ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

დავით როგავა

ნახევრადდისკრეტული, სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის

05.13.18 – მათემატიკური მოდელირების თეორიული საფუძვლები,
რიცხვითი მეთოდები, პროგრამათა კომპლექსები

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის
სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი 2006

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: **ჯემალ როგავა** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

თემურ ჩილაჩავა – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ოფიციალური ოპონენტები: **ჯონდო შარიქაძე** – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, 05.13.18

მარინე მენთეშაშვილი – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, 05.13.18

დისერტაციის დაცვა შედგება 2006 წლის _____ ___________ ______ საათზე ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის **Ph. M. 01.02 № 9** სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე. მისამართი: თბილისი 0186, უნივერსიტეტის ქ. № 2, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი.

დისერტაციის გაცნობა შესაძლებელია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ბიბლიოთეკაში (თბილისი 0186, უნივერსიტეტის ქ. № 2).

ავტორეფერატი დაიგზავნა 2006 წლის _____ ___________.

სადისერტაციო საბჭოს
სწავლული მდივანი, ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი გ. ავალიშვილი

თემის აქტუალურობა. მიუხედავად იმისა, რომ თანამედროვე გამოთვლითი მანქანების შესაძლებლობები წარმოუდგენლად გაიზარდა, დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების რიცხვითი რეალიზაციის საკითხი კვლავ პრობლემატური რჩება. ძირითადი წინააღმდეგობა მდგომარეობს იმაში, რომ აღნიშნული ამოცანებისათვის კლასიკური მეთოდების გამოყენება მოითხოვს დიდ ოპერატიულ მეხსიერებას და არითმეტიკულ ოპერაციათა დიდ რიცხვს, რაც სათუოს ხდის ასეთი ამოცანების რიცხვით ამოხსნას რეალურ დროში. მდგომარეობა კიდევ უფრო რთულდება დინამიკური შემთხვევისათვის, როცა შემოდის მეოთხე განზომილება დროითი პარამეტრის მიხედვით.

ი. ვეკუას რედუცირების მეთოდი საშუალებას იძლევა დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანის ამონახსნს მიუახლოვდეთ ორგანზომილებიანი ამოცანების სერიების ამონახსნების მიმდევრობის საშუალებით. პრაქტიკული გამოყენებების თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ პირველი მიახლოებები დამრეცი გარსებისათვის იძლევა საკმარისად კარგ შედეგს. აქედან გამომდინარე, დამრეცი სფერული გარსისათვის ი. ვეკუას განტოლებების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების აგება და გამოკვლევა, ჩვენი აზრით, აქტუალურ საკითხს წარმოადგენს.

კარგად არის ცნობილი, რომ ი. ვეკუას იერარქიული მოდელის განტოლებების სტრუქტურა იძლევა იმის საშუალებას, რომ სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური ამოხსნისათვის (განსაკუთრებით გლუვსაზღვრიანი ბრტყელი არეების შემთხვევაში) წარმატებით იქნეს გამოყენებული ცნობილი ქართული მათემატიკური სკოლის მიერ დამუშავებული კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდები. მდგომარეობა არსებითად იცვლება, როცა ინტეგრების არის საზღვარი არაგლუვია. ამ შემთხვევაში ანალიზური მეთოდები ნაკლებად ეფექტურია და გამოიყენება სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები.

საკვლევი თემის აქტუალურობაზე მეტყველებს ასევე ის ფაქტი, რომ მრავალი ქართველი და უცხოელი მეცნიერის შრომები მიეძღვნა ი. ვეკუას გარსთა თეორიის და რედუცირების მეთოდის გამოყენებებს დრეკადობისა და გარსთა თეორიის მთელი რიგი ამოცანების გამოკვლევისა და რიცხვითი ამოხსნის საკითხებში.

კვლევის ობიექტი და მიზანი. სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის ნახევრადდისკრეტული, სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემების აგება და გამოკვლევა. უწყვეტი ამოცანის შესაბამისი დისკრეტული ამოცანის ამონახსნისათვის, ასევე პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების სხვაობიანი ანალოგებისათვის აპრიორული შეფასებების მიღება ამონახსნთა სათანადო კლასებში. მიახლოებითი ამონახსნისა და პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების სხვაობიანი ანალოგების ცდომილებების შეფასება. მათი რიგის დადგენა დროითი ბიჯის მიმართ, გამოსავალი უწყვეტი ამოცანის ამონახსნის სიგლუვისადა მიხედვით. აგებული ალგორითმების საფუძველზე სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებების რიცხვითი ამოხსნისათვის შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფის შექმნა და მოდელური ამოცანების რეალიზაცია.

მეცნიერული სიახლე და ძირითადი შედეგები.

ა) სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის აგებულია წონიანი სიმეტრიული (სამშრიანი) ნახევრადდისკრეტული სქემები და მათთვის ასოცირებული პოლინომების მეთოდით მიღებულია აპრიორული შეფასებების მთელი სპექტრი. ამ შეფასებების საფუძველზე დამტკიცებულია თეორემები მიახლოებითი ამონახსნის ზუსტი ამონახსნისაკენ კრებადობის შესახებ. შეფასებულია ცთომილების რიგი დროითი ბიჯის მიმართ უწყვეტი ამოცანის ამონახსნის სიგლუვისდა მიხედვით.

ბ) დამტკიცებულია სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემის ოპერატორის კოერციტიულობა დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში და მიღებულია ცხადი სახით კოერციტიულობის უტოლობაში შემავალი მუდმივი.

გ) სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის, შემოთავაზებულია იტერაციული პროცესი. იტერაციის

ყოველ ბიჯზე იხსნება დრეკადობის ბრტყელი თეორიის განტოლებათა სისტემა და ჰელმჰოლცის განტოლება ცალ-ცალკე. დამტკიცებულია, რომ ეს იტერაციული პროცესი კრებადია სფეროს რადიუსის, გარსის სისქის და პუასონის კოეფიციენტის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის.

დ) სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის აგებულია იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები და მათ საფუძველზე შექმნილია პროგრამათა კომპლექსი პროგრამირების C++ ენაზე, როგორც დინამიკური, ასევე სტატიკური ამოცანების რიცხვითი გათვლისათვის. მიღებული რიცხვითი გათვლების შედეგები სხვადასხვა მოდელური ამოცანებისათვის სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ დასკვნებთან.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო შემდეგ სამეცნიერო სემინარებსა და კონფერენციებზე: ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომები (2000 წ., 2004 წ., 2005 წ.); ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარები (2005 წ.); საქართველოს მათემატიკოსთა III ყრილობა (11–13 ოქტომბერი, 2001 წ., თბილისი); მათემატიკოსთა რესპუბლიკური კონფერენცია (აკადემიკოს ილია ვეკუას საიუბილეო დღეები – 2001, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალი, 21 აპრილი, 2001 წ., თბილისი).

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა. სადისერტაციო ნაშრომი შეიცავს 140 ნაბეჭდ გვერდს, იგი შედგება შესავლის, სამი თავის, 13 პარაგრაფისა და დამატებისაგან. მითითებულია ავტორის მიერ დისერტაციაზე მუშაობის პერიოდში გამოყენებული ლიტერატურის სია, რომელიც შეიცავს 84 დასახელებას.

დისერტაციის შინაარსი. შესავალში მოცემულია ლიტერატურის მიმოხილვა განსახილველი თემის ირგვლივ და გადმოცემულია დისერტაციის მოკლე შინაარსი.

პირველ თავში განხილულია დინამიკური შემთხვევისათვის, სფერული გარსის განტოლებებისათვის წონიანი სამშრიანი ნახევრადდისკრეტული სქემის მდგრადობა და კრებადობა.

პირველ პარაგრაფში მოცემულია ამოცანის დასმა. განხილულია სფერული გარსის წონასწორობის განტოლებები დინამიკური შემთხვევისთვის, ი. ვეკუას თეორიის მიხედვით (ნულოვანი მიახლოება):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

სადაც $Q_T = \Omega \times \,]0,T[\,,\ \Omega =]-1,1[\times]-1,1[\,,$

$$A = -\sigma_0 \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2\frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix},$$

დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო

$$u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega : |x| = |y| = 1, \tag{2}$$

და კოშის საწყისი

$$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y), \quad u_t'(x,y,0) = \varphi_1(x,y), \tag{3}$$

პირობებით. სადაც

$$f=(f_1,f_2,f_3)^\top,\quad \varphi_0=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03})^\top,\ \ \varphi_1=(\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{13})^\top$$

ცნობილი უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციებია, $u=(u_1,u_2,u_3)^\top$ – საძებნი ვექტორ-ფუნქციაა უწყვეტი $\overline{Q}_T$-ში, რომელსაც აქვს უწყვეტი u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, u_t და u_{tt} წარმოებულები Q_T-ში, $\varepsilon = 2R^{-1}h$, h – გარსის ნახევარსისქე, R – სფეროს რადიუსი, σ – პუასონის კოეფიციენტი, E – იუნგის მოდული, $\sigma_0=E/2\cdot(1+\sigma)$.

(1)–(3) ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ნახევრადდისკრეტული სქემის გამოყენებით:

$$\begin{aligned}\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+A\,\frac{u_{k+1}+\nu u_k+u_{k-1}}{2+\nu}&=\\ =f(x,y,t_k),\quad k=1,\dots,n-1,&\end{aligned}\tag{4}$$

სადაც $\tau=T/n$ ($n>1$ არის ნატურალური რიცხვი), $t_k=k\tau$, $\nu\neq-2$. $u(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(x,y)$-ს.

ამრიგად, (1)–(3) ამოცანის ამოხსნა დროის ყოველ ბიჯზე დაიყვანება $\left(I+\dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,A\right)$ ოპერატორის შებრუნებაზე.

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემის ოპერატორის კოერციტიულობა.

შემოტანილია შემდეგი სივრცეები:

$L_2(\Omega)$ – Ω არეში კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე (ჰილბერტის სივრცე);

$H=[L_2(\Omega)]^3$ – ჰილბერტის სივრცე, შესაბამისად სკალარული ნამრავლით და ნორმით:

$$\begin{aligned}((u,v))&=(u_1,v_1)+(u_2,v_2)+(u_3,v_3),\\ \|u\|&=\left(\|u_1\|^2_{L_2}+\|u_2\|^2_{L_2}+\|u_3\|^2_{L_2}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

სადაც $u=(u_1,u_2,u_3)$ და $v=(v_1,v_2,v_3)$ ვექტორ-ფუნქციებია კომპონენტებით $L_2(\Omega)$-დან; $(\cdot,\cdot)$ და $\|\cdot\|_{L_2}$, შესაბამისად, სკალარული ნამრავლი და ნორმაა $L_2[\Omega]$ ჰილბერტის სივრცეში;

$C^m(\overline{\Omega})$ – სიმრავლე $\overline{\Omega}$-ში უწყვეტი ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ უწყვეტი წარმოებულები m რიგამდე ჩათვლით $\overline{\Omega}$-ში;

$[C^m(\overline{\Omega})]^3$ – სიმრავლე $u=(u_1,u_2,u_3)$ ვექტორ-ფუნქციებისა, კომპონენტებით $C^m(\overline{\Omega})$-დან.

A ოპერატორის განსაზღვრის არე განიმარტება შემდეგნაირად:

$$D(A)=\Big\{u\in[C^2(\overline{\Omega})]^3:\ u\big|_{\partial\Omega}=0\Big\}.$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 1. A ოპერატორი სიმეტრიულია $D(A)$ ლინეალზე და მართებულია უტოლობა

$$\begin{aligned}((Au,u))\geq\alpha_0\Big[&\left(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2}+\|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\right)+\left(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2}+\|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\right)+\\ &+\left(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2}+\|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\right)\Big],\quad\forall\,u\in D(A),\end{aligned}\tag{5}$$

სადაც $\alpha_0=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\pi^2}{\pi^2+4\varepsilon^2}\right)$.

შ ე დ ე გ ი 1. A ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია,

$$((Au,u))\geq\frac{\pi^2\alpha_0}{2}\left(\|u_1\|^2_{L_2}+\|u_2\|^2_{L_2}+\|u_3\|^2_{L_2}\right).\tag{6}$$

ამ თავის შემდეგ პარაგრაფებში მიღებული შედეგები ძირითადად ეყრდნობა ჯ. როგავას მიერ ჩატარებულ კვლევებს სამშრიანი ნახევრადდისკრეტული სქემებისათვის (Рогава Дж. Л., Полудискретные схемы для операторных дифференциальных уравнений. *Изд-во "Технический университет", Тбилиси*, 1995).

მესამე პარაგრაფში მიღებულია აპრიორული შეფასებები დისკრეტული ამოცანის ამონახსნისათვის.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 2. ვთქვათ $u_0,\ u_1 \in D(\widetilde{A})$ ($\widetilde{A}$ არის A-ს გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე), $f(\cdot,\cdot,t_k) \in H,\ k = 1,\dots,n-1,\ \nu \in]-2,2[$, მაშინ (4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\big\|\Big)+$$
$$+\tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^{s-1/2}f_i\big\|,\quad 0\le s\le 1,\quad f_i\in D(\widetilde{A}^{s-1/2}), \tag{7}$$

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\big\|\Big)+$$
$$+\widetilde{c}(1-s)\cdot\tau^{2(1-s)}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|,\quad \frac{1}{2}\le s\le 1, \tag{8}$$

სადაც $\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ f_k = f(\cdot,\cdot,t_k)$,

$$c_0 = \frac{2}{\sqrt{2-\nu}},\quad \nu_0 = \frac{1}{\sqrt{2+\nu}},\quad \widetilde{c}(s) = 2^{1-2s}\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s}.$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ სრული ინფორმაცია დინამიკური ამოცანის შესახებ, აუცილებელია ვიცოდეთ, თუ როგორ იცვლება სიჩქარე (უკეთეს შემთხვევაში ასევე აჩქარებაც). ამრიგად, შემდეგი ნაბიჯია აპრიორული შეფასებების მიღება პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგებისათვის. რისთვისაც მეოთხე პარაგრაფში მიღებულია შეფასებები ჩებიშევის ოპერატორული პოლინომებისათვის (ზოგიერთი შეფასება ამ პოლინომებისათვის დამტკიცებულია წინა პარაგრაფში).

მეხუთე პარაგრაფში მიღებულია აპრიორული შეფასებები პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგებისათვის.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 3. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2-ის პირობები, მაშინ (4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \widetilde{c}(s)\tau^{2s-1}\|\widetilde{A}^s u_0\| + c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{9}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \big\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\big\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \widetilde{c}_0(s)\tau^{1-2s}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{10}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \big\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\big\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|\widetilde{A}^s f_i\|,\quad f_i\in D(\widetilde{A}^s), \tag{11}$$

სადაც $k=1,\dots,n-1$, $\Delta u_k=u_{k+1}-u_k$, $0\le s\le\frac12$,

$$\widetilde{c}_0(s)=\frac{1}{(2+\nu)^s}\,,\quad f_0=0.$$

მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგისათვის მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 4. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2-ის პირობები, მაშინ (4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\Delta^2u_k}{\tau^2}\right\|\le\tau^{2s-1}\Big[\big\|\widetilde{A}^{1/2+s}u_0\big\|+\widetilde{c}(s)\Big\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big]+\\+\widetilde{c}(s)\tau^{2s}\sum_{i=1}^k\big\|\widetilde{A}^sB_\tau^{-1}f_i\big\|+\|B_\tau^{-1}f_{k+1}\|,\end{aligned}\tag{12}$$

$$\left\|\frac{\Delta^2u_k}{\tau^2}\right\|\le\|\widetilde{A}u_0\|+\Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\sum_{i=1}^{k+1}\|f_i\|,\tag{13}$$

სადაც $k=1,\dots,n-2$, $0\le s\le\frac12$, $B_\tau=I+\dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,\widetilde{A}$.

მესამე და მეხუთე პარაგრაფებში მიღებული აპრიორული შეფასებები, როცა $s=0$ და $s=1/2$, დამტკიცებული იყო ჯ. როგავას მიერ (იხ. ზემოთ დასახელებული მონოგრაფია).

მეექვსე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემები (4) ნახევრადდისკრეტული სქემის კრებადობის შესახებ.

(1)–(3) ამოცანა შეცვლილია შემდეგი ამოცანით:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\widetilde{A}u(t)=f(t),\quad t\in[0,T],\tag{14}$$

$$u(0)=\varphi_0,\quad u'(0)=\varphi_1,\tag{15}$$

სადაც $\widetilde{A}$ არის A-ს გაფართოება თვითშეუღლებულ დადებითად განსაზღვრულ ოპერატორამდე, $u(t)$ – უცნობი, ხოლო $f(t)$ – ცნობილი ვექტორ-ფუნქციებია მნიშვნელობებით H-დან; φ_0 და φ_1 ცნობილი ვექტორებია H-დან.

შემოღებულია შემდეგი სივრცეები: განვსაზღვროთ $D(\widetilde{A}^{1/2})$-ში ერმიტის ნორმა $\|u\|_1=\|\widetilde{A}^{1/2}u\|$. მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W^1-ით. ანალოგიურად, თუ $D(\widetilde{A})$-ში განვსაზღვრავთ ერმიტის ნორმას $\|u\|_2=\|\widetilde{A}u\|$, მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W^2-ით. აღვნიშნოთ $C([0,T];H)$-ით სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში უწყვეტი $u(t)$ ვექტორ-ფუნქციებისა მნიშვნელობებით H-დან. $C^m([0,T];H)$-ით $(m\ge1)$ აღვნიშნოთ სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში m რიგამდე ჩათვლით უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორ-ფუნქციებისა $C([0,T];H)$-დან. ანალოგიურად განიმარტება $C([0,T];W^i)$ და $C^m([0,T];W^i)$, $i=1,2$.

$(14),(15)$ ამოცანის ამონახსნს ვუწოდებთ

$$u(t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$$

ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (14) განტოლებას და (15) საწყის პირობებს. თეორემა ასეთი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, როცა $\varphi_0\in W^2$, $\varphi_1\in W^1$ და

$f(t) \in C^1([0,T];H)$ (ან $f(t) \in C([0,T];W^2)$) დამტკიცებულია ს. კრეინის ცნობილ მონოგრაფიაში (Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. *Наука, Москва*, 1967).

(14), (15) ამოცანისთვის განვიხილავთ (4)-ის ანალოგიურ ნახევრადდისკრეტულ სქემას, სადაც A შეცვლილია $\widetilde{A}$-თი:

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\widetilde{A}\,\frac{u_{k+1}+\nu u_k+u_{k-1}}{2+\nu}=f(t_k), \tag{16}$$

სადაც $k=1,\ldots,n-1$, $\tau=T/n$ ($n>1$ ნატურალური რიცხვია), $t_k=k\tau$, $\nu\neq-2$, u_0 და u_1 მოცემული ვექტორებია $D(\widetilde{A})$-დან.

(14), (15) ამოცანის $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში ვაცხადებთ (16) სისტემის u_k ამონახსნს. მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება აღვნიშნოთ z_k-თი, $z_k=u(t_k)-u_k$. მართებულია შემდეგი თეორემები (ყველგან c_1-თი აღნიშნულია დადებითი მუდმივი).

თ ე ო რ ე მ ა 5. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, $\varphi_0,\varphi_1\in W^2$ და $\nu\in\,]-2,2[$. მაშინ

(a) თუ $u(t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$ და $f(t)\in C([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\right)\to 0,\ \ \text{როცა}\ \ \tau\to 0;$$

(b) თუ შესრულებულია (a) პუნქტის პირობები და $f(t)$ და $u''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\right)\le c_1\tau^{\lambda},\ \ k=1,\ldots,n-1;$$

(c) თუ $u(t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$ და $f(t)\in C^1([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|+\|\widetilde{A}z_{k+1}\|\right)\to 0\ \ \text{როცა}\ \ \tau\to 0;$$

(d) თუ შესრულებულია (c) პუნქტის პირობები და $f'(t)$ და $u'''(t)$ ფუნქცვიბი აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|+\|\widetilde{A}z_{k+1}\|\right)\le c_1\tau^{\lambda},\ \ k=1,\ldots,n-1.$$

თ ე ო რ ე მ ა 6. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $\varphi_0\in W^2$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1+\frac{\tau^2}{2}\varphi_2$, $\varphi_2=f(0)-\widetilde{A}\varphi_0$, φ_1, $\widetilde{A}\varphi_0$, $f(0)\in W^2$ და $\nu\in\,]-2,2[$. მაშინ

(a) თუ $u(t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$, $f(t)\in C^1([0,T];H)$, $u'''(t)$ და $f'(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობებს λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\le c_1\tau^{1+\lambda},\ \ k=1,\ldots,n-1;$$

(b) თუ $u(t)\in C^4([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$, $f(t)\in C^2([0,T];H)$, $u^{\mathrm{IV}}(t)$ და $f''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობებს λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|\le c_1\tau^{1+\lambda},\ \ k=1,\ldots,n-2.$$

მეორე თავში განიხილება სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა სფერული გარსის განტოლებებისათვის გახლეჩილი ოპერატორით (დინამიკური შემთხვევა).

პირველ პარაგრაფში მოცემულია ამოცანის დასმა. სფერული გარსის განტოლებათა სისტემის ოპერატორი A გახლეჩილია შემდეგნაირად:

$$
\begin{gathered}
A = A_0 + A_1 = \\
= -\sigma_0 \begin{bmatrix}
\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \\
\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2 \frac{1}{1-2\sigma}
\end{bmatrix} - \\
-\sigma_0 \begin{bmatrix}
0 & 0 & -\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} \\
0 & 0 & -\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} \\
\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & 0
\end{bmatrix}.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

(17) გახლეჩის საფუძველზე (1) განტოლებისათვის აგებულია შემდეგი სახის სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა:

$$
\begin{gathered}
\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + A_0 \frac{u_{k+1} + \nu u_k + u_{k-1}}{2+\nu} + A_1 u_k = \\
= f(x, y, t_k), \quad k = 1, \ldots, n-1,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

სადაც $\tau = T/n$ ($n > 1$ არის ნატურალური რიცხვი), $t_k = k\tau$, $\nu \neq -2$. $u(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(x,y)$-ს.

ამრიგად, (1)–(3) ამოცანის ამოხსნა დროის ყოველ ბიჯზე დაიყვანება $\left(I + \frac{\tau^2}{2+\nu} A_0\right)$ ოპერატორის შებრუნებაზე დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით.

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემა მდგრადობის შესახებ.

A_0 ოპერატორის განსაზღვრის არე განიმარტება შემდეგნაირად:

$$
D(A_0) = \Big\{ u \in [C^2(\overline{\Omega})]^3 : \ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}.
$$

თ ე ო რ ე მ ა 7. თუ $u_0(\cdot,\cdot)$ და $u_1(\cdot,\cdot)$ ვექტორ-ფუნქციები ეკუთვნიან $\widetilde{A}_0$ ოპერატორის განსაზღვრის არეს, ხოლო $f(\cdot,\cdot,t_i)$ ვექტორ-ფუნქციები კვადრატით ჯამებადია და $\nu \in]-2, 2[$, მაშინ (18) სქემისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასებები:

$$
\begin{gathered}
\|u_{k+1}\| \leq a_{k-1}\Big[(c_0 + \tau\varepsilon c)\|u_0\| + (c_1 + \tau^2 \varepsilon c)\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \\
+ \tau \sum_{i=1}^{k} a_{k-i} \big\|\widetilde{A}_0^{-1/2} f(\cdot,\cdot,t_i)\big\|,
\end{gathered}
\tag{19}
$$

$$
\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \leq (1 + t_k a_{k-1})\Big[(c + \tau\varepsilon c)\big\|\widetilde{A}_0^{1/2} u_0\big\| + c_0 \Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| +
$$

$$+ \tau(\nu_0 c_0 + \tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|\Big], \tag{20}$$

$$\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_{k+1}\big\| \le a_{k-1}\Big[(c_0+\tau\varepsilon c)\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\| +$$

$$+ \tau(\nu_0 c_0 + \tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big] +$$

$$+ \tau\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|, \tag{21}$$

სადაც $k = 1,2,\ldots,n-1$, $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, c, c_0, c_1 და ν_0 მუდმივები იგივეა რაც წინა თავში, $a_k = \exp(\varepsilon c t_k)$.

მესამე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემები კრებადობის შესახებ.

შემოვიღოთ სივრცეები W_0^1 და W_0^2, რომლებიც განისაზღვრება შესაბამისად W^1 და W^2 სივრცეების ანალოგიურად, სადაც ოპერატორი $\widetilde{A}$ შეცვლილია $\widetilde{A}_0$-ით.

მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება აღვნიშნოთ z_k-თი,

$$z_k(x,y) = u(x,y,t_k) - u_k(x,y), \quad k = 1,\ldots,n.$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

თ ე ო რ ე მ ა 8. ვთქვათ $u_0 = \varphi_0$, $u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1$, φ_0, $\varphi_1 \in W_0^2$, $\nu \in\,]-2,2[$. მაშინ

ა) თუ (1)–(3) ამოცანის ამონახსნი $u(\cdot,\cdot,t) \in C^2([0,T];H) \cap C([0,T];W_0^2)$ და $f(\cdot,\cdot,t) \in C([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\| + \Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|\Big) \to 0, \quad \text{როცა} \ \ \tau \to 0;$$

ბ) თუ $f(\cdot,\cdot,t) \in C^1([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\| + \Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| + \big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\Big) \to 0, \quad \text{როცა} \ \ \tau \to 0;$$

გ) თუ $f(\cdot,\cdot,t) \in C^1([0,T];H)$ და $u(\cdot,\cdot,t) \in C^3([0,T];H) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\| + \Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| + \big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\Big) \le c_1\tau.$$

თ ე ო რ ე მ ა 9. ვთქვათ $u_0 = \varphi_0$, $\varphi_0 \in W_0^2$,

$$u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \frac{\tau^2}{2}\big(f(x,y,0) - (\widetilde{A}_0\varphi_0 + \widetilde{A}_1\varphi_0)\big),$$

φ_1, $\widetilde{A}_0\varphi_0$, $\widetilde{A}_1\varphi_0$, $f(\cdot,\cdot,t) \in W_0^2$, $f(\cdot,\cdot,t) \in C^2([0,T];H)$ და $\nu \in\,]-2,2[$. მაშინ

ა) თუ (1)–(3) ამოცანის ამონახსნი $u(\cdot,\cdot,t) \in C^4([0,T];H) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n}\|z_k\| \le c_1\tau^2;$$

ბ) თუ $u(\cdot,\cdot,t) \in C^4([0,T];H) \cap C^2([0,T];W_0^1) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| + \big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\Big) \le c_1\tau^2.$$

მესამე თავში განხილულია იტერაციული, იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის.

პირველ პარაგრაფში მოყვანილია იტერაციული მეთოდი სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის გახლეჩილი ოპერატორით:

$$(A_0 + A_1)u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in]-1,1[\times]-1,1[, \tag{22}$$

დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით, სადაც A_0 და A_1 განისაზღვრება (17) წარმოდგენიდან.

როგორც ცნობილია A_0 არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი, ხოლო A_1 ოპერატორი სიმეტრიულია.

(22) განტოლების ნაცვლად ვიხილავთ განტოლებას:

$$(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1)u = f, \quad f \in H, \tag{23}$$

სადაც $\widetilde{A}_0$ არის A_0 ოპერატორის გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე, ხოლო $\widetilde{A}_1$ არის A_1-ის ჩაკეტვა.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 10. იტერაციული პროცესი

$$\widetilde{A}_0 u_n = -\widetilde{A}_1 u_{n-1} + f, \quad n = 1,2\ldots \tag{24}$$

კრებადია ნებისმიერი $u_0 \in D(\widetilde{A}_0)$ საწყისი ვექტორისათვის და მართებულია შეფასება

$$\left\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_* - \widetilde{A}_0^{1/2}u_n\right\| \le q^n \left\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_* - \widetilde{A}_0^{1/2}u_0\right\|, \tag{25}$$

სადაც u_* არის ზუსტი ამონახსნი,

$$q = (1+\lambda_1)^{-1},$$
$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\varepsilon c(2\varepsilon + \sqrt{2(2\varepsilon^2 + \pi^2)})}\,, \quad c = \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\,.$$

მეორე პარაგრაფში განხილულია იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის (სტატიკა). შემოთავაზებული იტერაციული პროცესი წარმოადგენს ზეიდელის კლასიკური იტერაციული პროცესის განზოგადებას თითოეული განტოლების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგების ქვესისტემების გაერთიანებისათვის.

იტერაციის ყოველ ბიჯზე ხდება $a_0\,\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1\,\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - a_2 I$ (a_0, a_1 და a_2 დადებითი მუდმივებია) დიფერენციალური ოპერატორის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგის შებრუნება ფაქტორიზაციისა და იტერაციული მეთოდების კომბინაციით. დამტკიცებულია ამ კომბინირებული მეთოდის კრებადობა.

მესამე პარაგრაფში განხილულია ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემა სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის (დინამიკა). (4) დისკრეტული ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებულია ვარიაციული მეთოდი. საკოორდინატო ფუნქციებად აღებულია ლეჟანდრის პოლინომების სხვაობები (ინტეგრების არეა $]-1,1[\times]-1,1[$ კვადრატი). შემოთავაზებულ სქემას ვუწოდებთ ვარიაციულ-სხვაობიანს, რადგან დროითი ცვლადის მიმართ გამოყენებულია სხვაობიანი მეთოდი, ხოლო სივრცითი ცვლადების მიმართ – ვარიაციული. შესაბამის განტოლებათა სისტემას ყოველ დროით შრეზე ვხსნით წინა პარაგრაფში აღწერილი კომბინირებული მეთოდის გამოყენებით.

მეოთხე პარაგრაფი დათმობილი აქვს სადისერტაციო ნაშრომში განხილული ნახევრადდისკრეტული, იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემების გამოყენებით სხვადასხვა მოდელური ამოცანების რიცხვითი გათვლის შედეგების ანალიზს. დამრგვალების ცდომილების მიმართ აღნიშნული სქემების მგრძნობელობის დადგენის მიზნით ჩატარებულია ისეთი მოდელური ამოცანების გათვლები, რომელთათვისაც თეორიულად ზუსტი შედეგები მიიღება. შეიძლება ითქვას, რომ განხილული სქემების მდგრადობის ხარისხი მაღალია. შემდეგი სერია მოდელური ამოცანებისა ისეთია, რომ გრადიენტი შედარებით მკვეთრად იცვლება, რის გამოც საკმარისი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა სარეალიზაციო სქემების პარამეტრების სათანადოდ შერჩევა. გათვლის შედეგები ასევე მეტყველებენ განხილული სქემების მდგრადობის მაღალ ხარისხზე.

მნიშვნელოვანია ისეთი მოდელური ამოცანის განხილვა, რომელსაც გარკვეული პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია, ამასთან ამონახსნი წინასწარ ცნობილი არ არის. სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია ასეთი ამოცანის რიცხვითი გათვლა. მიღებული შედეგები საკმარისად კარგად ასახავს რეალურ სურათს.

ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტი შემოთავაზებული იტერაციული მეთოდის ეფექტურობის შესწავლისათვის. ამ მიზნით დათვლილია იტერაციათა რიცხვი განტოლებაში შემავალი σ (პუასონის კოეფიციენტი) და ε (გარსის სისქის შეფარდება სფეროს რადიუსთან) პარამეტრების ცვლილების მიხედვით. გათვლის შედეგები გვიჩვენებს, რომ იტერაციის რიცხვი საგრძნობლად იზრდება, როცა პუასონის კოეფიციენტი უახლოვდება 0.5-ს ან გარსის სისქის შეფარდება სფეროს რადიუსთან შედარებით დიდია. სხვა შემთხვევებისათვის იტერაციათა რიცხვი ნორმის ფარგლებშია მოთავსებული.

დამატებაში მოყვანილია სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის აგებული იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემების საფუძველზე შექმნილი პროგრამათა კომპლექსი პროგრამირების $C++$ ენაზე.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ პუბლიკაციებში:

1. Abesadze T., Rogava D., On the stability and convergence of the variational difference scheme of the numerical realisation of the Cauchy–Dirichlet boundary value problem for the dynamic equation of the spherical shell. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math. **16**(2001), No. 1–3, 76–79.

2. Galdava R., Rogava D., On the stability and convergence of a symmetric weighted semidiscrete scheme for dynamic equations of a spherical shell. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math. **19** (2004), No. 1, 26–31.

3. Galdava R., Rogava D., Rogava J., On the stability and convergence of a weighted threelayer semidiscrete scheme for I. Vekua's equations of a spherical shell. Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math. **54–55** (2004–2005), 23–54.

4. Rogava D., On the convergence of an iteration method for the system of I. Vekua's equations with a split operator for a spherical shell. Bull. Georgian Acad. Sci. **173** (2006), 49–52.

5. როგავა დ., სფერული გარსის დინამიკური განტოლებისათვის ერთი სიმეტრიული ნახევრადდისკრეტული სქემის მდგრადობისა და კრებადობის შესახებ. საქართველოს მათემატიკოსთა III ყრილობა (11–13 ოქტომბერი, 2001, თბილისი), მოხსენებათა თეზისები, 2001, გვ. 85.

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

With the right of a manuscript

David Rogava

Semidiscrete, Difference and Variational-Difference Schemes for I. Vekua's Equations of a Spherical Shell

05.13.18 – Theoretical Foundations of Mathematical Modeling,
Numerical methods, Program Complexes

A u t h o r ' s A b s t r a c t

of the Dissertation for Degree
of Candidate of Physics and Mathematics

Tbilisi 2006

The dissertation has been carried out at Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Scientific supervisors: **Jemal Rogava**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor

Temur Chilachava, Doctor of Physics and Mathematics, Professor

Official opponents: **Jondo Sharikadze**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, 05.13.18

Marine Menteshashvili, Candidate of Physics and Mathematics, 05.13.18

The defence of the dissertation will take place at _____ p.m. on _____ ___________, 2006 at the open meeting of the Dissertation Board **Ph. M.01.02 № 9** of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, address: I. Vekua Institute of Applied Mathematics, 2, University Str., Tbilisi 0186.

The dissertation is available in the library of the Iv. Javakhishvili Tbilisi State University (2, University Str., Tbilisi 0186).

The Author's Abstract was disseminated on _____ ___________, 2006.

Scientific secretary,
Doctor of Physics and Mathematics G. Avalishvili

Actuality of the theme. Despite growing possibilities of modern computers the question of numerical realization of three-dimensional problems of elasticity shell remains problematic. The main obstacle is caused by the fact that the application of classical methods to the above problem demands large operating memory and a large number of arithmetic operations that complicates the solution of such problems in actual time. The situation gets even more completed for the dynamic case when the fourth dimension is introduced by the time parameter.

I. Vekua's reduction method allows to approach the solution of the three-dimensional elasticity problem by the sequence of solutions for series of two-dimensional problems. From the viewpoint of practical applications of importance is the fact that the first approximations for shallow shells are rather effective. Therefore, the construction and study of algorithms of numerical solution of I. Vekua's equations for the shallow spherical shell is an actual problem.

It is well known that the structure of equations of I. Vekua's hierarchical model enables successful use of the methods of the theory of functions of a complex variable, developed by the well-known Georgian Mathematical school for the effective solution of boundary value problems (especially in the case of plane domains with smooth boundaries). The situation is essentially different when the boundary of the integration domain is not smooth. In this case analytic methods are less effective and different numerical methods are used.

The actuality of the theme to be studied can be testified by the fact that many investigations of Georgian and foreign scholars have been devoted to the applications of I. Vekua's reduction method and shell theory in problems of studying and numerical solution of a number of problems of elasticity and shell theory.

Purpose and subject matter of the research. Construction and study of semidiscrete, difference and variational difference schemes for the solution of the discrete problem, corresponding to the continuous problem. Obtaining a priori estimates for difference analogous of first and second order derivatives in appropriate classes of solutions. Estimation of errors of difference analogues of approximate solution and first and second order derivatives. Establishing their order with respect to the time step, according to the smoothness of the solution of the initial continuous problem. Providing software for numerical solution of I. Vekua's equations of a spherical shell on the basis of the constructed algorithms and realization of model problems.

Scientific novelty and main results.

a) For I. Vekua's equations of a spherical shell the weighted symmetric (three-layer) semidiscrete schemes are constructed and a whole range of apriori estimates is obtained for them by means of the method of associated polynomials. On the basis of these estimates the theorems are proved on the convergence of approximate solutions to exact solutions. The order of an error with respect to a time step is established depending on the smoothness of the solution of the initial continuous problem.

b) The coerciveness of the operator of I. Vekua's equations system for a spherical shell in the case of Dirichlet homogeneous boundary conditions and the constant, appearing in the inequality of coerciveness is obtained.

c) For the approximate solution of Dirichlet boundary value problem for I. Vekua's equations system of a spherical shell the iteration process is suggested. Both the system of equations of plane elasticity and Helmholtz equation are separately explained at each step of iteration. It is proved that the proposed iteration process is convergent for arbitrary admissible values of the sphere radius, shell thickness and Poisson ratio.

d) For I. Vekua's equations system of a spherical shell the iterative-difference and variational-difference schemes are constructed and on their basis the complex of programs of formed in $C{+}{+}$ programming language for the numerical estimation of dynamic as well as static problems. The results of the obtained numerical calculations for various model problems are in full correspondence with theoretical conclusions.

Approbation of the research. The main results of the dissertation were reported at the following scientific seminars and conferences: Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics (2000, 2004, 2005); Seminars of I. Vekua Institute of Applied Mathematics (2005); III Meeting of Georgian Mathematicians (October 11–13, 2001, Tbilisi); Republican Conference of Mathematicians (dedicated to the birthday anniversary of Academician Ilya Vekua, 2001, Sokhumi Branch of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, April 21, 2001, Tbilisi).

Volume and structure of the dissertation. The dissertation contains 140 printed pages. It consists of the introduction, three chapters, 13 paragraphs and the appendix. The references contain those publications which have been used by the author in the dissertation. The number of references is 84.

The contents of the dissertation. In the introduction the survey of literature around the considered theme and the short contents of the dissertation are presented.

The first chapter deals with the stability and convergence of the weighted three-layer semidiscrete scheme for equations of a spherical shell in the dynamic case.

In the first paragraph the formulation of the problem is given. The equilibrium equations of a spherical shell have been considered in the dynamic case according to I. Vekua's theory (zero approximation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

where $Q_T = \Omega \times]0,T[\,,\ \Omega =]-1,1[\times]-1,1[\,,$

$$A = -\sigma_0 \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2\frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix},$$

with the homogeneous Dirichlet boundary conditions

$$u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega : |x| = |y| = 1, \tag{2}$$

and the Cauchy initial conditions

$$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y), \quad u'_t(x,y,0) = \varphi_1(x,y). \tag{3}$$

Where

$$f = (f_1, f_2, f_3)^\top, \quad \varphi_0 = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03})^\top, \quad \varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13})^\top$$

are the known continuous vector functions, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ is the unknown continuous vector function in $\overline{Q}_T$, which has continuous derivatives u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, u_t and u_{tt} in Q_T, $\varepsilon = 2R^{-1}h$, h is the shell semithickness, R is the sphere radius, σ is Poisson's ratio, E is Young's modulus, $\sigma_0 = E/2 \cdot (1+\sigma)$.

To solve problem (1)–(3) we use the semidiscrete scheme

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + A\,\frac{u_{k+1} + \nu u_k + u_{k-1}}{2+\nu} = \\ = f(x,y,t_k), \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{4}$$

where $\tau = T/n$ ($n > 1$ is a natural number), $t_k = k\tau$, $\nu \neq -2$. We declare $u_k(x,y)$ an approximate value of the exact solution $u(x,y,t)$ at the point $t = t_k$.

Thus, the solution of problems (1)–(3) at each step of time is reduced to the inversion of the operator $\Big(I + \dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)$.

In the second paragraph the coerciveness of the operator of I. Vekua's equations is proved.

The following spaces have been introduced:

$L_2(\Omega)$ is the space of square-integrable functions (Hilbert space) in the domain Ω;

$H = [L_2(\Omega)]^3$ is the Hilbert space with the scalar product

$$((u,v)) = (u_1,v_1) + (u_2,v_2) + (u_3,v_3),$$
$$\|u\| = \left(\|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2} + \|u_3\|^2_{L_2}\right)^{1/2},$$

where $u = (u_1,u_2,u_3)$ and $v = (v_1,v_2,v_3)$ are vector functions with components from the Hilbert space $L_2(\Omega)$; while $(\cdot,\cdot)$ and $\|\cdot\|_{L_2}$ are respectively the scalar product and the norm in $L_2[\Omega]$;

$C^m(\overline{\Omega})$ – is the set of continuous functions in $\overline{\Omega}$ which have continuous derivatives up to order m inclusive in $\overline{\Omega}$;

$[C^m(\overline{\Omega})]^3$ – is the set of vector functions $u = (u_1,u_2,u_3)$ with components from $C^m(\overline{\Omega})$.

The definition domain of the operator A has the form

$$D(A) = \Big\{u \in [C^2(\overline{\Omega})]^3 : \ u\big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

We have the following statement.

Theorem 1. *The operator A is symmetric on the lineal $D(A)$ and there holds the inequality*

$$((Au,u)) \geq \alpha_0\Big[\left(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\right) + \left(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\right) + \\ + \left(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\right)\Big], \quad \forall\, u \in D(A), \tag{5}$$

where $\alpha_0 = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi^2}{\pi^2 + 4\varepsilon^2}\right)$.

Corollary 1. *The operator A is positive definite*

$$((Au,u)) \geq \frac{\pi^2\alpha_0}{2}\left(\|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2} + \|u_3\|^2_{L_2}\right). \tag{6}$$

The results, obtained in the paragraphs, following this chapter, are mainly based on the investigations, carried out by I. Rogava for three-layer semidiscrete schemes (Rogava J. L., Semidiscrete schemes for operator differential equations. (Russian) *Publ. House "Technical University", Tbilisi*, 1995).

In the third paragraph a priori estimates are obtained for the solution of the discrete problem.

The following theorem holds.

Theorem 2. *Let u_0, $u_1 \in D(\widetilde{A})$ ($\widetilde{A}$ is the extension of A to a self-adjoint operator), $f(\cdot,\cdot,t_k) \in H$, $k = 1,\dots,n-1$, $\nu \in]-2,2[$, then for scheme (4) the following estimates are valid:*

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\big\|\Big) + \\ + \tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^{s-1/2}f_i\big\|, \quad 0 \le s \le 1, \quad f_i \in D(\widetilde{A}^{s-1/2}), \tag{7}$$

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\big\|\Big) + \\ + \widetilde{c}(1-s)\cdot\tau^{2(1-s)}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \quad \frac{1}{2} \le s \le 1, \tag{8}$$

where $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, $f_k = f(\cdot,\cdot,t_k)$,

$$c_0 = \frac{2}{\sqrt{2-\nu}}\,, \quad \nu_0 = \frac{1}{\sqrt{2+\nu}}\,, \quad \widetilde{c}(s) = 2^{1-2s}\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s}.$$

To obtain complete information on a dynamic problem, it is necessary to know how the velocity (and which is better, the acceleration) changes. Therefore the next step is to obtain a priori estimates for difference analogous of first and second order derivatives). For which in the fourth paragraph the estimates have been obtained for Chebyishev operator polynomials (some estimates for these polynomials have been proved in the previous paragraph).

In the fifth paragraph a priori estimates are obtained for difference analogues, corresponding to first and second order derivatives.

Theorem 3. *Let the conditions of Theorem 2 be fulfilled. Then for scheme (4) the following estimates are true:*

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \widetilde{c}(s)\tau^{2s-1}\|\widetilde{A}^s u_0\| + c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{9}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \big\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\big\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \widetilde{c}_0(s)\tau^{1-2s}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{10}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \big\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\big\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|\widetilde{A}^s f_i\|, \quad f_i \in D(\widetilde{A}^s), \tag{11}$$

where $k = 1,\dots,n-1$, $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $0 \le s \le \frac{1}{2}$,

$$\widetilde{c}_0(s) = \frac{1}{(2+\nu)^s}\,, \quad f_0 = 0.$$

Now, we will derive estimates which take place for the corresponding difference analogue of a second order derivative.

Theorem 4. *Let the conditions of Theorem 2 be fulfilled. Then for scheme* (4) *the following estimates are true:*

$$\left\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\right\| \le \tau^{2s-1}\Big[\|\widetilde{A}^{1/2+s}u_0\| + \widetilde{c}(s)\Big\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big] +$$
$$+ \widetilde{c}(s)\tau^{2s}\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^s B_\tau^{-1} f_i\big\| + \|B_\tau^{-1} f_{k+1}\|, \tag{12}$$
$$\left\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\right\| \le \|\widetilde{A}u_0\| + \left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \sum_{i=1}^{k+1}\|f_i\|, \tag{13}$$

where $k = 1,\dots,n-2$, $0 \le s \le \frac{1}{2}$, $B_\tau = I + \dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,\widetilde{A}$.

A priori estimates, obtained in the third and fifth paragraphs, when $s = 0$ and $s = 1/2$, have been proved by J. Rogava (see the above mentioned monograph).

In the sixth paragraph theorems on the convergence of semidiscrete schemes (4) are proved.

Hence it follows that instead of problem (1)–(3) we have considered the problem

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \widetilde{A}u(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{14}$$
$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \tag{15}$$

where $\widetilde{A}$ is the extension of A to a self-adjoint positive definite operator, $u(t)$ is the unknown and $f(t)$ is the known vector function with values from the Hilbert space H; φ_0 and φ_1 are the known vectors from H.

The following spaces have been introduced. If we define the Hermite norm $\|u\|_1 = \|\widetilde{A}^{1/2}u\|$ in $D(\widetilde{A}^{1/2})$, then we obtain the Hilbert space which is denoted by W^1. Analogously, by defining the Hermite norm $\|u\|_2 = \|\widetilde{A}u\|$ in $D(\widetilde{A})$ we obtain the Hilbert space which is denoted by W^2. We denote by $C([0,T];H)$ the set of vector functions $u(t)$ continuous on $[0,T]$ and taking their values from H. We denote by $C^m([0,T];H)$ $(m \ge 1)$ the set of differentiable vector functions, continuous on $[0,T]$ up to order m from $C([0,T];H)$. $C([0,T];W^i)$ and $C^m([0,T];W^i)$, $i = 1,2$, are defined analogously.

In the sequel, by a solution of problem (14), (15) we mean a function $u(t) \in C^2([0,T];H) \cap C([0,T];W^2)$ that satisfies equality (14) and the initial conditions (15). A theorem on the existence and uniqueness of such a solution when $\varphi_0 \in W^2$, $\varphi_1 \in W^1$ and $f(t) \in C^1([0,T];H)$ (or $f(t) \in C([0,T];W^2)$) is proved in the well-known monograph of S. Krein (S. Krein, Linear differential equations. (Russian) *Nauka, Moscow*, 1967).

For problem (14), (15) we consider the following semidiscrete scheme (A in (4) can be replaced by $\widetilde{A}$):

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + \widetilde{A}\,\frac{u_{k+1} + \nu u_k + u_{k-1}}{2+\nu} = f(t_k), \tag{16}$$

where $k = 1,\dots,n-1$, $\tau = T/n$ ($n > 1$ is a natural number), $t_k = k\tau$, $\nu \ne -2$, u_0 and u_1 are the given vectors from $D(\widetilde{A})$.

We call a solution u_k of system (16) an approximate value of an exact solution $u(t)$ of problem (14), (15) at the point $t = t_k$. Then for the error $z_k = u(t_k) - u_k$ the following theorems are true (in the sequel c_1 denotes a positive constant).

Theorem 5. *Let $u_0 = \varphi_0$, $u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1$, $\varphi_0, \varphi_1 \in W^2$ and $\nu \in]-2, 2[$. Then*
(a) *if $u(t) \in C^2([0,T]; H) \cap C([0,T]; W^2)$ and $f(t) \in C([0,T]; H)$, then*

$$\max_{1\le k\le n-1} \left(\|z_{k+1}\| + \left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \|\widetilde{A}^{1/2} z_{k+1}\| \right) \to 0, \quad \text{as } \tau \to 0;$$

(b) *if the conditions of the item* (a) *are fulfilled and the functions $f(t)$ and $u''(t)$ satisfy the Hölder condition with index λ $(0 < \lambda \le 1)$, then*

$$\left(\|z_{k+1}\| + \left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \|\widetilde{A}^{1/2} z_{k+1}\| \right) \le c_1 \tau^{\lambda}, \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

(c) *if $u(t) \in C^3([0,T]; H) \cap C([0,T]; W^2)$ and $f(t) \in C^1([0,T]; H)$, then*

$$\max_{1\le k\le n-1} \left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\| + \|\widetilde{A} z_{k+1}\| \right) \to 0 \quad \text{as } \tau \to 0;$$

(d) *if the conditions of the item* (c) *are fulfilled and the functions $f'(t)$ and $u'''(t)$ satisfy the Hölder condition with index λ $(0 < \lambda \le 1)$, then*

$$\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\| + \|\widetilde{A} z_{k+1}\| \right) \le c_1 \tau^{\lambda}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Theorem 6. *Let $u_0 = \varphi_0$, $\varphi_0 \in W^2$, $u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \frac{\tau^2}{2}\varphi_2$, $\varphi_2 = f(0) - \widetilde{A}\varphi_0$, φ_1, $\widetilde{A}\varphi_0$, $f(0) \in W^2$ and $\nu \in]-2, 2[$. Then*
(a) *if $u(t) \in C^3([0,T]; H) \cap C([0,T]; W^2)$, $f(t) \in C^1([0,T]; H)$, and the functions $u'''(t)$ and $f'(t)$ satisfy the Hölder conditions with index λ $(0 < \lambda \le 1)$, then*

$$\|z_{k+1}\| + \left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \|\widetilde{A}^{1/2} z_{k+1}\| \le c_1 \tau^{1+\lambda}, \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

(b) *if $u(t) \in C^4([0,T]; H) \cap C([0,T]; W^2)$, $f(t) \in C^2([0,T]; H)$, and the functions $u^{\text{IV}}(t)$ and $f''(t)$ satisfy the Hölder condition with index λ $(0 < \lambda \le 1)$, then*

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\| \le c_1 \tau^{1+\lambda}, \quad k = 1, \ldots, n-2.$$

The second chapter deals with the symmetric, weighted semidiscrete scheme for equations of a spherical shell with a split operator (dynamic case).

In the first paragraph the formulation of the problem is given. The operator of the system of equations for a spherical shell is split in the following way

$$A = A_0 + A_1 =$$

$$= -\sigma_0 \begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{1}{1-2\sigma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2 \frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix} -$$

$$-\sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

To solve problem (17), we use the following semidiscrete scheme:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + A_0 \frac{u_{k+1} + \nu u_k + u_{k-1}}{2+\nu} + A_1 u_k =$$
$$= f(x, y, t_k), \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{18}$$

where $\tau = T/n$ ($n > 1$ is a natural number), $t_k = k\tau$, $\nu \neq -2$, by $u_k(x, y)$ we denote the exact solution $u(x, y, t)$ at the point $t = t_k$.

Thus the solution of problems (1)–(3) at every step of time is reduced to the inversion of the operator $\left(I + \frac{\tau^2}{2+\nu} A_0\right)$ by the homogeneous Dirichlet boundary condition.

In the second paragraph the theorem of stability is proved.

The definition domain of the operator A_0 has the form

$$D(A_0) = \left\{ u \in [C^2(\overline{\Omega})]^3 : \ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Theorem 7. *If the vector functions $u_0(\cdot,\cdot)$ and $u_1(\cdot,\cdot)$ belong to the domain of definition of the operator $\widetilde{A}_0$ and the vector functions $f(\cdot,\cdot,t_i)$ are square summable and $\nu \in]-2, 2[$, then the following a priori estimates hold for scheme (18)*

$$\|u_{k+1}\| \leq a_{k-1} \Big[(c_0 + \tau\varepsilon c)\|u_0\| + (c_1 + \tau^2 \varepsilon c) \Big\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\| +$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} a_{k-i} \big\| \widetilde{A}_0^{-1/2} f(\cdot,\cdot,t_i) \big\|, \tag{19}$$

$$\Big\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \Big\| \leq (1 + t_k a_{k-1}) \Big[(c + \tau\varepsilon c) \big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_0 \big\| + c_0 \Big\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\| +$$
$$+ \tau(\nu_0 c_0 + \tau\varepsilon c) \Big\| \widetilde{A}_0^{1/2} \frac{\Delta u_k}{\tau} \Big\| + \tau \sum_{i=1}^{k} \|f(\cdot,\cdot,t_i)\| \Big], \tag{20}$$

$$\big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_{k+1} \big\| \leq a_{k-1} \Big[(c_0 + \tau\varepsilon c) \big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_0 \big\| +$$

$$+\tau(\nu_0 c_0+\tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big]+$$
$$+\tau\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|, \tag{21}$$

where $k=1,\dots,n-1$, $\Delta u_k=u_{k+1}-u_k$, c, c_0, c_1 and ν_0 are the same as in the preceding chapter.

In the third paragraph the theorems on convergence have been proved. Introduce the spaces W_0^1 and W_0^2, which are defined semilary to spaces W^1 and W^2, where the operator $\widetilde{A}$ is changed by $\widetilde{A}_0$.

Denote the error of approximate solution by z_k.

We introduce the notation

$$z_k(x,y)=u(x,y,t_k)-u_k(x,y),\quad k=1,\dots,n.$$

The following theorems hold true.

Theorem 8. *Let $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, φ_0, $\varphi_1\in W_0^2$, $\nu\in\,]-2,2[\,$. Then*

a) *if problem* (1)–(3) *has solutions $u(\cdot,\cdot,t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W_0^2)$ and $f(\cdot,\cdot,t)\in C([0,T];H)$, then*

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\|+\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|\Big)\to 0,\quad as\ \ \tau\to 0;$$

b) *if $f(\cdot,\cdot,t)\in C^1([0,T];H)$, then*

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\|+\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|+\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\Big)\to 0,\quad as\ \ \tau\to 0;$$

c) *if $f(\cdot,\cdot,t)\in C^1([0,T];H)$ and $u(\cdot,\cdot,t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W_0^2)$, then*

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\|+\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|+\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\Big)\le c_1\tau.$$

Theorem 9. *Let $u_0=\varphi_0$, $\varphi_0\in W_0^2$,*

$$u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1+\frac{\tau^2}{2}\big(f(x,y,0)-(\widetilde{A}_0\varphi_0+\widetilde{A}_1\varphi_0)\big),$$

φ_1, $\widetilde{A}_0\varphi_0$, $\widetilde{A}_1\varphi_0$, $f(\cdot,\cdot,0)\in W_0^2$, $f(\cdot,\cdot,t)\in C^2([0,T];H)$ and $\nu\in\,]-2,2[\,$. Then

a) *if problem* (1)–(3) *has solutions $u(\cdot,\cdot,t)\in C^4([0,T];H)\cap C([0,T];W_0^2)$, then*

$$\max_{1\le k\le n}\|z_k\|\le c_1\tau^2;$$

b) *if $u(\cdot,\cdot,t)\in C^4([0,T];H)\cap C^2([0,T];W_0^1)\cap C([0,T];W_0^2)$, then*

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|+\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\Big)\le c_1\tau^2.$$

In the third chapter the iterative, iterative-difference and variational-difference schemes are considered for I. Vekua's equations of a spherical shell.

The first paragraph deals with the iterative method for the system of I. Vekua's equations for a spherical shell with a split operator:

$$(A_0+A_1)u(x,y)=f(x,y),\quad (x,y)\in\,]-1,1[\,\times\,]-1,1[\,, \tag{22}$$

with the Dirichlet boundary conditions, where A_0 and A_1 are defined by (17).

As is known, A_0 is a symmetric and positive definite operator. A_1 is a symmetric operator.

Instead of equation (22) we consider the equation

$$(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1)u = f, \quad f \in H, \tag{23}$$

where $\widetilde{A}_0$ is the extension of the operator A_0 to the self-conjugate operator and $\widetilde{A}_1$ is the closure of the operator A_1.

The following theorem is true.

Theorem 10. *The iteration process*

$$\widetilde{A}_0 u_n = -\widetilde{A}_1 u_{n-1} + f, \quad n = 1, 2 \dots \tag{24}$$

is convergent for any initial vector $u_0 \in D(\widetilde{A}_0)$ and the following estimate is valid:

$$\big\|\widetilde{A}_0^{1/2} u_* - \widetilde{A}_0^{1/2} u_n\big\| \le q^n \big\|\widetilde{A}_0^{1/2} u_* - \widetilde{A}_0^{1/2} u_0\big\|, \tag{25}$$

where u_* is an exact solution,

$$q = (1 + \lambda_1)^{-1},$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\varepsilon c(2\varepsilon + \sqrt{2(2\varepsilon^2 + \pi^2)})}, \quad c = \frac{3 - 2\sigma}{1 - 2\sigma}.$$

The second paragraph deals with the iterative-difference method for the system of I. Vekua's equations of a spherical shell (statics). The proposed iterative process is the generalization of Zeidel classical iterative process for uniting subsystems of difference analogous, corresponds to each equation.

At each step of iteration the inversion of the difference analogue, corresponding to the differential operator $a_0 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - a_2 I$ (a_0, a_1 and a_2 are positive constant) is carried out by the combination of factorization and iteration methods. The convergence of this combined method has been proved.

In the third paragraph the variational difference scheme is considered for the system of I. Vekua's equations of a spherical shell (dynamics). For the solution of discrete problem (4) the variational problem has been used. For coordinate functions the differences of Legendre polynomials are taken (the domain of integration is $]-1,1[\times]-1,1[$ square). The proposed scheme is said to be variational-difference, since with respect to the time variable the difference method and with respect to space variables – the variational method is used. We solve the corresponding system of equations at every time layer by the combined method, used in the prevous paragraph.

The fourth paragraph is devoted to the analysis of results of numerical calculations for different model problems by using semidiscrete, iterative-difference and variational difference schemes. For the purpose of establishing sensitivity of the above schemes with respect to the sound-off error, the estimation of such model problems has been carried out for which one can obtain theoretical exact results. It might be said that the obtained numerical values are practically exact which means that the degree of stability of the considered schemes is high. The following series of model problems is such that the gradient changes relatively sharply. Therefore to achieve sufficient accuracy the appropriate selection of parameters of realization schemes is necessary. The results of calculation also testify the high degree of stability of the considered schemes.

It is important to consider such model problem which has a certain practical value, besides, the solution is not known beforehand. In the dissertation the numerical calculation is carried out for such a problem. The results obtained depict the real picture well enough.

The numerical experiment has been carried out for studying the effectiveness of the proposed iterative method. To this end the number of iterations has been established depending on the changes of σ (Poisson ratio) and ε (ratio of shell thirkness to sphere radius) parameters.The results of calculations show that the iteration number is considerably increased when Poisson ratio approaches 0.5 or the ratio of shell thickness to sphere radius is comparatively large. In other cases the number of iterations is within the norm.

In the appendix the complex of programs in the programming $C++$ language is given in the basis of iterative-difference and variational-difference schemes, constructed for the system of I. Vekua's equations for a spherical shell.

The following papers have been published on the theme of the dissertation:

1. Abesadze T., Rogava D., On the stability and convergence of the variational difference scheme of the numerical realization of the Cauchy–Dirichlet boundary value problem for the dynamic equation of the spherical shell. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* **16**(2001), No. 1–3, 76–79.

2. Galdava R., Rogava D., On the stability and convergence of a symmetric weighted semidiscrete scheme for dynamic equations of a spherical shell. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* **19** (2004), No. 1, 26–31.

3. Galdava R., Rogava D., Rogava J., On the stability and convergence of a weighted threelayer semidiscrete scheme for I. Vekua's equations of a spherical shell. *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.* **54–55** (2004–2005), 23–54.

4. Rogava D., On the convergence of an iteration method for the system of I. Vekua's equations with a split operator for a spherical shell. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **173** (2006), 49–52.

5. Rogava D., On the stability oned convergence of a symmetric semidiscrete scheme for the dynamic equation of a spherical shell. III *Meeting of Georgian Mathematicians* (*October* 11–13, 2001, *Tbilisi*), *Abstracts of Papers*, 2001, p. 85.