ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დავით როგავა

ნახევრადდისკრეტული, სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის

05.13.18 – მათემატიკური მოდელირების თეორიული საფუძვლები, რიცხვითი მეთოდები, პროგრამათა კომპლექსები

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის
სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **ჯემალ როგავა**
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი **თემურ ჩილაჩავა**

თბილისი – 2006

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

კარგად არის ცნობილი, რომ პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა ფორმის გარსული ტიპის სხეულები, ისეთი სამგანზომილებიანი სხეულები, რომელთა ზომები ერთ-ერთი განზომილების მიხედვით გაცილებით მცირეა დანარჩენ ორთან შედარებით, სწორედ ეს თვისება არსებითად განსაზღვრავს ამ ტიპის დრეკადი სხეულების დეფორმირებულ-დაძაბულ მდგომარეობას.

ნაშრომი ეხება სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის (იხ. [1]) ნახევრადდისკრეტული, სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემების აგებას და გამოკვლევას. ძირითადად განხილულია დინამიკური შემთხვევა. განხილულია ასევე სტატიკური შემთხვევა იმ თვალსაზრისით, რომ დროითი ცვლადის მიმართ დისკრეტიზაციის შედეგად დინამიკური შემთხვევა დაიყვანება სტატიკურ შემთხვევაზე ყოველ დროით შრეზე.

ი. ვეკუას გარსთა თეორიის (იხ. [2]–[5]) არსებითი განსხვავება სხვა ანალოგიური თეორიებისაგან ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

1) წონასწორობის განტოლებები შეთანხმებულია სასაზღვრო პირობებთან, განსხვავებით კლასიკურისაგან;

2) ი. ვეკუას რედუცირების მეთოდი წარმოადგენს რეგულარულ პროცესს;

3) გადაადგილების კომპონენტების მიმართ წონასწორობის განტოლებების სტრუქტურა ახლოს არის დრეკადობის ბრტყელი თეორიის კლასიკურ განტოლებებთან.

ი. ვეკუას რედუცირების მეთოდი და გარსთა თეორია წარმატებით იქნა გამოყენებული დრეკადობისა და გარსთა თეორიის მთელი რიგი ამოცანების გამოკვლევისა და რიცხვითი გათვლისათვის. ამ მიმართულებით მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს ავტორებმა: ა. გოგია [6], დ. გორდეზიანი [7], [8], გ. გოცულიაკი,

ვ. გულიაევი და ვ. ჩიბირიაკოვი [9], თ. ვაშაყმაძე [10], [11], ლ. მაღნარაძე [12], თ. მეუნარგია [13], [14], ვ. ჟღენტი [15], ა. სოლერი, გ. ჰოტჩინსი [16], ო. ქომურჯიშვილი [17], მ. შლენევი [18], თ. ცხადაია [19], პ. ჩიკალა [20], ი. ხომა [21].

ი. ვეკუას რედუცირების მეთოდი ეყრდნობა საძებნი ფუნქციების გაშლას ფურიე–ლეჟანდრის მწკრივად ე. წ. გარსის სისქის კოორდინატის მიხედვით. ორთოგონალობის პირობის შედეგად გაშლის კოეფიციენტების მიმართ მიიღება წონასწორობის ორგანზომილებიან განტოლებათა სრული სისტემა (საზოგადოდ ცვლადი სისქის) თხელი და დამრეცი გარსებისათვის. ნაშრომთა მთელი სერია მიეძღვნა გარსებისა და ფირფიტების ი. ვეკუას ოპერატორის შესწავლას: დ. გორდეზიანი [22], [23], დ. გორდეზიანი, მ. ავალიშვილი, გ. ავალიშვილი [24], გ. ავალიშვილი, მ. ავალიშვილი [25], თ. ვაშაყმაძე [26], ი. ხომა [27], გ. ჯაიანი, დ. ნატროშვილი, ს. ხარიბეგაშვილი, ვ. ვენდლანდი [28]. სასრული მიახლოებისათვის ი. ვეკუას განტოლებების ზოგადი ამონახსნები იზოტროპული ფირფიტისა და სფერული გარსების შემთხვევაში აგებული იყო ი. ხომას [29], [30], ვ. ჟღენტის, ა. ხვოლესის [31], ვ. ჟღენტის [32], თ. მეუნარგიას [33] შრომებში. გ. ჯაიანის [34] შრომაში შესწავლილია სხვადასხვა სასაზღვრო ამოცანები წამახვილებული პრიზმული გარსების შემთხვევაში.

კარგად არის ცნობილი, რომ ი. ვეკუას იერარქიული მოდელის განტოლებების სტრუქტურა იძლევა იმის საშუალებას, რომ სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური ამოხსნისათვის (განსაკუთრებით გლუვ საზღვრიანი ბრტყელი არეების შემთხვევაში) წარმატებით იქნეს გამოყენებული ცნობილი ქართული მათემატიკური სკოლის მიერ დამუშავებული კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდები. მდგომარეობა არსებითად იცვლება, როცა ინტეგრების არის საზღვარი არაგლუვია. ამ შემთხვევაში ანალიზური მეთოდები ნაკლებად ეფექტურია და გამოიყენება სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები.

ი. ვეკუას გარსთა თეორიის განტოლებებისათვის რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების აგებისა და გამოკვლევის თვალსაზრისით არსებითი მნიშვნელობა

აქვს იმ ფაქტს, რომ ამ განტოლებების სტრუქტურა ახლოს არის დრეკადობის ბრტყელი თეორიის კლასიკურ განტოლებებთან.

წარმოდგენილ ნაშრომში, დინამიკური შემთხვევისათვის, სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებების დისკრეტიზაცია ხდება დროითი ცვლადის მიმართ. მიღებული ნახევრადდისკრეტული სქემა წარმოდგენილია, როგორც ოპერატორული სხვაობიანი სქემა შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში. ამ სქემისათვის ასოცირებული პოლინომების მეთოდით (იხ. [35]–[38]) მიიღება ისეთი აპრიორული შეფასებები, საიდანაც გამომდინარეობს მდგრადობა და მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობა ზუსტი ამონახსნისაკენ ბუნებრივ კლასებში.

დისერტაცია შედგება სამი თავისაგან.

პირველ თავში განიხილება დინამიკური შემთხვევისათვის, სფერული გარსის განტოლებებისათვის წონიანი სამშრიანი ნახევრადდისკრეტული სქემის მდგრადობა და კრებადობა.

პირველ პარაგრაფში მოცემულია ამოცანის დასმა. განხილულია სფერული გარსის წონასწორობის განტოლებები დინამიკური შემთხვევისთვის, ი. ვეკუას თეორიის მიხედვით, ნულოვანი მიახლოება (იხ. [1]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

სადაც $Q_T = \Omega \times]0,T[\,,\ \Omega =]-1,1[\times]-1,1[\,,$

$$A = -\sigma_0 \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2\frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix},$$

დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო

$$u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega : |x| = |y| = 1, \tag{2}$$

და კოშის საწყისი

$$u(x,y,0)=\varphi_0(x,y), \quad u'_t(x,y,0)=\varphi_1(x,y), \tag{3}$$

პირობებით. სადაც

$$f=(f_1,f_2,f_3)^\top, \quad \varphi_0=(\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03})^\top, \ \ \varphi_1=(\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{13})^\top$$

ცნობილი უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციებია, $u=(u_1,u_2,u_3)^\top$ – საძებნი ვექტორ-ფუნქციაა უწყვეტი $\overline{Q}_T$-ში, რომელსაც აქვს უწყვეტი u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, u_t და u_{tt} წარმოებულები Q_T-ში, $\varepsilon=2R^{-1}h$, h – გარსის ნახევარსისქეა, R – სფეროს რადიუსი, σ – პუასონის კოეფიციენტი, E – იუნგის მოდული, $\sigma_0=E/2\cdot(1+\sigma)$.

(1)–(3) ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ნახევრადდისკრეტული სქემის გამოყენებით:

$$\begin{aligned}\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}&+A\,\frac{u_{k+1}+\nu u_k+u_{k-1}}{2+\nu}=\\&=f(x,y,t_k), \quad k=1,\dots,n-1,\end{aligned} \tag{4}$$

სადაც $\tau=T/n$ ($n>1$ არის ნატურალური რიცხვი), $t_k=k\tau$, $\nu\neq-2$. $u(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(x,y)$-ს.

ამრიგად, (1)–(3) ამოცანის ამოხსნა დროის ყოველ ბიჯზე დაიყვანება $\Big(I+\dfrac{\tau^2}{2+\nu}A\Big)$ ოპერატორის შებრუნებაზე.

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემის ოპერატორის კოერციტიულობა.

შემოტანილია შემდეგი სივრცეები:

$L_2(\Omega)$ – Ω არეში კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე (ჰილბერტის სივრცე);

$H=[L_2(\Omega)]^3$ – ჰილბერტის სივრცე, შესაბამისად სკალარული ნამრავლით და ნორმით:

$$((u,v))=(u_1,v_1)+(u_2,v_2)+(u_3,v_3),$$
$$\|u\|=\left(\|u_1\|^2_{L_2}+\|u_2\|^2_{L_2}+\|u_3\|^2_{L_2}\right)^{1/2},$$

სადაც $u=(u_1,u_2,u_3)$ და $v=(v_1,v_2,v_3)$ ვექტორ-ფუნქციებია კომპონენტებით $L_2(\Omega)$-დან; $(\cdot,\cdot)$ და $\|\cdot\|_{L_2}$, შესაბამისად, სკალარული ნამრავლი და ნორმაა $L_2[\Omega]$ ჰილბერტის სივრცეში;

$C^m(\overline{\Omega})$ – სიმრავლე $\overline{\Omega}$-ში უწყვეტი ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ უწყვეტი წარმოებულები m რიგამდე ჩათვლით $\overline{\Omega}$-ში;

$[C^m(\overline{\Omega})]^3$ – სიმრავლე $u=(u_1,u_2,u_3)$ ვექტორ-ფუნქციებისა, კომპონენტებით $C^m(\overline{\Omega})$-დან.

A ოპერატორის განსაზღვრის არე განიმარტება შემდეგნაირად:

$$D(A)=\left\{u\in[C^2(\overline{\Omega})]^3:\ u\big|_{\partial\Omega}=0\right\}.$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 1. A ოპერატორი სიმეტრიულია $D(A)$ ლინეალზე და მართებულია უტოლობა

$$((Au,u))\geq\alpha_0\Big[\left(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2}+\|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\right)+\left(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2}+\|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\right)+$$
$$+\left(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2}+\|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\right)\Big],\quad\forall\,u\in D(A),\tag{5}$$

სადაც $\alpha_0=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\pi^2}{\pi^2+4\varepsilon^2}\right)$.

შ ე დ ე გ ი 1. A ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია

$$((Au,u))\geq\frac{\pi^2\alpha_0}{2}\left(\|u_1\|^2_{L_2}+\|u_2\|^2_{L_2}+\|u_3\|^2_{L_2}\right).\tag{6}$$

ამ თავის შემდეგ პარაგრაფებში მიღებული შედეგები ძირითადად ეყრდნობა ჯ. როგავას მიერ ჩატარებულ კვლევებს სამშრიანი ნახევრადდისკრეტული სქემებისათვის (იხ. [37]).

მესამე პარაგრაფში მიღებულია აპრიორული შეფასებები დისკრეტული ამოცანის ამონახსნისათვის.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 2. ვთქვათ $u_0,\, u_1 \in D(\widetilde{A})$ ($\widetilde{A}$ არის A-ს გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე), $f(\cdot,\cdot,t_k) \in H$, $k = 1,\dots,n-1$, $\nu \in]-2,2[$, მაშინ (4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\big\|\Big)+ \\ + \tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^{s-1/2} f_i\big\|,\;\; 0 \le s \le 1,\;\; f_i \in D(\widetilde{A}^{s-1/2}), \tag{7}$$

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\big\|\Big)+ \\ + \widetilde{c}(1-s)\cdot\tau^{2(1-s)}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|,\;\; \frac{1}{2} \le s \le 1, \tag{8}$$

სადაც $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, $f_k = f(\cdot,\cdot,t_k)$,

$$c_0 = \frac{2}{\sqrt{2-\nu}}\,,\;\; \nu_0 = \frac{1}{\sqrt{2+\nu}}\,,\;\; c(s) = 2^{1-2s}\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s}.$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ სრული ინფორმაცია დინამიკური ამოცანის შესახებ, აუცილებელია ვიცოდეთ, თუ როგორ იცვლება სიჩქარე (უკეთეს შემთხვევაში ასევე აჩქარებაც). ამრიგად, შემდეგი ნაბიჯია აპრიორული შეფასებების მიღება პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგებისათვის. რისთვისაც მეოთხე პარაგრაფში მიღებულია შეფასებები ჩებიშევის ოპერატორული პოლინომებისათვის (ზოგიერთი შეფასება ამ პოლინომებისათვის დამტკიცებული იყო წინა პარაგრაფში).

მეხუთე პარაგრაფში მიღებულია აპრიორული შეფასებები პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგებისათვის

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 3. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2-ის პირობები, მაშინ (4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le \widetilde{c}(s)\tau^{2s-1}\|\widetilde{A}^s u_0\| + c_0\left\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{9}$$

$$\left\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le \left\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\right\| + c_0\left\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \widetilde{c}_0(s)\tau^{1-2s}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{10}$$

$$\left\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le \left\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\right\| + c_0\left\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|\widetilde{A}^s f_i\|, \quad f_i \in D(\widetilde{A}^s). \tag{11}$$

სადაც $k = 1, \dots, n-1$, $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $0 \le s \le \frac{1}{2}$,

$$\widetilde{c}_0(s) = \frac{1}{(2+\nu)^s}, \quad f_0 = 0.$$

მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგისათვის მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 4. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 2-ის პირობები, მაშინ (4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\right\| \le \tau^{2s-1}\left[\left\|\widetilde{A}^{1/2+s}u_0\right\| + \widetilde{c}(s)\left\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\|\right] + \\ + \widetilde{c}(s)\tau^{2s}\sum_{i=1}^{k}\left\|\widetilde{A}^s B_\tau^{-1} f_i\right\| + \|B_\tau^{-1} f_{k+1}\|, \tag{12}$$

$$\left\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\right\| \le \|\widetilde{A}u_0\| + \left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \sum_{i=1}^{k+1}\|f_i\|, \tag{13}$$

სადაც $k = 1, \dots, n-2$, $0 \le s \le \frac{1}{2}$, $B_\tau = I + \dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,\widetilde{A}$.

მესამე და მეხუთე პარაგრაფებში მიღებული აპრიორული შეფასებები, როცა $s=0$ და $s=1/2$, დამტკიცებული იყო ჯ. როგავას მიერ (იხ. [37]).

მეექვსე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემები (4) ნახევრადდისკრეტული სქემის კრებადობის შესახებ.

(1)–(3) ამოცანა შეცვლილია შემდგი ამოცანით:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\widetilde{A}u(t)=f(t), \quad t\in[0,T], \tag{14}$$

$$u(0)=\varphi_0, \quad u'(0)=\varphi_1, \tag{15}$$

სადაც $\widetilde{A}$ არის A-ს გაფართოება თვითშეუღლებულ დადებითად განსაზღვრულ ოპერატორამდე, $u(t)$ – უცნობი, ხოლო $f(t)$ – ცნობილი ვექტორ-ფუნქციებია მნიშვნელობებით H-დან; φ_0 და φ_1 ცნობილი ვექტორებია H-დან.

შემოღებულია შემდეგი სივრცეები: განვსაზღვროთ $D(\widetilde{A}^{1/2})$-ში ერმიტის ნორმა $\|u\|_1=\|\widetilde{A}^{1/2}u\|$. მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W^1-ით. ანალოგიურად, თუ $D(\widetilde{A})$-ში განვსაზღვრავთ ერმიტის ნორმას $\|u\|_2=\|\widetilde{A}u\|$, მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W^2-ით. აღვნიშნოთ $C([0,T];H)$-ით სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში უწყვეტი $u(t)$ ვექტორ-ფუნქციებისა მნიშვნელობებით H-დან. $C^m([0,T];H)$-ით $(m\geq 1)$ აღვნიშნოთ სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში m რიგამდე ჩათვლით უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორ-ფუნქციებისა $C([0,T];H)$-დან. ანალოგიურად განიმარტება $C([0,T];W^i)$ და $C^m([0,T];W^i)$, $i=1,2$.

$(14),(15)$ ამოცანის ამონახსნს ვუწოდებთ

$$u(t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$$

ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (14) განტოლებას და (15) საწყის პირობებს. თეორემა ასეთი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, როცა $\varphi_0\in W^2$, $\varphi_1\in W^1$ და $f(t)\in C^1([0,T];H)$ (ან $f(t)\in C([0,T];W^2)$) დამტკიცებულია, მაგალითად [39]-ში (იხ. [39], თეორემა 1.5, გვ. 301).

$(14), (15)$ ამოცანისთვის განვიხილავთ (4)-ის ანალოგიურ ნახევრადდისკრეტულ სქემას, სადაც A შეცვლილია $\widetilde{A}$-თი:

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+\widetilde{A}\,\frac{u_{k+1}+\nu u_k+u_{k-1}}{2+\nu}=f(t_k), \tag{16}$$

სადაც $k=1,\ldots,n-1$, $\tau=T/n$ ($n>1$ ნატურალური რიცხვია), $t_k=k\tau$, $\nu\neq -2$, u_0 და u_1 მოცემული ვექტორებია $D(\widetilde{A})$-დან.

$(14), (15)$ ამოცანის $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში ვაცხადებთ (16) სისტემის u_k ამონახსნს. მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილება აღვნიშნოთ z_k-თი, $z_k=u(t_k)-u_k$. მართებულია შემდეგი თეორემები (ყველგან c_1-ით აღნიშნულია დადებითი მუდმივი).

თ ე ო რ ე მ ა 5. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, $\varphi_0,\varphi_1\in W^2$ და $\nu\in\,]-2,2[\,$. მაშინ

(a) თუ $u(t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$ და $f(t)\in C([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\right)\to 0, \text{ როცა } \tau\to 0;$$

(b) თუ შესრულებულია (a) პუნქტის პირობები და $f(t)$ და $u''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\right)\le c_1\tau^\lambda,\quad k=1,\ldots,n-1;$$

(c) თუ $u(t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$ და $f(t)\in C^1([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|+\|\widetilde{A}z_{k+1}\|\right)\to 0 \text{ როცა } \tau\to 0;$$

(d) თუ შესრულებულია (c) პუნქტის პირობები და $f'(t)$ და $u'''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|+\|\widetilde{A}z_{k+1}\|\right)\le c_1\tau^\lambda,\quad k=1,\ldots,n-1.$$

თ ე ო რ ე მ ა 6. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $\varphi_0\in W^2$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1+\frac{\tau^2}{2}\varphi_2$, $\varphi_2=f(0)-\widetilde{A}\varphi_0$, φ_1, $\widetilde{A}\varphi_0$, $f(0)\in W^2$ და $\nu\in\,]-2,2[\,$. მაშინ

(a) თუ $u(t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$, $f(t)\in C^1([0,T];H)$, $u'''(t)$ და $f'(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობებს λ $(0<\lambda\leq 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\leq c_1\tau^{1+\lambda},\quad k=1,\dots,n-1;$$

(b) თუ $u(t)\in C^4([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$, $f(t)\in C^2([0,T];H)$, $u^{\mathrm{IV}}(t)$ და $f''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობებს λ $(0<\lambda\leq 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|\leq c_1\tau^{1+\lambda},\quad k=1,\dots,n-2.$$

მეორე თავში განიხილება სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა სფერული გარსის განტოლებებისათვის გახლეჩილი ოპერატორით (დინამიკური შემთხვევა).

პირველ პარაგრაფში მოცემულია ამოცანის დასმა. სფერული გარსის განტოლებათა სისტემის ოპერატორი A გახლეჩილია შემდეგნაირად:

$$A=A_0+A_1=$$

$$=-\sigma_0\begin{bmatrix}\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & 0\\ \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon^2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-4\varepsilon^2\frac{1}{1-2\sigma}\end{bmatrix}-$$

$$-\sigma_0\begin{bmatrix}0 & 0 & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0 & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y}\\ \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & 0\end{bmatrix}. \qquad (17)$$

(17) გახლეჩის საფუძველზე (1) განტოლებისათვის აგებულია შემდეგი სახის სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა:

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+A_0\,\frac{u_{k+1}+\nu u_k+u_{k-1}}{2+\nu}+A_1u_k=$$
$$=f(x,y,t_k),\quad k=1,2,\dots,n-1, \tag{18}$$

სადაც $\tau = T/n$ ($n > 1$ არის ნატურალური რიცხვი), $t_k = k\tau$, $\nu \neq -2$. $u(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(x,y)$-ს.

ამრიგად, (1)–(3) ამოცანის ამოხსნა დროის ყოველ ბიჯზე დაიყვანება $\Big(I+\dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,A_0\Big)$ ოპერატორის შებრუნებაზე დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით.

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემა მდგრადობის შესახებ.

A_0 ოპერატორის განსაზღვრის არე განიმარტება შემდეგნაირად:

$$D(A_0)=\Big\{u\in[C^2(\overline{\Omega})]^3:\ u\big|_{\partial\Omega}=0\Big\}.$$

თეორემა 7. თუ $u_0(\cdot,\cdot)$ და $u_1(\cdot,\cdot)$ ვექტორ-ფუნქციები ეკუთვნიან $\widetilde{A}_0$ ოპერატორის განსაზღვრის არეს, ხოლო $f(\cdot,\cdot,t_i)$ ვექტორ-ფუნქციები კვადრატით ჯამებადია და $\nu\in\,]-2,2[$, მაშინ (18) სქემისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასებები:

$$\|u_{k+1}\|\le a_{k-1}\Big[(c_0+\tau\varepsilon c)\|u_0\|+(c_1+\tau^2\varepsilon c)\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+$$
$$+\tau\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}\big\|\widetilde{A}_0^{-1/2}f(\cdot,\cdot,t_i)\big\|, \tag{19}$$

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\le(1+t_ka_{k-1})\Big[(c+\tau\varepsilon c)\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+$$
$$+\tau(\nu_0c_0+\tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|\Big], \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_{k+1}\big\| \le a_{k-1}\Big[&(c_0+\tau\varepsilon c)\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|+\\
&+\tau(\nu_0 c_0+\tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big]+\\
&+\tau\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|, \qquad (21)
\end{aligned}
$$

სადაც $k=1,2,\ldots,n-1$, $\Delta u_k=u_{k+1}-u_k$, c, c_0, c_1 და ν_0 მიდმივები იგივეა რაც წინა თავში, $a_k=\exp(\varepsilon c t_k)$.

მესამე პარაგრაფში დამტკიცებულია თეორემები კრებადობის შესახებ.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$
z_k(x,y)=u(x,y,t_k)-u_k(x,y), \quad k=1,2,\ldots,n.
$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

თ ე ო რ ე მ ა 8. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, $\varphi_0,\varphi_1\in W_0^2$, $\nu\in\,]-2,2[$. მაშინ

ა) თუ (1)–(3) ამოცანის ამონახსნი

$$
u(\cdot,\cdot,t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W_0^2) \ \text{ და } \ f(\cdot,\cdot,t)\in C([0,T];H),
$$

მაშინ

$$
\max_{1\le k\le n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|\right)\to 0, \ \text{ როცა } \ \tau\to 0;
$$

ბ) თუ $f(\cdot,\cdot,t)\in C^1([0,T];H)$, მაშინ

$$
\max_{1\le k\le n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|+\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\right)\to 0, \ \text{ როცა } \ \tau\to 0;
$$

გ) თუ $f(\cdot,\cdot,t)\in C^1([0,T];H)$ და $u(\cdot,\cdot,t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$
\max_{1\le k\le n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\|+\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}z_{k+1}\big\|\right)\le c_1\tau.
$$

თ ე ო რ ე მ ა 9. ვთქვათ $u_0 = \varphi_0,\ \ \varphi_0 \in W_0^2$,

$$u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \frac{\tau^2}{2}\big(f(x,y,0) - (\widetilde{A}_0\varphi_0 + \widetilde{A}_1\varphi_0)\big),$$

$\varphi_1,\ \widetilde{A}_0\varphi_0,\ \widetilde{A}_1\varphi_0,\ f(\cdot,\cdot,0) \in W_0^2,\ \ f(\cdot,\cdot,t) \in C^2([0,T];H)$ და $\nu \in]-2,2[$. მაშინ

ა) თუ (1)–(3) ამოცანის ამონახსნი $u(\cdot,\cdot,t) \in C^4([0,T];H) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n} \|z_k\| \le c_1\tau^2;$$

ბ) თუ $u(\cdot,\cdot,t) \in C^4([0,T];H) \cap C^2([0,T];W_0^1) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1} \left(\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \left\|\widetilde{A}_0^{1/2} z_{k+1}\right\|\right) \le c_1\tau^2.$$

მესამე თავში განიხილება იტერაციული, იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის.

პირველ პარაგრაფში მოყვანილია იტერაციული მეთოდი სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის გახლეჩილი ოპერატორით.

განვიხილოთ სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემა:

$$(A_0 + A_1)u(x,y) = f(x,y),\ \ (x,y) \in]-1,1[\times]-1,1[\,, \tag{22}$$

დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით, სადაც A_0 და A_1 განისაზღვრება (17) წარმოდგენიდან.

როგორც ცნობილია A_0 არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი, ხოლო A_1 ოპერატორი სიმეტრიულია.

(22) განტოლების ნაცვლად ვიხილავთ განტოლებას:

$$(\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1)u = f,\ \ f \in H, \tag{23}$$

სადაც $\widetilde{A}_0$ არის A ოპერატორის გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე, ხოლო $\widetilde{A}_1$ არის A_1-ის ჩაკეტვა.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 10. იტერაციული პროცესი

$$\widetilde{A}_0 u_n = -\widetilde{A}_1 u_{n-1} + f, \ \ n = 1, 2 \ldots \tag{24}$$

კრებადია ნებისმიერი $u_0 \in D(\widetilde{A}_0)$ საწყისი ვექტორისათვის და მართებულია შეფასება

$$\left\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_* - \widetilde{A}_0^{1/2} u_n \right\| \le q^n \left\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_* - \widetilde{A}_0^{1/2} u_0 \right\|, \tag{25}$$

სადაც u_* არის ზუსტი ამონახსნი,

$$q = (1 + \lambda_1)^{-1},$$
$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\varepsilon c(2\varepsilon + \sqrt{2(2\varepsilon^2 + \pi^2)})}, \quad c = \frac{3 - 2\sigma}{1 - 2\sigma}.$$

მეორე პარაგრაფში განხილულია იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის (სტატიკა). შემოთავაზებული იტერაციული პროცესი წარმოადგენს ზეიდელის კლასიკური იტერაციული პროცესის განზოგადებას თითოეული განტოლების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგების ქვესისტემების გაერთიანებისათვის.

იტერაციის ყოველ ბიჯზე ხდება $a_0 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - a_2 I$ (a_0, a_1 და a_2 დადებითი მუდმივებია) დიფერენციალური ოპერატორის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგის შებრუნება ფაქტორიზაციისა და იტერაციული მეთოდების კომბინაციით. დამტკიცებულია ამ კომბინირებული მეთოდის კრებადობა.

მესამე პარაგრაფში განხილულია ვარიაცუილ-სხვაობიანი სქემა სფერული გარსის ი. ვეკუას განტიოლებათა სისტემისათვის (დინამიკა). (4) დისკრეტული ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებულია ვარიაციული მეთოდი. საკოორდინატო ფუნქციებად აღებულია ლეჟანდრის პოლინომების სხვაობები (ინტეგრების არე არის $]-1,1[\times]-1,1[$ კვადრატი). შემოთავაზებულ სქემას ვუწოდებთ ვარიაციულ-სხვაობიანს, რადგან დროთი ცვადის მიმართ გამოყენებულია

სხვაობიანი მეთოდი, ხოლო სივრცითი ცვლადების მიმართ – ვარიაციული. შე-
საბამის განტოლებათა სისტემას ყოველ დროით შრეზე ვხსნით წინა პარაგრაფ-
ში აღწერილი კომბინირებული მეთოდის გამოყენებით.

მეოთხე პარაგრაფი დათმობილი აქვს სადისერტაციო ნაშრომში განხილუ-
ლი ნახევრადდისკრეტული, იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობი-
ანი სქემების გამოყენებით სხვადასხვა მოდელური ამოცანების რიცხვითი გათ-
ვლის შედეგების ანალიზს. დამრგვალების ცდომილების მიმართ აღნიშნული სქე-
მების მგრძნობელობის დადგენის მიზნით ჩატარებულია ისეთი მოდელური ამო-
ცანების გათვლები, რომელთათვისაც თეორიულად ზუსტი შედეგები მიიღება.
შეიძლება ითქვას, რომ განხილული სქემების მდგრადობის ხარისხი მაღალია.
შემდეგი სერია მოდელური ამოცანებისა ისეთია, რომ გრადიენტი შედარებით
მკვეთრად იცვლება, რის გამოც საკმარისი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა
სარეალიზაციო სქემების პარამეტრების სათანადოდ შერჩევა. გათვლის შედე-
გები ასევე მეტყველებენ განხილული სქემების მდგრადობის მაღალ ხარისხზე.

მნიშვნელოვანია ისეთი მოდელური ამოცანის განხილვა, რომელსაც გარკვეუ-
ლი პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია, ამასთან ამონახსნი წინასწარ ცნობილი
არ არის. სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია ასეთი ამოცანის რიცხვითი
გათვლა. მიღებული შედეგები საკმარისად კარგად ასახავს რეალურ სურათს.

ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტი შემოთავაზებული იტერაციული მეთო-
დის ეფექტურობის შესწავლისათვის. ამ მიზნით დათვლილია იტერაციათა რი-
ცხვი განტოლებაში შემავალი σ (პუასონის კოეფიციენტი) და ε (გარსის სისქის
შეფარდება სფეროს რადიუსთან) პარამეტრების ცვლილების მიხედვით. გათ-
ვლის შედეგები გვიჩვენებს, რომ იტერაციის რიცხვი საგრძნობლად იზრდება,
როცა პუასონის კოეფიციენტი უახლოვდება 0.5-ს ან გარსის სისქის შეფარდება
სფეროს რადიუსთან შედარებით დიდია. სხვა შემთხვევებისათვის იტერაციათა
რიცხვი ნორმის ფარგლებშია მოთავსებული.

თ ა ვ ი I

დინამიკური შემთხვევისათვის სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის წონიანი სამშრიანი ნახევრადდისკრეტული სქემის მდგრადობა და კრებადობა

ამ თავში განხილულია წონიანი, სიმეტრიული (სამშრიანი) ნახევრადდისკრე-ტული სქემა სფერული გარსის განტოლებებისთვის. დისკრეტიზაცია ხდება დრო-ითი ცვლადის მიმართ. განხილული სქემა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ოპერატორულ-სხვაობიანი სქემა შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში.

დამტკიცებულია ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემის ოპერატორის კოერცი-ტიულობა. ასოცირებული პოლინომის მეთოდით (იხ. [35]–[38]) მიღებულია აპ-რიორული შეფასებების მთელი სპექტრი სხვაობიანი ამოცანის მონახსნისათვის. ასევე მიღებულია აპრიორული შეფასებები ამონახსნის პირველი და მეორე რი-გის წარმოებულების სხვაობიანი ანალოგებისათვის. დამტკიცებულია თეორე-მები მიახლოებითი ამონახსნის ზუსტი ამონახსნისაკენ კრებადობს შესახებ. შე-ფასებულია ცთომილების რიგი დროითი ბიჯის მიმართ უწყვეტი ამოცანის ამო-ნახსნის სიგლუვისდა მიხედვით.

§ 1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ სფერული გარსის წონასწორობის განტოლებები დინამიკური შემთხვევისთვის, ი. ვეკუას თეორიის მიხედვით, ნულოვანი მიახლოება (იხ. [1]):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

სადაც $Q_T = \Omega\times\,]0,T[\,,\ \ \Omega =]-1,1[\,\times\,]-1,1[\,,$

$$A = -\sigma_0\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon^2 & -\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-4\varepsilon^2\frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix},$$

დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო

$$u(x,y,t)\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.2}$$

და კოშის საწყისი პირობებით:

$$u(x,y,0) = \varphi_0(x,y), \quad u_t'(x,y,0) = \varphi_1(x,y). \tag{1.3}$$

სადაც

$$f = (f_1,f_2,f_3)^\top, \quad \varphi_0 = (\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03})^\top \ \text{ და } \ \varphi_1 = (\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{13})^\top$$

ცნობილი უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციებია, $u = (u_1,u_2,u_3)^\top$ – საძებნი ვექტორ-ფუნქციაა, უწყვეტი $\overline{Q}_T$-ში, რომელსაც აქვს უწყვეტი u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, u_t და u_{tt} წარმოებულები Q_T-ში; $\varepsilon = 2R^{-1}h$, h – გარსის ნახევარსისქეა, R – სფეროს რადიუსი, σ – პუასონის კოეფიციენტი, E – იუნგის მოდული, $\sigma_0 = E/2(1+\sigma)$.

(1.1)–(1.3) ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ნახევრადდისკრეტული სქემის გამოყენებით:

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2} + A\,\frac{u_{k+1}+\nu u_k+u_{k-1}}{2+\nu} =$$
$$= f(x,y,t_k), \quad k = 1,\ldots,n-1, \tag{1.4}$$

სადაც $\tau = T/n$ ($n > 1$ არის ნატურალური რიცხვი), $t_k = k\tau$, $\nu \neq -2$. $u(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(x,y)$-ს.

(1.4)-დან გვაქვს (ყველგან ქვემოთ I-თი აღნიშნულია იგივური ოპერატორი):

$$\Big(I+\frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u_{k+1}-\Big(2I-\frac{\tau^2\nu}{2+\nu}\,A\Big)u_k+\Big(I+\frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u_{k-1}= \\ =\tau^2 f(x,y,t_k),\quad k=1,\ldots,n-1. \tag{1.5}$$

შემდეგ პარაგრაფში ნაჩვენები იქნება, რომ A ოპერატორი $D(A)$-ზე სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრული (A ოპერატორის განსაზღვრის არე $D(A)$ განმარტებულია შემდეგ პარაგრაფში). აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $2+\nu>0$ არსებობს $(I+\dfrac{\tau^2}{2+\nu}\,A)^{-1}$ ოპერატორი და ის შემოსაზღვრულია.

როცა $k=1$ გვაქვს $u_0(x,y)=\varphi_0(x,y)$. u_1-ს ვპოულობთ ტეილორის ფორმულის გამოყენებით (1.3) საწყისი პირობებისა და (1.1) განტოლების გათვალისწინებით:

$$u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1+\frac{\tau^2}{2}\left(f(x,y,0)-A\varphi_0\right),\quad \varphi_0\in D(A). \tag{1.6}$$

შევნიშნოთ, რომ (1.6) ფორმულა გვაძლევს $u(t_1)$ ვექტორის მიახლოებით მნიშვნელობას τ-ს მიმართ მესამე რიგის სიზუსტით, ხოლო $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$ ფორმულა კი ცხადია მეორე რიგის სიზუსტით. თვით (1.4) სხვაობიანი განტოლება ახდენს (1.1) განტოლების აპროქსიმაციას ბიჯის მიმართ მეორე რიგის სიზუსტით.

ამრიგად, (1.1)–(1.3) ამოცანის ამოხსნა დროის ყოველ ბიჯზე დაიყვანება

$$\Big(I+\frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u(x,y)=f(x,y), \\ (x,y)\in\Omega=\,]-1,1[\times]-1,1[\,, \tag{1.7}$$

სახის განტოლების ამოხსნაზე დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0. \tag{1.8}$$

§ 2. ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემის ოპერატორის კოერციტიულობა

შემოვიღოთ შემდეგი სივრცეები:

$L_2(\Omega)$ – Ω არეში კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე (ჰილბერტის სივრცე);

$H = [L_2(\Omega)]^3$ – ჰილბერტის სივრცე, შესაბამისად სკალარული ნამრავლით და ნორმით:

$$((u, v)) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + (u_3, v_3),$$
$$\|u\| = \left(\|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2} + \|u_3\|^2_{L_2}\right)^{1/2},$$

სადაც $u = (u_1, u_2, u_3)$ და $v = (v_1, v_2, v_3)$ ვექტორ-ფუნქციებია კომპონენტებით $L_2(\Omega)$-დან, $(\cdot, \cdot)$ და $\|\cdot\|_{L_2}$, შესაბამისად, სკალარული ნამრავლი და ნორმაა $L_2[\Omega]$ ჰილბერტის სივრცეში;

$C^m(\overline{\Omega})$ – სიმრავლე $\overline{\Omega}$-ში უწყვეტი ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ უწყვეტი წარმოებულები m რიგამდე ჩათვლით $\overline{\Omega}$-ში;

$[C^m(\overline{\Omega})]^3$ – სიმრავლე $u = (u_1, u_2, u_3)$ ვექტორ-ფუნქციებისა, კომპონენტებით $C^m(\overline{\Omega})$-დან.

A ოპერატორის განსაზღვრის არე განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$D(A) = \Big\{u \in [C^2(\overline{\Omega})]^3 : \ u\big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. A ოპერატორი სიმეტრიულია $D(A)$ ლინეალზე და მართებულია უტოლობა

$$((Au, u)) \geq \alpha_0\Big[\left(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\right) + \left(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\right) + $$
$$+ \left(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\right)\Big], \quad \forall\, u \in D(A), \tag{2.1}$$

სადაც $\alpha_0 = \min\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi^2}{\pi^2+4\varepsilon^2}\Big)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ცხადია გვაქვს:

$$Au = -\begin{pmatrix} a\partial^2_{xx}u_1 + \partial^2_{yy}u_1 - \varepsilon^2 u_1 + b\partial^2_{xy}u_2 - \varepsilon c\partial_x u_3 \\ b\partial^2_{xy}u_1 + \partial^2_{xx}u_2 + a\partial^2_{yy}u_2 - \varepsilon^2 u_2 - \varepsilon c\partial_y u_3 \\ \varepsilon c\partial_x u_1 + \varepsilon c\partial_y u_2 + \partial^2_{xx}u_3 + \partial^2_{yy}u_3 - 4\varepsilon^2 b u_3 \end{pmatrix},$$

სადაც

$$a = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\,, \quad b = \frac{1}{1-2\sigma}\,, \quad c = \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\,.$$

გამოვთვალოთ სკალარული ნამრავლი $((Au, v))$. ცხადია, გვაქვს:

$$\begin{aligned}((Au,v)) = -\Big[&a(\partial^2_{xx}u_1, v_1) + (\partial^2_{yy}u_1, v_1) - \varepsilon^2(u_1,v_1) + \\ &+ b(\partial^2_{xy}u_2, v_1) - \varepsilon c(\partial_x u_3, v_1) + b(\partial^2_{xy}u_1, v_2) + \\ &+ (\partial^2_{xx}u_2, v_2) + a(\partial^2_{yy}u_2, v_2) - \varepsilon^2(u_2, v_2) - \\ &- \varepsilon c(\partial_y u_3, v_2) + \varepsilon c(\partial_x u_1, v_3) + \varepsilon c(\partial_y u_2, v_3) + \\ &+ (\partial^2_{xx}u_3, v_3) + (\partial^2_{yy}u_3, v_3) - 4\varepsilon^2 b(u_3, v_3)\Big].\end{aligned}$$

თუ u, $v \in D(A)$, მაშინ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მი-ვიღებთ:

$$\begin{aligned}((Au,v)) = &a(\partial_x u_1, \partial_x v_1) + (\partial_y u_1, \partial_y v_1) + \varepsilon^2(u_1, v_1) + \\ &+ b(\partial_y u_2, \partial_x v_1) + \varepsilon c(\partial_x u_3, v_1) + b(\partial_y u_1, \partial_x v_2) + \\ &+ (\partial_x u_2, \partial_x v_2) + a(\partial^2_y u_2, \partial_y v_2) + \varepsilon^2(u_2, v_2) + \\ &+ \varepsilon c(\partial_y u_3, v_2) - \varepsilon c(\partial_x u_1, v_3) - \varepsilon c(\partial_y u_2, v_3) + \\ &+ (\partial_x u_3, \partial_x v_3) + (\partial_y u_3, \partial_y v_3) + 4\varepsilon^2 b(u_3, v_3), \qquad (2.2)\\ ((u, Av)) = &a(\partial_x u_1, \partial_x v_1) + (\partial_y u_1, \partial_y v_1) + \varepsilon^2(u_1, v_1) + \\ &+ b(\partial_y u_1, \partial_x v_2) + \varepsilon c(\partial_x u_1, v_3) + b(\partial_y u_2, \partial_x v_1) +\end{aligned}$$

$$+ (\partial_x u_2, \partial_x v_2) + a(\partial_y^2 u_2, \partial_y v_2) + \varepsilon^2 (u_2, v_2) +$$
$$+ \varepsilon c(u_2, \partial_y v_3) - \varepsilon c(u_3, \partial_x v_1) - \varepsilon c(u_3, \partial_y v_2) +$$
$$+ (\partial_x u_3, \partial_x v_3) + (\partial_y u_3, \partial_y v_3) + 4\varepsilon^2 b(u_3, v_3). \tag{2.3}$$

(2.2) და (2.3)-დან $(\partial_x u_i, v_j) = -(u_i, \partial_x v_j)$ და $(\partial_y u_i, v_j) = -(u_i, \partial_y v_j)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ ტოლობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$((Au, v)) = ((u, Av)), \quad \forall\, u,\, v \in D(A).$$

(2.2)-დან გამომდინარეობს:

$$((Au, u)) = \big(a\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\big) + \big(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\big) +$$
$$+ \big(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\big) + \varepsilon^2\big(\|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2} + 4b\|u_3\|^2_{L_2}\big) +$$
$$+ 2b(\partial_x u_1, \partial_y u_2) - 2\varepsilon c(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2). \tag{2.4}$$

ცხადია, რომ

$$\|\partial_x u_1 + \partial_y u_2\|^2_{L_2} = \|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2} + 2(\partial_x u_1, \partial_y u_2) \tag{2.5}$$

და

$$-2\varepsilon c(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) = -2\varepsilon(2b+1)(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) =$$
$$= -4\varepsilon b(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) - 2\varepsilon(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) =$$
$$= -4\varepsilon b(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) + 2\varepsilon(\partial_x u_3, u_1) + 2\varepsilon(\partial_y u_3, u_2). \tag{2.6}$$

თუ (2.4) ტოლობაში ჩავსვამთ $a = b + 1$ და გავითვალისწინებთ (2.5) და (2.6) ტოლობებს, მივიღებთ:

$$((Au, u)) = \big(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\big) + \big(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\big) +$$
$$+ b\Big[\|\partial_x u_1 + \partial_y u_2\|^2_{L_2} - 4\varepsilon(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) + 4\varepsilon^2\|u_3\|^2_{L_2}\Big] +$$
$$+ \big(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + 2\varepsilon(\partial_x u_3, u_1) + \varepsilon^2\|u_1\|^2_{L_2}\big) +$$

$$+\left(\|\partial_y u_3\|_{L_2}^2+2\varepsilon(\partial_y u_3,u_2)+\varepsilon^2\|u_2\|_{L_2}^2\right)=$$

$$=\left(\|\partial_x u_1\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_1\|_{L_2}^2\right)+\left(\|\partial_x u_2\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_2\|_{L_2}^2\right)+$$

$$+b\Big\|\partial_x u_1+\partial_y u_2-2\varepsilon u_3\Big\|_{L_2}^2+$$

$$+\|\partial_y u_3+\varepsilon u_1\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_3+\varepsilon u_2\|_{L_2}^2. \qquad (2.7)$$

ცხადია, (2.7)-დან შვარცის უტოლობის გამოყენებით გამომდინარეობს:

$$((Au,u))\geq\left(\|\partial_x u_1\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_1\|_{L_2}^2\right)+\left(\|\partial_x u_2\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_2\|_{L_2}^2\right)+$$

$$+\Big(\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2+\varepsilon^2\|u_1\|_{L_2}^2-2\varepsilon\|\partial_x u_3\|_{L_2}\cdot\|u_1\|_{L_2}\Big)+$$

$$+\Big(\|\partial_y u_3\|_{L_2}^2+\varepsilon^2\|u_2\|_{L_2}^2-2\varepsilon\|\partial_y u_3\|_{L_2}\cdot\|u_2\|_{L_2}\Big). \qquad (2.8)$$

როგორც ცნობილია მართებულია უტოლობა (იხ. [40], გვ. 195):

$$\|\partial_x u_i\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_i\|_{L_2}^2\geq\frac{\pi^2}{2}\,\|u_i\|_{L_2}^2,\quad i=1,2,3. \qquad (2.9)$$

(2.8)-დან (2.9)-ის გათვალისწინებით მიიღება:

$$((Au,u))\geq\frac{1}{2}\left(\|\partial_x u_1\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_1\|_{L_2}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\|\partial_x u_2\|_{L_2}^2+\|\partial_y u_2\|_{L_2}^2\right)+$$

$$+\left(\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2+\left(\varepsilon^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\|u_1\|_{L_2}^2-2\varepsilon\|\partial_x u_3\|_{L_2}\cdot\|u_1\|_{L_2}\right)+$$

$$+\left(\|\partial_y u_3\|_{L_2}^2+\left(\varepsilon^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\|u_2\|_{L_2}^2-2\varepsilon\|\partial_y u_3\|_{L_2}\cdot\|u_2\|_{L_2}\right). \qquad (2.10)$$

ε-უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2+\left(\varepsilon^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\|u_1\|_{L_2}^2-2\varepsilon\|\partial_x u_3\|_{L_2}\cdot\|u_1\|_{L_2}\geq$$

$$\geq\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2+\left(\varepsilon^2+\frac{\pi^2}{4}\right)\|u_1\|_{L_2}^2-$$

$$-\varepsilon\Big[\left(\varepsilon+\frac{\pi^2}{4\varepsilon}\right)^{-1}\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2+\left(\varepsilon+\frac{\pi^2}{4\varepsilon}\right)\|u_1\|_{L_2}^2\Big]=$$

$$=\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\frac{\pi^2}{4\varepsilon}}\right)\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2=\frac{\pi^2}{\pi^2+4\varepsilon^2}\,\|\partial_x u_3\|_{L_2}^2. \qquad (2.11)$$

ანალოგიურად:

$$\|\partial_y u_3\|^2_{L_2} + \Big(\varepsilon^2 + \frac{\pi^2}{4}\Big)\|u_2\|^2_{L_2} - 2\varepsilon\|\partial_y u_3\|_{L_2}\cdot\|u_2\|_{L_2} \geq$$
$$\geq \frac{\pi^2}{\pi^2+4\varepsilon^2}\,\|\partial_y u_3\|^2_{L_2}. \tag{2.12}$$

(2.10)-დან (2.11) და (2.12)-ის გათვალისწინებით მიიღება:

$$\begin{aligned}((Au,u)) &\geq \frac{1}{2}\left(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\right) + \\ &+ \frac{\pi^2}{\pi^2+4\varepsilon^2}\left(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\right) \geq \\ &\geq \alpha_0\Big[\left(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\right) + \left(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\right) + \\ &+ \left(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\right)\Big]. \end{aligned}$$ □

შ ე დ ე გ ი 2.1. A ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია

$$((Au,u)) \geq \frac{\pi^2\alpha_0}{2}\left(\|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2} + \|u_3\|^2_{L_2}\right). \tag{2.13}$$

(2.13) უტოლობა გამომდინარეობს (2.1)-დან (2.9)-ის გათვალისწინებით.

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ A ოპერატორი არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული $D(A)$-ზე. როგორც ცნობილია იგი შეგვიძლია გავაფართოოთ თვითშეუღლებულ დადებითად განსაზღვრულ $\widetilde{A}$ ოპერატორამდე. ამასთან, (2.13) უტოლობა შენარჩუნებული იქნება $D(\widetilde{A}) \supset D(A)$-ზე (იხ. [41]).

§ 3. აპრიორული შეფასებები სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნისათვის

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. ვთქვათ $u_0,\ u_1 \in D(\widetilde{A})$ ($\widetilde{A}$ არის A-ს გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე). $f(\cdot,\cdot,t_k) \in H,\ k = 1,\ldots,n-1,\ \nu \in$

$]-2,2[$, მაშინ (1.4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|B_\tau^{1/2}\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + + \tau\sum_{i=1}^k \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}B_\tau^{-1/2}f_i\Big\|\Big), \quad 0\le s\le 1, \tag{3.1}$$

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|B_\tau^{1/2}\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big) + + \tau\sum_{i=1}^k \|\widetilde{A}^{s-1/2}f_i\|, \quad 0\le s\le 1, \quad f_i\in D(\widetilde{A}^{s-1/2}), \tag{3.2}$$

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\|\Big) + + \tau\sum_{i=1}^k \|\widetilde{A}^{s-1/2}f_i\|, \quad 0\le s\le 1, \quad f_i\in D(\widetilde{A}^{s-1/2}), \tag{3.3}$$

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le c_0\Big(\|\widetilde{A}^s u_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\|\widetilde{A}^s(\Delta u_0)\|\Big) + + \widetilde{c}(1-s)\cdot\tau^{2(1-s)}\sum_{i=1}^k \|f_i\|, \quad \frac{1}{2}\le s\le 1, \tag{3.4}$$

$$\|u_{k+1}\| \le c_0\|u_0\| + c_1\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^k \|\widetilde{A}^{-1/2}f_i\|, \quad 0\le s\le 1, \tag{3.5}$$

სადაც $\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \ f_k = f(\cdot,\cdot,t_k)$

$$c_0 = \frac{2}{\sqrt{2-\nu}}\,, \quad c_1(\tau) = 2\Big(\frac{2+\nu+\alpha\tau^2}{(4-\nu^2)\alpha}\Big)^{1/2}, \quad \alpha = \frac{\pi^2\alpha_0}{2}\,,$$

$$\widetilde{c}(s) = 2^{1-2s}\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s}, \quad \nu_0 = \frac{1}{\sqrt{2+\nu}}\,, \quad B_\tau = I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,\widetilde{A}.$$

ამ თეორემის დამტკიცებისათვის ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი ლემა (იხ. [37]).

ლ ე მ ა 3.2. ვთქვათ მოცემულია რეკურენტული დამოკიდებულება

$$u_{n+1} = Lu_n - Su_{n-1} + f_n, \quad n = 1,2,\dots,$$

სადაც L და S X წრფივ სივრცეში მოქმედი კომუტატიური ოპერატორებია. u_0, u_1 და f_n მოცემული ვექტორებია ამ სივრციდან, მაშინ მართებულია ფორმულა

$$u_{n+1} = U_n(L,S)u_1 - SU_{n-1}(L,S)u_0 + \sum_{i=1}^{n} U_{n-i}f_i, \tag{3.6}$$

სადაც $U_n(L,S)$ ოპერატორ-პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$\begin{gathered} U_n(L,S) = LU_{n-1}(L,S) - SU_{n-2}(L,S), \\ U_0(L,S) = I, \quad U_{-1}(L,S) \equiv 0. \end{gathered} \tag{3.7}$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.1 - ი ს დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (1.5) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - u_{k-1} + \tau^2 B_\tau^{-1} f_k, \;\; k = 1, \ldots, n-1, \tag{3.8}$$

სადაც

$$B_\tau = I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,\widetilde{A}, \quad L_\tau = (2+\nu)B_\tau^{-1} - \nu I.$$

(3.6) ფორმულის გამოყენებით (3.8) რეკურენტული დამოკიდებულებისათვის ვღებულობთ:

$$u_{k+1} = U_k(L_\tau, I)u_1 - U_{k-1}(L_\tau, I)u_0 + \tau^2 \sum_{i=1}^{k} U_{k-i}(L_\tau, I)B_\tau^{-1} f_i. \tag{3.9}$$

აქედან მარტივი გარდაქმნებით ვღებულობთ (ჩაწერის სიმარტივისათვის ($U_k(L_\tau, I)$-ის ნაცვლად დავწეროთ U_k):

$$u_{k+1} = \tau U_k \frac{\Delta u_0}{\tau} + (U_k - U_{k-1})u_0 + \tau^2 \sum_{i=1}^{k} U_{k-i} B_\tau^{-1} f_i. \tag{3.10}$$

თუ (3.10) ტოლობის ორივე მხარეს მოვდებთ $\widetilde{A}^s$ $(0 \le s \le 1)$ ოპერატორს და გადავალთ ნორმებზე, მივიღებთ:

$$\|\widetilde{A}^s u_{k+1}\| \le \tau \Big\| \widetilde{A}^s U_k \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\| - \|U_k - U_{k-1}\| \cdot \|\widetilde{A}^s u_0\| +$$

$$+\tau^2\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^s U_{k-i}B_\tau^{-1}f_i\big\|. \tag{3.11}$$

ამ უტოლობის მარჯვენა მხარეში შემავალი პირველი შესაკრებისათვის გვაქვს:

$$\tau\Big\|\widetilde{A}^s U_k\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\le\tau\big\|\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1/2}U_k\big\|\cdot\Big\|B_\tau^{1/2}\widetilde{A}^{s-1/2}\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|. \tag{3.12}$$

ცხადია შემდეგი წარმოდგენა:

$$2I-L_\tau=\tau^2\widetilde{A}B_\tau^{-1}.$$

ჰაინცის ცნობილი თეორემის (იხ. [39], [42]) თანახმად მართებულია ტოლობა

$$(2I-L_\tau)^s=(\tau^2\widetilde{A}B_\tau^{-1})^s=\tau^{2s}\widetilde{A}^sB_\tau^{-s},\ \ 0\le s\le 1. \tag{3.13}$$

ამ ფორმულის გამოყენებით მიიღება:

$$\tau\big\|\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1/2}U_k\big\|=\big\|(2I-L_\tau)^{1/2}U_k(L_\tau,I)\big\|.$$

განვიხილოთ $U_k(L_\tau,I)$ ოპერატორ-პოლინომის შესაბამისი სკალარული პოლინომი $U_k(x,1)$. ცხადია, რომ $U_k(2x,1)$ პოლინომები წარმოადგენენ ჩებიშევის მეორე გვარის პოლინომებს, რომელთათვისაც მართებულია წარმოდგენა (იხ. [43]):

$$U_k(2x,1)=\frac{\sin[(k+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ \ x\in\,]-1,1[\,.$$

აქედან მიიღება

$$U_k(x,1)=\frac{2\sin\big[(k+1)\arccos\frac{x}{2}\big]}{\sqrt{4-x^2}}\,,\ \ x\in\,]-2,2[\,. \tag{3.14}$$

ინდუქციის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა:

$$U_{2n}(x,1)=2\big[\cos 2n\theta+\cos(2n-2)\theta+\cdots+\cos 2\theta\big]+1, \tag{3.15}$$

$$U_{2n+1}(x,1)=2\big[\cos(2n+1)\theta+\cos(2n-1)\theta+\cdots+\cos\theta\big], \tag{3.16}$$

სადაც $\theta=\arccos\frac{x}{2}$.

(3.14) წარმოდგენიდან მიიღება შეფასება:

$$|U_k(x,1)| \le \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,, \quad |x|<2. \tag{3.17}$$

ცხადია, (3.15) და (3.16)-დან მიიღება შეფასება:

$$|U_k(x,1)| \le k+1, \quad |x| \le 2. \tag{3.18}$$

როგორც ცნობილია, ოპერატორ-პოლინომის ნორმა, როცა არგუმენტი წარმოადგენს თვითშეუღლებულ შემოსაზღვრულ ოპერატორს, ტოლია შესაბამისი სკალარული პოლინომის C-ნორმისა სპექტრზე (იხ. მაგ. [44]). ამ შედეგის ძალით გვექნება:

$$\begin{aligned} \tau\big\|\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1/2}U_k\big\| &= \big\|(2I-L_\tau)^{1/2}U_k(L_\tau,I)\big\| = \\ &= \max_{x\in S_p(L_\tau)}\big|(2-x)^{1/2}U_k(x,1)\big|. \end{aligned} \tag{3.19}$$

შევაფასოთ L_τ ოპერატორის სპექტრი. ამისათვის საკმარისია შევაფასოთ B_τ^{-1} ოპერატორის სპექტრი. შედეგი 2.1-ის თანახმად გვაქვს:

$$((B_\tau u,u)) \ge \Big(1+\frac{\tau^2\alpha}{2+\nu}\Big)\|u\|^2, \quad \forall\, u\in D(\widetilde{A}).$$

აქედან გამომდინარეობს:

$$0 \le ((B_\tau^{-1}u,u)) \le \Big(1+\frac{\tau^2\alpha}{2+\nu}\Big)^{-1}((u,u)), \;\; \forall\, u\in H.$$

ეს დამოკიდებულება ნიშნავს, რომ

$$S_p(B_\tau^{-1}) \subset \Big[0,\Big(1+\frac{\tau^2\alpha}{2+\nu}\Big)^{-1}\Big].$$

აქედან და

$$L_\tau = (2+\nu)B_\tau^{-1} - \nu I$$

წარმოდგენიდან გამომდინარეობს

$$S_p(L_\tau) \subset [-\nu,\nu_\tau], \tag{3.20}$$

სადაც
$$\nu_\tau = \frac{4+2\nu-\nu\alpha\tau^2}{2+\nu+\alpha\tau^2}\,, \quad \nu\in]-2,2[\,.$$
(3.20) დამოკიდებულების და (3.17) შეფასების თანახმად გვაქვს
$$\max_{x\in S_p(L_\tau)}\big|(2-x)^{1/2}U_k(x,1)\big| \le \max_{x\in S_p(L_\tau)}\Big(\sqrt{2-x}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\Big)\le$$
$$\le \max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\frac{2}{\sqrt{2+x}} = \frac{2}{\sqrt{2-\nu}}\,. \tag{3.21}$$
(3.19) და (3.21)-დან გამომდინარეობს
$$\tau\big\|\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1/2}U_k(L_\tau,I)\big\| \le \frac{2}{\sqrt{2-\nu}}\,. \tag{3.22}$$
(3.12)და (3.22)-დან გამომდინარეობს:
$$\tau\Big\|\widetilde{A}^sU_k(L_\tau,I)\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| \le c_0\Big\|B_\tau^{1/2}\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|. \tag{3.23}$$
(3.23) უტოლობის გათვალისწინებით მიიღება:
$$\big\|\widetilde{A}^sU_{k-i}B_\tau^{-1}\varphi\big\| \le \big\|\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1/2}U_{k-i}\big\|\cdot\big\|\widetilde{A}^{s-1/2}B_\tau^{-1/2}\varphi\big\| \le$$
$$\le c_0\big\|\widetilde{A}^{s-1/2}B_\tau^{-1/2}\varphi\big\|, \quad \forall\,\varphi\in H. \tag{3.24}$$
შევაფასოთ (3.11) უტოლობაში შემავალი $U_k - U_{k-1}$ ოპერატორ-პოლინომის ნორმა. შესაბამისი სკალარული პოლინომისათვის მართებულია შეფასება:
$$\big|U_k(x,1)-U_{k-1}(x,1)\big| \le \frac{2}{\sqrt{2+x}}\,, \quad x\in]-2,2[\,. \tag{3.25}$$
მართლაც გვაქვს:
$$U_k(x,1)-U_{k-1}(x,1) = \frac{2\big[\sin((k+1)\arccos\frac{x}{2}) - \sin(k\arccos\frac{x}{2})\big]}{\sqrt{4-x^2}} =$$
$$= \frac{4\cos\big[(k+\frac12)\arccos\frac{x}{2}\big]\cdot\sin(\frac12\arccos\frac{x}{2})}{\sqrt{4-x^2}} =$$
$$= \pm\frac{4\cos(k+\frac12)\theta}{\sqrt{4-x^2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} =$$

$$= \pm \frac{4\cos(k+\frac{1}{2})\theta}{\sqrt{4-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2-x}}{2} = \pm \frac{2\cos(k+\frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2+x}}\,.$$

ცხადია, აქედან კი გამომდინარეობს (3.25) შეფასება. თუ ეხლა გავითვალისწინებთ (3.25) შეფასებას, მაშინ მივიღებთ:

$$\big\|U_k(L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I)\big\| = \max_{x\in S_p(L_\tau)} \big|U_k(x,1) - U_{k-1}(x,1)\big| \le$$
$$\le \max_{x\in S_p(L_\tau)} \frac{2}{\sqrt{2+x}} \le \max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]} \frac{2}{\sqrt{2+x}} = c_0. \tag{3.26}$$

(3.11)-დან (3.23), (3.24) და (3.26) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (3.1) შეფასება.

დავამტკიცოთ (3.2) უტოლობა.

ცხადია, მართებულია უტოლობა

$$\big\|\widetilde{A}^s U_k B_\tau^{-1}\varphi\big\| \le \big\|\widetilde{A}^{1/2} B_\tau^{-1} U_k\big\| \cdot \|\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\|, \quad \forall\, \varphi \in D(\widetilde{A}^{s-1/2}). \tag{3.27}$$

(3.13) ტოლობისა და

$$B_\tau^{-1} = (2+\nu)^{-1}(\nu I + L_\tau) \tag{3.28}$$

წარმოდგენის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\tau \widetilde{A}^{1/2} B_\tau^{-1} U_k = \tau(\widetilde{A}^{1/2}\widetilde{B}_\tau^{-1/2})B^{-1/2}U_k = (\tau\widetilde{A}B^{-1})^{1/2} B_\tau^{-1/2} U_k =$$
$$= (2+\nu)^{-1/2}(2I - L_\tau)^{1/2}(\nu I + L_\tau)^{1/2} U_k(L_\tau, I). \tag{3.29}$$

რადგან L_τ არის თვითშეუღლებული შემოსაზღვრული ოპერატორი, ამიტომ (3.29)-დან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება:

$$\tau\big\|\widetilde{A}^{1/2} B_\tau^{-1} U_k(L_\tau, I)\big\| =$$
$$= (2+\nu)^{-1/2} \max_{x\in S_p(L_\tau)} \big|(2-x)^{1/2}(\nu+x)^{1/2} U_k(x,1)\big|.$$

აქედან (3.17) შეფასებისა და (3.20) დამოკიდებულების თანახმად გამომდინარეობს:

$$\tau\left\|\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1}U_k(L_\tau,I)\right\|\leq$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{2+\nu}}\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\left[(2-x)^{1/2}(\nu+x)^{1/2}\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right]=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2+\nu}}\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\left(\frac{\nu+x}{2+x}\right)^{1/2}=\frac{2}{\sqrt{2+\nu}}\left(\frac{\nu+\nu_\tau}{2+\nu_\tau}\right)^{1/2}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2+\nu}}\frac{2+\nu}{\sqrt{2+\nu+\alpha\tau^2}}\sqrt{\frac{2+\nu+\alpha\tau^2}{4(2+\nu)+(2-\nu)\alpha\tau^2}}\leq 1. \qquad (3.30)$$

(3.27) და (3.30)-დან გამომდინარეობს:

$$\left\|\widetilde{A}^sU_kB_\tau^{-1}\varphi\right\|\leq\frac{1}{\tau}\,\|\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\|,\quad\forall\,\varphi\in D(\widetilde{A}^{s-1/2}). \qquad (3.31)$$

(3.11)-დან (3.23), (3.26) და (3.31) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ (3.2)-ს.

დავამტკიცოთ (3.3) შეფასება.

ოპერატორის წილად ხარისხის განსაზღვრის და ჰაინცის თეორემის თანახმად (იხ. [39], [42]) გვაქვს:

$$\|B_\tau^{1/2}R_\tau^{-1}\|=\left\|B_\tau^{1/2}(R_\tau^{-2})^{1/2}\right\|=\left\|(B_\tau(R_\tau^{-2}))^{1/2}\right\|. \qquad (3.32)$$

სადაც

$$R_\tau=I+\tau\nu_0\widetilde{A}^{1/2}.$$

რადგან $R_\tau^2\geq B_\tau\geq 0$, ამიტომ მართებულია უტოლობა:

$$\left\|B_\tau(R_\tau^2)^{-1}\right\|=\|B_\tau R_\tau^{-2}\|\leq 1.$$

აქედან და (3.32)-დან გამომდინარეობს

$$\left\|B_\tau^{1/2}(R_\tau^{-1})\right\|\leq 1.$$

ამ უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
\big\|B_\tau^{1/2}\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\big\| &\le \|B_\tau^{1/2}R_\tau^{-1}\|\cdot\big\|R_\tau\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\big\| \le \\
&\le \big\|(I+\tau\nu_0\widetilde{A}^{1/2})\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\big\| \le \\
&\le \|\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\| + \tau\nu_0\|\widetilde{A}^{s}\varphi\|, \quad \forall\,\varphi\in D(\widetilde{A}^{s}). \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

თუ ამ უტოლობას ჩავსვამთ (3.2)-ში , მივიღებთ (3.3) შეფასებას.

დავამტკიცოთ (3.4) შეფასება.

მართებულია შეფასება (დამტკიცება იხილეთ მომდევნო პარაგრაფში):

$$
\big\|(2I-L_\tau)U_k(L_\tau,I)\varphi\big\| \le \widetilde{c}(s)\tau^{2s}\|\widetilde{A}^{s}\varphi\|,\ \ 0\le s\le\frac{1}{2}\,,\ \ \varphi\in D(\widetilde{A}^{s})
$$

ამ შეფასების თანახმად გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
&\big\|\tau^2\widetilde{A}^{s}B_\tau^{-1}U_k(L_\tau,I)\big\| = \big\|(\tau^2\widetilde{A}B_\tau^{-1})\widetilde{A}^{-(1-s)}U_k(L_\tau,I)\big\| = \\
&= \big\|(2I-L_\tau)U_k(L_\tau,I)\widetilde{A}^{-(1-s)}\big\| \le \widetilde{c}(1-s)\tau^{2(1-s)},\ \ \frac{1}{2}\le s\le 1. \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

ცხადია (3.23) და (3.33)-დან გამომდინარეობს:

$$
\begin{aligned}
&\tau\big\|\widetilde{A}_sU_k(L_\tau,I)\varphi\big\| \le \\
&\le c_0\big(\|\widetilde{A}^{s-1/2}\varphi\| + \tau\nu_0\|\widetilde{A}^{s}\varphi\|\big),\ \ 0\le s\le 1,\ \ \varphi\in D(\widetilde{A}^{s}). \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

(3.11)-დან (3.26), (3.34) და (3.35) უტოლობების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (3.4) შეფასება.

დავამტკიცოთ (3.5) შეფასება.

(3.17) შეფასების გათვალისწინებით გვაქვს

$$
\begin{aligned}
\tau\|U_k(L_\tau,I)\| &= \tau\max_{x\in S_p(L_\tau)}|U_k(x,1)| \le \tau\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \le \\
&\le \frac{2\tau}{\sqrt{(2-\nu)(2-\nu_\tau)}} = 2\Big(\frac{2+\nu+\alpha\tau^2}{(4-\nu^2)\alpha}\Big)^{1/2}. \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

(3.30) უტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\tau\|U_k B_k^{-1}\varphi\| \leq \tau\big\|\widetilde{A}^{1/2} B_\tau^{-1} U_k\big\| \cdot \|\widetilde{A}^{-1/2}\varphi\| \leq$$
$$\leq \|\widetilde{A}^{-1/2}\varphi\|, \quad \forall\, \varphi \in H. \tag{3.37}$$

(3.10)-დან (3.26), (3.32) და (3.36) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ (3.5)-ს. □

უტოლობები, რომლებიც მიიღებიან თეორემა 3.1-დან, როცა $s = 0$, $s = \frac{1}{2}$ და $s = 1$ დამტკიცებულია [37]-ში აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორით.

სხვაობიანი ამოცანისათვის აპრიორული შეფასებების მიღების მეთოდი, რომელსაც ვიყენებთ ამ ნაშრომში, განხილულია [37]-ში. ამ მეთოდს ჩვენ ვუწოდებთ ასოცირებული პოლინომების მეთოდს. ეს სახელწოდება ჩვენი აზრით ბუნებრივია, რადგან საზოგადოდ მრავალშრიანი სქემის მდგრადობის გამოკვლევა და მისთვის აპრიორული შეფასებების მიღება დაიყვანება ამ სქემის მიერ წარმოქმნილი გარკვეული კლასის პოლინომების თვისებების შესწავლაზე. შევნიშნოთ, რომ ბევრი მეცნიერი სწავლობდა ორთოგონალური პოლინომების გამოყენებას დისკრეტულ და უწყვეტ ამოცანებში (იხ. ფ. ატკინსონის მონოგრაფია [45] თანდართული ვრცელი ბიბლიოგრაფიით). ამ საკითხს ეხება შემდეგი შრომები: [46]–[56]. წარმოდგენილი სადისერტაციო ნაშრომის თემატიკასთან არის დაკავშირებული ასევე შრომები [57]–[59], რომელიც ეხება ნახევრადდისკრეტულ აპროქსიმაციებს.

§ 4. შეფასებები ჩებიშევის ოპერატორული პოლინომებისათვის

წინა პარაგრაფში ჩვენ მივიღეთ აპრიორული შეფასებები (1.4) ნახევრადდისკრეტული სქემით მიღებული ამონახსნისათვის. იმისათვის, რომ მივიღოთ სრული

ინფორმაცია დინამიკური ამოცანის შესახებ, აუცილებელია ვიცოდეთ, თუ როგორ იცვლება სიჩქარე (უკეთეს შემთხვევაში ასევე აჩქარებაც). ამრიგად, შემდეგი ნაბიჯია აპრიორული შეფასებების მიღება პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგებისათვის. ამისათვის დაგვჭირდება შემდგომი შეფასებები $U_k(L_\tau, I)$ ოპერატორული პოლინომებისათვის (ნაწილი შეფასებებისა $U_k(L_\tau, I)$-თვის მიღებული გვაქვს წინა პარაგრაფში). ცხადია, $U_k(L_\tau, I)$ ოპერატორული პოლინომები (3.7)-ის თანახმად აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებას:

$$\begin{gathered} U_{k+1}(L_\tau, I) = L_\tau U_k(L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I), \quad k = 1, 2, \ldots, \\ U_0(L_\tau, I) = I, \quad U_1(L_\tau, I) = L_\tau. \end{gathered} \tag{4.1}$$

ჩვენი აზრით ბუნებრივი იქნება, თუ $U_k(L_\tau, I)$ ოპერატორებს ვუწოდებთ ჩებიშევის ოპერატორულ პოლინომებს, რადგან $U_k(2x, 1)$ სკალარული პოლინომები წარმოადგენენ ჩებიშევის კლასიკურ პოლინომებს (მეორე გვარის).

ლ ე მ ა 4.1. ვთქვათ $\nu \in]-2, 2[$, მაშინ მართებულია შეფასებები:

$$\left\|(2I - L_\tau)U_k(L_\tau, I)\varphi\right\| \le \alpha^{1/2-s}\tau\|\widetilde{A}^s\varphi\|, \ \ \frac{1}{2} \le s \le 1, \ \ \varphi \in D(\widetilde{A}^s), \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered} \left\|(2I - L_\tau)U_k(L_\tau, I)\varphi\right\| \le \\ \le \widetilde{c}(s)\tau^{2s}\|\widetilde{A}^s\varphi\|, \ \ 0 \le s \le \frac{1}{2}, \ \ \varphi \in D(\widetilde{A}^s), \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\left\|(2I - L_\tau)U_k(L_\tau, I)B_\tau^{-1}\right\| \le 1, \tag{4.4}$$

$$\tau^{2s}\left\|\big(U_k(L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I)\big)\widetilde{A}^s B_\tau^{-1}\right\| \le (2+\nu)^s, \ \ 0 < s \le \frac{1}{2}, \tag{4.5}$$

$$\left\|\big(U_k(L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I)\big)B_\tau^{-1}\right\| \le 1, \tag{4.6}$$

სადაც

$$\widetilde{c}(s) = 2^{1-2s}\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ზემოთ მოყვანილი შეფასებების დამტკიცება(ისევე როგორც წინა პარაგრაფში მიღებული ანალოგიური შეფასებების შემთხვევაში)

ეყრდნობა ოპერატორული პოლინომის შესაბამისი სკალარული პოლინომის თვისებებს და იმ ფაქტს, რომ ოპერატორული ფუნქციის ნორმა, როცა არგუმენტი წარმოადგენს თვითშეუღლებულ შემოსაზღვრულ ოპერატორს, ტოლია შესაბამისი სკალარული ფუნქციის C-ნორმისა სპექტრზე.

დავამტკიცოთ (4.2) შეფასება. (3.13) და (3.28) ფორმულების თანახმად გვაქვს:

$$
\begin{gathered}
(2I - L_\tau)U_k\varphi = \\
= \tau^2 \widetilde{A} B_\tau^{-1} U_k \varphi = \big(\tau^2 \widetilde{A}^{1-s} B_\tau^{-(1-s)}\big)\big(B_\tau^{-s} U_k \widetilde{A}^s \varphi\big) = \\
= \tau^{2s} (\tau^2 \widetilde{A} B_\tau^{-1})^{1-s} B_\tau^{-s} U_k \widetilde{A}^s \varphi = \\
= \tau^{2s} (2+\nu)^{-s} (2I - L_\tau)^{1-s} (\nu I + L_\tau)^s U_k \widetilde{A}^s \varphi, \quad \forall\, \varphi \in D(\widetilde{A}^s). \qquad (4.7)
\end{gathered}
$$

§ 3-ში განხილული ოპერატორული ფუნქციებისათვის მიღებული შეფასების ანალოგიურად გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
\big\|(2I - L_\tau)^{1-s} (\nu I + L_\tau)^s U_k\big\| &= \max_{x \in S_p(L_\tau)} \big|(2-x)^{1-s} (\nu + x)^s U_k(x,1)\big| \le \\
&\le \max_{x \in [-\nu, \nu_\tau]} \Big[(2-x)^{1-s} (\nu+x)^s \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\Big] = 2 \cdot \max_{x \in [-\nu, \nu_\tau]} \psi_s(x,\nu), \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

სადაც

$$
\psi_s(x,\nu) = (\nu + x)^s (2-x)^{1/2-s} (2+x)^{-1/2}.
$$

ვაჩვენოთ, რომ $\psi_s(x,\nu)$ ფუნქცია ზრდადია, როცა $\frac{1}{2} \le s \le 1$ და $\nu \in \,]-2, 2[\,$. მართლაც, გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
\psi_s'(x,\nu) = {} & s(\nu+x)^{s-1} (2-x)^{1/2-s} (2+x)^{-1/2} - \\
& - \Big(\frac{1}{2} - s\Big)(\nu+x)^s (2-x)^{-(1/2+s)} (2+x)^{-1/2} - \\
& - \frac{1}{2}\,(\nu+x)^s (2-x)^{1/2-s} (2+x)^{-3/2} = \\
& = (\nu+x)^{s-1} (2-x)^{-(1/2+s)} (2+x)^{-3/2} \Big[s(2-x)(2+x) - \\
& - \Big(\frac{1}{2} - s\Big)(\nu+x)(2+x) - \frac{1}{2}\,(\nu+x)(2-x)\Big]. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

გავამარტივოთ კვადრატულ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება:

$$
\begin{aligned}
&s(2-x)(2+x)-\Big(\frac{1}{2}-s\Big)(\nu+x)(2+x)-\frac{1}{2}\,(\nu+x)(2-x)= \\
&=\Big(s-\frac{1}{2}\Big)\big[(2-x)(2+x)+(\nu+x)(2+x)\big]+ \\
&+\frac{1}{2}\,\big[(2-x)(2+x)-(\nu+x)(2-x)\big]= \\
&=\Big(s-\frac{1}{2}\Big)(2+x)(2+\nu)+\frac{1}{2}\,(2-x)(2-\nu)>0. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

(4.9) და (4.10)-დან გამომდინარეობს, რომ $\psi_s(x,\nu)$ ზრდადია.

ამრიგად,

$$
\begin{aligned}
&\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\psi_s(x,\nu)=\psi_s(\nu_\tau,\nu)=(\nu+\nu_\tau)^s(2-\nu_\tau)^{1/2-s}(2+\nu_\tau)^{-1/2}= \\
&=\frac{(2+\nu)^{2s}}{(2+\nu+\alpha\tau^2)^s}\cdot\Big(\frac{(2+\nu)\alpha\tau^2}{(2+\nu+\alpha\tau^2)}\Big)^{1/2-s}\times \\
&\times\Big(\frac{4(2+\nu)+(2-\nu)\alpha\tau^2}{2+\nu+\alpha\tau^2}\Big)^{-1/2}= \\
&=(\alpha\tau^2)^{1/2-s}\cdot\frac{(2+\nu)^{2+1/2}}{\sqrt{4(2+\nu)+(2-\nu)\alpha\tau^2}}\le \\
&\le\frac{1}{2}\,(\alpha\tau^2)^{1/2-s}(2+\nu)^s. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

(4.8) და (4.11)-დან გამომდინარეობს (4.2) შეფასება.

დავამტკიცოთ (4.3) შეფასება. ამისათვის საკმარისია შევაფასოთ $\psi_s(x,\nu)$ $[-\nu,2]\supset[-\nu,\nu_\tau]$ შუალედში, როცა $0<s<\frac{1}{2}$. ვიპოვოთ $\psi_s(x,\nu)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები მოცემულ შუალედში. (4.9)-დან (4.10)-ში ჩატარებული გარდაქმნის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$(2s-1)(2+x)(2+\nu)+(2-x)(2-\nu)=0.$$

აქედან გვაქვს (ამონახსნი აღვნიშნოთ x_0-ით):

$$x_0=\frac{2[(2-\nu)-(1-2s)(2+\nu)]}{(2-\nu)+(1-2s)(2+\nu)}<2.$$

ცხადია, მართებულია შეფასება:

$$\max_{x\in[-\nu,2]} \psi_s(x,\nu) = \psi_s(x_0,\nu), \quad 0 < s < \frac{1}{2}\,. \tag{4.12}$$

შევაფასოთ $\psi_s(x_0,\nu)$. ცხადია გვაქვს:

$$\psi_s(x_0,\nu) = \Big(\frac{2s(4-\nu)}{\lambda}\Big)^s \Big(\frac{4(1-2s)(2+\nu)}{\lambda}\Big)^{1/2-s} \Big(\frac{4(2-\nu)}{\lambda}\Big)^{-1/2} <$$
$$< (4-\nu^2)^s (4(2+\nu))^{1/2-s} (4(2-\nu))^{-1/2} =$$
$$= \frac{(2+\nu)^s}{2^{2s}} \Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s},$$

სადაც

$$\lambda = (2-\nu) + (1-2s)(2+\nu). \tag{4.13}$$

(4.7), (4.8), (4.12) და (4.13)-დან გამომდინარეობს (4.3) შეფასება.

დავამტკიცოთ (4.4) შეფასება. (4.8)-ის ანალოგიურად გვაქვს:

$$\big\|(2I-L_\tau)U_k(L_\tau,I)B_\tau^{-1}\big\| = \frac{1}{2+\nu}\,\big\|(2I-L_\tau)(\nu I+L_\tau)U_k(L_\tau,I)\big\| =$$
$$= \frac{1}{2+\nu} \max_{x\in S_p(L_\tau)} \big|(2-x)(\nu+x)U_k(x,1)\big| \le$$
$$\le \frac{1}{2+\nu} \max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]} \Big[(2-x)(\nu+x)\,\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\Big] \le$$
$$\le \frac{2}{2+\nu} \max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]} \frac{\nu+x}{\sqrt{2+x}} = \frac{2}{2+\nu}\cdot\frac{\nu+\nu_\tau}{\sqrt{2+\nu_\tau}} =$$
$$= \frac{2}{2+\nu}\cdot\frac{(2+\nu)^2}{2+\nu+\alpha\tau^2}\cdot\sqrt{\frac{2+\nu+\alpha\tau^2}{4(2+\nu)+(2-\nu)\alpha\tau^2}} \le 1. \tag{4.14}$$

დავამტკიცოთ (4.5) შეფასება. (4.7)-ის ანალოგიურად გვაქვს:

$$\tau^{2s}(U_k-U_{k-1})\widetilde{A}^s B_\tau^{-1} = (\tau^{2s}\widetilde{A}^s B^{-s})B^{-(1-s)}(U_k-U_{k-1}) =$$
$$= (\tau^2\widetilde{A}B^{-1})^s B_\tau^{-(1-s)}(U_k-U_{k-1}) =$$
$$= (2+\nu)^{-(1-s)}(2I-L_\tau)^s(\nu I+L_\tau)^{1-s}(U_k-U_{k-1}).$$

აქედან (3.25) შეფასების გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\tau^{2s}\left\|(U_k-U_{k-1})\widetilde{A}^s B_\tau^{-1}\right\| =$$

$$=(2+\nu)^{-(1-s)}\left\|(2I-L_\tau)^s(\nu I+L_\tau)^{1-s}(U_k-U_{k-1})\right\| =$$

$$=(2+\nu)^{-(1-s)}\max_{x\in S_p(L_\tau)}\left|(2-x)^s(\nu+x)^{1-s}\big(U_k(x,1)-U_{k-1}(x,1)\big)\right| \le$$

$$\le (2+\nu)^{-(1-s)}\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\left[(2-x)^s(\nu+x)^{1-s}\frac{2}{\sqrt{2+x}}\right] =$$

$$=2(2+\nu)^{-(1-s)}\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\widetilde{\varphi}_s(x,\nu), \tag{4.15}$$

სადაც

$$\widetilde{\varphi}_s(x,\nu)=(\nu+x)^{1-s}(2-x)^s(2+x)^{-1/2},\ \ 0\le s\le\frac{1}{2}\,.$$

$\widetilde{\varphi}_s(x,\nu)$ პარამეტრიან ფუნქციას ვაფასებთ სტანდარტული ხერხით. ვიპოვოთ მისი წარმოებული. ცხადია გვაქვს:

$$\widetilde{\varphi}_s'(x,\nu)=(\nu+x)^{-s}(2-x)^{s-1}(2+x)^{-3/2}\times$$

$$\times\Big[(1-s)(2-s)(2+s)-s(\nu+x)(2+x)-\frac{1}{2}\,(\nu+x)(2-x)\Big].$$

კვადრატულ ფრჩხილებს შიგნით მოთავსებული გამოსახულება აღვნიშნოთ $\varphi_s(x,\nu)$-თი,

$$\varphi_s(x,\nu)=(1-s)(2-x)(2+x)-s(\nu+x)(2+x)-\frac{1}{2}\,(\nu+x)(2-x).$$

რადგან $0<s\le\frac{1}{2}$ და $\nu\in\,]-2,2[$ შუალედს, ამიტომ გვაქვს:

$$\varphi_s(2,\nu)=-4s(2+\nu)<0,\quad \varphi_s(-\nu,\nu)=(1-s)(4-\nu^2)>0.$$

ამრიგად, $]-\nu,2[$ შუალედში $\widetilde{\varphi}_s(x,\nu)$-ს აქვს ერთადერთი კრიტიკული წერტილი. გავუტოლოთ $\varphi_s(x,\nu)$ კვადრატული ფუნქცია ნულს და ვიპოვოთ მისი ფესვები. მარტივი გარდაქმნით მივიღებთ $(t=2s)$:

$$x^2+\big[(1-t)(2-\nu)+4t\big]x-2\big[(1+t)(2-\nu)+2(1-2t)\big]=0.$$

აქედან გვაქვს:

$$x = -\frac{1}{2}\left[\big((1-t)(2-\nu)+4t\big) \pm \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\right].$$

$]-\nu, 2[$ შუალედში მოთავსებული ფესვი იქნება

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left[-\big((1-t)(2-\nu)+4t\big) + \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\right].$$

ადვილად ვღებულობთ:

$$2+x_1 = \frac{1}{2}\left[(1-t)(2+\nu) + \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\right], \tag{4.16}$$

$$\nu+x_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1-t)(2+\nu) - 2(2-\nu) + \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\right], \tag{4.17}$$

$$2-x_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+t)(2+\nu) + 2(2-\nu) - \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\right]. \tag{4.18}$$

(4.16) და (4.17)-დან გვაქვს:

$$\frac{\nu+x_1}{2+x_1} =$$

$$= \frac{(1-t)(2+\nu) - 2(2-\nu) + \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}}{(1-t)(2+\nu) + \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}} =$$

$$= 1 - \frac{2(2-\nu)}{(1+t)(2+\nu) + \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}} =$$

$$= 1 + \frac{2(2-\nu)\big[(1-t)(2+\nu) - \sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\big]}{16(2-\nu)} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[4(2-\sqrt{2-\nu}) + \big((a+b) - \sqrt{a^2+b^2}\big)\right], \tag{4.19}$$

სადაც

$$a = (1-t)(2+\nu), \quad b = 4\sqrt{2-\nu}\,.$$

შევაფასოთ კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება. მარტივი გარდაქმნით ვღებულობთ:

$$4(2-\sqrt{2-\nu})+\big(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\big)=$$
$$=\frac{4(2+\nu)}{2+\sqrt{2-\nu}}+\frac{8(1-t)(2+\nu)\sqrt{2-\nu}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}=$$
$$=2(2+\nu)\Big[\frac{2}{2+\sqrt{2-\nu}}+\frac{4(1-t)\sqrt{2-\nu}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\Big]. \tag{4.20}$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული მეორე შესაკრები, როცა $t\in[0,1]$ კლებადია, ამიტომ გვაქვს:

$$\frac{4(1-t)\sqrt{2-\nu}}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}\le$$
$$\le\frac{4\sqrt{2-\nu}}{(2+\nu)+4\sqrt{2-\nu}+\sqrt{(2+\nu)^2+16(2-\nu)}}=$$
$$=\frac{4\sqrt{2-\nu}}{(2+\nu)+4\sqrt{2-\nu}+(6-\nu)}=\frac{\sqrt{2-\nu}}{2+\sqrt{2+\nu}}\,. \tag{4.21}$$

(4.19), (4.20) და (4.21)-დან გამომდინარეობს:

$$\frac{\nu+x_1}{2+x_1}\le\frac{1}{4}\,(2+\nu). \tag{4.22}$$

აქედან

$$\nu+x_1\le\frac{1}{4}\,(2+\nu)(2+x_1)\le\frac{1}{4}\,(2+\nu)\cdot 4=2+\nu. \tag{4.23}$$

ცხადია გვაქვს:

$$2-x_1=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(1+t)(2+\nu)+2(2-\nu)-\sqrt{(1-t)^2(2+\nu)^2+16(2-\nu)}\right]\le$$
$$\le\frac{1}{2}\left[2(2+\nu)+2(2-\nu)-4\sqrt{2-\nu}\right]=$$
$$=2\big(2-\sqrt{2-\nu}\big)=\frac{2(2+\nu)}{2+\sqrt{2-\nu}}\le 2+\nu. \tag{4.24}$$

(4.22)–(4.24) შეფასებების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\max_{x\in[-\nu,2]}\widetilde{\varphi}_s(x,\nu)=\widetilde{\varphi}_s(x_1,\nu)=(\nu+x_1)^{1-s}(2-x_1)^s(2+x_1)^{1/2}=$$
$$=(\nu+x_1)^{1/2-s}(2-x_1)^s\Big(\frac{\nu+x_1}{2+x_1}\Big)^{1/2}\le$$
$$\le(2+\nu)^{1/2-s}(2+\nu)^s\cdot\frac{1}{2}\,(2+\nu)^{1/2}=\frac{1}{2}\,(2+\nu). \tag{4.25}$$

(4.15) და (4.25)-დან გამომდინარეობს:

$$\tau^{2s}\big\|(U_k-U_{k-1})\widetilde{A}^sB_\tau^{-1}\big\|\le(2+\nu)^s,\ \ 0<s\le\frac{1}{2}\,.$$

დავამტკიცოთ (4.6) შეფასება. ცხადია მართებულია წარმოდგენა:

$$(U_k-U_{k-1})B_\tau^{-1}=(2+\nu)^{-1}(\nu I+L)(U_k-U_{k-1}).$$

აქედან (3.25) შეფასების გათვალისწინებით (4.14)-ის ანალოგიურად მიიღება:

$$\big\|(U_k-U_{k-1})B_\tau^{-1}\big\|=(2+\nu)^{-1}\big\|(\nu I+L)(U_k-U_{k-1})\big\|\le$$
$$\le(2+\nu)^{-1}\max_{x\in[-\nu,\nu_\tau]}\Big|(\nu+x)\cdot\frac{2}{\sqrt{2+x}}\Big|=\frac{2}{2+\nu}\cdot\frac{\nu+\nu_\tau}{\sqrt{2+\nu_\tau}}\le1. \qquad\square$$

§ 5. აპრიორული შეფასებები პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგებისათვის

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 5.1. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 3.1-ის პირობები, მაშინ (1.4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\le\widetilde{c}(s)\tau^{2s-1}\|\widetilde{A}^su_0\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^k\|f_i\|, \tag{5.1}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\le\|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\|+c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\widetilde{c}_0(s)\tau^{1-2s}\sum_{i=1}^k\|f_i\|, \tag{5.2}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| +$$
$$+\,\tau\sum_{i=1}^{k}\|\widetilde{A}^s f_i\|, \quad f_i\in D(\widetilde{A}^s), \tag{5.3}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \le \|\widetilde{A}^{s+1/2}u_0\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^s\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| +$$
$$+\,\tau\sum_{i=1}^{k}\Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\,\frac{\Delta f_{i-1}}{\tau}\Big\|, \quad f_i\in D(\widetilde{A}^{s-1/2}), \tag{5.4}$$

სადაც $k=1,\dots,n-1$, $\Delta u_k = u_{k+1}-u_k$, $0\le s\le \frac{1}{2}$,

$$\widetilde{c}_0(s)=\frac{1}{(2+\nu)^s}\,,\quad \widetilde{c}(s)=2^{1-2s}\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2-s}, \quad f_0=0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . თეორემა 5.1-ში მოყვანილი აპრიორული შეფასებები ეფუძნება (3.9) ფორმულას (§ 3-ში მიღებული აპრიორული შეფასებები ასევე ეფუძნებოდა (3.9) ფორმულას).

(3.9) ფორმულა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$u_{k+1}=(U_k-U_{k-1})u_0+U_k(u_1-u_0)+\tau^2\sum_{i=1}^{k}U_{k-i}B_\tau^{-1}f_i. \tag{5.5}$$

ცხადია, ამ ფორმულის თანახმად u_k-თვის გვაქვს:

$$u_k=(U_{k-1}-U_{k-2})u_0+U_{k-1}(u_1-u_0)+\tau^2\sum_{i=1}^{k}U_{k-i-1}B_\tau^{-1}f_i. \tag{5.6}$$

თუ (5.5) ტოლობას გამოვაკლებთ (5.6)-ს და ჩავთვლით, რომ $U_{-1}=0$, მივიღებთ:

$$\Delta u_k=\big(U_k+U_{k-2}-2U_{k-1}\big)u_0+(U_k-U_{k-1})(u_1-u_0)+$$
$$+\,\tau^2\sum_{i=1}^{k}(U_{k-i}-U_{k-i-1})B_\tau^{-1}f_i. \tag{5.7}$$

(3.7) რეკურენტული დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს:

$$U_k(L_\tau, I) + U_{k-2}(L_\tau, I) - 2U_{k-1}(L_\tau, I) = L_\tau U_{k-1} - 2U_{k-1} =$$
$$= (L_\tau - 2I)U_{k-1}. \tag{5.8}$$

თუ (5.7)-ში გავითვალისწინებთ (5.8)-ს და ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ τ-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{\Delta u_k}{\tau} = \tau^{-1}(L_\tau - 2I)U_{k-1}(L_\tau, I)u_0 + (U_k - U_{k-1})\frac{\Delta u_0}{\tau} +$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} (U_{k-i} - U_{k-i-1})B_\tau^{-1} f_i. \tag{5.9}$$

ცხადია, აქედან გამომდინარეობს:

$$\left\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le \tau^{-1}\left\|(2I - L_\tau)U_{k-1}u_0\right\| + \|U_k - U_{k-1}\| \cdot \left\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| +$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} \left\|(U_{k-i} - U_{k-i-1})B_\tau^{-1} f_i\right\|.$$

აქედან (4.3), (4.6) და (3.26) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (5.1) უტოლობა.

დავამტკიცოთ (5.2) უტოლობა. თუ (5.9) უტოლობის ორივე მხარეს მოვდებთ $\widetilde{A}^s$ $(0 \le s \le \frac{1}{2})$ ოპერატორს და გადავალთ ნორმებზე, მივიღებთ:

$$\left\|\widetilde{A}^s \frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le \tau^{-1}\left\|(2I - L_\tau)U_{k-1}(L_\tau, I)(\widetilde{A}^s u_0)\right\| +$$
$$+ \|U_k - U_{k-1}\| \cdot \left\|\widetilde{A}^s \frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| +$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} \left\|(U_{k-i} - U_{k-i-1})\widetilde{A}^s B_\tau^{-1}\right\| \cdot \|f_i\|. \tag{5.10}$$

აქედან (3.26), (4.2) და (4.5) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (5.2) უტოლობა.

დავამტკიცოთ (5.3). თუ (5.9) -ში აჯამვის ნიშნის ქვეშ მდგომ გამოსახულებას შევცვლით $\|(U_{k-i}-U_{k-i-1})B_\tau^{-1}\|\cdot\|\widetilde{A}^s f_i\|$ გამოსახულებით, ცხადია მიღებული უტოლობა მართებული იქნება. ამ უტოლობიდან კი (3.26), (4.2) და (4.6) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (5.3) უტოლობა.

დავამტკიცოთ (5.4) უტოლობა. თუ (5.5) ტოლობას გამოვაკლებთ (5.6)-ს და გავითვალისწინებთ (5.8)-ს, მივიღებთ:

$$\Delta u_k=(L_\tau-2I)U_{k-1}u_0+(U_k-U_{k-1})\Delta u_0+\tau^2\sum_{i=1}^{k}U_{k-1}B_\tau^{-1}\Delta f_{i-1}, \quad (5.11)$$

სადაც $f_0=0$.

(5.11) ტოლობის ორივე მხარე გავყოთ τ-ზე, მოვდოთ $\widetilde{A}^s$ $(0\le s\le \frac{1}{2})$ ოპერატორი და გადავიდეთ ნორმებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\Big\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\le{}&\tau^{-1}\big\|(2I-L_\tau)U_{k-1}(L_\tau,I)\widetilde{A}^s u_0\big\|+\\&+\|U_k-U_{k-1}\|\cdot\Big\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\\&+\tau^2\sum_{i=1}^{k}\big\|U_{k-i}\widetilde{A}^{1/2}B_\tau^{-1}\big\|\cdot\Big\|\widetilde{A}^{s-1/2}\frac{\Delta f_{i-1}}{\tau}\Big\|.\end{aligned}$$

აქედან (3.26), (3.30) და (4.2) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (5.4) უტოლობა. □

ეხლა მოვიყვანოთ შეფასებები, რომელსაც ადგილი აქვს მეორე რიგის წარმოებულის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგისათვის.

თ ე ო რ ე მ ა 5.2. ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 3.1-ის პირობები, მაშინ (1.4) სქემისათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\Big\|\le{}&\tau^{2s-1}\Big[\big\|\widetilde{A}^{1/2+s}u_0\big\|+\widetilde{c}(s)\Big\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big]+\\&+\tau\sum_{i=2}^{k+1}\Big\|\frac{\Delta f_{i-1}}{\tau}\Big\|+\|f_1\|, \quad (5.12)\end{aligned}$$

$$\left\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\right\| \le \tau^{2s-1}\Big[\big\|\widetilde{A}^{1/2+s}u_0\big\| + \widetilde{c}(s)\Big\|\widetilde{A}^s\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big]+$$

$$+\,\widetilde{c}(s)\tau^{2s}\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^s B_\tau^{-1} f_i\big\| + \|B_\tau^{-1} f_{k+1}\|, \tag{5.13}$$

$$\left\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\right\| \le \|\widetilde{A}u_0\| + \left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \sum_{i=1}^{k+1}\|f_i\|, \tag{5.14}$$

სადაც $k = 1, \ldots, n-2$, $0 \le s \le \frac{1}{2}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (5.7)-დან (5.8)-ის გათვალისწინებით მიიღება:

$$\Delta u_k = (L_\tau - 2I)U_{k-1}(L_\tau, I)u_0 + (U_k - U_{k-1})\Delta u_0+$$

$$+\,\tau^2\sum_{i=1}^{k}(U_{k-i} - U_{k-i-1})B_\tau^{-1} f_i. \tag{5.15}$$

თუ (5.15)-ში k-ს შევცვლით $k+1$-ით, მივიღებთ:

$$\Delta u_{k+1} = (L_\tau - 2I)U_k u_0 + (U_{k+1} - U_k)\Delta u_0+$$

$$+\,\tau^2\sum_{i=1}^{k+1}(U_{k-i+1} - U_{k-i})B_\tau^{-1} f_i. \tag{5.16}$$

(5.15) და (5.16) ფორმულებიდან (5.8)-ის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი ფორმულები:

$$\Delta^2 u_k = (L_\tau - 2I)\big[(U_k - U_{k-1})u_0 + U_k\Delta u_0\big]+$$

$$+\,\tau^2\sum_{i=1}^{k+1}(U_{k-i+1} - U_{k-i})B_\tau^{-1}(f_i - f_{i-1}), \tag{5.17}$$

$$\Delta^2 u_k = (L_\tau - 2I)\Big[(U_k - U_{k-1})u_0 + U_k\Delta u_0 + \tau^2\sum_{i=1}^{k}U_{k-i}B_\tau^{-1} f_i\Big]+$$

$$+\,\tau^2 B_\tau^{-1} f_{k+1}, \tag{5.18}$$

სადაც $k = 1, \ldots, n-2$, $f_0 = 0$, $U_{-1} = 0$, $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $\Delta^2 u_k = \Delta(\Delta u_k)$.

ცხადია, მართებულია წარმოდგენა

$$(L_\tau - 2I)(U_k - U_{k-1})u_0 = -\tau^2 \widetilde{A} B_\tau^{-1}(U_k - U_{k-1})u_0 =$$
$$= -\tau^{1+2s}\big[\tau^{1-2s}(U_k - U_{k-1})\widetilde{A}^{1/2-s}B_\tau^{-1}\big](\widetilde{A}^{1/2+s}u_0).$$

აქედან (4.5)-ის თანახმად მიიღება შემდეგი შეფასება:

$$\big\|(L_\tau - 2I)(U_k - U_{k-1})u_0\big\| \le$$
$$\le \tau^{1+2s}\big\|\widetilde{A}^{1/2+s}u_0\big\|, \ \ u_0 \in D(\widetilde{A}^{1/2+s}), \ \ 0 \le s \le \frac{1}{2}\,. \tag{5.19}$$

თუ (5.17) ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ τ^2-ზე და გადავალთ ნორმებზე, მივიღებთ:

$$\Big\|\frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2}\Big\| \le \big\|(L_\tau - 2I)(U_k - U_{k-1})u_0\big\| + \tau^{-1}\Big\|(L_\tau - 2I)U_k\,\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\| +$$
$$+\,\tau\sum_{i=1}^{k+1}\big\|(U_{k-i+1} - U_{k-i})B_\tau^{-1}\big\|\cdot\Big\|\frac{\Delta f_{i-1}}{\tau}\Big\|.$$

აქედან (5.19), (4.3) და (4.6) შეფასებების გათვალისწინებით გამომდინარეობს (5.12) შეფასება.

ანალოგიურად მიიღება (5.13) შეფასება (5.18)-დან (5.19) და (4.3) შეფასებების გათვალისწინებით.

(5.14) შეფასება გამომდინარეობს (5.18)-დან (5.19), (4.2), (4.4) და $\|B_\tau^{-1}\| \le 1$ უტოლობების გათვალისწინებით. $\square$

§ 6. თეორემები ნახევრადდისკრეტული სქემის კრებადობის შესახებ

როგორც § 2-ში ვაჩვენეთ A ოპერატორი $D(A)$ განსაზღვრის არით, $H = [L_2(\Omega)]^3$ ჰილბერტის სივრცეში არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული. $\widetilde{A}$ არის A-ს გაფართოება თვითშეუღლებულ, დადებითად განსაზღვრულ

ოპერატორამდე. აქედან გამომდინარე (1.1)–(1.3) ამოცანა შეგვიძლია შევცვალოთ შემდეგი ამოცანით:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \widetilde{A}u(t) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{6.1}$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1, \tag{6.2}$$

სადაც $u(t)$ – უცნობი, ხოლო $f(t)$ – ცნობილი ვექტორ-ფუნქციებია მნიშვნელობებით H-დან; φ_0 და φ_1 ცნობილი ვექტორებია H-დან.

შემოვიღოთ შემდეგი სივრცეები. განვსაზღვროთ $D(\widetilde{A}^{1/2})$-ში ერმიტის ნორმა $\|u\|_1 = \|\widetilde{A}^{1/2}u\|$. მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W^1-ით. ანალოგიურად, თუ $D(\widetilde{A})$-ში განვსაზღვრავთ ერმიტის ნორმას $\|u\|_2 = \|\widetilde{A}u\|$, მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W^2-ით. აღვნიშნოთ $C([0,T];H)$-ით სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში უწყვეტი $u(t)$ ვექტორ-ფუნქციებისა მნიშვნელობებით H-დან. $C^m([0,T];H)$-ით $(m \geq 1)$ აღვნიშნოთ სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში m რიგამდე ჩათვლით უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორ-ფუნქციებისა $C([0,T];H)$-დან. ანალოგიურად განიმარტება $C([0,T];W^i)$ და $C^m([0,T];W^i)$, $i = 1,2$. აქ ჩვენ უწყვეტობა და დიფერენცირებადობა გვესმის H-ის მეტრიკით.

შემდგომში ყველგან $(6.1),(6.2)$ ამოცანის ამონახსნს ვუწოდებთ $u(t) \in C^2([0,T];H) \cap C([0,T];W^2)$ ფუნქციას , რომელიც აკმაყოფილებს (6.1) განტოლებას და (6.2) საწყის პირობებს. თეორემა ასეთი ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ, როცა $\varphi_0 \in W^2$, $\varphi_1 \in W^1$ და $f(t) \in C^1([0,T];H)$ (ან $f(t) \in C([0,T];W^2)$) დამტკიცებულია, მაგალითად [39]-ში (იხ. [39], თეორემა 1.5, გვ. 301).

$(6.1),(6.2)$ ამოცანისთვის ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ ნახევრადდისკრეტულ სქემას ((1.4)-ში A შეცვლილია $\widetilde{A}$-ით):

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + \widetilde{A}\,\frac{u_{k+1} + \nu u_k + u_{k-1}}{2+\nu} = f(t_k), \tag{6.3}$$

სადაც $k=1,\dots,n-1$, $\tau=T/n$ ($n>1$ ნატურალური რიცხვია), $t_k=k\tau$, $\nu\neq-2$, u_0 და u_1 მოცემული ვექტორებია $D(\widetilde{A})$-დან.

(6.1), (6.2) ამოცანის $u(t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t=t_k$ წერტილში ვაცხადებთ (6.3) სისტემის u_k ამონახსნს.

ჩვენი მიზანია (6.3) ნახევრადდისკრეტული სქემით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნისათვის დავადგინოთ კრებადობის რიგი τ-ს მიმართ უწყვეტი ამოცანის ამონახსნის სიგლუვის მიხედვით.

(6.1) განტოლება $t=t_k$ წერტილში ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{\Delta^2u(t_{k-1})}{\tau^2}+\widetilde{A}\,\frac{u(t_{k+1})+\nu u(t_k)+u(t_{k-1})}{2+\nu}=$$
$$=f(t_k)+\Big(\frac{\Delta^2u(t_{k-1})}{\tau^2}-u''(t_k)\Big)+(2+\nu)^{-1}\widetilde{A}\big(\Delta^2u(t_{k-1})\big). \tag{6.4}$$

ცხადია, (6.1) განტოლებიდან გვაქვს:

$$\widetilde{A}\big(\Delta^2u(t_{k-1})\big)=\Delta^2f(t_{k-1})-\Delta^2u''(t_{k-1}). \tag{6.5}$$

თუ (6.4) ტოლობას გამოვაკლებთ (6.3) ტოლობას და გავითვალისწინებთ (6.5)-ს, მაშინ $z_k=u(t_k)-u_k$ ცდომილებისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{z_{k+1}-2z_k+z_{k+1}}{\tau^2}+\widetilde{A}\,\frac{z_{k+1}+\nu z_k+z_{k-1}}{2+\nu}=r_\tau(t_k), \tag{6.6}$$

სადაც $k=1,\dots,n-1$,

$$r_\tau(t_k)=r_{0,\tau}(t_k)+(2+\nu)^{-1}\big(r_{2,\tau}(t_k)-r_{1,\tau}(t_k)\big),$$
$$r_{0,\tau}(t)=\frac{\Delta^2u(t-\tau)}{\tau^2}-u''(t),$$
$$r_{1,\tau}(t)=\Delta^2u''(t-\tau),\quad r_{2,\tau}(t)=\Delta^2f(t-\tau),$$
$$\Delta^2u(t-\tau)=\Delta\big(\Delta u(t-\tau)\big),\ \ t,\,t-\tau,\,t+\tau\in[0,T].$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. ვთქვათ (6.1), (6.2) ამოცანის ამონახსნი $u(t) \in C^2([0,T];H) \cap C([0,T];W^2)$, $f(t) \in C([0,T];H)$, $u_0, u_1 \in W^2$ და $\nu \in]-2,2[$. მაშინ $z_k = u(t_k) - u_k$ ცდომილებებისთვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\|z_{k+1}\| \le c_0\|z_0\| + c_1(\tau)\Big\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}^{-1/2}r_\tau(t_i)\big\|, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\| \le{}& c_0\Big(\|\widetilde{A}^{1/2}z_0\| + \Big\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}^{1/2}(\Delta z_0)\big\|\Big)+\\ &+\tau\sum_{i=1}^{k}\|r_\tau(t_i)\|,\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{A}z_{k+1}\| \le{}& c_0\Big(\|\widetilde{A}z_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\big\|\widetilde{A}(\Delta z_0)\big\|\Big)+\\ &+c_2\sum_{i=1}^{k}\|r_\tau(t_i)\|,\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| \le c_2\tau^{-1}\|z_0\| + c_0\Big\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|r_\tau(t_i)\|, \tag{6.10}$$

$$\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| \le \big\|\widetilde{A}^{1/2}z_0\big\| + c_0\Big\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\|r_\tau(t_i)\|, \tag{6.11}$$

$$\Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| \le \|\widetilde{A}z_0\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \nu_0\sum_{i=1}^{k}\|r_\tau(t_i)\|, \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}\Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| \le{}& \|\widetilde{A}z_0\| + c_0\Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\|+\\ &+\Big(\|r_\tau(t_1)\| + \sum_{i=2}^{k}\big\|r_\tau(t_i) - r_\tau(t_{i-1})\big\|\Big),\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\Big\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\Big\| \le \|\widetilde{A}z_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\| + \sum_{i=1}^{k+1}\|r_\tau(t_i)\|, \tag{6.14}$$

$$\Big\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\Big\| \le \|\widetilde{A}z_0\| + \Big\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_0}{\tau}\Big\|+$$

$$+\sum_{i=2}^{k+1}\big\|r_\tau(t_i)-r_\tau(t_{i-1})\big\|+\|r_\tau(t_1)\|, \tag{6.15}$$

სადაც $k=1,\ldots,n-1$ ((6.14) და (6.15)-ში $k=1,\ldots,n-2$), c_0, c_1 და ν_0 მუდმივები იგივეა რაც წინა პარაგრაფებში,

$$c_2=2\Big(\frac{2+\nu}{2-\nu}\Big)^{1/2}.$$

თუ შევადარებთ ერთმანეთს (1.4) და (6.3) ნახევრადდისკრეტულ სქემებს შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ § 3-ში და § 5-ში მიღებული აპრიორული შეფასებები ავტომატურად მართებული იქნება (6.3) სქემისთვის. ცხადია ასევე, რომ იგივე ტიპის შეფასებები მართებული იქნება (6.6) სისტემისთვის (საკმარისია § 3-ში და § 5-ში u_k შევცვალოთ z_k-თი, ხოლო f_i კი – $r_\tau(t_i)$-თი). ეხლა, თუ (3.5), (3.3), (3.4), (5.1)–(5.3), (5.14) და (5.12)-ის შესაბამის შეფასებებში ჩავსვამთ $s=1/2$-ს მივიღებთ, შესაბამისად, (6.7)–(6.9), (6.11)–(6.15) შეფასებებს. თუ (5.12)-ის შესაბამის შეფასებაში ჩავსვამთ $s=0$ მივიღებთ (6.10)-ს.

6.1 თეორემის საფუძველზე მტკიცდება თეორემები (6.3) ნახევრადდისკრეტული სქემის საშუალებით მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის კრებადობის შესახებ.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას (ქვევით ყველგან c_1-ით აღნიშნულია დადებითი მუდმივი).

თ ე ო რ ე მ ა 6.2. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, $\varphi_0,\varphi_1\in W^2$ და $\nu\in\,]-2,2[\,$. მაშინ

(a) თუ $u(t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$ და $f(t)\in C([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\right)\to 0,\ \ \text{როცა}\ \ \tau\to 0;$$

(b) თუ შესრულებულია (a) პუნქტის პირობები და $f(t)$ და $u''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|\widetilde{A}^{1/2}z_{k+1}\|\right)\le c_1\tau^\lambda,\ \ k=1,\ldots,n-1;$$

(c) თუ $u(t)\in C^3([0,T];H)\cap C([0,T];W^2)$ და $f(t)\in C^1([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|+\|\widetilde{A}z_{k+1}\|\right)\to 0 \ \text{ როცა } \ \tau\to 0;$$

(d) თუ შესრულებულია (c) პუნქტის პირობები და $f'(t)$ და $u'''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left(\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|+\|\widetilde{A}z_{k+1}\|\right)\le c_1\tau^{\lambda},\quad k=1,\ldots,n-1.$$

დამტკიცება. იმის და მიხედვით, თუ როგორი სიგლუვისაა $u(t)$ და $f(t)$ ფუნქციები მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$\frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2}-u''(t_k)=\frac{1}{\tau^2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{t_k}^{t}\big(u''(s)-u''(t_k)\big)\,ds\,dt+$$

$$+\frac{1}{\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\big(u''(s)-u''(t_k)\big)\,ds\,dt, \tag{6.16}$$

$$\frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2}-u''(t_k)=\frac{1}{\tau^2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{t_k}^{t}\int\limits_{t_k}^{s}\big(u''(\xi)-u'''(t_k)\big)\,d\xi\,ds\,dt+$$

$$+\frac{1}{\tau^2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\int\limits_{t_{k-1}}^{s}\big(u'''(t_k)-u''(\xi)\big)\,d\xi\,ds\,dt, \tag{6.17}$$

$$\Delta^2 f(t_{k-1})=\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\big(f'(t)-f'(t_k)\big)\,dt+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\big(f'(t_k)-f'(t)\big)\,dt, \tag{6.18}$$

$$\frac{\Delta u(0)}{\tau}=$$

$$=u'(0)+\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\big(u'(t)-u'(0)\big)\,dt=u'(0)+\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\int\limits_0^{t}u''(s)\,ds\,dt, \tag{6.19}$$

$$\frac{\Delta u(0)}{\tau} = u'(0) + \frac{\tau}{2}\, u''(0) + \frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \int\limits_0^t \big(u''(s) - u''(0)\big)\, ds\, dt. \tag{6.20}$$

(6.16)-დან გამომდინარეობს:

$$\max_{1 \le k \le n-1} \Big\| \frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2} - u''(t_k) \Big\| \to 0, \text{ როცა } \tau \to 0, \tag{6.21}$$

თუ $u(t) \in C^2([0,T];H)$;

$$\Big\| \frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2} - u''(t_k) \Big\| \le c_1 \tau^\lambda, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{6.22}$$

თუ $u(t) \in C^2([0,T];H)$ და $u''(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0 < \lambda \le 1)$ მაჩვენებლით.

(6.17)-დან გამომდინარეობს:

$$\frac{1}{\tau} \max_{1 \le k \le n-1} \Big\| \frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2} - u''(t_k) \Big\| \to 0, \text{ როცა } \tau \to 0, \tag{6.23}$$

თუ $u(t) \in C^3([0,T];H)$;

$$\Big\| \frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2} - u''(t_k) \Big\| \le c_1 \tau^{1+\lambda}, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{6.24}$$

თუ $u(t) \in C^3([0,T];H)$ და $u'''(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0 < \lambda \le 1)$ მაჩვენებლით.

(6.18)-დან გამომდინარეობს:

$$\frac{1}{\tau} \max_{1 \le k \le n-1} \big\| \Delta^2 f(t_{k-1}) \big\| \to 0, \text{ როცა } \tau \to 0, \tag{6.25}$$

თუ $f(t) \in C^1([0,T];H)$;

$$\| \Delta^2 u(t_{k-1}) \| \le c_1 \tau^{1+\lambda}, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{6.26}$$

თუ $f(t) \in C^1([0,T];H)$ და $f'(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0 < \lambda \le 1)$ მაჩვენებლით.

(6.19)-დან გამომდინარეობს:

$$\left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| \le c_1\tau, \tag{6.27}$$

თუ $u(t)\in C^2([0,T];H)$;

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| \to 0, \ \text{როცა} \ \tau\to 0, \tag{6.28}$$

თუ $u(t)\in C^1([0,T];W^1)$;

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\,\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| \le c_1\tau^{\lambda}, \tag{6.29}$$

თუ $u(t)\in C^1([0,T];W^1)$ და $\widetilde{A}^{1/2}u'(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით.

(6.28) და (6.29) დამოკიდებულებებთან დაკავშირებით შევნიშნოთ, რომ თუ შესრულებულია (c) პუნქტის პირობები, მაშინ (6.1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{A}u(t)\in C^1([0,T];H)$. აქედან კი იმის გათვალისწინებით, რომ $\widetilde{A}$ არის თვითშეუღლებული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი გამომდინარეობს, რომ $u'(t)\in C([0,T];W^2)$ და $(\widetilde{A}u(t))'=\widetilde{A}u'(t)$.

ცხადია, მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$\|\widetilde{A}(\Delta z_0)\| = \left\|\widetilde{A}\big(u(\tau)-u(0)\big)-\tau\widetilde{A}\varphi_1\right\| \to 0, \ \text{როცა} \ \tau\to 0, \tag{6.30}$$

თუ $u(t)\in C([0,T];W^2)$;

$$\|\widetilde{A}(\Delta z_0)\| \le c_1\tau^{\lambda}, \tag{6.31}$$

თუ $u(t)\in C([0,T];W^2)$ და $\widetilde{A}u(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით;

$$\max_{1\le k\le n-1}|\Delta^2 f(t_{k-1})\| \to 0 \ \text{როცა} \ \tau\to 0, \tag{6.32}$$

თუ $f(t)\in C([0,T];H)$;

$$\|\Delta^2 f(t_{k-1})\| \le c_1\tau^{\lambda}, \quad k=1,\dots,n-1, \tag{6.33}$$

თუ $f(t)$ ფუქნცია $[0,T]$-ში აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0 < \lambda \leq 1)$ მაჩვენებლით.

ზემოთ მოყვანილი შეფასებების გათვალისწინებით (6.7)–(6.15) უტოლობებიდან გამომდინარეობს შეფასებები $z_k = u(t_k) - u_k$ ცდომილებისთვის.

(a) პუნქტის დასკვნა გამომდინარეობს (6.7), (6.8) და (6.11) უტოლობებიდან (6.21), (6.27), (6.30) და (6.32) შეფასებების გათვალისიწინებით.

(b) პუნქტის დასკვნა გამომდინარეობს (6.7), (6.8) და (6.11) უტოლობებიდან (6.22), (6.27), (6.31) და (6.33) შეფასებების გათვალისიწინებით.

(c) პუნქტის დასკვნა გამომდინარეობს (6.9), (6.12) და (6.14) უტოლობებიდან (6.23), (6.25), (6.28) და (6.30) შეფასებების გათვალისიწინებით.

(d) პუნქტის დასკვნა გამომდინარეობს (6.9), (6.12) და (6.14) უტოლობებიდან (6.24), (6.26), (6.29) და (6.31) შეფასებების გათვალისიწინებით. □

ამონახსნთა უფრო გლუვ კლასში მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 6.3. ვთქვათ $u_0 = \varphi_0$, $\varphi_0 \in W^2$, $u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \frac{\tau^2}{2}\varphi_2$, $\varphi_2 = f(0) - \widetilde{A}\varphi_0$, φ_1, $\widetilde{A}\varphi_0$, $f(0) \in W^2$ და $\nu \in]-2, 2[$. მაშინ

(a) თუ $u(t) \in C^3([0,T];H) \cap C([0,T];W^2)$, $f(t) \in C^1([0,T];H)$, $u'''(t)$ და $f'(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობებს λ $(0 < \lambda \leq 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\|z_{k+1}\| + \left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \|\widetilde{A}^{1/2} z_{k+1}\| \leq c_1 \tau^{1+\lambda}, \quad k = 1, \ldots, n-1;$$

(b) თუ $u(t) \in C^4([0,T];H) \cap C([0,T];W^2)$, $f(t) \in C^2([0,T];H)$, $u^{IV}(t)$ და $f''(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობებს λ $(0 < \lambda \leq 1)$ მაჩვენებლით, მაშინ

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| + \left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\| \leq c_1 \tau^{1+\lambda}, \quad k = 1, \ldots, n-2.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . (6.20)-დან გამომდინარეობს:

$$\left\|\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\| \leq c_1 \tau^2, \tag{6.34}$$

თუ $u(t)\in C^3([0,T];H)$;

$$\left\|\widetilde{A}^{1/2}\frac{\Delta z_0}{\tau}\right\|\le c_1\tau^{1+\lambda}, \tag{6.35}$$

თუ $u(t)\in C^2([0,T];W^1)$ და $\widetilde{A}^{1/2}u''(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით.

(6.19)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{gathered}\left\|\widetilde{A}^{1/2}(\Delta z_0)\right\|\le\\ \le\int\limits_0^\tau\left\|\widetilde{A}^{1/2}\big(u'(t)-u'(0)\big)\right\|dt+\frac{\tau^2}{2}\,\|\widetilde{A}^{1/2}\varphi_2\|\le c_1\tau^{1+\lambda},\end{gathered} \tag{6.36}$$

თუ $u(t)\in C^1([0,T];W^1)$ და $\widetilde{A}^{1/2}u'(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით.

ვთქვათ შესრულებულია თეორემის (a) პუნქტის პირობები, მაშინ (6.1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{A}u(t)\in C^1([0,T];H)$ და $(\widetilde{A}u(t))'$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. რადგან $\widetilde{A}$ თვითშეუღლებული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია, ამიტომ $\widetilde{A}u(t)\in C^1([0,T];H)$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $u'(t)\in C([0,T];W^2)$ და $(\widetilde{A}u(t))'=\widetilde{A}u'(t)$. ამრიგად, თუ შესრულებულია (a) პუნქტის პირობები, მაშინ მართებულია (6.36) უტოლობა. თუ შესრულებულია (b) პუნქტის პირობები, მაშინ ანალოგიურად მიიღება, რომ $\widetilde{A}u(t)\in C^2([0,T];H)$ და $(\widetilde{A}u(t))''$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას. ამ ფაქტიდან კი გამომდინარეობს (6.35) უტოლობა.

თუ $u(t_{k+1})=u(t_k+\tau)$ და $u(t_{k-1})=u(t_k-\tau)$ ფუნქციებს გავშლით ტეილორის ფორმულის გამოყენებით, ამასთან ნაშთით წევრს ავიღებთ ინტეგრალური ფორმით, მივიღებთ:

$$r_{0,\tau}(t_k)=\frac{\Delta^2u(t_{k-1})}{\tau^2}-u''(t_k)=$$

$$= \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{1}{4!}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)^3u^{(\mathrm{IV})}(t)\,dt + \frac{1}{4!}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t-t_{k-1})^3u^{(\mathrm{IV})}(t)\,dt\right)$$

ცხადია, აქედან გამომდინარეობს:

$$r_{0,\tau}(t_k) - r_{0,\tau}(t_{k-1}) = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{1}{4!}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-t)^3\big(u^{(\mathrm{IV})}(t)-u^{(\mathrm{IV})}(t_k)\big)\,dt +\right.$$

$$+\frac{1}{4!}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-t)^3\big(u^{(\mathrm{IV})}(t_k)-u^{(\mathrm{IV})}(t)\big)\,dt+$$

$$+\frac{1}{4!}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t-t_{k-1})^3\big(u^{(\mathrm{IV})}(t)-u^{(\mathrm{IV})}(t_{k-1})\big)\,dt+$$

$$\left.+\frac{1}{4!}\int\limits_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}(t-t_{k-2})^3\big(u^{(\mathrm{IV})}(t_{k-1})-u^{(\mathrm{IV})}(t)\big)\,dt\right). \tag{6.37}$$

თუ (6.37) ტოლობაში გადავალთ ნორმებზე და გავითვალისწინებთ, რომ $u^{(\mathrm{IV})}(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას λ $(0<\lambda\le 1)$ მაჩვენებლით, მივიღებთ:

$$\big\|r_{0,\tau}(t_k) - r_{0,\tau}(t_{k-1})\big\| \le c_1\tau^{2+\lambda}, \quad k=2,\dots,n-1. \tag{6.38}$$

ცხადია, მართებულია ფორმულა

$$\Delta^2 f(t_{k-1}) = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{t_k}^{t} f''(s)\,ds\,dt + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t}^{t_k} f''(s)\,ds\,dt.$$

აქედან, (6.38)-ის ანალოგიურად მივიღებთ

$$\big\|\Delta^2 f(t_k) - \Delta^2 f(t_{k-1})\big\| \le c_1\tau^{2+\lambda}, \quad k=1,\dots,n-1. \tag{6.39}$$

ჩვენ უკვე მიღებული გვაქვს ყველა ის შეფასება, რომელთა გათვალისწინება (6.7), (6.8), (6.11), (6.13) და (6.15) უტოლობებში მოგვცემს (a) და (b) პუნქტებში მოცემულ შეფასებებს.

(a) პუნქტის შეფასება გამომდინარეობს (6.7), (6.8) და (6.11) უტოლობებიდან (6.24), (6.26), (6.34) და (6.36) შეფასებების გათვალისწინებით.

(b) პუნქტის შეფასება გამომდინარეობს (6.13) და (6.15) უტოლობებიდან (6.35), (6.38) და (6.39) შეფასებების გათვალისწინებით. □

შევნიშნოთ, რომ აბსტრაქტული ჰიპერბოლური განტოლებისათვის კოშის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის სქემების აგებისა და გამოკვლევის თვალსაზრისით მნიშვნელოვანი შედეგებია მიღებული შემდეგი ავტორების მიერ: ო. ლადიჟენსკაია [60], პ. სობოლევსკი, ლ. ჩებოტარევა [61], Baker G. A. [62], Baker G. A., Dougalis V. A., Serbin S. M. [63], Baker G. A., Bramble J. H. [64], Bales L. A. [65], Kačur J. [66], Pultar M. [67]. ამ ავტორების შრომებმა არსებითი გავლენა იქონია სადისერტაციო ნაშრომში წარმოდგენილ გამოკვლევებზე.

თ ა ვ ი II

სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა სფერული გარსის განტოლებებისათვის გახლეჩილი ოპერატორით (დინამიკური შემთხვევა)

ამ თავში განხილულია სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა სფერული გარსის განტოლებებისათვის გახლეჩილი ოპერატორით (დინამიკური შემთხვევა).

ი. ვეკუას სისტემის ოპერატორი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით, რომელთაგან პირველი (მთავარი ოპერატორი) შედგება დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ოპერატორისა და ლაპლასიანისაგან, შეშფოთებული $(-\gamma_0\varepsilon I)$ ოპერატორით (I იგივური ოპერატორია, γ_0 დადებითი მუდმივია, ε მცირე პარამეტრია, გარსის სისქის შეფარდება სფეროს რადიუსთან), ხოლო მეორე შესაკრები შედგება პირველი რიგის წარმოებულებისაგან სივრცითი ცვლადების მიმართ, $\varepsilon\gamma_1$ მამრავლით (γ_1 ასევე დადებითი მუდმივია).

განხილული სამშრიანი ნახევრადდისკრეტული სქემის მთავარი აზრი მდგომარეობს იმაში, რომ მთავაროპერატორიანი შესაკრები შეცვლილია საშუალო არითმეტიკულით $k-1$ და $k+1$ დროითი შრეების მიმართ, ხოლო მეორე შესაკრების მნიშვნელობა აღებულია შუა k-ურ შრეზე. მიღებულია აპრიორული შეფასებები შესაბამისი სხვაობიანი ამოცანის ამონახსნისათვის და პირველი რიგის წარმოებულის სხვაობიანი ანალოგისთვის. ამ აპრიორულ შეფასებებზე დაყრდნობით დამტკიცებულია თეორემები კრებადობის შესახებ.

§ 1. ამოცანის დასმა

სფერული გარსის განტოლებათა სისტემის ოპერატორი A ისეთი სახისაა, რომ ის თავისთავად გვკარნახობს შემდეგ გახლეჩას:

$$
\begin{gathered}
A = A_0 + A_1 = \\
= -\sigma_0 \begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 \\ \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2 \frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix} - \\
-\sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1.1)
\end{gathered}
$$

სადაც $\left(-\frac{1}{\sigma_0} A_0\right)$ არსი მეორე რიგის მატრიცა-ოპერატორი, რომლის ზედა მარცხენა კუთხეში ზის დრეკადობის ბრტყელი თეორიის განტოლებათა სისტემის ოპერატორი, შეშფოთებული $(-\varepsilon^2 I)$ ოპერატორით, ხოლო ქვედა მარჯვენა კუთხეში ჰელმჰოლცის ოპერატორი, A_1 არის სიმეტრიული პირველი რიგის მატრიცა-ოპერატორი.

(1.1) გახლეჩის საფუძველზე (I.1.1) განტოლებისათვის შეგვიძლია ავაგოთ შემდეგი სახის სიმეტრიული, წონიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა (იხ. [68]):

$$
\begin{gathered}
\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + A_0 \frac{u_{k+1} + \nu u_k + u_{k-1}}{2+\nu} + A_1 u_k = \\
= f(x, y, t_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (1.2)
\end{gathered}
$$

სადაც $\tau = T/n$ ($n > 1$ არის ნატურალური რიცხვი), $t_k = k\tau$, $\nu \neq -2$. $u(x,y,t)$ ზუსტი ამონახსნის მიახლოებით მნიშვნელობად $t = t_k$ წერტილში ვაცხადებთ $u_k(x,y)$-ს.

(1.2)-დან გვაქვს:

$$\Big(I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A_0\Big)u_k - \Big(2I - \frac{\tau^2\nu}{2+\nu}\,A_0\Big)u_k + \Big(I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A_0\Big)u_{k-1} = \\ = -\tau^2 A_1 u_k + \tau^2 f(x,y,t_k), \quad k = 1,2,\ldots,n-1. \tag{1.3}$$

ცნობილია, რომ A_0 ოპერატორი სიმეტრიულია და დადებითად განსაზღვრული (იხ. [69]). აქედან გამომდინარეობს, რომ როცა $2+\nu > 0$ არსებობს $(I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A_0)^{-1}$ ოპერატორი და ის შემოსაზღვრულია.

(1.3) სქემით თვლის დაწყებისათვის გვჭირდება u_0 და u_1 სასტარტო ვექტორები, რომლებიც იგივეა, რაც (I.1.4) სქემის შემთხვევაში.

ამრიგად, (I.1.1)–(I.1.3) ამოცანის ამოხსნა დროის ყოველ ბიჯზე დაიყვანება

$$\Big(I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A_0\Big)u(x,y) = f(x,y), \tag{1.4}$$

სახის განტოლების ამოხსნაზე დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით:

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega : |x| = |y| = 1. \tag{1.5}$$

§ 2. თეორემა მდგრადობის შესახებ

განვმარტოთ A_0 ოპერატორის განსაზღვრი არე:

$$D(A_0) = \Big\{u \in [C^2(\overline{\Omega})]^3 :\ u\big|_{\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

აღვნიშნოთ $\widetilde{A}_0$-ით A_0 სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული ოპერატორის გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე. როგორც ცნობილია, $\widetilde{A}_0$ არის დადებითად განსაზღვრული, ამიტომ არსებობს კვადრატული ფესვი $\widetilde{A}_0^{1/2}$.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. თუ $u_0(\cdot,\cdot)$ და $u_1(\cdot,\cdot)$ ვექტორ-ფუნქციები ეკუთვნიან $\widetilde{A}_0$ ოპერატორის განსაზღვრის არეს, ხოლო $f(\cdot,\cdot,t_i)$ ვექტორ-ფუნქციები კვადრატით ჯამებადია და $\nu\in\,]-2,2[$, მაშინ (1.2) სქემისათვის მართებულია შემდეგი აპრიორული შეფასებები:

$$
\begin{aligned}
\|u_{k+1}\| &\le a_{k-1}\Big[(c_0+\tau\varepsilon c)\|u_0\|+(c_1+\tau^2\varepsilon c)\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\\
&\quad+\tau\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}\big\|\widetilde{A}_0^{-1/2}f(\cdot,\cdot,t_i)\big\|, \qquad (2.1)\\
\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| &\le (1+t_ka_{k-1})\Big[(c+\tau\varepsilon c)\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\\
&\quad+\tau(\nu_0c_0+\tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|\Big], \qquad (2.2)\\
\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_{k+1}\big\| &\le a_{k-1}\Big[(c_0+\tau\varepsilon c)\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|+\\
&\quad+\tau(\nu_0c_0+\tau\varepsilon c)\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big]+\\
&\quad+\tau\sum_{i=1}^{k}a_{k-i}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|, \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

სადაც $k=1,2,\ldots,n-1$, $\Delta u_k=u_{k+1}-u_k$, c, c_0, c_1 და ν_0 მიდმივები იგივეა რაც წინა თავში, $a_k=\exp(\varepsilon ct_k)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . მართებულია შემდეგი უტოლობა:

$$
\|A_1u\|^2\le\varepsilon^2c^2((A_0u,u)),\quad \forall\,u\in D(A_0). \qquad (2.4)
$$

მართლაც გვაქვს:

$$
\|A_1u\|^2=\varepsilon^2c^2\Big(\|\partial_xu_3\|^2_{L_2}+\|\partial_yu_3\|^2_{L_2}+\big\|\partial_xu_1+\partial_yu_2\big\|^2_{L_2}\Big), \qquad (2.5)
$$

$$
\begin{aligned}
((A_0u,u)) &= \big(\|\partial_xu_1\|^2_{L_2}+\|\partial_yu_1\|^2_{L_2}\big)+\big(\|\partial_xu_2\|^2_{L_2}+\|\partial_yu_2\|^2_{L_2}\big)+\\
&\quad+\big(\|\partial_xu_3\|^2_{L_2}+\|\partial_yu_3\|^2_{L_2}\big)+b\big\|\partial_xu_1+\partial_yu_2\big\|^2_{L_2}+
\end{aligned}
$$

$$+\varepsilon^2\Big(\|u_1\|^2_{L_2}+\|u_2\|^2_{L_2}+4b\|u_3\|^2_{L_2}\Big). \tag{2.6}$$

სადაც $b=\frac{1}{1-2\sigma}$.

ცხადია, (2.5) და (2.6) ტოლობებიდან გამომდინარეობს (2.4) უტოლობა. (2.4)-დან გამომდინარეობს:

$$\|\widetilde{A}_1u\|\leq\varepsilon c\|\widetilde{A}_0^{1/2}u\|,\quad \forall\,u\in D(\widetilde{A}_0^{1/2})\subset D(\widetilde{A}_1)\subset H. \tag{2.7}$$

თუ შესრულებულია თეორემა 2.1-ის პირობები, მაშინ მართებულია შემდეგი უტოლობები (იხ. აპრიორული შეფასებები (I.3.5), (I.5.1) და (I.3.3)):

$$\|u_{k+1}\|\leq c_0\|u_0\|+c_1\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}_0^{-1/2}f(\cdot,\cdot,t_i)\big\|+$$
$$+\tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}_0^{-1/2}A_1u_i\big\|, \tag{2.8}$$

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\leq\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|+c_0\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|+$$
$$+\tau\sum_{i=1}^{k}\|A_1u_i\|, \tag{2.9}$$

$$\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_{k+1}\big\|\leq c_0\Big(\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|+\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\nu_0\tau\Big\|\widetilde{A}_0^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big)+$$
$$+\tau\sum_{i=1}^{k}\|f(\cdot,\cdot,t_i)\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\|A_1u_i\|. \tag{2.10}$$

(2.8)-დან (2.7) უტოლობისა და $(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_0^{-1/2})^*\supset\widetilde{A}_0^{-1/2}\widetilde{A}_1^*\supset\widetilde{A}_0^{-1/2}\widetilde{A}_1$ დამოკიდებულების გათვალისწინებით გამომდინარეობს:

$$\|u_{k+1}\|\leq c_0\|u_0\|+c_1\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}_0^{-1/2}f(\cdot,\cdot,t_i)\big\|+$$
$$+(\varepsilon c)\tau\sum_{i=1}^{k}\|u_i\|. \tag{2.11}$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\varepsilon_i = \|u_i\|, \;\; i = 1, 2, \ldots, k+1,$$
$$\delta_i = \tau \big\| \widetilde{A}_0^{-1/2} f(\cdot, \cdot, t_i) \big\|, \;\; i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$\delta_0 = c_0 \|u_0\| + c_1 \Big\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\|, \quad c_\tau = (\varepsilon c)\tau.$$

მაშინ (2.11) უტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\varepsilon_{k+1} \le c_\tau \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i + \sum_{i=0}^{k} \delta_i.$$

აქედან ინდუქციით მიიღება (გრონუოლის ლემის დისკრეტული ანალოგი):

$$\varepsilon_{k+1} \le c_\tau (1 + c_\tau)^{k-1} \varepsilon_1 + (1 + c_\tau)^{k-1} \delta_0 + \sum_{i=1}^{k} (1 + c_\tau)^{k-i} \delta_i. \tag{2.12}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$(1 + c_\tau)^k = (1 + \varepsilon c \tau)^k \le e^{\varepsilon c t_k},$$

მაშინ (2.12)-დან გამომდინარეობს (2.1) შეფასება.

(2.3) შეფასებება მტკიცდება ანალოგიურად. მართლაც, (2.10)-დან (2.7)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_{k+1} \big\| \le c_0 \Big(\big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_0 \big\| + \Big\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\| + \nu_0 \tau \Big\| \widetilde{A}_0^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\| \Big) +$$
$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} \|f(\cdot, \cdot, t_i)\| + \varepsilon c \tau \sum_{i=1}^{k} \big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_i \big\|.$$

თუ ამ უტოლობისათვის შემოვიღებთ წინა შემთხვევის ანალოგიურ აღნიშვნებს, მაშინ (2.12)-ის თანახმად მივიღებთ (2.3) შეფასებას.

დავამტკიცოთ (2.2) უტოლობა. ცხადია, (2.9)-დან (2.7)-ის გათვალისწინებით მიიღება:

$$\Big\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \Big\| \le \big\| \widetilde{A}_0^{1/2} u_0 \big\| + c_0 \Big\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \Big\| + \tau \sum_{i=1}^{k} \|f(\cdot, \cdot, t_i)\| +$$

$$+\varepsilon c\tau\sum_{i=1}^{k}\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_i\big\|.$$

აქედან, (2.3)-ის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს (2.2). $\square$

§ 3. თეორემები კრებადობის შესახებ

შემოვიღოთ შემდეგი სივრცეები.

განვსაზღვროთ $D(\widetilde{A}_0)$-ში ერმიტის ნორმა $\|u\|_2=\|\widetilde{A}_0u\|$, მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W_0^2-ით.

ანალოგიურად განვსაზღვროთ $D(\widetilde{A}_0^{1/2})$-ში ნორმა $\|u\|_1=\|\widetilde{A}_0^{1/2}u\|$, მივიღებთ ჰილბერტის სივრცეს, რომელსაც აღვნიშნავთ W_0^1-ით.

აღვნიშნოთ $C([0,T];H)$-ით სიმრავლე $[0,T]$ შუალედში უწყვეტი $f(\cdot,\cdot,t)$ ვექტორ-ფუნქციების მნიშვნელობები H-დან;

$C^m([0,T];H)$ $(m\geq 1)$-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე $[0,T]$ შულედში m-რიგამდე ჩათვლით უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორ-ფუნქციებისა $C([0,T];H)$-დან.

ანალოგიურად განიმარტება $C([0,T]);W_0^{\ell})$ და $C^m([0,T]);W_0^{\ell})$, $\ell=1,2$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$z_k(x,y)=u(x,y,t_k)-u_k(x,y),\quad k=1,2,\dots,n.$$

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. ვთქვათ $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, $\varphi_0,\varphi_1\in W_0^2$, $\nu\in\,]-2,2[$. მაშინ

ა) თუ (I.1.1)–(I.1.3) ამოცანის ამონახსნი

$$u(\cdot,\cdot,t)\in C^2([0,T];H)\cap C([0,T];W_0^2)\ \text{ და }\ f(\cdot,\cdot,t)\in C([0,T];H),$$

მაშინ

$$\max_{1\leq k\leq n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|\right)\to 0,\ \text{ როცა }\ \tau\to 0;$$

ბ) თუ $f(\cdot,\cdot,t) \in C^1([0,T];H)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\| + \Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| + \|\widetilde{A}_0^{1/2} z_{k+1}\|\Big) \to 0, \text{ როცა } \tau \to 0;$$

გ) თუ $f(\cdot,\cdot,t) \in C^1([0,T];H)$ და $u(\cdot,\cdot,t) \in C^3([0,T];H) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\|z_{k+1}\| + \Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| + \|\widetilde{A}_0^{1/2} z_{k+1}\|\Big) \le c_5\tau, \quad c_5 = \text{const} > 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. ვთქვათ $u_0 = \varphi_0$, $\varphi_0 \in W_0^2$,

$$u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \frac{\tau^2}{2}\big(f(x,y,0) - (\widetilde{A}_0\varphi_0 + \widetilde{A}_1\varphi_0)\big),$$

φ_1, $\widetilde{A}_0\varphi_0$, $\widetilde{A}_1\varphi_0$, $f(\cdot,\cdot,0) \in W_0^2$, $f(\cdot,\cdot,t) \in C^2([0,T];H)$ და $\nu \in]-2,2[$. მაშინ

ა) თუ (I.1.1)–(I.1.3) ამოცანის ამონახსნი $u(\cdot,\cdot,t) \in C^4([0,T];H) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n}\|z_k\| \le c_6\tau^2, \quad c_6 = \text{const} > 0;$$

ბ) თუ $u(\cdot,\cdot,t) \in C^4([0,T];H) \cap C^2([0,T];W_0^1) \cap C([0,T];W_0^2)$, მაშინ

$$\max_{1\le k\le n-1}\Big(\Big\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\Big\| + \|\widetilde{A}_0^{1/2} z_{k+1}\|\Big) \le c_7\tau^2, \quad c_7 = \text{const} > 0.$$

ამ პარაგრაფში მოყვანილი თეორემები შედეგია თეორემა 2.1-ის.

თ ა ვ ი III

იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის

ეს თავი ეძღვნება სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემების აგებას და გამოკვლევას. დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში ი. ვეკუას სისტემის ამოხსნისათვის გამოყენებულია იტერაციული მეთოდი, იტერაციის ყოველ ბიჯზე იხსნება დრეკადობის ბრტყელი თეორიის განტოლებათა სისტემა და ჰელმჰოლცის განტოლება ცალ-ცალკე. დამტკიცებულია, რომ ეს იტერაციული პროცესი კრებადია სფეროს რადიუსის, გარსის სისქის და პუასონის კოეფიციენტის ნებისმიერი დასაშვები მნიშვნელობებისათვის. განხილულია ასევე აღნიშნული სისტემისათვის სასრულ-სხვაობიანი მეთოდი იტერაციულ მეთოდთან კომბინაციაში. შემოთავაზებული იტერაციული მეთოდი საშუალებას გვაძლევს სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემის შესაბამისი სხვაობიანი განტოლებათა სისტემის ამოხსნა დავიყვანოთ ლაპლასიანის შესაბამის სხვაობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე, რაც ეკონომიურობის თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია.

ამ თავში განხილულია აგრეთვე ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის (დინამიკური შემთხვევა) ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემა. განხილულ სქემას ჩვენ ვუწოდებთ ვარიაციულ-სხვაობიანს, რადგან დროითი ცვლადის მიმართ გამოყენებულია სხვაობიანი მეთოდი, ხოლო სივრცითი ცვლადების მიმართ ვარიაციული

მეთოდი. მიღებული ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისათვის გამოყენებულია იტერაციულ პროცესი, რომელიც წარმოადგენს ზეიდელის კლასიკური იტერაციული პროცესის გარკვეულ მოდიფიკაციას.

§ 1. იტერაციული მეთოდი სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემისათვის გახლეჩილი ოპერატორით

განვიხილოთ სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებათა სისტემა (იხ. [1])

$$(A_0+A_1)u(x,y)=f(x,y),\ \ (x,y)\in\,]-1,1[\,\times\,]-1,1[\,, \tag{1.1}$$

დირიხლეს სასაზღვრო პირობით

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\ \ \partial\Omega:|x|=|y|=1, \tag{1.2}$$

სადაც

$$A_0+A_1=$$

$$=-\sigma_0\begin{bmatrix} \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon^2 & \frac{1}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & 0 \\ \frac{1}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}-4\varepsilon^2\,\frac{1}{1-2\sigma} \end{bmatrix}-$$

$$-\sigma_0\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varepsilon\,\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\varepsilon\,\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial y} \\ \varepsilon\,\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial x} & \varepsilon\,\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix},$$

სადაც $f=(f_1,f_2,f_3)^\top$ – ცნობილი უწყვეტი ვექტორ-ფუნქციაა, $u=(u_1,u_2,u_3)^\top$ – საძებნი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ვექტორ-ფუნქციაა, $\varepsilon=2R^{-1}h$, h – გარსის ნახევარსისქე, R – სფეროს რადიუსი, σ – პუასონის კოეფიციენტი, $\sigma_0=E/2(1+\sigma)$, E – იუნგის მოდული.

A_0 ოპერატორის განსაზღვრის არე განვმარტოთ შემდეგნაირად:

$$D(A_0)=\Big\{u\in\big[C^2(\overline{\Omega})\big]^3:\ u\big|_{\partial\Omega}=0\Big\}.$$

როგორც ცნობილია A_0 არის სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორი (იხ. [69]). A_1 ოპერატორი არის სიმეტრიული.

(1.1) განტოლების ნაცვლად ვიხილავთ

$$(\widetilde{A}_0+\widetilde{A}_1)u=f, \tag{1.3}$$

განტოლებას, სადაც $\widetilde{A}_0$ არის A_0 ოპერატორის გაფართოება თვითშეუღლებულ ოპერატორამდე, ხოლო $\widetilde{A}_1$ არის A_1-ის ჩაკეტვა.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 1.1. იტერაციული პროცესი

$$\widetilde{A}_0u_n=-\widetilde{A}_1u_{n-1}+f,\ \ n=1,2\dots, \tag{1.4}$$

კრებადია ნებისმიერი $u_0\in D(\widetilde{A}_0)$ საწყისი ვექტორისათვის და მართებულია შეფასება

$$\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_*-\widetilde{A}_0^{1/2}u_n\big\|\le q^n\big\|\widetilde{A}_0^{1/2}u_*-\widetilde{A}_0^{1/2}u_0\big\|, \tag{1.5}$$

სადაც u_* არის ზუსტი ამონახსნი, $q=(1+\lambda_1)^{-1}$,

$$\lambda_1=\frac{\pi^2}{\varepsilon c(2\varepsilon+\sqrt{2(2\varepsilon^2+\pi^2)})}\,,\quad c=\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\,.$$

თეორემის დამტკიცებისათვის დაგვჭირდება შემდეგი ლემა.

ლ ე მ ა 1.1. მართებულია უტოლობა

$$((A_0u,u))\pm(1+\lambda_1)((A_1u,u))\ge 0,\quad \forall\, u\in D(A_0). \tag{1.6}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$((A_0u,u))\pm(1+\lambda_1)((A_1u,u))=$$

$$
\begin{gathered}
= \big(a\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\big) + \big(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + a\|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\big) + \\
+\big(\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_3\|^2_{L_2}\big) + \varepsilon^2\big(\|u_1\|^2_{L_2} + \|u_2\|^2_{L_2} + 4b\|u_3\|^2_{L_2}\big) + \\
+2b(\partial_x u_1, \partial_y u_2) \pm (1+\lambda_1)\cdot 2\varepsilon c(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2), \qquad (1.7)
\end{gathered}
$$

სადაც $a = \dfrac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}$, $b = \dfrac{1}{1-2\sigma}$. რადგან $c = 2b+1$, ამიტომ გვაქვს

$$
\begin{gathered}
(1+\lambda_1)\cdot 2\varepsilon c(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) = \\
= 4\varepsilon b(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) + 2\varepsilon(1+\lambda_1 c)(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) = \\
= 4\varepsilon b(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) - 2\varepsilon(1+\lambda_1 c)(\partial_x u_3, u_1) - \\
-2\varepsilon(1+\lambda_1 c)(\partial_y u_3, u_2). \qquad (1.8)
\end{gathered}
$$

თუ (1.7) ტოლობაში ჩავსმავთ $a = b+1$ და გავითვალისწნებთ,

$$
\big\|\partial_x u_1 + \partial_y u_2\big\|^2_{L_2} = \|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2} + 2(\partial_x u_1, \partial_y u_2)
$$

და (1.8) ტოლობებს, მივიღებთ

$$
\begin{gathered}
((A_0 u, u)) \pm (1+\lambda_1)((A_1 u, u)) = \\
= b\Big[\big\|\partial_x u_1 + \partial_y u_2\big\|^2_{L_2} \pm 4\varepsilon(u_3, \partial_x u_1 + \partial_y u_2) + 4\varepsilon^2\|u_3\|^2_{L_2}\Big] + \\
+\Big[\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \varepsilon^2\|u_1\|^2_{L_2} \pm 2\varepsilon(1+\lambda_1 c)(\partial_x u_3, u_1)\Big] + \\
+\Big[\|\partial_y u_3\|^2_{L_2} + \varepsilon^2\|u_2\|^2_{L_2} \pm 2\varepsilon(1+\lambda_1 c)(\partial_y u_3, u_2)\Big] + \\
+\big(\|\partial_x u_1\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_1\|^2_{L_2}\big) + \big(\|\partial_x u_2\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_2\|^2_{L_2}\big). \qquad (1.9)
\end{gathered}
$$

როგორც ცნობილია მართებულია

$$
\|\partial_x u_i\|^2_{L_2} + \|\partial_y u_i\|^2_{L_2} \geq \frac{\pi^2}{2}\,\|u_i\|^2_{L_2}, \quad i = 1,2,3,
$$

უტოლობა (იხ. [40], გვ. 195):

ამ უტოლობისა და შვარცის უტოლობის თანახმად (1.9)-დან გამომდინარეობს:

$$((A_0u,u)) \pm (1+\lambda_1)((A_1u,u)) \geq b\Big\|\partial_x u_1 + \partial_y u_2 \pm 2\varepsilon u_3\Big\|^2_{L_2} +$$
$$+\left[\|\partial_x u_3\|^2_{L_2} + \left(\frac{\pi^2}{2}+\varepsilon^2\right)\|u_1\|^2_{L_2} - 2\varepsilon(1+\lambda_1 c)\|\partial_x u_3\|_{L_2}\|u_1\|_{L_2}\right] +$$
$$+\left[\|\partial_y u_3\|^2_{L_2} + \left(\frac{\pi^2}{2}+\varepsilon^2\right)\|u_2\|^2_{L_2} - 2\varepsilon(1+\lambda_1 c)\|\partial_y u_3\|_{L_2}\|u_2\|_{L_2}\right] \qquad (1.10)$$

ცხადია, (1.10) უტოლობის მარჯვენა მხარეში კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები არაუარყოფითია, თუ შესრულებულია უტოლობა:

$$\varepsilon^2(1+\lambda_1 c) - \left(\frac{\pi^2}{2}+\varepsilon^2\right) \leq 0.$$

ეს უტოლობა მართებულია, როცა

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\varepsilon c(2\varepsilon + \sqrt{2(2\varepsilon^2+\pi^2)})}\,,$$

ამიტომ (1.10)-დან გამომდინარეობს:

$$((A_0u,u)) \pm (1+\lambda_1)((A_1u,u)) \geq b\Big\|\partial_x u_1 + \partial_y u_2 \pm 2\varepsilon u_3\Big\|^2_{L_2}.$$

საიდანაც, ცხადია, გამომდინარეობს (1.6) უტოლობა. □

თ ე ო რ ე მ ა 1.1 - ი ს დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ცხადია, (1.4)-დან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულება:

$$v_n = Sv_{n-1} + \widetilde{A}_0^{-1/2} f, \qquad (1.11)$$

სადაც $v_n = \widetilde{A}_0^{1/2} u_n,\ \ s = -\widetilde{A}_0^{-1/2}\widetilde{A}_1\widetilde{A}_0^{-1/2}$.

ზემოთ დამტკიცებული ლემიდან გამომდინარეობს:

$$\Big|((\widetilde{A}_1u,u))\Big| \leq \frac{1}{1+\lambda_1}\,((\widetilde{A}_0u,u)), \quad \forall\, u \in D(\widetilde{A}_0).$$

ან რაც იგივეა

$$-\frac{1}{1+\lambda_1}\,\widetilde{A}_0 \leq \widetilde{A}_1 \leq \frac{1}{1+\lambda_1}\,\widetilde{A}_0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$-\frac{1}{1+\lambda_1}\, I \leq S \leq \frac{1}{1+\lambda_1}\, I.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\|S\| \leq \frac{1}{1+\lambda_1} < 1.$$

ცხადია, აქედან გამომდინარეობს, რომ $v_n = \widetilde{A}_0^{1/2} u_n$ ფუნდამენტალურია. რადგან $\widetilde{A}_0$ დადებითად განსაზღვრულია, აქედან, თავი მხრივ, გამომდინარეობს, რომ u_n მიმდევრობა ფუნდამენტალურია.

ვთქვათ, $u_n \to u_*$. ვაჩვენოთ, რომ u_* არის (1.3) განტოლების ამონახსნი.

მართებულია უტოლობა (იხ. (II.2.7)):

$$\|\widetilde{A}_1 u\| \leq c_0 \|\widetilde{A}_0^{1/2} u\|, \quad \forall\, u \in D(\widetilde{A}_0), \quad c_0 = \mathrm{const}\,.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{A}_1 u_n$ მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ამ ფაქტის გათვალისწინებით (1.4)-დან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{A}_0 u_n$ მიმდევრობაც ფუნდამენტალურია. თუ ახლა (1.4)-ში გადავალთ ზღვარზე n-ის მიმართ და გავითვალისწინებთ, რომ $\widetilde{A}_0$ და $\widetilde{A}_1$ ჩაკეტილი ოპერატორებია, მივიღებთ

$$\widetilde{A}_0 u_* = -\widetilde{A}_1 u_* + f.$$

შეფასება (1.5) მიიღება სტანდარტული გზით. $\square$

§ 2. იტერაციულ-სხვაობიანი სქემა სფერული გარსის ი. ვეკუას განტოლებებისათვის (სტატიკა)

დირიხლეს სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში სფერული გარსის გატოლებათა სისტემის ამონხსნისათვის ვიყენებთ შემდეგ იტერაციულ პროცესს:

$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\,\frac{\partial^2 \overset{(n)}{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{(n)}{u}_1}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \overset{(n)}{u}_1 + \frac{1}{1-2\sigma}\,\frac{\partial^2 \overset{(n-1)}{u}_2}{\partial x \partial y} =$$

$$
= \varepsilon \, \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \, \frac{\partial \overset{(n-1)}{u}_3}{\partial x} + \frac{2(1+\sigma)}{E} \, f_1(x,y),
$$

$$
\frac{\partial^2 \overset{(n)}{u} u_2}{\partial x^2} + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \, \frac{\partial^2 \overset{(n)}{u}_2}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \overset{(n)}{u}_2 + \frac{1}{1-2\sigma} \, \frac{\partial^2 \overset{(n-1)}{u}_1}{\partial x \partial y} =
$$

$$
= \varepsilon \, \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \, \frac{\partial \overset{(n-1)}{u}_3}{\partial y} + \frac{2(1+\sigma)}{E} \, f_2(x,y), \qquad (2.1)
$$

$$
\frac{\partial^2 \overset{(n)}{u}_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overset{(n)}{u}_3}{\partial y^2} - 4\varepsilon^2 \frac{1}{1-2\sigma} \, \overset{(n)}{u}_3 =
$$

$$
= -\varepsilon \, \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \left[\frac{\partial \overset{(n)}{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \overset{(n)}{u}_2}{\partial y} \right] + \frac{2(1+\sigma)}{E} \, f_3(x,y).
$$

(2.1) იტერაციული პროცესი წარმოადგენს ზეიდელის კლასიკური იტერაციული პროცესის დიფერნციალურ ანალოგს. შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მისი კრებადობა გამომდინარეობს (1.1), (1.2) ამოცანის შესაბამისი ოპერატორის დადებითად განსაზღვრულობიდან, რომელიც დამტკიცებული გვაქვს I თავში (იხ. შედეგი I.2.1).

(2.1) სისტემის ამოხსნისათვის ვიყენებთ სხვაობიან მეთოდს (იხ. [70]–[75]). (2.1) სისტემის სხვაობიან ანალოგს აქვს შემდეგი სახე:

$$
\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \, \frac{\overset{(n)}{u} u^1_{i+1,j} - 2\overset{(n)}{u}{}^1_{i,j} + \overset{(n)}{u}{}^1_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\overset{(n)}{u}{}^1_{i,j+1} - 2\overset{(n)}{u} u^1_{i,j} + \overset{(n)}{u}{}^1_{i,j-1}}{h_2^2} -
$$

$$
-\varepsilon^2 \overset{(n)}{u}{}^1_{i,j} + \frac{1}{1-2\sigma} \, \frac{1}{2h_2} \times
$$

$$
\times \Big(\frac{\overset{(n-1)}{u}{}^2_{i+1,j+1} - \overset{(n-1)}{u}{}^2_{i-1,j+1}}{2h_1} - \frac{\overset{(n-1)}{u}_{i+1,j-1} - \overset{(n-1)}{u}_{i-1,j-1}}{2h_1} \Big) =
$$

$$
= \varepsilon \, \frac{3-\sigma}{1-2\sigma} \, \frac{\overset{(n-1)}{u}{}^3_{i+1,j} - \overset{(n-1)}{u}{}^3_{i-1,j}}{2h_1} + \frac{2(1+\sigma)}{E} \, f_1(x_i, y_i),
$$

$$
\frac{\overset{(n)}{u}{}^2_{i+1,j} - 2\overset{(n)}{u}{}^2_{i,j} + \overset{(n)}{u}{}^2_{i-1,j}}{h_1^2} +
$$

$$+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\,\frac{\overset{(n)}{u}{}^{2}_{i,j+1}-2\overset{(n)}{u}{}^{2}_{i,j}+\overset{(n)}{u}{}^{2}_{i,j-1}}{h_2^2}-\varepsilon^2\overset{(n)}{u}{}^{2}_{i,j}+ \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{1-2\sigma}\,\frac{1}{2h_2}\Big(\frac{\overset{(n)}{u}{}^{1}_{i+1,j+1}-\overset{(n)}{u}{}^{1}_{i-1,j+1}}{2h_1}-\frac{\overset{(n)}{u}{}^{1}_{i+1,j-1}-\overset{(n)}{u}{}^{1}_{i-1,j-1}}{2h_1}\Big)=$$

$$=\varepsilon\,\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{\overset{(n-1)}{u}{}^{3}_{i,j+1}-\overset{(n-1)}{u}{}^{3}_{i,j-1}}{2h_2}+\frac{2(1+\sigma)}{E}\,f_2(x_i,y_i),$$

$$\frac{\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i+1,j}-2\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i,j}+\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i-1,j}}{h_1^2}+\frac{\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i,j+1}-2\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i,j}+\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i,j-1}}{h_2^2}-$$

$$-4\varepsilon^2\,\frac{1}{2h_2}\,\overset{(n)}{u}{}^{3}_{i,j}=$$

$$=-\varepsilon\,\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\Big(\frac{\overset{(n)}{u}{}^{1}_{i+1,j}-\overset{(n)}{u}{}^{1}_{i-1,j}}{2h_1}-\frac{\overset{(n)}{u}{}^{2}_{i,j+1}-\overset{(n)}{u}{}^{2}_{i,j-1}}{2h_2}\Big)=$$

$$=\frac{2(1+\sigma)}{E}\,f_3(x_i,y_i).$$

როგორც (2.2) იტერაციული პროცესიდან ჩანს, (1.1), (1.2) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა იტერაციის ყოველ ბიჯზე მიიყვანება შემდეგი ამოცანის

$$a_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a_2u=f(x,y),\;\;(x,y)\in\Omega, \tag{2.3}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega}=0,\;\;\partial\Omega:|x|=|y|=1, \tag{2.4}$$

სადაც a_0, a_1 და a_2 დადებითი მუდმივებია, შესაბამისი სხვაობიანი ამოცანის ამოხსნაზე.

(2.3), (2.4) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი ამოცანა

$$a_0\,\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}+a_1\,\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{h_2^2}-$$

$$-a_2u_{i,j}=f(x_i,y_j),$$

სადაც $i=1,\ldots,N_1-1$, $j=1,\ldots,N_2-1$, $x_i=ih_1$, $y_j=jh_2$, $h_1=2/N_1$ და $h_2=2/N_2$ (N_1 და N_2 ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვებია), იხსნება ფაქტორიზაციის მეთოდის (იხ. [76]) იტერაციულ მეთოდთან კომბინაციაში.

აღვწეროთ ეს ალგორითმი: ფაქტორიზაციის მეთოდს ჩვენ ვიყენებთ ox ან oy ღერძი პარალელურ შრეებზე. ვთქვათ, ვიყენებთ ფაქტორიზაციის მეთოდს ox ღერძის პარალელურ შრეეებზე იტერაციულ პროცესთან კომბინაციაში. ავიღოთ პირველი შრე. ამ შრის ზედა შრეში მოთავსებულ კვანძებში u_{ij} ავიღოთ ნულის ტოლი, ქვედა შრეზე კი u_{ij}-ს მნიშვნელობა ცნობილია. ძირითად შრეზე u_{ij}-ს ვპოულობთ ფაქტორიზაციის მეთოდით. შემდეგ გადავდივართ მომდევნო შრეზე. მის ზედა შრეზე u_{ij}-ს მნიშვნელობას კვლავ ვიღებთ ნულის ტოლს, ქვედა შრეზე კი – u_{ij}-ს ნაცვლად ვსვამთ ადრე მიღებულ მნიშვნელობას და ა. შ. შემდეგ იტერაციას ანალოგიურად ვატარებთ, ოღონდ იმ განსხვავებით, რომ ახლა ზედა შრეზე u_{ij}-ს მნიშვნელობას ვიღებთ არა ნულის ტოლს, არამედ წინა იტერაციის დროს მიღებულ მნიშვნელობას და ა. შ. პროცესს ვაგრძელებთ მანამდე, ვიდრე ორ მომდევნო იტერაციას შორის სხვაობის მოდულის მაქსიმალური მნიშვნელობა არ გახდება ნაკლები წინასწარ აღებულ დადებით ε რიცხვზე.

გამოვიკვლიოთ (2.2) იტერაციული პროცესის კრებადობა. ზუსტ ამონახსნსა და n-ურ იტერაციას შორის სხვაობა აღვნიშნოთ $\overset{(n)}{z}_{ij}$-ით: $\overset{(n)}{z}_{ij}=u_{ij}-\overset{(n)}{u}_{ij}$. ცხადია, $\overset{(n)}{z}_{ij}$ აკმაყოფილებს შემდეგ სისტემას:

$$-\overset{(n)}{z}_{i+1,j}+a\overset{(n)}{z}_{ij}-\overset{(n)}{z}_{i-1,j}=\alpha_0\big(\overset{(n-1)}{z}_{i,j+1}+\overset{(n)}{z}_{i,j-1}\big), \tag{2.5}$$

სადაც

$$\alpha_0=\frac{a_1}{a_0}\Big(\frac{h_1}{h_2}\Big)^2,\quad a=2+2\alpha_0+\frac{a_2}{a_1}\,h_1^2.$$

ცხადია, (2.5)-დან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$a|\overset{(n)}{z}_{ij}|\le|\overset{(n)}{z}_{i+1,j}|+|\overset{(n)}{z}_{i-1,j}|+\alpha_0|\overset{(n-1)}{z}_{i,j+1}|+\alpha_0|\overset{(n)}{z}_{i,j-1}|.$$

აქედან კი თავის მხრივ გამომდინარეობს:

$$a|\overset{(n)}{z}_{ij}| \le (1+\alpha_0)\mu_n + \alpha_0\mu_{n-1}, \tag{2.6}$$

სადაც

$$\mu_n = \max_{s,k} |\overset{(n)}{z}_{s,k}|, \quad s = 1,2,\dots,N_1, \quad k = 1,2,\dots,N_2.$$

რადგან $|\overset{(n)}{z}_{ij}|$ ნულის ტოლი ხდება არის საზღვარზე, ამიტომ ის მაქსიმუმს მიაღწევს ბადის შიგა წერტილში. ამ ფაქტის გათვალისწინებით (2.6)-დან გამომდინარეობს:

$$a\mu_n \le (2+\alpha_0)\mu_n + \alpha_0\mu_{n-1},$$

ან რაც იგივეა

$$\mu_n \le \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \frac{a_2}{a_0} h_1^2}\,\mu_{n-1}, \quad n = 1,2,\dots .$$

აქედან გამომდინარეობს უტოლობა:

$$\mu_n \le q^n\mu_0, \quad q = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \frac{a_2}{a_0} h_1^2} < 1,$$

რაც უზრუნველყოფს (2.2) იტერაციული პროცესის კრებადობას.

§ 3. ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემა სფერული გარსის განტოლებებისათვის (დინამიკური შემთხვევა)

ეს პარაგრაფი ეძღვნება (I.1.5) განტოლებათა სისტემის ამოხსნას $]-1,1[\times]-1,1[$ არეში, დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით. რადგან A სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრული ოპერატორია (იხ. თავი I, § 2), ამიტომ აღნიშნული სისტემის ამოხსნისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ ვარიაციული მეთოდი (იხ. [40], [41], [77]). მიღებული ალგებრულ განტოლებათა სისტემის კომპაქტურად ჩაწერისათვის ჩვენთვის მოსახერხებელია (I.1.5) განტოლებაში უცნობთან მდგომი ქვედა ინდექსი, რომელიც აღნიშნავს დროით შრეს,

ავიტანოთ ზევით, ე. ი. (I.1.5) განტოლებას მივცეთ შემდეგი ფორმა:

$$\Big(I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u^{m+1} - \Big(2I - \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u^{m} + \Big(I + \frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u^{m-1} = \\ = \tau^2 f(x,y,t_m), \tag{3.1}$$

სადაც $m = 1, 2, \dots, n-1$, $\tau = \frac{T}{n}$ $(n > 1)$, $\nu \in]-2, 2[\,$.

გავშალოთ (3.1) სისტემა, მივიღებთ:

$$\begin{gathered}
\bigg[\Big(1 + \tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big)u_1^{m+1} - \\
-\tau^2\,\frac{\sigma_0}{2+\nu}\,\Big(a\,\frac{\partial^2 u_1^{m+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^{m+1}}{\partial y^2} + b\,\frac{\partial^2 u_2^{m+1}}{\partial x \partial y} - \varepsilon c\,\frac{\partial u_3^{m+1}}{\partial x}\Big)\bigg] - \\
-\bigg[\Big(2 - \tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0\nu}{2+\nu}\Big)u_1^{m} + \\
+\tau^2\frac{\sigma_0\nu}{2+\nu}\,\Big(a\,\frac{\partial^2 u_1^{m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^{m}}{\partial y^2} + b\,\frac{\partial^2 u_2^{m}}{\partial x \partial y} - \varepsilon c\,\frac{\partial u_3^{m}}{\partial x}\Big)\bigg] + \\
+\bigg[\Big(1 + \tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big)u_1^{m+1} - \\
-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\,\Big(a\,\frac{\partial^2 u_1^{m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1^{m-1}}{\partial y^2} + b\,\frac{\partial^2 u_2^{m-1}}{\partial x \partial y} - \varepsilon c\,\frac{\partial u_3^{m-1}}{\partial x}\Big)\bigg] = \\
= \tau^2 f_1(x,y,t_m), \\
\bigg[\Big(1 + \tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big)u_2^{m+2} - \\
-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\,\Big(\frac{\partial^2 u_2^{m+1}}{\partial x^2} + a\,\frac{\partial^2 u_2^{m+1}}{\partial y^2} + b\,\frac{\partial^2 u_1^{m+1}}{\partial x \partial y} - \varepsilon c\,\frac{\partial u_3^{m+1}}{\partial y}\Big)\bigg] - \\
-\bigg[\Big(2 - \tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0\nu}{2+\nu}\Big)u_2^{m} + \\
+\tau^2\frac{\sigma_0\nu}{2+\nu}\,\Big(\frac{\partial^2 u_2^{m}}{\partial x^2} + a\,\frac{\partial^2 u_2^{m}}{\partial y^2} + b\,\frac{\partial^2 u_1^{m}}{\partial x \partial y} - \varepsilon c\,\frac{\partial u_3^{m}}{\partial y}\Big)\bigg] + \qquad (3.2) \\
+\bigg[\Big(1 + \tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big)u_2^{m+1} -
\end{gathered}$$

$$-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big(\frac{\partial^2 u_2^{m-1}}{\partial x^2}+a\,\frac{\partial^2 u_2^{m-1}}{\partial y^2}+b\,\frac{\partial^2 u_1^{m-1}}{\partial x\partial y}-\varepsilon c\,\frac{\partial u_3^{m-1}}{\partial y}\Big)\Big]=$$
$$=\tau^2 f_2(x,y,t_m),$$
$$\Big[\Big(1+4\tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0 b}{2+\nu}\Big)u_3^{m+1}-$$
$$-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big(\frac{\partial^2 u_3^{m+1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{m+1}}{\partial y^2}-\varepsilon c\Big(\frac{\partial u_1^{m+1}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{m+1}}{\partial y}\Big)\Big)\Big]-$$
$$-\Big[\Big(2-4\tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0 b\nu}{2+\nu}\Big)u_3^{m}+$$
$$+\tau^2\frac{\sigma_0\nu}{2+\nu}\Big(\frac{\partial^2 u_3^{m}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{m}}{\partial y^2}-\varepsilon c\Big(\frac{\partial u_1^{m}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{m}}{\partial y}\Big)\Big)\Big]+$$
$$+\Big[\Big(1+4\tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0 b}{2+\nu}\Big)u_3^{m-1}-$$
$$-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big(\frac{\partial^2 u_3^{m-1}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3^{m-1}}{\partial y^2}-\varepsilon c\Big(\frac{\partial u_1^{m-1}}{\partial x}+\frac{\partial u_2^{m-1}}{\partial y}\Big)\Big)\Big]=$$
$$=\tau^2 f_3(x,y,t_m).$$

(3.1) სისტემის ან რაც იგივეა (3.2) სისტემის (ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით) ამონახსენს ვეძებთ შემდეგი მწკრივის სახით:

$$u^m(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_{ij}^m\varphi_i(x)\varphi_j(y), \tag{3.3}$$

სადაც $u_{ij}^m=(u_{1,i,j}^m,u_{2,i,j}^m,u_{3,i,j}^m)^\top$ არის საძებნი ვექტორი; $\varphi_i(x)$ და $\varphi_j(y)$ საკოორდინატო ფუნქციებად აღებულია ლეჟანდრის პოლინომების სხვაობები:

$$\varphi_i(x)=A_i\big(P_{i+1}(x)-P_{i-1}(x)\big)$$

და

$$\varphi_j(y)=A_j\big(P_{j+1}(y)-P_{j-1}(y)\big),$$

სადაც

$$A_i=\frac{1}{\sqrt{2(2i+1)}}\,.$$

რადგან $P_n(1) = 1$ და $P_n(-1) = (-1)^n$, ამიტომ ცხადია, $\varphi_i(x) \cdot \varphi_j(y)$ ფუნქციები $]-1,1[\times]-1,1[$ არეში აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს.

როგორც ცნობილია $u^m(x,y)$ ვექტორის (3.3) გაშლის u_{ij}^m ფურიეს კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[\Big(I+\frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u^{m+1}-\Big(2I-\frac{\tau^2\nu}{2+\nu}\,A\Big)u^{m}+ \\ +\Big(I+\frac{\tau^2}{2+\nu}\,A\Big)u^{m-1}-\tau^2 f(x,y,t_m)\Big]\varphi_k(x)\varphi_s(y)\,dx\,dy=0, \tag{3.4} \\ k,s=1,2,\ldots\,.$$

A ოპერატორში შემავალი თითოეული ოპერატორისათვის ამოვწეროთ შესაბამისი ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემები (ეს სქემები აგებულია თ. ვაშაყმაძის შრომებში, იხ. [78])

განვიხილოთ ამოცანა:

$$Lu=0,\quad u\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \ (x,y)\in\Omega=]-1,1[\times]-1,1[\,,$$

სადაც L არის A ოპერატორში შემავალი ერთ-ერთი დიფერენციალური ოპერატორი ან იგივური ოპერატორი.

ვეძებოთ მიახლოებითი ამონახსნი შემდეგი სახით

$$u=\sum_{i,j=1}^{N}u_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(y).$$

შევარჩიოთ u_{ij} კოეფიციენტები ისე, რომ შესრულდეს ტოლობები:

$$\iint_{\Omega} Lu\varphi_k(x)\varphi_s(y)\,dx\,dy=0,\ \ k=1,2,\ldots,N. \tag{3.5}$$

i და j-ს ვუწოდოთ მოძრავი ინდექსები, ხოლო k და s-ს – უძრავი.

გვაქვს შემდეგი შემთხვევები:

ა) $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

(3.5) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\, \varphi_k(x)\varphi_s(y)\, dx\, dy = 0.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\partial u}{\partial y}\, \varphi_k'(x)\varphi_s(y)\, dx\, dy = 0.$$

აქედან გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} u_{ij} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi_k'(x)\varphi_j'(y)\varphi_i(x)\varphi_s(y)\, dx\, dy = 0.$$

როგორც ცნობილია ლეჟანდრის პოლინომებისათვის გვაქვს:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\, dx = \widehat{\delta}_{mn} = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}, & \text{როცა} \;\; n = m, \\ 0, & \text{როცა} \;\; n \neq m; \end{cases} \tag{3.6}$$

და

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x). \tag{3.7}$$

ცხადია, (3.7)-დან გამომდინარეობს

$$\varphi_i'(x) = E_i P_i(x), \quad E_i = \sqrt{\frac{2i+1}{2}}\, . \tag{3.8}$$

(3.8) თვისების თანახმად გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_i A_s E_k E_j u_{ij} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_k(x)P_j(y)\big(P_{i+1}(x) - P_{i-1}(x)\big)\times$$
$$\times\big(P_{s+1}(y) - P_{s-1}(y)\big)\, dx\, dy = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_i A_s E_k E_j u_{ij} \int_{-1}^{1} P_k(x)\big(P_{i+1}(x) - P_{i-1}(x)\big)\, dx \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} P_j(y)\big(P_{s+1}(y) - P_{s-1}(y)\big)\, dy = 0.$$

(3.6) თვისების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_i A_s E_k E_j u_{ij} (\widehat{\delta}_{k,i+1} - \widehat{\delta}_{k,i-1})(\widehat{\delta}_{j,s+1} - \widehat{\delta}_{j,s-1}) = 0.$$

ნულისაგან განსხვავებულია ის წევრები, რომელთათვისაც:

$$i = k-1, \;\; i = k+1 \;\; \text{და} \;\; j = s-1, \;\; j = s+1.$$

ამიტომ გვაქვს:

$$\sum_{i=1}^{N} A_s A_{k-1} E_k E_j u_{k-1,j} \widehat{\delta}_{k,k} (\widehat{\delta}_{j,s+1} - \widehat{\delta}_{j,s-1}) -$$

$$-\sum_{j=1}^{N} A_s A_{k+1} E_k E_j u_{k+1,j} \widehat{\delta}_{k,k} (\widehat{\delta}_{j,s+1} - \widehat{\delta}_{j,s-1}) = 0.$$

აქედან

$$A_s A_{k-1} E_k \widehat{\delta}_{k,k} \big(- E_{s-1} \widehat{\delta}_{s-1,s-1} u_{k-1,s-1} + E_{s+1} \widehat{\delta}_{s+1,s+1} u_{k-1,s+1} \big) -$$

$$-A_s A_{k+1} E_k \widehat{\delta}_{k,k} \big(- E_{s-1} \widehat{\delta}_{s-1,s-1} u_{k+1,s-1} + E_{s+1} \widehat{\delta}_{s+1,s+1} u_{k-1,s+1} \big) = 0.$$

ამრიგად, ეს სისტემა გვაძლევს შემდეგ ოთხ კვანძს:

$$(k-1, s-1), (k-1, s+1), (k+1, s-1), (k+1, s+1).$$

თუ E და $\widehat{\delta}$-ის მნიშვნელობებს გავითვალისწინებთ, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$4 A_k A_s \big(A_{k-1} A_{s-1} u_{k-1,s-1} + A_{k+1} A_{s+1} u_{k+1,s+1} -$$

$$-A_{k-1} A_{s+1} u_{k-1,s+1} - A_{k+1} A_{s-1} u_{k+1,s-1} \big) = 0, \;\; k, s, = 1, \dots, N.$$

ბ) $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\,.$

(3.5) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\varphi_k(x)\varphi_s(y)\,dx\,dy = 0.$$

ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_s A_j E_i E_k u_{ij} \widehat{\delta}_{i,k} \times$$
$$\times \big(\widehat{\delta}_{s+1,j+1} - \widehat{\delta}_{s+1,j-1} - \widehat{\delta}_{s-1,j+1} + \widehat{\delta}_{s-1,j-1}\big) = 0.$$

ნულისაგან განსხვავებულია ის წევრები, რომელთათვისაც:

$$i = k \;\text{ და }\; j = s-2,\;\; j = s,\;\; j = s+2.$$

ეს სისტემა გვაძლევს სამ კვანძს:

$$(k, s-2), (k, s), (k, s+2).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$B_s = \frac{1}{(2s+1)\sqrt{(2s-1)(2s+3)}}\,, \quad C_s = \frac{2}{(2s-1)(2s+3)}\,.$$

ამ აღნიშვნების შედეგად უკანასკნელი სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$B_{s-1} u_{k,s-2} - C_s u_{k,s} + B_{s+1} u_{k,s+2} = 0, \;\; k, s = 1, 2, \ldots, N.$$

გ) $L = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$

ანალოგიური გზით მივიღებთ:

$$B_{k-1} u_{k-2,s} - C_k u_{k,s} + B_{k+1} u_{k+2,s} = 0, \;\; k, s = 1, 2, \ldots, N.$$

დ) $L = \dfrac{\partial}{\partial x}\,.$

(3.5) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial u}{\partial x}\,\varphi_k(x)\varphi_s(y)\;dx\,dy=0.$$

აქედან

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}u_{ij}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi_i'(x)\varphi_j(y)\varphi_k(x)\varphi_s(y)\;dx\,dy=0.$$

(3.6)–(3.8) თვისებების თანახმად ეს სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}A_jA_kA_sE_iu_{ij}(\widehat{\delta}_{i,k+1}-\widehat{\delta}_{i,k-1})\times$$
$$\times\big(\widehat{\delta}_{j+1,s+1}-\widehat{\delta}_{j+1,s-1}-\widehat{\delta}_{j-1,s+1}+\widehat{\delta}_{j-1,s-1}\big)=0.$$

ნულისაგან განსხვავებულია ის წევრები, რომელთათვისაც:

$$i=k-1,\;\; j=k+1 \;\text{ და }\; j=s-2,\;\; j=s,\;\; j=s+2.$$

ეს სისტემა გვაძლევს ექვს კვანძს:

$$(k-1,s-2),(k-1,s),(k-1,s+2),$$
$$(k+1,s-2),(k+1,s),(k+1,s+2).$$

სისტემის საბოლოო სახეა:

$$2A_{k-1}A_k\big(B_{s-1}u_{k-1,s-2}-C_su_{k-1,s}+B_{s+1}u_{k-1,s+2}\big)+$$
$$+2A_{k+1}A_k\big(-B_{s-1}u_{k+1,s-2}+C_su_{k+1,s}-B_{s+1}u_{k+1,s+2}\big)=0,$$
$$k,s,=1,2,\dots,N.$$

ე) $L=\dfrac{\partial}{\partial y}\,.$

წინა სისტემის ანალოგიურად (3.5) სისტემა ღებულობს სახეს:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_i A_k A_s E_i u_{ij}(\widehat{\delta}_{j,s+1}-\widehat{\delta}_{j,s-1})\times$$
$$\times\big(\widehat{\delta}_{i+1,k+1}-\widehat{\delta}_{i+1,k-1}-\widehat{\delta}_{i-1,k+1}+\widehat{\delta}_{i-1,k-1}\big)=0.$$

ნულისაგან განსხვავებულია ის წევრები, რომელთათვისაც:

$$i=k-2,\;\; i=k,\;\; i=k+2 \text{ და } j=s-1,\;\; j=s+1.$$

ეს სისტემაც გვაძლევს ექვს კვანძს:

$$(k-2,s+1),(k,s+1),(k+2,s+1),$$
$$(k-2,s-2),(k,s-1),(k+2,s-1).$$

შესაბამისი სისტემა კი ასე ჩაიწერება:

$$2A_{s-1}A_s\big(B_{k-1}u_{k-2,s-1}-C_k u_{k,s-1}+B_{k+1}u_{k+2,s-1}\big)+$$
$$+2A_{s+1}A_s\big(-B_{k-1}u_{k-2,s+1}-C_k u_{k,s+1}-B_{k+1}u_{k+2,s+1}\big)=0,$$
$$k,s=1,2,\ldots,N.$$

გ) $L=I$ (L არის იგივური ოპერატორი).

(3.5) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_i A_k A_j A_s u_{ij}\big(\widehat{\delta}_{i+1,k+1}-\widehat{\delta}_{i+1,k-1}-\widehat{\delta}_{i-1,k-1}+\widehat{\delta}_{i-1,k-1}\big)\times$$
$$\times\big(\widehat{\delta}_{j+1,s+1}-\widehat{\delta}_{j+1,s-1}-\widehat{\delta}_{j-1,s+1}+\widehat{\delta}_{j-1,s-1}\big)=0.$$

ნულისაგან განსხვავებული წევრები მიღება i და j ინდექსების შემდეგი მნიშვნელობებისათვის: $i=k-2$, $i=k$, $i=k+2$ და $j=s-2$, $j=s$, $j=s+2$. იგივური ოპერატორი გვაძლევს ცხრა კვანძს:

$$(k-2,s-2),(k-2,s),(k-2,s+2),$$

$$(k, s-2), (k, s), (k, s+2),$$
$$(k+2, s-2), (k+2, s), (k+2, s+2).$$

სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$B_{k-1}\big(B_{s-1}u_{k-2,s-2} - C_s u_{k-2,s} + B_{s+1}u_{k-2,s+2}\big) -$$
$$-C_k\big(B_{s-1}u_{k,s-2} - C_s u_{k,s} + B_{s+1}u_{k,s+2}\big) +$$
$$+B_{k+1}\big(B_{s-1}u_{k+2,s-2} - C_s u_{k+2,s} + B_{s+1}u_{k+2,s+2}\big) = 0, \quad k, s, = 1, 2, \dots, N.$$

ამრიგად, ელემენტარული დიფერენციალური ოპერატორებისათვის მიიღება შემდეგი შაბლონები:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\sim B_{s-1}u_{k,s-2} - C_s u_{k,s} + B_{s+1}u_{k,s+2},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\sim B_{k-1}u_{k-2,s} - C_k u_{k,s} + B_{k+1}u_{k+2,s},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &\sim 4A_k A_s\big(A_{k-1}A_{s-1}u_{k-1,s-1} + A_{k+1}A_{s+1}u_{k+1,s+1} -\\
&- A_{k-1}A_{s+1}u_{k-1,s+1} - A_{k+1}A_{s-1}u_{k+1,s-1}\big),\\
\frac{\partial u}{\partial x} &\sim 2A_{k-1}A_k\big(B_{s-1}u_{k-1,s-2} - C_s u_{k-1,s} + B_{s+1}u_{k-1,s+2}\big) +\\
&+ 2A_{k+1}A_k\big(-B_{s-1}u_{k+1,s-2} + C_s u_{k+1,s} - B_{s+1}u_{k+1,s+2}\big),\\
\frac{\partial u}{\partial y} &\sim 2A_{s-1}A_s\big(B_{k-1}u_{k-2,s-1} - C_k u_{k,s-1} + B_{k+1}u_{k+2,s-1}\big) +\\
&+ 2A_{s+1}A_s\big(-B_{k-1}u_{k-2,s+1} + C_k u_{k,s+1} - B_{k+1}u_{k+2,s+1}\big),\\
u(x,y) &\sim B_{k-1}\big(B_{s-1}u_{k-2,s-2} - C_s u_{k-2,s} + B_{s+1}u_{k-2,s+2}\big) -\\
&- C_k\big(B_{s-1}u_{k,s-2} - C_s u_{k,s} + B_{s+1}u_{k,s+2}\big) +\\
&+ B_{k+1}\big(B_{s-1}u_{k+2,s-2} - C_s u_{k+2,s} + B_{s+1}u_{k+2,s+2}\big),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad k, s, = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

სადაც

$$A_s=\frac{1}{\sqrt{2(2s+1)}}\,,\quad B_s=\frac{1}{(2s+1)\sqrt{(2s-1)(2s+3)}}\,,$$
$$C_s=\frac{1}{(2s-1)(2s+3)}\,.$$

ახლა უკვე შეგვიძლია A ოპერატორში შემავალი ელემენტარული ოპერატორები შევცვალოთ მათი შესაბამისი შაბლონებით. (3.4) სისტემის პირველი განტოლების შესაბამის სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big(1+\tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big)\Big[B_{k-1}\big(B_{s-1}u^{m+1}_{1,k-2,s-2}-C_su^{m+1}_{1,k-2,s}+B_{s+1}u^{m+1}_{1,k-2,s+2}\big)-\\
&-C_k\big(B_{s-1}u^{m+1}_{1,k,s-2}-C_su^{m+1}_{1,k,s}+B_{s+1}u^{m+1}_{1,k,s+2}\big)+\\
&+B_{k+1}\big(B_{s-1}u^{m+1}_{1,k+2,s-2}-C_su^{m+1}_{1,k+2,s}+B_{s+1}u^{m+1}_{1,k+2,s+2}\big)\Big]-\\
&-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big[a\big(B_{s-1}u^{m}_{1,k,s-2}-C_su^{m+1}_{1,k,s}+B_{s+1}u^{m+1}_{1,k,s+r}\big)+\\
&+\big(B_{k-1}u^{m+1}_{1,k-2,s}-C_ku^{m+1}_{k,s}+B_{k+1}u^{m+1}_{1,k+2,s}\big)+\\
&+4bA_kA_s\big(A_{k-1}A_{s-1}u^{m+1}_{2,k-1,s-1}+A_{k+1}A_{s+1}u^{m+1}_{2,k+1,s+1}-\\
&-A_{k-1}A_{s+1}u^{m+1}_{2,k-1,s+1}-A_{k+1}A_{s-1}u^{m+1}_{2,k+1,s-1}\big)-\\
&-\varepsilon c\Big(2A_{k-1}A_k\big(B_{s-1}u^{m+1}_{3,k-1,s-2}-C_su^{m+1}_{3,k-1,s}+B_{s+1}u^{m+1}_{3,k-1,s+2}\big)+\\
&+2A_{k+1}A_k\big(-B_{s-1}u^{m+1}_{3,k+1,s-2}+C_su^{m+1}_{3,k+1,s}-B_{s+1}u^{m+1}_{3,k+1,s+2}\big)\Big)\Big]\Big\}-\\
&-\Big\{\Big(2-\tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\Big)\Big[B_{k-1}\big(B_{s-1}u^{m+1}_{1,k-2,s-2}-\cdots\big)-\cdots\Big]+\\
&+\tau^2\frac{\sigma_0\nu}{2+\nu}\Big[a\big(B_{s-1}u^{m}_{1,k}-\cdots\big)+\big(B_{k-1}u^{m}_{1,k-2,s}-\cdots\big)+\\
&+4bA_kA_s\big(A_{k-1}A_{s-1}u^{m}_{2,k-1,s-1}+\cdots\big)-\\
&-\varepsilon c\big(2A_{k-1}A_k\big(B_{s-1}u^{m}_{3,k-1,s-2}-\cdots\big)+\cdots\big)\Big]\Big\}+
\end{aligned}$$

$$+\left\{\left(1+\tau^2\varepsilon^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\right)\left[B_{k-1}\big(B_{s-1}u^{m-1}_{1,k-2,s-2}-\cdots\big)-\cdots\right]-\right.$$
$$\left.-\tau^2\frac{\sigma_0}{2+\nu}\left[a\big(B_{s-1}u^{m-1}_{1,k,s-2}-\cdots\big)+\cdots\right]\right\}=\tau^2 b^m_{1,k,s},$$

სადაც

$$A_s=\frac{1}{\sqrt{2(2s+1)}}\,,\quad B_s=\frac{1}{(2s+1)\sqrt{(2s-1)(2s+3)}}\,,$$
$$C_s=\frac{1}{(2s-1)(2s+3)}\,,\quad b^m_{1,k,s}=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}f_1(x,y,t_m)\varphi_k(x)\varphi_s(y)\,dx\,dy.$$

ანალოგიურად მიიღება (3.4) სისტემის მე-2 და მე-3 განტოლების შესაბამისი სისტემები.

რადგან (I.1.1)–(I.1.3) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნისათვის დროითი ცვლადის მიმართ ჩვენ გამოვიყენეთ სხვაობიანი მეთოდი, ხოლო სივრცითი ცვლადების მიმართ – ვარიაციული, ამიტომ ზემოთ მიღებულ განტოლებათა სისტემას ჩვენ ვუწოდებთ ვარიაციულ-სხვაობიან სქემას.

ცხადია, $(m+1)$-დროით შრის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს $(1.7),(1.8)$ (იხ. თავი I) ამოცანის შესაბამის ვარიაციულ ანალოგს. ამ სისტემის ამოხსნისათვის ვიყენებთ (2.1) იტერაციული პროცესის ანალოგიურ პროცესს, რომელიც წარმოადგენს ზეიდელის იტერაციულ პროცესს. როგორც ცნობილია, სიმეტრიული, დადებითად განსაზღვრული მატრიცის შემთხვევაში ზეიდელის იტერაციული პროცესი კრებადია (იხ. [79]). ჩვენს შემთხვევაში $m+1$ დროითი შრის შესაბამისი ვარიაციულ-სხვაობიანი განტოლებათა სისტემის მატრიცი სიმეტრიული და დადებითად განსაზღვრულია. ეს შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს უწყვეტი ამოცანის შესაბამისი ოპერატორის დადებითად განსაზღვრულობიდან, რომელიც დამტკიცებული იყო I თავის § 2-ში.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები გამოქვეყნებულია შრომებში [80]–[84].

§ 4. რიცხვითი გათვლების ანალიზი

ეს პარაგრაფი ეთმობა სადისერტაციო ნაშრომში განხილული ნახევრადდის-კრეტული, იტერაციულ-სხვაობიანი და ვარიაციულ-სხვაობიანი სქემების გამოყენებით სხვადასხვა მოდელური ამოცანების რიცხვითი გათვლის შედეგების ანალიზს. დამრგვალების ცდომილების მიმართ აღნიშნული სქემების მგრძნობელობის დადგენის მიზნით ჩატარებულია ისეთი მოდელური ამოცანების გათვლები, რომელთათვისაც თეორიულად ზუსტი შედეგები მიიღება. შეიძლება ითქვას, რომ განხილული სქემების მდგრადობის ხარისხი მაღალია. შემდეგი სერია მოდელური ამოცანებისა ისეთია, რომ გრადიენტი შედარებით მკვეთრად იცვლება, რის გამოც საკმარისი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა სარეალიზაციო სქემების პარამეტრების სათანადოდ შერჩევა. გათვლის შედეგები ასევე მეტყველებენ განხილული სქემების მდგრადობის მაღალ ხარისხზე.

მნიშვნელოვანია ისეთი მოდელური ამოცანის განხილვა, რომელსაც გარკვეული პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია, ამასთან ამონახსნი წინასწარ ცნობილი არ არის. სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია ასეთი ამოცანის რიცხვითი გათვლა. მიღებული შედეგები საკმარისად კარგად ასახავს რეალურ სურათს.

ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტი შემოთავაზებული იტერაციული მეთოდის ეფექტურობის შესწავლისათვის. ამ მიზნით დათვლილია იტერაციათა რიცხვი განტოლებაში შემავალი σ (პუასონის კოეფიციენტი) და ε (გარსის სისქის შეფარდება სფეროს რადიუსთან) პარამეტრების ცვლილების მიხედვით. გათვლის შედეგები გვიჩვენებს, რომ იტერაციის რიცხვი საგრძნობლად იზრდება, როცა პუასონის კოეფიციენტი უახლოვდება 0.5-ს ან გარსის სისქის შეფარდება სფეროს რადიუსთან შედარებით დიდია. სხვა შემთხვევებისათვის იტერაციათა რიცხვი ნორმის ფარგლებშია მოთავსებული.

ტესტი 1.

იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (სტატიკა)

$u_1(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$
$u_2(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$
$u_3(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$

n = 100 (ბადის კვანძების რაოდენობა x-სა და y-ის მიმართ);
σ (sig) = 0.25; ε (eps) = 0.1, iung = 1, eps1 = 0.0000000001 (სიზუსტე).

(x,y) / u	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
u_1	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_2$	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
u_2	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_3$	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
u_3	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500

$\max \Delta (\tilde{u}_i) = 0.000000$, (i=1,2,3); $\max \delta (\tilde{u}_i) = 0.000000$, (i=1,2,3);

ტესტი 2.

ვარიაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (სტატიკა)

$u_1(x,y) = (1 -x*x)*(1-y*y)$
$u_2(x,y) = (1 -x*x)*(1-y*y)$
$u_3(x,y) = (1 -x*x)*(1-y*y)$

n = 1 (საკოორდინატო ფუნქციების რაოდენობა), ni=36 (სიმპსონის საინტეგრალო კვანძების რაოდენობა), σ(sig) = 0.25, ε(eps)=0.1, iung=1, eps1=0.0000000001(სიზუსტე).

u \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
u_1	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_2$	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
u_2	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_3$	0.562500	0.562550	1.000000	0.562500	0.562500
u_3	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500

$\max \Delta (\tilde{u}_i) = 0.000000, (i=1,2,3)$; $\max \delta (\tilde{u}_i) = 0.000000, (i=1,2,3)$;

ტესტი 3.

ვარიაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (სტატიკა)

$u_1(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$
$u_2(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$
$u_3(x,y) = \sin(pi*x)*\sin(pi*y)$

n = 24 (საკოორდინატო ფუნქციების რაოდენობა), ni = 36 (სიმპსონის საინტეგრალო კვანძების რაოდენობა), σ(sig) = 0.25, ε(eps) = 0.1, iung = 1, eps1 = 0.0000000001(სიზუსტე).

u \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.562500	0.562487	1.000048	0.562577	0.562590
u_1	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_2$	0.562500	0.562487	1.000048	0.562590	0.562577
u_2	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_3$	1.000006	1.000032	0.000000	-1.000019	-1.000019
u_3	1.000000	1.000000	0.000000	-1.000000	-1.000000

იტერაციის რაოდენობა = 150;
$\max \Delta(\tilde{u}_i) = 0.00009$, (i=1,2,3);

ტესტი 4.

იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (დინამიკა)

$u_1(x,y,t)$ =(1-x*x)*(1-y*y) (1+t*t)
$u_2(x,y,t)$ = (1-x*x)*(1-y*y) (1+t*t)
$u_3(x,y,t)$ = (1-x*x)*(1-y*y) (1+t*t)

n = 88 (ბადის კვანძების რაოდენობა x-სა და y-ის მიმართ);
td = 1(დროითი შუალედის მარჯვენა ბოლო); l = 1000 (კვანძების რაოდენობა t დროითი ცვლადის მიმართ); σ(sig) = 0.25; ε(eps) = 0.1; iung = 1; eps1 = 0.0000000001 (სიზუსტე).

t = 0.5

u \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
u_1	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
$\tilde{u}_2$	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
u_2	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
$\tilde{u}_3$	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
u_3	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125

max Δ ($\tilde{u}_i$) = 0.000000, (i=1,2,3); max δ ($\tilde{u}_i$) = 0.000000, (i=1,2,3);

t = 0.75

u \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.878906	0.878906	1.562499	0.878906	0.878906
u_1	0.878906	0.878906	1.562500	0.878906	0.878906
$\tilde{u}_2$	0.878906	0.878906	1.562499	0.878906	0.878906
u_2	0.878906	0.878906	1.562500	0.878906	0.878906
$\tilde{u}_3$	0.878906	0.878906	1.562500	0.878906	0.878906
u_3	0.878906	0.878906	1.562500	0.878906	0.878906

max Δ ($\tilde{u}_i$) = 0.000001, (i=1,2,3); max δ ($\tilde{u}_i$) = 0.0000006, (i=1,2,3);

ტესტი 5.

იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (დინამიკა)

$u_1(x,y,t)$ = sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y)
$u_2(x,y,t)$ = sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y)
$u_3(x,y,t)$ = sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y)

m1 = m2 = 1
n = 88 (ბადის კვანძების რაოდენობა x-სა და y-ის მიმართ);
td = 1(დროითი შუალედის მარჯვენა ბოლო); l = 1000 (კვანძების რაოდენობა t დროითი ცვლადის მიმართ); σ(sig) = 0.25; ε(eps) = 0.1; iung = 1; eps1 = 0.0000000001 (სიზუსტე).

t = 0.5

u \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	1.000254	1.000252	-0.000598	-1.000254	-1.000252
u_1	1.000000	1.000000	0.000000	-1.000000	-1.000000
$\tilde{u}_2$	1.000254	1.000252	-0.000598	-1.000252	-1.000254
u_2	1.000000	1.000000	0.000000	-1.000000	-1..00000
$\tilde{u}_3$	1.000178	1.000178	0.000000	-1.000178	-1.000178
u_3	1.000000	1.000000	0.000000	-1.000000	-1.000000

max $\Delta(\tilde{u}_i)$ = 0.000598, (i=1,2,3);

t = 0.75

u \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.707602	0.707362	-0.001176	-0.707604	-0.707363
u_1	0.707107	0.707107	0.000000	-0.707107	-0.707107
$\tilde{u}_2$	0.707602	0.707362	-0.001176	-0.707363	-0.707604
u_2	0.707107	0.707107	0.000000	-0.707107	-0.707107
$\tilde{u}_3$	0.707544	0.707544	0.000000	-0.707544	-0.707544
u_3	0.707107	0.707107	0.000000	-0.707107	-0.707107

max $\Delta(\tilde{u}_i)$ = 0.001176, (i=1,2,3);

ტესტი 6.

იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (სტატიკა)

$f_1(x,y) = 0$
$f_2(x,y) = 0$
$f_3(x,y) = 1$

n = 100 (ბადის კვანძების რაოდენობა x-სა და y-ის მიმართ);
σ(sig) = 0.25; ε(eps) = 0.1, iung = 1, eps1 = 0.0000000001 (სიზუსტე).

$\tilde{u}$ \ (x,y)	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.009762	-0.009762	0.000000	-0.009762	0.009762
$\tilde{u}_2$	0.009762	-0.009762	0.000000	0.009762	-0.009762
$\tilde{u}_3$	-0.447736	-0.447736	-0.728369	-0.447736	-0.447736

მაქსიმალური ჩაღუნვა მიიღწევა გარსის შუა წერტილში.

ტესტი 7.

იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი (სტატიკა)

$u_1(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$
$u_2(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$
$u_3(x,y) = (1 - x*x)*(1-y*y)$

n=100 (ბადის კვანძების რაოდენობა x-სა და y-ის მიმართ);
σ (sig)=0.4; eps=0.1, iung=1, eps1=0.0000000001 (სიზუსტე).

(x,y) / u	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.544050	0.583029	1.003026	0.526799	0.601199
u_1	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_2$	0.619412	0.507667	1.003026	0.472525	0.655473
u_2	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500
$\tilde{u}_3$	0.611597	0.523715	1.004257	0.560283	0.560283
u_3	0.562500	0.562500	1.000000	0.562500	0.562500

იტერაციის რაოდენობა = 16122 ;
max $\Delta(\tilde{u}_i)$ = 0.092973, (i=1,2,3); max $\delta(\tilde{u}_i)$ = 0.190413, (i=1,2,3);

ტესტი 8.

იტერაციულ-სხვაობიანი მეთოდი გახლეჩილი ოპერატორით (დინამიკა)

$u_1(x,y,t) =(1-x*x)*(1-y*y)\ (1+t*t)$
$u_2(x,y,t) = (1-x*x)*(1-y*y)\ (1+t*t)$
$u_3(x,y,t) = (1-x*x)*(1-y*y)\ (1+t*t)$

n = 24 (ბადის კვანძების რაოდენობა x-სა და y-ის მიმართ);
td = 1 (დროითი შუალედის მარჯვენა ბოლო); l = 24 (კვანძების რაოდენობა t დროითი ცვლადის მიმართ); σ (sig) = 0.25; ε (eps) = 0.001; iung = 1; eps1 = 0.0000000001 (სიზუსტე).

t = 0.25

(x,y) / u	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.597585	0.597585	1.062357	0.597513	0.597513
u_1	0.597656	0.597656	1.062500	0.597656	0.597656
$\tilde{u}_2$	0.597585	0.597585	1.062357	0.597513	0.597513
u_2	0.597656	0.597656	1.062500	0.597656	0.597656
$\tilde{u}_3$	0.597602	0.597602	1.062428	0.597602	0.597602
u_3	0.597656	0.597656	1.062500	0.597656	0.597656

$\max \Delta (\tilde{u}_i) = 0.000143$, (i=1,2,3); $\max \delta (\tilde{u}_i) = 0.000239$, (i=1,2,3);

t = 0.5

(x,y) / u	(-0.5, -0.5)	(0.5, 0.5)	(0 , 0)	(-0.5, 0.5)	(0.5, -0.5)
$\tilde{u}_1$	0.702830	0.702830	1.249388	0.702525	0.702525
u_1	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
$\tilde{u}_2$	0.702830	0.702830	1.249388	0.702525	0.702525
u_2	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125
$\tilde{u}_3$	0.702891	0.702891	1.249687	0.702891	0.702891
u_3	0.703125	0.703125	1.250000	0.703125	0.703125

$\max \Delta (\tilde{u}_i) = 0.000612$, (i=1,2,3); $\max \delta (\tilde{u}_i) = 0.000854$, (i=1,2,3);

იტერაციის მაქსიმალური რაოდენობა დროის ერთი t მომენტისათვის = 14

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Vekua I. N., On the construction of approximate solutions of equations of the shallow spherical shell. *Int. J. Solid Structures*, 1969, 5, 991–1003.

2. Vekua I. N., On two ways of constructing the theory of elastic shells. *Proc. 13th Int. Congress Theor. and Appli. Mech, Moscow*, 1972, 322–339.

3. Векуа И. Н., Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. *Наука, Москва*, 1978.

4. Векуа И. Н., Основы тензорного анализа и теории ковариантов. *Наука, Москва*, 1978.

5. Векуа И. Н., Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. *Тр. Тбилис. матем. ин-та*, 1965, 30, 3–103.

6. Гогиа А. А., Численное решение задач о напряженном состоянии пластинчатых и цилиндрических пространственных тел сложной геометрии. *Кандидатская диссертация, физ.-мат. наук, Тбилиси*, 1990.

7. Гордезиани Д. Г., О точности одного варианта теории тонких оболочек. *ДАН СССР*, 1974, 216, 751–754.

8. Гордезиани Д. Г., Об исследовании и численной реализации решении уравнений одного варианта теории оболочек. *ТГУ, Тбилиси*, 1975.

9. Гоцуляк Е. А., Гуляев Б. И., Чибиряков В. К., Дифференциальные уравнения термоупругого состояния оболочек при тепловом ударе по поверхности. *Прикладная механика*, 1973.

10. Вашакмадзе Т. С., Некоторые вопросы математической теории анизотропных упругих пластин. *ТГУ, Тбилиси*, 1986.

11. Вашакмадзе Т. С., Некоторые численные методы решения граничных задач для оболочек и пластин. *Матер. I Всесоюзной школы по теории численным методам расчета оболочек и пластин. ТГУ, Тбилиси*, 1975.

12. Магнарадзе Л. Г., Развитие математической теории упругости оболочек И. Н. Векуа на базе методов комплексного анализа. *Теория и численные методы пластин и оболочек, ТГУ, Тбилиси*, 1984.

13. Меунаргия Т. В., Редукция трехмерных задач моментной теории упругости к двумерным задачам методом И. Н. Векуа. *Тр. Всесоюзного совещания-семинара в Тбилиси, ТГУ, Тбилиси*, 1984.

14. Меунаргия Т. В., О некоторых применениях метода рядов в теории оболочек. *Тр. ин-та прикладной математики им. И. Н. Векуа*, 1988.

15. Жгенти В. С., Решение задач теории пластин и оболочек по методу И. Н. Векуа. *Комплексный анализ и ее применения, Москва*, 1978.

16. Hutchins G. J., Soler A. I., Approximate elasticity solution for moderately thick shells of revolution. *J. Appl. Mech. APMW*, 9, No. 73.

17. Комурджишвили О. П., Разностные методы решения краевых задач для одного варианта уравнений теории тонких призматических оболочек. *Кандидатская диссертация, физ.-мат. наук, Тбилиси*, 1978.

18. Шленев М. А., Асимптотический метод решения краевых задач теории плит акад. И. Н. Векуа. *Матер.* I *Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин, ТГУ, Тбилиси*, 1975.

19. Цхадая Ф. Г., Численное решение некоторых граничных задач теории упругих оболочек. *ТГУ, Тбилиси*, 1977.

20. Cicala P., Sulla teria elastical della plate sottile. *Giorn. jenio Civile*, 1959, 97, No. 4, 238–256; No. 6, 429–449; No. 9, 714–723.

21. Хома И. Ю., О фундаментальной матрице решений одной системы дифференциальных уравнений в частных производных. *Дифферец. уравнения*, 1985.

22. Гордезиани Д. Г., Некоторые неравенства для одного варианта теории тонких оболочек. *Семинар ИПМ ТГУ*, 1975, 10, 7–12.

23. Гордезиани Д. Г., О разрешимости некоторых граничных задач для одного варианта теории тонких оболочек. Докл. АН СССР, 1974, 215, 6, 1289–1292.

24. Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G., On the investigation of a dimensional reduction method for elliptic problems. *Sem. of I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.*, 2003, 29, 15–25.

25. Avalishvili G., Avalishvili M., Investigation of static hierarchic model for elastic shells. *Bull. Georgian Acad. Sci.*, 2004,169, 3,451–453.

26. Вашакмадзе Т. С., Об исследовании оператора теории упругости оболочек Векуа. Комплексный анализ и его приложения. *Наука, Москва*, 1978, 102–107.

27. Хома И. Ю., Обобщенная теория анизотропных оболочек. *Наукова думка, Киев*, 1986.

28. Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W. L., Hierarchical models for elastic cusped plates and beams. *Lect. Notes TICMI*, 2003, 4, 1–121.

29. Хома И. Ю., Общее решение системы уравнений равновесия изгиба пластин теории И. Н. Векуа в третьем приближении. *ДАН УССР, Сер А*, 1972, 1, 83–86.

30. Хома И. Ю., Об общем решении одной системы уравнений равновесия пластин. *ДАН УССР, Сер А*, 1972, 1, 190–191.

31. Жгенти В. С., Хволес А. Р., Общее решение одной системы уравнений в частных производных. *Дифференц. уравнения*, 1982, 18, 1, 17–29.

32. Жгенти В. С., Общее решение системы уравнений и. Н. Векуа равновесия сферической оболочки. *Прикл. механика*, 1983, 19. 5, 24–28.

33. Meunargia T. V., On one application of the theory of functions of a complex variable for non-sallow shells. *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 1994, 9, 1.

34. Джаиани Г. В., Решение некоторых задч для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам. *Изд. ТГУ, Тбилиси*, 1982.

35. Рогава Дж. Л., Об исследовании устойчивости полудискретных схем с помощью ортогональных полиномов Чебышева. *Сообщ. АН ГССР*, 1976, 83, 13, 545–548.

36. Рогава Дж. Л., Об устойчивости метода полудискретизации для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка. *Докл. семинара ИПМ ТГУ*, 1978, 12–13, 41–47.

37. Рогава Дж. Л., Полудискретные схемы для операторных дифференциальных уравнений. *Изд-во Технический университет*, 1995.

38. Рогава Дж. Л., Устойчивость и сходимость некоторых трехслойных полудискретных схем для эводюционных задач. *Сообщ. АН ГССР*, 1984, 114, 1, 57–60.

39. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. *Наука, Москва*, 1967.

40. Ректорис К., Вариационные методы в математической физике и технике. *Мир, Москва*, 1970.

41. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике. *Наука, Москва*, 1970.

42. Heinz E., Beitrqge sur Storungstheorie der spektralzerlegung. *Math. Ann.*, 1951, 123, H. 4, 415–438.

43. Сеге Г., Ортогональные многочлены. *Физматгиз, Москва*, 1962.

44. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ. *Наука, Москва*, 1977.

45. Аткинсон Ф., Дискретные и непрерывные граничные задачи. *Мир, Москва*, 1968.

46. Макаров В. Л., Ортогональные многочлены и разностные схемы с точными и явными спектрами. *Докторская диссертация, физ.-мат. наук, Киев*, 1974.

47. Малцев Л. Е., Применение смешанных полиномов Чебышева при решении операторных уравенний второго рода. *Вестник Московского ун-та, Серия мат., мех.*, 1977, 1, 102–110.

48. Новиков В. А., Демидов Г. В., Замечание к одному методу построения схем высокой точности. *В сб.: Численные методы мех. сплош. среды*, т. 3, 14, *Новосибирск*, 1972, 89–91.

49. Растренин В. А., О применении одного разностного метода к абстрактным гиперболическим уравнениям. *Дифференц. уравнения*, 1973, IX, 12, 2222–2226.

50. Рогава Дж. Л., Исследование некоторых трехслойных полудискретных схем на аснове полиномов Чебышева. *Кандидатская диссертация, физ.-мат. наук, Тбилиси*, 1984.

51. Frohner M., Stabilitatsuntersuchung eines kerallgemeinerten Iterationsprozesses zur Losung Linearer Gleichungssysteme. *Beitr. Numerisch. Math.* 2, *Berlin*, 1974, 19–23.

52. Gentzsch W., Schltter A., Tber ein Einschrittverfahren mit zyklischer Schrittweitenanderung zur Losung parabolischer Differentilgbeichungen. *Z. Angew. Math. Mech., Berlin*, 1978, Bd. 58, H. 7, T415–T416.

53. Golub G, Varga R. S., Chebishev semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods, I. *Numer. Math.* 1961, Bd. 3, 147–156.

54. Golub G, Varga R. S., Chebishev semi-iterative methods, successive over-relaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods, II. *Numer. Math.* 1961, Bd. 3, 157–168.

55. Morris A. G., Horner T. S., Chebishev polinomials in the numerical solution of differential equations. *Math. Comput.*, 1977, 31, 140, 881–891.

56. Tal-Ezer Hillel, Spectral methods in time for parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1989, 26, 11, 1–11.

57. Варга Р., Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. *Мир, Москва*, 1974.

58. Cody W. J., Minardus G., Varga R. S., Chebishev rational approximations to e^{-x} in $[0, +\infty)$ and applications to heat-conduction problems. *J. Approx. Theory*, 1969, 2, 50–65.

59. Varga R. S., Some resulte in approximation theory with applications to numerical analysis. Numerical Solution of Partial Differential Equations, II. *B. E. Hubberd, ed., Academic Press, N. Y.*, 1971. 623–649.

60. Ладыженская О. А., О решении нестационарных операторных уравнений. *Матем. сб.*, 1956, 39(81), 491–524.

61. Соболевский П. Е., Чеботарева Л. М., Приближенное решение методом прямых задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения. *Известия высших учебных заведений, Серия математика*, 1977, 5, (180), 103–116.

62. Baker G. A., Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1976, 13, 4, 564–576.

63. Baker G. A., Dougalis V. A., Serbin S. M., An approximation theorem for second-order evolution equations. *Numer. Math.*, 1980, 35, 2, 127–142.

64. Baker G. A., Bramble J. H., Semidiscrete and single step fully discrete approximations for second order hyperbolic equations. *Rep.*, 22, *Centre de Mathématiques Apliques. Ecole Polytechnique, Paris,* 1977. *Also RAIRO Analyse numerique*, 1979, 13, 75–100.

65. Bales L. A., Semidiscrete and single step fully discrete finite element approximations for second order hyperbolic equations with nonsmooth solutions. *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 1993, 27, 1, 55–63.

66. Kačur J., Application of Rothe's method to perturbed linear hiperbolic equations and variational inequalities. *Czech. Math. J.*, 1984, 34(109), 92–106.

67. Pultar M., Solutions of abstract hiperbolic equations by Rothes method. *Aplicace Matematiky*, 1984, 29, 23–39.

68. Рогава Дж. Л., Устойчивость и сходимость метода полудискретизации для гиперболического уравнения. *Сообщ. АН ГССР*, 1984, 116, 2, 273–276.

69. Фикера Г., Теоремы существования в теории упругости. *Мир, Москва*, 1974.

70. Микеладзе Ш. Е., Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. *Изд-во АН СССР, Москва–Ленинград*, 1936.

71. Микеладзе Ш. Е., Численные методы математического анализа. *Изд-во тех.-теор. литературы, Москва*, 1953.

72. Вазов В., Форсаит Дж., разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. *ИЛ, Москва*, 1963.

73. Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач. *Мир, Москва*, 1972.

74. Яненко Н. Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. *Наука, Новосибирск*, 1967.

75. Самарский А. А., Теория разностных схем. *Наука, Москва*, 1977.

76. Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений. *Наука, Москва*, 1978.

77. Михлин С. Г., Численная реалзация вариационных методов. *Наука, Москва*, 1966.

78. Вашакмадзе Т. С., О применении одного численного прцесса к задаче Дирихле уравнении теории оболочек. *Wiss. Hochsch. Archit und Bauwes., Weimar*, 1972, J. 19, H 2, 228–231.

79. Бахвалов Н. С., Численные методы. *Наука, Москва*, 1973.

80. Abesadze T., Rogava D., On the stability and convergence of the variational difference scheme of the numerical realisation of the Cauchy–Dirichlet boundary value problem for the dynamic equation of the spherical shell. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2001, 16, 1–3, 76–79.

81. Galdava R., Rogava D., On the stability and convergence of a symmetric weighted semidiscrete scheme for dynamic equations of a spherical shell. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, 2004, 19, 1, 26–31.

82. Galdava R., Rogava D., Rogava J., On the stability and convergence of a weighted threelayer semidiscrete scheme for I. Vekua's equations of a spherical shell. *Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math.*, 2004–2005, 54–55, 23–54.

83. Rogava D., On the convergence of an iteration method for the system of I. Vekua's equations with a split operator for a spherical shell. *Bull. Georgian Acad. Sci.* 2006, 173, 49–52.

84. როგავა დ., სფერული გარსის დინამიკური განტოლებისათვის ერთი სიმეტრიული ნახევრადდისკრეტული სქემის მდგრადობისა და კრებადობის შესახებ. საქართველოს მათემატიკოსთა III ყრილობა (11–13 ოქტომბერი, 2001, თბილისი), მოხსენებათა თეზისები, 2001, გვ. 85.

დ ა მ ა ტ ე ბ ა

(პროგრამები **C++** -ზე)

```
// Sxvaobiani methodi, Ertoblivi, Statika
// Factorizaciis methodi, Iteracia

#include <stdio.h>
#include <iostream.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>

double f1(double,double);
double f2(double,double);
double f3(double,double);
const int m=102;
double baz (int, double, double[][m] ,  double[][m] ,  double[][m] ,  double[][m],
double[][m] ,  double, double, double, double, double, double, double, double);

void main(void){
   FILE *pf2;
   pf2=fopen("ppsxe2.txt","w+");

   int i, j, k, n ;  double sig, eps, iung, eps1, h, max, max2, max3 ;
   double u01[m][m],u11[m][m], u02[m][m], u12[m][m], u03[m][m], u13[m][m],
                f01[m][m], f02[m][m], f03[m][m];
   double a11,a12,a13,a4,a15,a16,a17,a18, a21,a22,a23,a25,a26,a27,a28,
                a31,a32,a33,a35,a36,a37,a38;
    clrscr();
   cout<<"n="; cin>>n;   cout<<"sig="; cin>>sig;   cout<<"eps="; cin>>eps;
   cout<<"iung="; cin>>iung; cout<<"eps1="; cin>>eps1;

   h=(double)2/n;

   a11= 2*(1-sig)/(1-2*sig); a12=1; a13=-eps*eps; a4=2*(1+sig)/iung;
  a15=-1/(1-2*sig); a16=0; a17=eps*(3-2*sig)/(1-2*sig); a18=0;

   a21=1; a22=2*(1-sig)/(1-2*sig); a23=-eps*eps;
   a25=-1/(1-2*sig); a26=0; a27=0;  a28=eps*(3-2*sig)/(1-2*sig);

   a31=1; a32=1; a33=-4*eps*eps/(1-2*sig);
   a35=0; a36=a37=-eps*(3-2*sig)/(1-2*sig); a38=0;

  for (i=0; i<=n; i++) for (j=0; j<=n; j++)  {u01[i][j]=0; u11[i][j]=0;
         u02[i][j]=0; u12[i][j]=0; u03[i][j]=0; u13[i][j]=0;  };

   for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++) {f01[i][j]=f1(-1+i*h, -1+j*h);
```

```
 f02[i][j] = f2(-1+i*h, -1+j*h); f03[i][j] = f3(-1+i*h, -1+j*h);};

 // Gare iteraciis dasackisi
   k=0;
   do { k=k++;
   max = baz (n,h, u01, u11, u12, u13, f01, a11, a12, a13, a4, a15, a16, a17, a18);
   max2 = baz (n,h, u02, u12, u11, u13, f02, a21, a22, a23, a4, a25, a26, a27, a28);
   max3 = baz (n,h, u03, u13, u12, u11, f03, a31, a32, a33, a4, a35, a36, a37, a38);
          if (max2 > max) max = max2;
          if (max3 > max) max = max3;
          } while (max >=eps1);
      // Gare iteraciis dasasruli

  fprintf(pf2,"  (%g, %g) (%g, %g)  (%g, %g) (%g, %g) (%g, %g)  \n\n ",
-1+n/4*h, -1+n/4*h, -1+3*n/4*h, -1+3*n/4*h, -1+n/4*h, -1+3*n/4*h, -1+3*n/4*h,
-1+n/4*h,   -1+n/2*h, -1+n/2*h);

 fprintf(pf2,"  %lf %lf %lf%lf %lf ",   u11[n/4][n/4] ,u11[3*n/4][3*n/4],
u11[n/4][3*n/4], u11[3*n/4][n/4], u11[n/2][n/2]);
 fprintf (pf2,"  \n\n");

    fprintf(pf2,"  %lf %lf%lf%lf% lf ", u12[n/4][n/4], u12[3*n/4][3*n/4],
u12[n/4][3*n/4],  u12[3*n/4][n/4], u12[n/2][n/2]);
     fprintf (pf2,"  \n\n");

   fprintf(pf2,"  %lf %lf %lf %lf %lf ",  13[n/4][n/4], u13[3*n/4][3*n/4],
u13[n/4][3*n/4],  u13[3*n/4][n/4], u13[n/2][n/2]);
    fprintf (pf2,"  \n\n\n");

   fprintf (pf2,"Iteraciis nomeri= %d \n",k);
  fprintf (pf2," max= %lf \n",max);
}

          // Funkciebi

 double baz (int n1, double h1, double v01[][m], double v11[][m], double v12[][m],
 double v13[][m], double ff[][m], double s1, double s2, double s3, double s4,
 double s5, double s6, double s7, double s8 )

   // Factorizaciis methodi da shiga iteracia
 {
  int i, j ;  double maxf, a,  b, c, d[m], e[m], q[m];
  for (i=1; i<=n1-1; i++) for (j=1; j<=n1-1; j++)   v01[i][j] = v11[i][j];
```

```
 a=c=s1;  b=-(2*(s1+s2) - h1*h1*s3);
 e[1]=0; for (j=1; j<=n1-2; j++)  e[j+1]=-c/(a*e[j]+b);
 for (i=1; i<=n1-1; i++)
     {for (j=1; j<=n1-1; j++) d[j]=h1*h1*s4*ff[i][j] -s2*(v11[i-1][j]+v11[i+1][j])
         +(s5/4)*(v12[i+1][j+1]+ v12[i-1][j-1] - v12[i-1][j+1] - v12[i+1][j-1])
         + (h1/2)*(s6*(v12[i+1][j] - v12[i-1][j]) + s7*(v13[i][j+1] - v13[i][j-1])
         + s8*(v13[i+1][j] - v13[i-1][j]));
         q[1]=0;  for (j=1; j<=n1-2; j++) q[j+1]=(d[j]-a*q[j])/(a*e[j]+b);

         v11[i][n1-1]=(d[n1-1]-a*q[n1-1])/(a*e[n1-1]+b);
         for (j=n1-2; j>=1; j--) v11[i][j]=e[j+1]*v11[i][j+1]+q[j+1];};

         // Factorizaciis methodis dasasruli
  maxf = 0;

 for (i=1; i<=n1-1; i++) for (j=1; j<=n1-1; j++)
 if ((fabs(v11[i][j]-v01[i][j]))>maxf) maxf = (fabs(v11[i][j]-v01[i][j]));
 return maxf;
}

double f1(double y, double x)
{
double  pi=3.14159265358979;
return (0.4*( -2*(1-x*x)-6*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + x*(1-y*y)));
//1.
/*return (0.4*(-2*(1-x*x)-6*(1-y*y) + 8*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
          - 0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y)));  */    // 2.
//  return (-2.4*(1-y*y)-0.8*(1-x*x) + 3.2*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y));    // 3.
// return (0);   // 9.
}

double f2(double y, double x)
{
double  pi=3.14159265358979;
 return (0.4*(-6*(1-x*x) -2*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) +y*(1-x*x)));
//1.
/* return (0.4*(-6*(1-x*x)-2*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
- 0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)));  */  // 2.
// return (-0.8*(1-y*y)-2.4*(1-x*x) + 3.2*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y));  // 3
 // return (0);  // 9.
}
```

```
 double f3(double y, double x)
  {
 double  pi=3.14159265358979;
  return (0.4*( -2*(1-x*x)-2*(1-y*y)- 0.08*(1-x*x)*(1-y*y)-x*(1-y*y)-y*(1-x*x)));
//1.
 //return  (0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x) - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)));//2.
 // return (0);    // 3. 9.  }



  // Variaciuli methodi, Ertoblivi, Dinamika
  //Factorizaciis methodi, Iteracia
    #include <stdio.h>
    #include <iostream.h>
   #include <math.h>
    #include <conio.h>

   double f1 (double, double, double);
   double f2 (double, double, double);
   double f3 (double, double, double);
  double fi01 (double, double);
  double fi02 (double, double);
  double fi03 (double,double);
  double fi11 (double, double);
  double fi12 (double, double);
   double fi13 (double, double);

   double fib1(double);
   double fib2(double);

 const int m=60;

   double simps_2(double (*)(double, double, double),double [][m],double, int,
int,int,int);
   double simps_21(double [][m], double [][m], int ,int , int );

   double baz (int , double [][m], double [][m], double [][m],
    double [][m], double [][m], double [][m],double [], double [],double [],
    double , double , double , double , double , double , double , double ,
     double ,double  );

    int m1, m2;
    double sig, sig0 ,sig1, sig2, sig3, iung, eps;
```

```
        void main (void)
{
   FILE *pf;
   pf=fopen("ppvar1.txt","w+");

  int k,s, i, j,  n ,l, it, it1,  ni,nm, kd;
  double   eps1, tau, max, max2, max3, td ;
  double uu1[m][m], uu2[m][m], uu3[m][m], u1[m][m], u2[m][m], u3[m][m],
     u01[m][m], u02[m][m], u03[m][m],u11[m][m],u12[m][m],  u13[m][m],
     w01[m][m], w02[m][m], w03[m][m], w11[m][m], w12[m][m], w13[m][m];
   double a11,a12,a13,a4,a15,a16,a17,a18, a21,a22,a23,a25,a26,a27,a28,
            a31,a32,a33,a35,a36,a37,a38, aa1, aa0;

     double sig, sig0, eps, iung, hi;
     double f01[m][m], f02[m][m], f03[m][m],f01i[m][m], f02i[m][m], f03i[m][m],
     f01i1[m][m], f02i1[m][m], f03i1[m][m],fib[m][m],ab[m],bb[m],cb[m],a[m],b[m];
      double s11,s12,s13,s14,s5,s16,s17,s18, s21,s22,s23,s24,s26,s27,s28,
                 s31,s32,s33,s34,s36,s37,s38;

     clrscr();
     cout<<"n="; cin>>n; cout<<"ni="; cin>>ni;
     cout<<"td="; cin>>td; cout<<"l="; cin>>l;
     cout<<"sig="; cin>>sig;   cout<<"eps="; cin>>eps;
     cout<<"iung="; cin>>iung; cout<<"eps1="; cin>>eps1;
    // cout<<"m1="; cin>>m1;   cout<<"m2="; cin>>m2;

   hi=(double)2/(2*ni);     tau=(double)td/l;     nm = (n>=ni)? n : ni ;

    sig0 = iung/(2*(1 + sig));    sig1 = 2*(1 - sig)/(1 - 2*sig);
    sig2 = 1/(1 - 2*sig);    sig3 = (3 -2* sig)/(1 - 2*sig);

  a11=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig); a12=-tau*tau*sig0/2;
a13=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
    a4=1; a15=tau*tau*sig0/(2*(1-2*sig)); a16=0; a17=-tau*tau*sig0*eps*(3-
2*sig)/(2*(1-2*sig));    a18=0;

          a21=-tau*tau*sig0/2; a22=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig);
a23=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
          a25=tau*tau*sig0/(2*(1-2*sig)); a26=0; a27=0; a28=-tau*tau*sig0*eps*(3-
2*sig)/(2*(1-2*sig));
```

```
          a31=-tau*tau*sig0/2; a32=-tau*tau*sig0/2;
a33=1+2*tau*tau*sig0*eps*eps/(1-2*sig);
 a35=0; a36=a37=tau*tau*sig0*eps*(3-2*sig)/(2*(1-2*sig)); a38=0;
    aa1=1; aa0=0;
    s11=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig); s12=-tau*tau*sig0/2;
s14=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
    s5=1; s13=2*tau*tau*sig0/(1-2*sig); s16=0; s17=-tau*tau*sig0*eps*(3-
2*sig)/(2*(1-2*sig));
    s18=0;

          s21=-tau*tau*sig0/2; s22=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig);
s24=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
          s23=2*tau*tau*sig0/(1-2*sig); s26=0; s27=0; s28=-tau*tau*sig0*eps*(3-
2*sig)/(2*(1-2*sig));

          s31=-tau*tau*sig0/2; s32=-tau*tau*sig0/2; s34=1+2*tau*tau*sig0*eps*eps/(1-
2*sig);
          s33=0; s36=s37=tau*tau*sig0*eps*(3-2*sig)/(2*(1-2*sig)); s38=0;

     for (k=0; k<=2*nm+2+2; k++) for (s=0; s<=2*nm+2+2; s++)  { u01[k][s]=0;
    u11[k][s]=0; u02[k][s]=0; u12[k][s]=0; u03[k][s]=0; u13[k][s]=0; u1[k][s]=0;
    u2[k][s]=0;  u3[k][s]=0; w01[k][s]=0; w02[k][s]=0; w03[k][s]=0; w11[k][s]=0;
         w12[k][s]=0; w13[k][s]=0; uu1[k][s]=0; uu2[k][s]=0; uu3[k][s]=0;};

     ab[1]=ab[2]=bb[1]=bb[2]=cb[1]=cb[2]= 0;
     for (s=3; s<=n+2+2; s++){
     ab[s]=(double)1/sqrt(2*(2*s-3)); bb[s]=(double)1/((2*s-3)*sqrt((2*s-5)*(2*s-1)));
     cb[s]=(double)2/((2*s-5)*(2*s-1)); }

    for(j=0; j<=2*ni; j++){fib[1][j]=fib1(-1+j*hi); fib[2][j]=fib2(-1+j*hi);}
     for(i=3; i<=n; i++){ for (j=0; j<=2*ni; j++)
       fib[i][j]=((double)sqrt(4*i*i-1)/(i+1))*(-1+j*hi)*fib[i-1][j]
          -((double)(i-2)/(i+1))*sqrt((double)(2*i+1)/(2*i-3))*fib[i-2][j]; }

            // u()-s mocema   t0 da t1 droshi

  for (i=0; i<=2*ni; i++) for (j=0; j<=2*ni; j++){ u01[i][j] = fi01(-1+i*hi, -1+j*hi);
             u02[i][j] = fi02(-1+i*hi, -1+j*hi); u03[i][j] = fi03(-1+i*hi, -1+j*hi);};
          for (i=0; i<=2*ni; i++) for(j=0; j<=2*ni; j++) {
      u11[i][j]= u01[i][j]+ tau*fi11(-1+i*hi,-1+j*hi)
           + (tau*tau/2)*f1(-1+i*hi, -1+j*hi, 0) - ((a11/(hi*hi))* (u01[i-1][j]-2*u01[i][j]
+u01[i+1][j])
     +  (a12/(hi*hi))*(u01[i][j+1]-2*u01[i][j] +u01[i][j-1])+ (a13-1)* u01[i][j]
```

```
-(a15/(4*hi*hi))*(u02[i+1][j+1]+ u02[i-1][j-1] - u02[i-1][j+1] - u02[i+1][j-1])
      - (1/(2*hi))* a17*(u03[i+1][j] - u03[i-1][j]));

    u12[i][j]= u02[i][j] + tau*fi12(-1+i*hi, -1+j*hi)
    + (tau*tau/2)*f2(-1+i*hi, -1+j*hi, 0) - ((a21/(hi*hi))* (u02[i-1][j]-2*u02[i][j]
+u02[i+1][j])
   + (a22/(hi*hi))*(u02[i][j+1]-2*u02[i][j]+u02[i][j-1])  + (a23-1) * u02[i][j]
   -(a25/(4*hi*hi))*(u01[i+1][j+1]+ u01[i-1][j-1] - u01[i-1][j+1] - u01[i+1][j-1])
       - (1/(2*hi))* a28*(u03[i][j+1] - u03[i][j-1]));

    u13[i][j]= u03[i][j] + tau*fi13(-1+i*hi, -1+j*hi)
      + (tau*tau/2)*f3(-1+i*hi,-1+j*hi, 0)-((a31/(hi*hi))* (u03[i-1][j]-2*u03[i][j]
+u03[i+1][j])
    + (a32/(hi*hi))*(u03[i][j+1]-2*u03[i][j]+u03[i][j-1]) + (a33-1) * u03[i][j]
    - (1/(2*hi))* a37*((u02[i+1][j] - u02[i-1][j]) + (u01[i][j+1] - u01[i][j-1])));};

      // t- droshi datvla (Dinamikis Dasackisi)

  for (kd=1; kd<=l-1; kd++) {
  for (k=1; k<=n; k++)for (s=1; s<=n; s++) {
  f01i[k][s]= simps_2(f1,fib,tau,kd, k,s,ni);
  f02i[k][s]= simps_2(f2,fib,tau,kd, k,s,ni);
  f03i[k][s]= simps_2(f3,fib,tau,kd, k,s,ni);

  f01i1[k][s]= simps_21(u11,fib, k,s,ni);
  f02i1[k][s]= simps_21(u12,fib, k,s,ni);
  f03i1[k][s]= simps_21(u13,fib, k,s,ni);
    }

 // gare iteraciis dasackisi
  it=0; do { it++;
     max =  baz (n,  w01,  w11,  w12,  w13, f01i1, f01i, ab, bb, cb,
  s11, s12, s13, s14, s5, s16, s17, s18, aa1, aa0) ;
     max2 = baz (n,  w02,  w12,  w11,  w13, f02i1, f02i, ab, bb, cb,
  s21, s22, s23, s24, s5,  s26, s27, s28 , aa1, aa0) ;
     max3 = baz (n,  w03,  w13,  w12,  w11, f03i1, f03i, ab, bb, cb,
  s31, s32, s33, s34, s5,  s36, s37, s38 , aa1, aa0) ;
  if (max2 > max) max = max2;
  if (max3 > max) max = max3;
  } while (max >=eps1);

 for(i=0; i<=2*ni; i++) for (j=0; j<=2*ni; j++){ uu1[i][j]=0; uu2[i][j]=0;
uu3[i][j]=0;
```

```
   for (k=3; k<=n+2+2; k++) for (s=3; s<=n+2+2; s++)
   {uu1[i][j]= uu1[i][j]+w11[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j];
   uu2[i][j]= uu2[i][j]+w12[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j];
   uu3[i][j]= uu3[i][j]+w13[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j]; } }

        for (i=0; i<=2*ni; i++) for (j=0; j<=2*ni; j++)  { u1[i][j] = 2* uu1[i][j]
        - u01[i][j]; u2[i][j] = 2* uu2[i][j] - u02[i][j] ; u3[i][j] = 2* uu3[i][j]-
u03[i][j];};

    it1=0; do { it1++;
    max =  baz (n,  w01,  w11,  w12,  w13, f01i1, f01i, ab, bb, cb,
     s11, s12, s13, s14, s5, s16, s17, s18, aa0, aa1) ;
        max2 = baz (n,  w02,  w12,  w11,  w13, f02i1, f02i, ab, bb, cb,
     s21, s22, s23, s24, s5,  s26, s27, s28 , aa0, aa1) ;
        max3 = baz (n,  w03,  w13,  w12,  w11, f03i1, f03i, ab, bb, cb,
     s31, s32, s33, s34, s5,  s36, s37, s38 , aa0, aa1) ;

        if (max2 > max) max = max2;
        if (max3 > max) max = max3;
        } while (max >=eps1);

   for(i=0; i<=2*ni; i++) for (j=0; j<=2*ni; j++) { uu1[i][j]=0; uu2[i][j]=0;
uu3[i][j]=0;

  for (k=3; k<=n+2+2; k++) for (s=3; s<=n+2+2; s++)
   {uu1[i][j]= uu1[i][j]+w11[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j];
   uu2[i][j]= uu2[i][j]+w12[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j];
   uu3[i][j]= uu3[i][j]+w13[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j]; }
 }

        for (i=0; i<=2*ni; i++) for(j=0; j<=2*ni; j++) { u1[i][j] = u1[i][j]+
tau*tau*uu1[i][j];
        u2[i][j] =u2[i][j] + tau*tau* uu2[i][j] ; u3[i][j] =u3[i][j] + tau*tau*uu3[i][j];};

        if (it1 > it) it = it1;
    // gare iteraciis dasasruli

    if (kd+1==l/2 ||kd+1==(3*l/4))  {
    fprintf (pf,"(t=%d) \n\n ",kd+1);
   fprintf(pf,"  (%g, %g) (%g, %g)  (%g, %g) (%g, %g) (%g, %g)  \n\n ",
      -1+2*ni/4*hi, -1+2*ni/4*hi, -1+3*2*ni/4*hi, -1+3*2*ni/4*hi,-1+2*ni/4*hi, -
1+3*2*ni/4*hi,  -1+3*2*ni/4*hi,-1+2*ni/4*hi, -1+2*ni/2*hi, -1+2*ni/2*hi);
```

```
        fprintf(pf,"  %lf %lf %lf%lf %lf ", u1[2*ni/4][2*ni/4], u1[3*2*ni/4][3*2*ni/4],
u1[2*ni/4][3*2*ni/4],    u1[3*2*ni/4][2*ni/4], u1[2*ni/2][2*ni/2]);
        fprintf (pf,"  \n\n");

      fprintf(pf,"  %lf %lf%lf%lf% lf ",u2[2*ni/4][2*ni/4], u2[3*2*ni/4][3*2*ni/4],
u2[2*ni/4][3*2*ni/4],      u2[3*2*ni/4][2*ni/4], u2[2*ni/2][2*ni/2]);
        fprintf (pf,"  \n\n");

      fprintf(pf,"  %lf %lf %lf %lf %lf ",u3[2*ni/4][2*ni/4], u3[3*2*ni/4][3*2*ni/4],
u3[2*ni/4][3*2*ni/4],    u3[3*2*ni/4][2*ni/4], u3[2*ni/2][2*ni/2]);
        fprintf (pf,"  \n\n\n");  }

     for (i=0; i<=2*ni; i++)for (j=1; j<=2*ni; j++){u01[i][j]=u11[i][j];
u02[i][j]=u12[i][j];
      u03[i][j]=u13[i][j]; u11[i][j]= u1[i][j]; u12[i][j]= u2[i][j]; u13[i][j]= u3[i][j];};
    };  //Dinamikis dasasruli

       fprintf (pf,"iteraciis erti maximaluri nomeri= %d \n ",it);
   }

// Funkciebi

     double baz (int n1, double v01[][m], double v11[][m], double v12[][m],
    double v13[][m], double ff1[][m], double ff[][m],double ab0[], double
bb0[],double cb0[],
    double s1, double s2, double s3, double s4, double ss5, double s6, double s7,
double s8,    double ss1, double ss0 )
  {
    int k,s,i, j ;
    double maxf, a[m], b[m], c[m], fr[m], e[m], d[m];
  for (k=0; k<=n1+4; k++) for (s=0; s<=n1+4; s++)      v01[k][s] = v11[k][s];
   //  for (k=3; k<=n1+2; k++) for (s=3; s<=n1+2; s++)
   // {a[s-1]=bb[s-1]*(s1 -s4*cb[k];) b[s]=s4*cb[k]*cb[s]-s2*cb[k]-s1*cb[s];}
         // e[1]=0; for (j=1; j<=n1-2; j++)  e[j+1]=-c/(a*e[j]+b);
          for (k=3; k<=n1+2; k++)
          {for (s=3; s<=n1+2; s++){a[s-1]=bb0[s-1]*(s1 - s4*cb0[k]);
         b[s]=s4*cb0[k]*cb0[s]-s2*cb0[k]-s1*cb0[s];

     fr[s-2]=ss5*(ss1*ff1[k-2][s-2]+ss0*ff[k-2][s-2])- s2*(bb0[k-1]*v11[k-2][s] +
bb0[k+1]*v11[k+2][s])
     - s4*( bb0[k-1]*(bb0[s-1]*v11[k-2][s-2]- cb0[s]*v11[k-2][s] + bb0[s+1]*v11[k-
2][s+2])
```

```
     + bb0[k+1]*(bb0[s-1]*v11[k+2][s-2]- cb0[s]*v11[k+2][s] +
bb0[s+1]*v11[k+2][s+2]) )
     + s3*4*ab0[k]*ab0[s]*(ab0[k-1]*ab0[s-1]*v12[k-1][s-1]+
ab0[k+1]*ab0[s+1]*v12[k+1][s+1]
     - ab0[k-1]*ab0[s+1]*v12[k-1][s+1]- ab0[k+1]*ab0[s-1]*v12[k+1][s-1])
     + s6*( 2*ab0[s-1]*ab0[s]*( bb0[k-1]*v12[k-2][s-1]- cb0[k]*v12[k][s-1]
     + bb0[k+1]*v12[k+2][s-1] )
     + 2*ab0[s]*ab0[s+1]*( -bb0[k-1]*v12[k-2][s+1]+ cb0[k]*v12[k][s+1]
     - bb0[k+1]*v12[k+2][s+1]) )
     + s7*( 2*ab0[k-1]*ab0[k]*( bb0[s-1]*v13[k-1][s-2]- cb0[s]*v13[k-1][s]
     + bb0[s+1]*v13[k-1][s+2] )
     + 2*ab0[k+1]*ab0[k]*( -bb0[s-1]*v13[k+1][s-2]+ cb0[s]*v13[k+1][s]
     - bb0[s+1]*v13[k+1][s+2]) )
     + s8*( 2*ab0[s-1]*ab0[s]*( bb0[k-1]*v13[k-2][s-1]- cb0[k]*v13[k][s-1]
     + bb0[k+1]*v13[k+2][s-1] )
     + 2*ab0[s]*ab0[s+1]*( - bb0[k-1]*v13[k-2][s+1]+ cb0[k]*v13[k][s+1]
      - bb0[k+1]*v13[k+2][s+1]) ) ;}
      a[n1+2]=bb0[n1+2]*(s1 - s4*cb0[k]);
      a[n1+3]=bb0[n1+3]*(s1 - s4*cb0[k]);
      e[1]=e[2]=0;
      for (s=3; s<=n1+2; s++){  c[s]=b[s] + a[s-1]*e[s-2]; e[s]=- a[s+1]/c[s];
           d[s]=(fr[s-2]-a[s-1]*d[s-2])/c[s]; }

       v11[k][n1+2]=d[n1+2]; v11[k][n1+1]=d[n1+1];
            for (s=n1; s>=3; s--) v11[k][s]=e[s]*v11[k][s+2]+d[s];};
            //Factorizaciis methodis dasasruli
             maxf = 0;
            for (k=1; k<=n1+4; k++) for (s=1; s<=n1+4; s++)
            if ((fabs(v11[k][s]-v01[k][s]))>maxf) maxf = (fabs(v11[k][s]-v01[k][s]));
            return maxf;
            }
     double simps_2(double(*f)(double, double, double),double fib[][m],
                  double tau1, int kd1,int p,int q, int ns)

//  Simpsonis Methodi, Kubaturuli
 {
   double hs,si; int i,j;
     hs= (double)2/(2*ns);
     si=0;
     for (i=0; i<ns; i++) for (j=0; j<ns; j++)
        si=si + ( ( (f)(-1+2*i*hs,-1+2*j*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i]*fib[q][2*j]
         + (f)(-1+(2*i+2)*hs,-1+2*j*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j]
        + (f)(-1+(2*i+2)*hs,-1+(2*j+2)*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j+2]
```

```
        + (f)(-1+2*i*hs,-1+(2*j+2)*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i]*fib[q][2*j+2])
        +4*((f)(-1+(2*i+1)*hs,-1+2*j*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j]
        + (f)(-1+(2*i+2)*hs,-1+(2*j+1)*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j+1]
        + (f)(-1+(2*i+1)*hs,-1+(2*j+2)*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j+2]
        + (f)(-1+2*i*hs,-1+(2*j+1)*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i]*fib[q][2*j+1] )
       +16*(f)(-1+(2*i+1)*hs,-1+(2*j+1)*hs, 0+kd1*tau1)*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j+1]
) ;
       si=(hs*hs/9)*si;
    return (si);
     }
      double simps_21(double r11[][m], double fib[][m], int p,int q, int ns)

//  Simpsonis Methodi, Kubaturuli
{
    double hs1, si1; int i,j;
     hs1= (double)2/(2*ns);
     si1=0;
     for (i=0; i<ns; i++) for (j=0; j<ns; j++)
        si1=si1 + ( ( r11[2*i][2*j]*fib[p][2*i]*fib[q][2*j]
         + r11[2*i+2][2*j]*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j]
        + r11[2*i+2][2*j+2]*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j+2]
        + r11[2*i][2*j+2]*fib[p][2*i]*fib[q][2*j+2])
        +4*(r11[2*i+1][2*j]*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j]
        + r11[2*i+2][2*j+1]*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j+1]
        + r11[2*i+1][2*j+2]*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j+2]
        + r11[2*i][2*j+1]*fib[p][2*i]*fib[q][2*j+1] )
      +16*r11[2*i+1][2*j+1]*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j+1] ) ;
       si1=(hs1*hs1/9)*si1;

    return (si1);
     }
      double fib1(double x)
     {
      double r;
   r = (sqrt(6)/4)*(x*x-1);
  return (r);
     }
     double fib2(double x)
     {
      double w;
   w = (sqrt(10)/4)*x*(x*x-1);
  return (w);
     }
```

```
double f1(double x, double y, double t)
      {
  double  pi=3.14159265358979;
 /* double uu1;
  uu1= sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y);
  return (-m1*m1*pi*pi*uu1 - sig0*(-sig1*m2*m2*pi*pi*uu1 - m2*m2*pi*pi*uu1
  -eps*eps*uu1 + sig2*m2*m2*pi*pi*sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y)
  + eps*sig3*m2*pi*sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y))); */ // 9.

      /* return  (0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + x*(1-
y*y)));  */
 // return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
        //        + x*(1-y*y)));        // 3.
  // return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
   //  -0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y)));     // 6.
      // return  (-(1+t*t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
  //   -0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));     // 7.
         return  (-(1+t*t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
            + x*(1-y*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));        // 5.
             }

double f2(double x, double y, double t)
{
   double  pi=3.14159265358979;
 /* double uu1;
  uu1= sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y);
  return (-m1*m1*pi*pi*uu1 - sig0*(-m2*m2*pi*pi*uu1 - sig1*m2*m2*pi*pi*uu1
  -eps*eps*uu1 + sig2*m2*m2*pi*pi*sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y)
  + eps*sig3*m2*pi*sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y))); */ // 9.
      /* return   (0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + y*(1-
x*x))); */
  // return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
              //      + y*(1-x*x)));      // 3.
     // return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
              //    -0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)));       // 6.
   //  return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
              //    -0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));       // 7.
         return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y)  + y*(1-x*x)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));       // 5.
      }
```

```
double f3(double x, double y, double t)
{
  double  pi=3.14159265358979;
 /*  double uu1;
  uu1= sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y);
   return (-m1*m1*pi*pi*uu1 - sig0*(-2*m2*m2*pi*pi*uu1
  -4*eps*eps*sig2*uu1
  - eps*sig3*m2*pi*(sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y)
  + sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y)))); */ // 9.
      /* return  (0.4*(-2*(1-y*y)-2*(1-x*x)- 0.08*(1-x*x)*(1-y*y)- x*(1-y*y)-y*(1-
x*x))); */
  // return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x)  -0.08*(1-x*x)*(1-y*y)
         //        - y*(1-x*x)-x*(1-y*y)));     // 3.
   // return  (-(1+t)*0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x)
         //           - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)));      // 6.
  //   return  (-(1+t*t)*0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x)
          //          - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)) + 2*sin(pi*y)*sin(pi*x));      // 7.
       return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x)  -0.08*(1-x*x)*(1-y*y)
                     - y*(1-x*x)-x*(1-y*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));     // 5.
  }

      double fi01(double x, double y)
{
  return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 5. 6. 7. 8.
 //  return (0);    //9.
 }

      double fi02(double x, double y)
      {
  return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 5. 6. 7. 8.
 //  return (0);    //9.
       }

     double fi03(double x, double y)
      {
       double  pi=3.14159265358979;
 //return (sin(pi*y)*sin(pi*x));   // 6. 7.
       return ((1-x*x)*(1-y*y));    // 3. 5. 8.
      // return (0);   // 9.
 }
```

```
double fi11(double  x, double y)
          {
    double  pi=3.14159265358979;
   // return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 6. 8.
           return (0);   // 5. 7.
   //  return (m1*pi*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y));   //9 .
    }
         double fi12 (double x, double y)
         {
  double  pi=3.14159265358979;
   // return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 6. 8.
           return (0);       // 5. 7.
   //  return (m1*pi*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y));   //9 .
   }
        double fi13 (double x, double y)
   {
  double  pi=3.14159265358979;
    // return ((1-x*x)*(1-y*y));    // 3. 8.
   // return (sin(pi*y)*sin(pi*x));   // 6.
     return (0);      // 5. 7.
   // return (m1*pi*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y));   //9 .
   }



   // Variaciuli methodi, Ertoblivi, Statika
  // Factorizaciis methodi, Iteracia

  #include <stdio.h>
  #include <iostream.h>
  #include <math.h>
  #include <conio.h>

 double f1(double,double);
  double f2(double,double);
  double f3(double,double);
  double fib1(double);
  double fib2(double);

const int m=80;

double simps_2(double (*)(double, double),double [][m],int,int,int);
 double baz (int, double[][m] ,  double[][m] ,  double[][m] ,
```

```
double[][m], double[][m] ,double [], double [],double [],
 double, double, double, double, double, double, double, double);

 void main(void){
  clrscr ();

  FILE *pf2;
  pf2=fopen("ppvrstd1.txt","w+");

 int i, j,it, k,s, n,ni,l;
double sig,sig0, eps, iung, eps1, h,hi,tau,td, max, max2, max3,nm;
   double u1[m][m], u2[m][m], u3[m][m],
   u01[m][m],u11[m][m], u02[m][m], u12[m][m], u03[m][m], u13[m][m],
              f01[m][m], f02[m][m], f03[m][m],f01i[m][m], f02i[m][m], f03i[m][m],
   fib[m][m],ab[m],bb[m],cb[m],a[m],b[m],f5i[m][m],f4i[m][m];
         double s11,s12,s13,s14,s5,s16,s17,s18, s21,s22,s23,s24,s26,s27,s28,
              s31,s32,s33,s34,s36,s37,s38;

  clrscr();
   cout<<"n="; cin>>n; cout<<"ni="; cin>>ni;
  //cout<<"td="; cin>>td; cout<<"l="; cin>>l;
    cout<<"sig="; cin>>sig;   cout<<"eps="; cin>>eps;
  cout<<"iung="; cin>>iung; cout<<"eps1="; cin>>eps1;
  hi=(double)2/(2*ni);
  nm = (n>=ni)? n : ni ;

 s11= 2*(1-sig)/(1-2*sig); s12=1; s14=-eps*eps; s5=2*(1+sig)/iung;
 s13=-1/(1-2*sig); s16=0; s17=eps*(3-2*sig)/(1-2*sig); s18=0;

 s21=1; s22=2*(1-sig)/(1-2*sig); s24=-eps*eps;
 s23=-1/(1-2*sig); s26=0; s27=0;  s28=eps*(3-2*sig)/(1-2*sig);

  s31=1; s32=1; s34=-4*eps*eps/(1-2*sig);
   s33=0; s36=s37=-eps*(3-2*sig)/(1-2*sig); s38=0;

 for (k=0; k<=2*nm+2+2; k++) for (s=0; s<=2*nm+2+2; s++)  { u01[k][s]=0;
 u11[k][s]=0; u02[k][s]=0; u12[k][s]=0; u03[k][s]=0; u13[k][s]=0; u1[k][s]=0;
 u2[k][s]=0;  u3[k][s]=0; };

  ab[1]=ab[2]=bb[1]=bb[2]=cb[1]=cb[2]= 0;
  for (s=3; s<=n+2+2; s++){
  ab[s]=(double)1/sqrt(2*(2*s-3)); bb[s]=(double)1/((2*s-3)*sqrt((2*s-5)*(2*s-1)));
  cb[s]=(double)2/((2*s-5)*(2*s-1)); }
```

```
for(j=0; j<=2*ni; j++){fib[1][j]=fib1(-1+j*hi); fib[2][j]=fib2(-1+j*hi);}
for(i=3; i<=n; i++){ for (j=0; j<=2*ni; j++)
  fib[i][j]=((double)sqrt(4*i*i-1)/(i+1))*(-1+j*hi)*fib[i-1][j]
      -((double)(i-2)/(i+1))*sqrt((double)(2*i+1)/(2*i-3))*fib[i-2][j]; }

for (k=1; k<=n; k++)for (s=1; s<=n; s++) {
f01i[k][s]= simps_2(f1,fib,k,s,ni);
f02i[k][s]= simps_2(f2,fib,k,s,ni);
f03i[k][s]= simps_2(f3,fib,k,s,ni);
 }

      // Gare iteraciis dasackisi
      it=0;
      do { it=it++;
      max = baz (n, u01, u11, u12, u13, f01i, ab, bb, cb, s11, s12, s13, s14, s5, s16,
s17, s18);
      max2 = baz (n, u02, u12, u11, u13, f02i, ab, bb, cb, s21, s22, s23, s24, s5,  s26,
s27, s28);
      max3 = baz (n, u03, u13, u12, u11, f03i, ab, bb, cb, s31, s32, s33, s34, s5,  s36,
s37, s38);
      if (max2 > max) max = max2;
      if (max3 > max) max = max3;
      } while (max >=eps1);

  for(i=0; i<=2*ni; i++) for (j=0; j<=2*ni; j++){ u1[i][j]=0; u2[i][j]=0;  u3[i][j]=0;
  for (k=3; k<=n+2+2; k++) for (s=3; s<=n+2+2; s++)
  {u1[i][j]= u1[i][j]+u11[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j];
  u2[i][j]= u2[i][j]+u12[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j];
  u3[i][j]= u3[i][j]+u13[k][s]*fib[k-2][i]*fib[s-2][j]; } }

 fprintf (pf2," (    u1,    u2,    u3     )   \n\n");

 fprintf(pf2,"   (%d,%d)(%g,%g) (%g,%g) (%g,%g)  (%g,%g) (%g,%g)   (%d,%d)
\n\n ", -1,-1,
    -1+(double)ni/2*hi, -1+(double)ni/2*hi, -1+(double)ni/2*hi, -
1+3*(double)ni/2*hi,-1+(double)3*ni/2*hi,-1+(double)ni/2*hi,
      -1+(double)3*ni/2*hi, -1+(double)3*ni/2*hi ,-1+(double)ni/1*hi,-
1+(double)ni/1*hi,1, 1);

 fprintf(pf2,"  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf ",u1[0][0], u1[ni/2][ni/2],
  u1[ni/2][3*ni/2],u1[3*ni/2][ni/2], u1[3*ni/2][3*ni/2],u1[ni][ni],u1[2*ni][2*ni]);
  fprintf (pf2,"  \n\n");
```

```
   fprintf(pf2,"  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf ",u2[0][0], u2[ni/2][ni/2],
   u2[ni/2][3*ni/2],u2[3*ni/2][ni/2], u2[3*ni/2][3*ni/2],u2[ni][ni],u2[2*ni][2*ni]);
   fprintf (pf2,"  \n\n");

 fprintf(pf2,"  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf  %lf ",u3[0][0], u3[ni/2][ni/2],
   u3[ni/2][3*ni/2],  u3[3*ni/2][ni/2], u3[3*ni/2][3*ni/2],u3[ni][ni],
      u3[2*ni][2*ni]);
    fprintf (pf2," \n\n\n",max);

  fprintf (pf2,"Iteraciis nomeri= %d \n",it);
  fprintf (pf2," max= %lf \n",max);
   }

        //Funkciebi

        double baz (int n1, double v01[][m], double v11[][m], double v12[][m],
   double v13[][m], double ff[][m],double ab0[], double bb0[],double cb0[],
   double s1, double s2, double s3, double s4, double ss5, double s6, double s7,
double s8 )
        {
           //Factorizaciis methodi da shida iteracia

         int k,s,i, j ;
         double maxf, a[m], b[m], c[m], fr[m], e[m], d[m];

         for (k=0; k<=n1+4; k++) for (s=0; s<=n1+4; s++)
                          v01[k][s] = v11[k][s];

         for (k=3; k<=n1+2; k++)
         {for (s=3; s<=n1+2; s++){a[s-1]=bb0[s-1]*(s1 - s4*cb0[k]);
        b[s]=s4*cb0[k]*cb0[s]-s2*cb0[k]-s1*cb0[s];

    fr[s-2]=ss5*ff[k-2][s-2]- s2*(bb0[k-1]*v11[k-2][s] + bb0[k+1]*v11[k+2][s])
    - s4*( bb0[k-1]*(bb0[s-1]*v11[k-2][s-2]- cb0[s]*v11[k-2][s] + bb0[s+1]*v11[k-
2][s+2])
    + bb0[k+1]*(bb0[s-1]*v11[k+2][s-2]- cb0[s]*v11[k+2][s] +
bb0[s+1]*v11[k+2][s+2]) )
    + s3*4*ab0[k]*ab0[s]*(ab0[k-1]*ab0[s-1]*v12[k-1][s-1]+
ab0[k+1]*ab0[s+1]*v12[k+1][s+1]
    - ab0[k-1]*ab0[s+1]*v12[k-1][s+1]- ab0[k+1]*ab0[s-1]*v12[k+1][s-1])
    + s6*( 2*ab0[s-1]*ab0[s]*( bb0[k-1]*v12[k-2][s-1]- cb0[k]*v12[k][s-1]
    + bb0[k+1]*v12[k+2][s-1] )
    + 2*ab0[s]*ab0[s+1]*( -bb0[k-1]*v12[k-2][s+1]+ cb0[k]*v12[k][s+1]
```

```
- bb0[k+1]*v12[k+2][s+1]) )
+ s7*( 2*ab0[k-1]*ab0[k]*( bb0[s-1]*v13[k-1][s-2]- cb0[s]*v13[k-1][s]
+ bb0[s+1]*v13[k-1][s+2] )
+ 2*ab0[k+1]*ab0[k]*( -bb0[s-1]*v13[k+1][s-2]+ cb0[s]*v13[k+1][s]
- bb0[s+1]*v13[k+1][s+2]) )
+ s8*( 2*ab0[s-1]*ab0[s]*( bb0[k-1]*v13[k-2][s-1]- cb0[k]*v13[k][s-1]
+ bb0[k+1]*v13[k+2][s-1] )
+ 2*ab0[s]*ab0[s+1]*( - bb0[k-1]*v13[k-2][s+1]+ cb0[k]*v13[k][s+1]
 - bb0[k+1]*v13[k+2][s+1]) ) ;}
 a[n1+2]=bb0[n1+2]*(s1 - s4*cb0[k]);
 a[n1+3]=bb0[n1+3]*(s1 - s4*cb0[k]);
 e[1]=e[2]=0;

 for (s=3; s<=n1+2; s++){  c[s]=b[s] + a[s-1]*e[s-2]; e[s]=- a[s+1]/c[s];
     d[s]=(fr[s-2]-a[s-1]*d[s-2])/c[s]; }

  v11[k][n1+2]=d[n1+2]; v11[k][n1+1]=d[n1+1];
      for (s=n1; s>=3; s--) v11[k][s]=e[s]*v11[k][s+2]+d[s];};
      // Factorizaciis metodis dasasruli

     maxf = 0;
      for (k=1; k<=n1+4; k++) for (s=1; s<=n1+4; s++)
      if ((fabs(v11[k][s]-v01[k][s]))>maxf) maxf = (fabs(v11[k][s]-v01[k][s]));
      return maxf;
      }

      double f1(double x, double y)
     {
      double  pi=3.14159265358979;
   return (0.4*( -2*(1-x*x)-6*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + x*(1-
y*y)));//1,
        /* return (0.4*(-2*(1-x*x)-6*(1-y*y) + 8*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y)-
0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y)));   */   // 2.
   /*   return (0.4*(-2*(1-x*x)-6*(1-y*y) + 8*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y) -
0.5*5*pi*cos(5*pi*x)*sin(5*pi*y)));*/  // 5.
   //  return (-2.4*(1-y*y)-0.8*(1-x*x) + 3.2*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y));  // 3.
  //  return (0.4*( -2*(1-x*x)-6*(1-y*y)  - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y) ));//4
     }

      double f2(double x, double y)
     {
       double  pi=3.14159265358979;
```

```
   return (0.4*(-6*(1-x*x) -2*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) +y*(1-
x*x)));//1.
        /*  return (0.4*(-6*(1-x*x)-2*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) -
0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)));  */  // 2.
   /*  return (0.4*(-6*(1-x*x)-2*(1-y*y) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)  -
0.5*5*pi*cos(5*pi*y)*sin(5*pi*x)));  */  // 5.
    // return (-0.8*(1-y*y)-2.4*(1-x*x) + 3.2*y*x - 0.01*(1-x*x)*(1-y*y));  // 3.
  //  return (0.4* 8*y*x);   //4.
   }

        double f3(double x, double y)
        {
        double  pi=3.14159265358979;
  return (0.4*( -2*(1-x*x)-2*(1-y*y)- 0.08*(1-x*x)*(1-y*y)-x*(1-y*y)-y*(1-
x*x)));//1.
// return  (0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x) - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)));  //2.
  /*   return  (0.4*(( -2*25*pi*pi - 0.08)*sin(5*pi*y)*sin(5*pi*x) - x*(1-y*y)-y*(1-
x*x))); */ // 5.
  //  return (-0.4* x*(1-y*y));    // 4.
        }

   double fib1(double x)
    {
     double r;
  r = (sqrt(6)/4)*(x*x-1);
  return (r);
    }

    double fib2(double x)
    {
     double w;
  w = (sqrt(10)/4)*x*(x*x-1);
  return (w);
    }

   double simps_2(double(*f)(double, double),double fib[][m],int p,int q, int ns)
{
   //  Simpsonis Methodi, Kubaturuli

   double hs,si; int i,j;
    hs= (double)2/(2*ns);
     si=0;
```

```
 for (i=0; i<ns; i++) for (j=0; j<ns; j++)
  si=si + ( ( (f)(-1+2*i*hs,-1+2*j*hs)*fib[p][2*i]*fib[q][2*j]
   + (f)(-1+(2*i+2)*hs,-1+2*j*hs)*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j]
  + (f)(-1+(2*i+2)*hs,-1+(2*j+2)*hs)*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j+2]
  + (f)(-1+2*i*hs,-1+(2*j+2)*hs)*fib[p][2*i]*fib[q][2*j+2])
  +4*((f)(-1+(2*i+1)*hs,-1+2*j*hs)*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j]
  + (f)(-1+(2*i+2)*hs,-1+(2*j+1)*hs)*fib[p][2*i+2]*fib[q][2*j+1]
  + (f)(-1+(2*i+1)*hs,-1+(2*j+2)*hs)*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j+2]
  + (f)(-1+2*i*hs,-1+(2*j+1)*hs)*fib[p][2*i]*fib[q][2*j+1] )
+16*(f)(-1+(2*i+1)*hs,-1+(2*j+1)*hs)*fib[p][2*i+1]*fib[q][2*j+1] ) ;
 si=(hs*hs/9)*si;
return (si);
}
```

```
// Sxvaobiani metodi, Ertoblivi, Dinamika
//Factorizaciis methodi, Iteracia

   #include <stdio.h>
   #include <iostream.h>
   #include <math.h>
    #include <conio.h>

  double f1 (double, double, double);
  double f2 (double, double, double);
  double f3 (double, double, double);
  double fi01 (double, double);
  double fi02 (double, double);
  double fi03 (double,double);
  double fi11 (double, double);
  double fi12 (double, double);
  double fi13 (double, double);

  const int m=90;

 double baz (int, int, double, double, double[][m], double[][m], double[][m],
double[][m],  double[][m], double (*)(double ,double ,double ) ,  double ,
      double , double , double , double , double , double, double ,double, double);
```

```
 int m1, m2;
 double sig, sig0 ,sig1, sig2, sig3, iung, eps;

 void main (void)
{
 FILE *pf;
 pf=fopen("pdsxklk7.txt","w+");

 int k, i, j, p, p1, n ,l;      double   eps1, h, tau, max, max2, max3,  td ;
 double  u1[m][m], u2[m][m], u3[m][m],u01[m][m], u02[m][m],
u03[m][m],u11[m][m],u12[m][m],
 u13[m][m], w01[m][m], w02[m][m], w03[m][m], w11[m][m], w12[m][m],
w13[m][m];
 double a11,a12,a13,a4,a15,a16,a17,a18, a21,a22,a23,a25,a26,a27,a28,
     a31,a32,a33,a35,a36,a37,a38, aa1, aa0;
    clrscr();
 cout<<"n="; cin>>n; cout<<"td="; cin>>td; cout<<"l="; cin>>l;  cout<<"sig=";
cin>>sig;
 cout<<"eps="; cin>>eps; cout<<"iung="; cin>>iung; cout<<"eps1="; cin>>eps1;
 cout<<"m1="; cin>>m1;
 cout<<"m2="; cin>>m2;

 tau=(double)td/l;          h=(double)2/n;
 sig0 = iung/(2*(1 + sig));    sig1 = 2*(1 - sig)/(1 - 2*sig);
 sig2 = 1/(1 - 2*sig);    sig3 = (3 -2* sig)/(1 - 2*sig);

 a11=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig); a12=-tau*tau*sig0/2;
a13=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
 a4=1; a15=tau*tau*sig0/(2*(1-2*sig)); a16=0; a17=-tau*tau*sig0*eps*(3-
2*sig)/(2*(1-2*sig));
 a18=0;

 a21=-tau*tau*sig0/2; a22=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig);
a23=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
    a25=tau*tau*sig0/(2*(1-2*sig)); a26=0; a27=0; a28=-tau*tau*sig0*eps*(3-
2*sig)/(2*(1-2*sig));

 a31=-tau*tau*sig0/2; a32=-tau*tau*sig0/2; a33=1+2*tau*tau*sig0*eps*eps/(1-
2*sig);
 a35=0; a36=a37=tau*tau*sig0*eps*(3-2*sig)/(2*(1-2*sig)); a38=0;
 aa1=1; aa0=0;
 for (i=0; i<=n; i++) for (j=0; j<=n; j++)  { u1[i][j]=0;  u2[i][j]=0;  u3[i][j]=0;};
```

```
        for (i=0; i<=n; i++) for(j=0; j<=n; j++){w01[i][j]=0; w02[i][j]=0; w03[i][j]=0;
w11[i][j]=0;
   w12[i][j]=0; w13[i][j]=0;};

          // u()-s datvla   t0 da t1 droshi
        for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++){ u01[i][j] = fi01(-1+i*h, -1+j*h);
          u02[i][j] = fi02(-1+i*h, -1+j*h); u03[i][j] = fi03(-1+i*h, -1+j*h);};

        for (i=1; i<=n-1; i++) for(j=1; j<=n-1; j++){u11[i][j]= u01[i][j]+ tau*fi11(-
1+i*h,-1+j*h)
         + (tau*tau/2)*f1(0, -1+i*h, -1+j*h) - ((a11/(h*h))*(u01[i][j+1]-2*u01[i][j]
+u01[i][j-1])  +  (a12/(h*h))*(u01[i-1][j]-2*u01[i][j] +u01[i+1][j])  + (a13-1) *
u01[i][j] -(a15/(4*h*h))*(u02[i+1][j+1]+ u02[i-1][j-1] - u02[i-1][j+1] - u02[i+1][j-1])
         - (1/(2*h))* a17*(u03[i][j+1] - u03[i][j-1]));

  u12[i][j]= u02[i][j] + tau*fi12(-1+i*h, -1+j*h)
          + (tau*tau/2)*f2(0,-1+i*h, -1+j*h) - ((a21/(h*h))*(u02[i][j+1]-
2*u02[i][j]+u02[i][j-1])
     + (a22/(h*h))*(u02[i-1][j]-2*u02[i][j] +u02[i+1][j])  + (a23-1) * u02[i][j]
     -(a25/(4*h*h))*(u01[i+1][j+1]+ u01[i-1][j-1] - u01[i-1][j+1] - u01[i+1][j-1])
          - (1/(2*h))* a28*(u03[i+1][j] - u03[i-1][j]));

   u13[i][j]= u03[i][j] + tau*fi13(-1+i*h, -1+j*h)
           + (tau*tau/2)*f3(0, -1+i*h,-1+j*h)-((a31/(h*h))*(u03[i][j+1]-
2*u03[i][j]+u03[i][j-1])
      + (a32/(h*h))*(u03[i-1][j]-2*u03[i][j] +u03[i+1][j])   + (a33-1) * u03[i][j]
      - (1/(2*h))* a37*((u01[i][j+1] - u01[i][j-1]) + (u02[i+1][j] - u02[i-1][j])));};

         / / t- droshi datvla (Dinamikis Dasackisi)
         for (k=1; k<=l-1; k++) {
        // Gare iteraciis dasackisi
        p=0; do { p++;
        max =  baz (n, k, tau, h, w01,  w11,  w12,  w13,  u11, f1, a11, a12, a13, a4,
a15, a16,     a17, a18, aa1, aa0) ;
        max2 = baz (n, k, tau, h, w02,  w12,  w11,  w13,  u12, f2, a21, a22, a23, a4,
a25, a26,   a27, a28, aa1, aa0) ;
        max3 = baz (n, k, tau, h, w03,  w13,  w12,  w11,  u13, f3, a31, a32, a33, a4,
a35, a36,    a37, a38, aa1, aa0) ;

        if (max2 > max) max = max2;  if (max3 > max) max = max3;
        } while (max >=eps1);

        for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++)  { u1[i][j] = 2* w11[i][j]
```

```
        - u01[i][j]; u2[i][j] = 2* w12[i][j] - u02[i][j] ; u3[i][j] = 2* w13[i][j]-
u03[i][j];};

        p1=0; do { p1++;
        max =  baz (n, k, tau, h, w01,  w11,  w12,  w13, u11, f1,  a11, a12, a13, a4,
a15, a16,    a17, a18, aa0, aa1) ;
        max2 = baz (n, k, tau, h, w02,  w12,  w11,  w13, u12, f2,  a21, a22, a23, a4,
a25, a26,    a27, a28, aa0, aa1) ;
        max3 = baz (n, k, tau, h, w03,  w13,  w12,  w11, u13, f3,  a31, a32, a33, a4,
a35, a36,    a37, a38, aa0, aa1) ;

        if (max2 > max) max = max2;  if (max3 > max) max = max3;
        } while (max >=eps1);

        for (i=1; i<=n-1; i++) for(j=1; j<=n-1; j++) { u1[i][j] = u1[i][j]+
tau*tau*w11[i][j];
        u2[i][j] =u2[i][j] + tau*tau* w12[i][j] ; u3[i][j] =u3[i][j] + tau*tau*w13[i][j];};
        if (p1 > p) p = p1;
   // Gare iteraciis dassruli

     if (k+1==l/2 ||k+1==(3*l/4))  {
    fprintf (pf,"(t=%d) \n\n ",k+1);

 fprintf(pf,"  (%g, %g) (%g, %g)  (%g, %g) (%g, %g) (%g, %g)  \n\n ",
    -1+n/4*h, -1+n/4*h, -1+3*n/4*h, -1+3*n/4*h,-1+n/4*h, -1+3*n/4*h,-1+3*n/4*h,-
1+n/4*h,  -1+n/2*h, -1+n/2*h);

 fprintf(pf,"  %lf %lf %lf%lf %lf ", u1[n/4][n/4], u1[3*n/4][3*n/4], u1[n/4][3*n/4],
     u1[3*n/4][n/4], u1[n/2][n/2]);
     fprintf (pf,"  \n\n");

     fprintf(pf,"  %lf %lf%lf%lf% lf ", u2[n/4][n/4], u2[3*n/4][3*n/4], u2[n/4][3*n/4],
            u2[3*n/4][n/4], u2[n/2][n/2]);
     fprintf (pf,"  \n\n");

     fprintf(pf,"  %lf %lf %lf %lf %lf ", u3[n/4][n/4], u3[3*n/4][3*n/4],
u3[n/4][3*n/4],     u3[3*n/4][n/4], u3[n/2][n/2]);
     fprintf (pf,"  \n\n\n");  }

     for (i=1; i<=n-1; i++)for (j=1; j<=n-1; j++){u01[i][j]=u11[i][j];
u02[i][j]=u12[i][j];
      u03[i][j]=u13[i][j]; u11[i][j]= u1[i][j]; u12[i][j]= u2[i][j]; u13[i][j]= u3[i][j];};
     };
```

```
 // Dinamikis dasasruli
      fprintf (pf,"iteraciis erti maximaluri nomeri= %d \n ",p);
      }

                  // Funkciebi
      double baz(int n1,int k1, double tau1, double h1, double v01[][m], double
v11[][m],
       double v12[][m], double v13[][m], double uu[][m], double (*ff)(double ,
       double , double ), double s1, double s2, double s3, double s4, double s5,
       double s6, double s7, double s8, double ss1, double ss0 )
             {
               // Factorizaciis methodi da shiga iteracia
            int i, j ;
            double maxf, a,  b, c, d[m], e[m], q[m];

            for (i=1; i<=n1-1; i++) for (j=1; j<=n1-1; j++)
                             v01[i][j] = v11[i][j];
            a=c=s1;  b=-(2*(s1+s2) - h1*h1*s3);
            e[1]=0; for (j=1; j<=n1-2; j++)  e[j+1]=-c/(a*e[j]+b);

            for (i=1; i<=n1-1; i++)
            {for (j=1; j<=n1-1; j++) d[j]=ss1*h1*h1*s4*uu[i][j]+
ss0*h1*h1*s4*(ff)(0+k1*tau1,
      -1+i*h1 , -1+j*h1)-s2*(v11[i-1][j]+v11[i+1][j])+(s5/4)*(v12[i+1][j+1]+ v12[i-
1][j-1]  - v12[i-1][j+1] - v12[i+1][j-1]) + (h1/2)*(s6*(v12[i+1][j] - v12[i-1][j])
       + s7*(v13[i][j+1] - v13[i][j-1])  + s8*(v13[i+1][j] - v13[i-1][j]));

    q[1]=0;  for (j=1; j<=n1-2; j++) q[j+1]=(d[j]-a*q[j])/(a*e[j]+b);

            v11[i][n1-1]=(d[n1-1]-a*q[n1-1])/(a*e[n1-1]+b);
            for (j=n1-2; j>=1; j--) v11[i][j]=e[j+1]*v11[i][j+1]+q[j+1];};
          // Factorizaciis methodis dasasruli

    maxf = 0;
           for (i=1; i<=n1-1; i++) for (j=1; j<=n1-1; j++)
            if ((fabs(v11[i][j]-v01[i][j]))>maxf) maxf = (fabs(v11[i][j]-v01[i][j]));
             return maxf;
           }

            double f1(double t, double y, double x)
           {
     double  pi=3.14159265358979;
    double uu1;
```

```
    uu1= sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y);
    return (-m1*m1*pi*pi*uu1 - sig0*(-sig1*m2*m2*pi*pi*uu1 - m2*m2*pi*pi*uu1
    -eps*eps*uu1 + sig2*m2*m2*pi*pi*sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y)
    + eps*sig3*m2*pi*sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y)));  // 9.
    // return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x ));   // 8. eps=0
        /* return  (0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + x*(1-
y*y))); */
   // return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
          //       + x*(1-y*y)));        // 3.

    // return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
     //  -0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y)));     // 6.

         /* return  (-(1+t*t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y) */
    //   -0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));     // 7.

          /* return  (-(1+t*t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y) */
             //   + x*(1-y*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));       // 5.
 }

     double f2(double t, double y, double x)
         {
     double  pi=3.14159265358979;
    double uu1;
    uu1= sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y);
    return (-m1*m1*pi*pi*uu1 - sig0*(-m2*m2*pi*pi*uu1 - sig1*m2*m2*pi*pi*uu1
    -eps*eps*uu1 + sig2*m2*m2*pi*pi*sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y)
    + eps*sig3*m2*pi*sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y)));  // 9.
    // return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x ));   // 8.   eps=0
   /* return   (0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + y*(1-
x*x))); */
    // return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
                //      + y*(1-x*x)));     // 3.

    // return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
          //    -0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)));      // 6.
     //  return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)
          //    -0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));      // 7.
          /* return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y)         + y*(1-x*x)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));       */ 5.
      }
```

```
double f3(double t, double y, double x)
{
double  pi=3.14159265358979;
double uu1;
uu1= sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y);
return (-m1*m1*pi*pi*uu1 - sig0*(-2*m2*m2*pi*pi*uu1
-4*eps*eps*sig2*uu1
- eps*sig3*m2*pi*(sin(m1*pi*t)*cos(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y)
+ sin(m1*pi*t)*sin(m2*pi*x)*cos(m2*pi*y))));  // 9.
/* return  (0.4*(-2*(1-y*y)-2*(1-x*x)- 0.08*(1-x*x)*(1-y*y)- x*(1-y*y)-y*(1-
x*x))); */
// return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x)  -0.08*(1-x*x)*(1-y*y)
//          - y*(1-x*x)-x*(1-y*y)));     // 3.
// return  (-(1+t)*0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x)
//           - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)));      // 6.
//   return  (-(1+t*t)*0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x)
//          - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)) + 2*sin(pi*y)*sin(pi*x));      // 7.
// return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x)  -0.08*(1-x*x)*(1-y*y)
//      - y*(1-x*x)-x*(1-y*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));     // 5.
}

double fi01(double y,double x)
{
//return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 5. 6. 7. 8.
return (0);    //9.
}
double fi02(double y,double x)
{
//return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 5. 6. 7. 8.
return (0);    //9.
}

double fi03(double y, double x)
{
double  pi=3.14159265358979;
//return (sin(pi*y)*sin(pi*x));   // 6. 7.
// return ((1-x*x)*(1-y*y));    // 3. 5. 8.
return (0);   // 9.
}
```

```
  double fi11(double  y,double x)
 {
   double  pi=3.14159265358979;
  // return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 6. 8.
          // return (0);   // 5. 7.
    return (m1*pi*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y));   //9 .
   }

         double fi12 (double y,double x)
         {
 double  pi=3.14159265358979;
  // return ((1-x*x)*(1-y*y));   // 3. 6. 8.
         //  return (0);        // 5. 7.
    return (m1*pi*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y));   //9 .
  }

        double fi13 (double y,double x)
  {
 double  pi=3.14159265358979;
   // return ((1-x*x)*(1-y*y));    // 3. 8.
  // return (sin(pi*y)*sin(pi*x));   // 6.
  //  return (0);       // 5. 7.
   return (m1*pi*sin(m2*pi*x)*sin(m2*pi*y));   //9 .
  }




 // Sxvaobiani methodi, Dinamika, Gaxlechili
//Factorizaciis methodi, Iteracia

 #include <stdio.h>
 #include <iostream.h>
 #include <math.h>
 #include <conio.h>

 double f1 (double, double, double);
 double f2 (double, double, double);
 double f3 (double, double, double);
 double fi01 (double, double);
 double fi02 (double, double);
 double fi03 (double,double);
```

```
  double fi11 (double, double);
   double fi12 (double, double);
  double fi13 (double, double);

 const int m=26;

double baz (int, int, double, double[][m] , double[][m] , double[][m] , double[][m] ,
    double[][m][m] ,  double , double , double , double , double );

   void main(void)
{
     FILE *pf;
     pf=fopen("pdsxkk6.txt","w+");

   int k, i, j, p, p0, p1, p2, n ,l;
   double sig, eps, iung, eps1, h, tau, max, max2, max3, sig0, td ;
  double  u11[m][m][m], u12[m][m][m],  u13[m][m][m], f01[m][m][m],
f02[m][m][m],    f03[m][m][m], w01[m][m], w02[m][m], w03[m][m],
  w11[m][m], w12[m][m], w13[m][m];
   double a11,a12,a13,a4,a15,a16,a17,a18, a21,a22,a23,a25,a26,a27,a28,
          a31,a32,a33,a35,a36,a37,a38;
          clrscr();
   cout<<"n="; cin>>n; cout<<"td="; cin>>td; cout<<"l="; cin>>l;  cout<<"sig=";
cin>>sig;
   cout<<"eps="; cin>>eps;       cout<<"iung="; cin>>iung; cout<<"eps1=";
cin>>eps1;

  tau=(double)td/l;  h=(double)2/n;      sig0 = iung/(2*(1 + sig));

  a11=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig); a12=-tau*tau*sig0/2;
a13=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
    a4=1; a15=tau*tau*sig0/(2*(1-2*sig)); a16=0;
    a17=-tau*tau*sig0*eps*(3-2*sig)/(2*(1-2*sig)); a18=0;

 a21=-tau*tau*sig0/2; a22=-tau*tau*sig0*(1-sig)/(1-2*sig);
a23=1+tau*tau*sig0*eps*eps/2;
 a25=tau*tau*sig0/(2*(1-2*sig)); a26=0; a27=0;
    a28=-tau*tau*sig0*eps*(3-2*sig)/(2*(1-2*sig));

  a31=-tau*tau*sig0/2; a32=-tau*tau*sig0/2; a33=1+2*tau*tau*sig0*eps*eps/(1-
2*sig);
  a35=0; a36=a37=tau*tau*sig0*eps*(3-2*sig)/(2*(1-2*sig)); a38=0;
```

```
     for (k=0; k<=l; k++)     for (i=0; i<=n; i++) for (j=0; j<=n; j++)  {
u11[k][i][j]=0;     u12[k][i][j]=0;  u13[k][i][j]=0;};
     for (i=0; i<=n; i++) for (j=0; j<=n; j++){ w01[i][j]=0; w02[i][j]=0;
w03[i][j]=0;     w11[i][j]=0;  w12[i][j]=0; w13[i][j]=0;};

     for (k=0; k<=l; k++) for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++) {f01[k][i][j]
  =f1 ( 0+k*tau, -1+i*h, -1+j*h);  f02[k][i][j] = f2 ( 0+k*tau, -1+i*h, -1+j*h );
  f03[k][i][j] = f3(0+k*tau, -1+i*h, -1+j*h);};


      //u()-s datvla   t0 da t1 droshi
     for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++){ u11[0][i][j] = fi01(-1+i*h, -
1+j*h);
     u12[0][i][j] = fi02(-1+i*h, -1+j*h); u13[0][i][j] = fi03(-1+i*h, -1+j*h);};

     for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++){ u11[1][i][j]= u11[0][i][j] +
  tau*fi11(-1+i*h, -1+j*h)   + (tau*tau/2)*f01[0][i][j] - ((a11/(h*h))*(u11[0][i][j+1]
  -2*u11[0][i][j] +u11[0][i][j-1]) +  (a12/(h*h))*(u11[0][i-1][j]-2*u11[0][i][j]
  +u11[0][i+1][j]) + (a13-1) * u11[0][i][j] -(a15/(4*h*h))*(u12[0][i+1][j+1]+
   u12[0][i-1][j-1] - u12[0][i-1][j+1] - u12[0][i+1][j-1])
     - (1/(2*h))* a17*(u13[0][i][j+1] - u13[0][i][j-1]));

      u12[1][i][j]= u12[0][i][j] + tau*fi12(-1+i*h, -1+j*h)
       + (tau*tau/2)*f02[0][i][j] - ((a21/(h*h))*(u12[0][i][j+1]-2*u12[0][i][j]
    +u12[0][i][j-1]) +  (a22/(h*h))*(u12[0][i-1][j]-2*u12[0][i][j] +u12[0][i+1][j])
     + (a23-1) * u12[0][i][j] -(a25/(4*h*h))*(u11[0][i+1][j+1]+ u11[0][i-1][j-1]
   - u11[0][i-1][j+1] - u11[0][i+1][j-1])
   - (1/(2*h))* a28*(u13[0][i+1][j] - u13[0][i-1][j]));

      u13[1][i][j]= u13[0][i][j] + tau*fi13(-1+i*h, -1+j*h)
       + (tau*tau/2)*f03[0][i][j] - ((a31/(h*h))*(u13[0][i][j+1]-2*u13[0][i][j]
    +u13[0][i][j-1]) + (a32/(h*h))*(u13[0][i-1][j]-2*u13[0][i][j] +u13[0][i+1][j])
     + (a33-1) * u13[0][i][j]  - (1/(2*h))* a37*((u11[0][i][j+1] - u11[0][i][j-1])
   + (u12[0][i+1][j] - u12[0][i-1][j])));};

  // t- droshi datvla (Dinamikis dasackisi)
     for (k=1; k<=l-1; k++) {
  //Gare iteraciis dasackisi
  for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++) {f01[k][i][j]= f01[k][i][j]
       -(sig0*eps*(3-2*sig)/((1-2*sig)*2*h))*(u13[k][i][j+1] - u13[k][i][j-1]);
     f02[k][i][j] = f02[k][i][j]-(sig0*eps*(3-2*sig)/((1-
2*sig)*2*h))*(u13[k][i+1][j]  - u13[k][i-1][j]);
      f03[k][i][j] = f03[k][i][j]+(sig0*eps*(3-2*sig)/((1-2*sig)*2*h))
```

```
          *((u11[k][i][j+1] - u11[k][i][j-1]) + (u12[k][i+1][j] - u12[k][i-1][j]));};

         p=0; do { p++;
         max =  baz (n, k, h, w01,  w11,  w12,  w13,  u11,  a11, a12, a13, a4, a15) ;
         max2 =  baz (n, k, h, w02,  w12,  w11,  w13,  u12,  a21, a22, a23, a4, a25) ;
         if (max2 > max) max = max2;
         } while (max >=eps1);

         p0=0; do { p0++;
         max3 =  baz (n, k, h, w03,  w13,  w12,  w11,  u13,  a31, a32, a33, a4, a35) ;
         } while (max3 >=eps1);

         for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++)  { u11[k+1][i][j] = 2* w11[i][j]
         - u11[k-1][i][j] ;  u12[k+1][i][j] = 2* w12[i][j] - u12[k-1][i][j] ;
         u13[k+1][i][j] = 2* w13[i][j]  - u13[k-1][i][j] ;};

         p1=0; do { p1++;
         max =  baz (n, k, h, w01,  w11,  w12,  w13,  f01,  a11, a12, a13, a4, a15) ;
         max2 =  baz (n, k, h, w02,  w12,  w11,  w13, f02,  a21, a22, a23, a4, a25) ;
         if (max2 > max) max = max2;
         } while (max >=eps1);

         p2=0; do { p2++;
         max3 =  baz (n, k, h, w03,  w13,  w12,  w11, f03,  a31, a32, a33, a4, a35) ;
         } while (max3 >=eps1);

         for (i=1; i<=n-1; i++) for (j=1; j<=n-1; j++)  { u11[k+1][i][j] = u11[k+1][i][j]
      + tau*tau* w11[i][j];
         u12[k+1][i][j] =u12[k+1][i][j] + tau*tau* w12[i][j] ; u13[k+1][i][j]
=u13[k+1][i][j]
      + tau*tau*w13[i][j];};

         if (p0 > p) p = p0;  if (p2 > p1) p1 = p2;       if (p1 > p) p = p1;
      if (max3 > max) max = max3;
      };    // Gare iteraciis dasasruli
            // Dinamikis dasasruli

       fprintf (pf,"(t=%g) \n\n ",0.25);
      fprintf(pf,"  (%g, %g) (%g, %g)  (%g, %g) (%g, %g) (%g, %g)  \n\n ",
      -1+n/4*h, -1+n/4*h, -1+3*n/4*h, -1+3*n/4*h,-1+n/4*h, -1+3*n/4*h,-1+3*n/4*h,
      -1+n/4*h,  -1+n/2*h, -1+n/2*h);
      fprintf(pf,"  %lf %lf %lf%lf %lf ", u11[l/4][n/4][n/4], u11[l/4][3*n/4][3*n/4],
       u11[l/4][n/4][3*n/4],  u11[l/4][3*n/4][n/4], u11[l/4][n/2][n/2]);
```

```
    fprintf (pf,"  \n\n");

  fprintf(pf,"  %lf %lf%lf%lf% lf ", u12[l/4][n/4][n/4], u12[l/4][3*n/4][3*n/4],
   u12[l/4][n/4][3*n/4], u12[l/4][3*n/4][n/4], u12[l/4][n/2][n/2]);
    fprintf (pf,"  \n\n");

  fprintf(pf,"  %lf %lf %lf %lf %lf ", u13[l/4][n/4][n/4], u13[l/4][3*n/4][3*n/4],
   u13[l/4][n/4][3*n/4], u13[l/4][3*n/4][n/4], u13[n/2][n/2]);
    fprintf (pf,"  \n\n\n");

   fprintf (pf,"(t=%g) \n\n ",0.5);
   fprintf(pf,"  (%g, %g) (%g, %g)  (%g, %g) (%g, %g) (%g, %g)  \n\n ",
   -1+n/4*h, -1+n/4*h, -1+3*n/4*h, -1+3*n/4*h,-1+n/4*h, -1+3*n/4*h,-1+3*n/4*h,
   -1+n/4*h,          -1+n/2*h, -1+n/2*h);
  fprintf(pf,"  %lf %lf %lf%lf %lf ", u11[l/2][n/4][n/4], u11[l/2][3*n/4][3*n/4],
   u11[l/2][n/4][3*n/4],u11[l/2][3*n/4][n/4], u11[l/2][n/2][n/2]);
    fprintf (pf,"  \n\n");

 fprintf(pf,"  %lf %lf%lf%lf% lf ", u12[l/2][n/4][n/4], u12[l/2][3*n/4][3*n/4],
  u12[l/2][n/4][3*n/4], u12[l/2][3*n/4][n/4], u12[l/2][n/2][n/2]);
    fprintf (pf,"  \n\n");

 fprintf(pf,"  %lf %lf %lf %lf %lf ", u13[l/2][n/4][n/4], u13[l/2][3*n/4][3*n/4],
  u13[l/2][n/4][3*n/4], u13[l/2][3*n/4][n/4], u13[l/2][n/2][n/2]);
    fprintf (pf,"  \n\n\n");
    fprintf (pf,"iteraciis erti maximaluri nomeri= %d \n ",p);
    fprintf (pf,"h= %g \n ",h);
    fprintf (pf,"tau= %g \n ",tau);
    fprintf (pf,"max= %g \n ",max);
  }



 //Funkciebi

double baz (int n1,int k1, double h1, double v01[][m], double v11[][m],
  double v12[][m], double v13[][m], double ff[][m][m], double s1, double s2,
  double s3, double s4, double s5 )
        //Factorizaciis methodi da shida iteracia
{
    int i, j ;  double maxf, a,  b, c, d[m], e[m], q[m];

   for (i=1; i<=n1-1; i++) for (j=1; j<=n1-1; j++)     v01[i][j] = v11[i][j];
```

```
a=c=s1;  b=-(2*(s1+s2) - h1*h1*s3);
e[1]=0; for (j=1; j<=n1-2; j++) e[j+1]=-c/(a*e[j]+b);
for (i=1; i<=n1-1; i++)    {for (j=1; j<=n1-1; j++) d[j]=h1*h1*s4*ff[k1][i][j] -
s2*(v11[i-1][j]+v11[i+1][j])
+(s5/4)*(v12[i+1][j+1]+ v12[i-1][j-1] - v12[i-1][j+1] - v12[i+1][j-1]);
q[1]=0;  for (j=1; j<=n1-2; j++) q[j+1]=(d[j]-a*q[j])/(a*e[j]+b);
v11[i][n1-1]=(d[n1-1]-a*q[n1-1])/(a*e[n1-1]+b);
for (j=n1-2; j>=1; j--) v11[i][j]=e[j+1]*v11[i][j+1]+q[j+1];};
//Factorizaciis metodis dasasruli

maxf = 0;
for (i=1; i<=n1-1; i++) for (j=1; j<=n1-1; j++)
 if ((fabs(v11[i][j]-v01[i][j]))>maxf) maxf = (fabs(v11[i][j]-v01[i][j]));
   return maxf;
}

double f1(double t, double y, double x)
{
 double  pi=3.14159265358979;
   return  (-(1+t*t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.000001*(1-
x*x)*(1-y*y) +0.01* x*(1-y*y)) +2*(1-x*x)*(1-y*y)); // 3.
/* return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) -
0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))); */ // 6.
/*  return  (-(1+t)*0.4*( -6*(1-y*y)-2*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y))); */
// -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) -0.5*pi*cos(pi*x)*sin(pi*y))
 // + 2*(1-x*x)*(1-y*y));
         // -0.01*(1-x*x)*(1-y*y))  + 2*(1-x*x)*(1-y*y));
         // + 2*(1-x*x)*(1-y*y));
 /*  return  (-(1+t*t)*0.4*(-6*(1-y*y)-2*(1-x*x)  + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y) */
 // + x*(1-y*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));  // 5.
}

double f2(double t, double y, double x)
{
  double  pi=3.14159265358979;
/* return   (-0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) + y*(1-
x*x))); */
return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.000001*(1-x*x)*(1-y*y)
+0.01* y*(1-x*x)) +2*(1-x*x)*(1-y*y)); // 3.
/* return   (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y) -
0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x))); */ // 6.
```

```
      // return (-(1+t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-y*y)));
           /* return  (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y)   -0.5*pi*cos(pi*y)*sin(pi*x)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y)); */  // 7.
          /* return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-6*(1-x*x) + 8*y*x -0.01*(1-x*x)*(1-
y*y)      + y*(1-x*x)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y)); */  // 5.
 }

     double f3(double t, double y, double x)
          {
           double  pi=3.14159265358979;
    //  return  (-0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x)  - 0.08*(1-x*x)*(1-y*y)
     //       - x*(1-y*y)-y*(1-x*x)));
          return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x) -0.000008*(1-x*x)*(1-y*y)-
0.01*y*(1-x*x)-0.01*x*(1-y*y))+2*(1-x*x)*(1-y*y));     // 3.
   /* return  (-(1+t)*0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x) - x*(1-y*y)-y*(1-
x*x)));  */    // 6.
           //  return   (-(1+t)*0.4*( - y*(1-x*x)-x*(1-y*y)));
         //return  (-(1+t*t)*0.4*(( -2*pi*pi - 0.08)*sin(pi*y)*sin(pi*x)
        //- x*(1-y*y)-y*(1-x*x)) + 2*sin(pi*y)*sin(pi*x));    // 7.

      // return   (-(1+t*t)*0.4*( -2*(1-y*y)-2*(1-x*x)  -0.08*(1-x*x)*(1-y*y)
           //   - y*(1-x*x)-x*(1-y*y)) + 2*(1-x*x)*(1-y*y));   // 5.

         }
         double fi01(double y,double x)
         {
         return ((1-y*y)*(1-x*x));   // 3. 5. 7.
        // return (0);
         }
         double fi02(double y,double x)
         {
         return ((1-y*y)*(1-x*x));  // 3. 5. 7.
        // return (0);
         }
        double fi03(double y, double x)
         {
         double  pi=3.14159265358979;
        // return (sin(pi*y)*sin(pi*x));  // 6. 7.
         return ((1-y*y)*(1-x*x));  // 3. 5.
        // return (0);
         }
```

```
double fi11(double  y,double x)
        {
       //   return ((1-y*y)*(1-x*x));  //  6.
       return (0);    // 3. 5. 7.
       }

  double fi12 (double y,double x)
       {
      // return ((1-y*y)*(1-x*x));    // . 6.
       return (0);   // 3. 5. 7.
       }

 double fi13 (double y,double x)
       {
        double  pi=3.14159265358979;
         //  return (sin(pi*y)*sin(pi*x));  // 6.
       return (0);  // 3. 5.  7.
 }
```