1}, \\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \end{array} \right. \quad (4)$$

თუ (3) ტოლობიდან გამოვრიცხავთ  $Q_{x_1}$  და  $Q_{y_1}$  განივ ძალებს და გავითვალისწინებთ (4) ტოლობებს მივიღებთ სოფი-ჟერმენის ცნობილ განტოლებას  $W$  ჩაღუნვის ფუნქციის მიმართ.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y_1^4} = \frac{q(x, y)}{D}.$$

ამრიგად, კლასიკური დრეკადობის თეორიის გამოყენებით სწორკუთხედის ფორმის ფილის გაანგარიშება დაიყვანება მისი ჩაღუნვისათვის ისეთი ფუნქციის  $W(x_1, y_1)$  განსაზღვრაზე, რომელიც დააკმაყოფილებს ბიჰარმონიულ განტოლებას და ყოველი კონკრეტული ამოცანისათვის წინასწარ მოცემულ ყველა სასაზღვრო პირობას, რაც როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული დაკავშირებულია მათემატიკური ხასიათის დიდ სირთულეებთან. დისერტაციაში დასმული ამოცანის გადაწყვეტისას ვიყენებთ ი. ლუდუშაურის მიერ დამუშავებულ თეორიას [16], რომლის საფუძველზე მკვეთრადაა გამარტივებული საერთოდ დრეკადობის თეორიის ნებისმიერი ამოცანის ზუსტი გადაწყვეტა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სწორკუთხა ფილა კონტურით თავისუფლადაა დაყრდნობილი და განიცდის კონტურის გასწვრივ კოსინოსოიდის კანონით განაწილებული მომენტების ქმედებას (ნახ. 3).



ნახ. 3. თავისუფლად დაყრდნობის ფილა კონტურზე განაწილებული მომენტებით

დასმული ამოცანის გადაწყვეტა მოცემულია ქვემოთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებში დრეკადობის თეორიის გამოყენებით [16], სადაც მიღებულია უგანზომილებო კოორდინატები:

$$x = \frac{x_1}{a}; \quad y = \frac{y_1}{b}; \quad \eta = \frac{a}{b}. \quad (5)$$

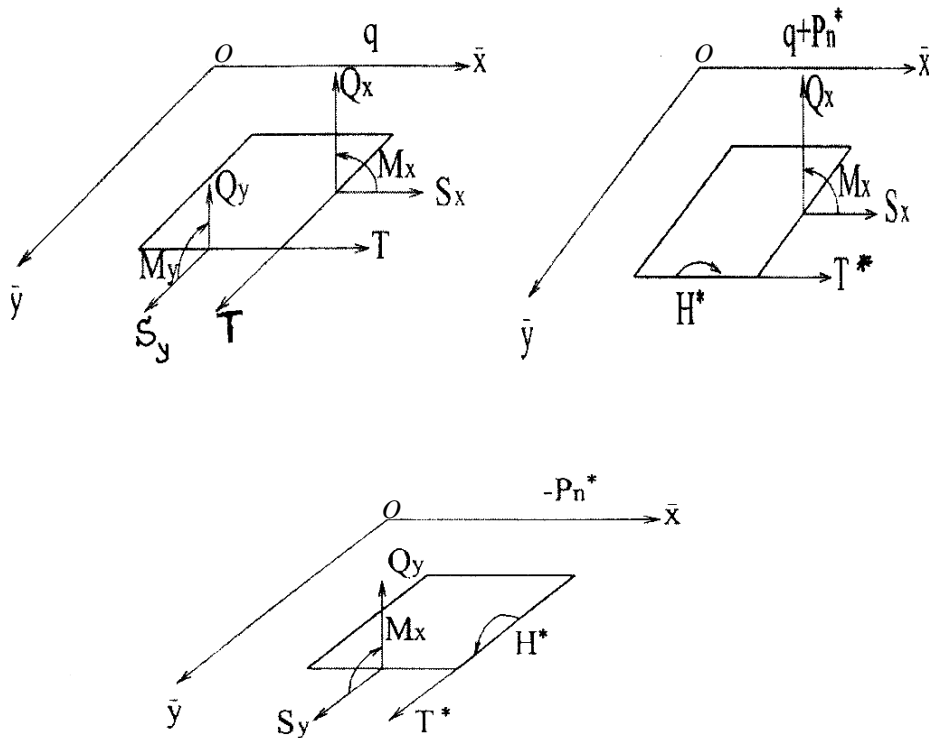
სადაც  $a$  და  $b$  ფილის კონტურის ზომებია.

ამოცანაში მოცემული გვაქვს წინასწარ შემდეგი რეალური სასაზღვრო პირობები [146] (ნახ. 3)

$$\begin{aligned} \text{როცა } x = \pm 1; \quad M_x = M_1; \quad Q_x = 0; \quad H^* = 0 \\ \text{როცა } y = \pm 1; \quad M_y = M_2; \quad Q_y = 0; \quad H^* = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

მოცემული ფილის ღუნვაზე მუშაობა ი. ლუდუშაურის მეთოდით წარმოდგინება  $T_x$ ,  $T_y$  ფიქტიურ სიტემების ერთობლივი მუშაობის სახით,

რომელთა წონასწორობის განტოლებები ჩაიწერებინ შემდეგი სახით:  
(ნახ. 4).



ნახ. 4. ფიქტიური სისტემებში შიგა ძალების განაწილების კანონი

–  $T_x$  ფიქტიური სისტემისათვის

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Q_x}{\partial x} &= P_n^* \\ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x &= -\frac{1}{b} \frac{\partial H^*}{\partial y}, \end{aligned} \quad (7)$$

–  $T_y$  ფიქტიური სისტემისათვის

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -P_n^*, \\ \frac{1}{b} \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= -\frac{1}{a} \frac{\partial H^*}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

(7) და (8) სისტემებიდან  $P_n^*$ -ის გამორიცხვის შემდეგ მიიღება კლასიკურ დრეკადობის თეორიის (3) წონასწორობის განტოლებათა სისტემა.

განტოლებებიდან (7) და (8) განისაზღვრებიან შინაგანი ძალები,  $Q_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$  მას შემდეგ, რაც ფიქტიურ სისტემათა  $T_x$ ,  $T_y$  ურთიერთქმედების ძალები  $P_n^*$  და  $H^*$  წარმოდგენილი იქნებიან წინასწარ მწკრივების სახით. ამ უკანასკნელთა მაინტერპოლირებული ფუნქციების შერჩევასა გაითვალისწინება მოცემული ამოცანის შესაბამისი სასაზღვრო პირობების (6) გარდა შემდეგი საწყისი პირობებიც

$$\begin{aligned} \text{როცა } x = 0; H^* = 0; P_n^* \neq 0; \frac{\partial W_x}{\partial x} = 0, \\ \text{როცა } y = 0; H^* = 0; P_n^* \neq 0; \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

სადაც  $W_x - T_x$  ფიქტიური სისტემის ჩაღუნვაა, ხოლო  $W_y - T_y$  ფიქტიური სისტემის.

გარდა ამისა რეაქციული დატვირთვა  $P_n^*$  განსახვავებულია ნულისაგან ფილის მთელ შუალედა ზედაპირზე.

ამრიგად, სასაზღვრო პირობებისა (6) და საწყისი პირობების (9) გათვალისწინებით აღნიშნული მწკრივები შეიძლება წარმოდგენილი იქნენ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} P_n^* &= \sum_m \sum_n A_{mn} (m \cos mx - \sin m)(n \cos ny - \sin n) \\ H^* &= \sum_m \sum_n \frac{a^2}{\eta} B_{mn} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n) \end{aligned} \quad (10)$$

სადაც  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  ჯერჯერობით უცნობი კოეფიციენტებია და განისაზღვრებიან სათანადო შერწყმის პირობებიდან.

შემდგომში ჩანაწერების გამარტივების მიზნით შემოღებულია აღნიშვნები  $\sum_m \sum_n A_{mn} = A_{mn}$ ;  $\sum_m \sum_n B_{mn} = B_{mn}$ .

გამოვთვალოთ  $Q_x$ ,  $M_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_y$  სიდიდეები წინასწორების (7) და (8) განტოლებებიდან (10) ტოლობების გათვალისწინებით

$$\frac{1}{a} \frac{\partial Q_x}{\partial x} = P_n^*$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial Q_x}{\partial x} = A_{mn} (m \cos mx - \sin m)(n \cos ny - \sin n),$$

ინტეგრებით მივიღებთ:

$$Q_x = aA_{mn} (\sin mx - x \sin m)(n \cos ny - \sin n) + C_1(y).$$

$C_1(y)$  საინტეგრაციო ფუნქცია განისაზღვრება სასაზღვრო პირობიდან (6), როცა  $x = \pm 1$ ;  $Q_x = 0$  პირობა გვაძლევს  $C_1(y) = 0$ .

საბოლოოდ

$$Q_x = +aA_{mn} (\sin mx - x \sin m)(n \cos y - \sin n). \quad (11)$$

(11)-ს გათვალისწინებით წონასწორობის განტოლება

$$\frac{1}{a} \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = -\frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial y}.$$

მოგვცემს

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = a^2 (A_{mn} - B_{mn}) (\sin mx - x \sin m)(n \cos y - \sin n),$$

საიდანაც

$$M_x = -a^2 (A_{mn} - B_{mn}) \left( \frac{1}{m} \cos mx + \frac{x^2}{2} \sin m \right) \times \\ \times (n \cos ny - \sin n) + C_2(y).$$

პირობა როცა  $x = \pm 1$ ;  $M_x = M_1$  გვაძლევს

$$C_2(y) = M_1 + a^2 (A_{mn} - B_{mn}) \left( \frac{1}{m} \cos mx + \frac{1}{2} \sin m \right) (n \cos ny - \sin n),$$

საბოლოოდ

$$M_x = M_1 - a^2 (A_{mn} - B_{mn}) f_1(m, x)(n \cos ny - \sin n) \quad (12)$$

სადაც შემოდებულია აღნიშვნა

$$f_1(m, x) = \frac{1}{m} (\cos mx - \cos m) + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \sin m.$$

ანალოგიურად  $Q_y$  და  $M_y$  სიდიდეებისათვის გვექნება

$$\frac{1}{b} \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P_n^*,$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -A_{mn} (m \cos mx - \sin m)(n \cos ny - \sin n),$$

$$Q_y = -\frac{\alpha}{\eta} A_{mn} (m \cos mx - \sin m)(\sin ny - y \sin n) + B_1(x).$$

როცა  $y = \pm 1$ ;  $Q_y = 0 \Rightarrow B_1(x) = 0$

$$Q_y = -\frac{\alpha}{\eta} A_{mn} (m \cos mx - \sin m)(\sin ny - y \sin n), \quad (13)$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = -\frac{1}{a} \frac{\partial H^*}{\partial x};$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = -\frac{a^2}{\eta^2} (A_{mn} + B_{mn}) (m \cos mx - \sin m)(\sin ny - y \sin n).$$

როცა  $y = \pm 1$ ,  $M_y = M_2 \rightarrow \dots$  იხილე შენიშვნებში (პუნქტი 6).

საბოლოოდ

$$M_y = M_2 + \frac{a^2}{\eta^2} (A_{mn} + B_{mn}) f_1(n, y)(m \cos mx - \sin m). \quad (14)$$

$$\text{სადაც } f_1(n, y) = \frac{1}{n} (\cos ny - \cos n) + \frac{1}{2} (y^2 - 1) \sin n.$$

ფიქტიური სისტემების  $T_x$ ,  $T_y$ -ის ჩაღუნვები  $W_x$  და  $W_y$  განისაზღვრებიან ტოლობებიდან

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y),$$

$$\frac{\partial^2 W_y}{\partial y^2} = -\frac{a^2}{D(1-\nu^2)} \left( \frac{M_x}{\eta^2} - \frac{\nu}{\eta^2} M_x \right).$$

$M_x$ -სა და  $M_y$ -ის მნიშვნელობების ჩასმით და ორჯერ გაინტეგრალებით

მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} = & -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left( \frac{1}{\eta} \cos \frac{\pi}{2} y - \nu \cos \frac{\pi}{2} x \right) - \right. \\ & - \left[ (A_{mn} - B_{mn}) f_1(m, x)(n \cos ny - \sin x) + \right. \\ & \left. \left. + (A_{mn} + B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} f_1(n, y)(m \cos mx - \sin m) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} = -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left( \frac{x}{\eta} \cos \frac{\pi}{2} y - \frac{2\nu}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right) - \right.$$



$$- \left[ (A_{mn} - B_{mn}) f_2(m, x) (n \cos ny - \sin x) + (A_{mn} + B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} f_1(n, y) (\sin mx - x \sin m) \right] + C_3(y).$$

როცა  $x=0$ ;  $\frac{\partial W_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow C_3(y) = 0$  (რადგან  $f_2(m, 0) = 0$ )

$$W_x = - \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left( \frac{x^2}{2\eta} \cos \frac{\pi}{2} y - \frac{4\nu}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} x \right) - \left[ (A_{mn} - B_{mn}) f_3(m, x) (n \cos ny - \sin n) + (A_{mn} + B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} f_1(n, y) f_4(m, x) \right] \right\} + C_4(y).$$

$\frac{\partial W_x}{\partial x}$  და  $W_x$  გამოსახულებებში შემავალი ფუნქციებია:

$$f_2(m, x) = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m} \sin mx - x \cos m \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - x \right) \sin m,$$

$$f_3(m, x) = - \frac{1}{m} \left( \frac{1}{m^2} \cos mx - \frac{x^2}{2} \cos m \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} \right) \sin m,$$

$$f_4(m, x) = - \frac{1}{m} \cos mx - \frac{x^2}{2} \sin m.$$

$C_4(y)$  საინტეგრო მუდმივის განსაზღვრის მიზნით გამოვიყენოთ ფილაზე მოქმედი დატვირთვის თავისებურება

როცა  $x = y = 0$  ფილის ცენტრში  $W_x(x, y) \equiv 0$ . მივიღებთ:

$$C_4(y) = \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \frac{4\nu}{\pi^2} (A_{mn} - B_{mn}) \frac{1}{m^3} (n - \sin n) + (A_{mn} + B_{mn}) \frac{1}{m} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos n - \frac{1}{2} \sin n \right) \right\} \frac{1}{2} \sin n.$$

საბოლოოდ

$$W_x = - \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left[ \frac{x^2}{2\eta} \cos \frac{\pi}{2} y + \frac{4\nu}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{2} x - 1 \right) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (A_{mn} - B_{mn}) \left[ f_3(m, x)(n \cos ny - \sin x) + \frac{1}{m^3}(n - \sin n) \right] - \\
& - (A_{mn} + B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} \left[ f_1(n, y) f_4(m, x) + \frac{1}{m} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos n - \frac{1}{2} \sin n \right) \right] \Bigg\}. \quad (15)
\end{aligned}$$

ანალოგიური მსჯელობით  $W_y(x, y)$  ფუნქციისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 W_y}{\partial y^3} &= - \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{\eta^2 M_y} - \frac{\nu}{\eta^2} M_x \right) = \\
&= - \frac{a^2}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left( \frac{1}{\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{\nu}{\eta^3} \cos \frac{\pi}{2} y \right) + \right. \\
&+ (A_{mn} + B_{mn}) \frac{1}{\eta^4} f_1(n, y)(m \cos mx - \sin m) + \\
&+ (A_{mn} + B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} f_1(m, x)(n \cos nx - \sin n) \Bigg\}, \\
\frac{\partial W_y}{\partial y} &= - \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left( \frac{1}{h^2} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{2\nu}{\pi h^3} \sin \frac{\pi}{2} y \right) + \right. \\
&+ (A_{mn} + B_{mn}) \frac{1}{\eta^4} f_2(n, y)(m \cos mx - \sin m) + \\
&+ (A_{mn} - B_{mn}) \frac{1}{\eta^2} f_1(m, x)(\sin ny - y \sin n) \Bigg\} + B_3(x).
\end{aligned}$$

როცა  $y = 0$ ;  $\frac{\partial W_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow B_3(x) = 0$

საბოლოოდ

$$\begin{aligned}
W_y &= - \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left[ \frac{y}{2\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{4\nu}{\pi^2 \eta^3} \left( \cos \frac{\pi}{2} y - 1 \right) \right] + \right. \\
&+ (A_{mn} + B_{mn}) \frac{1}{\eta^4} \left[ f_3(n, y)(m \cos mx - \sin m) + \frac{1}{n^3}(m - \sin m) \right] + \\
&+ (A_{mn} - B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} \left[ f_1(m, x) f_4(n, y) + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \cos m - \frac{1}{2} \sin m \right) \right] \Bigg\}, \quad (16)
\end{aligned}$$

სადაც ზემოთ მოყვანილ გამოსახულებებში შემავალი ფუნქციებია:

$$\begin{cases} f_1(n, y) = \frac{1}{n}(\cos ny - \cos n) + \frac{1}{2}(y^2 - 1)\sin n, \\ f_2(n, y) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin ny - y\cos n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3} - y\right)\sin n, \\ f_3(n, y) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}\cos ny + \frac{y^2}{2}\cos n\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^2}{2}\right)\sin n, \\ f_4(n, y) = \frac{1}{n}\cos ny - \frac{y^2}{2}\sin n. \end{cases}$$

ამრიგად, მოცემული კონკრეტული ამოცანის გადაწყვეტისათვის ზემოთ განსაზღვრული იქნა ყველა საძიებელი გამოსახულება შინაგანი ძალებისათვის  $Q_x, Q_y, M_x, M_y, H$  და გადაადგილებებისათვის  $W_x, W_y, \frac{\partial W_x}{\partial x}, \frac{\partial W_y}{\partial y}$ , რომლებიც შეიცავენ უცნობ სიდიდეებს  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  მუდმივი კოეფიციენტების სახით. ამ უკანასკნელთა განსაზღვრისათვის გამოიყენება ორი იგიური ტოლობა

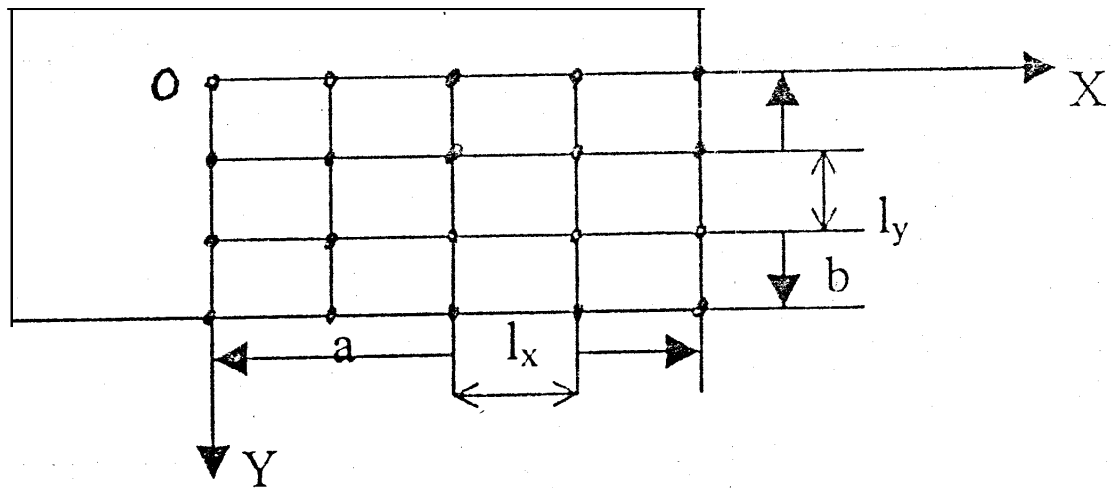
$$\begin{aligned} W_x(x, y) &\equiv W_y(x, y), \\ \frac{1}{ab} \frac{\partial^2 W_x}{\partial x \partial y} &\equiv -\frac{H^*}{D(1-\nu)}. \end{aligned} \tag{17}$$

იგიურ ტოლობათა აღნიშნული სისტემის დასაკმაყოფილებლად გამოიყენება კოლოკაციის ხერხი, რომლის თანახმად  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  საძიებელი მუდმივი სიდიდეების განსაზღვრა დაიყვანება პირველი რიგის ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე, სადაც

$$m = 1, 2, 3, \dots, k; \quad n = 1, 2, 3, \dots, c.$$

ამრიგად მოცემული მეთოდის გამოყენებისას უსასრულო მწკრივების მაგიერ მიიღება სასრული მწკრივები, სადაც სიდიდეების  $k$  და  $c$  დადგენა ხორციელდება ყოველი კონკრეტული ამოცანის გადაწყვეტაში კრებადობის მიღწევის გზით, რისთვისაც სრულდება შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტი თანამედროვე გამოთვლით მანქანაზე კოლოკაციის წერტილების რაოდენობის თანდათანობით  $x$ -ისა და  $y$ -ის მიმართულებებით ზრდის გზით.

მოცემული ამოცანის გადამწყვეტ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა მიიღება (17) იგიური ტოლობათა სისტემიდან მათში  $W_x$ ,  $W_y$  და  $H^*$  სიდიდებისათვის უკვე ცნობილი გამოსახულებების ჩასმის გზით. აღნიშნული გზით მიღებული განტოლებათა სისტემის დაკმაყოფილება ხორციელდება ფილის შუალედი სიბრტყის წინასწარ შერჩეულ დამახასიათებელ წერტილებში, რომლებიც თანაბრად არიან განაწილებულნი განსახილველი ფილის ფარგლებში. აღნიშნული წერტილების დანიშვნისას გაითვალისწინება მოცემული ამოცანის სიმეტრიულობაც. ჩვენს კონკრეტულ შემთხვევაში ისინი აიღებინა ფილის  $\frac{1}{4}$  ნაწილზე (ნახ. 5).



ნახ. 5. კოლოკაციის ხერხი

აღნიშნულის გათვალისწინებით წარმოვადგენთ  $W_x$  და  $W_y$  გამოსახულებები შემდეგი სახით

$$W_x = -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left[ \frac{x^2}{2\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} y - \frac{4\nu}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{2} x - 1 \right) \right] + \right. \\ \left. - (A_{mn} - B_{mn}) f_{mn}^1(x, y) - (A_{mn} + B_{mn}) f_{mn}^2(x, y) \right\},$$

$$W_y = -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ M_0 \left[ \frac{y^2}{2\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{4\nu}{\pi^2 \eta^3} \left( \cos \frac{\pi}{2} y - 1 \right) \right] + \right.$$

$$+ (A_{mn} - B_{mn})f_{mn}^3(x, y) + (A_{mn} + B_{mn})f_{mn}^4(x, y) \}.$$

სადაც

$$f_{mn}^1(x, y) = f_3(m, x)((n \cos ny - \sin n) + \frac{1}{m^3}(n - \sin n),$$

$$f_{mn}^2(x, y) = \left[ f_1(n, y)f_4(m, x) + \frac{1}{m} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos n - \frac{1}{2} \sin n \right) \right] \frac{\nu}{\eta^2},$$

$$f_{mn}^3(x, y) = \frac{\nu}{\eta^2} \left[ f_1(n, y)f_4(n, x) + \frac{1}{n} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \cos m - \frac{1}{2} \sin m \right) \right],$$

$$f_{mn}^4(x, y) = \frac{\nu}{\eta^4} \left[ f_3(n, y)(m \cos mx - \sin m) + \frac{1}{n^3}(m - \sin m) \right].$$

შერწყმის I პირობა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} W_x &\equiv W_y, \\ A_{mn} [f_{mn}^1(x, y) + f_{mn}^2(x, y) + f_{mn}^3(x, y) + f_{mn}^4(x, y)] + \\ &+ B_{mn} [f_{mn}^4(x, y) + f_{mn}^3(x, y) - f_{mn}^2(x, y) - f_{mn}^1(x, y)] = \\ &= \left[ \frac{x^2}{2\eta} \cos \frac{\pi}{2} y + \frac{4\nu}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{2} x - 2 \right) - \frac{y^2}{2\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} x + \frac{4\nu}{\pi^2 \eta^3} \left( \cos \frac{\pi}{2} y - 2 \right) \right] M_0, \end{aligned}$$

ანუ

$$\sum_m^k \sum_n^c [ \Phi_{mi}^{II}(A) A_{mn} + \Phi_{mi}^I(B) B_{mn} ] = \Phi^I(q) M_0.$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნები

$$\Phi_{mn}^I(A) = f_{mn}^4(x, y) + f_{mn}^3(x, y) + f_{mn}^2(x, y) + f_{mn}^1(x, y),$$

$$\Phi_{mn}^I(B) = f_{mn}^4(x, y) + f_{mn}^3(x, y) - f_{mn}^2(x, y) - f_{mn}^1(x, y),$$

$$\Phi^I(q) = \frac{x^2}{2\eta} \cos \frac{\pi}{2} y + \frac{4\nu}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{2} y - 2 \right) - \frac{y^2}{2\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{4\nu}{\pi^2 \eta^3} \left( \cos \frac{\pi}{2} y - 2 \right),$$

შევადგინოთ შერწყმის II პირობა:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = - \frac{a^2}{D(1-\nu^2)} \frac{1+\nu}{\eta} H^*$$

ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = - \frac{a^2}{D(1-\nu^2)} [ -M_0 \cdot \Phi''(q) + A_{mn} \cdot \Phi''(A) + B_{mn} \Phi''(B) ]$$

გამოვთვალოთ  $\frac{\partial^2 W_x}{\partial x \partial y}$ .

(15) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial x \partial y} = \frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left[ M_0 \cdot \frac{\pi x}{2\eta} \sin \frac{\pi}{2} y - (A_{mn} - B_{mn}) d_2(m, x) m^2 \sin ny - (A_{mn} + B_{mn}) \frac{\nu}{\eta^2} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n) \right].$$

რადგან  $H = B_{mn} \frac{a^2}{\eta} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n)$ , ამიტომ შერწყმის

II პირობა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi x}{2\eta} \sin \frac{\pi}{2} y - (A_{mn} - B_{mn}) f_2(m, x) n^2 \sin ny + (A_{mn} + B_{mn}) \times \\ & \times \frac{\nu}{\eta^2} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n) + \\ & + B_{mn} \frac{1+\nu}{\eta^2} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n) \end{aligned}$$

ანუ გარკვეული გარდაქმნებისა და აღნიშვნების შემოტანის შედეგად მივიღებთ შერწყმის II პირობის შესაბამის ალგებრულ განტოლებას:

$$\sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^c [\Phi_{mn}''(A) A_{mn} + \Phi_{mn}''(B) B_{mn}] = \Phi''(q) M_0,$$

სადაც

$$\Phi_{mn}''(A) = \frac{\nu}{\eta^2} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n) + n^2 \sin ny f_2(m, x),$$

$$\Phi_{mn}''(B) = - \left[ \frac{1}{\eta^2} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n) + n^2 \sin ny f_2(m, x) \right],$$

$$\Phi_{mn}''(q) = \frac{\pi x}{2\eta} \sin \frac{\pi}{2} y.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მიიღება ფიქტიურ სისტემათა  $T_x$ ,  $T_y$  შერწყმის ორი იგიური ტოლობა, რომელთა დახმარებით შედგენილია ალგებრულ განტოლებათა სისტემა  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  უცნობი კოეფიციენტების დასადგენად (ცხრილი 1).

ალგებრულ განტოლებათა სისტემა  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  უცნობი  
კოეფიციენტებისათვის

| $A_{mn}$         | $B_{mn}$         | $M_0$       |
|------------------|------------------|-------------|
| $\Phi'_{mn}(A)$  | $\Phi'_{mn}(B)$  | $\Phi'(q)$  |
| $\Phi''_{mn}(A)$ | $\Phi''_{mn}(B)$ | $\Phi''(q)$ |

ცხრილი 1 იძლევა ამოცანის გადამწყვეტ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, საიდანაც განისაზღვრებიან სამიებული კოეფიციენტები  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$ , ხოლო ამ უკანასკნელთა გათვალისწინებით სამიებული სიდიდეების ანალიზური გამოსახულებები:

$$P_n^* = M_0 \sum_m \sum_n A_{mn} (m \cos mx - \sin m)(n \sin ny - \sin n),$$

$$H^* = M_0 \frac{a^2}{\eta} \sum_m \sum_n B_{mn} (\sin mx - x \sin m)(\sin ny - y \sin n),$$

$$Q_x = M_0 a \sum_m \sum_n A_{mn} (\sin mx - x \sin m)(n \cos ny - \sin n),$$

$$Q_y = -M_0 \frac{a}{\eta} \sum_m \sum_n A_{mn} (m \cos x - \sin m)(\sin ny - y \sin n),$$

$$M_x = a^2 M_0 \left[ \frac{1}{\eta} \cos \frac{\pi}{2} y - \sum_m \sum_n (A_{mn} - B_{mn}) f_1(m, n)(n \cos ny - \sin n) \right],$$

$$M_y = a^2 M_0 \left[ \cos \frac{\pi}{2} x - \sum_m \sum_n (A_{mn} + B_{mn}) \frac{1}{\eta^2} f_1(n, y)(m \cos mx - \sin m) \right].$$

$$W_x = -\frac{a^4}{D(1-v^2)} \left\{ M_0 \left[ \frac{x^2}{2\eta^2} \cos \frac{\pi}{2} y - \frac{4v}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{2} x - 1 \right) \right] - \right.$$

$$\left. - (A_{mn} - B_{mn}) f'_{mn}(x, y) - (A_{mn} + B_{mn}) f''_{mn}(x, y) \right\} = W_y = W.$$

მიღებული მათემატიკური ალგორითმისათვის შედგენილია პროგრამა (იხ. დანართი PROGRAM Gx70), რომლის კომპიუტერზე რეალიზაციის შედეგები მოყვანილია ქვემო მოცემულ ცხრილში.

თავისუფლად დაყრდნობილი ფილა

|       |  |         |         |         |         |         |         |   |
|-------|--|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---|
| y \ x |  | P       |         |         |         |         |         |   |
|       |  | 0       | 0,2     | 0,4     | 0,6     | 0,8     | 1       |   |
| ric1  |  | η=1     |         |         |         |         |         |   |
| 0     |  | -0,5006 | -0,4889 | -0,4536 | -0,3953 | -0,3186 | -0,2385 | 0 |
| 0,2   |  | -0,5114 | -0,4996 | -0,4641 | -0,4051 | -0,3247 | -0,2258 | 0 |
| 0,4   |  | -0,5468 | -0,5355 | -0,4999 | -0,437  | -0,3454 | -0,229  | 0 |
| 0,6   |  | -0,6051 | -0,5955 | -0,5636 | -0,4997 | -0,3904 | -0,235  | 0 |
| 0,8   |  | -0,6778 | -0,6727 | -0,6521 | -0,6079 | -0,5033 | -0,1549 | 0 |
| 1     |  | -0,7963 | -0,8126 | -0,8064 | -0,7741 | -0,8166 | -0,4649 | 0 |

ცხრილი 2-ის გაგრძელება

|       |  |     |         |         |         |         |         |
|-------|--|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| y \ x |  | H   |         |         |         |         |         |
|       |  | 0   | 0,2     | 0,4     | 0,6     | 0,8     | 1       |
|       |  | η=1 |         |         |         |         |         |
| 0     |  | 0   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 0,2   |  | 0   | -0,0144 | -0,0284 | -0,0417 | -0,0537 | -0,0639 |
| 0,4   |  | 0   | -0,0284 | -0,0563 | -0,0827 | -0,1068 | -0,1273 |
| 0,6   |  | 0   | -0,0417 | -0,0827 | -0,122  | -0,1582 | -0,1891 |
| 0,8   |  | 0   | -0,0537 | -0,1068 | -0,1583 | -0,2066 | -0,2482 |
| 1     |  | 0   | -0,0636 | -0,1267 | -0,1883 | -0,2474 | -0,2984 |

|       |  |     |         |         |         |         |         |
|-------|--|-----|---------|---------|---------|---------|---------|
| y \ x |  | Qx  |         |         |         |         |         |
|       |  | 0   | 0,2     | 0,4     | 0,6     | 0,8     | 1       |
|       |  | η=1 |         |         |         |         |         |
| 0     |  | 0   | -0,1007 | -0,206  | -0,3207 | -0,4491 | -0,5936 |
| 0,2   |  | 0   | -0,0985 | -0,2017 | -0,3144 | -0,4411 | -0,5858 |
| 0,4   |  | 0   | -0,0914 | -0,1874 | -0,2932 | -0,4145 | -0,5568 |
| 0,6   |  | 0   | -0,0796 | -0,1633 | -0,2563 | -0,3665 | -0,5033 |
| 0,8   |  | 0   | -0,0648 | -0,132  | -0,2055 | -0,2925 | -0,4198 |
| 1     |  | 0   | -0,0395 | -0,0766 | -0,1191 | -0,1608 | -0,2149 |



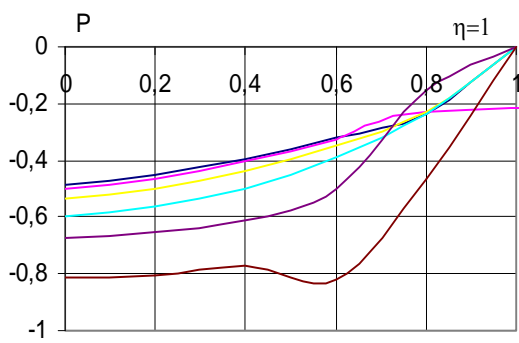
| y \ x                                     | 0       | 0,2     | 0,4     | 0,6     | 0,8     | 1       |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Qy <span style="float: right;">η=1</span> |         |         |         |         |         |         |
| 0   | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 0,2                                       | -0,1008 | -0,0985 | -0,0914 | -0,0797 | -0,0641 | -0,0467 |
| 0,4                                       | -0,2062 | -0,2015 | -0,1873 | -0,1635 | -0,1308 | -0,0915 |
| 0,6                                       | -0,3211 | -0,3143 | -0,2933 | -0,2566 | -0,2038 | -0,1389 |
| 0,8                                       | -0,4492 | -0,4408 | -0,4143 | -0,3664 | -0,2913 | -0,1786 |
| 1   | -0,595  | -0,5873 | -0,5582 | -0,5036 | -0,4182 | -0,2232 |

ცხრილი 2-ის გაგრძელება

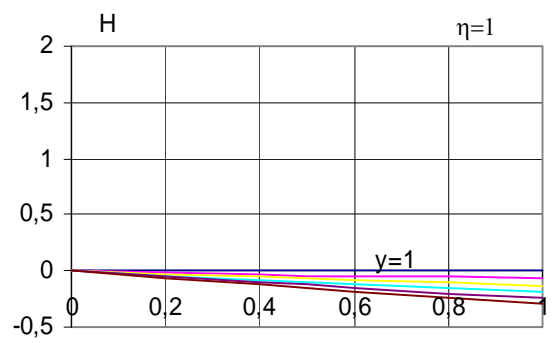
| x \ y                                     | 0      | 0,2     | 0,4    | 0,6    | 0,8     | 1 |
|---|--------|---------|--------|--------|---------|---|
| Mx <span style="float: right;">η=1</span> |        |         |        |        |         |   |
| 0   | 0,1031 | 0,1003  | 0,0912 | 0,0739 | 0,045   | 0 |
| 0,2                                       | 0,0989 | 0,0962  | 0,0876 | 0,0712 | 0,0435  | 0 |
| 0,4                                       | 0,0862 | 0,084   | 0,0768 | 0,0628 | 0,0389  | 0 |
| 0,6                                       | 0,0652 | 0,0636  | 0,0585 | 0,0485 | 0,0308  | 0 |
| 0,8                                       | 0,0363 | 0,0355  | 0,0328 | 0,0277 | 0,0183  | 0 |
| 1   | 0,0001 | -0,0001 | 0      | 0      | -0,0001 | 0 |

| x \ y                                     | 0      | 0,2    | 0,4    | 0,6    | 0,8    | 1       |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| My <span style="float: right;">η=1</span> |        |        |        |        |        |         |
| 0   | 0,1032 | 0,0989 | 0,0862 | 0,0652 | 0,0363 | 0,0001  |
| 0,2                                       | 0,1003 | 0,0962 | 0,084  | 0,0636 | 0,0355 | -0,0001 |
| 0,4                                       | 0,0912 | 0,0876 | 0,0768 | 0,0585 | 0,0328 | 0       |
| 0,6                                       | 0,0739 | 0,0712 | 0,0628 | 0,0485 | 0,0277 | 0       |
| 0,8                                       | 0,045  | 0,0435 | 0,0389 | 0,0308 | 0,0183 | -0,0001 |
| 1   | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0       |

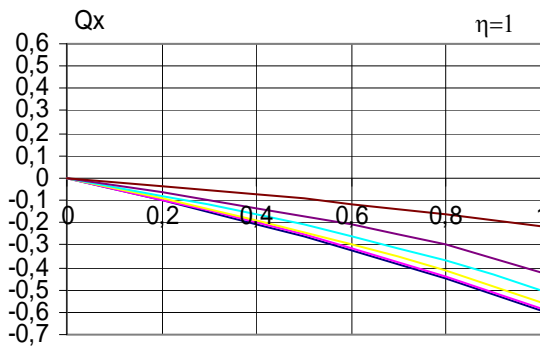
| x \ y                                    | 0      | 0,2    | 0,4    | 0,6    | 0,8    | 1 |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| W <span style="float: right;">η=1</span> |        |        |        |        |        |   |
| 0  | 0,0318 | 0,0304 | 0,0262 | 0,0193 | 0,0103 | 0 |
| 0,2                                      | 0,0304 | 0,029  | 0,025  | 0,0184 | 0,0099 | 0 |
| 0,4                                      | 0,0262 | 0,025  | 0,0215 | 0,0159 | 0,0085 | 0 |
| 0,6                                      | 0,0193 | 0,0184 | 0,0159 | 0,0118 | 0,0063 | 0 |
| 0,8                                      | 0,0103 | 0,0099 | 0,0085 | 0,0063 | 0,0034 | 0 |
| 1  | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      | 0 |



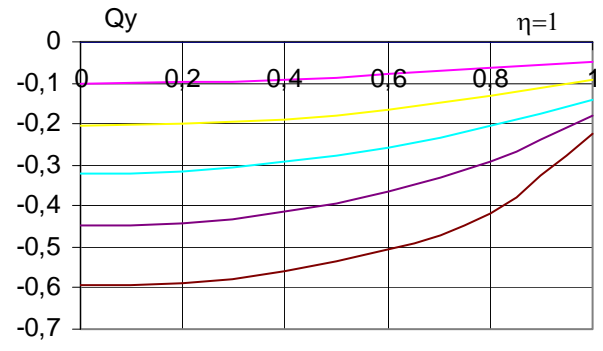
б.б. 6



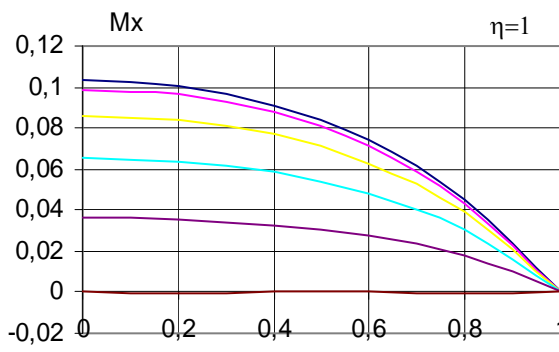
б.б. 7



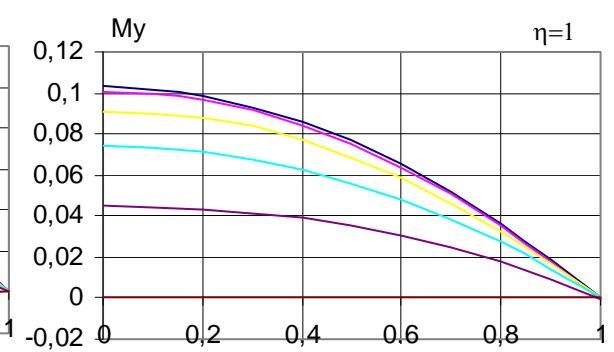
ნახ. 8



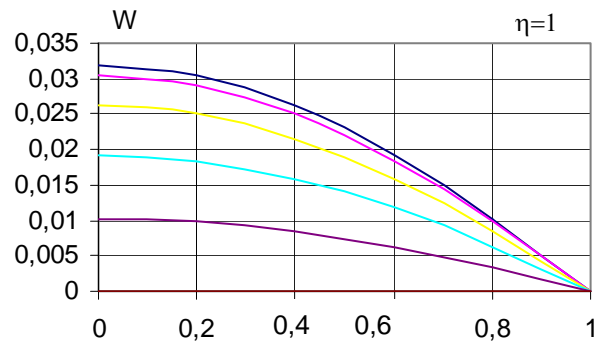
ნახ. 9



ნახ. 10



ნახ. 11

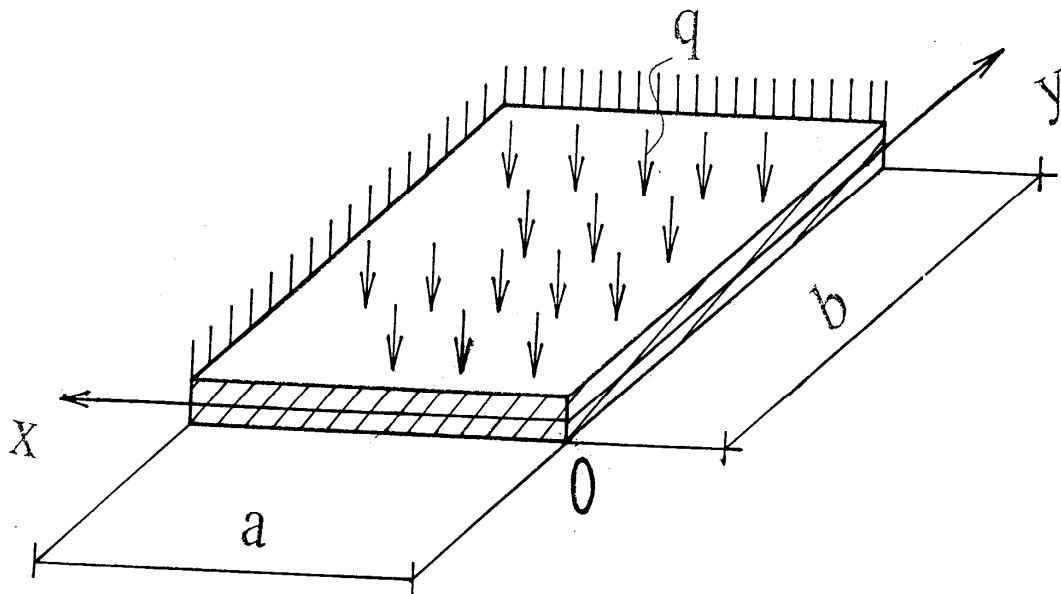


ნახ. 12. თავისუფლად დაყრდნობილი ფილის დიაგრამა

2.1.2.2. ორი მიმდებარე გვერდით ხისტად ჩამაგრებული ფილის ღუნვის ამოცანის გადაწყვეტა სასაზღვრო პირობების ზუსტად დაკმაყოფილების შემთხვევაში

განვიხილით თხელი მართკუთხა ფილის ღუნვის ამოცანა. ფილის ორი მოსაზღვრე გვერდი თავისუფალია დანარჩენი ორი კი ჩამაგრებულია ხისტად (ნახ. 13). ფილა განიცდის განაწილებული დატვირთვის ქმედებას. თუ კოორდინატთა სათავეს მოვათავსებთ თავისუფალი გვერდების გადაკვეთის წერტილში მაშინ სასაზღვრო პირობები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad M_x = 0, \quad Q_x = 0, \quad H = 0, \\
 x = 1, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
 y = 0, \quad M_y = 0, \quad Q_y = 0, \quad H = 0, \\
 y = 1, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$



ნახ. 13. ორი მიმდებარე გვერდით ხისტად ჩამაგრებული ფილა თანაბრად განაწილებული დატვირთვით

აქ  $x$  და  $y$  უგანზომილებო კოორდინატებია, რომლებიც დაკავშირებულია განზომილებიან  $\bar{x}$  და  $\bar{y}$  კოორდინატებთან

შემდეგნაირად:  $x = \bar{x}/a$ ,  $y = \bar{y}/b$ , სადაც  $a$  და  $b$  ფილის ზომებია,  $h$  მისი სისქეა, ხოლო  $\eta = a/b$ .

შევნიშნოთ, რომ კლასიკური სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში ორი პირობა  $x = 0$ , გვერდის გასწვრივ  $Q_x = 0$  და  $H = 0$ , წარმოდგენილია ერთით პირობითად  $Q_x - \frac{\partial H}{b\partial y} = 0$ , ხოლო  $y = 0$ , გვერდის გასწვრივ  $Q_x - \frac{\partial H}{a\partial x} = 0$ . ძნელი არაა იმის დანახვა, რომ თუ  $H$  ნულია  $x = 0$  გვერდის გასწვრივ, მაშინ ნულის ტოლი იქნება იგივე გვერდის გასწვრივ  $\frac{\partial H}{b\partial y}$ -იც და მაშასადამე  $Q_x$ -იც. რითაც შესრულებული იქნება რეალურისასაზღვრო პირობები  $x=0$ , გვერდის გასწვრივ. იგივე მდგომარეობაა  $y = 0$  გვერდის გასწვრივაც. ასე, რომ ამოცანის გადაწყვეტისას ჩვენ შეიძლება ვისარგებლოთ კლასიკური პირობებით:  $Q_x - \frac{\partial H}{b\partial y} = 0$  და  $Q_x - \frac{\partial H}{a\partial x} = 0$ . გამოვიყენოთ დასმული ამოცანის გადაწყვეტისას ი.ლუდუშაურის მეთოდი. საინტერპოლაციო კონკრეტული ფუნქციების შერჩევისას თუ  $H$ -ს ავიღებთ ისეთს, რომ  $x=0$ , და  $y=0$ , გვერდების გასწვრივ იქნება ნულის ტოლი, მაშინ მივიღებთ რეალურ სამ სასაზღვრო პირობას.

აქვე საჭიროა აღინიშნოს ის გარემოებაც, რომ კლასიკური მეთოდებით ფილის ღუნვის ამოცანის ამოხსნა, როცა ერთი გვერდი მაინც თავისუფალია, მოითხოვს სხვადასხვა ამონახსნთა კომბინაციის აგებას. მაგ. სამი გვერდით ხისტად ჩამაგრებული და ერთი გვერდით თავისუფალი ფილის შემთხვევაში ამონახსნი წარმოდგენილია სამი ამონახსნის ჯამის სახით, რომელთაგან თითოეული ცალცალკე აკმაყოფილებს გარკვეულ სასაზღვრო პირობებს. რაც შეეხება ორი მოსაზღვრე თავისუფალი გვერდის შემთხვევას ის საერთოდ არ არის მოყვანილი ლიტერატურაში. რაც შეეხება ანგარიშში გამოყენებულ მეთოდს [16], იგი ერთნაირი მიდგომით წარმატებით ხსნის ნებისმიერ

სასაზღვრო პირობების შემთხვევას. ამ მეთოდის შესაბამისად ფილის ფიქტიური სისტემების წონასწორობის განტოლებებს აქვს შემდეგი სახე:

$T_x$  ფიქტიური სისტემისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{q}{2} - P_n &= 0, \\ \frac{1}{a} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x. \end{aligned} \quad (20)$$

$T_y$  ფიქტიური სისტემისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{q}{2} + P_n &= 0, \\ \frac{1}{b} \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial x} &= Q_y. \end{aligned} \quad (21)$$

სადაც  $P_n$  ფიქტიურ სისტემებს შორის ურთიერთქმედების ძალებია;  $Q_x$  და  $Q_y$  – განივი ძალებია;  $M_x$  და  $M_y$  მღუნავი მომენტებია, ხოლო  $H$  მგრები მომენტი.

როგორც ვხედავთ განაწილებული დატვირთვა თანაბრადაა გადანაწილებული ფიქტიურ სისტემებს შორის, რამაც ხელი უნდა შეუწყოს ამონახსნების მიღებას რიცხვითი რეალიზაციის დროს.

მეთოდის შესაბამისად ფიქტიურ სისტემათა ურთიერთმოქმედების ძალები და მგრები მომენტი წარმოვადგინოთ უცნობი კოეფიციენტების მქონე საინტერპოლაციო ფუნქციების ჯამის სახით:

$$P_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{mn} \varphi_1(x) \varphi_2(y) = A_{mn} \varphi_1(x) \varphi_2(y) \quad (22)$$

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{mn} \frac{a^2}{\eta} \varphi_3(x) \varphi_4(y) = B_{mn} \frac{a^2}{\eta} \varphi_3(x) \varphi_4(y), \quad (23)$$

სადაც  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  აღნიშნავენ შესაბამისად გამოსახულებებს  $\sum_m \sum_n A_{mn} = A_{mn}$ ,  $\sum_m \sum_n B_{mn} = A_{mn}$ , ხოლო  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(y)$ ,  $\varphi_3(x)$  და  $\varphi_4(y)$   $x$ -სა და  $y$ -ის მიმართ არა ტრიგონომეტრიული, არამედ ჩვეულებრივი ალგებრული ფუნქციებია,

(22) და (23)-ის გათვალისწინებით (20) და (21) წონასწორობის განტოლებებიდან იმის გათვალისწინებით, რომ  $q(x, y) = q = const$ , გვექნება:

$$Q_x = -\frac{qax}{2} + a\bar{A}_{mn}\bar{\varphi}_1(x)\varphi_2(y) + C_1(y),$$

სადაც  $\bar{\varphi}_1(x)$  აღნიშნავს ინტეგრალს  $\varphi_1(x)$  ფუნქციიდან.

დავაკმაყოფილოთ პირობა  $x=0$   $Q_x - \frac{\partial H}{b\partial y} = 0$  მივიღებთ:

$$Q_x = -\frac{qax}{2} + A_{mn}a\varphi_{10}(x)\varphi_1(y) = aB_{mn}\varphi_3(0)\varphi_4'(y), \quad (24)$$

სადაც

$$\varphi_{10}(x) = \varphi_1(x) - \bar{\varphi}_1(0).$$

(23) და (24) შევიტანოთ (20)-ის განტოლებაში და გავაინტეგრროთ  $x$ -ით, გვექნება

$$M_x = -\frac{qa^2x^2}{4} + \bar{A}_{mn}a^2[\varphi_1(x) - x\bar{\varphi}_1(0)]\varphi_2(y) + a^2\bar{B}_{mn}[x\varphi_3(0) + \bar{\varphi}_3(x)]\varphi_4'(y) + C_2(y),$$

სასაზღვრო პირობა  $x=0$   $M_x = 0$  მოგვცემს:

$$M_x = -\frac{qa^2x^2}{4} + \bar{A}_{mn}a^2f_1(x)\varphi_2(y) + a^2\bar{B}_{mn}f_2(x)\varphi_4'(y), \quad (25)$$

სადაც

$$f_1(x) = \bar{\varphi}_1(x) - \bar{\varphi}_1(0) - x\bar{\varphi}_1(0)$$

$$f_2(x) = \bar{\varphi}_3(x) - \bar{\varphi}_3(0) - x\varphi_3(0).$$

გავაინტეგრროთ ეხლა განტოლებათა სისტემა  $T_y$  ფიქტიური სისტემისათვის. (21) სისტემის პირველი განტოლების ინტეგრება სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მოგვცემს:

$$Q_y = -\frac{qby}{2} - \bar{A}_{mn}b\varphi_{20}(y)\varphi_1(x) + \frac{a}{\eta}\bar{B}_{mn}\varphi_3'(x)\varphi_4(0), \quad (26)$$

სადაც  $\varphi_{20}(y) = \bar{\varphi}_2(y) - \bar{\varphi}_2(0)$

ანალოგიურად (21)-ის მეორე განტოლებიდან  $y = 0 \quad M_y = 0$

პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$M_y = -\frac{qa^2 y^2}{4\eta^2} - \bar{A}_{mn} \frac{a^2}{\eta^2} f_3(y)\varphi_1(x) + \bar{B}_{mn} \frac{a^2}{\eta^2} \varphi_3'(x)\varphi_4(y), \quad (27)$$

სადაც

$$f_3(y) = \bar{\varphi}_2(y) - \bar{\varphi}_2(0) - y\bar{\varphi}_2'(0),$$

$$f_4(y) = \bar{\varphi}_4(y) - \bar{\varphi}_4(0) - y\bar{\varphi}_4'(0).$$

განვსაზღვროთ ეხლა ჩალუნვები  $T_x$  ფიქტიურ სისტემისათვის იგი აღვნიშნოთ  $W_1$  -ით,  $T_y$  სისტემისათვის კი  $W_2$  -ით. მაშინ ჰუკის კანონის საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ [9]:

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y), \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial y^2} = -\frac{b^2}{D(1-\nu^2)} (M_y - \nu M_x), \quad (29)$$

სადაც  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  ცილინდრული სიხისტეა,  $E$  იუნგის მოდულია,  $\nu$  კი

პუასონის კოეფიციენტი.

(28)-ში შევიტანოთ  $M_x$  და  $M_y$  -ს გამოსახულებანი (25) და (27)-ის მიხედვით და გავაინტეგრროთ  $x$ -ით. გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial x} = & -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ \bar{A}_{mn} \left[ \bar{f}_1(x)\varphi_2(y) + \frac{\nu}{\eta^2} f_3(y)\bar{\varphi}_1(x) \right] + \right. \\ & \left. + \bar{B}_{mn} \left[ \bar{f}_2(x)\bar{\varphi}_4(y) - \frac{\nu}{\eta^2} \varphi_3(x)f_4(y) \right] - \frac{q}{4} \left( \frac{x^2}{3} - \frac{\nu y^2}{\eta^2} x \right) \right\} + C_5(y). \end{aligned}$$

ხისტ ჩამაგრებაში ( $x=1$ ) მობრუნების კუთხის ნულთან ტოლობის

პირობა  $\left( \frac{\partial W_1}{\partial x} = 0 \right)$  მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial x} = & -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} \left\{ \bar{A}_{mn} \left[ f_{011x}\varphi_2(y) + \frac{\nu}{\eta^2} f_3(y)F_{i011x}(x) \right] + \right. \\ & \left. + \bar{B}_{mn} \left[ f_{021x}(x)\varphi_4'(y) - \frac{\nu}{\eta^2} \varphi_{03x}f_4(y) \right] - \frac{q}{4} \left( \frac{x^3-1}{3} - \frac{\nu y^2}{\eta^2}(x-1) \right) \right\} \end{aligned}$$



სადაც

$$f_{011x} = f_1(x) - f_1(1)$$

$$F_{011x} = \varphi_1(x) - \varphi_1(1)$$

$$f_{021x} = f_2(x) - f_2(1)$$

$$\varphi_{03x} = \varphi_3(x) - \varphi_3(1).$$

კიდევ ერთხელ გაინტეგრება და  $x=1$   $W_1 = 0$  პირობის დაკმაყოფილებით მივიღებთ:

$$W_1 = -\frac{a^4}{D(1-v^2)} \left\{ \bar{A}_{mn} \left[ f_5(x)\varphi_2(y) + \frac{v}{\eta^2} f_3(y)f_6(x) \right] + \right. \\ \left. + \bar{B}_{mn} \left[ f_7(x)\varphi_4'(y) - \frac{v}{\eta^2} f_8(x)f_4(y) \right] - \frac{q}{4} \left( \frac{x^4 - 4x + 3}{12} - \frac{vy^2(x-1)^2}{\eta^2 \cdot 2} \right) \right\} \quad (30)$$

სადაც

$$f_5(x) = \bar{f}_1(x) - \bar{f}_1(1) - (x-1)\bar{f}_1(1),$$

$$f_6(x) = \bar{\varphi}_1(x) - \bar{\varphi}_1(1) - (x-1)\bar{\varphi}_1(1),$$

$$f_7(x) = \bar{f}_2(x) - \bar{f}_2(1) - (x-1)\bar{f}_2(1),$$

$$f_8(x) = \bar{\varphi}_1(x) - \bar{\varphi}_3(1) - (x-1)\varphi_3(1).$$

ანალოგიურად (29) განტოლების ინტეგრირებისა და სასაზღვრო პირობების  $y=1$   $\frac{\partial W_2}{\partial y} = 0$  და  $W_2 = 0$  დაკმაყოფილებით გვექნება

$$\frac{\partial W_2}{\partial y} = -\frac{a^4}{D(1-v^2)\eta^2} \left\{ -\bar{A}_{mn} \left[ f_{031y}\varphi_1(x) + vf_1(x)F_{i021y} \right] + \right. \\ \left. + \bar{B}_{mn} \left[ \frac{1}{\eta^2} \varphi_3'(x)f_{041y} - vf_2F_{i04y} \right] - \frac{q}{4} \left( \frac{y^3 - 1}{3\eta^2} - vx^2(y-1) \right) \right\},$$

$$W_2 = -\frac{a^4}{D(1-v^2)\eta^2} \left\{ -\bar{A}_{mn} \left[ \frac{1}{\eta^2} f_9(y)\varphi_1(x) + vf_1(x)f_{i0}(y) \right] + \right.$$

$$+ \bar{B}_{mn} \left[ \frac{1}{\eta^2} \varphi_3'(x) f_{11}(y) - \nu f_2(x) f_{12}(y) \right] - \frac{q}{4} \left( \frac{y^3 - 4y + 3}{12\eta^2} - \nu x^2 \frac{\nu x^2 (y-1)^2}{2} \right) \Bigg\}, \quad (31)$$

სადაც

$$g_{031y} = \bar{f}_3(y) - \bar{f}_3(1),$$

$$F_{i021y} = \bar{\varphi}_2(y) - \bar{\varphi}_2(1),$$

$$f_{041y} = \bar{f}_4(y) - \bar{f}_4(1),$$

$$F_{i04y} = \varphi_4(y) - \varphi_4(1),$$

$$f_9(y) = \bar{\bar{f}}_3(y) - \bar{\bar{f}}_3(1) - (y-1)\bar{f}_3(1),$$

$$f_{10}(y) = \bar{\bar{\varphi}}_2(y) - \bar{\bar{\varphi}}_2(1) - (y-1)\varphi_2(1),$$

$$f_{11}(y) = \bar{\bar{f}}_4(y) - \bar{\bar{f}}_4(1) - (y-1)\bar{f}_4(1),$$

$$f_{12}(y) = \bar{\varphi}_4(y) - \bar{\varphi}_4(1) - (y-1)\varphi_4(1).$$

ამგვარად,  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  მუდმივების სიზუსტით, განსაზღვრულია როგორც ძალები და მომენტები, ასევე გადაადგილებებიც. ამავე დროს სასაზღვრო პირობებთან ერთად დაკმაყოფილებულია ყველა სტატიკური, ფიზიკური და გეომეტრიული დამოკიდებულება გარდა ერთისა:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -\frac{ab}{D(1-\nu)} H. \quad (32)$$

ამასთანავე ცხადია, რომ ორივე ფიქტიური სისტემისათვის მიღებული გადაადგილებები  $W_1$  და  $W_2$  უნდა იყვნენ იგივეურად ტოლი:  $W_1 \equiv W_2$ .

(30) და (31) დამოკიდებულებები გამოვიყენოთ  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  მუდმივების განსაზღვრისათვის. (30) და (31) საფუძველზე მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{mn} \left[ f_5(x) \varphi_2(y) + \frac{\nu}{\eta^2} f_3(y) f_6(x) + \frac{1}{\eta^4} f_9(y) \varphi_1(x) + \nu \frac{f_1(x)}{\eta^2} f_{10}(y) \right] + \\ & + \bar{B}_{mn} \left[ f_7(x) \varphi_2'(y) + \frac{\nu}{\eta^2} f_8(x) f_6(y) - \frac{1}{\eta^4} \varphi_3''(x) f_{11}(y) + \nu \frac{f_2(x)}{\eta^2} f_{12}(y) \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{q}{4}\left[\frac{x^4-4x+3}{12}-\frac{vy^2(x-1)^2}{\eta^2}-\frac{y^4-4y+3}{12\eta^4}+\frac{vx^2(y-1)^2}{2\eta^2}\right]=0. \quad (33)$$

რაც შეეხება (32)-ს მასში (30) და (23) გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{mn}\left[f_5'(x)\varphi_2'(y)+\frac{v}{\eta^2}f_3'(y)f_6'(x)\right]+ \\ & \bar{B}_{mn}\left[f_7'(x)\varphi_4''(y)-\frac{v}{\eta^2}f_8'(x)f_4'(y)-\frac{1+v}{\eta^2}\varphi_3(x)\varphi_2(y)\right]-q\frac{vy(x-1)}{2\eta^2}=0. \end{aligned} \quad (34)$$

შევნიშნოთ, რომ (31)-ის და (32)-ის დაკმაყოფილება შესაძლებელია სხვა გზითაც, რაც შეიძლება ხელსაყრელი აღმოჩნდეს ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის დროს. ეს გზა მდგომარეობს შემდეგში: (32) განვიხილოთ როგორც დიფერენციალური განტოლება და გავაინტეგრიროთ იგი ჯერ  $x$ -ით და მერე  $y$ -ით (ან პირიქით). მივიღებთ  $W$ -ს გამოსახულებას, რომელიც იგივეურად ტოლი უნდა იყოს როგორც  $W_1$ -ის, ასევე  $W_2$ -ის. მაშინ იგივეური ტოლობები ჩაიწერება უკვე შემდეგნაირად:

$$W_1 \equiv W \quad \text{და} \quad W_2 \equiv W. \quad (35)$$

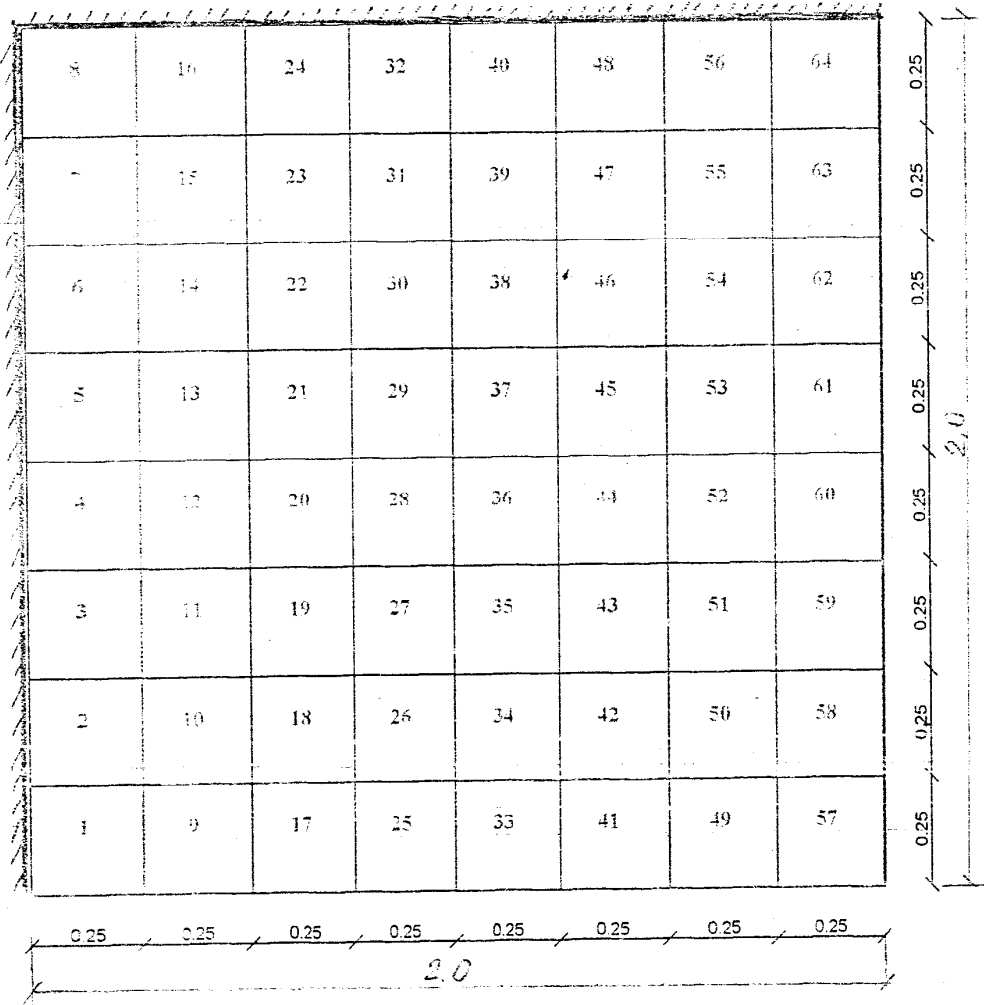
$$(32)\text{-ის } y\text{-ით გაინტეგრებითა და } y=1 \quad \frac{\partial W}{\partial x}=0 \quad \text{პირობის}$$

დაკმაყოფილებით, რაც ფაქტიურად  $y=1$  გვერდის გასწვრივ  $W$ -ს ნულთან ტოლობის ტოლფასია. მივიღებთ:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{a^4}{D(1-\nu)\eta^2} \bar{B}_{mn} \varphi_3(x) [\bar{\varphi}_4(y) - \bar{\varphi}_4(1)].$$

კონკრეტული ამოცანა ამოხსნილია როგორც ანალიზურად, ასევე რიცხვითი გზით, პროგრამული კომპლექსის «ლირა-ვინდოუსის» გამოყენებით.

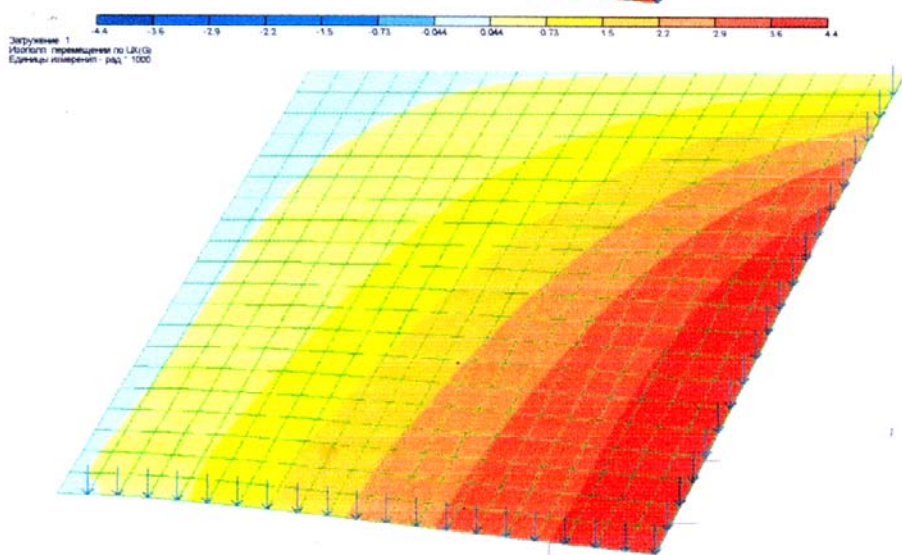
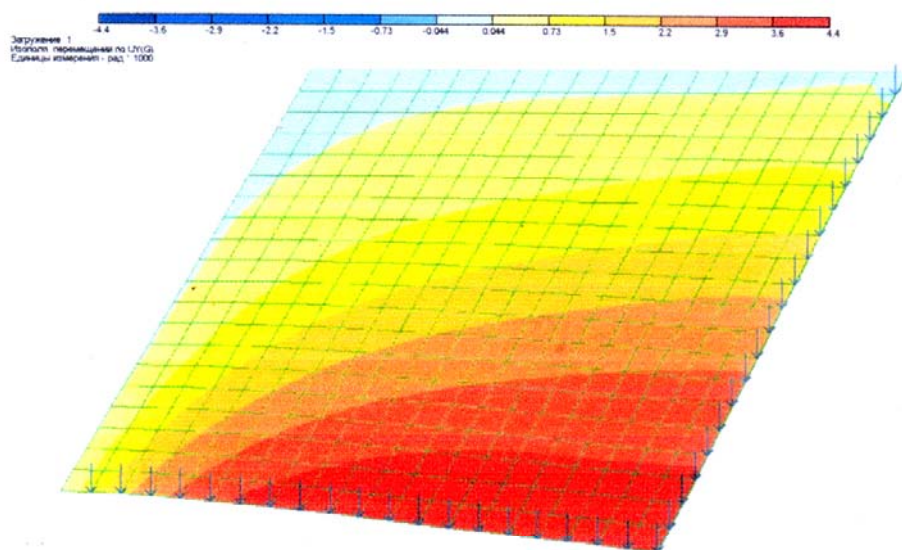
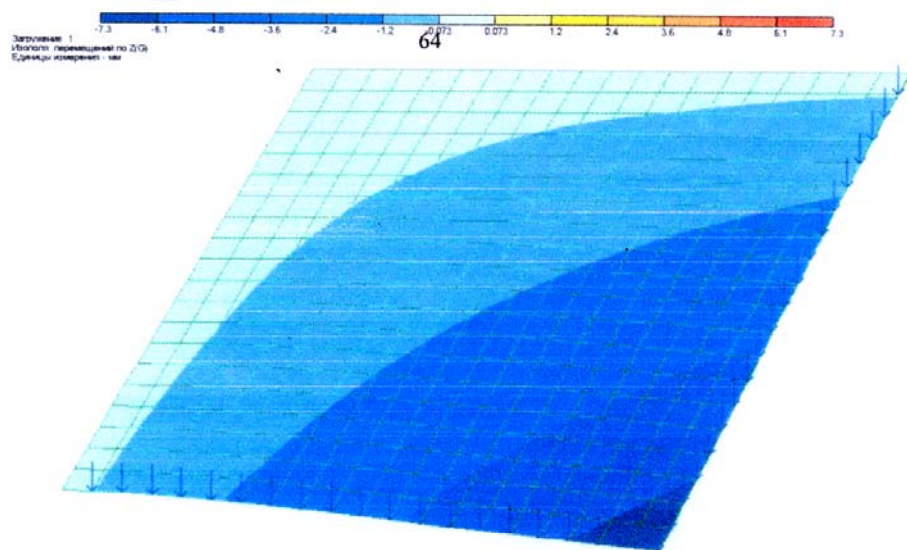
ნახ. 14 და ნახ. 15 მოცემულია ელემენტებისა და კვანძების ნუმერაცია.



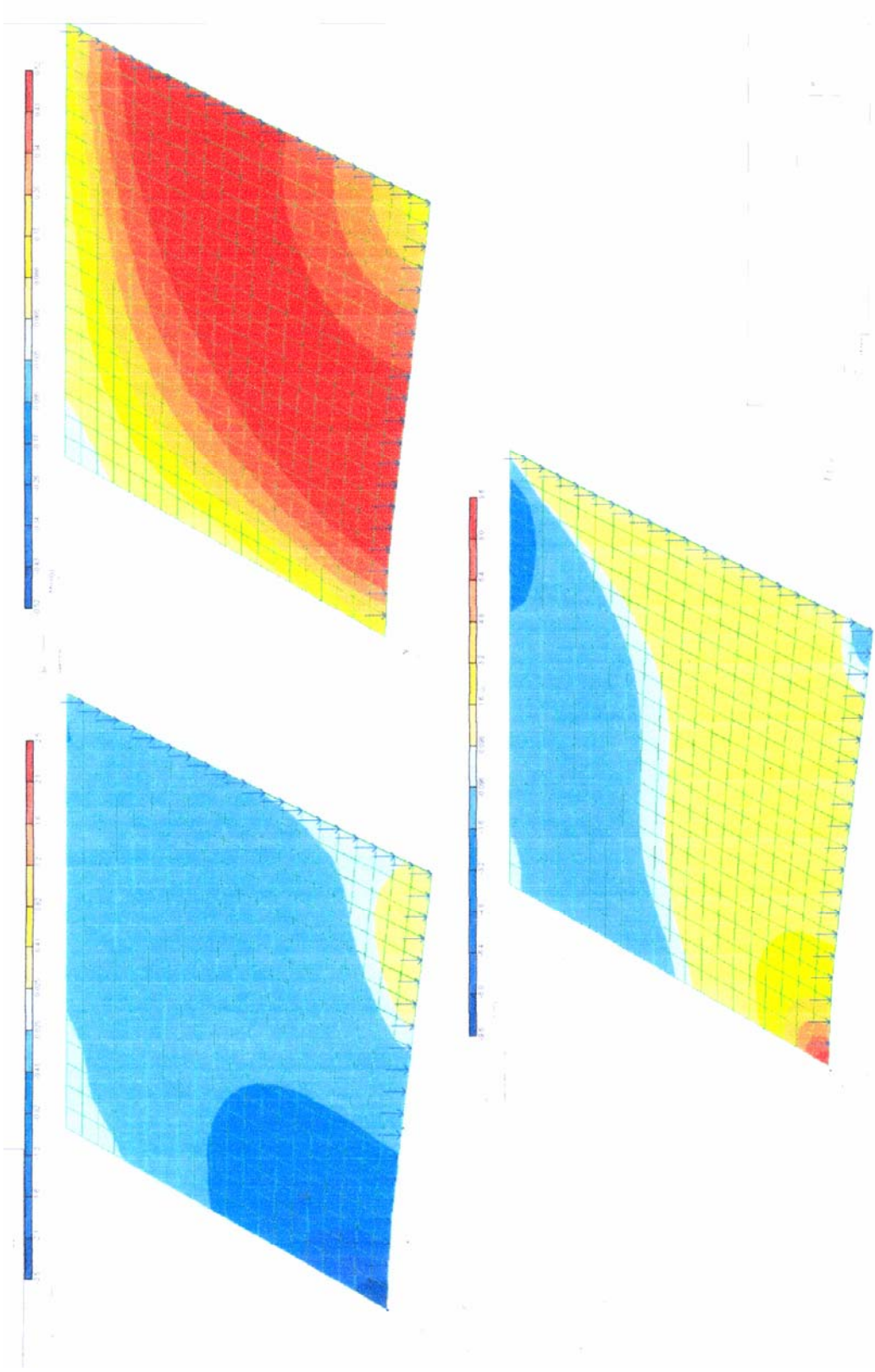
ნახ. 14. ელემენტების ნუმერაცია

ნახ. 16-ზე ნაჩვენებია ჩაღუნვები და მობრუნებების კუთხეები, ნახ. 17-ზე მღუნავი და მგრები მომენტები და განივი ძალები. რიცხვითი მნიშვნელობები მიღებულია კვადრატული ფილისათვის, რომლის გვერდის სიგრძე 2 მ-ია, სისქე კი 0,1 მ ფილის მასალის იუნგის მოდული ტოლია  $E = 2.7 \cdot 10^6$  ტ/მ<sup>2</sup>, ხოლო პუასონის კოეფიციენტი  $\nu = 0,2$ .





ნახ. 16.  $W$ ,  $V$  და  $U$  გადაადგილების ეპიურა

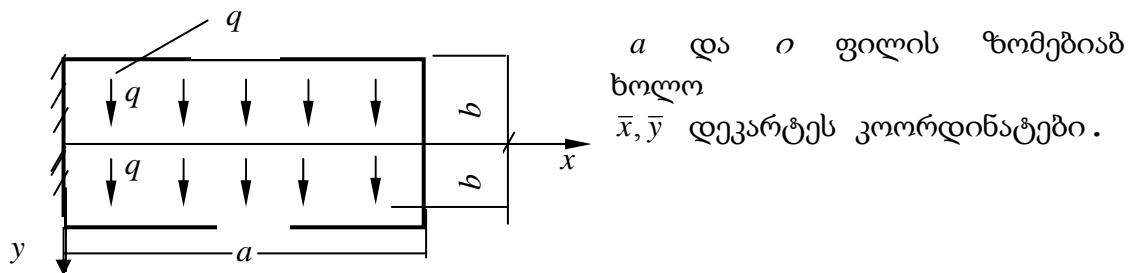


ნახ. 17.  $M_x, M_y$  მღუნაგი მომენტის და განივი  $Q_x$  ძალის ეპიურები

მათი შედარება ზემოთ მიღებული შედეგებთან საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ისინი პრაქტიკულად არ განსხვავდებიან კლასიკური სასაზღვრო პირობებით მიღებულ შედეგებთან, რაც ჩატარებული გამოკვლევის საიმედოობაზე მიუთითებს. იგივეზე მიუთითებს ის ფაქტიც, რომ ზემოთ მიღებულ შედეგებში ფიქტიური სისტემების ურთიერთქმედების ძალები ხისტად ჩამაგრებულ გვერდების გადაკვეთის წერტილიდან გამომავალ დიაგონალის გასწვრივ გამოვიდა ნულის ტოლი. რაც ფიზიკურ მოსაზრებებით მოსალოდნელიც იყო.

### 2.1.2.3. კონსოლური ფილის ღუნვა თანაბრად განაწილებული დატვირთვის შემთხვევაში

განვიხილოთ გეგმაში სწორკუთხედის ფორმის თხელი ფილა



ნახ. 18. კონსოლური ფილა თანაბრად განაწილებული

ნახ. 18? .

იყ ლუდუშაურის თეორიის მიხედვით მოცემული ფილის გაანგარიშება დაიყვანება ორი ფიქტიური სისტემის  $T_x$ ,  $T_y$  გაანგარიშების საკითხზე სადაც ფილის წონასწორობის განტოლებები ჩაიწერება შემდეგი სახით:

–  $T_x$  ფიქტიური სისტემისათვის:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -q - P_n^x ,$$

~36~



$$\frac{\partial M_x}{\partial \bar{x}} - Q_x = -\frac{\partial H^*}{\partial \bar{y}} \quad \&$$

~37`

–  $T_y$  ფიქტიური სისტემისათვის:

$$\frac{\partial Q_y}{\partial \bar{y}} = -q + P_n^x,$$

~38`

$$\frac{\partial M_y}{\partial \bar{y}} - Q_y = -\frac{\partial H^*}{\partial \bar{x}},$$

~39`

სადაც  $Q_x$ ,  $Q_y$  განივი ძალებია,  $M_x$ ,  $M_y$  მღუნავი მომენტები,  $H^*$  მგრები მომენტი  $P_n^*$  რეაქციული ნორმალური დატვირთვაბ რომელიც განაწილებულია ფილის შუალედ ზედაპირზე.  $T_x$  და  $T_y$  – ფიქტიური სისტემების ჩაღუნვები  $W_x$  და  $W_y$  განისაზღვრებიან ჰუკის განზოგადებული კანონიდან შემდეგი ფორმულების დახმარებით

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial \bar{x}^2} = -D(M_x - \nu M_y),$$

~40`

$$\frac{\partial^2 W_y}{\partial \bar{y}^2} = -D(M_y - \nu M_x) \quad \&$$

~41`

გამოთვლების გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ  $x$ ,  $y$ ,  $\eta$  უგანზომილებო სიდიდეები შემდეგი ტოლობების მიხედვით:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}, \quad y = \frac{\bar{y}}{b}; \quad \frac{a}{b} = \eta,$$

~42`

ვინაიდან  $\beta$  ღერძი წარმოადგენს :ნახ. 11? სიმეტრიის ღერძს სასაზღვრო და საწყის პირობებს ექნებათ სახე:

$$\text{h j w f } x=0^* \quad W_x = 0, \quad \frac{\partial W_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{h j w f } x=1^* \quad Q_x = 0, \quad M_x = 0, \quad H^* = 0 \quad \sim 43`$$

$$\text{როცა } y=0^* \quad Q_y = 0; \quad H^* = 0$$

$$\text{როცა } y=\pm 1^* \quad Q_y = 0, \quad M_y = 0, \quad H^* = 0$$

მოცემულ ამოცანაში ურთიერთქმედების ძალებს წარმოადგენს ფიქტიური სისტემების  $T_x$ ,  $T_y$  შუალედა ზედაპირზე მოქმედი რეაქციული ნორმალური ძალვა  $P_n^* = P_n^*(x, y)$  და ფილის შინაგანი მგრები მომენტი  $H^*$ , რომელიც იყ ღუდუშაურის თეორიის მიხედვით წარმოიდგინე უსასრულო მწკრივების სახითყ :43 სასაზღვრო და საწყისი პირობების გათვალისწინებით მოცემული ამოცანისათვის ეს მწკრივები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით :

$$P_n^* = \sum_m \sum_n A_{mn} m \sin mx (n \cos ny - \sin n) \quad \sim 44 \text{ `}$$

$$H^* = \frac{a^2}{\eta} \sum_m \sum_n (\cos mx - \cos m) (\sin ny - y \sin n)$$

სადაც  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  უცნობი კოეფიციენტებია და მათ განსასაზღვრავად გამოიყენება ორი იგიური ტოლობებისაგან შედგენილი შემდეგი ერთობლივი სისტემა

$$W_x = W_y, \quad (45)$$

$$\frac{1}{ab} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -\frac{(1+\nu)H^*}{D} \&$$

~45` სისტემის დასაკმაყოფილებლად გამოიყენება კოლოკაციის ცნობილი ხერხიყ

ამრიგადბ მოცემული კონკრეტული ამოცანის გადაწყვეტისათვის 44? ტოლობების გათვალისწინებით ისევე როგორც ეს წინა პარაგრაფებში ჩავატარეთ ადვილად განისაზღვრებიან საძიებელი

სიდიდეები  $P_n^*$ ,  $H^*$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $W_x$ ,  $W_y$ . შემდეგი ფორმულების მიხედვით

$$P_n^* = qA_{mn} m \sin mx (n \cos ny - \sin n),$$

$$H^* = a^2 q B_{mn} \frac{1}{\eta} (\cos mx - \cos m) (\sin ny - y \sin n),$$

$$Q_x = aq [(x-1) + A_{mn} (\cos mx - \cos m) (n \cos ny - \sin n)],$$

$$Q_y = aq A_{mn} \frac{m}{\eta} \sin mx (\sin ny - y \sin n),$$

$$M_x = a^2 q \left[ \frac{1}{2} (x-1)^2 + (A_{mn} - B_{mn}) f_1(x) (n \cos ny - \sin n) \right],$$

$$M_y = -a^2 q (A_{mn} + B_{mn}) \frac{m}{\eta^2} \sin mx f_1(y),$$

$$W_x = - \left[ \frac{a^4 q}{D(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{1}{24} (x^4 - 4x^3 + 6x^2) \right] - A_{mn} [F_1(x, y) + F_2(x, y)] + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{mn} [F_1(x, y) - F_2(x, y)] \right\} \right],$$

$$W_y = \frac{a^4 q}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\nu y^2}{4\eta^2} (x^2 - 2x) - A_{mn} [F_3(x, y) + F_4(x, y)] + B_{mn} [F_3(x, y) - F_4(x, y)] \right\}.$$

შედგენილი მათემატიკური ალგორითმისა და პროგრამის :იხ. დანართი 1. გამოყენებით განხორციელებულია ამოცანის რიცხვითი რეალიზაცია იმ კერძო შემთხვევაში როცა  $\eta^1 1$ , ქვემოთ მოცემულია  $H^*$ ,  $Q_x$ ,  $M_x$  და  $W_x$  სიდიდეები ცხრილი 3-ის სახით და სათანადო ეპიურები: ნახ. 19-22.

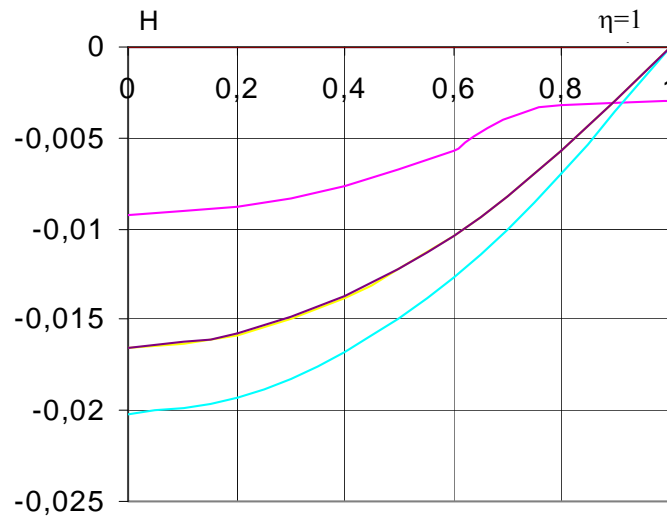
## კონსოლური ფილა

| $y \backslash x$ | 0       | 0,2     | 0,4     | 0,6     | 0,8      | 1 |
|------------------|---------|---------|---------|---------|----------|---|
|                  | H       |         |         |         | $\eta=1$ |   |
| 0                | 0       | 0       | 0       | 0       | 0        | 0 |
| 0,2              | -0,0092 | -0,0088 | -0,0076 | -0,0057 | -0,0032  | 0 |
| 0,4              | -0,0166 | -0,0159 | -0,0138 | -0,0104 | -0,0057  | 0 |
| 0,6              | -0,0202 | -0,0193 | -0,0168 | -0,0127 | -0,007   | 0 |
| 0,8              | -0,0165 | -0,0158 | -0,0137 | -0,0104 | -0,0057  | 0 |
| 1                | 0       | 0       | 0       | 0       | 0        | 0 |

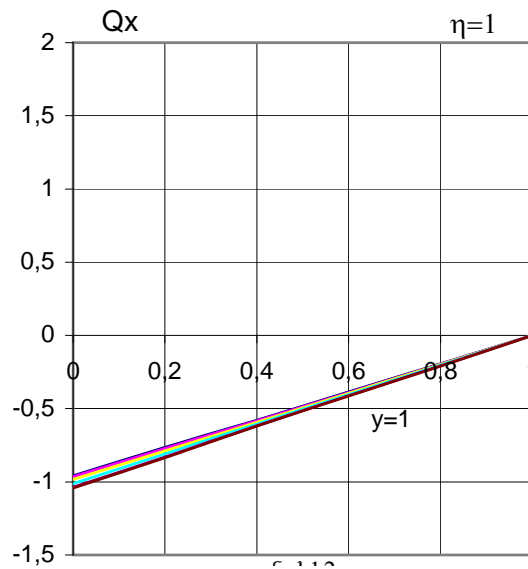
| $y \backslash x$ | 0      | 0,2    | 0,4    | 0,6    | 0,8      | 1 |
|------------------|--------|--------|--------|--------|----------|---|
|                  | Qx     |        |        |        | $\eta=1$ |   |
| 0                | -0,958 | -0,766 | -0,58  | -0,387 | -0,193   | 0 |
| 0,2              | -0,965 | -0,772 | -0,584 | -0,39  | -0,194   | 0 |
| 0,4              | -0,985 | -0,788 | -0,593 | -0,396 | -0,197   | 0 |
| 0,6              | -1,012 | -0,81  | -0,606 | -0,404 | -0,202   | 0 |
| 0,8              | -1,037 | -0,83  | -0,617 | -0,411 | -0,206   | 0 |
| 1                | -1,044 | -0,835 | -0,62  | -0,414 | -0,209   | 0 |

| $y \backslash x$ | 0     | 0,2   | 0,4   | 0,6   | 0,8      | 1 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|----------|---|
|                  | Mx    |       |       |       | $\eta=1$ |   |
| 0                | 0,473 | 0,306 | 0,174 | 0,078 | 0,02     | 0 |
| 0,2              | 0,478 | 0,309 | 0,175 | 0,078 | 0,02     | 0 |
| 0,4              | 0,49  | 0,315 | 0,178 | 0,079 | 0,02     | 0 |
| 0,6              | 0,507 | 0,324 | 0,182 | 0,081 | 0,02     | 0 |
| 0,8              | 0,523 | 0,332 | 0,185 | 0,082 | 0,02     | 0 |
| 1                | 0,53  | 0,335 | 0,186 | 0,082 | 0,02     | 0 |

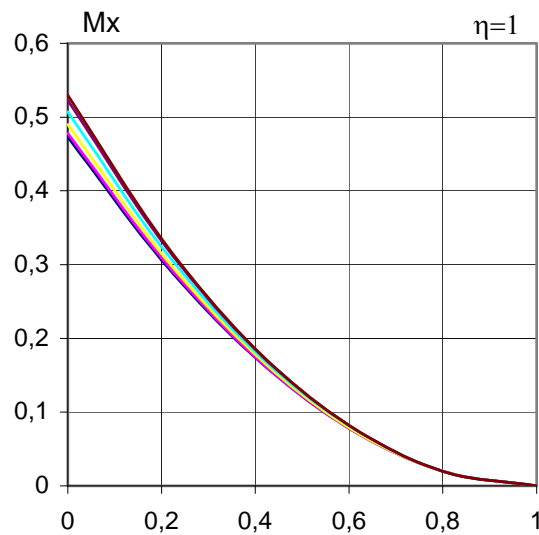
| $y \backslash x$ | 0 | 0,2    | 0,4    | 0,6    | 0,8      | 1      |
|------------------|---|--------|--------|--------|----------|--------|
|                  | W |        |        |        | $\eta=1$ |        |
| 0                | 0 | -0,011 | -0,033 | -0,062 | -0,094   | -0,126 |
| 0,2              | 0 | -0,011 | -0,033 | -0,062 | -0,094   | -0,126 |
| 0,4              | 0 | -0,01  | -0,033 | -0,062 | -0,095   | -0,128 |
| 0,6              | 0 | -0,01  | -0,033 | -0,063 | -0,097   | -0,132 |
| 0,8              | 0 | -0,01  | -0,034 | -0,066 | -0,101   | -0,138 |
| 1                | 0 | -0,01  | -0,035 | -0,07  | -0,108   | -0,148 |



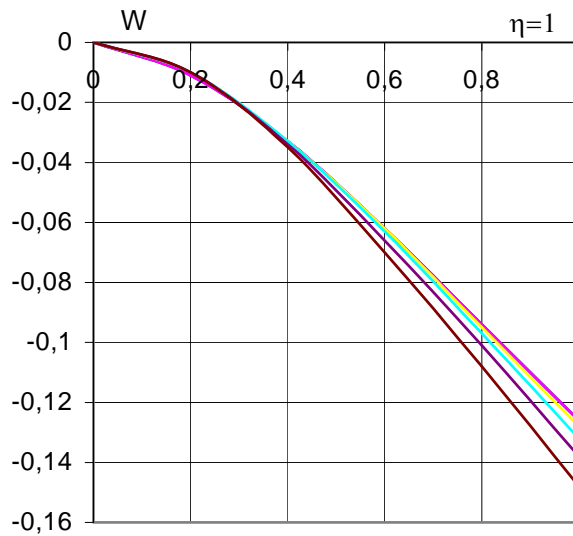
ნახ. 19. მგრესხავი მომენტის ეპიურა



ნახ. 20. განივი ძალის ეპიურა



ნახ. 21. მღუნავი მომენტის ეპიურა



ნახ. 22. ჩაღუნვის ეპიურა

ამოცანა ასევე ადვილად გადაწყდება ჰიდროსტატიკური და სხვა სახის დატვირთვების შემთხვევაშიც.

#### 2.1.2.4. ჰიდროსტატიკური დატვირთვის გავლენით კონსოლური ფილის «ცილინდრული ღუნვის» შესწავლა ი. ლუდუშაურის მეთოდით

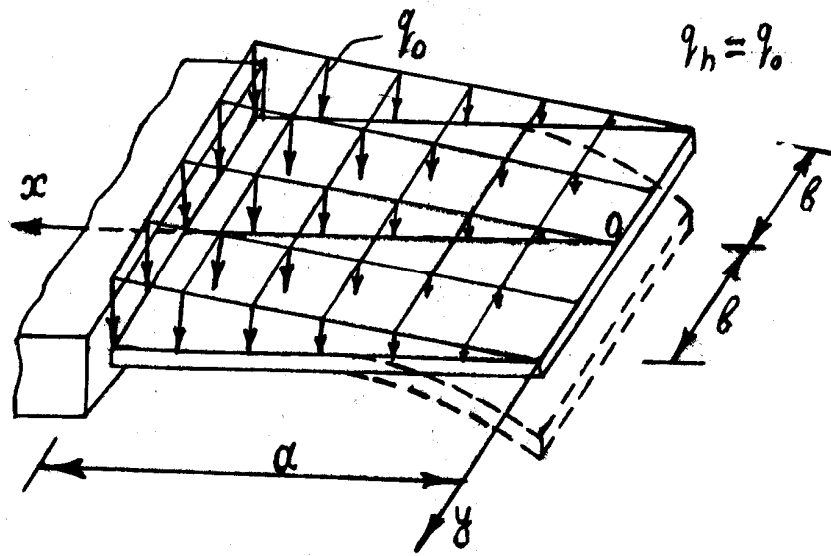
განვიხილოთ გეგმაში სწორკუთხედის ფორმის თხელი კონსოლური ფილა, რომელიც განიცდის ჰიდროსტატიკური დატვირთვის ქმედებას (ნახ. 23). მივიღოთ შრომაში გამოყენებულია უგანზომილებო სიდიდეები:

$$\bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad \eta = \frac{a}{b} \quad (46)$$

განხილულ ამოცანებში მოცემულია წინასწარ შემდეგი სასაზღვრო (47) და საწყისი (48) პირობები (ნახ. 23):

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} = 0 \quad Q_x = 0, \quad M_x = 0 \quad H^* = 0; \\ \bar{x} = 1 \quad \frac{\partial W_1}{\partial \bar{x}} = 0, \quad W_1 = 0; \\ \bar{y} = \pm 1 \quad Q_y = 0, \quad M_y = 0, \quad H^* = 0; \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\bar{y} = 0 \quad Q_y = 0, \quad \frac{\partial W_2}{\partial \bar{y}} = 0, \quad H^* = 0. \quad (48)$$



ნახ. 23. კონსოლური ფილა ჰიდროსტატიკური დატვირთვით

ფილის მუშაობა ღუნვაზე წარმოიდგინება  $T_x, T_y$  ფიქტიურ სისტემათა ერთობლივი მუშაობის სახით, რომელთა წინასწარობის განტოლებებია [148].

$T_x$  ფიქტიური სისტემისათვის

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial Q_x}{\partial \bar{x}} = -q_0 \cdot x - P_n^* \\ \frac{1}{a} \frac{\partial M_x}{\partial \bar{x}} - Q_x = -\frac{1}{b} \frac{\partial H^*}{\partial \bar{y}} \end{cases} \quad (49)$$

$T_y$  ფიქტიური სისტემისათვის

$$\begin{cases} \frac{1}{b} \frac{\partial Q_y}{\partial \bar{y}} = P_n^* \\ \frac{1}{b} \frac{\partial M_y}{\partial \bar{y}} - Q_y = -\frac{1}{a} \frac{\partial H^*}{\partial \bar{x}} \end{cases} \quad (50)$$

სადაც  $H^*$  შინაგანი მგრეხავი მომენტი და  $P_n^*$  რეაქტიული დატვირთვა გამოხატავენ აღნიშნულ ფიქტიურ სისტემათა ურთიერთქმედებას და ამიტომ მათი საძიებელი ფუნქციები განსახულებულ ამოცანაში წარმოიდგინებიან წინასწარ უცნობი კოეფიციენტების მქონე მწკრივების

სახით, რომელთა მაინტერპოლირებელი ფუნქციები უნდა აკმაყოფილებდნენ როგორც სასაზღვრო პირობებს, ასევე საწყის პირობებს.

აღნიშნულის გათვალისწინებით  $P_n^*$  და  $H^*$  წარმოიდგინებინა წინასწარ შემდეგი მწკრივების სახით:

$$P_n^* = \frac{1}{a^2} \bar{A}_{mn} m \cos m\bar{x} (n \cos n\bar{y} - \sin n); \quad (51)$$

აქ 
$$\bar{A}_{mn} = \sum_m \sum_n A_{mn} .$$

$$H_n^* = \frac{1}{\eta} \bar{B}_{mn} \sin m\bar{x} (\sin n\bar{y} - \bar{y} \sin n); \quad (52)$$

$$\bar{B}_{mn} = \sum_m \sum_n A_{mn} = B_{mn}$$

სადაც  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  საძიებელი მუდმივი კოეფიციენტებია.

წინასწორების განტოლებებიდან (49) და (50) განისაზღვრებიან შინაგანი ძალები  $Q_x, Q_y, M_x, M_y$ ; ხოლო ჩალუნვის სიდიდეები კი ჰუკის განზოგადებული კანონიდან:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{x}^2} = -\frac{1}{(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y), \\ \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \bar{y}^2} = -\frac{1}{(1-\nu^2)} (M_y - \nu M_x). \end{cases} \quad (53)$$

მწკრივების (51), (52) მუდმივი კოეფიციენტების  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  -ის შესაბამისი სიმრავლეები განისაზღვრება ფაქტიურ სისტემათა  $T_x, T_y$  შერწყმის ორი იგივე ტოლობებიდან:

$$\begin{aligned} \text{I. } & W_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv W_2(\bar{x}, \bar{y}) \\ \text{II. } & \frac{1}{ab} \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \equiv -\frac{H^*}{(1-\nu)D}. \end{aligned} \quad (54)$$

სადაც  $W$ -ს მაგივრად ჩაისმება  $W_1$ -ის ან  $W_2$ -ის (53) ტოლობებიდან ნაპოვნი გამოსახულებები. იგივე ტოლობების დაკმაყოფილება ხორციელდება კოლოკაციის ხერხის გამოყენებით, რომლის შედეგად მიიღება ალგებრულ განტოლებათა სისტემა  $A_{mn}$  და  $B_{mn}$  უცნობი



კოეფიციენტების მიმართ. მათი დადგენის შემდეგ განისაზღვრებიან საძიებელი სიდიდეები:  $P_n^*$ ,  $H^*$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $W$ .

მიღებული შედეგები ემთხვევა ლიტერატურაში ცნობილ სხვა ავტორთა მიერ მიღებულ შედეგებს.

ცხრილი 4

კონსოლური ფილა ჰიდროსტატიკური დატვირთვით

| y \ x | 0        | 0,25      | 0,5       | 0,75      | 1,0      |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| $H^*$ |          |           |           |           |          |
| 0     | 0,000000 | 0,000000  | 0,000000  | 0,000000  | 0,000000 |
| 0,25  | 0,000000 | 0,005212  | 0,008560  | 0,043105  | 0,000000 |
| 0,5   | 0,000000 | -0,000442 | 0,005904  | 0,014283  | 0,000000 |
| 0,75  | 0,000000 | -0,013811 | -0,022394 | -0,049232 | 0,000000 |
| 1     | 0,000000 | 0,000000  | 0,000000  | 0,000000  | 0,000000 |

| y \ x | 0        | 0,25     | 0,5      | 0,75      | 1,0      |
|-------|----------|----------|----------|-----------|----------|
| $Q_x$ |          |          |          |           |          |
| 0     | 0,500000 | 0,307308 | 0,106108 | 0,469333  | 0,000000 |
| 0,25  | 0,500000 | 0,279613 | 0,148611 | 0,116332  | 0,000000 |
| 0,5   | 0,500000 | 0,216024 | 0,100239 | -0,425040 | 0,000000 |
| 0,75  | 0,500000 | 0,284637 | 0,017694 | -0,125811 | 0,000000 |
| 1     | 0,500000 | 0,304395 | 0,487708 | 0,715794  | 0,000000 |

| y \ x | 0         | 0,25      | 0,5       | 0,75      | 1,0      |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| $M_x$ |           |           |           |           |          |
| 0     | -0,167420 | 0,072790  | -0,028544 | 0,000636  | 0,000000 |
| 0,25  | -0,165016 | -0,070711 | -0,022810 | -0,002070 | 0,000000 |
| 0,5   | -0,164305 | -0,066107 | -0,014417 | -0,007596 | 0,000000 |
| 0,75  | -0,164087 | -0,070042 | -0,017231 | -0,005220 | 0,000000 |
| 1     | -0,195777 | -0,07111  | -0,032487 | 0,010776  | 0,000000 |

| $y \backslash x$ | 0        | 0,25     | 0,5      | 0,75     | 1,0      |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| W                |          |          |          |          |          |
| 0                | 0,000000 | 0,003757 | 0,011902 | 0,022353 | 0,033455 |
| 0,25             | 0,000000 | 0,003611 | 0,011484 | 0,020797 | 0,030641 |
| 0,5              | 0,000000 | 0,003509 | 0,010904 | 0,018496 | 0,026620 |
| 0,75             | 0,000000 | 0,003847 | 0,011814 | 0,020432 | 0,029460 |
| 1                | 0,000000 | 0,004450 | 0,012791 | 0,025134 | 0,036040 |

## 2.2. ცილინდრული გადახურვის გაანგარიშება ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებებში

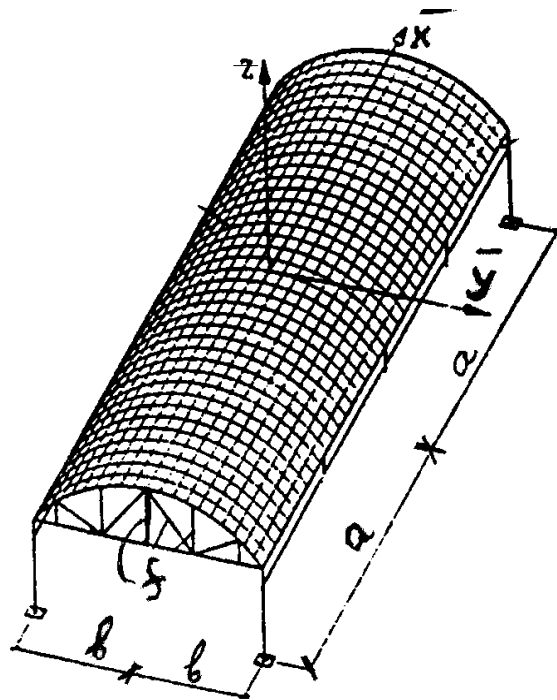
### 2.2.1. საკითხის დასმა

ცილინდრული გარსული ტიპის ნაგებობებმა თავისი იშვიათი კონსტრუქციული აეროდინამიკური და ესთეტიკური თვისებების წყალობით საპატიო ადგილი დაიმკვიდრეს თანამედროვე ტექნიკის თითქმის ყველა დარგშიც

სადღეისოდ ამ საკითხებზე გამოქვეყნებულია მრავალი მონოგრაფია და სამეცნიერო შრომებიც ნაწილობრივ ცილინდრულ გარსთა თეორიაში არსებული გამოკვლევების მიმოხილვა მოცემულია შრომებში [6, 94, 7, 25, 5, 16, 108, 48, 17, 102, 1].

რამდენადაც ცილინდრული გარსი წარმოადგენს სივრცულ სხეულს ამდენად მისი გაანგარიშება შეიძლება ვაწარმოოთ იყ ლუდუშაურის მიერ დამუშავებული მეტად ეფექტური მეთოდის გამოყენებით

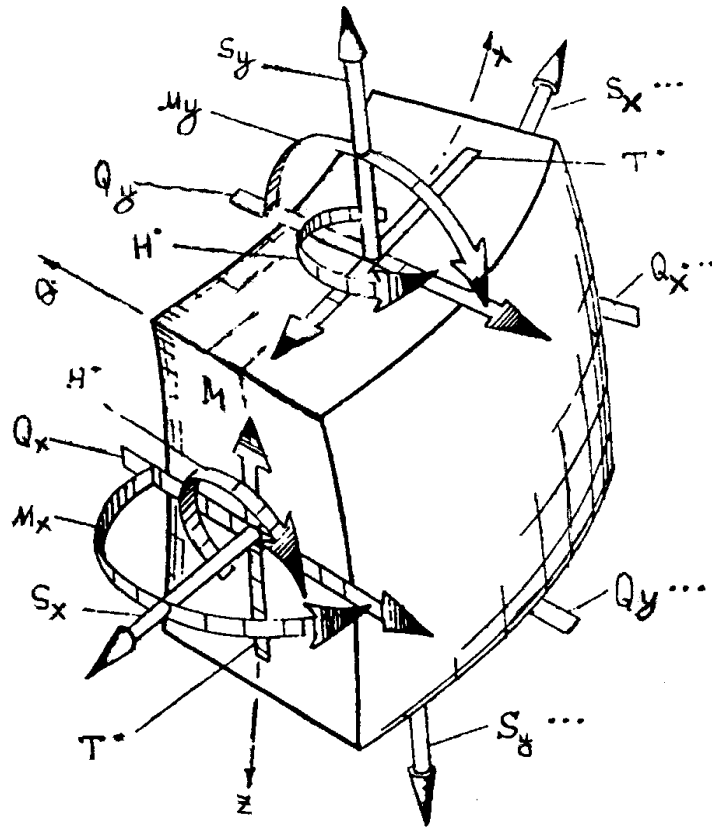
იმის გამოც რომ გარსის სისქე გაცილებით ნაკლებია მის დანარჩენ ორ განზომილებასთან შედარებით და თანაც ვიხილავთ მუდმივი სისქის მქონე თხელ ცილინდრულ გარსებს ამდენად მათი გაანგარიშებისათვის უკეთესია გამოვიყენოთ შერეულ კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 24).



ნახ. 24. ცილინდრული გადახურვა

გარსთა ტექნიკურ თეორიაში ძაბვების მაგიერ სარგებლობენ მათი ექვივალენტური ტოლქმედი სიდიდეებით. მათი რაოდენობა რვის ტოლიაბ ხუთი ძალაა ( $S_x, S_y, T, Q_x, Q_y$ ) და სამი მომენტი ( $M_x, M_y, H$ ). აღნიშნული ძალები და მომენტები საშუალებას გვაძლევენ ვიმსჯელოთ გარსიდან გამოყოფილი სივრცითი ელემენტის დამაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის შესახებ სათანადო ბრტყელი ელემენტის მიხედვით.

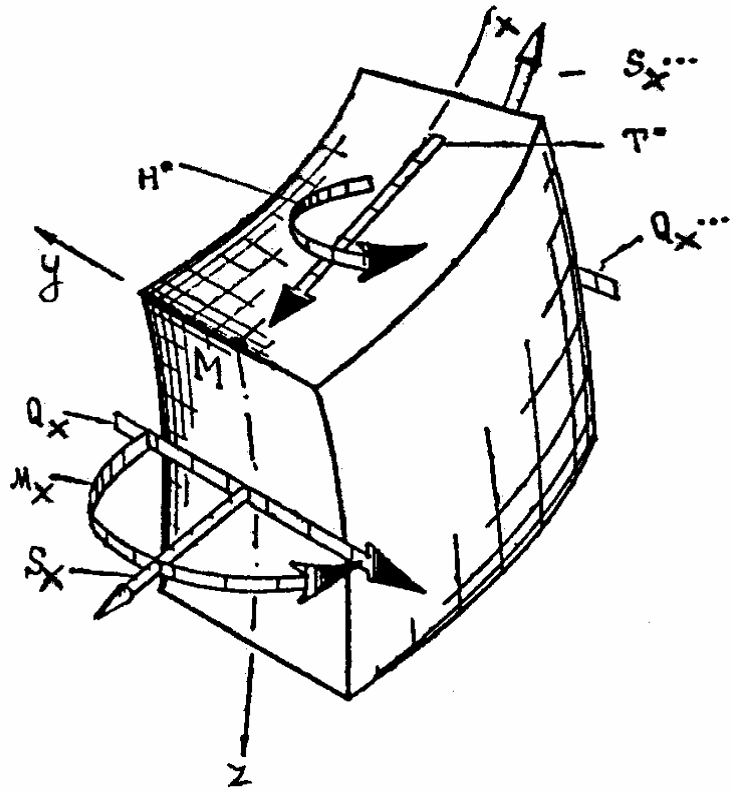
გამოყოფილი ბრტყელი ელემენტის (ნახ. 25) წონასწორობის პირობა იყლუდუშაურის თეორიის [16] მიხედვით წარმოიდგინება ფიქტიური  $T_x$  და  $T_y$  სისტემების ერთობლიობის სახით (ნახ. 26 ) და (ნახ. 27).  $S_x$  და  $S_y$  გრძივი ძალებიაბ  $T^*$  ძვრის ძალააბ  $Q_x$  და  $Q_y$  განივი ანუ გადამჭრელი ძალებიბ  $M_x, M_y$  მლუნავი მომენტებიბ ხოლო  $H^*$  -კი მგრეხი მომენტი.



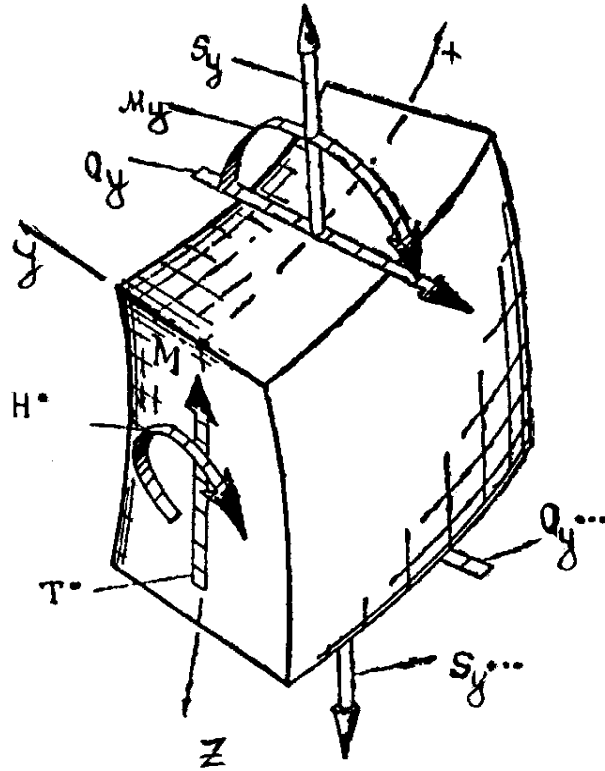
ნახ. 25. ცილინდრული გარსიდან გამოყოფილი ელემენტი

ფიქტიური  $T_x, T_y$  სისტემებისათვის წონასწორობის განტოლებები მიიღება ცალ-ცალკე შესაბამისად (ნახ. 26) და (ნახ. 27)-ზე აღნიშნული შიგა ძალების და რეაქტიული ძალის მდგენელების გათვალისწინებით.

მაგრამ იმის გამოც რომ გარსთა კლასიკურ თეორიაში გადამწყვეტი დიფერენციალური განტოლება მე-8-ე რიგისაა ამიტომ თითოეულ წახნაგზე ოთხი



ნახ. 26.  $T_x$  ფიქტიური სისტემა



ნახ. 27.  $T_y$  ფიქტიური სისტემა

სასაზღვრო პირობის დაკმაყოფილებაა საჭირო. ეს შეუსაბამობა იხვეწი რეალურ ზოგიერთი სხვა გარსთა ტექნიკური თეორიის მიახლოებითი ხასიათის შედეგია. რეალური სასაზღვრო პირობების «kekonsekuqsia» ეკუთვნის კირხჰოფს და დასაბუთებულია სენ-ვენანის პრინციპით რასაც ხაზგასმით აღნიშნავს ა. ლიავი დრეკადობის თეორიის ცნობილ კურსში [34]. მაშასადამე გამოდის რომ კლასიკურ გარსთა თეორიის გამოყენებისას საერთოდ შეუძლებელია ხუთივე რეალური სასაზღვრო პირობების ზუსტად დაკმაყოფილება ამიტომ ცხადია განსაკუთრებულ თეორიულ და პრაქტიკულ მნიშვნელობას იძენს ნებისმიერი ახალი მეცნიერული გამოკვლევა რომლითაც განთავისუფლება კლასიკურ გარსთა თეორია აღნიშნული ნაკლისაგან. უნდა აღინიშნოს რომ ამ საკითხს ადრეც ეთმო, ოდა განსაკუთრებული ყურადღება მრავალი ცნობილი მეცნიერის :ს. ტიმოშენკო, ვ. რეისნერი და სხვ. მიერ მაგრამ მათმა გამოკვლევებმა მათემატიკური სირთულის გამო ვერ ჰპოვა პრაქტიკული გამოყენება.

ცნობილია რომ გეგმაში მართკუთხედის ფორმის დამრეც გარსთა გაანგარიშების ზოგადი ტექნიკური თეორია რომელიც ძირითადად დამუშავებულია ვ. რეისნერისა [66] და ვ. ვლასოვის [8] მიერ განეკუთვნება საინჟინრო გათვლების იმ კლასს რომელსაც ფლობენ სპეციალისტთა მხოლოდ ვიწრო წრე. ამიტომ საინჟინრო მეთოდების ძიებას რომელიც გაამარტივებდა აღნიშნულ სიმძლეს დაბ სიმარტივის გამო ხელმისაწვდომი იქნებოდა ინჟინერთა ფართო წრისათვის მეტად აქტუალურ პრობლემათა რიცხვს მიაკუთვნებენ.

ნაშრომში განიხილება გეგმაში მართკუთხედის ფორმის ცილინდრული გარსი (ნახ. 25).  $2a$  და  $2i$  გარსით გადახურული მართკუთხედის ზომებია  $2r$  გარსის სისქე  $R$  სიმრუდის რადიუსი ხოლო  $a$  აწეულობის ისარი  $\bar{x}, \bar{y}$  დეკარტეს მარკუთხა კოორდინატთა სისტემა.

ამოცანის გადაწყვეტისას გამოყენებულია უგანზომილებო სიდიდეები.

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; \quad y = \frac{\bar{y}}{b}; \quad \eta = \frac{a}{b}; \quad \beta = \frac{b}{R}; \quad \gamma = \frac{h}{a} \quad \&$$

~55`

წონასწორობის განტოლებები (55) -ის გათვალისწინებით მოგვცემენ [109]:

–  $T_x$  ფიქტიური სისტემისათვის

$$\begin{cases} \frac{\partial S_x}{\partial x} + \eta \frac{\partial T^*}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} - aP_n^* - aq - S_x = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - \eta \frac{\partial H^*}{\partial y} + aQ_x = 0, \end{cases}$$

~56`

–  $T_y$  – ფიქტიური სისტემისათვის

$$\begin{cases} \frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial T^*}{\partial x} = 0, \\ \eta \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \beta \eta S_y + aP_n^* = 0 \\ \eta \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y - \frac{\partial H^*}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

~57`

წონასწორობის განტოლებებიდან საძიებელი სიდიდეები  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  განისაზღვრებიან  $H^*$ ,  $T^*$  და  $P_n^*$  სიდიდეების საშუალებით.

დეფორმაციის განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} &= -\frac{a^2}{D(1-\nu^2)} (M_x - \nu M_y) \\ \frac{\partial^2 W_y}{\partial y^2} &= -\frac{a^2}{D(1-\nu^2)\eta^2} (M_y - \nu M_x) \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{a}{(1-\nu^2)} (S_x - \nu S_y) - \beta W \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{a}{(1-\nu^2)\eta} (S_y - \nu S_x) - \beta W_x \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{2aT^*}{(1-\nu)} = \frac{2a(1+\nu)T^*}{(1-\nu^2)}. \end{aligned} \right.$$

~58~

იგულისხმება რომ გარსი კონტურით უძრავ სახსრულადაა ჩამაგრებული ხისტ დიაფრაგმებზე და განიცდის თანაბრად განაწილებული ღ ნორმალური დატვირთვის ქმედებას ასეთ პირობებში სასაზღვრო და საწყის პირობებს ექნებათ სახე (ნახ. 24).

$$\left\{ \begin{aligned} x = \pm 1; M_x = 0; U = 0, V = 0, W_x = 0; \frac{\partial W_x}{\partial y} = 0, \\ y = \pm 1; M_y = 0; U = 0, V = 0, W_y = 0; \frac{\partial W_y}{\partial x} = 0, \\ x = 0; Q_x = 0; U = 0, \frac{\partial W_x}{\partial x} = 0; H^* = 0; T^* = 0, \\ y = 0; Q_y = 0; V = 0, \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0; H^* = 0; T^* = 0. \end{aligned} \right.$$

~59~

(58) დიფერენციალურ განტოლებებთან სისტემა საშუალებას იძლევა განსაზღვრული იქნება ოთხი საძიებელი სიდიდე  $U, V, W_x, W_y$ .

რაც შეესაბამება  $H^*, T^*, P_n^*$  სიდიდეებს მათთვის გვაქვს შერწყმის სამი პირობა:



$$W_x(x, y) = W_y(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = -\frac{a^2}{D(1-\nu)\eta} H^*$$

~60`

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2a(1+\nu)}{B(1-\nu^2)} T^*$$

ამგვარად ი. ლუდუშაურის მეთოდით გეგმაში მართკუთხედის ფორმის დამრეცი ცილინდრული გარსის გაანგარიშების ზოგადი შემთხვევისათვის და სასაზღვრო პირობების ნებისმიერი სახეობისათვის წარმოიქმნება ურთიერთქმედების სამი  $(H^*, T^*, P_n^*)$  ძალა რომელთა მაინტერპოლირებული ფუნქციები (59) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\begin{cases} P_n^* = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos mx \cos ny \\ H^* = \frac{a^2}{\eta} \sum_m \sum_n B_{mn} \frac{1}{mn} \sin mx \sin ny \\ T^* = \frac{a}{\eta\beta} \sum_m \sum_n C_{mn} \frac{m}{n\eta} \sin mx \sin ny. \end{cases}$$

~61`

უცნობი  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$  კოეფიციენტები განისაზღვრებიან სამი იგივერი ტოლობებიდან (60).

უნდა შევნიშნოთ რომ თუ :56? და :57? წონასწორობის განტოლებიდან გამოვრიცხავთ  $P_n$  ურთიერთქმედებს რეაქციულ ძალას და ჩავთვლით რომ  $W_x \equiv W_y$  მაშინ მივიღებთ გარსთა ტექნიკურ თეორიაში ცნობილ ცილინდრული გარსის წონასწორობის განტოლებათა სისტემას

წონასწორობის განტოლებები :56? და :57?ბ :61? ტოლობებისა და სასაზღვრო და საწყისი პირობების :59?-ის

გათვალისწინებით  $S_x, S_y, Q_x, Q_y, M_x$  If  $M_y$  სიდიდეებისათვის მოგვცემენ:

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = -\eta \frac{\partial T^*}{\partial y} = -\frac{a}{\beta} C_{mn} m \sin mx \cos ny \text{ \&}$$

ინტეგრებით მივიღებთ:

$$S_x = \frac{a}{\beta} [C_{mn} \cos mx \cos ny + C_1(y)] \quad \sim 62 \text{ `}$$

ანალოგიურად

$$S_y = \frac{a}{\beta} \left[ C_{mn} \frac{m^2}{n^2 \eta^2} \cos mx \cos ny + D_1(x) \right] \text{ \&} \quad \sim 63 \text{ `}$$

$C_1(y)$  და  $D_1(x)$  საინტეგრო ფუნქციებია რომლებიც გარსთა ტექნიკური თეორიის მიხედვით ვერ განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობების არ არსებობის გამო ხოლო ჩვენს შემთხვევაში კი განისაზღვრებიან სათანადო შერჩეული სასაზღვრო პირობების გამოყენებით მოგვიანებით.

გამოვთვალოთ  $Q_x$  განივი ძადის სიდიდე

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -a [q + (A_{mn} + C_{mn}) \cos mx \cos ny + C_1(y)].$$

ინტეგრებით მივიღებთ:

$$Q_x = -a \left[ qx + xC_1(y) + (A_{mn} + C_{mn}) \frac{1}{m} \sin mx \cos ny \right] + C_2(y).$$

$C_2(y)$  საინტეგრო აუნქცია განისაზღვრება სასაზღვრო პირობიდან როცა  $b = 0, Q_x = 0 \Rightarrow C_2(y) = 0$ .

საბოლოოდ,

$$Q_x = -a \left[ qx + xC_1(y) + (A_{mn} + C_{mn}) \frac{1}{m} \sin mx \cos ny \right]. \quad (64)$$

ანალოგიურად

$$Q_y = -a \left[ \frac{y}{\eta} D_1(x) - \left( A_{mn} - C_{mn} \frac{m^2 \eta^2}{n^2 \eta^2} \right) \frac{1}{n \eta} \sin ny \cos mx \right]. \quad (65)$$

მღუნავი  $M_x$  გამოთვლისათვის გვექნება

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = \eta \frac{\partial H^*}{\partial y} - a Q_x = a^2 \left[ qx + x C_1(y) + (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn}) \frac{1}{m} \sin mx \cos ny \right].$$

ინტეგრება მოგვცემს

$$M_x = a^2 \left[ q \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} C_1(y) - (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn}) \frac{1}{m^2} \cos mx \cos ny \right] + C_3(y).$$

საინტეგრეო  $C_3(y)$  აუნქცია განისაზღვრება პირობიდან

როცა  $x = \pm 1$ ,  $M_x = 0$ , მივიღებთ

$$C_3(y) = -a^2 \left[ \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} C_1(y) - (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn}) \frac{1}{m^2} \cos mx \cos ny \right]$$

ჩასმა მოგვცემს:

$$M_x = a^2 \left[ \frac{q(x^2 - 1)}{2} + \frac{x^2 - 1}{2} C_1(y) - (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn}) \frac{1}{m^2} (\cos mx - \cos m) \cos ny \right]. \quad (66)$$

ანალოგიურად

$$M_y = a^2 \left[ \frac{y^2 - 1}{2 \eta^2} D_1(x) - \left( A_{mn} - B_{mn} - C_{mn} \frac{m^2}{n^2 \eta^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{n^2 \eta^2} (\cos ny - \cos n) \cos mx \right]. \quad (67)$$

გამოვიყენოთ პირობა:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = - \frac{a^2}{D(1-\nu)\eta} H^*.$$

თუ გავითვალისწინებთ  $H^*$  -ის გამოსახულებას მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = - \frac{a^4(1+\nu)}{D(1-\nu^2)\eta^2} B_{mn} \frac{1}{mn} \sin mx \sin ny.$$

ამ უკანასკნელის ინტეგრება ჯერ  $y$ -ით მოგვცემს

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{a^4(1+\nu)}{D(1-\nu^2)\eta^2} B_{mn} \frac{1}{mn} \sin mx \sin ny + D_4(x).$$

როცა  $y = \pm 1$ ;  $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ ,

მივიღებთ:

$$D_4(x) = -\frac{a^4(1+\nu)}{D(1-\nu^2)} B_{mn} \frac{1+\nu}{mn^2\eta^2} \sin mx \sin n.$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინება მოგვცემს:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{a^4(1+\nu)}{D(1-\nu^2)} B_{mn} \frac{1+\nu}{mn^2\eta^2} \sin mx (\cos ny - \cos n),$$

საიდანაც

$$W = -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} B_{mn} \frac{1+\nu}{m^2 n^2 \eta^2} \cos mx (\cos ny - \cos n) + C_4(y).$$

საინტეგრირაციის ფუნქცია  $C_4(y)$  განისაზღვრება პირობიდან:

$$\text{როცა } x = \pm 1; W=0,$$

შესაბამისად

$$C_4(y) = \frac{a^4(1+\nu)}{D(1-\nu^2)} B_{mn} \frac{1-\nu}{m^2 n^2 \eta^2} \cos m (\cos ny - \cos n).$$

საბოლოოდ:

$$W = -\frac{a^4}{D(1-\nu^2)} B_{mn} \frac{1+\nu}{m^2 n^2 \eta^2} (\cos mx - \cos m)(\cos ny - \cos n). \quad (68)$$

გამოვთვალოთ  $U$  და  $V$  გადაადგილებანი

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{a}{B(1-\nu^2)} (S_x - \nu S_y) - \beta W = \\ &= \frac{a^4}{B(1-\nu^2)\beta} \left[ \left( 1 - \frac{\nu m^2}{n^2 \eta^2} \right) C_{mn} \cos mx \cos my + C_1(y) - \nu D_1(x) \right] + \\ &+ \frac{a^4 \beta}{D(1-\nu^2)} B_{mn} \frac{1+\nu}{m^2 n^2 \eta^2} (\cos mx - \cos m)(\cos ny - \cos n). \end{aligned}$$

ინტეგრება  $x$ -ით და საწყისი პირობის გამოყენება

როცა  $x = 0, U = 0$  მოგვცემს

$$\begin{aligned} U &= \frac{a^2}{B(1-\nu^2)\beta} \left[ \left( 1 - \frac{\nu m^2}{n^2 \eta^2} \right) C_{mn} \frac{1}{m} \sin mx \cos ny + x C_1(y) - \nu \int D_1(x) dx + \right. \\ &\left. + b_{mn} B_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin mx - x \cos m \right) (\cos ny - \cos n) \right]. \quad (69) \end{aligned}$$

სადაც  $b_{mn} = \frac{12(1+v)\beta^2\gamma^2}{m^2 n^2 \eta^2}$ .

პირობა  $x = \pm 1, U = 0$  გვაძლევს

$$C_1(y) - v \int_{-\infty}^1 D_1(x) dx = - \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2 \eta^2} \right) C_{mn} \frac{1}{m} \sin mx \cos ny + \right. \\ \left. + B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) (\cos ny - \cos n) \right]. \quad (70)$$

ანალოგიურად  $V$  გადაადგილებისათვის მივიღებთ:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{a}{B(1-v^2)\eta} (S_y - vS_x) = \\ = \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta\eta} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) C_{mn} \cos mx \cos ny + D(x) - vC_1(y) \right]. \\ V = \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta\eta} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) C_{mn} \frac{1}{n} \sin ny \cos mx + yD_1(x) - v \int C_1(y) dy \right].$$

პირობიდან როცა  $y = \pm 1, V = 0$  მივიღებთ:

$$D_1(x) - v \int_0^1 C_1(y) dy = - \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) C_{mn} \frac{1}{n} \sin n \cos mx. \quad (71)$$

$D_1(x)$  და  $C_1(y)$  საინტეგრო აუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} D_1(x) - v \int_0^1 C_1(y) dy = - \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) C_{mn} \frac{1}{n} \sin n \cos mx \\ C_1(y) - vx = - \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2 \eta^2} \right) C_{mn} \frac{1}{m} \sin n \cos ny - \\ \quad - B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) (\cos ny - \cos n). \end{cases}$$

მიღებული სისტემის ამოხსნა მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით მოგვცემს:

$$D_1(x) = -C_{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) \cos mx - \frac{v}{m} \sin m \right] \frac{1}{n} \sin n - \\ - B_{mn} b_{mn} \frac{v}{1-v^2} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right), \quad (72)$$

$$C_1(y) = -C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny + \frac{m^2}{n^2\eta^2} \frac{v}{m} \sin n \right] \frac{1}{m} \sin m -$$

$$- B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left[ (\cos ny - \cos n) + \frac{v}{1+v^2} \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right) \right].$$

$D_1(x)$ -ისა და  $C_1(y)$ -ის გამოთვლების შემდეგ განვსაზღვროთ  $W_x$  და  $W_y$  გადაადგილებები.

შევადგინოთ გამოსახულება:

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} = -\frac{a^2}{D(1-v^2)} (M_x - vM_y).$$

$$\frac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} = -\frac{a^4}{D(1-v^2)} \left[ \frac{q(x^2-1)}{2} + \frac{x^2-1}{2} C_1(y) - (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn}) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{m^2} (\cos mx - \cos m) \cos ny - (A_{mn} - B_{mn}) \frac{v}{n^2\eta^2} (\cos ny - \cos n) \cos mx \right].$$

ამ გამოსახულების ინტეგრება ორჯერ  $x$ -ით და სათანადო სასაზღვრო და საწყისი პირობების გათვალისწინებით საბოლოოდ მივიღებთ:

$$W_x = \frac{a^4}{D(1-v^2)} \left[ f(x)q + f(x)C_1(y) + \right.$$

$$\left. + (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn})f_1(x, y) - (A_{mn} - B_{mn})f_2(x, y) \right],$$

სადაც

$$f(x) = \frac{1}{24} (x^4 - 6x^2 + 5),$$

$$f_1(x, y) = \frac{1}{m^2} \left[ \frac{1}{m^2} (\cos mx - \cos m) + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \cos m \right] \cos ny,$$

$$f_2(x, y) = \frac{v}{m^2 n^2 \eta^2} (\cos mx - \cos m) (\cos ny - \cos n).$$

ანალოგიურად

$$W_y = \frac{a^4}{D(1-v^2)} \left\{ \frac{q(x^2-1)(y^2-1)}{4\eta^2} + \frac{x^2-1}{2\eta^2} C_1^*(y) + \right.$$

$$\left. + (A_{mn} - B_{mn})f_3(x, y) + (A_{mn} + B_{mn} + C_{mn})f_2(x, y) \right\} \quad (73)$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{n^2\eta^2} \left[ \frac{1}{n^2} (\cos ny - \cos n) + \frac{1}{2} (y^2 - 1) \cos n \right] \cos mx,$$

$$C_1^*(y) = C_{mn}f_4(y) + B_{mn}f_5(y),$$

$$f_4(y) = \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2m^2} \right) \frac{1}{n^2} (\cos nu - \cos m) - \frac{(y^2-1)m^2}{n^2\eta^2} \frac{v}{n} \sin n \right] \frac{1}{m} \sin m,$$

$$f_5(y) = b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left\{ \left[ \frac{1}{n^2} (\cos ny - \cos n) + \frac{1}{2} (y^2-1) \cos n \right] - \frac{(y^2-1)v^2}{1-v^2} \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right) \right\}.$$

ამრიგად, მოცემული ამოცანის გადაწყვეტისათვის ზემოთ განსაზღვრული იქნა ყველა საძიებელი გამოსახულება შინაგანი ძალებისათვის  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  და გადაადგილებებისათვის  $U$ ,  $V$ ,  $W$  რომლებიც ჯერ კიდევ შეიცავენ  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  უცნობ სიდიდეებს. ამ უკანასკნელთა განსასაზღვრავად გამოიყენება სამი იგივე ტოდობისაგან შედგენილი ერთობლივი ადგებრულ განტოდებათა სისტემა.

## 2.2.2. მოცემული ამოცანის გადამწყვეტ ადგებრულ განტოდებათა სისტემის შედგენა

$A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  უცნობი კოეფიციენტების განსასაზღვრავად გამოიყენება ორი იგივე ტოდობა. ჩალუნვის აუნქციისათვის, ხოლო მესამე ტოდობად კი საჭიროა ავიღოთ გამოუყენებელი (59)-ის ბოლო მეხუთე ტოდობა.

ამგვარად შერწყმის პირობებს დასმული ამოცანის შემთხვევისათვის ექნება სახე:

$$\begin{cases} W_x(x, y) \equiv W(x, y), \\ W_y(x, y) \equiv W(x, y), \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial U}{\partial y} \equiv \frac{2a(1+v)}{B(1-v^2)} T^*. \end{cases} \quad (74)$$

გავამარტივოთ  $U$  და  $V$  გამოსახულებები.

გამოვითვადოთ გამოსახულება

$$\begin{aligned} xC_1(y(-v) \int D_1(x) dx) &= -C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny - \frac{m^2}{n^2\eta^2} \frac{v}{n} \sin n \right] \frac{x}{m} \sin m - \\ &- B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos n \right) \left[ x(\cos ny - \cos n) + \frac{xv^2}{1-v^2} \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right) \right] + \\ &+ C_{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} - v \right) \frac{1}{m} \sin mx + \frac{vx}{m} \sin m \right] \frac{v}{n} \sin n + \\ &+ B_{mn} b_{mn} \frac{xv^2}{1-v^2} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right) = \\ &= -C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny \frac{x}{m} \sin m + \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \frac{x}{mn} \sin m \sin n - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} - v \right) \sin mx \frac{v}{mn} \sin m - \frac{v^2 x}{mn} \sin m \sin n \right] - \\ &- B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left[ x(\cos ny - \cos n) + \frac{v^2 x}{1-v^2} \frac{1}{n} \sin n - \frac{xv^2}{1-v^2} \cos n - \right. \\ &\quad \left. - \frac{xv^2}{1-v^2} \frac{1}{n} \sin n + \frac{xv^2}{1-v^2} \cos n \right] = \\ &= C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny \frac{x}{m} \sin m + \left( \frac{m^3}{n^2\eta^2} - v \right) \frac{vx}{mn} \sin m \sin n - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} \right) \sin mx \frac{v}{mn} \sin n \right] - B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) x(\cos ny - \cos n) = \\ &= -C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny \frac{x}{m} \sin m - \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} - v \right) \frac{v}{mn} \sin n (\sin mx - x \sin m) \right] - \\ &- B_{mn} b_{mn} x \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) (\cos ny - \cos n). \end{aligned}$$



შევიტანოთ ამ გამოსახულების მნიშვნელობა  $U$  გადაადგილების გამოსახულებაში მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta} \left[ C_{mn} \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \frac{1}{m} \sin mx \cos ny + x C_1(y) - v \int D_1(x) dx \right] + \\
 &+ B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \cos mx - x \cos m \right) (\cos ny - \cos n) \Big] = \\
 &= \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta} \left\{ C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \frac{1}{m} \sin mx \cos ny - \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny \frac{x}{m} \sin m - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} - v \right) \frac{v}{mn} \sin n (\sin mx - x \sin m) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + B_{mn} b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin mx - x \cos m \right) (\cos ny - \cos n) - \right. \\
 &\quad \left. - B_{mn} b_{mn} \left( \frac{x}{m} \sin m - x \cos m \right) (\cos ny - \cos n) \right\}, \\
 U &= \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta} \left\{ C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos nx + \left( \frac{vm^2}{n^2\eta^2} - v^2 \right) \frac{1}{n} \sin n \right] + \right. \\
 &\quad \left. + B_{mn} b_{mn} (\cos ny - \cos n) \right\} \frac{1}{m} (\sin mx - x \sin m).
 \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$yD_1(x) - v \int C_1(y) dy.$$

თუ შევიტანოთ  $D_1(x)$  და  $C_1(y)$  მნიშვნელობებს (72) ტოლობების მიხედვით

$$\begin{aligned}
 yD_1(x) - v \int C_1(y) dy &= -C_{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} - v \right) \cos mx + \frac{v}{m} \sin m \right] \frac{y}{n} \sin n - \\
 &- B_{mn} b_{mn} \frac{vy}{1-v^2} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right) + \\
 &+ C_{mn} \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \frac{v}{n} \sin ny + \frac{m^2}{n^2\eta^2} \frac{v^2 y}{n} \sin n \right] \frac{1}{m} \sin n + \\
 &+ B_{mn} b_{mn} v \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left[ \frac{1}{n} \sin ny - y \cos n + \frac{yv^2}{1-v^2} \frac{1}{n} \sin n + \frac{yn^2}{1-n^2} \cos n \right] =
 \end{aligned}$$

$$= -C_{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) \frac{y}{n} \sin n \cos mx - \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2 \eta^2} \right) \frac{v}{mn} \sin mn (\sin ny - u \sin n) \right] +$$

$$+ B_{mn} b_{mn} v \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \frac{1}{n} (\sin ny - y \sin n).$$

ამ უკანასკნელის გათვადისწინება  $V$ -ს გამოსახულებაში საბოლოოდ მოგვცემს

$$V_2 = \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta\eta} \left\{ C_{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) \cos mx + \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2 \eta^2} \right) \frac{v}{m} \sin m \right] + \right.$$

$$\left. + B_{mn} b_{mn} v \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \right\} \frac{1}{n} (\sin ny - y \sin n).$$

შევადგინოთ შერწყმის III პირობა

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial U}{\partial y} \equiv \frac{2a(a+v)}{B(1-v^2)} T^*.$$

სათანადო სიდიდეების შეტანის შედეგად გვექნება

$$- \frac{a^2}{B(1-v^2)\beta\eta} C_{mn} \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) \frac{m}{n} \sin mx (\sin ny - y \sin n) -$$

$$- \frac{a^2 \eta}{B(1-v^2)\beta} C_{mn} \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2 \eta^2} \right) \frac{n}{m} \sin ny (\sin mx - x \sin m) -$$

$$- \frac{a^2 \eta}{B(1-v^2)\beta} B_{mn} b_{mn} \frac{n}{m} \sin ny (\sin mx - x \sin m) =$$

$$= \frac{2a^2(1+v)}{B(1-v^2)\beta\eta} C_{mn} \frac{m}{n} \sin mx \sin ny.$$

მსგავსი წევრების შეერთების შედეგად მივიღებთ

$$\sum_m \sum_n [B_{mn} \Phi_{mn}^{III}(B) + C_{mn} \Phi_{mn}^{III}(C)] = 0.$$

სადაც

$$\Phi_{mn}^{III}(B) = \eta^2 b_{mn} \frac{n}{m} \sin ny (\sin mx - x \sin m),$$

$$\Phi_{mn}^{III}(C) = \left( \frac{m^2}{n^2 \eta^2} - v \right) \frac{m}{n} \sin mx (\sin ny - y \sin n) +$$

$$+ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2 \eta^2} \right) \frac{n \eta^3}{m} \sin ny (\sin mx - x \sin m) + 2(1+v) \frac{m}{n} \sin mx \sin ny.$$

გავამარტივოთ  $W_x$  და  $W_y$ -ის გამოსახულებები მათში  $C_1(y)$  და  $D_1(x)$  მნიშვნელობების შეტანით:

$$C_1(y) = -C_{mn}f_1^*(y) - B_{mn}f_2^*(y),$$

$$D_1(x) = -C_{mn}f_1^*(x) - B_{mn}f_2^*(x).$$

სადაც

$$f_1^*(x) = \left[ \left( \frac{m^2}{n^2\eta^2} - v \right) \cos mx + \frac{v}{m} \sin m \right] \frac{1}{n} \sin x,$$

$$f_2^*(x) = b_{mn} \frac{v}{1-v^2} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right),$$

$$f_1^*(y) = \left[ \left( 1 - \frac{vm^2}{n^2\eta^2} \right) \cos ny + \frac{m^2}{n^2\eta^2} \frac{v}{n} \sin n \right] \frac{1}{m} \sin m,$$

$$f_2^*(y) = b_{mn} \left( \frac{1}{m} \sin m - \cos m \right) \left[ (\cos ny - \cos n) + \frac{v^2}{1-v^2} \left( \frac{1}{n} \sin n - \cos n \right) \right].$$

$$W_x = -\frac{a^4}{D(1-v)^2} \{ f(x)q + A_{mn} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] + B_{mn} [f_1(x, y) - f_2(x, y) - f(x)f_2^*(y)] + C_{mn} [f_1(x, y) - f(x)f_1^*(y)] \},$$

$$W_y = \frac{a^4}{D(1-v)^2} \{ f(x)q + A_{mn} [f_2(x, y) + f_3(x, y)] + B_{mn} \left[ f_2(x, y) - f_3(x, y) + \frac{x^2-1}{2\eta^2} f_5(y) \right] + C_{mn} \left[ f_2(x, y) + \frac{x^2-1}{2\eta^2} f_4(y) \right] \}$$

$$W = -\frac{a^4}{D(1-v^2)} B_{mn} \frac{1+v}{m^2 n^2 \eta^2} (\cos x - \cos n)(\cos ny - \cos n) = -\frac{a^4}{(1-v^2)} B_{mn} \frac{1+v}{v} f_2(x, y).$$

შერწყმის I პირობებიდან მივიღებთ

$$A_{mn} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] + B_{mn} \left[ f_1(x, y) - \frac{1+2v}{v} f_2(x, y) - f(x)f_2^*(y) \right] + C_{mn} [f_1(x, y) - f(x) \cdot f_1^*(y)] = -f(x)q.$$

$$\sum_m \sum_n [\Phi_{mn}'(A)A_{mn} + \Phi_{mn}'(B)B_{mn} + \Phi_{mn}'(C)C_{mn}] = \Phi_{mn}'(q),$$

$$\Phi_{mn}'(A) = f_1(x, y) + f_2(x, y),$$

$$\Phi_{mn}'(B) = f_1(x, y) - \frac{1+2v}{v} f_2(x, y) - f(x)f_2^*(y),$$

$$\Phi_{mn}^I(C) = f_1(x, y) - f(x)f_1^*(y),$$

$$\Phi_{mn}^I(q) = -f(x).$$

შერწყმის II პირობა მოგვცემს

$$A_{mn} [f_2(x, y) + f_3(x, y)] + B_{mn} \left[ -\frac{1}{v} f_2(x, y) - f_3(x, y) + \frac{x^2 - 1}{2\eta^2} f_5(y) \right] +$$

$$+ C_{mn} \left[ f_2(x, y) + \frac{x^2 - 1}{2\eta^2} f_4(y) \right] = -f(x, y)q,$$

$$\sum_m \sum_n [\Phi_{mn}^{II}(A)A_{mn} + \Phi_{mn}^{II}(B)B_{mn} + \Phi_{mn}^{II}(C)C_{mn}] = \Phi_{mn}^{II}(q),$$

$$\Phi_{mn}^{II}(A) = f_2(x, y) + f_3(x, y),$$

$$\Phi_{mn}^{II}(B) = \frac{x^2 - 1}{2\eta^2} f_5(y) - \frac{1}{v} f_2(x, y) - f_3(x, y),$$

$$\Phi_{mn}^{II}(C) = f_2(x, y) + \frac{x^2 - 1}{2\eta^2} f_4(y),$$

$$\Phi_{mn}^{II}(q) = -f(x_1'').$$

სადაც  $\Phi_{mn}^I(A)$ ,  $\Phi_{mn}^I(B)$ ,  $\Phi_{mn}^I(C) \wedge \Phi_{mn}^I(q)$  ( $i = I, II, III$ ) ცნობილი აუნქციებია.

აღგებრულ განტოდებათა სისტემის ამოხსნა წარმოებს კოდოკაციის მეთოდის გამოყენებით, შედგენილია მათემატიკური ადგორითმი და პროგრამა კომპიუტერისათვის და (იხ. დანართი PROGRAM ) პარამეტრების  $\eta$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის გამოთვლილია სათანადო ყვედა საძიებელი სიდიდე და აგებულია მათი ცვლილებების გრაფიკები ერთ-ერთი კერძო შემთხვევისათვის, როცა  $\eta = 1$ ,  $\beta = 0,0037$ ,  $\gamma = 0,04$  ზოგიერთი მადვების სიდიდეები მოცემულია ცხრილი 4-ის სახით. მათი ნახაზების ანალიზის გვიჩვენებს, რომ ი. ლუღუშაურის მეთოდით მიღებული შედეგები უარო ზუსტია, ემთხვევა ექსპერიმენტით მიღებულ შედეგებს და გაცილებით მარტივად წყვეტს დასმულ ამოცანას.

ცხრილი 5

|   |      | ცილინდრული გარსი P |      |
|---|------|--------------------|------|
|   | 0    | 0, 2               | 0, 4 |
| x | 0, 6 | 0, 8               | 1    |
| y |      |                    |      |

| K=0                                     |              |                   |              |              |              |               |
|---|--------------|-------------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| $\eta=5$                                | $\gamma=1$   | $\beta = 0,00471$ |              |              |              |               |
| 0                                       | 1&14342<br>8 | 1&11461<br>2      | 0&99749<br>4 | 0&73966<br>9 | 0&35321<br>8 | _0&02721      |
| 0,<br>2                                 | 1&13657<br>4 | 1&10860<br>5      | 0&99865<br>8 | 0&75757<br>7 | 0&37773<br>9 | _0&05813<br>1 |
| 0&<br>4                                 | 1&11681<br>2 | 1&09125           | 1&00093<br>2 | 0&80676<br>4 | 0&45356<br>5 | _0,10576<br>8 |
| 0&<br>6                                 | 1&08618<br>2 | 1&06483<br>8      | 1&00207<br>7 | 0&87271<br>4 | 0&58504<br>8 | _0&04421<br>5 |
| 0,<br>8                                 | 1,04654<br>1 | 1,03308<br>8      | 1,00122<br>8 | 0,94345<br>3 | 0,77180<br>7 | 0,298853      |
| 1                                       | 0,99656<br>2 | 0,99838<br>1      | 0,99830<br>4 | 0,99181<br>5 | 0,99924<br>2 | 1,073681      |
| ცილინდრული გარსი H                      |              |                   |              |              |              |               |
| x<br>y                                  | 0,6          |                   | 0,8          |              | 1            |               |
|   | 0,2          |                   | 0,4          |              |              |               |
| K=0 $\eta=5$ $\gamma=1$ $\beta=0,00371$ |              |                   |              |              |              |               |
| 0                                       | 0            | 0                 | 0            | 0            | 0            | 0             |
| 0#<br>2                                 | 0            | 0,00096<br>6      | 0,00241<br>3 | 0,00453<br>3 | 0,00682<br>4 | 0,007652      |
| 0,<br>4                                 | 0            | 0,00184<br>1      | 0,00457<br>7 | 0,00861<br>8 | 0,01309<br>6 | 0,014985      |
| 0,<br>6                                 | 0            | 0,00253<br>7      | 0,00627<br>9 | 0,01184<br>9 | 0,01824<br>7 | 0,021585      |
| 0,<br>8                                 | 0            | 0,00298           | 0,00736      | 0,01391      | 0,02169      | 0,026704      |

|                                      |     |              |              |              |              |          |
|--------------------------------------|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|
| 8                                    |     | 5            | 2            | 2            | 9            |          |
| 1                                    | 0   | 0,00313<br>8 | 0,00773<br>5 | 0,01461<br>8 | 0,02293<br>7 | 0,028954 |
| ცილინდრული გარსი T                   |     |              |              |              |              |          |
| x \ y                                | 0   | 0,2          |              | 0,4          |              |          |
|                                      | 0,6 | 0,8          |              | 1            |              |          |
| K=0      η=5      γ=1      β=0,00371 |     |              |              |              |              |          |
| 0                                    | 0   | 0            | 0            | 0            | 0            | 0        |
| 0,2                                  | 0   | 0            | 0            | 0            | 0,00000<br>1 | 0,000001 |
| 0,4                                  | 0   | 0            | 0            | 0,00000<br>1 | 0,00000<br>1 | 0,000001 |
| 0,6                                  | 0   | 0            | 0            | 0,00000<br>1 | 0,00000<br>1 | 0,000001 |
| 0,8                                  | 0   | 0            | 0            | 0            | 0,00000<br>1 | 0,000001 |
| 1                                    | 0   | 0            | 0            | 0            | 0            | 0        |

ცხრილი 4-ის გაგრძელება

|                     |     |              |              |              |              |              |
|---------------------|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| ცილინდრული გარსი Qx |     |              |              |              |              |              |
| x \ y               | 0   | 0,2          |              | 0,4          |              |              |
|                     | 0,6 | 0,8          |              | 1            |              |              |
| K=0                 |     |              |              |              |              |              |
| η=5                 | γ=1 | β = 0,00471  |              |              |              |              |
|                     |     | -            | -            | -            | -            | -            |
| 0                   | 0   | 1,04536<br>9 | 2,08800<br>4 | 3,12326<br>2 | 4,14540<br>3 | 5,15155<br>5 |
| 0,2                 | 0   | -<br>1,04510 | -<br>2,08760 | -<br>3,12322 | -<br>4,14632 | -<br>5,15266 |

|                     |          |          |          |            |                 |          |
|---------------------|----------|----------|----------|------------|-----------------|----------|
|                     |          | 3        | 8        | 8          |                 | 2        |
| 0,4                 | 0        | 1,044338 | 2,086448 | 3,123036   | 4,148866        | 5,156551 |
| 0,6                 | 0        | 1,04316  | 2,084644 | 3,122501   | 4,152498        | 5,164777 |
| 0,8                 | 0        | 1,041676 | 2,082407 | 3,121467   | 4,156415        | 5,179207 |
| 1                   | 0        | 1,03989  | 2,079846 | 3,119666   | 4,159366        | 5,200486 |
| ცილინდრული გარსი Qy |          |          |          |            |                 |          |
| x<br>y              |          | 0        | 0,2      | 0,4        | 0,6             | 0,8      |
|                     |          | 0,6      | 0,8      | 1          |                 |          |
|                     |          | K=0      | $\eta=5$ | $\gamma=1$ | $\beta=0,00371$ |          |
| 0                   | 0        | 0        | 0        | 0          | 0               | 0        |
| 0,2                 | 0,228227 | 0,222521 | 0,19958  | 0,149138   | 0,072273        | 0,007606 |
| 0,4                 | 0,453766 | 0,442682 | 0,39954  | 0,305134   | 0,15451         | 0,024553 |
| 0,6                 | 0,674227 | 0,658413 | 0,599873 | 0,473107   | 0,257419        | 0,04274  |

|                                      |                    |                    |                    |                    |               |                   |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------|-------------------|
|                                      |                    |                    |                    |                    |               | 7                 |
| 0,8                                  | 0,88764<br>5       | 0,86826<br>3       | 0,80023<br>4       | 0,65507<br>9       | 0,39224<br>6  | -<br>0,02343<br>1 |
| 1                                    | 1,09217<br>1       | 1,07146<br>7       | 1,00023<br>7       | 0,84913<br>4       | 0,56890<br>6  | 0,10584<br>3      |
| ცილინდრული გარსი Mx                  |                    |                    |                    |                    |               |                   |
| x<br>y                               | 0<br>0,6           | 0,8                | 0,2<br>0,8         | 1                  | 0,4           |                   |
| K=0      η=5      γ=1      β=0,00371 |                    |                    |                    |                    |               |                   |
| 0                                    | -<br>24,63808<br>9 | -<br>23,56628<br>2 | -<br>20,38113<br>5 | -<br>-15,2014      | -<br>8,281696 | 0                 |
| 0,2                                  | -<br>24,65541<br>3 | -<br>23,58709<br>6 | -<br>20,41123      | -<br>15,23918<br>6 | -<br>8,310364 | 0                 |
| 0,4                                  | -<br>24,70505<br>5 | -<br>23,64680<br>5 | -<br>20,49782      | -<br>15,34920<br>6 | -<br>-8,39723 | 0                 |
| 0,6                                  | -<br>24,78349<br>7 | -<br>23,74080<br>3 | -<br>20,63320<br>3 | -<br>15,52336<br>1 | -<br>-8,5444  | 0                 |
| 0,8                                  | -<br>24,88445<br>9 | -<br>23,86162<br>8 | -<br>-20,8054      | -<br>15,74704<br>3 | -<br>8,750099 | 0                 |
| 1                                    | -<br>24,96885      | -<br>23,97040      | -<br>20,97371      | -<br>15,97933      | -<br>8,992193 | 0                 |



|  |   |   |   |   |  |  |
|--|---|---|---|---|--|--|
|  | 3 | 2 | 1 | 6 |  |  |
|--|---|---|---|---|--|--|

ცხრილი 4-ის გაგრძელება

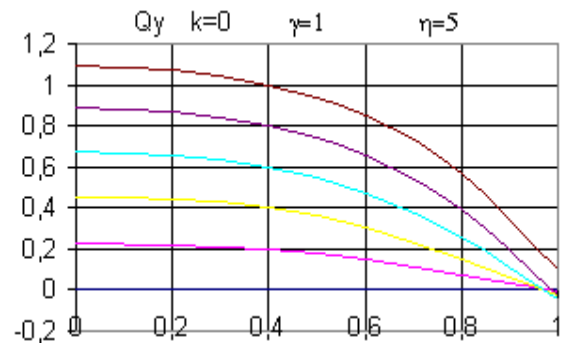
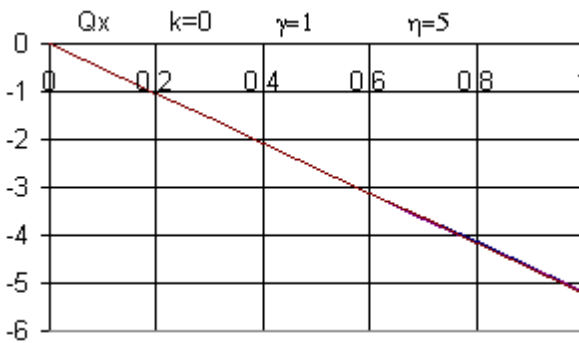
| ცილინდრული გარსი My                 |              |              |              |              |              |                   |
|-------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------------------|
| x \ y                               | 0            | 0,2          | 0,4          | 0,6          | 0,8          | 1                 |
| K=0                                 |              |              |              |              |              |                   |
| $\eta=5$ $\gamma=1$ $\beta=0,00471$ |              |              |              |              |              |                   |
| 0                                   | 0,55665<br>3 | 0,54357<br>9 | 0,49621<br>3 | 0,39556      | 0,22538<br>1 | -<br>0,01281<br>2 |
| 0,2                                 | 0,53389<br>6 | 0,52142<br>2 | 0,47644      | 0,38094<br>5 | 0,21842<br>9 | -<br>0,01223<br>8 |
| 0,4                                 | 0,46588<br>8 | 0,45517<br>7 | 0,41706      | 0,33638      | 0,19658<br>7 | -<br>0,00938<br>1 |
| 0,6                                 | 0,35339      | 0,34549<br>5 | 0,31793<br>3 | 0,25988<br>3 | 0,15680<br>6 | -<br>0,00261<br>5 |
| 0,8                                 | 0,19758<br>1 | 0,19337      | 0,17893<br>5 | 0,14869<br>6 | 0,09379      | 0,00522<br>5      |
| 1                                   | 0,00000      | 0,00000      | 0,00000      | 0,00000      | 0,00000      | 0,00000           |
| ცილინდრული გარსი U                  |              |              |              |              |              |                   |
| x \ y                               | 0            | 0,2          | 0,4          | 0,6          | 0,8          | 1                 |

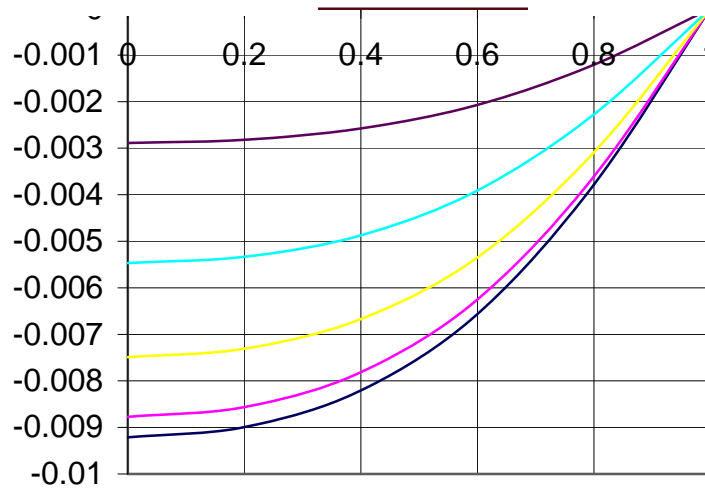
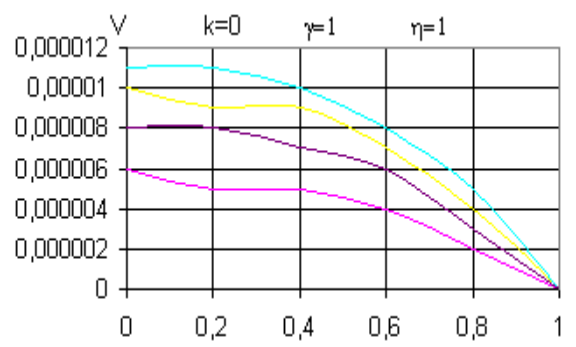
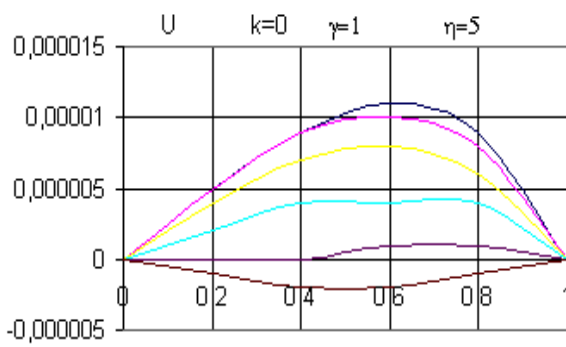
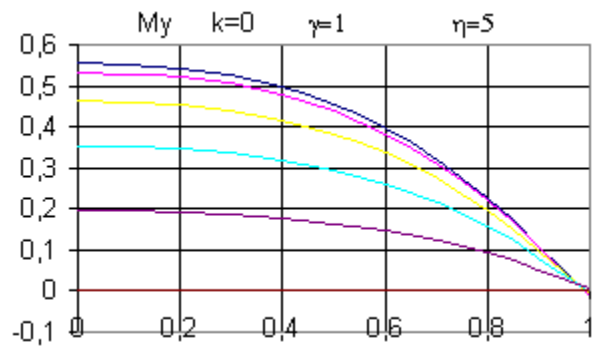
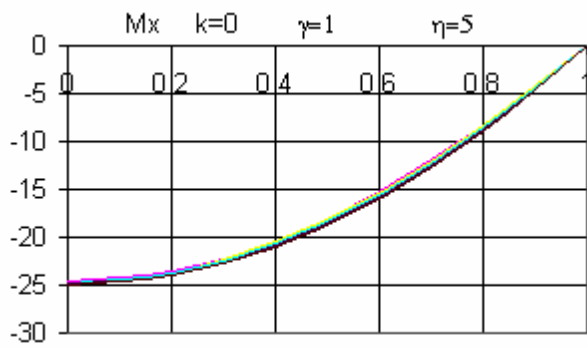
|                    |              | K=0               | $\eta=5$          | $\gamma=1$        | $\beta=0,00371$   |     |
|--------------------|--------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----|
| 0                  | 0            | 0,00000<br>5      | 0,00000<br>9      | 0,00001<br>1      | 0,00000<br>9      | 0   |
| 0,2                | 0            | 0,00000<br>5      | 0,00000<br>9      | 0,00001           | 0,00000<br>8      | 0   |
| 0,4                | 0            | 0,00000<br>4      | 0,00000<br>7      | 0,00000<br>8      | 0,00000<br>6      | 0   |
| 0,6                | 0            | 0,00000<br>2      | 0,00000<br>4      | 0,00000<br>4      | 0,00000<br>4      | 0   |
| 0,8                | 0            | 0                 | 0                 | 0,00000<br>1      | 0,00000<br>1      | 0   |
| 1                  | 0            | -<br>0,00000<br>1 | -<br>0,00000<br>2 | -<br>0,00000<br>2 | -<br>0,00000<br>1 | 0   |
| ცილინდრული გარსი V |              |                   |                   |                   |                   |     |
| x<br>y             | 0            | 0,6               | 0,8               | 0,2               | 1                 | 0,4 |
|                    |              | K=0               | $\eta=5$          | $\gamma=1$        | $\beta=0,00371$   |     |
| 0                  | 0            | 0                 | 0                 | 0                 | 0                 | 0   |
| 0,2                | 0,00000<br>6 | 0,00000<br>5      | 0,00000<br>5      | 0,00000<br>4      | 0,00000<br>2      | 0   |
| 0,4                | 0,00001      | 0,00000<br>9      | 0,00000<br>9      | 0,00000<br>7      | 0,00000<br>4      | 0   |
| 0,6                | 0,00001<br>1 | 0,00001<br>1      | 0,00001           | 0,00000<br>8      | 0,00000<br>5      | 0   |
| 0,8                | 0,00000      | 0,00000           | 0,00000           | 0,00000           | 0,00000           | 0   |

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 8 | 7 | 6 | 3 |   |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

ცხრილი 4-ის გაგრძელება

| ცილინდრული გარსი W |            |                 |          |          |          |          |   |
|--------------------|------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|---|
|                    |            | 0               |          | 0,2      |          | 0,4      |   |
| y                  | x          | 0,6             |          | 0,8      |          | 1        |   |
|                    | $K=0$      |                 |          |          |          |          |   |
| $\eta=5$           | $\gamma=1$ | $\beta=0,00371$ |          |          |          |          |   |
| 0                  | -          | 0,009214        | 0,008991 | 0,008205 | 0,006563 | 0,003784 | 0 |
| 0,2                | -          | 0,008774        | 0,008561 | 0,007814 | 0,006253 | 0,003608 | 0 |
| 0,4                | -          | 0,007489        | 0,007308 | 0,006672 | 0,005346 | 0,003093 | 0 |
| 0,6                | -          | 0,005467        | 0,005335 | 0,004874 | 0,003911 | 0,002272 | 0 |
| 0,8                | -          | 0,002888        | 0,002819 | 0,002577 | 0,002071 | 0,001207 | 0 |
| 1                  | 0          | 0               | 0        | 0        | 0        | 0        | 0 |





$$U, V \text{ და } W \text{ გადაადგილების კომპონენტებია ხოლო } B = \frac{Eh}{1-\nu^2},$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ  $\sim 2^{\circ}$  და  $\sim 3^{\circ}$  წონასწორობის განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ  $P_n^*$  – ურთიერთქმედების რეაქციულ ძალას და ჩავთვლით, რომ  $W_x = W_y = W^*$  მაშინ მივიღებთ გარსთა ტექნიკურ თეორიაში ცნობილ ცილინდრული გარსის წონასწორობის განტოლეს, ათა სისტემას.

### 3. დასკვნა

1. ნაჩვენებია, რომ ი. ლუდუშაურის თეორიით მიღებულ დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნები გამოირჩევიან სწრაფი კრებადობით და მაღალი სიზუსტით. იგი მეტად მარტივია მათემატიკური თვალსაზრისით. უნარი აქვს წარმატებით გაუწიოს კონკურენცია რიცხვით მეთოდებს მარტივი სტრუქტურის მქონე ობიექტების განხილვისას.
2. კონკრეტული მაგადითების განხილვით დისერტაციაში მიღებული შედეგები პრაქტიკულად არ განსხვავდებიან კლასიკური დრეკადობის თეორიით სასაზღვრო პირობებით მიღებულ შედეგებისაგან, რაც ჩატარებული გამოკვლევის საიმედოობაზე მიუთითებს.
3. აიქტიური სისტემების ურთიერთქმედების ძალები ხისტად ჩამაგრებული გვერდების გადაკვეთის წერტილიდან გამომავალ დიაგონალის გასწვრივ ნულის ტოლია, რაც აიზიკური მოსაზრებებით მოსადოდნედიც იყო და კვდავ მიუთითებს ჩატარებული გამოკვლევის საიმედოობაზე.
4. ნაჩვენებია დამრეცი ცილინდრული გარსის გაანგარიშებისას ი. ლუდუშაურის მეთოდის უპირატესობა კლასიკურ მეთოდებთან შედარებით.
5. ჩატარებულია მთელი რიგი რიცხვითი ექსპერიმენტები მათემატიკური ადგორითმის სიზუსტისა და ამოხსნის კრებადობის დასადგენად.

## გამოყენებული ლიტერატურა

1. Тимошенко С.П. Войновский Кригер. Пластинки и оболочки. Гостехиздат. Москва. 1966.
2. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля. СПб. 1912-1914. Ч. 1, 1912. VI. 330 с. Ч. 2.1914. 331-640, IV с
3. Бубнов И.Г. Труды по теории пластин. М. Гостехтеооиздат, 1953. 423 с.
4. Папкович П.Ф. Строительная механика корабля. Л. Судпромгиз, 1941. Ч. 2. 960 с.
5. Гвоздев А.А. Устойчивость тонких оболочек. Бетон и железобетон. № 10. 1961.
6. Алумяэ Я.А. Асимптотическое интегрирование уравнений статической устойчивости конической оболочки вращения / УПММ. 1957. Т. 21, вып.1. С.83-88.
7. Власов В.З. Строительная механика оболочек. М. ОНТИ. 1936. 263 с.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение к технике. М. Гостехиздат. 1949. 784 с.
9. Пастернак Я.Л. Практический расчет складок и цилиндрических оболочек. Проектинстандарт. 1933. № 2. С.31-36.
10. Милейковский И.Е. Некоторые практические задачи по расчету покрытий типа цилиндрических оболочек. В сб. ЦНИПС. Стройиздат.
11. Милейковский И.Е., Кунар А.К. Гипары. Расчет и проектирование пологих оболочек покрытий в форме гиперболических параболоидов. М. Стройиздат, 1978. 223 с.
12. Векуа И.Н. Вариационные принципы построения теорий оболочек. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1970.
13. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения теорий оболочек. М. Наука, 1982, 286 с.
14. Векуа И.Н. Об одном варианте теории тонких оболочек. Новосибирск, 1964. 68 с.
15. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Шперенко К.И. Сферические днища, ослабленные отверстиями. Киев. Наукова думка, 1970.
16. Гудушаури И.И. Теория упругости в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Тбилиси «Мецниереба». 1990. 447 с.

17. Микеладзе Ш.Е. Статика анизотропных пластичных оболочек. Изд. АН ГССР. Тбилиси, 1963.
18. Микеладзе Ш.Е. Введение в техническую теорию идеально-пластичных тонких оболочек. Изд-во «Мецნიერება». Тбилиси. 1969.
19. მ. მიქელაძე. გარსთა თეორიის სააუქვდები. თბილისი. განათლება. 1974.
20. მ. მიქელაძე. აიდების ლუნვის თეორია. თბილისი. «განათლება». 1976.
21. Ониашвили О.Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций. Строительная механика в СССР. 1917. – 1967. – М. Стройиздат, 1969.
22. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Физматгиз. 1974. 446 с.
23. Булия Н.П. Напряженно-деформированное состояние пологих упругих оболочек с отверстиями при изгибе. Научн. произв. об-ние нар. образования ГССР. Тбилиси 1991. 178 с.
24. Вайнберг Д.В., Жданов В.З. Матричные алгоритмы в теории оболочек вращения. Киев. Издательство при Киев. ун-те, 1967. 164 с.
25. Ворович И.Я., Лебедев Л.П. О существовании решения из нелинейной теории пологих оболочек. ПММ. 1972. Т. 36, вып. 4. С.691-704.
26. Галимов С.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек: (учеб. пособие). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
27. Гольденвейзер А.Л. О применении общих теорем теории упругости к тонким оболочек. «Прикладная мат. и мех.» т. 8. вып. 6. 1944.
28. Григоренко Я.М. Решение задач теории оболочек методами численного анализа. Прикладная механика, 1984, 20, № 10.
29. Григолюк Э.Я., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М. Наука, 1978. 409с.
30. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев. Наук. думка, 1973. 248 с.
31. Пономарев С.А. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М. Машгиз. 1958.
32. Кон С.Я., Каплан Ю.И. Расчет цилиндрических оболочек покрытий зданий. Киев: Выща школа, 1973. 243 с.
33. Poisson S.D. Memoire sur ces surfaces eogastiques. 1814. Paris, Mem.



34. Ляв А. Математическая теория упругости. Пер. с англ., ОНТИ, Москва. 1935.
35. Navie L.M.H. Memoire sur la déviation des poutres élastiques. Extrait des recherches sur la déviation des poutres élastiques Soc. philomath, juin et juillet. 1823. P. 92.
36. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. Л.-М.: Госстройиздат, 1933. 371 с.
37. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Т. II. Москва, Изд. АН СССР. 1953.
38. Галеркин Б.Г. Собрание сочинений. Т. III. Москва., Изд. АН СССР. 1953
39. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов / Перевод с англ. – М. Стройиздат, 1975. 370 с.
40. Васильев В.В. О теории тонких пластин (обзор). Изв. Акад. наук. МТТ. №3. 1992.
41. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. М. Наука. 1966.
42. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М. Гостехтеориздат, 1956. 419с.
43. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М. Наука, 1972. 432 с.
44. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем: 2-е изд. перераб. и доп. М. Наука, 1967. 984 с.
45. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней пластин и оболочек. Киев: Кища школа, 1988. 167 с.
46. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Пер. с англ. Л.Г Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолюка. М. Наука. 1982. 567 с.
47. Кипиани Г.О. Теоретическое решение и расчет сборных дорожных покрытий на основе исследования слоистых пластин с разрезами. Труды ГТУ, 2001. № 6(439). С. 71-74.
48. Коваленко А.Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. Изд-во АН УССР, Киев, 1955.
49. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. ОГИЗ. М.-Л., 1947.
50. Михайлов Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Изд. ЛГУ, 1980.
51. Прагер В. Проектирование пластинок наименьшего веса. Сб. пер. «Механика». 1956.

52. Ржаницын А.Р. Составные стержени и пластинки. М. Стройиздат, 1986. 326 с.
53. Ржаницын А.Р. Предельное равновесие пластинок и оболочек. М. Наука. 1983. 288 с.
54. Савин Г.Я., Тульчий В.И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев. Наук. думка. 1971. 268 с.
55. Савин Г.Я., Флейшман Я.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев. Наук. думка. 1964. 384 с.
56. Тархнишвили В.А. Расчет тонких упругих пластинок и оболочек с отверстиями. Тбилиси. 1990.
57. Шапиро Г.С. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на упругом основании. ПММ. 1943. Т. 7, вып. 6. С. 316-320.
58. Шапиро Г.С. Упруго-пластический изгиб круглой пластинки и существование решения жестко-пластической задачи. Изв. АН СССР. ОТН. 1961. № 2. С. 142-146.
59. Ширко И.В. О форме равнопрочной пластинки. Инж. журнал. Т. 6, вып. 2. 1965.
60. Черепанов Г.П., Кулиев С.А. Пластины и оболочки переменной толщины. Прикладная механика. 1979. 15, № 12.
61. ცხვედაძე რ., ლუდუშაური ი. სწორკუთხედის აორმის თხედი აიდის ლუნვაზე გაანგარიშების ზოგიერთი ამოცანის ზუსტი გადაწყვეტა. საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები ჰიდროტექნიკურ ნაგებობათა პროექტირების, მშენებლობისა და ექსპლოატაციის პრობლემებზე. თბილისი, 2000. გვ. 15-19.
62. ცხვედაძე რ., ბაციკაძე თ., ტაბატაძე დ. დრეკად აუძეზე მდებარე აიდის ანგარიში ჩვეულებრივ დიაერენციალურ განტოდებებში. თხედვედდიანი სივრცითი სისტემების პრობლემებისადმი მიძღვნიდი საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები. თბილისი, 4-5 ივდისი 2000. გვ. 91-95.
63. ცხვედაძე რ., ლუდუშაური ი. კონტურით ხისტად ჩამაგრებული სწორკუთხედის აორმის თხედი აიდის ლუნვის ამოცანის ზუსტი გადაწყვეტა ჩვეულებრივ დიაერენციალურ განტოდებებში. ჟურ. «ნაგებობათა თეორია და სეისმომედეგობა». 2. თბილისი. 2001. გვ. 185-192.

64. Nash W.A. Bibliography on shells and shell-like structures. Part 1. David Taylor Model Basin Report, 803. 1954. Part H. Dep. of Eng. Mech. Univ. of Florida. 1957.
65. Reissner E. A note on generating generalized two-dimensional plate and shell theories. ZAMP. 1977. 28. P. 633-642.
66. Reissner E. On asymptotic expansion for circular cylindrical shells. J. Appl. Mech. 1964. 31. P. 245-252.
67. Reissner E. On asymptotic solutions for nonsymmetric deformations of shallow shells of revolution. Int. J. Engin. Sci. 1964. 2. p. 27-43.
68. Reissner E. On axisymmetric deformations of thin shells of revolution. Proceedings of Symposium in Applied Mathematics. Volume III, Elasticity. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London, 1950. P. 27-52.
69. Reissner E. On the derivation of the theory of thin elastic shells. Math-Phys. 1963. 42. P. 263-277.
70. Green A.J., Adkins J.E. Large elastic deformations, 2-nd ed. Oxford, London, New York: Univ. Press, 1970.
71. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука, 1966.
72. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Бурчуладзе Т.В., Башалеишвили М.О. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва, Наука, 1976.
73. Микеладзе М.Ш. Некоторые задачи строительной механики. М.-Л. 1948.
74. Микеладзе М.Ш. Численные решения системы дифференциальных уравнений ПММ. Т. 17. вып. 3. 1953.
75. Варвак П.М. Приближенный расчет пластинок средней толщины. Сб. тр. Киевского стр. института 3, 1936, Водный трансп. № 1, 1944.
76. Гудушаури И.И., Джакели А.В. О некоторых вопросах расчета сооружений с фундаментной плитой на упругом основании. Сообщение АН ГССР. 110. № 1, 1983. 4 с.
77. ი. ლუღუშაური, გ. ყაღაბეგაშვიდი, დ. ტაბატაძე. სხვადასხვა აორმის განივი კვეთის დახრიდ არხში (წყაღსატარში) სითხის დამინარუდ დინებაზე ამოცანების ზუსტი გადაწყვეტა. ჟ. «ენერგია» 1(13). თბიღისი. 2000.

78. ი. ლუღუშაური. უწყვეტ ტანთა მექანიკის ზოგად მეცნიერებაში შექმნილი ახალი მიმართულების პრაქტიკული მნიშვნელობის შესახებ. სტუ-ს საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები. თბილისი. 2001.
79. ი. ლუღუშაური. უწყვეტ ტანთა მექანიკის ზოგად მეცნიერებაში შექმნილი ახალი მიმართულების პრაქტიკული რეაღიზაციის ზოგიერთი შედეგის შესახებ. «ნაგებობათა თეორია და სეისმომედეგობა». 2. თბილისი. 2001.
80. Gudushauri I., Kipiani G., Danegia D. Algorithm of solving for the concrete problem of calculating the rectangular plate with the hole of the same form. Problems of Applied Mechanics. Tbilisi, 2000. № 1.
81. Калабегашвили М.Г. О расчете кольцевых плит с круговыми шарнирами (на груз. языке). Сообщ. АН ГССР, 72, № 2. 1974.
82. ლუღუშაური ი. კლასიკურ გარსთა თეორიაში დაკანონებული სასაზღვრო პირობების შესაძლო სრულყოფის შესახებ. უწყვეტ ტანთა მექანიკის პრობლემებზე საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები. სტუ. თბილისი. 1997.
83. Банцури Р.Д., Исаханов Р.С. Об одной задаче теории упругости для области с неизвестной частью границы. Сообщ. АН ГССР, 116, № 1, 1984. С. 4-48.
84. Вашакмадзе Т.С. Теория упругих пластин. Успехи механики т. II, вып. 3. 1988.
85. Гордезиани Д.Г. Методы декомпозиции в задачах теории упругости. «Статика и динамика тонкостенных конструкций». Тбилиси. 1990.
86. Мухадзе Л.Г. Некоторые методы расчета пологих прямоугольных оболочек. «Строительство и архитектура». Тбилиси. 1961. № 9-10.
87. Думбадзе А.А. Длительная прочность некоторых композитных материалов, применяемых в конструкциях. ИЛ. серия «строительство и архитектура». № 16. Груз. НИИНТИ. Тбилиси. 1983.
88. Алумяэ Я.А. Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет. М. Наука, 1972. С. 227-226.
89. Джanelidze Г.И. Обзор работ по теории изгиба тонких плит. Опубликованных в СССР/У ПММ. 1948. Т. 12, вып. 1. С. 109-128.
90. Немиш Ю.Я., Чернопиский Д.И. Упругое равновесие гофрированных тел. Киев. Наук. думка. 1983. 188 с.

91. Naghdi P.M. On the theory of thin elastic shells. *Quart. Appl. Math.* 1957. 14. P.369-380.
92. Какушадзе А.М. Установление граничных условий при расчете плит произвольного очертания. Тбилиси, 1959.
93. Габричидзе Г.К. Некоторые итерационные схемы расчета сложных упругих систем. *Строительная механика пространственных конструкций*. вып. 3. «Мецниереба». Тбилиси. 1975.
94. Базгадзе Г.Ш., Калабегашвили М.Г. К теории рациональных упруго-пластичных сопряженных цилиндрических оболочек. *Сообщ. АН ГССР*, 95, № 2, 1979.
95. Бастатский Б.Н. Модификация метода Бубнова-Галеркина в задачах теории пологих оболочек СМ и РС, 1985, № 5.
96. Вайнберг Д.В., Синявский А.Л. Расчет оболочек. Киев: Госстройиздат УССР, 1961, 119 с.
97. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М. 1976. 278 с.
98. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратия Я.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев. Вища школа, 1985. 190 с.
99. Данелия Д.К., Мухадзе Г.М. Решение различных граничных задач пологих оболочек с применением комбинированного контурного элемента. *Тр. ГТУ* № 6(226). 1992.
100. Дикович В.В. Пологие прямоугольные в плане оболочки вращения. Л. Госстройиздат. 1960. 143 с.
101. Лурье А.И. Теория упругости. Наука. Москва, 1970.
102. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л. Судостроение, 1962.
103. Работнов Ю.И. Пластинки и оболочки. Механика в СССР за тридцать лет. М. Гостехиздат. 1950. 545 с.
104. Meissner E. Das Elastizitätsproblem für dünnere Schalen von Ring- oder Kugel- oder Kegelform. *Phys. Z.*, 14. JSse 8. 343. 1910.
105. Meissner E. Das Elastizitätsproblem für dünnere Schalen von Ring- oder Kugel- oder Kegelform. *Phys. Z.*, 14. JSse 8. 343. 1912.
106. Григоренко Я.М., Мукоед А.Я. Решение задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1979. 279 с.
107. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. Цилиндрические оболочки ослабленные отверстиями. Киев. Наукова думка, 1974.

108. Кац С.Я. Строительная механика оболочек. М. Машиностроение. 1966. 508 с.
109. რეზიანზიდი გ., დანელია დ., ცხვედაძე რ. ცილინდრული გადახურვის გაანგარიშება ჩვეულებრივ დიაერენციალურ განტოლებებში. ჟურნალი «ინტელექტი» 2006.
110. Стельмах С.М. Формулы и таблицы для расчета пологих сферических и цилиндрических оболочек с прямоугольным и квадратным опорным контуром. Ташкент. 1964.
111. Абовский Н.В., Андреев П.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М. 1978. 288 с.
112. Ворович И.Я. Статистический метод в теории устойчивости оболочек. ПММ. 1959. Т. 23, вып. 5. С.885-892.
113. Муштари Х.М., Галимов С.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань. Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
114. Григолюк Э.Я., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М. Машиностроение, 1980. 416 с.
115. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Москва, ОНТИ. 1935.
116. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М. – 1979.
117. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. 2-е изд. перераб. и доп. М. Стройиздат, 1965. 279 с.
118. Дишингер Ф. Оболочки: Тонкостенные железобетонные купола и своды. Пер. с нем. Под ред. П.Я Каменцева, С.З. Гинзбурга, И.Г. Иванова-Дятлова. М. Л. Госстройиздат, 1932. 270 с.
119. Лизин В.Т., Ляткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. 2-е изд., перераб. и доп. – М. Машиностроение. 1985.
120. Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. Деформированность и устойчивость пространственных пластинчатых систем с разрывными параметрами. Санкт-Петербург. Стройиздат СПб. 1996.
121. Рикардо Р.В., Тетере Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига. Зинатне, 1974. 310 с.
122. Родионова В.А. Теория анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. Л. Изд-во ЛГУ, 1983. 116 с.
123. Серов Н.Л. Устойчивость оболочек вращения при некоторых видах нагрузок. Л. Изд-во ЛГУ, 1974. 207 с.

124. Руководство по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий. М. Стройиздат, 1979. 421с.
125. Argyris J.H., Kessely S. Energy theotems and structuraçõ anaçõysis. London: Butterwirths, 1969. 83 p.
126. Areçand. Anaçõysis oõ bending stresses in nansçõationaçõ sheçõõõs, inccõõding anisotropic and inhomogeneous properties. Trondheim. Norges tekniske vitonskapsakad, 1963, VI, 161 p.
127. Кантон Б.Я. Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек. Киев: Наук. думка. 1971. 136 с.
128. Рейсснер Г. Сб. пер. Механика. № 5. 1953.
129. Ван-Цзи-Де. Прикладная теория упругости. М., 1959.
130. Васильков Б.С., Волошихин Л.А. Расчет складок с продольной кривизной. Строительные конструкции. Теория и методы расчета Тр. ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. – 1970. Вып. 8. – С. 105-111.
131. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. Минск. Высшая школа, 1990.
132. Ильюшин А.А., Ленский В.С. Соппротивление материалов. М., 1959.
133. Расчет трехслойных панелей. Александров А.Я., Брюккер Л.Э., Куршин Л.М., Прусаков А.П. Под общ. ред.Александрова А.Я., Куршина Л.М. М. Оборонгиз, 1960. 271 с.
134. Расчеты и испытания на прочность: метод и программа расчета на ЭВМ осесимметричных оболочечных конструкций при учете физической и геометрической нелинейностей. Метод, рекомендации: МР.-200– 86 /Разраб. Корнишин М.С. и др М. 1986. 32м с.
135. Расчеты к испытания на прочность: метод и программа расчета на ЭВМ пологих оболочек сложной формы: Метод рекомендации: МР. 145 – 84 Разраб. Кантор Б.Я., Пупков Л.И. М. 1984. 26 с.
136. Рикардо Р.В. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига. Зинатие. 1986.
137. Рогалевич В.В., Логинская А.А. Метод коллокации при исследовании гибких и пологих оболочек переменной толщины в ++++++
138. Саченков А.В. Об устойчивости оболочек за пределом упругости. Изв. Казан, филиала АН СССР. Сер. физ. мат. и техн. наук. Вып. 10. Казань. Тат-книгоиздат, 1956.

139. Чирас А.А. Теория надежности и оптимальное проектирование. «Литовский механический сборник». № 2(3). 1968.
140. Образцов И.Ф. Изгиб и кручение многозамкнутых кессонных конструкций. М. Оборонгиз. 1957. 68 с. Труды МАИ, вып. 86.
141. Образцов И.Ф. К расчету тонкостенных стержней на устойчивость при изгибе. М. Оборонгиз. 1953. 87 с. Труды МАИ, вып. 86.
142. Штаерман Я.Я. Расчет купола как арки на упругом основании. Проект и стандарт. 1933. № 9. С. 21-25.
143. Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Пер. с англ. под ред. Филина А.П. В 2 т. Л.Г. – Судостроение, 1974. Т. 1. 308 с. Т. 2. 312 с.
144. რეზიაშვიდი გ. ერთი გვერდით ხისტად ჩამაგრებული სწორკუთხედის აორმის თხედი კონსოლური აიდის ღუნვის ამოცანის ზუსტი გადაწყვეტა ჩვეულებრივ დიაერენციალურ განტოლებებით. მეცნიერება და ტექნოლოგიები. 1-3. 2003.
145. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз. Л. 1958.
146. რეზიაშვიდი გ. სწორკუთხედის აორმის აიდის ღუნვაზე ამოცანის გადაწყვეტა ჩვეულებრივ დიაერენციალურ განტოლებებში. სამეცნიერო კონაერენცია «მშენებლობა და XXI საუკუნე». თბილისი, 2005.
147. რეზიაშვიდი გ., უსუაშვიდი მ., მაცაბერიძე თ. კონსოლური აიდის ღუნვაზე გაანგარიშების ამოცანის გადაწყვეტა ჩვეულებრივ დიაერენციალურ განტოლებებში. საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები. 2000.
148. რეზიაშვიდი გ. ჰიდროსტატიკური დატვირთვის გავდენით კონსოლური აიდის «ციდინდრული ღუნვის» შესწავლა ი. ლუდუშაურის მეთოდით. მოხს. თეზისები. რესპუბლიკურ კონაერენციის. თბილისი. 2001.
149. Смирнов А.Ф. Применение в строительной механике ЭЦВМ. В сб. Строительная механика в СССР. 1917-1967. М. Стройиздат. 1969.



```

PROGRAM Gr70
c      თავისუფადად დაერღნობილი აიდა
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /C/A(700,701),B(700),IP0(5)
      DIMENSION A1(700),A2(700),A3(700),A4(700),A5(700),A6(700),
1A7(700),A8(700),A9(700)
      open(5,siqe='ricl.dat')
      Q1=0.3
      ETA=1.
      M11=6
      N11=6
      M12=M11-1
      N12=N11-1
      I2=0
      I11=1
      I12=1
      I99=1
      I77=1
      J8=2*(N12*M12-1)
      IP0(1)=J8
      J21=J8+1
      DO 21 I=1,J8
      DO 21 J=1,J21
      A(I,J)=0.
21  CONTINUE
7   X1=1./(M11-1.)
    Y1=1./(N11-1.)
    N1=1
6   N2=N1-1
    Y=N2*Y1
    M1=1
5   M2=M1-1
    X=M2*X1
    IF(I99.EQ.2) GO TO 170
c   IF(N1.EQ.N11) GO TO 14
c   IF(M1.EQ.M11) GO TO 111
    IF(N1.EQ.1) GO TO 111
    IF(M1.EQ.1) GO TO 11
    IF(N1.EQ.N11.AND.M1.EQ.M11) GO TO 14
143 I1=I2+1
    I2=I2+2
170 J1=0
    J2=N12*M12-1
c   WRITE(5,212) i1,i2,i3,i4,j1,j2,j3,j4,N1,M1

```

```

I14=0
I15=J2
DO 4 N=1,N12
DO 3 M=1,M12
IF(N.EQ.N12.AND.M.EQ.M12) GO TO 10
c   write(5,212) J1,J2,J3,J4,I12
J1=J1+1
J2=J2+1
Y3=N*Y
S1=DSIN(Y3)
C1=DCOS(Y3)
X3=M*X
S2=DSIN(X3)
C2=DCOS(X3)
AN=N*1.
C3=DCOS(AN)
S3=DSIN(AN)
AM=M*1.
S4=DSIN(AM)
C4=DCOS(AM)
c   write(5,212) j1,j2,j3,j4,I12
F1XY=1./M**2*((C2-C4)/M**2+(X**2-1)/2*C4)*C1
F2XY=Q1/ETA**2*(C2-C4)/(M**2*N**2)*(C1-C3)
F3XY=1./(N**2*ETA**4)*((C1-C3)/N**2+(Y**2-1)/2*C3)*C2
IF(I12.EQ.2) GO TO 9

A(I1,J1)=F1XY+2*F2XY+F3XY
A(I1,J2)=F1XY-F3XY
A(I1,J21)=-(.1/4*(.1/6*(X**4-1)-(X**2-1))
1+Q1/(4*ETA**2)*(X**2-1)*(Y**2-1))

A(I2,J1)=(.1*N)/M**2*(S2/M-X*C4)+Q1/ETA**2*S2/(M*N))*S1
A(I2,J2)=(.1*N)/M**2*(S2/M-X*C4)+1/ETA**2*S2/(M*N))*S1
A(I2,J21)=-Q1*X*Y
GO TO 10
9   K11=1
I14=I14+1
I15=I15+1
c   write(5,212) i14,i15,I12
T1=T1+(B(I14)*C2*C1)
T2=T2+(B(I15)/(M*N)*S2*S1)
T3=T3+(B(I14)/M*S2*C1)
T4=T4+(B(I14)/N*C2*S1)
T5=T5+(B(I14)+B(I15))/M**2*(C2-C4)*C1)
T6=T6+(B(I14)-B(I15))/N**2*(C1-C3)*C2)
T7=T7+(-(B(I14)+B(I15))*F1XY+(B(I14)-B(I15))*F2XY))
T8=T8+((B(I14)+B(I15))*F2XY+(B(I14)-B(I15))*F3XY))
T9=T9+B(I15)
10  K10=1
c   write(5,212) J1,J2,I12
c   write(5,212) I14,I15,I16,I17,I12
3   CONTINUE
4   CONTINUE
IF(I11.EQ.1) GO TO 11
A1(I13)=T1
A2(I13)=T2/(ETA)
A3(I13)=(-X-T3)
A4(I13)=(T4)/(ETA)
A5(I13)=-((X**2-1)/2+T5)
A6(I13)=-T6/(ETA**2)
A7(I13)=-(-.1/4*(.1/6*(X**4-1)-(X**2-1))+T7)

```

```

A8(I13)=- (Q1/(4*ETA**2)*(X**2-1)*(Y**2-1)+T8)
A9(I13)=- (1+Q1)/ETA**2*T9
I13=I13+1
T1=0.
T2=0.
T3=0.
T4=0.
T5=0.
T6=0.
T7=0.
T8=0.
T9=0.
11  M1=M1+1
    IF(M1.LE.M11) GO TO 5
111  N1=N1+1
     IF(N1.LE.N11) GO TO 6
14   IF(I99.EQ.2) GO TO 12
c    DO 101 I=1,12
c    WRITE(5,211) (A(I,J),J=1,J21)
c 101  CONTINUE
     CALL GAUS
     WRITE(5,214) (B(I),I=1,J8)
     I13=1
     I11=I11+1
     I12=I12+1
     I99=I99+1
     I77=I77+1
     T1=0.
     T2=0.
     T3=0.
     T4=0.
     T5=0.
     T6=0.
     T7=0.
     T8=0.
     T9=0.
     GO TO 7
12   J2=(N11*M11)
     write (5,103)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A1(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A2(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A3(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A4(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A5(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A6(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A7(I),I=1,J2)
     write (5,102)
     WRITE (5,213) (A8(I),I=1,J2)
     write (5,102)
c    WRITE (5,213) (A9(I),I=1,J2)
211  FORMAT (6F10.4)
212  FORMAT (8I5)
214  FORMAT (6F10.4)
213  FORMAT (6F10.4)

```

```

102 FORMAT (68(1H-))
103 FORMAT (1x)
STOP
END
subroutine gaus
implicit real*8(a-h,o-z)
COMMON/C/A(700,701),B(700),IP0(5)
DIMENSION AMN(700)
dimension z(700),ix(700)
150 sormat(6s11.4)
160 sormat(//,20x,'rehenie citem',//)
C   write(5,160)
C   write(*,*)'sistem'
is=ip0(1)
is1=is+1
do 60 i=1,is
ix(i)=i
60 continue
do 61 n=1,is
t=0
do 62 i=n,is
do 62 j=n,is
is(dabs(a(i,j)).ge.t) go to 62
t=dabs(a(i,j))
k=i
m=j
62 continue
is(k.eq.n) go to 13
do 14 ip=n,is1
t=a(n,ip)
a(n,ip)=a(k,ip)
a(k,ip)=t
14 continue
13 is(m.eq.n) go to 15
do 16 ip=1,is
t=a(ip,n)
a(ip,n)=a(ip,m)
a(ip,m)=t
16 continue
ip=ix(n)
ix(n)=ix(m)
ix(m)=ip
15 continue
j=is+2
30 j=j-1
a(n,j)=a(n,j)/a(n,n)
is(j.gt.n) go to 30
n1=n+1
do 61 i=n1,is
do 61 j=n1,is1
a(i,j)=a(i,j)-a(i,n)*a(n,j)
61 continue
i=is1
40 i=i-1
z(i)=a(i,is1)/a(i,i)
k=i
50 k=k-1
a(k,is1)=a(k,is1)-a(k,i)*z(i)
is(k.gt.1) go to 50
is(i.gt.2) go to 40

```

```

        z(1)=a(1,is1)/a(1,1)
        do 21 k=1,is
        do 21 i=1,is
        is(k.eq.ix(i)) amn(k)=z(i)
21 continue
29 format(//,120(1h-),////////)
c      write(5,150)(amn(i),i=1,is)
c      write(5,29)
c      write(*,*)amn
        do 31 i=1,is
        b(i)=amn(i)
31 continue
        return
        end

```

```

c      PROGRAM RS46
c      ციფინდრუდი გარბი 2006
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /C/A(700,701),B(700),IP0(5)
      DIMENSION A1(700),A2(700),A3(700),A4(700),A5(700),A6(700),
1A7(700),A8(700),A9(700),A10(700),A11(700),A12(700),A13(700),
1A14(700),A15(700),A16(700)
      open(5,siqe='ric1.dat')
      Q1=0.17
      ETA=5.
      D=2.5*10.**5
      q=1.
      R=10.
      GA=1./2.
      BT=0.00371
      I3=0
      I11=1
      I12=1
      I99=1
      I77=1
      M11=6
      N11=6
      N12=N11-2
      M12=M11-2
      J8=3*(N12*M12)
      J21=J8+1
      IP0(1)=J8
      DO 21 I=1,J8
      DO 21 J=1,J21
      A(I,J)=0.
21 CONTINUE
7   X1=1./(M11-1.)
   Y1=1./(N11-1.)
   N1=1
6   N2=N1-1
   Y=N2*Y1
   M1=1
5   M2=M1-1
   X=M2*X1
500 IF(I12.EQ.2) GO TO 170
202 IF(N1.EQ.N11) GO to 14

```

```

IF(M1.EQ.M11) GO TO 111
203 IF(M1.EQ.1) GO to 11
IF(N1.EQ.1) GO TO 111
149 I1=I3+1
I2=I3+2
150 I3=I3+3
170 J1=0
J2=N12*M12
J3=2*J2
c WRITE(5,212) i1,i2,i3,I12
I14=0
I15=J2
I16=2*J2
DO 4 N=1,N12
DO 3 M=1,M12
c write(5,212) J1,J2,J3,J4,I12
J1=J1+1
J2=J2+1
J3=J3+1
Y3=N*Y
S1=DSIN(Y3)
C1=DCOS(Y3)
X3=M*X
S2=DSIN(X3)
C2=DCOS(X3)
AN=N*1.
C3=DCOS(AN)
S3=DSIN(AN)
AM=M*1.
S4=DSIN(AM)
C4=DCOS(AM)
C write(5,212) j1,j2,j3,j4,I12
FX=1./24.*(X**4-6*X**2+5)
BMN=12*(1+Q1)*BT**2/(GA**2*M**2*N**2)
F18X=((M**2/(N**2*ETA**2)-Q1)*C2+Q1/M*S4)*S3/N
F28X=BMN*(S3/N-C3)*((C2-C4)/ETA+Q1/(1-Q1**2)
1*(S4/M-C4)*(Q1/ETA+ETA*R))
F38X=((M**2/(N**2*ETA**2)-Q1)*(C2-C4)/M**2-Q1/(2*M)*(X**2-
1)*S4)
1*S3/N
F48X=BMN*(S3/N-C4)*(1/ETA*((C2-C4)/M**2+(X**2-1)/2*C4)
1-(X**2-1)/2*Q1/(1-Q1**2)*(S4/M-C4)*(Q1/ETA+ETA*R))
F18Y=((1-Q1*M**2/(N**2*ETA**2))*C1+M**2/(N**2*ETA**2)*Q1/N*S3)
1*S4/M
F28Y=BMN*(S4/M-C4)*(ETA*R*(C1-C3)+Q1/(1-Q1**2)*(S3/N-C3)
1*(1/ETA+Q1*ETA*R))
F38Y=((1-Q1/N**2*M**2/ETA**2))*((C1-C3)/N**2-M**2/(N**2*ETA**2)
1*Q1/(2*N)*(Y**2-1)*S3)*S4/M
F48Y=BMN*(S4/M-C4)*(ETA*R*((C1-C3)/N**2+(Y**2-1)/2*C3)
1-Q1/(1-Q1**2)*(Y**2-1)/2*(S3/N-C3)*(1/ETA+Q1*R*ETA))

F1XY=1./M**2*((C2-C4)/M**2+(X**2-1)/2*C4)*C1
F2XY=Q1/(M**2*N**2*ETA**2)*(C2-C4)*(C1-C3)
F3XY=1./(N**2*ETA**2)*((C1-C3)/N**2+(Y**2-1)/2*C3)*C2
F4XY=(X**4-6*X**2+5)/24*R*ETA*BMN*(S4/M-C4)*(R*ETA*(C1-C3)
1+Q1/(1-Q1**2)*(S3/N-C3)*(1./ETA+Q1*ETA*R))
F5XY=Q1*(Y**2-1)/(2*ETA)*BMN*(S3/N-C3)*(1/ETA*(1./M**2*(C2-C4)
1+(X**2-1)/2*C4)-(X**2-1)/2*Q1/(1-Q1**2)*(S4/M-
C4)*(Q1/ETA+ETA*R))
F6XY=(X**4-6*X**2+5)/24*R*ETA*((1-Q1/N**2*M**2/ETA**2)*C1
1+M**2/(N**2*ETA**2)*Q1/N*S3)*S4/M

```

```

F7XY=Q1*(Y**2-1)/(2*ETA)*((M**2/(N**2*ETA**2)-Q1)*(C2-C4)/M**2
1-Q1/(2*M)*(X**2-1)*S4)*S3/N

IF(I12.EQ.2) GO TO 9
A(I1,J1)=(F1XY+F2XY)
A(I1,J2)=(F1XY-F2XY*(1-(ETA**3+Q1*ETA**3)/Q1)+FX*R*ETA*F28Y
1-Q1/2*(Y**2-1)/ETA*F48X)
A(I1,J3)=R*ETA*F1XY-M**2/(N**2*ETA)*F2XY+FX*R*ETA*F18Y
1-Q1/2*(Y**2-1)/ETA*F28X
A(I1,J21)=(X**4-6*X**2+5)/24

192 A(I2,J1)=(F2XY+F3XY)
A(I2,J2)=(1-(ETA**3+Q1*ETA**3)/Q1)*F2XY-F3XY+Q1/2*R/ETA*(X**2-
1)
1*F48Y-(Y**4-6*Y**2+5)/(24*ETA)*F28X
A(I2,J3)=R*ETA*FX*F2XY-M**2/(N**2*ETA)*F3XY+Q1/2*R/ETA*(X**2-1)
1*F38Y-(Y**4-6*Y**2+5)/(24*ETA)*F18X
A(I2,J21)=Q1*(X**2-1)/4*(Y**2-1)/ETA**2

191 A(I3,J1)=0.
A(I3,J2)=BMN*(S2/(M*N*ETA)*(S1-Y*S3)+R/M*ETA**3/N*S1*(S2-X*S4))
A(I3,J3)=(M**2/(N**2*ETA**2)-Q1)*S2/(N*M)*(S1-Y*S3)+(1-Q1/N**2
1*M**2/ETA**2)*ETA**2/(M*N)*S1*(S2-X*S4)+2*ETA*(1+Q1)/N*M*S2*S1
A(I3,J21)=0.

GO TO 10
9 K9=9
I14=I14+1
I15=I15+1
I16=I16+1
c write(5,212) i14,i15,I16,I12
T1=T1+(B(I14)*C2*C1)
T2=T2+B(I15)/M*S2/N*S1
T3=T3+B(I16)/N*M*S2*S1
C1Y=C1Y+(-B(I16)*F18Y-B(I15)*F28Y)
D1X=D1X+(-B(I16)*F18X-B(I15)*F28X)*ETA
T4=T4+((B(I14)+R*ETA*B(I16))*1./M*S2*C1)
T5=T5+((B(I14)-M**2/(N**2*ETA)*B(I16))*C2/N*S1)
T6=T6+((B(I14)+B(I15)+R*ETA*B(I16))/M**2*(C2-C4)*C1)
T7=T7+((B(I14)-B(I15)-M**2/(N**2*ETA)*B(I16))*(C1-C3)/N**2*C2)
T8=T8+((B(I16))*((1-Q1/N**2*M**2/ETA**2)*C1+(M**2/(N**2*ETA**2)-
Q1)
1*Q1/N*S3)+B(I15)*BMN*(ETA*R*(C1-C3)+Q1/ETA*(S3/N-C3)))
1/M*(S2-X*S4))
T9=T9+((B(I16))*((M**2/(N**2*ETA**2)-Q1)*C2+(1-
Q1/N*M**2/ETA**2)*Q1
1/M*S4)+B(I15)*BMN*((C2-C4)/ETA+Q1*R*ETA*(S4/M-C4)))/N*(S1-
Y*S3))
T10=T10+(B(I15)*(C2-C4)/N**2*(C1-C3)/M**2)
T11=T11+(-B(I14)*(F1XY+F2XY)-B(I15)*(F1XY-F2XY+FX*R*ETA*F28Y
1-Q1/2*(Y**2-1)/ETA*F48X)-B(I16)*(R*ETA*F1XY-
M**2/(N**2*ETA)*F2XY
1+FX*R*ETA*F18Y-Q1/2*(Y**2-1)/ETA*F28X))
T12=T12+(B(I14)*(F2XY+F3XY)+B(I15)*(F2XY-F3XY+Q1/2*R/ETA*(X**2-
1)
1*F48Y-(Y**4-6*Y**2+5)/(24*ETA)*F28X)+B(I16)*(R*ETA*FX*F2XY-M**2
1/(N**2*ETA)*F3XY+Q1/2*R/ETA*(X**2-1)*F38Y-(Y**4-
6*Y**2+5)/(24*ETA)
1*F18X))
10 K10=1
c write(5,212) J1,J2,J3,J4,I12

```

```

c      write(5,212) I14,I15,I16,I12
3      CONTINUE
4      CONTINUE
      IF(I11.EQ.1) GO TO 11
      A1(I13)=T1
      A2(I13)=T2*ETA
      A3(I13)=1/BT*T3
      A4(I13)=- (ETA*X+R*ETA**2*X*C1Y+T4/ETA)
      A5(I13)=- (Y*D1X-T5)
      A6(I13)=(ETA**2/2*(X**2-1)+ETA**3/2*(X**2-1)*R*C1Y-T6*ETA**2)
      A7(I13)=((Y**2-1)/2*D1X+T7)
      A8(I13)=(ETA**2/(BT*GA)*T8)
      A9(I13)=(ETA/(BT*GA)*T9)
      A10(I13)=(-T10*ETA*(1+Q1)/GA**3)
      A11(I13)=-1/GA**3*((X**4-6*X**2+5)/24+T11)
      A12(I13)=-1/GA**3*(-Q1/4*(X**2-1)/ETA**2*(Y**2-1)+T12)
      A13(I13)=1.
      A14(I13)=1.
      A15(I13)=C1Y
      A16(I13)=D1X
      I13=I13+1
      T1=0.
      T2=0.
      T3=0.
      T4=0.
      T5=0.
      T6=0.
      T7=0.
      T8=0.
      T9=0.
      T10=0.
      T11=0.
      T12=0.
      T13=0.
      T14=0.
      T15=0.
      T16=0.
      C1Y=0.
      D1X=0.
11     M1=M1+1
      IF(M1.LE.M11) GO TO 5
111    N1=N1+1
      IF(N1.LE.N11) GO TO 6
14     IF(I99.EQ.2) GO TO 12
c      DO 101 I=1,J2
c      WRITE(5,211) (A(I,J),J=1,J21)
c 101  CONTINUE
      CALL GAUS
      WRITE(5,214) (B(I),I=1,J8)
      I13=1
      I11=I11+1
      I12=I12+1
      I99=I99+1
      I77=I77+1
      T1=0.
      T2=0.
      T3=0.
      T4=0.
      T5=0.
      T6=0.
      T7=0.

```



```

T8=0.
T9=0.
T10=0.
T11=0.
T12=0.
T13=0.
T14=0.
T15=0.
T16=0.
C1Y=0.
D1X=0.
GO TO 7
12 J2=(N11*M11)
WRITE (5,213) (A1(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A2(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A3(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A4(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A5(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A6(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A7(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A8(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A9(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A10(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A11(I),I=1,J2)
write (5,102)
WRITE (5,213) (A12(I),I=1,J2)
write (5,102)
c WRITE (5,213) (A13(I),I=1,j2)
c write (5,102)
c write (5,213) (A14(I), I=1,J2)
c write (5,102)
write (5,213) (A15(I), I=1,J2)
write (5,102)
write (5,213) (A16(I), I=1,J2)
211 FORMAT (6F8.4)
212 FORMAT (8I5)
214 FORMAT (6F10.5)
103 FORMAT (75(1H-))
213 FORMAT (6F10.5)
102 FORMAT (//)
104 FORMAT (1x)
STOP
END
subroutine gaus
implicit real*8(a-h,o-z)
COMMON/C/A(700,701),B(700),IP0(5)
DIMENSION AMN(700)
dimension z(700),ix(700)
150 sormat(6s11.4)
160 sormat(//,20x,'rehenie citem',//)
C write(5,160)

```

```

C      write(*,*)'sistem'
      is=ip0(1)
      is1=is+1
      do 60 i=1,is
      ix(i)=i
60     continue
      do 61 n=1,is
      t=0
      do 62 i=n,is
      do 62 j=n,is
      is(dabs(a(i,j)).ge.t) go to 62
      t=dabs(a(i,j))
      k=i
      m=j
62     continue
      is(k.eq.n) go to 13
      do 14 ip=n,is1
      t=a(n,ip)
      a(n,ip)=a(k,ip)
      a(k,ip)=t
14     continue
13     is(m.eq.n) go to 15
      do 16 ip=1,is
      t=a(ip,n)
      a(ip,n)=a(ip,m)
      a(ip,m)=t
16     continue
      ip=ix(n)
      ix(n)=ix(m)
      ix(m)=ip
15     continue
      j=is+2
30     j=j-1
      a(n,j)=a(n,j)/a(n,n)
      is(j.gt.n) go to 30
      n1=n+1
      do 61 i=n1,is
      do 61 j=n1,is1
      a(i,j)=a(i,j)-a(i,n)*a(n,j)
61     continue
      i=is1
40     i=i-1
      z(i)=a(i,is1)/a(i,i)
      k=i
50     k=k-1
      a(k,is1)=a(k,is1)-a(k,i)*z(i)
      is(k.gt.1) go to 50
      is(i.gt.2) go to 40
      z(1)=a(1,is1)/a(1,1)
      do 21 k=1,is
      do 21 i=1,is
      is(k.eq.ix(i)) amn(k)=z(i)
21     continue
29     sormat(//,120(1h-),/////))
c      write(5,150)(amn(i),i=1,is)
c      write(5,29)
c      write(*,*)amn
      do 31 i=1,is
      b(i)=amn(i)
31     continue

```

```
return
end
```

```
c      PROGRAM Gr62W
c      2005g
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      COMMON /C/A(700,701),B(700),IP0(5)
      DIMENSION A1(700),A2(700),A3(700),A4(700),A5(700),A6(700),
1A7(700),A8(700),A9(700)
      open(5,siqe='ricl.dat')
      Q1=0.17
      R=1.
      ETA=1.
      M11=6
      N11=6
      M12=M11-1
      N12=N11-1
      I2=0
      I11=1
      I12=1
      I99=1
      I77=1
      J8=2*(N12*M12)
      IP0(1)=J8
      J21=J8+1
      DO 21 I=1,J8
      DO 21 J=1,J21
      A(I,J)=0.
21  CONTINUE
7   X1=1./(M11-1.)
   Y1=1./(N11-1.)
   N1=1
6   N2=N1-1
   Y=N2*Y1
   M1=1
5   M2=M1-1
   X=M2*X1
   IF(I99.EQ.2) GO TO 170
c   IF(N1.EQ.N11) GO TO 14
c   IF(M1.EQ.M11.AND.N1.EQ.N11) GO TO 14
   IF(N1.EQ.1) GO TO 111
   IF(M1.EQ.1) GO TO 11
```

```

143 I1=I2+1
    I2=I2+2
170 J1=0
    J2=N12*M12
c   WRITE(5,212) i1,i2,i3,i4,j1,j2,j3,j4,N1,M1
    I14=0
    I15=J2
    DO 4 N=1,N12
    DO 3 M=1,M12
c   IF(N.EQ.N12.AND.M.EQ.M12) GO TO 10
c   write(5,212) J1,J2,J3,J4,I12
    J1=J1+1
    J2=J2+1
    Y3=N*Y
    S1=DSIN(Y3)
    C1=DCOS(Y3)
    X3=M*X
    S2=DSIN(X3)
    C2=DCOS(X3)
    AN=N*1.
    C3=DCOS(AN)
    S3=DSIN(AN)
    AM=M*1.
    S4=DSIN(AM)
    C4=DCOS(AM)
c   write(5,212) j1,j2,j3,j4,I12
    F1X=(S2-S4)/M-(X-1)*C4
    F1Y=(C1-C3)/N+(Y**2-1)/2*S3
    F2X=(C2-1)/M**2+X/M*S4+(X**2-2*X)/2*C4
    F2Y=C1/N**2+Y**2/(2*N)*C3+(Y**4-6*Y**2)/24*S3
    F3X=(S2/M-X)/M**2+X**2/(2*M)*S4+(X**3-3*X**2)/2*C4
    F1XY=F3X*(N*C1-S3)
    F2XY=Q1/(M*ETA**2)*S2*F1Y
    F3XY=Q1/(M*ETA**2)*(S2-X*S4)*(C1/N+Y**2/2*S3)
    F4XY=M/ETA**4*S2*F2Y
    IF(I12.EQ.2) GO TO 9
    A(I1,J1)=F1XY+F2XY+F3XY+F4XY
    A(I1,J2)=-F1XY+F2XY-F3XY+F4XY
    A(I1,J21)=(X**4-4*X**3+6*X**2)/24+Q1*Y**2/(4*ETA**2)*(X**2-2*X)

    A(I2,J1)=N**2*S1*F2X+Q1/ETA**2*C2*(S1-Y*S3)
    A(I2,J2)=-N**2*S1*F2X+Q1/ETA**2*C2*(S1-Y*S3)-(1+Q1)/ETA**2*(C2-
C4) 1*(S1-Y*S3)

c   A(I2,J1)=N**2*S1*F2X+Q1/ETA**2*S2*(S1-Y*S3)
c   A(I2,J2)=N**2*S1*F2X+1/ETA**2*(C2-(1+Q1)*C4)
    A(I2,J21)=0.
    GO TO 10
9   K11=1
    I14=I14+1
    I15=I15+1
c   write(5,212) i14,i15,I12
    T1=T1+(B(I14)*M*S2*(N*C1-S3))
    T2=T2+(B(I15)*(C2-C4)*(S1-Y*S3))
    T3=T3+(B(I14)*(C2-C4)*(N*C1-S3))
    T4=T4+(B(I14)*M*S2*(S1-Y*S3))
    T5=T5+(B(I14)-B(I15))*F1X*(N*C1-S3)
    T6=T6+(B(I14)+B(I15))*M*F1Y*S2
    T7=T7+(-B(I14)*(F1XY+F2XY)+B(I15)*(F1XY-F2XY))
    T8=T8+(-B(I14)*(F3XY+F4XY)+B(I15)*(F3XY-F4XY))

```

```

T9=T9+B(I15)*(S2/M-X)*(C1/N+Y**2/2*S3)
10 K10=1
c   write(5,212) J1,J2,I12
c   write(5,212) I14,I15,I16,I17,I12
3   CONTINUE
4   CONTINUE
   IF(I11.EQ.1) GO TO 11
   A1(I13)=T1
   A2(I13)=T2/ETA
   A3(I13)=((X-1)+T3)
   A4(I13)=T4/ETA
   A5(I13)=((X-1)**2/2+T5)
   A6(I13)=-T6/ETA**2
   A7(I13)=-((X**4-4*X**3+6*X**2)/24+T7)
   A8(I13)=(Q1*Y**2/(4*ETA**2)*(X**2-2*X)+T8)
   A9(I13)=(1+Q1)/ETA**2*T9
   I13=I13+1
   T1=0.
   T2=0.
   T3=0.
   T4=0.
   T5=0.
   T6=0.
   T7=0.
   T8=0.
   T9=0.
11  M1=M1+1
   IF(M1.LE.M11) GO TO 5
111 N1=N1+1
   IF(N1.LE.N11) GO TO 6
14  IF(I99.EQ.2) GO TO 12
c   DO 101 I=1,12
c   WRITE(5,211) (A(I,J),J=1,J21)
c 101 CONTINUE
   CALL GAUS
   WRITE(5,214) (B(I),I=1,J8)
   I13=1
   I11=I11+1
   I12=I12+1
   I99=I99+1
   I77=I77+1
   T1=0.
   T2=0.
   T3=0.
   T4=0.
   T5=0.
   T6=0.
   T7=0.
   T8=0.
   T9=0.
   GO TO 7
12  J2=(N11*M11)
   write (5,103)
   write (5,102)
   WRITE (5,213) (A1(I),I=1,J2)
   write (5,102)
   WRITE (5,213) (A2(I),I=1,J2)
   write (5,102)
   WRITE (5,213) (A3(I),I=1,J2)
   write (5,102)
   WRITE (5,213) (A4(I),I=1,J2)

```

```

        write (5,102)
        WRITE (5,213) (A5(I),I=1,J2)
        write (5,102)
        WRITE (5,213) (A6(I),I=1,J2)
        write (5,102)
        WRITE (5,213) (A7(I),I=1,J2)
        write (5,102)
        WRITE (5,213) (A8(I),I=1,J2)
        write (5,102)
c      WRITE (5,213) (A9(I),I=1,J2)
211  FORMAT (6F12.4)
212  FORMAT (8I5)
214  FORMAT (5F14.2)
213  FORMAT (6F13.3)
102  FORMAT (68(1H-))
103  FORMAT (1x)
      STOP
      END
      subroutine gaus
      implicit real*8(a-h,o-z)
      COMMON/C/A(700,701),B(700),IP0(5)
      DIMENSION AMN(700)
      dimension z(700),ix(700)
150  sormat(6s11.4)
160  sormat(//,20x,'rehenie citem',//)
c      write(5,160)
c      write(*,*)'sistem'
      is=ip0(1)
      is1=is+1
      do 60 i=1,is
      ix(i)=i
60  continue
      do 61 n=1,is
      t=0
      do 62 i=n,is
      do 62 j=n,is
      is(dabs(a(i,j)).ge.t) go to 62
      t=dabs(a(i,j))
      k=i
      m=j
62  continue
      is(k.eq.n) go to 13
      do 14 ip=n,is1
      t=a(n,ip)
      a(n,ip)=a(k,ip)
      a(k,ip)=t
14  continue
13  is(m.eq.n) go to 15
      do 16 ip=1,is
      t=a(ip,n)
      a(ip,n)=a(ip,m)
      a(ip,m)=t
16  continue
      ip=ix(n)
      ix(n)=ix(m)
      ix(m)=ip
15  continue
      j=is+2
30  j=j-1
      a(n,j)=a(n,j)/a(n,n)

```

```

        is(j.gt.n) go to 30
        n1=n+1
        do 61 i=n1,is
        do 61 j=n1,is1
        a(i,j)=a(i,j)-a(i,n)*a(n,j)
61 continue
        i=is1
40 i=i-1
        z(i)=a(i,is1)/a(i,i)
        k=i
50 k=k-1
        a(k,is1)=a(k,is1)-a(k,i)*z(i)
        is(k.gt.1) go to 50
        is(i.gt.2) go to 40
        z(1)=a(1,is1)/a(1,1)
        do 21 k=1,is
        do 21 i=1,is
        is(k.eq.ix(i)) amn(k)=z(i)
21 continue
29 sormat(//,120(1h-),/////))
c      write(5,150)(amn(i),i=1,is)
c      write(5,29)
c      write(*,*)amn
        do 31 i=1,is
        b(i)=amn(i)
31 continue
        return
        end

```