Александр Майер

Разработка методов повышения надежности процесса эксплуатации вычислительных систем

Представлена на соискание
академической степени доктора

Грузинский Технический Университет
Тбилиси, 0175, Грузия,
Декабрь, 2008 г.

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ალექსანდრე მაიერის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „გამოთვლითი სისტემების ექსპლუატაციის პროცესის საიმედობის ამაღლების მეთოდების დამუშავება“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

დეკემბერი, 2008

ხელმძღვანელი:	/კ.კამკამიძე/
რეცენზენტი:	
რეცენზენტი:	
რეცენზენტი:	ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატი (დოქტორი), სრული (ასოც.) პროფესორი
ხარისხის უზრუნველყოფის სამსახურის უფროსი:	

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2008 წ.

ავტორი: მაიერ ალექსანდრე

დასახელება: გამოთვლითი სისტემების ექსპლუატაციის პროცესის საიმედობის ამაღლების მეთოდების დამუშავება

ფაკულტეტი : ინფორმატიკა და მართვის სისტემები

აკადემიური ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ავტორის ხელმოწერა

Резюме

Совокупность положений, выдвинутых и обоснованных в представленной диссертационной работе, является обобщением и решением важной научной проблемы имеющей теоретическое и прикладное значение. В работе осуществлено сравнение различных методов и средств повышения надежности и живучести вычислительных систем и систем передачи информации. Сделано заключение о том, что наиболее эффективным методом является структурное и временное резервирование, а также приведена классификация отказов вычислительных систем и систем передачи информации и обоснована возможность использования некоторых законов распределения вероятностей в качестве математических моделей внезапных и постепенных отказов. Показана высокая эффективность метода аппроксимации произвольных функций распределения эрланговскими смесями. Исследованы вопросы безошибочной передачи информации через ненадежный канал связи с учетом длительности помехи, имеющей распределение по закону Эрланга. Для исследований, результаты которых приведены в данной работе, была использована новая математическая модель канала связи, в которой учитывается длительность самоустраняющейся помехи, а время передачи сообщений, устранения причин отказа и длительности мешающего фактора, а также интервалы времени между возникающими отказами, распределены по произвольному закону или закону Эрланга. Исходя из свойств исследованной модели, рассмотрены модели, имеющие практическое применение. Рассмотрен эффективный метод определения коэффициента производительности для непрерывно и периодически контролируемых систем. Опираясь на результаты проведённых в работе исследований можно обоснованно формировать требования к надежности вычислительных систем и систем передачи информации, а также производить их оценку в соответствии с заданным режимом их использования и обслуживания, наилучшим образом выбрать временную диаграмму использования вычислительных систем и систем передачи информации, выбирать ряд характеристик системы контроля, а также вид и периодичность контроля, обеспечивающие заданные требования по вероятности выполнения средней полезной наработки за планируемое календарное время. Кроме того, результаты проведённых в работе исследований позволяют связать характеристики надежности вычислительных систем и систем

передачи информации с такой важной характеристикой как их производительность.

Большое внимание в работе уделяется определению следующих показателей надежности: вероятность безотказной работы, интенсивность отказов, средняя наработка между отказами; вероятность отказа в интервале времени от 0 до t, функция распределения времени безотказной работы, функция распределения времени для времени восстановления отказавшего элемента системы (устройства), интенсивность восстановления в зависимости от времени, уже прошедшего с момента начала восстановления.

Основными комплексными показателями надежности объектов вычислительных систем и систем передачи данных, которым было уделено особое значение в диссертационной работе, являются: функция готовности, коэффициент готовности, функция распределения времени простоя, коэффициент технического использования.

Представленные в диссертационной работе результаты являются следствием строгих математических рассуждений. В ходе проведённых исследований были применены методы теории случайных процессов, методы теории массового обслуживания, теории телетрафики, операционного исчисления, методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также функций комплексной переменной. Все рассмотренные в представленной диссертационной работе модели надежности характеризуются наименьшим ограничением на исходные случайные процессы, что является гарантией общности предлагаемых моделей и их адекватности с оригиналом. Все основные результаты, публикуемые в диссериационной работе, представляют научную новизну.

Abstract

The set of points set forth and substantiated in the presented thesis amounts to generalization and solution of an important scientific problem of a major theoretical and practical significance. The paper compares and contrasts a variety of methods aimed at enhancing reliability and vitality of computing information transfer systems. The conclusion is drawn that the most efficient method is that of structural and temporal reservation. The classification of computing systems and information transfer systems failures is also presented, as well as the possibility of employing some probability distribution laws for mathematical models of abrupt and gradual failures is corroborated. A high efficiency method of arbitrary distributive functions approximation by the Erlang mixtures is shown. The issues of error-free information transfer through the unreliable communication channel, which takes into consideration the duration of noise, have been investigated. A new mathematical model of the communication channel was employed for the research, the results of which are presented in the thesis. The model takes into account the duration of the self-correcting noise (interference, hindrance), while other parameters such as duration of message transfer, removal of the reason of failure and duration of hindrance, as well as time intervals between the emerged failures are distributed according to the arbitrary law or the Erlang law. Proceeding from the properties of the researched model, the models having practical application are considered. An efficient method of determining the productivity coefficient for continuously and periodically controlled systems is examined. Basing oneself on the results of the performed research one can form, with good reason, the requirements towards the reliability of the computing systems and information transfer systems, as well as estimate them in accordance to the set regime of their usage, make an optimal choice of temporal diagram of employing computing systems, choose a series of control system parameters, along with the type and period of control – the parameters that ensure the specified requirements as far as the probability of mean operating time performance over a set period of time. Apart from all said, the results of the performed research allow us to tie the computing systems' and information transfer systems' reliability parameters with such an important feature as their productivity.

Significant attention in the paper is devoted to the determination of the following characteristics of reliability: probability of running without failure, mean operating time between two consecutive failures, probability of failure in the time interval between 0 and *t,* distribution function of the running time without failures, distribution function for the

time necessary for restoration of the failed element of the system, restoration intensity as a function of time, already elapsed from the restoration starting moment.

The basic complex parameters of the reliability of the computing systems' and data transfer systems' objects, to which particular importance has been attached in the thesis, are: readiness function, readiness coefficient, downtime duration distribution function, technical usage coefficient.

The results presented in the thesis are the product of rigorous mathematical reasoning. In the course of conducted research the methods of the theory of random processes have been employed, as well as those of queuing theory, teletraffic theory, operational calculus, methods of solving differential and integral equations, as well as complex variable theory.

All of the reliability models presented in the thesis are characterized by the minimal constraints on the initial random processes, which amounts to the guarantee of the commonality of the models offered as well as of their adequacy with regard to the original. All the basis results that appear in the thesis, are scientifically novel.

Содержание

Благодарности

Хочу выразить свою искреннюю благодарность своему научному руководителю Константину Николаевичу Камкамидзе, а также всему коллективу Грузинского Технического Университета.

Введение

Актуальность диссертационной темы. В настоящее время прогресс в любой сфере деятельности человека трудно представить без использования коммуникационных систем. Они существенно изменили существующее общественные взаимоотношения, вследствие чего создается новое, информационное общество, которое обеспечивает эффективность коммуникаций и масштабный обмен информацией. Всё это напрямую связано с научно-техническим прогрессом, который вызвал существенные изменения в развитии общества. Научно-техническому прогрессу сопутствует глобализация систем, которая диктуется постоянным усложнением технических средств и технологических процессов, а также объединением объектов разной природы в единые системы. Применение автоматизированных систем территориального управления и распределенных вычислительных систем и сетей подразумевает широкое внедрение компьютерных и коммуникационных систем. В результате слияния вычислительной и коммуникационной техники стал возможным обмен информацией между удаленными на большие расстояния географическими пунктами. Наряду с развитием традиционных видов электронной связи (телефония, телеграфия, телевидение и т.д.) быстрыми темпами развиваются новые виды связи: электронная почта, справочная телекоммуникация, справочное вещание, мобильное телефонное обслуживание и т.д.

В процессе создания глобальных систем передачи данных возникли многие проблемы научно-технического характера. К их числу относится создание экономически оправданной и надежной аппаратуры передачи данных, имеющей высококачественные показатели.

Основной задачей произвольной сети передачи дискретной информации является доставка адресату определенного объема информации, с учетом необходимого качества и в регламентированное время. Естественно, что чем более ответственен и скоротечен процесс, тем более жесткие требования предъявляются к надежности. Поэтому при проектировании сетевых структур, одной из основных проблем является правильное, точное и полное определение тех параметров, на основе которых решаются задачи рационального выбора: сетевых ресурсов, управления потока данных, разработки стратегии резервирования и эксплуатации системы.

Исходя из выше изложенного, очевидна актуальность разрабатываемой темы диссертации.

Основная цель и задачи диссертации. Создание количественных методов анализа канала передачи данных, а именно, оценка тех показателей, которые непосредственно обуславливают эффективность системы в процессе ее эксплуатации.

Исходя из указанной цели, основными задачами работы являются:

1) создание и разработка математических моделей максимально приближенных к оригиналу;
2) выбор, обоснование и анализ показателей качества функционирования в процессе эксплуатации;
3) разработка теории создания высокопроизводительных, отказоустойчивых вычислительных и телекоммуникационных систем.

Объект исследования. Вычислительные системы и системы передачи данных

Научная новизна. Все основные результаты работы представляют научную новизну. В частности:

1) получено обобщенное выражение вероятности того, что сообщение будет передано за заданное время с учетом длительности мешающего фактора по ненадежному каналу передачи данных;
2) определена рациональная стратегия обслуживания системы передачи данных в процессе эксплуатации;
3) полученные в диссертации результаты позволяют: обосновано выбрать требования по надежности и производить их оценку в соответствии с заданными режимами использования.

На основе анализа результатов полученных в диссертации, с учетом объёма передаваемой информации и характеристик канала связи, стало возможным подобрать рациональную стратегию безошибочной передачи сообщений. А это обеспечивает как более эффективное использование канала связи в процессе эксплуатации, так и его наилучший выбор при проектировании.

Методы исследования. Методы теории случайных процессов, массового обслуживания, телетрафики, операционного исчисления, дифференциальных и интегральных уравнений функций комплексной переменной.

Практическая ценность. На основе анализа результатов, полученных в диссертации, с учётом объёма передаваемой информации и характеристик канала связи, возможно подобрать рациональную стратегию передачи собщений. Это обеспечивает как более эффективное использование канала связи в процессе эксплуатации, а также его наилучший выбор при проектировании.

Достоверность научных результатов и обоснование. Представленные в работе результаты являются следствием строгих математических рассуждений. На достоверность полученных в диссертации результатовуказывают те факты, что известные в литературе результаты представляют собой частные случаи результатов, полученных в данной диссертационной работе.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах:

1) Микадзе И.С., Майер А.А. Об одной модели передачи данных по каналам связи подверженным самоустраняющимся отказам. Georgian Engineering News, GIFD, Грузия, Тбилиси, 2008, №4
2) Микадзе И.С., Майер А.А. Коэффициент использования технических систем, подверженных отказам. Georgian Engineering News, GIFD, Грузия, Тбилиси, 2008, №4
3) Камкамидзе Е.К., Майер А.А., Микаишвили Н.В. Анализ возможности повышения производительности вычислительного кластера за счёт применения современных сетевых технологий. Georgian Engineering News, GIFD, Грузия, Тбилиси, 2006, №1

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, общего заключения и списка использованной литературы – 119 наименований. Общий объем диссертации составляет – 144 страницы.

Краткое содержание работы.

Первая глава посвящена сравнению различных методов и средств повышения надежности и живучести ВС. В главе делается заключение о том, что наиболее эффективным методом является структурное и временное резервирование, а также приводится классификация отказов ВС и обосновываются возможности использования некоторых законов распределения вероятностей в качестве математических моделей внезапных и постепенных отказов. Кроме того, показывается высокая эффективность метода аппроксимации произвольных функций распределения эрланговскими смесями.

Во второй главе исследуются вопросы безошибочной передачи информации через ненадежный канал связи с учетом длительности помехи, имеющей распределение по закону Эрланга. Для исследований используется новая математическая модель канала связи, в которой учитывается длительность самоустраняющейся помехи, а время передачи сообщений, устранения причин отказа и длительности мешающего фактора, и интервалы времени между отказами, распределены по произвольному закону или закону Эрланга. Исходя из свойств исследуемой модели, рассмотрены модели, имеющие практическое применение.

В третьей главе рассматривается эффективный метод определения коэффициента производительности для непрерывно и периодически контролируемых систем. Опираясь на результаты проведённых исследований можно обоснованно формировать требования к надежности и производить их оценку в соответствии с заданным режимом использования и обслуживания систем, наилучшим образом выбрать временную диаграмму использования

ВС, выбирать ряд характеристик системы контроля, а также вид и периодичность контроля, обеспечивающие заданные требования по вероятности выполнения средней полезной наработки за планируемое календарное время. Кроме того, результаты исследований позволяют связать характеристики надежности ВС с такой важной характеристикой как её производительность.

Глава 1.

Проблема обеспечения надежности и живучести технических систем

1.1. Надежность и эффективность

Современное развитие научно-технического прогресса осуществляется по следующим основным направлениям [105-112]:

1. Разработка принципиально новых высокоэффективных технических систем;
2. Создание крупных агрегатов и комбинированных или совмещенных производств с минимальными потерями сырья и энергии, обеспечивающих оптимальную материалоемкость продукции и соблюдение условий охраны окружающей среды;
3. Обеспечение надежности и безопасности, как отдельного оборудования, так и технологических схем производств в целом, которые позволяют уменьшить потенциальную возможность возникновения аварий и несчастных случаев, сократить безвозвратные потери сырьевых и топливно-энергетических ресурсов, а также предотвратить загрязнение окружающей среды;
4. Разработка и ввод эксплуатацию робототехнических средств и средств комплексной механизации трудоемких производственных процессов, автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП);
5. Повышение уровня производственно-технической квалификации обслуживающего персонала, а также технического обслуживания и ремонта оборудования.

Среди различных свойств, которые характеризуют качество функционирования ХТП (производительность, материалоемкость продукции, интенсивность работы оборудования, надежность и безопасность, и т.д.) одним из важнейших является надежность.

Надежность технических систем (ТС) тесно связана с ее способностью в течении определенного интервала времени непрерывно сохранять работоспособность, приспосабливаться к обнаружению и устранению причин, вызвавших отказы, и с ее способностью к длительной эксплуатации. Для ТС, представляющих собой ремонтируемые – восстанавливаемые в процессе эксплуатации объекты, для которых в течении заданного времени допускаются отказы и кратковременные перерывы в работе, важное значение имеет свойство готовности.

Надежная работа производств связана со значительными экономическими и материальными убытками, с возможностью возникновения аварий и несчастных случаев и может приводить к полной потере эффективности, ожидаемой от увеличения единичной мощности агрегатов.

В заключение этого параграфа укажем, что увеличение единичной мощности установок влечет за собой большие убытки из-за отказов оборудования.

Приведенные характеристики технологического состояния крупнотоннажных производств свидетельствуют о том, что эффективность сложных ТС в значительной степени определяется их надежностью. В связи с этим разработка способов обеспечения надежности, а также математических методов анализа и оптимизации характеристик надежности, сложных ТС на стадиях их проектирования, изготовления и эксплуатации имеют особую актуальность.

На стадии проектирования любой ТС обычно рассматривается несколько конкурирующих вариантов ее технологической схемы. При выборе оптимального варианта одним из важнейших сравниваемых параметров считаются показатели надежности технологической схемы. Не менее важной задачей при проектировании ТС является также и научно обоснованное определение требуемых показателей надежности ее технологического оборудования. Очевидно, что недостаточная надежность схемы в целом и ее элементов приводит к увеличению количества незапланированных остановок и уменьшает фактический годовой фонд рабочего времени.

1.2. Классификация отказов и показатели надежности технических систем

Отказы средств вычислительной техники (СВТ) можно классифицировать по следующим основным признакам [1-15]:

- по характеру изменения вероятности появления отказов – независимые и зависимые отказы;

- по возможности последующего использования ТС после возникновения отказа – полные и частичные отказы; устойчивые и самоустраняющиеся отказы; отказы периода пуска и приработки, периода нормальной эксплуатации; старения и износа оборудования; устранимые и неустранимые отказы.

Внезапные (катастрофические отказы) отдельных устройств ТС характеризуются тем свойством, что обычно отсутствуют видимые признаки их приближения. Это вид отказа возникает вследствие случайных процессов изменения неконтролируемого параметра, который носит случайный характер.

В отличие от внезапных отказов, постепенные отказы контролируются. Прогнозирование моментов возникновения постепенных отказов осуществляется на основе изменение конструкционного или технологического параметра, связанного с процессом износа и старения. В отличие от известных работ, где не рассматриваются "износовые" отказы, в данной работе этому виду отказа уделяется большое внимание.

Отказы ТС – это случайные события, которые могут быть зависимыми и независимыми. В данной работе отказы оборудования ТС приняты случайными и независимыми событиями, что справедливо [15,17,19,21,22,24,25,28,52,54].

В данной работе, при исследовании надежности ТС, также рассмотрены два вида отказов: полный и частичный. В процессе эксплуатации, при исследовании надежности, значение придается возможности восстановления отказавших устройств. Невосстанавливаемые объекты также рассмотрены, как частный случай.

Для исследования надежности оборудования и технологических систем ТС, а также для разработки научно обоснованных мероприятий по обеспечению их надежности, которые относятся к свойствам безотказности и ремонтопригодности. Поскольку отказы объектов представляют собой случайные события, для математического определения показателей надежности используют аппарат теории вероятностей. Таким образом, математическое определение показателя надежности объекта представлено в виде некоторого вероятностного соотношения. Многие приведенные показатели надежности являются параметрами распределения случайных величин.

В данной работе большое внимание уделено определению следующих показателей надежности: вероятность безотказной работы; интенсивность отказов, которая для катастрофических отказов принята постоянной величиной, а для параметрического отказа – зависящей от времени безотказной работы системы; средняя наработка между отказами; вероятность отказа в интервале времени от 0 до t; функция распределения времени (ФРВ) безотказной работы; (ФРВ) времени восстановления отказавшего устройства (элемента); интенсивность восстановления зависящего от времени, уже прошедшего с момента начала восстановления.

Основными комплексными показателями надежности объектов ТС, которым будет уделено особое значение в диссертационной работе, являются: функция готовности; коэффициент готовности; функция распределения времени простоя; коэффициент технического использования. Математическое определение этих основных комплексных показателей надежности, которые являются числовыми показателями надежности, являются целью данной диссертационной работы. Эти комплексные показатели определены в максимально приближенных к реально существующим объектам условиях. Этим рассмотренные в работе модели надежности элементов (устройств) резко отличаются от известных и рассмотренных в литературе моделей.

В свете вышеизложенного, для определения значений основных комплексных показателей надежности необходимо знать законы распределения случайных непрерывных величин, которыми являются наработка на отказ или время между отказами объекта, а также характеристики потоков случайных событий. Закон распределения времени между отказами и времени восстановления, позволяющий достаточно просто определить все основные показатели надежности, является важнейшей характеристикой.

Если катастрофические отказы в период нормальной эксплуатации ТС можно считать постоянной величиной и функции распределения времени между отказами можно считать экспоненциальными, относительно параметрического (износового, постепенного) отказа, такое допущение значительно ухудшает точность модели. Даже нормальный закон распределения времени между отказами не всегда соблюдается. Поэтому весьма актуальным становится вопрос аппроксимации произвольного закона распределения случайных величин (потока отказа и времени восстановления), в том числе нормального закона распределения, более подходящими законами с таким расчетом, чтобы получить возможность разрешимого аналитического описания системы, по крайней мере, полумарковскими процессами [27,30-31,34-48].

1.3. Методы аппроксимации произвольных законов распределения смесью экспоненциально распределенных этапов (фаз)

Функционирование технических систем, в том числе устройств автоматики и информационно-измерительной техники протекает в условиях действия одного или нескольких потоков "причинных импульсов". При этом состояния изменяются скачкообразно (мгновенно) в случайные моменты поступления в систему причинных импульсов может представлять собой: поток отказов (внезапных, постепенных сбоев) отдельных элементов или частей технического и функционального назначения; поток вмешательства от органов контроля, диагностики и управления, поток восстановлений и контрольных профилактик, поток информационных сигналов от датчиков технического процесса и т.д. Потоки причинных импульсов можно охарактеризовать распределением промежутков времени между последовательными моментами поступления. Наиболее простым потоком является Пуассоновский, для которого эти промежутки имеют экспоненциальное (показательное) распределение. Пуассоновский поток обладает рядом замечательных свойств, в том числе отсутствием последействия. Если в системе присутствуют только пуассоновские потоки, тогда возможно ее систематическое описание в рамках Марковских случайных процессов с дискретным состоянием и непрерывным временем (цепи Маркова), что позволяет получить явные выражения для основных вероятностных, в том числе надежных характеристик.

Это делает Пуассоновский поток (и экспоненциальное распределение) весьма привлекательным для исследователей. Кроме того, такой подход в некоторой степени считается традиционным. К сожалению, очень часто Пуассоновская модель потока принимается "волевым решением" без достаточного теоретического и экспериментального обоснования, что приводит к существенным ошибкам.

Для устройств автоматики и информационно-измерительной техники, в которых доля аналоговых элементов достаточно велика, существенным фактором является учет физико-статистической природы постепенных (параметрических) отказов [52,53]. Как указывалось раньше, внезапные отказы хорошо описываются пуассоновской моделью [52,63,66], но предположение пуассоновости потоков постепенных отказов нужно считать слишком грубым приближением, хотя для некоторых проектировочных расчетов такое приближение не исключается.

Переход к полумарковским моделям позволяет отказаться от Пуассоновской модели для всех потоков в системе. В принципе, можно сказать, что некоторая система "поддается" эффективному полумарковскому описанию, если в каждый момент времени в ней действует несколько независимых случайных потоков причинных импульсов, вызывающих изменение состояния системы, из которых все потоки кроме одного, являются пуассоновскими (Марковский случай, когда и этот поток является пуассоновским, конечно, тоже допускается), причем в момент поступления импульсов в пуассоновских потоках может происходить переключение только этих потоков (в эти моменты могут меняться число потоков и их характеристики и забываться все "прошлое"), а в моменты поступления импульсов в непуассоновском потоке – всех потоков в системе.

Поясним выше изложенное в терминах случайных величин и их распределений. Мы указывали выше, что потоки случайных импульсов можно охарактеризовать распределением случайных величин – промежутков времени между последовательными моментами поступления импульсов. Например, время безотказной работы элемента или устройства является такой случайной величиной. Можно говорить, что в любой момент времени в системе выполняется одна или несколько операций – реальные или фиктивные.

Реальные операции действительно выполняются и требуют определенных затрат работы. Такой является, например, операция восстановления отказавшего устройства. Фиктивные операции в действительности не существуют и вводятся в математическую модель системы для удобства ее построения и исследования. Одним из примеров фиктивной операции является "операция ожидания отказа устройства", окончание которой означает ее отказ (поступление в систему импульса отказа). Для удобства дальнейшего изложения мы будем называть ее операцией отказа. Распределение длительностей операций отказов дает вероятностное описание потоков отказов. То же самое можно говорить и о других потоках. Если длительность операции, как случайная величина, имеет экспоненциальное распределение, то будем ее называть экспоненциальной операцией. Аналогично, другие операции будем называть именем закона распределения длительности этой операции. Например, эрланговская операция, нормальная (гауссовская), детерминированная и т.д.

Теперь утверждение о возможности полумарковского описания технической системы с помощью введенных понятий можно изложить так: система "поддается" эффективному полумарковскому описанию, если одновременно выполняется не более одной неэкспоненциальной операции (реальной или фиктивной).

Вместе с тем, вряд ли можно рассчитывать на успех, если постараться выйти за рамки полумарковского описания технических систем для целей их анализа и проектирования. Поэтому в тех случаях, когда в системе одновременно выполняются две или более неэкспоненциальных операций, прежде всего, стараются аппроксимировать произвольные операции более простыми, с таким расчетом, чтобы сохранить возможность полумарковского описания системы. Другими словами это означает, что вместо произвольного распределения некоторой случайной величины (длительность операции), нужно рассматривать другое распределение, в некотором смысле близкое к исходному.

Для наших целей особенно важным считаем применение описанного подхода по отношению к описанию постепенных отказов, т.е. аппроксимации неэкспоненциальной функции (в большинстве случаев гауссовской) распределения времени безотказной работы устройства до параметрического отказа.

Основные аналитические результаты в рамках полумарковских моделей технических систем можно получить при аппроксимации произвольных операций такими, функции распределения длительностей которых имеют преобразование Лапласа (или Лапласа-Стилтьеса) в виде рациональных функций [19,32,34-46,48]

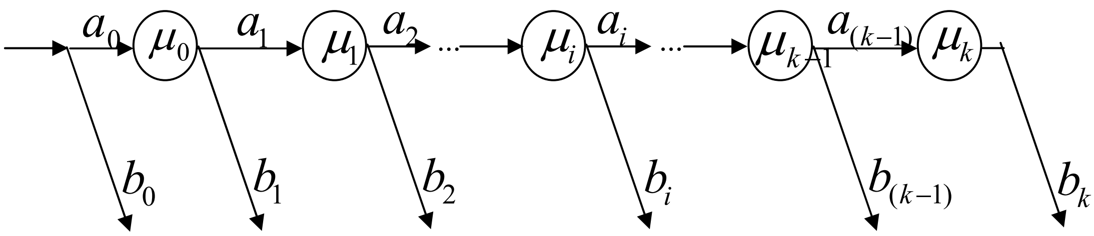
$$\overline{F}(s) = \frac{\overline{E}(s)}{\overline{B}(s)},$$

где $\overline{E}(s)$ и $\overline{B}(s)$ - соответственно полиномы степеней m и n ($n \geq m$).

Класс функций распределения, обладающих рациональным преобразованием Лапласа, достаточно широк и включает экспоненциальное распределение, распределение Эрланга, гиперэкспоненциальное распределение и др. [65,113].

Распределение Эрланга k-го порядка представляет собой k-кратную свертку экспоненциальных распределений со средним $\frac{1}{k}$ μ. Поэтому его можно интерпретировать как распределение операции, которое состоит из k последовательных подопераций, распределенных экспоненциально с параметром $k\mu$.

Аналогично, гиперэкспоненциальное распределение может быть представлено с помощью параллельных операций [113]. На основе такого представления реализован один из наиболее известных методов точного и приближенного анализа систем – метод этапов. Из-за отсутствия последействия экспоненциального распределения стохастический процесс, описываемый с помощью метода этапов, является процессом Марковского типа, так что могут быть применены хорошо известные методы анализа.



Использование метода этапов позволяет получить широкий класс функций распределения длительности операций, обладающих рациональным преобразованием Лапласа. Приведённая выше схема иллюстрирует представление обобщенной функции распределения Кокса с помощью фиктивных этапов [113]. С вероятностью a_0 выполняется первая подоперация, а с вероятностью $b_0 = 1 - a_0$ длительность этапа равна нулю. После окончания подоперации на i-том этапе $(i-1,2,\ldots,k-1)$ с вероятностью a_i продолжается $(i+1)$-ая подоперация и с вероятностью $b_0 = 1 - a_0$ операция завершается на i-м этапе. преобразование Лапласа распределения Кокса имеет вид.

$$F(s) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} a_0 \ldots a_{i-1} b_i \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{s + \mu_j}$$

Строгое обоснование возможности аппроксимации произвольного распределения комбинациями экспоненциальных распределений дается следующей теоремой [113].

ТЕОРЕМА. Пусть $Q(t)$ - произвольная функция распределения, подчиненная условию $Q(0) = 0$, и E - класс бесконечных смесей эрланговских распределений. Тогда для любых a и $\varepsilon > 0$ найдется такое распределение $F(t) \in E$, что

$$\int_0^\infty [F(t) - Q(t)] e^{at} dt < \varepsilon.$$

Указанная теорема остается справедливой и при аппроксимации конечными смесями эрланговских распределений.

Для длительности операций параметрического отказа наиболее подходящим считается нормальное (гауссовское) распределение. Поскольку время безотказной работы изделия не может быть отрицательным, теоретическое нормальное распределение времени безотказной работы практически будет сосредоточено на положительной полуоси, поэтому можно считать, что условия приведенной теоремы выполняются. То же самое можно считать о логарифмически нормальном распределении.

В этих условиях перспективы аппроксимации нормального и логарифмически нормального распределений весьма привлекателен.

В практических приложениях обычно рассматривают две основные характеристики функций распределения: математическое ожидание τ и дисперсию D (или коэффициент вариации ω). Такое задание функции распределения обосновывается тем, что характеристики многих систем определяются только первыми двумя моментами функций распределения длительности операций, протекающих в системе.

Доказывается, что аппроксимация функций распределения с заданными значениями τ и ω может быть эффективно проведена при $\omega < 1$ обобщенным эрланговским распределением, а при $\omega > 1$ - гиперэкспоненциальным распределением второго порядка.

Если с целью достижения более высокой точности требуется совпадение не только первых двух моментов, реального и аппроксимационного распределений, но и других числовых характеристик, тогда придется пользоваться более сложными гиперэрланговскими распределениями. Однако это приводит к значительному увеличению пространства состояний постоянного случайного процесса и, следовательно, к большим объемам выкладок и вычислений [113].

1.4. Проблемы разработки отказоустойчивых ЭВС

При проектировании агрегатов и устройств автоматики реализуется возможность выполнения им набора функций, предусмотренных техническим заданием. Структурная и аппаратурная реализация на начальных этапах разработки сводятся к созданию минимально необходимого варианта системы [3,8,12,17,25,48,68], отказ которого приводит к невыполнению одной или нескольких функций.

Характеристики надежности минимального варианта системы редко удовлетворяют предъявленным требованиям, вследствие чего приходится изыскивать различные способы повышения надежности разрабатываемой ТС. Поэтому приведенный ранее анализ причин возникновения отказов объектов на всех этапах их существования, а также математических соотношений для расчета показателей надежности и критериев эффективности этих объектов позволяет сделать вывод о том, что обеспечивать и поддерживать требуемый высокий уровень надежности современных ТС принципиально возможно только лишь при использовании следующих методов повышения надежности: 1) резервирования объектов; 2) уменьшения интенсивности отказов объектов и 3) уменьшения среднего времени восстановления объектов. Практическая реализация указанных методов повышения надежности объектов может осуществляться на всех этапах их существования.

Проблема повышения надежности должна решаться, в первую очередь, на основе разработки и применения высоконадежных устройств и элементов (с меньшей интенсивностью отказа) и возможности в этом направлении в принципе не ограничены. Однако этот путь обеспечения требуемой надежности не всегда позволяет создавать высоконадежную систему. Дело в том, что, несмотря на повышение надежности отдельных элементов, структура системы резко усложняется и управление такими сложными ТС требует применения вычислительных машин и сложной системы автоматизации.

В результате всего этого надежность в целом падает. Так, например, достигнутый средний уровень надежности элементов и средств вычислительной техники в настоящее время характеризуется значениями интенсивности отказа $\lambda = 10^{-7} - 10^{-8}$ 1/ч. Следует ожидать больше отказов, что даст возможность поднять наработку на отказ системы, насчитывающей 10^{8} элементов, до значения 10 часов, что явно недостаточно.

Метод уменьшения среднего времени восстановления представляет собой совокупность инженерно-технических, организационно-технических и технологических приемов и операций, которые обеспечивают повышение надежности элементов и ТС в целом, тем самым уменьшая число отказов объектов, а также сокращение непроизводительного времени необходимого для отыскания и устранения отказов объектов.

Процесс восстановления объекта включает следующие операции [4,5,9]: обнаружение факта существования отказа;

обнаружение места появления или причин возникновения отказа; обеспечение приспособляемости к восстановлению.

В общем случае время после возникновения отказа можно разделить на три периода: время с момента возникновения отказа до момента установления этого факта существования отказа специальной системой контроля; время с момента возникновения факта существования отказа до момента обнаружения места появления или причины возникновения отказа; время с момента обнаружения места появления или причин возникновения отказа до момента восстановления или замены отказавшего элемента. Чтобы сократить длительность каждого из этих периодов восстановления объектов, необходимо повысить эффективность специальных систем контроля и поиска места повреждения, квалификацию обслуживающего персонала и т.д.

Общие теоретические методы повышения надежности объектов практически реализуются при осуществлении различных специальных организационно-технических и технологических мероприятий.

1.4.1. Избыточность как средство повышения надежности

Резервированием называют метод повышения надежности объекта введением избыточности [20,24,28,47,66]. В свою очередь избыточность – это дополнительные средства и возможности сверх минимально необходимых для выполнения объектом заданных функций. Цель введения избыточности – обеспечить нормальное функционирование системы после возникновения отказов (устойчивых или сбоев) в ее элементах. Различают структурное, информационное и временное резервирование, которые в свою очередь подразумевают множество разновидностей при дальнейшей детализации.

Структурное резервирование (иногда называют аппаратурным) предусматривает использование избыточных элементов. Суть заключается в том, что в минимально необходимый вариант системы, элементы которой называют основными, вводятся дополнительные элементы, устройства, либо даже вместо одной системы предусматривается использование нескольких идентичных систем. При этом избыточные резервные структурные элементы имеют единственное назначение – взять на себя выполнение рабочих функций при отказе основных элементов. К последнему утверждению дадим пояснение. Когда говорят о единственном назначении, подразумевают только те функции, которые возложены на основную систему, т.е. возможность передачи именно этих функций резервному оборудованию, которое в свою очередь, находясь в резерве, может выполнить другие функции, не связанные непосредственно с основными функциями системы.

Информационное резервирование, которое широко используется в дискретной технике, предусматривает использование избыточной информации. Его простейшим примером является многократная передача одного и того же сообщения по каналу связи. В цифровой технике применяются самокорректирующиеся коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки, которые появляются в результате сбоев и отказов аппаратуры. При этом нормальное функционирование устройства не нарушается.

В наиболее общем виде понятие "информационная избыточность" было сформулировано А.А.Харкевичем.

Единственным условием, позволяющим говорить об информационной избыточности, является наличие запрещенных слов некоторого алфавита, не используемых источником информации, т.е. повышение числа всех возможных слов N над числом слов N_0, используемых источником для представления информации:

$$N > N_0$$

Это условие может быть выполнено искусственно, путем добавления проверочных символов и удлинения исходных комбинаций и может выполняться естественным образом, за счет структурных, физических или иных свойств источника информации. В последнем случае говорят об естественной информационной избыточности. Следует заметить, что информационная избыточность влечет за собой необходимость введения избыточных элементов или других видов избыточности.

Принцип применения информационной избыточности таков: множество всех возможных слов разбивается на два непересекающихся подмножества – подмножество слов, используемых источником информации, и подмножество слов, не используемых источником.

Слова из первого подмножества называются разрешенными словами, а из второго – запрещенными. Потребитель, зная состав запрещенных и разрешенных слов, а также учитывая, что всякая ошибка при передаче разрешенного слова переводит его в подмножество запрещенных, может судить о наличии ошибок в принятом сообщении. использование более сложных алгоритмов и средств позволяет во многих случаях не только обнаружить наличие ошибки, а также локализовать и исправлять ее.

Временная избыточность. В данной работе особое место занимает временное резервирование [13,14,30,31,37,38-43,78,79].

Обширный класс ТС, автоматики и информационно-измерительной техники, используемых в ТС, составляют в настоящее время системы с временной избыточностью.

В начале заметим, что структурное (аппаратурное) резервирование в течение длительного времени считалось универсальным методом, позволяющим вместе с информационной избыточностью создавать из ненадежных элементов сколь угодно надежные системы [114]. Такое убеждение, вполне справедливое при определенном уровне развития техники, до 60-ых годов продолжало доминировать, опираясь на авторитет таких известных ученых и специалистов, как Дж. фон Нейман, К.Шенон и др.

Однако на более поздней стадии развития техники как цифровой, так и аналоговой, усложнения применяемых систем и повышения тактико-технических требований к ним, оказалось, что при схемной реализации эти методы не являются столь безукоризненными, как это следует из классических моделей надежности [78,79]. Причиной, прежде всего, является наличие нескольких типов отказов, не идеальность контроля и диагностики, а также переключателя резерва, перераспределение нагрузки при отказах отдельных элементов и т.д. Поэтому внимание разработчиков чаще обращается к временному резервированию. Этот вид избыточности в последние десятилетия пользуется особой и заслуженной популярностью.

Резерв времени можно расходовать не только на ремонт и переключение аппаратурного резерва, но и на обслуживание отказов, повторение работ, обесцененных отказом, ожидание загрузки в работоспособном состоянии.

Потери рабочего времени, обусловленные первыми тремя причинами, называют первичными в отличии от вторичных, связанных с ожиданием загрузки и устранением последствий отказов путем повторения некоторых работ. По характеру последствий все отказы можно разделить на три группы: необесценивающие, частично обесценивающие и полностью обесценивающие. Отказ считают необесценивающим, если система после восстановления работоспособности может восстановить работу с того же самого места, на котором она была прервана. В системе с необесценивающими отказами отсутствует необходимость в повторении работ и поэтому вся наработка между соседними отказами является полезной. В системе с полностью обесценивающими отказами последствия настолько тяжелы, что приходиться всю работу, проделанную к моменту отказа, выполнять заново. Вся наработка до возникновения отказа оказывается бесполезной, если она меньше заданной величины, и должна быть включена в потери рабочего времени. Полезной же признается только та часть наработки, которая не прерывалась отказами. Возможны и промежуточные случаи, когда обесценивается лишь часть выполненной работы. Частично обесценивающие отказы характерны для систем с периодическим контролем работоспособности, а также для некоторых систем с непрерывным контролем работоспособности, а также для некоторых систем с непрерывным контролем, у которых периодически фиксируются и сохраняются промежуточные результаты работы. В системах могут возникнуть в определенных пропорциях все три рассмотренных типа отказов.

Временная избыточность является фактором, обеспечивающим безопасность функционирования систем. Примером могут служить системы с защитой, которые широко применяются в энергетике и др. В этих системах возможны два типа отказов: отказы-остановки и отказы-аварии. К остановкам относятся отказы, когда функционирование системы прекращается, но это не сопровождается большими ее повреждениями и существенными материальными затратами. Аварии характеризуются значительными повреждениями системы и влекут за собой материальный ущерб. Авария, как правило, возникает не мгновенно. Вначале создается некоторая аварийная ситуация, которая имеет объективные симптомы, может быть обнаружена и устранена в течение некоторого допустимого времени, определяемого используемым в системе резервом времени. Эту задачу и выполняют устройства защиты. При отсутствии резерва времени и устройств защиты каждая аварийная ситуация в таких системах переходит в аварию.

Новинка указанного подхода к анализу и обеспечению надежности сложных систем состоит во "взвешивании" отказов по важности и признаку расходования времени на устранение их последствий. Это позволяет вскрыть и использовать для обеспечения нормального функционирования систем внутренние резервы (в частности, временные), заложенные в самих системах. Особенности указанного подхода, определяющие его достоинства, таковы [35-46,79]:

1) улучшение показателей надежности системы часто не связано с увеличением количества аппаратуры и расходованием дополнительных средств, а основано на введении или использовании имеющихся в системах резервов времени;

2) учет резерва времени позволяет отразить истинную надежность, т.е. дает возможность более объективно оценить возможность систем нормально функционировать в условиях взаимодействия различных дестабилизирующих факторов. Именно наличием резерва времени во многих случаях можно объяснить,

почему системы выполняют свои функции успешнее, чем это следует по критерию безотказности;

3) более глубокое проникновение в сущность исследуемых процессов функционирования позволяет выяснить и обосновать новые эффективные методы обеспечения надежности сложных систем в реальных условиях эксплуатации. В частности, учет такого важного эксплуатационного фактора как временная избыточность дает возможность по-новому подойти к оценке безопасности функционирования комплекса "человек-машина", обосновать мероприятия по совершенствованию конструкции систем и методики отработки действий персонала, направленных на уменьшение вероятности аварии.

Системы с временным резервированием обладают определенными специфическими чертами, задание которых необходимо для правильной формулировки критериев отказа, выбора показателей надежности и методов их оценки.

Временное резервирование объектов реализуется с использованием следующих приемов и операций[78,79]:

1. Увеличение в условиях эксплуатации расчетного времени функционирования, необходимого для выполнения поставленной цели или для выпуска заданного количества продукции.

2. Аппараты и машины разрабатываются на большие значения производительности, чем это требуется по расчету.

3. Ввод в структуру технологической схемы промежуточных емкостей между отдельными аппаратами производства.

Временной резерв в виде емкостей широко используется для повышения надежности ТС. К сожалению, при оптимизации надежности ТС ввод промежуточных емкостей в большинстве случаев не используется. В настоящее время для ТС наиболее приемлемым способом повышения надежности является применение резервного оборудования и средств автоматики и измерительной техники. В этой работе уделяется большое внимание использованию имеющегося небольшого временного резерва в виде промежуточных резервуаров для уменьшения кратности резервирования.

1.4.2. Организационно-технические и способы повышения надежности технических систем

Для инженерно-технической реализации ранее изложенных методов повышения надежности отдельных единиц оборудования и технологических схем необходимо использовать специальные организационно-технические и технологические способы обеспечения, поддержания и повышения надежности вычислительных систем и систем передачи информации.

К организационно-техническим способам периода эксплуатации относятся техническая диагностика и техническое обслуживание [4,5,7,9,25].

Техническая диагностика объектов (ТД) представляет собой операцию получения и обработки информации о состоянии объектов во времени с целью обнаружения существования отказов, установления причин и мест их возникновения. ТД позволяет повысить готовность сложных ТС и тем самым улучшить их характеристики восстанавливаемости [105].

Практическая реализация ТД объектов связана с разработкой методов и аппаратурно-технических средств контроля работоспособности и обнаружения отказов оборудования и технологических схем.

В данной работе рассмотрены разные виды ТД:

1) мгновенное обнаружение отказов с помощью непрерывного аппаратурного контроля;

2) комбинированный контроль, когда износовые (параметрические) отказы обнаруживаются с помощью периодического контроля, а внезапные (катастрофические отказы) обнаруживаются в момент их возникновения.

Для поддержания высокого уровня надежности объектов ТС в процессе их эксплуатации обслуживающий персонал должен осуществлять ряд мероприятий, относящихся к техническому обслуживанию (ТО). ТО предусматривает организационные и технические мероприятия, направленные на предупреждение отказов, обеспечение исправного состояния в процессе эксплуатации и обеспечение высокого коэффициента готовности объектов к использованию. К основным задачам ТО относятся: предупреждение ускоренного износа и старения; устранение последствий износа и старения; поддержание основных технических характеристик элементов (оборудования и средств автоматизации) на заданном уровне; продление межремонтных сроков эксплуатации ТС.

Техническое обслуживание позволяет поддерживать и восстанавливать требуемый уровень надежности объектов, что достигается достоверной проверкой состояния объектов через определенные интервалы времени, заменой или ремонтом некоторых элементов, регулировкой параметров и устранением выявленных неисправностей.

В данной диссертационной работе большое внимание уделяется техническому обслуживанию объектов ТС в процессе эксплуатации.

В третьей главе рассмотрены некоторые практически важные модели технического обслуживания объектов ТС.

1.5. Выводы к Главе 1.

Функционирование вычислительных систем и каналов связи сети передачи данных протекают в условиях воздействия на них дестабилизирующих факторов, приводящих к отказам и сбоям. Системный анализ этих факторов, в том числе разработка методов оценки и обеспечения отказоустойчивости и надёжности ВС, является одной из ведущих областей современных научных исследований.

В данной главе получены следующие основные результаты в этом направлении:

1. На основе существующего материала проведен сравнительный анализ различных методов и средств повышения надежности и живучести ВС. В результате этого анализа делается вывод, что наиболее эффективным методом является структурное и временное резервирование. Как известно, последний вид резервирования не связан со значительными расходами.

2. Приведена классификация отказа ВС, обосновываются возможности использования некоторых законов распределения вероятностей в качестве математических моделей внезапных и постепенных отказов.

3. Показывается высокая эффективность аппроксимации произвольных функций распределения эрланговскими смесями?. Такая аппроксимация предполагает представление операции ожидания отказа в виде последовательных, параллельных или параллельно-последовательных операций, распределенных

экспоненциально одинаковыми или различными параметрами. Подходящий выбор этих параметров позволяет добиться приемлемой точности приближения, что и делает этот метод весьма привлекательным.

Глава 2.

Влияние мешающего фактора на эффективность канала передачи данных

В настоящее время сети передачи данных строятся на базе электронных вычислительных машин (ЭВМ), которые обеспечивают обмен информацией между отдельными пользователями посредством двоичных сигналов. Многие приложения требуют достоверной передачи цифровой информации пользователя по сети. Передача двоичных сигналов поступающих от ЭВМ по основным характеристикам - скорости передачи, достоверности и надежности существенно отличается от передачи телеграфных сообщений. Если в телеграфии скорость передачи информации не превышает 15-30 бит/сек, то обмен между ЭВМ может достигать несколько сотен тысяч бит/сек. Если в телеграфной связи удовлетворительная работа характеризуется вероятностью приема символов порядка 10^{-4}, то при передачи данных между ЭВМ требуется во много раз меньшая вероятность ошибки – порядка 10^{-8}-10^{-9}, поэтому к надежности сетей передачи данных предъявляются очень высокие требования. Ошибки происходят даже в наиболее тщательно спроектированных каналах данных [66,80,81]. В [112] описаны специальные процедуры достоверной передачи кадров по ненадежным каналам. Посредством этих процедур узлы могут обнаруживать ошибки передачи и исправлять их с помощью повторных передач на канальном или на транспортном уровне. Как правило, когда коэффициент ошибок на кадр в канале не велик, сквозной контроль более предпочтителен по сравнению с канальным контролем. Если коэффициент ошибок на кадр значителен, то большинство кадров не попадает по назначению без ошибок, и предпочтительнее проверять каждый кадр в каждом канале [111,112]. Большинство сетей используют один из четырех протоколов повторной передачи [113]: протокол с остановкой и ожиданием (SWP-stop-and-wait protocol) протокол с чередованием битов (ABP-alternating bit protocol), протокол с выборочным повторением (SRP-selective repeat protocol) и протокол с возвратом К IV (GBN-go back IV protocol). Эти четыре протокола основаны на одинаковых механизмах: таймерах и подтверждениях. Некоторые другие протоколы повторной передачи также используют варианты этих базовых механизмов.

Как это известно, из литературы [107-112], вероятность ошибок при передаче дискретной информации по реальным каналам определяется не флуктуационной помехой, а иными причинами. Исследование этих причин показало, что самыми основными из них являются импульсные помехи, кратковременные занижения уровня сигнала и перерывы связи. На долю этих причин приходится 80-85% всех ошибок. Функцию распределения интервалов между ошибками, исходя из физических предпосылок, можно рассматривать как некоторый набор большого количества экспонент [113] – распределение Эрланга. Кроме того, каждое сообщение, как правило, разбивается на некоторое количество кадров, передаваемых самостоятельно.

Таким образом, возникает мысль описать функцию распределения времени безошибочной передачи сообщений, разбитых на самостоятельные кадры (пакеты) через канал связи подверженных к самоустраняющимся отказам, интервал времени между которыми распределен по закону Эрланга.

В данной работе в отличие от известных случаев, рассмотренных в литературе [107-112], длительность помехи (мешающего фактора) не «стягивается» в точку, а распределяется по произвольному закону [44-45]. Ставится задача определения рационального числа повторных передач, для перехода (при неизбежности) к мероприятиям по восстановлению или замене канала для обеспечения безошибочной передачи сообщений.

2.1. Построение обобщенной математической модели канала связи с учетом мешающего фактора.

Пусть по каналу связи передается сообщение, состоящее из n одинаково распределенных пакетов (кадров); время передачи пакета распределено по закону $F(t)$:

$\overline{F}(u) = 1 - F(u);$

интервал времени между соседними внешними возмущениями, в результате воздействия которых в канале связи возникают ошибки (отказы), распределен по закону Эрланга m-го порядка (состоящий из m фаз):

$$\omega(u) = W'(u) = \frac{\alpha(\alpha u)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\alpha u}, \text{ при } m = 1; \quad \omega(u) = \alpha e^{-\alpha u}.$$

(Здесь α параметр распределения фиктивной фазы); функция распределения (ФР) длительности времени мешающего фактора имеет произвольный вид - $Q(t)$:

$\overline{Q}(t) = 1 - Q(t);$

время устранения обслуживающим персоналом причин вызывающих искажения, передаваемого пакета, распределено также по произвольному закону - $G(t)$; адресат (приемное устройство) пакет должен принимать без ошибок и без потери;

Задача состоит в определении некоторых вероятностных характеристик реального времени передачи кадра, на основе которых устанавливается целесообразная стратегия использования канала передачи данных с конкретными характеристиками в процессе их эксплуатации [117].

Для решения поставленной задачи введем функцию распределения $\Phi_{ij}(t,r)$ - вероятность того, что кадр буден передан без искажения при не более $r\ (r=1,2,...)$ повторных передач, за время меньшее t, причем в момент окончания безошибочной передачи кадра канал связи (КС) по наступающему искажению окажется в состоянии $j\ (j=\overline{0,m-1})$, при условии, что в момент начала передачи данного кадра КС находился в состоянии $i\ (i=\overline{0,m-1})$.

Относительно $\Phi_{ij}(t,r)\ (r=1,2,3)$ имеет место следующее интегральное соотношение:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{ij}(1,t)= \\
&=\delta_{ij}\int_0^t e^{-\alpha u}dF(u)+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,t-u-\upsilon)+ \\
&+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}\overline{Q}(\upsilon)\int_0^{t-u-\upsilon}dG(\tau)\Phi_{0j}(1,t-u-\upsilon-\tau), \\
&i\geq j;
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.1)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{ij}(1,t)=\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}e^{-\alpha u}du\cdot\overline{F}(u)\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}e^{-\alpha u}+ \\
&+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\cdot\overline{F}(u)du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,t-u-\upsilon)+
\end{aligned}
$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} e^{-\alpha u} \overline{F}(u) du \int_0^{t-u} \frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)} \overline{Q}(\upsilon) \int_0^{t-u-\upsilon} dG(\tau) \Phi_{0j}(1, t-u-\upsilon-\tau),$$

$i < j.$ **(2.2)**

Здесь $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & если \quad i = j \\ 0, & если \quad i \neq j. \end{cases}$

Соотношение (2.1) было составлено на основании следующих вероятностных рассуждений.

Первое слагаемое – это вероятность того, что передача пакета завершится за время меньшее t, при условии, что за это время не возникнет мешающий фактор $(\exp(-\alpha u))$, причем в конце передачи кадра канал окажется в состоянии i $(j = i, \delta_{ij=1})$; $dF(u)$-вероятность того, что в момент $\xi(u < \xi < u + du, u \in (0,t))$ завершиться передача пакета.

Второе слагаемое – это совестная вероятность того, что в момент $\xi(u < \xi < u + du)$ возникает мешающий фактор $\frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!} e^{-\alpha u} du,$ за это время передача кадра не завершиться $\overline{F}(u),$ передача пакета завершиться за время;

$\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}$ - условная вероятность того, что за время η $(u + \upsilon < \eta < u + \upsilon + d\upsilon)$ завершиться передача пакета при условии, что она за время u не завершилась;

$Q(\upsilon)$ - вероятность того что за время ν $(\nu < \upsilon, \upsilon \in (0, t-u))$ действие мешающего фактора самоустранилось;

$\Phi_{0j}(1, t-u-\upsilon)$ - вероятность того, что передача пакета без искажения завершиться за время меньшее $t-u-\upsilon$ при помощи повторной передачи и канал передачи за это время примет состояние j, т.е. перейдет из состояния "0" в состояние j.

Третье слагаемое отличается от второго лишь тем, что после первой передачи искаженного пакета повторная передача происходит только в результате устранения мешающего фактора за время $\varepsilon\,(\tau < \varepsilon < \tau + d\tau) - dG(\tau)$. Самоустранение (2.2) составляется аналогично при $i < j,$ поэтому его пояснение не приводится.

Обозначив

$$\varphi(1,s) = \int_0^\infty e^{-st}\Phi_{ij}(1,t)dt; \quad g(s) = \int_0^\infty e^{-st}dG(t); \quad f(s) = \int_0^\infty e^{-st}dF(t); \quad Q(s) = \int_0^\infty e^{-st}Q(t)dt.$$

И переходя в (2.1) к преобразованию Лапласа, имеем (преобразование приводится подробно без пояснения):

1) $$\delta_{ij}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t e^{-\alpha u}dF(u) = \delta_{ij}\int_0^\infty e^{-\alpha u}dF(u)\int_u^\infty e^{-st}dt =$$
$$= \delta_{ij}\int_0^\infty e^{-\alpha u}dF(u)\frac{e^{-su}}{s} = \delta_{ij}\,\frac{f(s+\alpha)}{s};$$

2) $$\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\int_0^{t-u} d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,t-u-\upsilon) =$$

$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^u u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_u^\infty e^{-st}dt\int_0^{t-u} d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,t-u-\upsilon) =$$
$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_u^\infty e^{-st}dt\int_0^{t-u} d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,t-u-\upsilon) =$$
$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_0^\infty e^{-s(x+u)}dx\int_0^{x} d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,x-\upsilon) =$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(\alpha+s)u}du\int_0^\infty e^{-sx}dx\int_0^x d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(1,x-\upsilon)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(\alpha+s)u}du\Phi_{0j}(1,s)\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\cdot e^{-s\upsilon}=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\Phi_{0j}(1,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(\alpha+s)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\cdot e^{-s\upsilon}.$$

Здесь $x=t-u$ и используется преобразование Дирихле двукратного интеграла (меняется порядок интегрирования).

3) $$\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}du\int_0^{t-u}d_\upsilon\cdot F(u+\upsilon)\overline{Q}(\upsilon)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{t-u-\upsilon}dG(\tau)\Phi_{oj}(1,t-u-\upsilon-\tau)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{ij}(1,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(\alpha+s)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot\overline{Q}(\upsilon)\cdot e^{-s\upsilon}.$$

Таким образом,

$$\varphi_{ij}(1,s)=\delta_{ij}\,\frac{f(s+\alpha)}{s}+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(1,s)\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)e^{-s\upsilon}+\right.$$

$$\left.+g(s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot\overline{Q}(\upsilon)e^{-s\upsilon}\right],\quad i\ge j;\quad (i,j=\overline{0,m-1}). \tag{2.3}$$

С учетом того, что $\overline{Q}(\upsilon)=1-Q(\upsilon),$ выражение (2.3) можно переписать в виде:

$$\varphi_{ij}(1,s)=\delta_{ij}\frac{f(s+\alpha)}{s}+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(1,s)\cdot$$
$$\cdot\left[(1-g(s))\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-s\upsilon}Q(\upsilon)d_\upsilon F(u+\upsilon)+\right.$$
$$\left.+g(s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)e^{-s\upsilon}\right],\quad i\ge j;\quad (i,j=\overline{0,m-1}). \tag{2.4}$$

Аналогично, переходя в (2.2) к преобразованию Лапласа, получим

$$\varphi_{ij}(1,s)=\frac{\alpha^{j-i}}{(j-i-1)!s}\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)u}u^{j-i-1}du\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)\upsilon}d_\upsilon F(u+\upsilon)+$$
$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(1,s)\left[(1-g(s))\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(\alpha+s)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\cdot e^{-s\upsilon}+\right.$$
$$\left.+g(s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)e^{-s\upsilon}\right],\quad i<j;\quad (i,j=\overline{0,m-1}). \tag{2.5}$$

Очевидно, что $\varphi_i(1,s)=\sum_{j=0}^{m-1}\varphi_{ij}(1,s),\quad i=\overline{0,m-1}$ являются функциями распределения. В этом убеждаемся проверкой условия: $\lim_{s\to 0}s\varphi_i(1,s)\to 1.$

Проверим эти условия при $m=1$ $(i=0)$ и при $m=2$ $(i=0,1)$. Заметим, что $\lim_{s\to 0}(1-g(s))\to 0.$ С учетом этого

1) при $m=1$ $(i=0)$ имеем

$$\lim_{s\to 0}s\varphi_0(1,s)=f(\alpha)+\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha u}du\int_0^\infty d_\upsilon F(u+\upsilon)=$$
$$=f(\alpha)+\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha u}(1-F(u))du=f(\alpha)+\alpha\frac{1-f(\alpha)}{\alpha}=1.$$

2) при $m=2$ $(i=0,1)$; пусть $i=1$:

$$\lim_{s\to 0} s\varphi_1(1,s) = \lim_{s\to 0}\sum_{j=0}^{1} s\varphi_{1j}(1,s) = \lim_{s\to 0} s\varphi_{10}(1,s) + \lim_{s\to 0} s\varphi_{11}(1,s) =$$

$$= \alpha \lim_{s\to 0}\left[s\varphi_{00}(1,s)\right]\iint_0^{\infty} u^0 e^{-\alpha u}\,du \cdot [1-F(u)]\,du + f(\alpha) +$$

$$+ \alpha \lim_{s\to 0}[s\varphi_{01}(1,s)]\int_0^{\infty} u^0 e^{-\alpha u}[1-F(u)]\,du =$$

$$= (1-f(\alpha))\lim_{s\to 0} s[\varphi_{00}(1,s)+\varphi_{01}(1,s)] + f(\alpha) =$$

$$= (1-f(\alpha))\lim_{s\to 0} s\varphi_0(1,s) + f(\alpha) = 1.$$

Здесь учтено, что при $\lim_{s\to 0} s\varphi_0(1,s) = 1$ получается тождество 1=1, что и требовалось доказать .

Уравнения (2.4) и (2.5) составлены при $r=1$. Аналогично составляются уравнения для $r=2$. Приведем их $(\Phi_{ij}(2,t);\, i,\, j=\overline{0,m-1})$ без подробного пояснения:

$$\Phi_{ij}(2,t) = \delta_{ij}\int_0^t e^{-\alpha u}\,dF(u) +$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)\,du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}Q(\upsilon)\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon) +$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)\,du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}\overline{Q}(\upsilon) +$$

$$+\int_0^{t-u-\upsilon} dF(\tau)\frac{Q(\upsilon+\tau)-Q(\upsilon)}{\overline{Q}(\upsilon)}\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon-\tau)$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)\,du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}\overline{Q}(\upsilon)\cdot \qquad \textbf{(2.6)}$$

$$\int_0^{t-u-\upsilon} dF(\tau)\frac{\overline{Q}(\upsilon+\tau)}{\overline{Q}(\upsilon)}\int_0^{t-u-\upsilon-\tau} dG(\eta)\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon-\tau-\eta)\cdot \qquad i\ge j;\quad (i,j=\overline{0,m-1});$$

$$\Phi_{ij}(2,t)=\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}e^{-\alpha u}du\cdot \overline{F}(u)\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}e^{-\alpha u}+$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}Q(\upsilon)\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon)+$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}\overline{Q}(\upsilon)\int_0^{t-u-\upsilon}dF(\tau)\frac{Q(\upsilon+\tau)-Q(\upsilon)}{\overline{Q}(\upsilon)}\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon-\tau)+$$

$$+\int_0^t \frac{\alpha(\alpha u)^{m-i-1}}{(m-i-1)!}e^{-\alpha u}\overline{F}(u)du\int_0^{t-u}\frac{d_\upsilon F(u+\upsilon)}{\overline{F}(u)}\overline{Q}(\upsilon)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{t-u-\upsilon}dF(\tau)\frac{\overline{Q}(\upsilon+\tau)}{\overline{Q}(\upsilon)}\int_0^{t-u-\upsilon-\tau}dG(\eta)\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon-\tau-\eta), \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$i<j;\quad (i,j=\overline{0,m-1}).$$

Применив преобразование Лапласа к (2.6), имеем (преобразование ниже приводиться подробно без особого пояснения - почленно)

1) $$\delta_{ij}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t e^{-\alpha u}dF(u)=\delta_{ij}\int_0^\infty e^{-\alpha u}dF(u)\int_u^\infty e^{-st}dt=$$

$$=\delta_{ij}\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)u}dF(u)=\delta_{ij}\frac{f(s+\alpha)}{s};$$

2) $$\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_0^{t-u}d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_u^\infty e^{-st}dt\int_0^{t-u}d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sx}dx\int_0^x d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon)\Phi_{0j}(2,x-\upsilon)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_\upsilon F(u+\upsilon)\cdot Q(\upsilon);$$

$$3)\ \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_0^{t-u} d_\upsilon F(u+\upsilon)\int_0^{t-u-v} dF(\tau)\cdot$$

$$\cdot\left[Q(v+\tau)-Q(v)\right]\Phi_{0j}(2,t-u-\upsilon-\tau)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_u^\infty e^{-st}dt\int_0^{t-u}...=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(\alpha+s)u}du\cdot\int_0^\infty e^{-sx}dx\cdot$$

$$\cdot\int_0^x dv\cdot F(u+\upsilon)\int_0^{x-v} dF(\tau)\cdot\left[Q(v+\tau)-Q(v)\right]\cdot\Phi_{0j}(2,x-v-\tau)=$$

$$=\varphi_{0j}(2,s)\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty d_v F(u+v)\int_v^\infty e^{-sx}dx\int_0^{x-v}...=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_v F(u+v)\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-sy}dy\int_0^y dF(\tau)\left[Q(v+\tau)-Q(v)\right]\cdot\Phi_{0j}(2,y-\tau)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-sv}d_v F(u+v)\int_0^\infty e^{-s\tau}dF(\tau)\left[Q(v+\tau)-Q(v)\right].$$

$$4)\ \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_0^{t-u} d_v F(u+v)\int_0^{t-u-v} dF(\tau)\cdot\overline{Q}(v+\tau)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{t-u-v-\tau} dG(\eta)\cdot\Phi_{0j}(2,t-u-v-\tau-\eta)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-\alpha u}du\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^{t-u}...=$$

$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sx}dx\int_0^x d_vF(u+v)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{x-v} dF(\tau)\cdot\overline{Q}(v+\tau)\int_0^{x-v-\tau} dG(\eta)\cdot\Phi_{0j}(2,x-v-\tau-\eta)=$$

$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty d_vF(u+v)\int_v^\infty e^{-sx}dx\int_0^{x-v}\ldots=$$

$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot$$

$$\cdot\int_v^\infty e^{-sy}dy\int_0^v dF(\tau)\cdot\overline{Q}(v+\tau)\int_0^{y-\tau} dG(\eta)\Phi_{0j}(2,y-\tau-\eta)=$$

$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\int_0^\infty e^{-st}dF(\tau)\overline{Q}(v+\tau)$$

$$\varphi_{ij}(2,s)=\delta_{ij}\,\frac{f(s+\alpha)}{s}+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(2,s)\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot Q(v)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\int_0^\infty e^{-s\tau}dF(\tau)\left[Q(v+\tau)-Q(v)\right]+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\int_0^\infty e^{-s\tau}\overline{Q}(v+\tau)dF(\tau);\quad i\ge j\ (i,j=\overline{0,m-1});\qquad\textbf{(2.8)}$$

Пусть $m=2 \quad (i,j=0),$ тогда

$$\varphi_{00}(2,s) = \frac{f(s+\alpha)}{s} + \alpha\varphi_{00}(2,s)\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot Q(v) +$$

$$+\alpha\varphi_{00}(2,s)\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\int_0^\infty e^{-s\tau}dF(\tau_1)\left[Q(v+\tau_1)-Q(v)\right]+$$

$$+\alpha g(s)\varphi_{00}(2,s)\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\int_0^\infty e^{-s\tau}\overline{Q}(v+\tau_1)dF(\tau_1);$$

Аналогично, в результате преобразования (2.7), имеем

$$\varphi_{ij}(2,s) = \frac{\alpha^{j-i}}{s(j-i-1)!}\int_0^\infty u^{j-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{(s+\alpha)v}d_\upsilon F(u+\upsilon)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{sv}Q(v)d_vF(u+v)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{sv}d_vF(u+v)\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-s\tau_1}\left[Q(v+\tau_1)-Q(v)\right]dF(\tau_1)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{0j}(2,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\int_0^\infty e^{-s\tau_1}\overline{Q}(v+\tau_1)dF(\tau_1); \qquad \textbf{(2.9)}$$

$$i<j;$$

Продолжая этот процесс для любых значений r , $\varphi_{ij}(r,s)$ можно представить в виде:

$$\varphi_{ij}(r,s)=\delta_{ij}\,\frac{f(s+\alpha)}{s}+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{sv}Q(v)d_vF(u+v)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\sum_{k=1}^{r-1}\left[\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\left(\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{k-1}\prod_{\eta=1}^{k-1}\overline{e}^{s\tau_\eta}dF(\tau_\eta)\right)\int_0^\infty dF(\tau_k)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(Q(v+\sum_{\eta=1}^{k}\tau_\eta)-Q(v+\sum_{\eta=1}^{k-1}\tau_\eta)\right)\cdot\overline{e}^{s\tau_k}\right]+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{0j}(r,s)\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty u^{m-i-1}e^{-(s+\alpha)u}du\int_0^\infty e^{-sv}d_vF(u+v)\cdot\left[\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{r-2}\prod_{\eta=1}^{r-2}\overline{e}^{s\tau_\eta}dF(\tau_\eta)\right]\cdot\int_0^\infty dF(\tau_{\eta-1})\overline{Q}(v+\sum_{\eta=1}^{r-1}\tau_\eta)\overline{e}^{s\tau_{r-1}};\qquad\textbf{(2.10)}$$

$i\ge j;$

$$\varphi_{ij}(r,s)=\frac{\alpha^{j-i}}{s(j-i-1)!}\int_0^\infty u^{j-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{(s+\alpha)v}d_\upsilon F(u+\upsilon)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{sv}Q(v)d_vF(u+v)+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\sum_{k=1}^{r-1}\left[\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{sv}d_vF(u+v)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{k-1}\prod_{\eta=1}^{k-1}\overline{e}^{s\tau_\eta}dF(\tau_\eta)\right)\int_0^\infty dF(\tau_k)\left[Q(v+\sum_{\eta=1}^{k}\tau_\eta)-Q(v+\sum_{\eta=1}^{k-1}\tau_\eta)\right]\right]e^{-s\tau_k}+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{0j}(r,s)\int_0^\infty u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^\infty \overline{e}^{sv}d_vF(u+v)\cdot$$

$$\cdot\left(\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{r-2}\prod_{\eta=1}^{r-2}\overline{e}^{s\tau_\eta}dF(\tau_\eta)\right)\int_0^\infty dF(\tau_{r-1})\overline{Q}(v+\sum_{\eta=1}^{r-1}\tau_\eta)e^{-s\tau_{r-1}};\qquad\textbf{(2.11)}$$

$i<j\quad(i,j=\overline{0,m-1};\quad r=1,2,3,\ldots).$

Здесь и везде принято, что $\tau_0=0$;

$$F(\tau_0) = 1(\tau_0) = \begin{cases} 1 & при\ \tau_0 \ge 0 \\ 0 & при\ \tau_0 < 0 \end{cases};$$

$$\int_0^\infty dF(\tau_0) \cdot \Gamma(\tau_0) = \Gamma(0); \quad \sum_a^b (\bullet) = 0, \quad если \quad a > b;$$

$$\prod_a^b (\bullet) = 1, \quad если \quad a > b;$$

$$\underbrace{\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty}_{n} \prod_{\eta=1}^{n} \overline{e}^{s\tau_\eta} dF(\tau_\eta) = \int_0^\infty \overline{e}^{s\tau_1} dF(\tau_1) \int_0^\infty \overline{e}^{s\tau_2} dF(\tau_2) \int_0^\infty \overline{e}^{s\tau_3} dF(\tau_3) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \int_0^\infty \overline{e}^{s\tau_n} dF(\tau_n); \quad \overline{Q}(u) = 1 - Q(u).$$

В результате решения (2.10) и (2.11), определяем $\varphi_{ij}(r,s) \quad (i,j = \overline{0,m-1})$ - в терминах преобразования Лапласа, вероятность того, что безошибочная передача одного пакета (кадра) завершится за время меньше t при условии, что передача начнется при состоянии i канала передачи по наступающему «помехи» (возмущения) и в момент ее исчезновения канал окажется в состоянии j. Используя методы обратного преобразования находим $\varphi_{ij}(r,t) \quad (i,j = \overline{0,m-1})$.

Функция распределения времени передачи сообщений состоящей из n пакетов имеет вид

$$\Phi_{ij}^{(n)}(r,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^t d\Phi_{ik}^{(1)}(r,u) \cdot \Phi_{kj}^{(n-1)}(r,t-u) \big/ s. \qquad \textbf{(2.12)}$$

А его преобразование Лапласа имеет вид

$$\varphi_{ij}^{(n)}(r,s) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{ik}^{(1)}(r,s) \cdot \varphi_{kj}^{(n-1)}(r,s).$$

Здесь

$$\varphi_{ik}^{(1)}(r,s) = \frac{d\varphi_{ik}^{(1)}(r,s)}{ds}$$

2.2. Канал связи с постоянной длиной пакета и распределением возникновения мешающего фактора по закону Эрланга

В системах передачи данных, как правило, длительность пакета стандартизирована и содержит вполне определенное количество двоичных знаков(битов). Поэтому для каналов связи определенной (данной) производительности, длительность пакета представляет постоянную величину. Его функция распределения имеет вид

$$F(t) = \delta_0(t-\tau_П) \quad (F'(t) = \delta_0'(t-\tau_П)), \quad где$$

$$\delta_0(t-\tau_П) = \begin{cases} 1, & при \quad t \geq \tau_П \\ 0, & при \quad t < 0 \end{cases};$$

$$\delta_0'(t-\tau_П) = \begin{cases} \infty, & при \quad t = \tau_П \\ 0, & при \quad t \neq \tau_П \end{cases};$$

$$\int_0^\infty \delta_0'(t)dt = 1;$$

$$\int_0^\infty \varphi(t)\delta_0'(t-\tau_П)dt = \varphi(\tau_П).$$

С учетом последнего выражения (2.10) и (2.11) принимают вид:

при $i \geq j$:

$$\varphi_{ij}(r,s) = \delta_{ij}\overline{e}^{(s+\alpha)^{\tau_П}/s} + \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\overline{e}^{s\tau_П} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau_П} u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u} Q(\tau_П - u)du +$$

$$+\overline{e}^{s\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{ks\tau_П} \cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^{\tau_П} u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}(Q((k+1)\tau_П - u) - Q(k\tau_П - u))du\right] +$$

$$+\overline{e}^{rs\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s)\varphi_{0j}(r,s)\int_0^{\tau_П} u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}\overline{Q}(r\tau_П - u)du.$$

при $i < j$:

$$\varphi_{ij}(r,s)=\frac{\alpha^{j-i}}{s(j-i)!}\tau_{\Pi}^{j-i}\overline{e}^{(s+\alpha)\tau_{\Pi}}+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\overline{e}^{s\tau_{\Pi}}\int\limits_{0}^{\tau_{\Pi}}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}Q(\tau_{\Pi}-u)du+$$

$$+\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{(k+1)s\tau_{\Pi}}\int\limits_{0}^{\tau_{\Pi}}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}du\cdot$$

$$\cdot\left[Q((k+1)\tau_{\Pi}-u)-Q(k\tau_{\Pi}-u)\right]+$$

$$+\overline{e}^{rs\tau_{\Pi}}\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}g(s)\varphi_{0j}(r,s)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{0}^{\tau_{\Pi}}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}du\overline{Q}(r\tau_{\Pi}-u).\quad i,j=\overline{0,m-1};\quad r=1,2,\ldots. \tag{2.13}$$

Приведем доказательство одной из формул, например, (2.12) без особого пояснения. Уравнения (2.12) состоит из четырех членов, преобразуем каждый из них раздельно.

1) $\delta_{ij}\dfrac{f(s+\alpha)}{s}=\delta_{ij}\dfrac{\overline{e}^{(s+\alpha)\tau_{\Pi}}}{s};$

2) $$\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\int\limits_{0}^{\infty}u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int\limits_{0}^{\infty}\overline{e}^{sv}Q(v)d_{v}F(u+v)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\int\limits_{0}^{\infty}u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int\limits_{u}^{\infty}\overline{e}^{s(x-u)}Q(x-u)dF(x)=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\int_0^{\infty}\overline{e}^{sx}dF(x)\int_0^{x}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}Q(x-u)du=$$

$$=\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\overline{e}^{s\tau_{П}}\int_0^{\tau_{П}}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}Q(\tau_{П}-u)du$$

3) $\dfrac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\cdot$

$$\cdot\sum_{k=1}^{r-1}\Bigg[\int_0^{\infty}u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^{\infty}\overline{e}^{sv}d_vF(u+v)\cdot(\int_0^{\infty}\underset{k-1}{\dots}\int_0^{\infty}\prod_{\eta=1}^{k-1}\overline{e}^{s\tau_{\eta}}dF(\tau_{\eta}))\int_0^{\infty}dF(\tau_k)\cdot$$

$$\cdot(Q(v+\sum_{\eta=1}^{k}\tau_{\eta})-Q(v+\sum_{\eta=1}^{k-1}\tau_{\eta}))\overline{e}^{s\tau_K}\Bigg]=$$

$$=\overline{e}^{s\tau_{П}}\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{r-1}\Bigg[\int_0^{\infty}u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^{\infty}\overline{e}^{sv}d_vF(u+v)\cdot\overline{e}^{(k-1)s\tau_{П}}(Q(v+k\tau_{П})-Q(v+(k-1)\tau_{П}))\Bigg]=$$

$$=\overline{e}^{s\tau_{П}}\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{(k-1)s\tau_{П}}\Bigg[\int_0^{\infty}u^{m-i-1}\overline{e}^{(s+\alpha)u}du\int_0^{\infty}\overline{e}^{sv}d_vF(u+v)\cdot(Q(v+k\tau_{П})-Q(v+(k-1)\tau_{П}))\Bigg]=$$

$$=\overline{e}^{s\tau_{П}}\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{(k-1)s\tau_{П}}\Bigg[\int_0^{\infty}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}du\int_0^{\infty}\overline{e}^{sx}dF(x)\cdot(Q(x-u+k\tau_{П})-Q(x-u+(k-1)\tau_{П}))\Bigg]=$$

$$=\overline{e}^{s\tau_{П}}\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!}\varphi_{0j}(r,s)\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{(k-1)s\tau_{П}}\Bigg[\int_0^{\infty}\overline{e}^{sx}dF(x)\int_0^{x}u^{m-i-1}\overline{e}^{\alpha u}d\cdot(Q(x-u+k\tau_{П})-Q(x-u+(k-1)\tau_{П}))\Bigg]=$$

$$= \overline{e}^{2s\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} \varphi_{0j}(r,s) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{r-1} \overline{e}^{(k-1)s\tau_П} \left[\int_0^{\tau_П} u^{m-i-1} \overline{e}^{\alpha u} (Q((k+1)\tau_П - u) - Q(k\tau_П - u)) \right]$$

4) $$\frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s) \varphi_{0j}(r,s) \int_0^{\infty} u^{m-i-1} \overline{e}^{(s+\alpha)u} du \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \overline{e}^{sv} d_v F(u+v) \cdot \int_0^{\infty} \underset{r-2}{\dots} \int_0^{\infty} \prod_{\eta=1}^{r-2} \overline{e}^{s\tau_\eta} dF(\tau_\eta) \int_0^{\infty} dF(\tau_{\eta-1}) \cdot$$

$$\cdot (\overline{Q}(v + \sum_{\eta=1}^{r-1} \tau_\eta) \overline{e}^{s\tau_{\eta-1}} =$$

$$= \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s) \varphi_{0j}(r,s) \int_0^{\infty} u^{m-i-1} \overline{e}^{(s+\alpha)u} du \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \overline{e}^{sv} d_v F(u+v) \cdot \overline{e}^{(r-2)s\tau_П} \cdot \overline{e}^{s\tau_П} \overline{Q}(v + (r-1)\tau_П) =$$

$$= \overline{e}^{(\kappa-1)\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s) \varphi_{0j}(r,s) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} u^{m-i-1} \overline{e}^{(s+\alpha)u} du \int_0^{\infty} \overline{e}^{sv} d_v F(u+v) \cdot \overline{Q}(v + (r-1)\tau_П) =$$

$$= \overline{e}^{(r-1)\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s) \varphi_{0j}(r,s) \int_0^{\infty} u^{m-i-1} \overline{e}^{(s+\alpha)u} du \cdot$$

$$\cdot \int_u^{\infty} \overline{e}^{s(x-u)} dF(x) \cdot \overline{Q}(x - u + (r-1)\tau_П) =$$

$$= \overline{e}^{(r-1)\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s) \varphi_{0j}(r,s) \int_0^{\infty} \overline{e}^{sx} dF(x) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{x} u^{m-i-1} \overline{e}^{\alpha u} du \cdot \overline{Q}(x - u + (r-1)\tau_П) =$$

$$= \overline{e}^{(r-1)s\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s)\varphi_{0j}(r,s) \cdot \overline{e}^{s\tau_П} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau_П} u^{m-i-1} \overline{e}^{\alpha u} \overline{Q}(r\tau_П - u)du$$

Таким образом, при $i \geq j$ имеем прежний результат:

$$\varphi_{ij}(r,s) = \delta_{ij}\ \overline{e}^{(s+\alpha)\tau_П} \big/ s + \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} \varphi_{0j}(r,s) \overline{e}^{s\tau_П} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\tau_П} u^{m-i-1} \overline{e}^{\alpha u} Q(\tau_П - u)du +$$

$$+ \overline{e}^{2s\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} \varphi_{0j}(r,s) \sum_{k=1}^{r-1} \overline{e}^{(k-1)s\tau_П} \cdot$$

$$\cdot \left[\int_0^{\tau_П} u^{m-i-1} \overline{e}^{\alpha u} \left[Q((k+1)\tau_П - u) - Q(k\tau_П - u) \right] вг + \right.$$

$$+ \overline{e}^{rs\tau_П} \frac{\alpha^{m-i}}{(m-i-1)!} g(s)\varphi_{0j}(r,s) \int_0^{\tau_П} u^{m-i-1} \overline{e}^{\alpha u} \overline{Q}(r\tau_П - u)du.$$

Аналогично выводится (2.13), поэтому его вывод приводить не будем.

Для дальнейшего упрощения примем, что моменты возникновения мешающего фактора подчинены показательному закону. Такое допущение во многих практических случаях вполне оправдано, как сточки зрения приемлемой адекватности математической модели к оригиналу, так и с точки зрения простоты полученных расчетных формул. Таким образом, при $m = 1\ (i = 0,\ j = 0)$, существует всего одного рабочее состояние $i, j = 00,$ поэтому для простоты индексы будем опускать: $\varphi_{ij}(r,s) = \varphi_{00}(r,s) = \varphi(r,s)\ (r = 1,2,3,...)$. С учетом этого необходимость уравнения (2.13) отпадает, а уравнение (2.12) принимает вид

$$\varphi(r,s)=\overline{e}^{(s+\alpha)\tau_{П}}\Big/s+\alpha\varphi(r,s)\overline{e}^{s\tau_{П}}\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}Q(\tau_{П}-u)du+$$

$$+\alpha\overline{e}^{s\tau_{П}}\varphi_{0j}(r,s)\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{ks\tau_{П}}\left[\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}\left[Q((k+1)\tau_{П}-u)-Q(k\tau_{П}-u)\right]du+\right.$$

$$+\alpha\overline{e}^{rs\tau_{П}}g(s)\varphi(r,s)\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}\overline{Q}(r\tau_{П}-u)du,\quad r=1,2,\dots. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Относительно предельного значения при $t\to\infty$ имеем

$$\Phi(r)=\lim_{t\to\infty}\Phi(r,t)=\lim_{s\to 0}s\varphi(r,s)=\overline{e}^{\alpha\tau_{П}}+$$

$$+\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}Q(\tau_{П}-u)du+\alpha\sum_{k=1}^{r-1}\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}(Q((k+1)\tau_{П}-u)-Q(k\tau_{П}-u))du+$$

$$+\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}\overline{Q}(r\tau_{П}-u)du.$$

С учетом того, что

$$\sum_{k=1}^{r-1}\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}(Q((k+1)\tau_{П}-u)-Q(k\tau_{П}-u))du=$$

$$=\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}(Q(r\tau_{П}-u)-Q(\tau_{П}-u))du$$

и

$$\overline{Q}(r\tau_{П}-u)=1-Q(r\tau_{П}-u),$$

имеем

$$\Phi(r)=\overline{e}^{\alpha\tau_{П}}+\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}Q(\tau_{П}-u)du+$$

$$+\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}(Q(r\tau_{П}-u)-Q(\tau_{П}-u))du+$$

$$+\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}du-\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}Q(r\tau_{П}-u)du=$$

$$=\overline{e}^{\alpha\tau_{П}}+\alpha\int\limits_0^{\tau_{П}}\overline{e}^{\alpha u}du=1.$$

Таким образом, получили, что функции $\varphi(r,s)$ являются функциями распределения при каждом заданном r (r=1,2,3,...), записанных в терминах преобразования Лапласа.

Дальнейшее упрощение формул (2.12) и (2.13), можно получить, если допустить, что после устранения возмущающего фактора, вероятность его повторного возникновения сразу, в малом промежутке времени мала и можно ею пренебречь. Для учета этого случая достаточно в (2.11), (2.12) и (2.13) $\varphi(r,s)$ заменить на

$$F(s) = f(s)/s, \quad \text{где} \quad F(s) = \int_0^\infty \overline{e}^{st} F(t)dt.$$

С учетом этого, упрощенное уравнение (2.14) можно переписать в виде:

$$\varphi(r,s) = \overline{e}^{(s+\alpha)\tau_П}/s + \alpha f(s)/s \left\{ \overline{e}^{s\tau_П} \int_0^{\tau_П} \overline{e}^{\alpha u} Q(\tau_П - u)du + \sum_{k=1}^{r-1} \overline{e}^{(k+1)s\tau_П} \cdot \right.$$

$$\cdot \left[\int_0^{\tau_G} \overline{e}^{\alpha u} (Q((k+1)\tau_П - u) - Q(k\tau_П - u)) \right] du +$$

$$\left. + \overline{e}^{rs\tau_П} g(s) \int_0^{\tau_П} \overline{e}^{\alpha u} \overline{Q}(r\tau_П - u)du \right\}, \quad r = 1,2,\dots. \qquad \textbf{(2.15)}$$

Здесь $f(s) = \overline{e}^{s\tau_П}$. Уравнению (2.15) придадим более удобный вид:

$$s\varphi(r,s) = \overline{e}^{(s+\alpha)\tau_П} + \alpha \left\{ \overline{e}^{2s\tau_П} \int_0^{\tau_П} \overline{e}^{\alpha u} Q(\tau_П - u)du + \sum_{k=1}^{r-1} \overline{e}^{(k+2)s\tau_П} \cdot \right.$$

$$\cdot \left[\int_0^{\tau_П} \overline{e}^{\alpha u} (Q((k+1)\tau_П - u) - Q(k\tau_П - u)) \right] du +$$

$$\left. + \overline{e}^{(r+1)s\tau_П} g(s) \int_0^{\tau_П} \overline{e}^{\alpha u} \overline{Q}(r\tau_П - u)du \right\};$$

или

$$s\varphi(r,s)=\overline{e}^{(s+\alpha)\tau_П}+\alpha\left\{\overline{e}^{2s\tau_П}\overline{e}^{\alpha\tau_П}\int\limits_0^{\tau_П}e^{\alpha x}Q(x)dx+\sum_{k=1}^{r-1}\overline{e}^{(k+2)s\tau_П}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\overline{e}^{\alpha(k+1)\tau_П}\int\limits_{k\tau_П}^{(k+1)\tau_П}e^{\alpha x}Q(x)dx-\overline{e}^{k\alpha\tau_П}\int\limits_{(k-1)\tau_П}^{k\tau_П}e^{\alpha x}Q(x)dx\right]du+$$

$$\left.+\overline{e}^{(r+1)s\tau_П}g(s)\left[\overline{e}^{\alpha r\tau_П}\int\limits_{(r-1)\tau_П}^{\kappa\tau_П}e^{\alpha x}\overline{Q}(x)dx\right]\right\};\quad r=1,2,3,\dots . \qquad \textbf{(2.16)}$$

Обозначим $T(r)=-s\varphi(r,s)\big|'_{s=0}$ - математическое ожидание времени передачи пакета при r повторных передачах. Для определения $T(r)$ используем выражение (2.16):

$$\lim_{s\to 0}[s\varphi(r,s)]'_s=T(r)=\tau_П\overline{e}^{\alpha\tau_П}+\alpha\left\{2\tau_П\overline{e}^{\alpha\tau_П}\int\limits_0^{\tau_П}e^{\alpha x}Q(x)dx+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{r-1}(k+2)\tau_П\left[\overline{e}^{\alpha(k+1)\tau_П}\int\limits_{k\tau_П}^{(k+1)\tau_П}e^{\alpha x}Q(x)dx-\overline{e}^{k\alpha\tau_П}\int\limits_{(k-1)\tau_П}^{k\tau_П}e^{\alpha x}Q(x)dx\right]+$$

$$\left.+\left[(r+1)\tau_П+\tau_P\right]\left[\overline{e}^{\alpha r\tau_П}\int\limits_{(r-1)\tau_П}^{r\tau_П}e^{\alpha x}\overline{Q}(x)dx\right]\right\}. \qquad \textbf{(2.17)}$$

2.3. Вероятностная характеристика производительности вычислительной машины с учетом ее надежности

Как правило, задачи, решаемые на вычислительных машинах (ВМ), содержат большое количество сложных алгоритмов (программ). Эти алгоритмы в зависимости от исходных и текущих данных определенным образом связанны между собой. Объем вычислений, реализуемый каждым алгоритмом, может быть различным, и переход от одного алгоритма к другому является сложным случайным процессом [11,13,14,29-31,34-46,78-79].

Реализация задания на ВМ может прерываться из-за отказов отдельных узлов и устройств. В зависимости от характера последствий в основном различают три типа отказов [38,78,79]: необесценивающие (характерны для ВМ с развитой системой встроенного контроля, обладающего возможностью проверки результатов каждой операции); частично обесценивающие (ВМ с периодическим контролем работоспособности, в которых периодически фиксируются и сохраняются промежуточные результаты); полностью обесценивающие выполненную работу (ВМ с ненадежным встроенным аппаратурным контролем). Все три типа отказов могут возникать в ВМ в различных соотношениях.

Правильный выбор основных параметров, таких, как быстродействие, объем оперативной памяти, разрядность, система и структура команд и др., весьма существен для обеспечения необходимой производительности ВМ с учетом ее надежности при выполнении работы заданного объема за определенное время. Для ВМ чрезвычайно важно не только связать характеристики надежности с производительностью, но и правильно выбрать режим ее использования [119].

Известны работы, в которых ставились и решались аналогичные задачи [11,13,14,36-40]. Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении. В ней поставлена задача связать надежные характеристики с производительностью контролируемых восстанавливаемых ВМ, предназначенных для выполнения задания определенного объема при более общих предпосылках, чем в известных работах. При этом также рассматривается вопрос об оптимальной организации вычислительного процесса с целью максимальной защиты системы от последствий отказов ВМ и аппаратуры контроля. Таким образом, работа посвящена проблеме осуществимости выполнения задания одной ВМ. С целью оптимальной организации вычислительного процесса программу выполнения задания разбивают на этапы, выполняемые последовательно [38,78,79]. Правильность вычислений проверяется непрерывно, периодически или в конце каждого этапа, в зависимости от принятой системы контроля и стратегии организации вычислительного процесса (результаты правильно решенных этапов запоминаются и сохраняются в случае отказа ВМ). Учет этих особенностей приводит к множеству математических моделей, некоторые из которых рассмотрены ниже. Во всех рассматриваемых моделях принято, что время решения задачи имеет безгранично делимую функцию распределения $\Psi(t)$, полное время решения каждого этапа (с функцией распределения $F_j(t)$ $j=\overline{1,n}$) включает время η, необходимое для образования этапа с функцией распределения $F_{j1}(t)$ и собственное время решения этапа с функцией распределения $F_{j2}(t)$:

$$F_j(t) = F_{j1}(t) * F_{j2}(t), \qquad \Psi(t) = F_1(t) * F_2(t) * \ldots * F_n(t),$$

где n - количество этапов, а "$*$" - символ свертки. Отказы или сбои в течении времени η эквивалентны отказам или сбоям ВМ. Предполагается, что в процессе восстановления или контроля работоспособности ВМ сбои или отказы не возникают, а возникшие до этого отказы или сбои не приводят к изменению времени решения задачи.

Для всех моделей определяется преобразование Лапласа-Стилтьеса функций распределения времени решения задачи с учетом надежности ВМ и выводится в явном виде среднее значение времени решения задачи.

Процесс решения задачи на ВМ рассматривается как полумарковский с фиксированным количеством состояний [10,32].

2.4. ВМ с ненадежным и недостоверным оперативным аппаратурным контролем

Оперативным аппаратурным контролем проверяется правильность хода вычислений, и при обнаружении неисправности (обнаруживаемый отказ - первый вид) ВМ восстанавливается, после чего повторно выполняется определенная часть программы. Если аппаратурный контроль обнаруживает не все ошибки или не все узлы ВМ ими охвачены, то он не является абсолютно достоверным. Поэтому и в контролируемых ВМ могут возникать необнаруживаемые аппаратурным контролем отказы (второй вид). В этом случае ВМ продолжает вычисление до тех пор, пока не возникнет обнаруживаемый отказ или не наступит момент периодического контроля. как в первом так и во втором случаях ВМ ставится на проверку, устанавливается наличие как первого, так и второго видов отказов (если последнее имеет место), после чего ВМ восстанавливается и производится пересчет искаженной части программы.

В этом разделе рассматривается вопрос осуществимости выполнения задания определенного объема ВМ с оперативным аппаратурным контролем с учетом надежности как самой ВМ, так и с учетом надежности и достоверности аппаратуры контроля.

Пусть потоки отказов ВМ распределены по закону Пуассона с интенсивностью λ, включающей интенсивность отказов контрольной аппаратуры λ_k; вероятность обнаружения отказов аппаратурой непрерывного контроля составляет R; отказ контрольной аппаратуры по своим последствиям эквивалентен отказу основной аппаратуры ВМ; время восстановления и время периодического контроля являются случайными величинами с функциями распределения $G(t)$ и $V(t)$ соответственно; времена решения всех n этапов являются одинаково распределенными случайными величинами $F(t)$.

Легко убеждаемся, что интенсивность обнаруживаемых отказов составляет $\alpha = \lambda_k + R(\lambda - \lambda_k)$, а необнаруживаемых $\beta = (1 - R)(\lambda - \lambda_k)$. Очевидно, имеет место равенство $\alpha + \beta = \lambda$.

С начала выполнения *j*-го этапа используем следующие обозначения:

v_{j1} – момент возникновения обнаруживаемого отказа;

v_{j2} – момент проведения периодического контроля (момент окончания решения оставшихся всех *n-j+1* этапов);

$\eta_j(x)$ – количество выполненных этапов за время *x*;

υ_1 – случайное время, необходимое для восстановления ВМ;

υ_2 – случайное время, необходимое для проведения периодического контроля;

ξ_j – временной интервал, в течение которого решается задача, начиная с *j*-го этапа при условии, что последнее восстановление произошло перед началом выполнения *j*-го этапа, т.е. до следующего обнаруживаемого отказа (начала следующего восстановления) или до начала периодического контроля; назовем интервал ξ_j циклом *j*. Очевидно, что

$$\xi_j = \min(v_{j1}, v_{j2}).$$

Процесс решения задачи на ВМ может быть описан с помощью следующей математической модели. рассматриваемая ВМ может находиться в n различных состояниях в зависимости от номера решаемого цикла в данный момент. Время нахождения ВМ в i-м ($i = \overline{1,n}$) состоянии является независимой случайной величиной. Вероятность перехода из состояния i в любое другое состояние j не зависит от номеров ранее решавшихся циклов, и переход происходит всегда при исправной ВМ.

Следуя [32], опишем эту модель, рассматривая ее как полумарковский процесс. В соответствии с [32] полумарковский процесс с конечным числом состояний $\varepsilon\,(e_1, e_2, ..., e_n)$ полностью определяется временем пребывания в состояниях e_i с функцией распределения $P_i(t)$ и условными вероятностями $q_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1,n})$ переходов из состояния e_i в состояние e_j при условии, что полумарковский процесс в течение времени t находился в состоянии e_i. однако в данном случае нет необходимости определять условные вероятности $q_{ij}(t)$ $(i, j = \overline{1,n})$, а достаточно выразить через исходные характеристики процесса переходные вероятности $P_{ij}(t)$ того, что система, находясь в состоянии e_i, в течение времени t перейдет в состояние j.

Очевидно, что в соответствии с изложенным возможны следующие три события.

1. В момент u после начала j-го цикла заканчивается выполнение оставшихся $\eta(u) = n - j + 1$ этапов, причем за время u не возникают ни обнаруживаемые, ни необнаруживаемые отказы и ВМ переходит из j-го состояния в состояние периодического контроля (это состояние назовем состоянием $n+1$). Вероятность этого события равна

$$p_{j,n+1}^{(0)}(u)du = P\left[u < v_{j2} < u + du, \quad v_{j2} < \min(v_{j1}, v_{j3}), \quad \eta_i(u) = n - j + 1\right] = \\ = dF_*^{(n-j+1)}(u)e^{-\lambda u}, \quad j = \overline{1,n}. \qquad \textbf{(2.18)}$$

2. В момент u после начала j-го цикла возникает обнаруживаемый отказ, причем за время u не возникают необнаруживаемые отказы и безошибочно выполняются i этапов. ВМ переходит из j-го состояния в $j+i$-е состояние. Вероятность этого события равна

$$p_{j,j+i}^{(1)}(u)du = P\left[u < v_{j1} < u + du, \quad v_{j1} < \min(v_{j2}, v_{j3}), \quad \eta_i(u) = i\right] = \\ = \alpha e^{-\lambda u} du[F_*^{(i)}(u) - F_*^{(i+1)}(u)], \quad i = \overline{0, n-j}.$$

3. В момент u после начала j-го цикла заканчивается выполнение оставшихся $\eta(u) = n - j + 1$ этапов, причем за время u имеет место хотя бы один необнаруживаемый отказ и не возникает обнаруживаемый отказ или в момент u возникает обнаруживаемый отказ, причем за это время имеет место хотя бы один необнаруживаемый отказ и выполнение оставшихся *n-j+1* этапов не завершено, т.е. $\eta(u) \le n - j.$ Так как в интервале времени (0-u) имел место хотя бы один необнаруживаемый отказ, вся проделанная работа с начала j-го цикла обесценивается. ВМ переходит из j-го состояния в начало j-го состояния. Соответственно вероятности этих событий равны

$$p_{jj}^{(2)}(u)du = P\left[u < v_{j2} < u + du, v_{j3} < v_{j2} < v_{j1}, \eta_i(u) = n - j + i\right] = \\ = dF_*^{(n-j+1)}(u)[1 - e^{-\beta u}]e^{-\alpha u},$$

(2.19)

$$p_{jj}^{(3)}(u)du = P\left[u < v_{j1} < u + du, v_{j3} < v_{j1} < v_{j2}, \eta_i(u) \le n - j\right] = \\ = \alpha e^{-\alpha u} du[1 - e^{-\beta u}][1 - F_*^{(n-j+1)}(u)].$$

Здесь и везде в дальнейшем $F_*^{(n)}(u)$ - это n-кратная свертка распределения $F(u)$ и $F_*^{(0)}(u) = 1$.

Вероятность перехода ВМ в интервале времени (0-t) из i-го в j-е состояние имеет вид

$$P_{ij}^{(\alpha)}(t) = \int_0^t p_{ij}(u)du \quad (\alpha = 0,1,2,3).$$

В рассматриваемой модели распределение времени ξ_j пребывание ВМ в j-м состоянии имеет вид

$$P_j(t) = P_{j,n+1}^{(0)}(t) + P_{jj}^{(2)}(t) + \sum_{i=0}^{n-j} P_{j,j+i}^{(1)}(t) +$$

$$+ P_{jj}^{(3)}(t) = 1 - [1 - F_*^{(n-j+1)}(t)]e^{-\alpha t}.$$

Обозначим τ_j - реальное время необходимое для окончания решения n-этапной задачи, начиная с j-го состояния при исправной ВМ, а его распределение - через $\Phi_j(t)$, т.е.

$$\Phi_j(t) = P[\tau_j < t]. \tag{2.20}$$

Тогда с учетом потери времени υ_1 на восстановление ВМ при отказах и υ_2 на периодические проверки можно написать следующую систему стохастических уравнений для $\tau_j \quad (j = \overline{1,n})$:

$$\tau_j = \sigma_{jj}^{(2)}(\xi_j)[\xi_j + \upsilon_2 + \tau'_j] + \sigma_{j,n+1}^{(0)}(\xi_j)[\xi_j + \upsilon_2] +$$

(2.21)

$$+ \sum_{i=0}^{n-j} \sigma_{j,j+i}^{(1)}(\xi_j)[\xi_j + \upsilon_1 + \tau'_{j+i}] + \sigma_{jj}^{(3)}(\xi_j)[\xi_j + \upsilon_1 + \tau'_j].$$

где $\sigma_{ji}^{(k)}(\xi_j) \quad (j,i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{0,3})$ образуют систему несовместимых индикаторов и

$$\sigma_{ji}^{(k)}(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \textit{с вероятностью } P_{ji}^{(k)}(\xi_j), \\ 0 & \textit{с вероятностью } 1 - P_{ji}^{(k)}(\xi_j); \end{cases}$$

τ_j, τ'_j при каждом j независимы и одинаково распределены; ξ_j, τ'_j и $\sigma_{ij}^{(k)}(\xi_j), \tau'_j$ попарно независимы.

Очевидно, что на основе (2.20) и (2.21) можно написать

$$\Phi_j(t) = P[\sigma_{j,n+1}^{(0)}(\xi_j) = 1, \upsilon_2 < t - \xi_j] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-j} P[\sigma_{j,j+i}^{(1)}(\xi_j) = 1, \upsilon_1 + \tau'_{i+j} < t - \xi_j] +$$

$$+ P[\sigma_{jj}^{(2)}(\xi_j) = 1, \upsilon_2 + \tau'_j < t - \xi_j] +$$

$$+ P[\sigma_{jj}^{(3)}(\xi_j) = 1, \upsilon_1 + \tau'_j < t - \xi_j] \qquad \textbf{(2.22)}$$

или с учетом (2.18), (2.19) систему (2.22) можно привести к следующей системе интегральных уравнений типа свертки:

$$\Phi_j(t) = \int_0^t dF_*^{(n-j+1)}(u) e^{-\lambda u} V(t-u) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-j} \int_0^t \alpha e^{-\lambda u} du\, [F_*^{(i+1)}(u)] \times$$

$$\times \int_0^{t-u} dG(\upsilon) \Phi_{j+i}(t-u-\upsilon) +$$

$$+ \int_0^t dF_*^{(n-j+1)}(u)[1 - e^{-\beta u}] e^{-\alpha u} \int_0^{t-u} dV(v) \Phi_j(t-u-v) +$$

$$+ \int_0^t \alpha e^{-\alpha u} du\, [1 - e^{-\beta u}][1 - F_*^{(n-j+1)}(u)] \times$$

$$\times \int_0^{t-u} dG(\upsilon) \Phi_j(t-u-\upsilon), \quad j = \overline{1, n}, \qquad \textbf{(2.23)}$$

С граничным условием $\Phi_{n+1}(t)=V(t)$.

Применив к системе (2.23) преобразование Лапласа-Стилтьеса и решая ее относительно $\varphi_1(s)\div\Phi_1(t),$ получим

$$\varphi_1(s)=\frac{\upsilon(s)}{s}\prod_{j=1}^{n} b_j(s)\big/a_j(s), \qquad \textbf{(2.24)}$$

где

$$a_j(s)=1-[f^{\,n-j+1}(s+\alpha)-f^{\,n-j+1}(s+\lambda)]\upsilon(s)-\frac{\alpha[1-f(s+\lambda)]g(s)}{s+\lambda}-$$

$$-\left[\frac{f^{\,n-j+1}(s+\lambda)-1}{s+\lambda}-\frac{f^{\,n-j+1}(s+\lambda)-1}{s+\alpha}\right]\alpha g(s),$$

$$b_j(s)=f(s+\lambda)-\alpha g(s)f(s+\lambda)\left[\frac{f^{\,n-j}(s+\lambda)-1}{s+\lambda}-\right.$$

$$\left.-\frac{f^{\,n-j}(s+\lambda)-1}{s+\alpha}\right]-[f^{\,n-j}(s+\alpha)-f^{\,n-j}(s+\lambda)]f(s+\lambda)\upsilon(s);$$

а

$$\varphi_j(s)=\int_0^\infty e^{-st}\Phi_j(t)dt \quad (j=\overline{1,n}), \quad g(s)=\int_0^\infty e^{-st}dG(t), \quad \upsilon(s)=\int_0^\infty s^{-st}dV(t),$$

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF(t)$$

являются преобразованиями Лапласа - Стилтьеса.

Легко убеждаемся, что $\varphi_1(s)$ является функцией распределения. Действительно, $\lim s\varphi_1(s)=1$ при $s\to 0$, так как при $s=0$ $b_i(0)=a_i(0)$ для всех значений $i=\overline{1,n},$ а $v(0)=1$.

Зная $\varphi_1(s)$, можно найти все моменты распределения $\Phi_j(t)$ для каждого конкретного случая. Обратное преобразование можно произвести по известным приближенным методам. Ниже приведем выражение только для математического ожидания T_1 времени решения n-этапной задачи, если ее решение начнется с первого этапа при исправной ВМ:

$$T_1 = -\left|s\varphi_1(s)\right|'_{s=0} = \tau_k + \sum_{j=1}^{n} d_j / a_j, \qquad \textbf{(2.25)}$$

где

$$d_j = \frac{1+\alpha\tau_B}{\alpha}\{[1-f(\lambda)]-[f(\alpha)-f(\lambda)]f^{n-j}(\alpha)\} - \tau_K[f(\alpha)-f(\lambda)]f^{n-j}(\alpha),$$

$$a_j = f(\lambda)[\beta f^{n-j}(\lambda)+\alpha]/\lambda.$$

Здесь $\tau_K = -v'(0)$ и $\tau_B = -g'(0)$ - среднее время периодического контроля и восстановления соответственно.

Рассмотрим несколько примеров использования в этом разделе полученных формул.

а. ВМ с достоверным оперативным аппаратурным контролем $(\beta = 0, R = 1)$ без периодического контроля $(\tau_K = 0)$. Воспользовавшись (2.24), (2.25) для этого случая, получим

$$\varphi_1(s) = (s+\alpha)^n f^n(s+\alpha) / s\{s+\alpha-\alpha[1-f(s+\alpha)]g(s)\}^n,$$

$$T_1 = n(1+\alpha\tau_{\mathbf{B}})[1-f(\alpha)]/\alpha f(\alpha).$$

Определим оптимальное число этапов, при котором математическое ожидание времени выполнения задания будет минимальным. Пусть для выполнения задания в условиях безошибочной работы ВМ требуется постоянное время T, а для образования этапов - $\tau_Э$, т.е.

$$f_1(s) = esp(-s\tau_Э), \quad f_2(s) = esp(-sT/n) \quad и \quad f(s) = f_1(s)\cdot f_2(s).$$

Для этого приравниваем к нулю производную T_1 по *n*. В результате получим

$$n \approx [\alpha T / \sqrt{1-\exp(-\alpha\tau_Э)}].$$

б. Оперативный аппаратурный контроль отсутствует, правильность функционирования ВМ проверяется только периодическим контролем, т.е. отсутствуют обнаруживаемые отказы $(\alpha = 0)$. С учетом $\psi(s) = f^n(s)$ для этого случая получаем

$$\varphi_1(s) = \nu(s)\psi(s+\beta)/s\,\{1 - [\psi(s) - \psi(s+\beta)] \cdot \upsilon(s)\},$$

$$T_1 = (T + \tau_K) f^{-n}(\beta) = (T + \tau_K)/\psi(\beta),$$

где $T = -nf'(0)$ - математическое ожидание времени решения всей задачи в условиях безошибочной работы ВМ с учетом потерь времени на образование этапов. Как следовало ожидать, в этом случае разбиение программы решения задачи на отдельные этапы нецелесообразно, так как при такой системе контроля ВМ удлиняется время решения задачи.

2.5. ВМ с непрерывным аппаратурным контролем с возможностью обнаружения двойных и коррекции одиночных ошибок

Пусть решаемая на ВМ задача состоит из n различных алгоритмов (подпрограмм этапов) $A_j \quad (j = \overline{1,n})$, время выполнения каждого из которых предполагается независимой случайной величиной, распределенной по произвольному закону $F_j(x) \quad (j = \overline{1,n})$; в реализации каждого j-го алгоритма принимает участие определенный состав устройств ВМ, поэтому для потоков устойчивых полностью обесценивающих и самоустраняющихся отказов принимаются разные интенсивности β_j и α_j до возникновения отказа, а после его возникновения β_{j1} и α_{j1} соответственно; эти интенсивности включают и интенсивности отказов и сбоев контрольной аппаратуры; отказы и сбои контрольной аппаратуры по своим последствиям эквивалентны сбоям и отказам основной аппаратуры ВМ; ВМ с оперативным аппаратурным контролем (за счет ее аппаратурной избыточности) способна сразу обнаруживать (в пределах одной или нескольких машинных операций) все двойные ошибки и скорректировать все одиночные ошибки.

Примерами технической реализации такой модели ВМ могут являться: ВМ с двумя устройствами параллельной обработки информации с независимым аппаратурным контролем и устройствами хранения и передачи двоичной информации (внутренняя и внешняя память) в коде Хемминга или в другом коде с корректирующей способностью [115]; ВМ, допускающие распараллелирование каждой машинной операции с аппаратурным контролем каждого канала, и др. В этих и других случаях, когда при отказе другой части (одного параллельного устройства) её восстановление невозможно без остановки ВМ в целом, целесообразно, блокировав выход неисправной части, продолжить решение задачи с исправной частью ВМ, а восстановление произвести после того, как в процессе решения задачи откажет и исправная часть.

Используем следующие обозначения, начиная с момента выполнения j-го этапа;

v_{j1} - момент окончания решения j-го этапа;

v_{j2} - момент наступления первого отказа;

v_{j3} - момент наступления сбоя;

а с момента наступления первого отказа τ_{j1} - момент наступления второго отказа;

τ_{j2} - момент наступления сбоя;

τ_{j3} - момент окончания j-го этапа.

v_1 - время необходимое для устранения последствий сбоя;

v_2 - время необходимое для восстановления ВМ при отказе.

Время, в течении которого решается *j*-ий этап, назовем *j*-м состоянием ВМ. ВМ может находиться в *n* разных состояниях в зависимости от решаемого этапа в данный момент и аналогично предыдущей модели описываться с помощью полумарковских процессов. Переходы в этой модели, в отличие от предыдущей, могут происходить как при исправной ВМ, так и с одним отказом.

Пусть $p_{jk}^{\alpha\beta}(u)du$ и $p_{jk}^{\alpha\beta}(u,\upsilon)\,du\,d\upsilon$ - вероятности переходов из *j*-го в *k*-ое состояние в момент u и $u+\upsilon$ соответственно; α - состояние ВМ в начале решения *j*-го этапа; β - то же самое в начале решения *k*-го этапа. Если $\alpha,\beta=0$, ВМ исправна; если $\alpha,\beta=1$, в ВМ имеется один отказ.

В рассматриваемом случае возможны переходы из одного состояния в другое со следующими вероятностями:

$$p_{j,j+1}^{00}(u)du = P\left[u < v_{j1} < u+du, \quad v_{j1} < v_{j2}\right] = dF_j(u)e^{-\beta_j u},$$

$$p_{j,j+1}^{(01)}(u,\upsilon)dud\upsilon = P\left[u < v_{j2} < u+du, \quad \upsilon < \tau_{j3} < \upsilon + d\upsilon, \quad \tau_{j3} < \min(\tau_{j1},\tau_{j3})\right] = \\ = \beta_j e^{-\beta_j u} dudF_j(u+\upsilon)e^{-\lambda_{j1}\upsilon},$$

$$p_{jj}^{01}(u,\upsilon)dud\upsilon = P\left[u < v_{j2} < u+du, \quad \upsilon < \tau_{j2} < \upsilon + d\upsilon, \quad \tau_{j2} < \min(\tau_{j1},\tau_{j3})\right] = \\ = \beta_j e^{-\beta_j u} du[1-F_j(u+\upsilon)]\alpha_{j1} e^{-\lambda_{j1}\upsilon} du,$$

$$p_{j1}^{00}(u,\upsilon)dud\upsilon = P\left[u < v_{j2} < u+du, \quad \upsilon < \tau_{j1} < \upsilon + d\upsilon, \quad \tau_{j1} < \min(\tau_{j2},\tau_{j3})\right] = \\ = \beta_j e^{-\beta_j u} du[1-F_j(u+\upsilon)]\beta_{j1} e^{-\lambda_{j1}\upsilon} d\upsilon,$$

$$p_{j,j+1}^{11}(u)du = P\big[u < v_{j1} < u+du,\quad v_{j1} < \min(v_{j2}, v_{j3})\big] = dF_j(u)e^{-\lambda_{j1}u},$$

$$p_{jj}^{11}(u)du = P\big[u < v_{j3} < u+du,\quad v_{j3} < \min(v_{j1}, v_{j2})\big] =$$
$$= \alpha_{j1}e^{-\lambda_{j1}u}[1 - F_j(u)]du,$$

$$p_{jj}^{10}(u)du = P\big[u < v_{j2} < u+du,\quad v_{j2} < \min(v_{j1}, v_{j3})\big] =$$
$$= \beta_{j1}e^{-\lambda_{j1}u}[1 - F_j(u)]du,$$

Переходные вероятности в интервале времени *(0-t)* имеют вид

$$P_{ji}^{\alpha\beta}(t) = \iint\limits_{u+v<t} p_{ji}^{\alpha\beta}(u,\upsilon)du d\upsilon \quad \text{или} \quad P_{ji}^{\alpha\beta}(t) = \int_0^t p_{ji}^{\alpha\beta}(u)du \quad (\alpha, \beta = 0{,}1).$$

Введем $\tau_j^0,\ \Phi_j^0(t)\ и\ \tau_j^1,\ \Phi_j^1(t)$; это - реальное время, необходимое для окончания решения задачи и их функции распределения, если решение задачи начнется с j-го этапа при исправной ВМ в первом случае или с одним отказом во втором случае, т.е.

$$\Phi_j^0(t) = P(\tau_j^0 < t),\quad \Phi_j^1(t) = P(\tau_j^1 < t).$$

Аналогично первому разделу относительно $\Phi_j^0(t)\ и\ \Phi_j^1(t)$ составляем следующую систему интегральных уравнений:

$$\Phi_j^0(t) = \int_0^t dF_j(u)e^{-\beta_j u}\Phi_{j+1}^0(t-u) + \int_0^t \beta_j e^{-\beta_j u}du \int_0^{t-u} dF_j(u+\upsilon)\times$$

$$\times e^{-\lambda_{j1}\upsilon}\Phi_{j+1}^1(t-u-\upsilon) + \int_0^t \beta_j e^{-\beta_j u}du \int_0^{t-u} \alpha_{j1}e^{-\lambda_{j1}\upsilon}[1 - F_j(u+\upsilon)]d\upsilon\times$$

$$\times \int_0^{t-u-\upsilon} dG_1(v)\Phi_j^1(t-u-\upsilon-v) + \int_0^t \beta_j e^{-\beta_j u}du \int_0^{t-u} \beta_{j1}e^{-\lambda_{j1}\upsilon}[1 - F_j(u+\upsilon)]d\upsilon\times$$

$$\times \int_0^{t-u-\upsilon} dG_2(v)\Phi_1^0(t-u-\upsilon-v), \qquad \mathbf{(2.26)}$$

$$\Phi_j^1(t) = \int_0^t dF_j(u) e^{-\beta_j u} \Phi_{j+1}^1(t-u) + \int_0^t \alpha_{j1} e^{-\lambda_{j1} u} [1 - F_j(u)] du \int_0^{t-u} dG_1(v) \times$$

$$\times \Phi_j^1(t-u-v) + \int_0^t \beta_{j1} e^{-\lambda_{j1} u} [1 - F_j(u)] du \int_0^{t-u} dG_2(v) \Phi_1^0(t-u-v),$$

$j = \overline{1,n}, \quad \lambda_j = \alpha_j + \beta_j, \quad \lambda_{j1} = \alpha_{j1} + \beta_{j1}.$

Граничными условиями являются

$$\Phi_{n+1}^0(t) = \Phi_{n+1}^1(t) = 1 \qquad \textbf{(2.27)}$$

Применив в системе (2.26) преобразование Лапласа-Стилтьеса и решая ее относительно $\varphi_1^0(s)$ с учетом (2.27), получим

$$\varphi_1^0(s) = \left[\frac{1}{s} \sum_{m=1}^{n} \left(k_m \prod_{v=1}^{m} d_{v-1} \right) \right] \Bigg/ \left\{ \left[\sum_{m=1}^{n} \left(a_m \prod_{v=1}^{m} d_{v-1} \right) \right] - 1 \right\}, \quad d_0 = 1, \qquad \textbf{(2.28)}$$

где

$k_m = K_m \qquad (m = \overline{1, n-1}), \qquad k_n = K_n - k_n$

$$a_j = a_j^0 \left(\sum_{\rho=1}^{n-j} b_{j+\rho} \prod_{i=1}^{\rho-1} c_{i+j} \right) + b_j^0 \left(\sum_{\rho=1}^{n-j+1} b_{j+\rho-1} \prod_{i=1}^{\rho-1} c_{i+j-1} \right) + c_j^0,$$

$$K_j = -a_j^0 \prod_{\rho=1}^{n-j} c_{n-\rho+1} - b_j^0 \prod_{\rho=1}^{n-j+1} c_{n-\rho+1},$$

$$e_{ij} = [1 - f_j(p_{j1})] / p_{j1}, \qquad e_{ij} = [1 - f_j(p_{j2})] / p_{j2}, \qquad d_j = f_j(p_{j1}),$$

$$a_j^0 = \beta_i [f_j(p_{j1}) - f_j(p_{j2})] / \alpha_j^0, \qquad b_j^0 = (\beta_j \alpha_{j1} / \alpha_j^0)(e_{j1} - e_{j2}) g_1(s),$$

$$c_j^0 = (\beta_j \alpha_{j1} / \alpha_j^0)(e_{j1} - e_{j2}) g_2(s), \qquad b_j = \beta_{j1} e_{j2} g_2(s) / [1 - \alpha_{j1} e_{j2} g_1(s)],$$

$$c_j = f_j(p_{j2}) / [1 - \alpha_{j1} e_{j2} g_1(s)], \qquad p_{j1} = s + \beta_j, \qquad p_{j2} = s + \lambda_{j1}, \qquad \textbf{(2.29)}$$

$$\alpha_j^0 = \lambda_{j1} - \beta_j, \qquad \varphi_j^i(s) = \int_0^\infty e^{-st}\Phi_j^i(t)dt \qquad (i = 0,1),$$

$$g_i\,(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG_i\, t \qquad (i = 1,2),$$

$$f_j\,(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_j\, t, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Среднее значение времени решения задачи T_1, если её решение начнётся с первого этапа, определяется из выражения

$$T_1 = \frac{\sum_{m=1}^{n}\left(k_{m0}\prod_{i=1}^{m} d_{i-1,0}\right)}{\left[\sum_{m=1}^{n}\left(a_{m0}\prod_{i=1}^{m} d_{i-1,0}\right)\right]-1}, \quad d_{00}=1, \qquad \mathbf{(2.30)}$$

где

$$a_{j0} = a_j\big|_{s=0}, \qquad d_{j0} = d_j\big|_{s=0}, \qquad k_{j0} = \left|a_j + d_j + k_j\right|'_{s=0}. \qquad \mathbf{(2.31)}$$

В частном случае, когда отсутствуют отказы $(\beta_j = 0,\ \ j = \overline{1,n})$, из

(2.28) получим

$$\varphi_1^0(s) = \frac{1}{s}\prod_{v=1}^{n} f_v(s), \qquad T_1 = -\sum_{v=1}^{n} f_v'(0)\,,$$

т.е. на работу ВС одиночные сбои влияния не оказывают.

Рассмотрим пример расчета среднего времени решения задачи устройством с коррекцией одиночных ошибок при отсутствии сбоев.

Пусть время решения задачи распределено по показательному законы с интенсивностью μ; среднее значение времени восстановления составляет τ_B; количество решаемых алгоритмов (выполняемых программ) равно единице (решаемая задача не делится на этапы); корректируемый отказ не изменяет интенсивность отказов устройства в целом. В соответствии с этим

$$n = 1, \qquad j = 1, \qquad f_1(s) = \mu / s + \mu, \qquad g_2'(0) = -\tau_B, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \lambda_{11} = \lambda_1 = \beta.$$

Здесь потерей времени на образование этапа пренебрегаем. В соответствии с (2.29) находим

$d_1 = \mu / s_0, \qquad \alpha_1^0 = \mu\beta / \alpha_0^2, \qquad b_1^0 = 0, \qquad c_1^0 = \beta^2 g_2(s) / s_0^2, \qquad b_1 = \beta g_2(s) / s_0,$

$c_1 = \mu / s_0, \qquad s_0 = s + \mu + \beta, \qquad a_1 = c_1^0, \qquad k = -a_1^0.$

Из выражений (2.31) с учётом изложенного, получаем

$a_{10} = \beta^2 /(\mu + \beta)^2, \qquad d_{10} = \mu /(\mu + \beta), \qquad k_{10} = -(\beta^2 \tau_B + \mu + 2\beta)/(\mu + \beta)^2.$

Воспользовавшись выражением (2.30), находим среднее значение времени решения задачи

$$T_1 = k_{10} /(a_{10} - 1) = \frac{1}{\mu} + \beta^2 \tau_B / \mu(\mu + 2\beta). \qquad \textbf{(2.32)}$$

Из (2.32) очевидно, что увеличение среднего времени T_1 за счёт ненадёжности устройства составляет $\beta^2 \tau_B / \mu(\mu + 2\beta)$.

2.6. ВС с тремя видами отказов и идеальным непрерывным аппаратным контролем

Имеют место три вида неисправностей : в первом случае обесценивается проделанная работа в пределах этапа (интенсивность λ_j), во втором случае – вся проделанная работа (интенсивность α_j) и в третьем случае – проделанная работа только в пределах одной машинной операции (интенсивность γ_j).

В рассматриваемом случае безразлично, в какой момент времени ВС решает задачу, а в какой момент находится в процессе восстановления по причине возникновения *k* необесценивающих отказов (эти отказы не вызывают переходов из состояния в состояние). Поэтому, будем полагать, что после перехода ВС из *i*-го состояния в *j*-ое состояние на ремонт ВС теряется суммарное время, необходимое для k-кратного её восстановления (в этом варианте состоянием i ВС будем называть процесс решения i-го этапа, всего может существовать n состояний). С учётом этого аналогично предыдущим случаям составляем следующую систему интегральных уравнений:

$$\Phi_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left[\int_0^t dF_j(u) e^{-\lambda_j u} (\gamma_j u)^k / k! \right] \times \int_0^{t-u} dG_{3\bullet}^{(k)}(\upsilon) \Phi_{j+1}(t-u-v) + \right.$$

$$+ \alpha_i \int_0^t \left[e^{-\lambda_j u} \overline{F}_j(u) (\gamma_j u)^k / k! \right] \times du \int_0^{t-u} dG_{3\bullet}^{(k)}(\upsilon) \int_0^{t-u-v} dG_1(v) \Phi_j(t-u-\upsilon-v) +$$

$$\left. + \beta_i \int_0^t \left[e^{-\lambda_j u} \overline{F}_j(u) (\gamma_j u)^k / k! \right] du \int_0^{t-u} dG_{3\bullet}^{(k)}(\upsilon) \times \int_0^{t-u-v} dG_2(v) \Phi_1(t-u-\upsilon-v) \right]$$

$$\lambda_j = \alpha_j + \beta_j + \gamma_j, \qquad \overline{F}_j(u) = 1 - F_j(u), \qquad dG_3^{0)} = 1, \qquad j = \overline{1,n}, \qquad \textbf{(2.33)}$$

где $G_i(\upsilon)$ $(i = \overline{1,3})$ - функции распределения времени восстановления в соответствии с видами отказов; $G_{3\bullet}^{(k)}(\upsilon)$ - k-кратная свёртка функции распределения $G_3(\upsilon)$;

$P_k=[(-\lambda_j u)^k exp(-\lambda_j u)]/k!$ – вероятность возникновения k неисправностей (отказов) за время u решения этапа.

Граничным условием является $\Phi_{n+1}(t)=1$.

Применив к системе (2.33) преобразование Лапласа Стилтьеса, получим

$$a_j \varphi_j(s) - b_j \varphi_j(s) + c_j \varphi_{j+1}(s) = 0, \qquad \varphi_{n+1}(s) = 1/s, \qquad j = \overline{1,n}, \qquad \textbf{(2.34)}$$

где

$$a_i = \beta_i g_2(s)[1 - f_j(p_j - \gamma_j g_3(s))]/[p_j - \gamma_j g_3(s)],$$

$$b_i = 1 - \alpha_i g_1(s)[1 - f_j(p_j - \gamma_j g_3(s))]/[p_j - \gamma_j g_3(s)],$$

$$c_i = f_j[p_j - \gamma_j g_3(s)], \qquad p_j = s + \lambda_j$$

Решая систему (2.34) относительно $\varphi_1(s)$, получим

$$\varphi_1(s) = \left[\prod_{i=1}^{n} c_i / b_i\right] \Big/ \left[1 - \sum_{m=1}^{n} a_m \prod_{i=1}^{m} c_{i-1} b_i\right] s, \qquad c_0 = 1. \qquad \textbf{(2.35)}$$

Выражение для среднего значения времени решения задачи – T_1 определяется аналогично предыдущему и имеет вид

$$T_1 = \left[\sum_{m=1}^{n} d_{m0} \prod_{i=1}^{m} c_{i-1,0} b_{i0}\right] \Big/ \left\{\left[\sum_{m=1}^{n} a_{m0} \prod_{i=1}^{m} c_{i-1,0} b_{i0}\right]\right\} - 1, \qquad \textbf{(2.36)}$$

где

$$a_{j0} = \beta_j[1 - f_j(\alpha_j + \beta_j)]/(\alpha_j + \beta_j),$$

$$b_{j0} = 1 - \alpha_j[1 - f_j(\alpha_j + \beta_j)]/(\alpha_j + \beta_j),$$

$$b_{j0} - a_{j0} = c_{j0}, \qquad c_{j0} = f_j(\alpha_j + \beta_j)$$

$$d_{j0} = -[1 - f_j(\alpha_j + \beta_j)][1 - \alpha_j g_1'(0) - \beta_j g_2'(0) - \gamma_j g_3'(0)]/(\alpha_j + \beta_j),$$

$$c_{00} = 1, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Если все этапы распределены одинаково и интенсивности отказов не зависят от решаемых этапов, из (2.36) получим

$$T_1 = [d_0(c_0^n - b_0^n)]/(b_0 - c_0)c_0^n,$$

$$a_{j0} = a_0, \qquad b_{j0} = b_0, \qquad c_{j0} = c_0, \qquad d_{j0} = d_0, \qquad j = \overline{1,n}. \qquad \textbf{(2.37)}$$

Рассмотрим некоторые примеры использования полученных формул (2.35), (2.37):

а) λ =0; из (2.37) получим

$$T_1 = \{[(\alpha+\beta)f(\alpha+\beta)]^n - [\beta + \alpha f(\alpha+\beta)]^n\}\times$$

$$\times[\alpha_j g_1'(0) - \beta_j g_2'(0) - 1]/\beta[(\alpha+\beta)f(\alpha+\beta)]^n. \qquad \textbf{(2.38)}$$

б) $f(s)=exp(-sT_3)$, $\beta=0$, $g_1(s)= \nu_1/s+\nu_1$, $g_1(s)= \nu_3/s+\nu_3$, т.е. время решения задачи – постоянная величина (nT_3) , а функции распределения времени восстановления ВС по отказам первого и третьего видя являются показательными с интенсивностями ν_1 и ν_3 соответственно. Тогда из (2.38) получим

$$T_1 = \frac{n}{\alpha}[e^{\alpha T_3} - 1]\left[1 + \frac{\alpha}{\nu_1} + \frac{\gamma}{\nu_3}\right]; \qquad \textbf{(2.39)}$$

в) $\alpha=0$, $\beta=0$, из (2.35) получаем

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{s}\prod_{i=1}^{n} f_i[s + \gamma_i(1 - g_3(s))]. \qquad \textbf{(2.40)}$$

Полученные выражения (2.39) - (2.40) совпадают с результатами, приведёнными в [10,116] при n=1.

2.7. Вычислительные системы с программным контролем

Пусть решаемая задача разбита на N частей, а каждая часть на n одинаково распределённых этапов (*F(t)*). Проверка правильности результатов работы ВС производится путём повторения решения на каждом этапе до появления двух совпадающих результатов (не обязательно подряд). Тем самым снижается влияние сбоя на результаты вычислений.

Защита результатов вычислений от влияния устойчивых отказов производится периодическим контролем через определённые промежутки времени. Периодический контроль включает в себя, при необходимости, восстановление ВС и аппаратуры контроля. Потерей времени, необходимой для установления достоверности полученных результатов при сбоях, пренебрегаем.

Пусть *V(t)* – функция распределения времени периодического контроля, α – интенсивность сбоев; β – интенсивность отказов.

Введём две разные функции распределения вероятности $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$, причём $\Phi_1(t)$ – вероятность выполнения *n* этапов за время меньше *t* при наличии только сбоев, $\Psi_1(t)$ – функция распределения времени решения *n* этапов (одной части) при наличии как сбоев, так и отказов. На основе аналогичных рассуждений функции $\Phi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$ определяются следующими системами интегральных уравнений:

$$\Phi_j(t) = \int_0^t dF(u)e^{-\alpha u} \int_0^{t-u} dF(\upsilon)e^{-\alpha\upsilon}\Phi_{j+1}(t-u-\upsilon) +$$

$$+ \int_0^t dF(u)(1-e^{-\alpha u}) \int_0^{t-u} dF(\upsilon)e^{-\alpha\upsilon} \int_0^{t-u-\upsilon} dF(\tau)e^{-\alpha\tau}\Phi_{j+1}(t-u-\upsilon-\tau) +$$

$$+ \int_0^t dF(u)e^{-\alpha u} \int_0^{t-u} dF(\upsilon)(1-e^{-\alpha\upsilon}) \int_0^{t-u-\upsilon} dF(\tau)e^{-\alpha\tau}\Phi_{j+1}(t-u-\upsilon-\tau) +$$

$$+ \int_0^t dF(u)(1-e^{-\alpha u}) \int_0^{t-u} dF(\upsilon)(1-e^{-\alpha\upsilon}) \int_0^{t-u-\upsilon} dF(\tau)e^{-\alpha\tau} \times$$

$$\times \int_0^{t-u-\upsilon-\tau} dF(v)e^{-\alpha v}\Phi_{j+1}(t-u-\upsilon-\tau-v) + \ldots, \qquad j=\overline{1,n}, \qquad \Phi^i_{n+1}=1; \tag{2.41}$$

$$\Psi_1(t)=\int_0^t d\Phi_1(u)e^{-\beta u}V(t-u)+\int_0^t d\Phi_1(u)(1-e^{-\beta u})\times$$

$$\times\int_0^{t-u} dV(v)\Psi_1(t-u-v). \qquad \textbf{(2.42)}$$

Очевидно, что каждый член (2.41) предусматривает два пересчёта каждого этапа, прошедшего без искажения, т.е. первый член означает что произведено два пересчёта и оба успешных (без искажения), второй член – без искажения прошли второй и третий пересчёты, третий член – без искажения прошли первый и третий пересчёты и т.д. Первый член уравнения (2.42) означает вероятность того, что решение задачи без возникновения отказов закончится за время u, а периодический контроль займёт время t–u; второй член – вероятность того, что за время u появится хотя бы один отказ, периодический контроль и восстановление займут время v и решение одной части закончится за время меньше $t-u-v$, и т.д.

Преобразовав (2.41) и (2.42) и решая их относительно $\varphi_1(t)$ и $\Psi_1(t)$, получим

$$\varphi_1(s)=s^{-1}\{f(s+\alpha)/[1-f(s)+f(s+\alpha)]\}^{2n},$$

$$\psi_1(s)=[1-f(s)+f(s+\alpha)]^{2n}\upsilon(s)f^{2n}(s+\lambda)/s\{[1-f(s+\beta)+$$

$$+f(s+\lambda)]^{2n}[(1-f(s)+f(s+\alpha))^{2n}-\upsilon(s)f^{2n}(s+\alpha)]+$$

$$+[1-f(s)+f(s+\alpha)]^{2n}\upsilon(s)f^{2n}(s+\lambda)\}$$

где

$$\lambda = \alpha + \beta, \qquad f(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t), \qquad \upsilon(s) = \int_0^\infty e^{-st} dV(t), \qquad \varphi_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Phi_1(t) dt,$$

$$\psi_1(s) = \int_0^\infty e^{-st} \Psi_1(t) dt.$$

Аналогично первой модели с учётом $T_1^n = -\left| s\varphi_1(s) \right|'_{s=0}$ и $T_1 = -\left| s\psi_1(s) \right|'_{s=0}$ получим

$$T_1^n = -2nf'(0) f^{-1}(\alpha) \text{ и}$$
$$T_1 = -[2nf'(0) f^{-1}(\alpha) + \upsilon'(0)][1 - f(\beta) + f(\lambda)]^{2n} / f^{2n} \lambda, \qquad \textbf{(2.43)}$$

где $-f'(0)$ и $-\upsilon'(0)$ – математическое ожидание времени решения этапа и периодического контроля соответственно.

Полное среднее время решения всей задачи

$$T_0 = NT_1. \qquad \textbf{(2.44)}$$

Рассмотрим некоторые примеры:

а) Если отсутствуют отказы ($\beta = 0$, $\upsilon'(0) = 0$); из (2.42) получим $T_1 = -2nf'(0) f^{-1}(\alpha)$, а если отсутствуют сбои (α=0), то получим среднее время решения всей задачи:

$$T_1 = -2nf'(0); \qquad T_0 = -2nNf'(0);$$

б) Отсутствуют сбои ($\alpha = 0$); из (2.42) и (2.43) получим

$$T_0 = -[2nf'(0) + \upsilon'(0)] f^{-2n}(\beta) N;$$

в) Времена T_0, $\tau_Э$, τ_K решения задачи, образования этапа, периодического контроля – постоянные величины, т.е. их преобразования Лапласа-Стилтьеса выражаются как

$$\Psi(s) = \exp(-sT_0), \qquad f(s) = \exp(-s(\tau_Э + T_0 / nN)], \qquad \upsilon(s) = \exp(-s\tau_к).$$

Соответственно из (2.42) получим

$$T_1 = \{2(n\tau_Э + T_0 / n)\exp[(\tau_Э + T_0 / nN)(2\lambda n + \alpha)] +$$

$$+ \tau_K \exp[2(\tau_Э + T_0 / nN)\,\lambda n]\}\,\{1 - \exp[-(\tau_Э + T_0 / nN)\beta] + \exp[-(\tau_Э + T_0 / nN)\lambda]\}^{2n}$$

г) В (2.42) предположим, что время выполнения задания в условиях безошибочной работы ВС равно постоянной величине T_0, т.е. $T_0 = -nNf'(0)$ и α =0; потери времени на образование этапов малы и ими можно пренебречь $(\tau_Э = 0)$. Тогда оптимальное значение количества частей N, при котором T_0 принимает минимальное значение, равно

$$N_0 = [T_0(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\beta / \tau_K})],$$

а при сравнительно малых интенсивностях отказов $(\beta < 0{,}1)$

$$N_0 \approx [T_0(\beta + 2\sqrt{\beta / \tau_K})].$$

В заключение отметим, что знание функции распределения времени решения задачи и её математического ожидания с учётом надёжности ВС, надёжности и организации систем контроля, в зависимости от стратегии использования самой ВС, имеет важное практическое значение для правильного выбора основных параметров в процессе её проектирования, а также для оптимальной организации вычислительного процесса (соответствующим выбором значений n и N, т.е. из условий минимума среднего времени решения задачи) в период её эксплуатации.

Выводы к Главе 2

В этой главе впервые исследованы вопросы безошибочной передачи информации через ненадежный канал связи с учетом длительности мешающего фактора, распределенного по закону Эрланга. Получены следующие основные результаты:

1) Исследована новая математическая модель канала связи, с учетом длительности самоустраняющегося мешающего фактора. В этой модели время передачи сообщений, устранения причин отказа и длительности мешающего фактора, а также интервалы времени между отказами, распределены по произвольному закону или закону Эрланга. Исходя из общей модели, рассмотрены модели, имеющие практическое применение.

2) Получено обобщенное выражение вероятности того, что сообщение будет передано за заданное время без искажения. На основе этого выражения получена формула вычисления математического ожидания времени многократной передачи сообщения. Анализ этой формулы, с учетом объема передаваемых сообщений и характеристик канала связи, дает возможность выбирать рациональную стратегию безошибочной передачи сообщений за заданное время. Полученные результаты можно использовать с целью наилучшего применения технических систем в процессе эксплуатации.

Глава 3.
Организационно-технические способы повышения надежности

Для инженерно-технической реализации методов повышения надежности отдельных единиц оборудования и технологических схем, на всех этапах их существования, необходимо использовать специальные организационно-технические и технологические способы обеспечения, поддержания и повышения надежности.

К организационно-техническим способам периода эксплуатации объектов относятся техническая диагностика и техническое обслуживание [4], [5], [7], [105].

Техническая диагностика объектов (ТД) представляет собой техническую операцию получения и обработки информации о состоянии объектов во времени и с целью обнаружения фактов существования отказов и установления причин возникновения или мест появления отказов. Техническая диагностика позволяет повысить готовность сложных технических систем (ТС), что обеспечивается улучшением их характеристик восстанавливаемости, достигаемым уменьшением времени поиска отказавшего элемента и обнаружения причин возникновения отказа, а также уменьшением времени устранения отказа [4,5,105]. Практическая реализация ТД объектов связана с разработкой методов и аппаратурно-технических средств контроля работоспособности и обнаружения отказов оборудования и технологических схем.

Техническое обслуживание (ТО) – это совокупность организационных и технических мероприятий, направленных на предупреждение отказов, обеспечение исправного состояния в процессе эксплуатации и готовности объектов к использованию. К основным задачам ТО относятся: предупреждение ускоренного износа и старения; устранение последствий износа и старения; поддержание основных технических характеристик устройств на нужном уровне [4,5,105].

Восстановление основных технических характеристик работоспособности оборудования и технологических схем осуществляется организацией системы планово-предупредительного ремонта (ППР). Ныне существующая система ППР предусматривает два вида ремонтов: текущий и капитальный, а также межремонтное обслуживание (проверка состояния). Системой ППР устанавливаются нормативы пробега оборудования до каждого вида ремонта и время простоя в ремонте, т.е. ремонт осуществляется по календарным срокам, независимо от наработки системы. Такая система ППР имеет ряд недостатков:

1) Нормами межремонтных периодов не учитываются условия эксплуатации оборудования, они являются слишком обобщенными;

2) Часть ремонтных нормативов установлена в основном эмпирически, без накопления и математической обработки достаточного количества статистической информации по отказам оборудования;

3) Не создан банк статистических данных об отказах ВС, позволяющих рассчитывать характеристики надежности, которые могут быть использованы для разработки рекомендаций по повышению надежности ТС.

Эти недостатки ППР снижают эффективность работы оборудования и ТС в целом. Рассмотрим сущность трех стратегий технического обслуживания (ТО) объектов:

1) «групповая стратегия», которая осуществляется по календарным срокам независимо от наработки ТС;

2) «индивидуальная стратегия», осуществляемая по выработке заранее установленных межремонтных ресурсов;

3) «нулевая стратегия», при которой ремонты проводятся по техническому состоянию в момент возникновения отказа.

Величина коэффициента технического использования для указанных стратегий соответственно равна:

для «индивидуальной»

$$k_{Tu} = T_P \big/ \left[\tau_m \Omega(T_P) + \tau_{пл} + T_P\right];$$

для групповой

$$k_{Tu} = T_M \big/ \left[T_M + \tau - (\tau - \tau_{пл}) + P(T_{Пл})\right];$$

для нулевой

$$k_{Tu} = k_Г = T/(T_P + \tau).$$

Здесь T_P - назначенный межремонтный ресурс объекта, r_{ac}; $\tau_{пл}$ - среднее время на выполнение ППР; $\Omega(T_P)$ - ведущая функция потока отказов; τ_m - среднее время внепланового ремонта, восстанавливающего только отказавший элемент объекта; τ_b - среднее время восстановления объекта; T_M - средняя наработка между проведением плановых и внеплановых мероприятий; T - наработка на отказ; $T_{пл}$ - плановый срок между проведением плановых мероприятий; $P(T_{пл})$ - вероятность безотказной работы за интервал времени $-[0, T_{пл}]$.

Таким образом, при решении общей проблемы повышения надежности и эффективности функционирования технических систем возникает задача разработки обоснованной стратегии эксплуатации.

Стратегия эксплуатации (правила технического обслуживания) строится на основании [105]:

1) объективности данных о технической системе (характеристик безопасности и ремонтопригодности);

2) специфических особенностей системы (структуры системы, характеристик индикации отказов, наличия встроенного контроля работоспособности);

3) стратегии эксплуатации, которая должна обладать свойством оптимальности по некоторому показателю, характеризующему качество функционирования и эксплуатации системы.

Выбор оптимальной стратегии технического обслуживания позволяет добиваться наилучших результатов за счет реорганизации правил эксплуатации без привлечения дополнительных сил и средств.

В качестве математической модели, описывающей эволюцию технической системы во времени, используется случайный процесс, принадлежащий к регенерирующим случайным процессам [4-8].

В разобранных здесь задачах технического обслуживания рассматриваются следующие показатели качества функционирования при длительной эксплуатации:

1) коэффициент готовности;

2) вероятность выполнения задания (коэффициент оперативной готовности);

3) оптимальные правила контроля работоспособности системы;

4) коэффициент использования оборудования за календарное время функционирования системы.

3.1. Вопросы определения коэффициента технического использования некоторой сложной установки

Как известно, для повышения надежности в данном случае могут быть использованы несколько видов избыточности: нагрузочная, аппаратурная и временная.

О временной избыточности говорят в тех случаях, когда системе в процессе функционирования предоставляется возможность израсходовать некоторое время для восстановления ее технических характеристик $[M,\tau,]$. Можно указать несколько основных источников резерва времени. Прежде всего, он может создаваться за счет увеличения времени, выделяемого системе для выполнения порученного ей задания. Вторым основным источником является запас производительности, который позволяет уменьшить минимальное время выполнения задания. Запас производительности можно образовать, увеличивая мощность установки. В системах, результат работы которых оценивается объемом производимого продукта, резерв времени можно создать за счет внутренних запасов выходной продукции.

Резерв времени можно расходовать не только на ремонт, но и на обнаружение отказов, повторение работ, обесцененных отказом. В различных системах способы использования резерва времени, определяемые условиями функционирования, могут быть весьма разнообразными. В рассматриваемых здесь системах, значение выделяемого резерва времени может быть установлено заранее, до начала работы, в зависимости от степени использования установленной мощности и фонда рабочего времени. Этот резерв времени предназначается для компенсации любых потерь рабочего времени. По мере накопления потерь рабочего времени текущее значение резерва уменьшается, пока не достигнет нуля.

Резерв времени следует рассматривать как один из многих видов избыточности, которые можно вводить совместно или порознь для повышения надежности технических систем. Как и другие виды избыточности, временная избыточность вносит новые элементы в трактовку основных понятий теории надежности и, прежде всего, понятия отказа.

Здесь рассмотрены две модели эксплуатационной надежности оборудования установки, отличающиеся функцией распределения времени безотказной работы.

Модель 1. Пусть ВС подвержена двум видам отказов:

1) постепенные (износовые, параметрические), обнаруживаемые только в процессе периодического контроля или восстановления;

2) внезапные, обнаруживаемые идеальным непрерывным аппаратурным контролем в момент его возникновения; время, прошедшее с момента возникновения отказа до момента окончания восстановления, считается обесцененным (потерянным), которое вычитается из общего календарного времени (причиной обесценивания может быть неудовлетворительное качество выпускаемой продукции в интервале времени с момента возникновения отказа до момента его обнаружения или чего-то другое); для увеличения точности (адекватности) модели, параметрический отказ, в отличие от известных решений, принять распределенным по специальному закону Эрланга; внезапный отказ принят распределенным по показательному закону.

Требуется определить полезное время $T_П$, отработанное ВС (оборудованием) из общего календарного времени $T_К$ между профилактическими ремонтами, и коэффициент технического использования оборудования

$$K_{Tu} = T_{П} \big/ (T_{П} + T_{рем} + T_{к}), \quad \textbf{(3.1)}$$

который определяется как отношение полезной наработки установки $T_{П}$ за некоторый период эксплуатации к сумме этой наработки и времени всех простоев, вызванных ремонтами $T_{рем}$, времени профилактических и других обслуживаний $T_{обсл}$ и временем контроля работоспособности системы $T_{к}$.

Обозначим: $\tau_{э} = T_{П} / m$ - длительность периодичности времени текущего контроля оборудования (в дальнейшем его будем именовать этапом); m - количество этапов; $F(t) = 1(t - \tau_{э})$ - функции распределения (ФР) этапа, $1(t)$ - единичная функция; α - интенсивность внезапного отказа; $b(u) = \left[\beta(\beta u)^{n-i} \exp(-\beta u)\right] \big/ (n-1)!$ - плотность ФР времени возникновения параметрического (наступающего) отказа, если в момент $u = 0$ он находится в i-ой фазе (n общее количество фаз); $V(t)$ - ФР времени периодического контроля (в конце каждого этапа проводится периодический контроль для обнаружения, имеет ли место параметрический отказ); $G_{П}(\upsilon)$ - ФР времени восстановления отказавшего оборудования после внезапного (катастрофического) отказа; $G_{Пb}(\upsilon)$ - ФР времени восстановления, когда имеют место оба видов отказа; после восстановления по причине параметрического отказа оборудование приобретает первоначальную надежность, т.е. отсчет фазы наступающего параметрического отказа начинается с первой фазы (в случае необходимости (с целью учета предыстории с любой фазы)); $l_i^{(\upsilon)}(u)$ - вероятность того, что за время u параметрический отказ изменил фазу, начиная с i-го по $\upsilon(\upsilon = \overline{i,n})$.

Для решения поставленной задачи введем ФР $\phi_j^{(i)}(t,x)$ $(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m})$- вероятность того, что выполнения задания, состоящего из *m* этапов, каждый длиной $\tau_Э$, завершиться за время меньшее *t*, если в момент *t=0*: 1) уже выполнено о-1 этапов (контроля работоспособности) и *x*-ая часть *j*-го этапа; 2) по наступающему параметрическому отказу система находилась в *i*-ой фазе;

$$\phi_{n+1}^{(i)}(t,x)=1(t) \quad (i=\overline{1,n};\, x\in(0,t)); \quad \phi_j^{(i)}(t,x)=\begin{cases}0, & если\ x>\tau_Э\\ \phi_{j+1}^{(i)}(t,0), & если\ x=\tau_Э\end{cases}$$

$$(i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}); \quad \overline{F}(x)=1, \quad если \quad x\le\tau_Э; \quad 1(t)=\begin{cases}1 & если\ t\ge 0,\\ 0 & если\ t<0.\end{cases}$$

Относительно $\phi_j^{(i)}(t,x)$ $(j=\overline{1,m}; i=\overline{1,n})$, при $x\in(0,\tau_Э)$, имеет место следующая система интегральных уравнений:

$$\phi_j^{(i)}(t,x)=\int_0^t b_i^{(n)}(u)du\cdot\overline{e}^{\alpha u}\int_0^{t-u} dF(x+u+\upsilon)\overline{e}^{\alpha u}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{t-u-\upsilon} dV(\tau)\int_0^{t-u-\upsilon-\tau} dG_П(\eta)\cdot\phi_j^{(1)}(t-u-\upsilon-\tau-\eta,x+u)+$$
$$+\sum_{\upsilon=i}^{n}\int_0^t dF(x+u)\cdot l_i^{(\upsilon)}(u)\overline{e}^{\alpha u}\int_0^{t-u} dV(\tau)\cdot\phi_{j+1}^{(\upsilon)}(t-u-\tau,0)+$$
$$+\sum_{\upsilon=i}^{n}\int_0^t \alpha\overline{e}^{\alpha u}du\cdot l_i^{(\upsilon)}(u)\overline{F}(x+u)\int_0^{t-u} dG_b(\upsilon)\cdot\phi_j^{(\upsilon)}(t-u-\upsilon,x+u)+$$
$$+\int_0^t b_i^{(n)}(u)du\cdot\overline{e}^{\alpha u}\int_0^{t-u}\alpha\overline{e}^{\alpha\upsilon}d\upsilon\cdot\overline{F}(x+u+\upsilon)\cdot$$
$$\cdot\int_0^{t-u-\upsilon} dG_{Пb}(\tau)\cdot\phi_j^{(1)}(t-u-\upsilon-\tau,x+u); \quad i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}. \tag{3.2}$$

Здесь $l_{\upsilon}^{(n)}(u)=\dfrac{(\beta u)^{n-\upsilon}}{(n-\upsilon)!}\overline{e}^{\beta u}$; $b_{i}^{(n)}(u)=\dfrac{\beta(\beta u)^{n-i}}{(n-i)!}\overline{e}^{\beta u}$; $\overline{F}(u)=1-F(u)$.

Поясним уравнение (3.2). Первый член - это совместная вероятность того, что: 1) в интервале времени $(u,u+du,\ u\in(0,t))$ первым наступит параметрический (постепенный) отказ, $(b_i^{(n)}(u)du)$; 2) за время u не возникает внезапный отказ $(\exp(-\alpha u))$ и не завершиться выполнение i-го этапа $(\overline{F}(x+u)/\overline{F}(x))$; 3) после износового отказа первым завершиться выполнение j-го этапа задания в интервале времени $(x+u+\upsilon,\quad x+u+\upsilon+d\upsilon;\quad (\upsilon\in(0,t-u)))-dF_j(x+u+\upsilon)/\overline{F}(x+u)$, а за время v внезапный отказ не возникнет $(\exp(-\alpha\upsilon))$; 4) периодический контроль, который проводиться в конце выполнения каждого этапа задания завершиться в интервале $(\tau,\tau+d\tau,\quad \tau\in(0,t-u-\upsilon))-dV(\tau)$; 5) а интервале времени $(\eta,\eta+d\eta,\quad \eta\in(0,t-u-\tau))$ закончится восстановление отказавшего оборудования $(dG_{П}(\eta))$; выполнение всего задания, начиная с j-го этапа, завершиться за время $t-u-v-\tau-\eta$ при условии, что в момент $t=u-v-\tau-\eta$ уже была полезно выполнена $x+u$-ая часть j-го этапа и система по наступающему постепенному отказу находилась в первой фазе $\phi_j^{(1)}(t-u-v-\tau-\eta,x+u)$; второй член - это совместная вероятность того, что: 1) первым завершится выполнение j-го этапа задания в интервале времени $(x+u,x+u+du;\quad u\in(0,t))$; за время u наступающий постепенный отказ изменит фазу с i-го по $v(v=\overline{i,n})-l_i^{(v)}(u)$; 3) за это время внезапный отказ не возникнет $(\exp(-\alpha u))$; 4) периодический контроль завершиться в интервале времени $((\tau,\tau+d\tau),\quad \tau\in(0,t-u-v))-dV(\tau)$; 5) в интервале времени $((\eta,\eta+d\eta),\quad \eta\in(0,t-u-v-\tau))$ закончится восстановление отказавшего оборудования $(dG_{П}(\eta))$; выполнение всего задания, начиная с j-го этапа, завершиться за время $t-u-v-\tau-\eta$ при условии, что в момент $t=u-v-\tau-\eta$ уже была полезно выполнена $x+u$ -ая часть j-го этапа и система по наступающему постепенному отказу находилась в первой фазе $\phi_j^{(1)}(t-u-v-\tau-\eta, x+u)$; второй член - это совместная вероятность того, что: 1) первым завершится выполнение j-го этапа задания в интервале времени $(x+u, x+u+du;\quad u\in(0,t))$; 2) за время u наступающий постепенный отказ изменит фазу с i-го по $v\quad (v=\overline{1,n})-l_i^v(u)$; 3) за это время внезапный отказ не возникнет $(\exp(-\alpha u))$; 4) периодический контроль завершиться в интервале времени $((\tau,\tau+d\tau),\quad \tau\in(0,t-u))-dV(\tau)$; 5) выполнение задания завершиться за время, меньшее $t-u-\tau$, начиная с $i+1$-го этапа задания при v-ом состоянии системы по наступающего постепенному отказу $\phi_{j+1}^{(v)}(t-u-\tau,0)$; аналогично поясняются третий и четвертый члены, поэтому здесь их приводить не будем.

Применив преобразование Лапласа-Стилтьеса к системе уравнений (3.2), имеем:

$$\phi_j^{(i)}(s,x)=\overline{e}^{(\alpha+\beta+s)x}\overline{e}^{(\alpha+s)\tau_э}g_{П}(s)\nu(s)\cdot$$

$$\cdot\frac{\beta^{n-i+1}}{(n-i)!}\int_x^{\infty}\overline{e}^{\beta\xi}(\xi-x)^{n-1}\phi_j^{(1)}(s,\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{v=i}^{n}[\nu(s)]\phi_{j+1}^{v}(s,o)\overline{e}^{(\alpha+\beta+s)(\tau_э-x)}\frac{\beta^{v-i}}{(n-i)!}(\tau_э-x)^{v-i}+$$

$$+\sum_{v=i}^{n}[\alpha g_{bH}(s)e^{(\alpha+\beta+s)x}\cdot\frac{\beta^{v-i}}{(n-i)!}\int_x^{\tau_э}e^{(\alpha+\beta+s)\xi}\cdot$$

$$\cdot\phi(\xi-x)^{v-i}\phi_j^{(v)}(s,\xi)+\alpha\frac{g_{Пb}(s)}{\alpha+s}\overline{e}^{(\alpha+\beta+s)x}\frac{\beta^{v-i+1}}{(n-i)!}\cdot$$

$$\cdot\int_x^\infty \overline{e}^{\beta\xi}(\xi-x)^{n-1}\overline{e}^{(\alpha+s)\xi}\phi_j^{(\nu)}(s,\xi)d\xi-\overline{e}^{(\alpha+s)\tau_э}\cdot$$

$$\cdot\int_x^\infty \overline{e}^{\beta\xi}(\xi-x)^{n-1}\phi_j^{(1)}(s,\xi)d\xi] \tag{3.3}$$

$$\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}.$$

Здесь $\phi_j^{(i)}(t,x)\div\phi_j^{(i)}(s,x)$; $v(s)\div V'(t)$; $g_П(s)\div g(t)$; где $\div$ - символ преобразования Лапласа-Стилтьеса.

В дальнейшем изучим эти уравнения при $\alpha=0$ (отсутствует внезапный отказ). С учётом этого (3.3) представим в следующем виде:

$$\overline{e}^{(s+\beta)x}\phi_j^{(i)}(s,x)=\overline{e}^{s\tau_э}g_П(s)\nu(s)\frac{\beta^{n-i+1}}{(n-i)!}\int_x^{\tau_э}\overline{e}^{\beta\xi}(\xi-x)^{n-1}\phi_j^{(1)}(s,\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{\nu=i}^{n}[\nu(s)\phi_{j+1}^{\nu}(s,o)\overline{e}^{(\alpha+\beta)\tau_э}]\frac{\beta^{\nu-i}}{(\nu-i)!}(\tau_э-x)^{\nu-i};\quad \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}; \tag{3.4}$$

$$\phi_m^{(i)}(s,\tau_э)=\frac{\nu(s)}{s};\quad \phi_j^{(i)}(s,\tau_э)=\phi_{j+1}^{(i)}(s,o);\quad \mathrm{j}=\overline{1,m-1};\quad \phi_{m+1}(s,o)=1/s.$$

Таким образом, для определения $\phi_j^{(i)}(s,x)$ ($\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}$) получим систему разностных интегральных уравнений с начальными и граничными условиями. Дифференцированием обеих сторон (3.4) n-i+1 раз, можно перейти к системе линейных дифференциальных уравнений n-i+1-го порядка с переменными коэффициентами, решение которой в квадратурах при больших n представляет довольно сложную задачу. Для практических целей вполне достаточно знание числовых характеристик распределений $\phi_j^{(i)}(s,x)$: математического ожидания, дисперсии и других моментов. Поэтому, с учётом того, что $\lim\limits_{s\to 0} s\,\phi_j^{(i)}(s,x)=1$,

$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{ds\phi_j^{(i)}(s,x)}{ds}=-T_j^{(i)}(x)$ $\quad (x\in(o,\tau_э))$, систему (3.3) перепишем в следующем виде:

$$x\overline{e}^{\beta x}+\overline{e}^{\beta x}T_j^{(i)}(x)=(\tau_э+\tau_П+\tau_k)\frac{\beta^{n-i+1}}{(n-i)!}\int\limits_x^{\tau_э}\overline{e}^{\beta\xi}(\xi-x)^{n-i}d\xi+$$

$$+\frac{\beta^{n-i+1}}{(n-i)!}\int\limits_x^{\tau_э}\overline{e}^{\beta\xi}(\xi-x)^{n-i}T_j^{(1)}(\xi)d\xi+$$

$$+\overline{e}^{\beta\tau_э}\sum_{v=i}^{n}(\tau_э+\tau_П+T_{j+1}^{(v)}(o))\frac{\beta^{v-i}}{(v-i)!}(\tau_э-x)^{v-i};\qquad \textbf{(3.5)}$$

$i=1,n;\ j=\overline{1,m}$; $\quad T_j^{(i)}(\tau_э)=T_{j+1}^{(v)}(o)$; $\quad T_{m+1}^{(i)}(o)=0$; $\quad T_m^{(i)}(\tau_э)=\tau_k$.

Здесь $\quad \tau_k\equiv v'(o);\quad \tau_П=-g'_П(0)$.

Рассмотрим решение (3.5) для различных значений *n*.

1) *n=1, i=1*. После подстановки *n=1* и *i=1* в (3.5) имеем

$$x\overline{e}^{\beta x}+\overline{e}^{\beta x}T_j^{(1)}(x)=(\tau_э+\tau_П+\tau_k)\beta\int\limits_x^{\tau_э}\overline{e}^{\beta\xi}d\xi+$$

$$+\beta\int\limits_x^{\tau_э}\overline{e}^{\beta\xi}T_j^{(1)}(\xi)d\xi+\overline{e}^{\beta\tau_э}(\tau_э+\tau_П+T_{j+1}^{(v)}(o))\qquad \textbf{(3.6)}$$

После дифференцирования обеих сторон (3.6) по x получим

$$\frac{dT_j^{(1)}(x)}{dx}+(\tau_э+\tau_П+\tau_k-x)\beta+1=0;\qquad \textbf{(3.7)}$$

$$T_{m+1}^{(1)}(x)=0;\quad T_j^{(1)}(\tau_э)=T_{j+1}^{(1)}(o);\quad T_m^{(1)}(\tau_э)=\tau_k.$$

Решая (3.7) и потом, подставляя $x=0$, получим

$$T_1^{(1)}(o) = m\tau_k + [1+(\tau_{\Pi}+\tau_k)\beta]n\tau_э + \frac{\beta}{2}\frac{(n\tau_э)^2}{m}. \qquad \textbf{(3.8)}$$

Таким образом, при наличии отказов, требуемая $T_1^{(1)}(o)$ времени для получения полезного времени между профилактическими проверками $T_{\Pi} = T_{зад} = n\tau_э$. Максимальное значение K_{Tu} получается при

$$\tau_э = \sqrt{\frac{2}{\beta}\tau_k}\,. \qquad \textbf{(3.9)}$$

2) n=2, i=1,2. После подстановки n=2 и i=1 в (3.5) и несложного преобразования получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$T_j^{(2)}(\tau_э) = \tau_k + T_{j+1}^{(2)}(o)$$

$$\frac{d^2T_j^{(1)}(x)}{dx^2} - 2\beta\frac{dT_j^{(1)}(x)}{dx} + [\beta^2 x - 2\beta - (\tau_э + \tau_{\Pi} + \tau_k)\beta^2] = 0\,; \qquad \textbf{(3.10)}$$

$T_{m+1}^{(i)}(o) = 0$ *(i=1,2);* $T_m^{(i)}(\tau_э) = \tau_k + T_{m+1}^{(i)}(o) = \tau_k$;

$T_j^{(1)}(\tau_э) = T_{j+1}^{(1)}(o) + \tau_k$;

$$-\left.\frac{dT_j^{(1)}(x)}{dx}\right/_{x=\tau_э} = 1 - \beta(T_j^{(1)}(\tau_э) - T_j^{(1)}(\tau_э))\,.$$

В результате решения (3.10) определяются $T_j^{(i)}(o)$. Аналогично, подставляя в *n=2* и *i=2*, находим $T_j^{(2)}(o)$, а $T_1\,(o) = \frac{1}{2}(T_1^{(1)}(o) - T_1^{(2)}(o))$.

Модель 2. Аналогично первой модели, пусть оборудование системы подвержено двум видам отказов:

1) постепенные, обнаруживаемые только в процессе периодического контроля или восстановления (ремонта);

2) внезапные, обнаруживаемые идеальным непрерывным аппаратурным контролем в момент их возникновения. Время, прошедшее с момента возникновения отказа до момента окончания восстановления, считается обесцененным (потерянным) и вычитается из общего календарного времени.

С целью увеличения точности модели, постепенный отказ постепенный отказ принят распределённым по гиперэкспоненциальному закону, а внезапный отказ – по показательному закону. В процессе контроля или восстановления заказы не возникают.

Требуется определить полезное время $T_{\text{П}}$, отработанное оборудованием из общего календарного времени T_{KB} между профилактическими проверками и коэффициент технического использования.

Сохраним прежние обозначения $\tau_э = \dfrac{T_n}{m}$ - длительность периодичности контроля (m – количество этапов; $F_i(t) = 1(t - \tau_{iэ})$ $(\mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{m}})$ - функция распределения (ФР) длительности этапа (1(t) – единичная функция)); α - интенсивность внезапного отказа; $b(u) = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i \exp(-\beta_i u)$ - плотность распределения (ПР) постепенного отказа, которая состоит из n стадий-ветвей (с вероятностью p_i отказ произойдёт на i-ой стадии (ветви) с плотностью распределения времени безотказной работы $\beta_i \exp(-\beta_i u)$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Заметим, что при соответствующем выборе параметров $\mathrm{n}, \beta_{\mathrm{i}}, \mathrm{p}_{\mathrm{i}}$ $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}$ можно получить распределение, имеющее любое желаемое среднее и любой дробный коэффициент вариации, заключённый между 1 и ∞); V(t) – ФР времени периодического контроля (в конце каждого этапа проводится периодический контроль); $G_{\Pi}(v)$ - ФР времени восстановления оборудования, если имел место постепенный отказ; $G_{BH}(v)$ - ФР времени восстановления отказавшего оборудования после внезапного отказа; $G_{\Pi B}(v)$ - ФР времени восстановления , когда имеют место оба вида отказов. После полного восстановления система по своим качествам эквивалентна новой (заметим, что мероприятия по восстановлению являются главными, прежде всего, когда системы подвержены постепенному отказу (износу)).

Для решения поставленной задачи также введём ФР - $\phi_j^{(i)}(t,x)$ $(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}})$, вероятность того, что выполнение задания, состоящего из m этапов, каждый длительностью $\tau_э$, завершится за время, меньшее t, если в момент t=0:

1) уже было выполнено j-1 этапов и x-ая часть j-го этапа;

2) по наступающему отказу система находилась в i-ой стадии (ветви).

Относительно $\phi_j^{(i)}(t,x)$ $(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}})$, если $x\in(0,\tau_{jэ})$, то имеет место следующая система интегральных уравнений:

$$\phi_j^{(i)}(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\beta_i\overline{e}^{(\beta_i+\alpha)u}du\int_0^{t-u}\overline{e}^{\alpha v}dF_j(x+u+v)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{t-u-v}dV(\tau)\int_0^{t-u-v-\tau}dV\,p_k\phi_j^{(k)}(t-u-v-\tau-\eta,\ x+u)dG_n(\eta)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\beta_i\overline{e}^{(\beta_i+\alpha)u}du\int_0^{t-u}\alpha\overline{e}^{\alpha v}[1-dF_j(x+u+v)]dv\cdot$$

$$\cdot\int_0^{t-u-v}p_k\phi_j^{(k)}(t-u-v-\tau,\ x+u)dG_{\Pi BH}(\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^t\beta_i\overline{e}^{(\beta_i+\alpha)u}dF_j\int_0^{t-u}\phi_{j+1}^{(i)}(t-u-v-\tau,\ 0)dV(\tau)+$$

$$+\int_0^t \alpha_i \bar{e}^{(\beta_i+\alpha)u}[1-F_j(x+u)]\int_0^{t-u}\phi_{j+1}^{(i)}(t-u-v,\ x+u)dG_{BH}(v);$$

$$F_j(0)=F_j(\tau_{jЭ})=0;\ \ \phi_j^{(i)}(t,\tau_{jЭ})=\phi_{j+1}^{(i)}(t,0);\ \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}; \quad \textbf{(3.11)}$$

$$\phi_m^{(i)}(t,\tau_{jЭ})=V(t);$$

$$\phi_j^{(i)}(t,x)=0 \quad \text{если} \quad x>\tau_{jЭ}.$$

Уравнение (3.11) составлено на основе полумарковских процессов [27,32].

Для примера поясним первый и второй члены.

Первый член – это совместная вероятность того, что:

1) в интервале времени *(u,u+du;* $u\in(0,t)$*)* первым наступит постепенный отказ на стадии *i* $\beta_i\exp(-\beta_i u)du$;

2) за время *u* не возникнет внезапный отказ (*exp(-*α *u)*) и не завершится выполнение *j*-го этапа $\frac{[1-F_j(x+u)]}{[1-F_j(x)]}$;

3) после постепенного отказа в интервале времени (*x*+*u*+*v,* *x*+*u*+*v*+*dv,* $v\in(0,t-u)$) завершится выполнение j-го этапа $\frac{dF_j(x+u+v)}{[1-F_j(x+u)]}$ и за время v внезапный отказ не возникнет (exp(-α v));

4) периодический контроль, который производится в конце выполнения каждого этапа, завершится в интервале $(\tau,\tau+d\tau,\tau\in(0,t-u-v))-dV(\tau)$;

5) в интервале времени $(\eta,\eta+d\eta,\eta\in(0,t-u-v-\tau))$ закончится восстановление отказавшего оборудования $-G_{\Pi}(\eta)$;

6) выполнение всего оставшегося задания $(m-j)\tau_{jЭ}$ полезной наработки завершится за календарное время $t-u-v-\tau-\eta$, при условии, что в момент времени $t=u+v+\tau+\eta$ уже завершено *j-1*

этапов и полезно выполнено *x+u* временных единиц *j*-го этапа и система по наступающему полезному отказу с вероятностью p_k находится в *k*-ой стадии $(k = \overline{1,n})$ – $p_k \phi_j^{(k)}(t-u-v-\tau-\eta, x+u)$.

Второй член – это совместная вероятность того, что:

1) в интервале времени $(u, u+du, u \in (0,t))$ возникнет постепенный отказ на *i*-ой стадии, не завершится выполнение *j*-го этапа $(\beta_i \exp\{-(\alpha+\beta_i)u\}(1-F_j(x+u))du/(1-F_j(x))$;

2) в интервале $(v, v+dv, v \in (0, t-u))$ возникает внезапный отказ не завершится выполнение j-го этапа $(\alpha \exp(-\alpha v)(1-F_j(x+u+v))dv/(1-F_j(x+u))$;

3) в интервале $(\tau, \tau+d\tau, \tau \in (0, t-u-v))$ завершится восстановление отказавшего оборудования и выполнение оставшегося задания завершится за время *t-u-v-*τ при условии, что уже выполнено *j-1* этапов задания, полезная наработка *j*-го этапа составила *x+u* временных единиц и система по наступающему постепенному отказу с вероятностью p_k находится на стадии *k* $p_k \phi_j^{(k)}(t-u-v-\tau, x+u)$.

Применив к (3.13) преобразование Лапласа-Стилтьеса, относительно $\phi_j^{(k)}(s,x) \Leftrightarrow \phi_j^{(k)}(t,x)$ получим следующую картину разностных интегральных уравнений:

$$\overline{e}^{\alpha_j x} \phi_j^{(k)}(s,x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_i g_{\Pi}(s) v(s) p_k \overline{e}^{(\alpha+s)\tau_{jЭ}} \cdot$$

$$\cdot \int_x^{\tau_{jЭ}} \overline{e}^{\beta_i \xi} \phi_j^{(k)}(s,\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{n} p_k \beta_i \frac{\alpha g_{ПВН}(s)}{\alpha+s} \cdot$$

$$\cdot\left[\int_x^{\tau_Э}\overline{e}^{\alpha_i\xi}\phi_j^{(k)}(s,\xi)d\xi-\overline{e}^{(\alpha+s)\tau_{jЭ}}\int_x^{\tau_{jЭ}}\overline{e}^{\beta_i\xi}\phi_j^{(k)}(s,\xi)d\xi\right]+v(s)\phi_{j+1}^{(k)}(s,0)\overline{e}^{\alpha_i\tau_{jЭ}}+$$

$$+\alpha g_{BH}(s)\int_x^{\tau_Э}\overline{e}^{\alpha_i\xi}\phi_j^{(k)}(s,\xi)d\xi\,;$$

$\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}},\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}$; $\phi_m^{(i)}(t,\tau_{mЭ})=v(s)/s$; $\phi_{m+1}^{(i)}(s,x)=1/s$; $x\in(0,\tau_{m+1,э})$;

$\phi_j^{(k)}(s,\tau_{mЭ})=v(s)\cdot\phi_{j+1}^{(i)}(s,0)$.

Здесь

$\alpha_i=s+\alpha+\beta_i$;

$g_{\Pi}(s)\div G'(t)=g(t)$;

$v(s)\div V'(t)$;

$g_{ПВН}(s)\div G'_{ПВН}(t)=g_{ПВН}(t)$, где "$\div$" - символ преобразования Лапласа.

Дифференцируя обе стороны (3.12) по x, после несложного преобразования переходим к системе обыкновенных линейных разностных уравнений:

$$\frac{d\phi_j^{(i)}(s,x)}{dx}+(\alpha g_{BH}(s)-\alpha_i)\phi_j^{(i)}(s,x)+$$

$$+\left[g_{\Pi}(s)v(s)e^{(\alpha+s)(x-\tau_{jЭ})}+\frac{\alpha g_{ПВН}(s)}{\alpha+s}(1-e^{(\alpha+s)(x-\tau_{jЭ})}\right]\cdot\beta_i\sum_{k=1}^{n}p_k\phi_j^{(i)}(s,x)=0$$

$\phi_j^{(i)}(t,\tau_{jЭ})=\phi_{j+1}^{(i)}(s,0)$; $\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m-1}}$; $\phi_m^{(i)}(s,\tau_{mЭ})=v(s)/s$; $\phi_{m+1}^{(i)}(s,x)=v(s)/s$;

$x\in(0,\tau_{jЭ})$; $\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}$. **(3.13)**

В результате решения (3.13) определяем $\phi_j^{(i)}(s,x)$ $(\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}})$ и её обратное преобразование $\phi_j^{(i)}(t,x)$, которое является ФР ($\lim\limits_{s\to\infty}s\phi_j^{(i)}(t,x)=\lim\limits_{s\to 0}s\phi_j^{(i)}(s,x)=1$; $\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}};\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}$; $x\in(0,\tau_{jЭ})$). Так как в практических приложениях обычно интересуются числовыми характеристиками функции распределения, ниже приведем выражения для определения только математического ожидания, которое можно получить непосредственным переходом из системы (10) или (11). Для этого воспользуемся зависимостью $T_j^{(i)}(x) \equiv \lim_{s\to 0}\left| s\phi_j^{(i)}(s,x)\right|'$ (здесь - " ' " символ производной).

Умножая обе стороны (3.11) на s и дифференцируя по s (меняем порядок интегрирования и дифференцируя), получим

$$\frac{dT_j^{(i)}(x)}{dx} - \beta T_j^{(i)}(x) + \beta_i \sum_{k=1}^{n} p_k T_j^{(k)}(x) =$$

$$= -\left[1 + (\tau_П + \tau_K)\beta_i e^{\alpha(x-\tau_{jЭ})} + \beta(1+\alpha\tau_{ПВН})\left(1-e^{\alpha(x-\tau_{jЭ})}\right)\Big/\alpha + \alpha\tau_{ВН}\right] \qquad \textbf{(3.14)}$$

$$T_j^{(i)}(\tau_{jЭ}) = \tau_K + T_{j+1}^{i}(0); \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}; \quad T_{m+1}^{(i)}(x)=0, \quad x\in(0,\tau_{jЭ});$$

$$T_j^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & если \quad x > \tau_{jЭ}; \\ T_{j+1}^{(i)}(0) + \tau_K, & если \quad x = \tau_{jЭ}. \end{cases}$$

Здесь:

$\tau_П = -g_П(s)\big|'_{s=0}$; $\tau_k = -v(s)\big|'_{s=0}$; $\tau_{ПВН} = -g_{ПВН}(s)\big|'_{s=0}$; $\tau_{ВН} = -g_{ВН}(s)\big|'_{s=0}$ –

математические ожидания соответствующих случайных величин.

Система (3.14) состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и решается общеизвестным методом. Однако практически удобно ее решать методом преобразований Лапласа. С этой целью видоизменим ее. Введем новую переменную $\xi = \tau_{jЭ} - x$, которая представляет остаточное время, необходимое для завершения этапа. С учетом того, что

$$T_j^{(i)}(x) = T_j^{(i)}(\tau_{jЭ} - \xi) = \widetilde{T}_j^{(i)}(\xi); \quad \frac{d\widetilde{T}_j^{(i)}(x)}{dx} = -\frac{d\widetilde{T}_j^{(i)}(\xi)}{d\xi},$$

систему (3.14) перепишем в следующем виде:

$$\frac{d\widetilde{T}_j^{(i)}(\xi)}{d\xi} - \beta_i^j \widetilde{T}_j^{(i)}(\xi) + \beta_i^j \sum_{k=1}^{n} p_k \widetilde{T}_j^{(k)}(\xi) =$$
$$= -\left[1 + (\tau_П + \tau_К)\beta_i^j e^{-\alpha\zeta} + \beta_i^j (1 + \alpha\tau_{ПВН})(1 - e^{\alpha\xi}) \big/ \alpha + \alpha\tau_{ВН}\right] = F_i(\xi); \quad \textbf{(3.15)}$$

$$\widetilde{T}_j^{(i)}(0) = T_j^{(i)}(\tau_{jЭ}); \quad \widetilde{T}_j^{(i)}(0) = \tau_K + \widetilde{T}_{j+1}^{(i)}(\tau_{jЭ}); \quad \widetilde{T}_m^{(i)} = \tau_k; \quad \widetilde{T}_{m+1}^{(i)}(x) = 0,$$

$$i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}; \quad x \in (0, \tau_{jЭ}).$$

Применив преобразование Лапласа к (3.15) имеем:

$$\omega\widetilde{\widetilde{T}}_j^{(i)}(\omega) - (\tau_k + \widetilde{T}_{j+1}^{(i)}(\tau_{jЭ})) + \beta_i \widetilde{\widetilde{T}}_j^{(i)}(\omega) - \beta_i \sum_{k=1}^{n} p_k \widetilde{\widetilde{T}}_j^{(k)}(\omega) - F_t(\omega); \quad \textbf{(3.16)}$$

$$j = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n};$$

$$\widetilde{\widetilde{T}}_{m+1}^{(i)}(\tau_{mЭ}) = 0.$$

Здесь $\widetilde{\widetilde{T}}_j^{(i)}(\omega) \Leftrightarrow \widetilde{\widetilde{T}}_j^{(i)}(\xi);\ \ F_i(\omega) = \dfrac{1+\alpha\tau_{ВН}}{\omega} + \dfrac{\beta_i(\tau_П + \tau_k)}{\omega+\alpha} + \dfrac{\beta_i(1+\alpha\tau_{ПВН})}{\omega(\omega+\alpha)}.$

Алгоритм решения (3.16) можно представить, как последовательность выполнения следующих шагов:

а) вначале полагаем $j = m$ *и* $\widetilde{\widetilde{T}}_{m+1}^{(i)}(\tau_{mЭ}) = 0;$

б) из системы (3.16) определяем $\widetilde{\widetilde{T}}_m^{(i)}(\omega) = 0 \quad (i = \overline{1,n});$

В результате обратного преобразования $\widetilde{\widetilde{T}}_m^{(i)}(\omega)$ находим $\widetilde{T}_m^{(i)}(\xi) \quad (\widetilde{T}_m^{(i)}(\tau_{mЭ}))$. Потом опять повторяем эту последовательность шагов при $j = m-1,\ \ j = m-2$ и т.д., пока j не получит единичное значение ($T_1^{(i)}(\tau_{1Э}) \quad (i = \overline{1,n}).$)

Зная $\widetilde{T}_1^{(i)}(\tau_{1Э})$ *и* $T_{обс,}$ определяем $T_{КВ} = \sum_{i-1}^{n} P_i T_1^{(i)}(\tau_{1Э}) + T_{обс},$ которое является искомой величиной (средним значением календарного времени, при котором полезная наработка в среднем составит заданное значение $T_П$, с учетом всех видов суммарных потерь времени за время $T_{КВ}$: на контроль работоспособности, на ремонт, на пересчет обесцененных времен впоследствии возникновения постепенного отказа и необнаруженных в момент возникновения).

Таким образом, за календарное время $T_{КВ}$ общие потери времени составляют $T_{пот} = T_{КВ} - T_{П.}$ Полагая $\tau_{jЭ} = \tau_Э = T_П / m$, определяем минимальное значение $T_{пот}$ из уравнения $\partial T_{пот} / \partial m = 0$ в зависимости от количества этапов (здесь принято, что $T_{пот}$ является не прерывной функцией от m). Можно поступить иначе: оптимизировать коэффициент технического использования.

Приведем один простой пример.

Пусть $n = 1,\quad i = 1,\quad p_1 = 1.$ Подставляя эти значения в (3.14), получим

$$\overline{\widetilde{T}}_j^{(1)}(\omega) = \left[\tau_k + \widetilde{T}_{j+1}^{(1)}(\tau_{jЭ}) + \overline{F}_1(\omega)\right] / \omega.$$

$$a)\quad j = m;\quad \widetilde{T}_{m+1}^{(1)}(\tau_{jЭ}) = 0;\quad b)\quad \overline{\widetilde{T}}_m^{(i)}(\omega) = \left[\tau_k \_\ \overline{F}_1(\omega)\right] / \omega;$$

$$c)\quad \widetilde{T}_m^{(1)}(\xi) = \tau_k + L^{-1}(\overline{F}_1(\omega) / \omega)$$

$$a)\quad j = m - 1;\quad b)\quad \overline{\widetilde{T}}_{m-1}^{(i)}(\omega) = \left[\tau_k + \widetilde{T}_m^{(1)}(\tau_{jЭ}) + \overline{F}_1(\omega)\right] / \omega;$$

$$c)\quad \widetilde{T}_{m-1}^{(1)}(\xi) = \tau_k + \widetilde{T}_m^{(1)}(\tau_Э) + L^{-1}(\overline{F}_1(\omega) / \omega) = 2\left[\tau_k + L^{-1}(\overline{F}_1(\omega) / \omega)\right]$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\widetilde{T}_1^{(1)}(\xi) = m\left[\tau_k + L^{-1}(\overline{F}_1(\omega) / \omega)\right]$$

Здесь

$$L^{-1}(\overline{F}_1(\omega)/\omega) = L^{-1}\left[\frac{1+\alpha\tau_{BH}}{\omega^2} + \frac{\beta_1(\tau_{\Pi}+\tau_K)}{\omega(\omega+\alpha)} + \frac{\beta_1(1+\alpha\tau_{\Pi BH})}{\omega^2(\omega+\alpha)}\right] = \qquad \textbf{(3.17)}$$

$$= (1+\alpha\tau_{BH})\xi + \beta_1(\tau_{\Pi}+\tau_K)(1-\overline{e}^{\alpha\xi})/\alpha - \beta(1+\alpha\tau_{\Pi BH})(1-\alpha\xi-\overline{e}^{\alpha\xi})/\alpha^2;$$

$$\widetilde{T}_1^{(1)}(\tau_Э) = m\big[\tau_k + (1+\alpha\tau_{BH})\tau_Э + \beta_i(\tau_{\Pi}+\tau_K)\cdot$$

$$\cdot(1-\overline{e}^{\alpha\tau_Э})/\alpha - \beta_i(1+\alpha\tau_{\Pi BH})(1-\alpha\tau_Э-\overline{e}^{\alpha\tau_Э})/\alpha^2\big]$$

Для нахождения оптимального количества этапов надо (3.17) подставить и решить трансцендентное уравнение

$$\overline{e}^{c/m} = (dm+E)/(am+b),$$

получаемое от $\dfrac{\partial\widetilde{T}_1^{(1)}}{\partial m} = 0$

Здесь

$$a = \beta_1\big[1+\alpha(\tau_{\Pi BH}-\tau_{\Pi}-\tau_K)\big]; \quad b = \beta_1\big[\alpha T_{\Pi}(1+\tau_{\Pi BH}-\tau_{\Pi}-\tau_k)\big];$$

$$d = \tau_k\alpha^2 + \beta_1\big[(\tau_{\Pi}+\tau_k-\tau_{\Pi BH}-1)\alpha\big]; \quad E = 2\alpha\beta_1(1+\alpha\tau_{\Pi BH})T_n.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $\alpha = 0$,тогда с учетом того, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}(1-\overline{e}^{\alpha\tau_Э})/\alpha = \tau_Э; \quad \lim_{\alpha\to\infty} = (1-\alpha\tau_Э-\overline{e}^{\alpha\tau_Э})/\alpha^2 = -\tau_Э^2/2,$$

получим

$$\widetilde{T}_1^{(1)}(\tau_Э) = m\big[\tau_k + \tau_Э + \beta_i(\tau_{\Pi}+\tau_K)\tau_Э + \beta_i\tau_Э^2/2\big];$$

$$\widetilde{T}_1^{(1)}(T_{\Pi}/m) = \big[m\tau_k + \tau_n + \beta_1(\tau_{\Pi}+\tau_K)T_{\Pi} + \beta_1 T_{\Pi}^2/2m\big],$$

$$\partial\widetilde{T}_1^{(1)}(\tau_Э)/\partial m = \tau_k - \beta_1 T_{\Pi}^2/2m^2 = 0; \quad m_{опт} = \big[T_{\Pi}\sqrt{\beta_1/2\tau_k}\big].$$

2. Пусть $\beta_1 = 0$;

$$\widetilde{T}_1^{(1)}(\tau_Э) = m[\tau_k + (1+\alpha\tau_{BH})\tau_Э]; \quad \tau_k = 0.$$

3.2. Коэффициент использования технических систем подверженных отказам с учетом надежности контрольной системы

В этой главе предложен оригинальный способ определения коэффициента использования технических систем с учётом надёжности аппаратуры контроля, времени контроля при периодических проверках и времени восстановления.

Полученные результаты позволяют определить наиболее оптимальное значение коэффициента использования производительности системы как с учётом, так и без учёта эксплуатационных затрат.

3.2.1. Определение цели:

Проблема роста эффективности производства и улучшение качества выпускаемой продукции является задачей государственной важности. В первую очередь, это связано с тем, что в условиях научно-технического прогресса происходит постоянное совершенствование и усложнение практически всех технических систем и систем управления. Важнейшими показателями эффективности функционирования систем являются показатели их надёжности и производительности.

Для оценки надёжности обычно используются статистически и аналитические методы оценки. Статистические модели позволяют достаточно гибко и с большей точностью отразить структурные особенности и алгоритмы функционирования оцениваемой системы, однако результаты, полученные путём статистического моделирования, всегда имеют частный характер и лишены наглядности. Аналитические методы моделирования, к которым относятся и публикуемые ниже результаты, методически более сложны чем статистические. Безусловно, адекватность многих математических моделей и их оригиналов часто вызывает сомнения, однако, если удаётся обеспечить приемлемое приближение математической модели к оригиналу, то возможно провести настолько полный и глубокий анализ, который при использовании других методов потребует очень большого объёма экспериментов, а следовательно затрат средств и ресурсов.

Основной целью представленной работы является разработка эффективного метода определения коэффициента использования (коэффициента производительности) непрерывно и периодически контролируемых систем, на основе более универсального подхода [118].

3.2.2. Постановка задачи:

Пусть рассматриваемая техническая система состоит из двух частей – основной (рабочей системы) и встроенная (аппаратурно-контрольная), причем встроенным аппаратурным контролем охвачена только часть основной технической системы (оборудования); работоспособность системы проверяется непрерывно и периодически; между периодическими проверками, если откажет, охваченной контрольной аппаратурой, основная часть аппаратуры при исправной контрольной части, отказ контрольной аппаратурой мгновенно будет обнаружен и немедленно начинается ее восстановление (ремонт); если же отказу основной части, которая охвачена аппаратурным контролем, предшествует отказ аппаратуры контрольной части, или наступит отказ неконтролируемой основной части, то отказ будет обнаружен только при периодических проверках; потоки отказов контрольной и основных частей подчинены закону Пуассона, в процессе периодического контроля (в виду его незначительной длительности) вероятность возникновения отказа принять равным нулю, систему обслуживает одна ремонтная бригада; в процессе восстановления новые отказы не возникают. В результате восстановления система приобретает первоначальную надежность. Требуется определить некоторое оптимальное правило периодических проверок, обеспечивающее максимальное значение коэффициента использования (производительности) - K_{u}.

Обозначим через α и γ соответственно интенсивность отказов для охваченной и неохваченной аппаратурным контролем частей основной системы, а через β – интенсивность отказов контрольной аппаратуры $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$; $V(t)$ – функция распределения времени контроля при периодических проверках $(\upsilon(t) = V'(t))$, $G_{ijk}(t)$ – функция времени восстановления $(g_{ijk}(t) = G'_{ijk}(t))$ в зависимости от значений соответствующих индексов i, j, k (соответственно приняв за 0 – исправное состояние, а за 1 – неисправное состояние имеем: 1,0,0 – ремонту подлежит основная часть охваченная аппаратным контролем; 1,0,1 – ремонту подлежит в целом основная часть; 0,0,1 – ремонту подлежит только основная часть не охваченная аппаратным контролем; 1,1,1 – восстановлению подлежит вся техническая система и т.д.). Обозначим через τ_{Π} промежуток времени периодичности контроля (между концом предыдущего периодического контроля или восстановления и началом последующего периодического контроля).

Для того чтобы на отрезке реального времени периодичности контроля τ_{Π} получить суммарное время исправной работы основной части (полезную среднюю наработку) равной τ_0 временных единиц, с учетом всех видов потерь времени (на восстановление отказавших частей основной и контрольной части; потери времени вызванные необнаруженными отказами (рабочая – основная часть системы продолжает функционировать в неработоспособном состоянии), потери времени при периодических проверках. Введем функцию распределения:

$\Phi_x^{ijk}(t,\tau_0)$ $(i=0{,}1)$ – вероятность того, что за время меньшее t, суммарное время исправной работы основной части обеих частей системы составит $\tau_0 - x$ временных единиц, после чего начинается периодический контроль (здесь принято, что в момент $t=0$, суммарное время исправной работы основной части, уже составляло $x(x \le \tau_0)$ временных единиц). Причем, в момент $t=0$, система находилась в состоянии (i,j,k) работоспособных состояний (состояние $i,k=0$), а контрольная часть в j-том состоянии (где $j="0"$ - исправное состояние, а $j="1"$ – неисправное состояние; первый индекс относится к рабочей части, охваченной аппаратурным контролем, второй к контрольной части, третий относится к неохваченной аппаратурным контролем основной части системы).

Очевидно, что

$$\tau_{000} = \int_0^\infty t d\Phi_0^{(000)}(t,\tau_0); \quad \tau_{010} = \int_0^\infty t d\Phi_0^{(010)}(t,\tau_0);$$

$$\Phi_x^{0i0}(\mathrm{t},\tau_0) = \begin{cases} 0 \text{ при } x > \tau_0; \\ \upsilon(t) \text{ при } x = \tau_0; \end{cases} \quad K_u = \frac{\tau_0}{\tau_{00}};$$

Пусть $F(t) = 1(t-\tau_0) = \begin{cases} 0 \text{ если } t \le \tau_0; \\ 1 \text{ если } t > \tau_0; \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 1 \text{ если } t \le \tau_0; \\ 0 \text{ если } t > \tau_0. \end{cases}$

В дальнейшем аргумент τ_0 будем опускать, то есть вместо $\Phi_x^{ijk}(\mathrm{t},\tau_0)$ будем писать $\Phi_x^{\mathrm{ijk}}(\mathrm{t})$ или $\Phi_{ijk}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ $(i,j,k=0,1)$.

3.2.3. Определение коэффициента использования и эффективного значения периодичности контроля системы:

Относительно $\Phi_{ijk}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ $(ijk = 000,010,001,011)$ имеет место следующая система интегральных уравнений:

$$\Phi_{000}(t,x) = \int_0^t dF(x+u)\cdot e^{-\lambda u}V(t-u) + \int_0^t \beta e^{-\lambda u} du \cdot \Phi_{010}(t-u,x+u) +$$
$$+ \int_0^t \alpha e^{-\lambda u} du \cdot \int_0^{t-u} dG_{100}(\tau)\Phi_{000}(t-u-\tau,x+u) + \int_0^t \gamma e^{-\lambda u} du \cdot \Phi_{001}(t-u,x+u); \tag{3.18}$$

$$\Phi_{010}(t,x) = \int_0^t dF(x+u)\cdot e^{-(\alpha+\gamma)u}\int_0^{t-u} dV(r)G_k(t-u-\tau) + \int_0^t \alpha e^{-(\alpha+\gamma)u} du \cdot \int_0^{t-u} dF(x+u+\tau)\cdot$$
$$\cdot \int_0^{t-u-\tau} dV(\xi) \int_0^{t-u-\tau-\xi} dG_{110}(\eta)\cdot\Phi_{000}(t-u-\tau-\xi-\eta,x+u) + \int_0^t \gamma e^{-(\alpha+\gamma)u} du\cdot\Phi_{011}(t-u,x+u); \tag{3.19}$$

$$\Phi_{001}(t,x)=\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)u}dF(x+u)\int_0^{t-u}dV(\xi)\int_0^{t-u-\xi}dG_{001}(\tau)\Phi_{000}(t-u-\tau-\xi,x)+$$

$$+\int_0^t \alpha e^{-(\alpha+\beta)u}du\cdot\int_0^{t-u}dV(\tau)\cdot\int_0^{t-u-\tau}dG_{101}(\xi)\Phi_{000}(t-u-\tau-\xi,x)+\int_0^t \beta e^{-(\beta+\alpha)u}du\cdot\Phi_{011}(t-u,x); \quad (3.20)$$

$$\Phi_{011}(t,x)=\int_0^t dF(x+u)\cdot e^{-\alpha u}\int_0^{t-u}dV(\tau)\int_0^{t-u-\tau}dG_{011}(\xi)\cdot\Phi_{000}(t-u-\tau-\xi,x)+$$

$$+\int_0^t dF(x+u)\cdot(1-e^{-\alpha u})\int_0^t dV(\tau)\int_0^{t-u-\tau}dG_{111}(\xi)\cdot\Phi_{000}(t-u-\tau-\xi,x). \quad (3.21)$$

События $\Phi_{ijk}(ijk=000,100,110,111,010,011,001,111)$ образуют полную группу независимых событий.

Поясним, как были получены уравнения (3.18) $\div$(3.22).

Уравнение (3.18) (относительно $\Phi_{000}(t,x)$):

первый член - это совместная вероятность следующих независимых событий:

1) полная полезная наработка на отказ составит $\tau_0 = x+u$ временных единиц $(dF(x+u))$;

2) за время u не откажет ни основная аппаратура (как охваченная, так и не охваченная аппаратурным контролем), так и контрольная аппаратура $(\exp(-\lambda u)du)$; за время меньшее *t-u* завершиться периодический контроль работоспособности аппаратуры системы $(V(t-u))$.

Второй член - это совместная вероятность следующих независимых событий:

1) в интервале времени $(u,u+du)$; $u\in(0,t)$ первым откажет контрольная аппаратура $(\beta\exp(-\lambda u)du)$;

2) к этому моменту полезная наработка достигнет $x+u<\tau_0$ временных единиц и за время меньшее $t-u$ полезная наработка достигнет τ_0, при условии, что в момент *t*=*u* она равна *x*+*u* и находилась в состоянии (010) - $\Phi_{010}(t-u, x+u)$.

Третий член - это совместная вероятность следующих независимых событий:

1) в интервале времени $((u, u+du),\ \ u\in(0,t))$ раньше остальных откажет контролируемая часть основной аппаратуры $(\alpha \exp(\lambda u)du)$, который будет сразу обнаружен контрольной аппаратурой и система будет передана на восстановление;

2) восстановление завершиться в интервале времени $(\tau, \tau+d\tau)-dG_{100}(\tau)$; 3) за оставшееся время $t-u-\tau$ будет достигнута полезная наработка равной τ_0 при условии, что в момент $t-u-\tau$ полезная наработка составляла *x*+*u* временных единиц, при состоянии системы в момент $t=u+\tau$ в состоянии (000).

Четвертый член - это совместная вероятность следующих независимых событий:

1) в интервале времени $((u, u+du);\ \ u\in(0,t))$ первым наступил отказ не контролируемой части основной аппаратуры, который будет обнаружен только при периодических проверках $(\gamma \exp(-\lambda u))$;

2) за оставшееся время *t-u* будет достигнута полезная наработка равная τ_0 временных единиц при условии, что в момент *t*=*u* она составляла x+u временных единиц находясь в состоянии 001.

Уравнение (3.19) (относительно $\Phi_{010}(t,x)$) - это совместная вероятность того, что:

Первый член -

1) в интервале времени ($(x+u, x+u+du; \quad u \in (0,t)$) полная полезная наработка на отказ составит $\tau_0 = x+u$ временных единиц $(dF(x+u));$ при условии, что в момент *t=0* она составляла *x* единиц;

2) за время не откажут основные (рабочие) части системы $(\exp(-(\alpha+\gamma)u));$

3) за время τ завершиться периодический контроль всей аппаратуры, в результате которого будет установлен отказ контрольной аппаратуры $(dV(\tau));$

4) ремонт контрольной аппаратуры завершиться за время $t-u-\tau \quad G_k(t-u-\tau).$

Второй член -

1) в интервале времени $((u, u+du); \quad u \in (0,t))$ возникнет отказ основной аппаратуры охваченной контрольной аппаратурой, который не будет обнаружен (т.к. контрольная аппаратура в этот момент находится в отказовом состоянии) - $\alpha \exp(-(\alpha+\gamma)u)du$, поэтому работа системы будет продолжена до $\tau_0 = x+u+\tau$ время $\tau = \tau_0 - x - u$ считается потерянной;

2) для периодического контроля потребуется время $\xi(dV(\xi));$

3) ремонт (восстановление) основной контролируемой аппаратуры и контрольной аппаратуры завершится за время η; 4) за время меньшее $t-u-\tau-\xi-\eta$ будет достигнута полезная наработка τ_0 при условии, что в момент $t = u+\tau+\xi+\tau$ уже была

отработана полезная наработка *x+u* временных единиц и система находилась в состоянии (000).

Третий член - это совместная вероятность того, что в интервале времени $((u, u+du), \quad u \in (0,t))$ наступит отказ неконтролируемой основной части $(\gamma \exp(-(\alpha+\gamma)u)du)$, который будет обнаружен при периодических проверках; за время *t-u* будет отработано полезное среднее время τ_0 при условии, что в момент *t=u*, полезное время средней наработки составляло x+u временных единиц при условии, что в момент *t=u* система находилась в состоянии (011).

Уравнение (3.20):

Первый член - это совместная вероятность того, что:

1) в интервале времени $((x+u, x+u+du), \quad u \in (0,t))$ система находилась в работе, но не было отработано никакое полезное время, т.к. неконтролируемая часть системы находилась в отказовом состоянии (т.е. система работала в течении времени *u* с необнаруженным отказом) - $dF(x+u)$;

2) за время и не возникли ни α, ни β отказы $(\exp(-(\alpha+\beta)u))$;

3) в интервале времени $((x+u, x+u+du), \quad u \in (0,t))$ наступил достоверный периодический контроль - $dV(\xi)$, который обнаружил отказ неконтролируемой части основной аппаратуры;

4) восстановление отказавшей части заняло время $\tau - dG_{001}(\tau)$;

5) за оставшееся время меньшее $t-u-\tau-\xi$ полезная наработка возрастет с x временных единиц до τ_0, при условии, что

к моменту $t = u + \tau + \xi$ полезная наработка уже составляла x при состоянии системы в этот момент (000) - $\Phi_{000}(t - u - \tau - \xi, x)$;

Второй член:

1) в момент *u* возникнет отказ контролируемой основной части, за это время не откажет контрольная аппаратура - $\alpha \exp(-(\alpha + \beta)u)du$;

2) время периодического контроля составит $\tau - dV(\tau)$;

3) время восстановления составит $\xi - dG_{101}(\xi)$;

4) за время меньшее $t - u - \tau - \xi$ системой будет отработано полезное время τ_0 при условии, что к моменту $t = u + \tau + \xi$ полезная наработка системы составляла *x* временных единиц и находилась в состоянии (000) (за время меньшее $t - u - \tau - \xi$ будет отработанно системой полезное время равное $\tau_0 - x - \Phi_{011}(t - u, x)$.

Уравнение (3.21):

Первый член это - совместная вероятность независимых событий того, что:

1) за время x+u полезная наработка времени составит τ_0 временных единиц, при условии, что в момент t=0 она составляла x временных единиц - $dF(x + u)$;

2) за время *u* контролируемая часть системы не отказала - $\exp(-(\alpha u))$;

3) за время τ был проведен периодический контроль и был обнаружен отказ в неконтролируемой основной части системы - $dV(\tau)$;

4) за время ξ было завершено восстановление отказавших частей системы - $\tau dG_{011}(\xi)$;

5) за время меньшее $t-u-\tau-\xi$ системой будет отработана полезная наработка $\tau_0 - x$ временных единиц - $\Phi_{000}(t-u-\tau-\xi, x)$.

Второй член -

1) система, работая в течении времени x+u полезную наработку не набрала больше x (в течении времени u работала в отказовом состоянии);

2) за время добавился отказ контролируемой основной аппаратуры, который не был обнаружен (контрольная аппаратура находится в отказовом состоянии) - $1-\exp(-\alpha u)$;

3) время контроля составило $\tau - dV(\tau)$;

4) время восстановления $\xi - dG_{111}(\xi)$;

5) за время меньшее $t-u-\tau-\xi$ будет отработано полезное время $\tau_0 - x - \Phi_{000}(t-u-\tau-\xi, x)$.

Применив к (3.18)$\div$(3.21) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_{000}(s,x) = V(s)e^{-(s+\lambda)(\tau_0-x)} + \beta e^{(s+\lambda)x}\int_x^{\tau_0} e^{-(s+\lambda)z}\Phi_{010}(s,z)dz +$$

(3.22)

$$+\alpha g_{100}(s)e^{(s+\lambda)x}\int_x^{\tau_0} e^{-(s+\lambda)z}\Phi_{000}(s,z)dz + \gamma e^{(s+\lambda)x}\int_x^{\tau_0} e^{-(s+\lambda)z}\Phi_{001}(s,z)dz;$$

$$\Phi_{010}(t,x)=V(s)g_k(s)e^{-(s+\alpha+\gamma)(\tau_0-x)}+\alpha V(s)g_{110}(s)e^{-s\tau_0}e^{(s+\alpha+\gamma)x}\cdot$$

(3.23)

$$\cdot\int_x^{\tau_0}e^{-(\alpha+\gamma)z}\Phi_{000}(s,z)dz+\gamma e^{(s+\alpha+\gamma)x}\int_x^{\tau_0}e^{-(s+\alpha+\gamma)z}\Phi_{011}(s,z)dz;$$

$$\Phi_{001}(s,x)=g_{001}(s)\Phi_{000}(s,x)e^{-(s+\alpha+\beta)(\tau_0-x)}+\frac{\alpha V(s)}{s+\alpha+\beta}g_{101}(s)\Phi_{000}(s)\cdot$$

(3.24)

$$\cdot\left[1-e^{-(s+\alpha+\beta)(\tau_0-x)}\right]+\frac{\beta\Phi_{011}(s,x)}{s+\alpha+\beta}\left[1-e^{-(s+\alpha+\beta)(\tau_0-x)}\right];$$

$$\Phi_{011}(s,x)=V(s)g_{011}(s)e^{-(s+\alpha)(\tau_0-x)}\Phi_{000}(s,x)+$$

$$+V(s)g_{111}(s)\left[e^{-s(\tau_0-x)}-e^{-(s+\alpha)(\tau_0-x)}\right]. \qquad \textbf{(3.25)}$$

Здесь, **s** – оператор Лапласа;

$\Phi_{ijk}(s,x)=\int_0^\infty e^{-st}\Phi_{ijk}(t,x)dt$ где (i,j,k =000, 010, 001, 011);

$g_k(s)=\int_0^\infty e^{-st}g_k(t)dt$; $\quad g_{ijk}(s)=\int_0^\infty e^{-st}dG_{ijk}(t)$

где (i,j,k =100, 110, 001, 101, 011, 111); $\quad V(s)=\int_0^\infty e^{-st}dV(t).$

После несложного преобразования $(3.23)\div(3.27)$ дифференцирования обоих сторон полученных уравнений по x, имеем

$$[\alpha g_{100}(s)-s-\lambda]\Phi_{000}(s,x)+\frac{d\Phi_{000}(s,x)}{dx}=-\beta\Phi_{010}(s,x)-\gamma\Phi_{001}(s,x)\,; \qquad \textbf{(3.26)}$$

$$-(s+\alpha+\gamma)\Phi_{010}(s,x)+\frac{d\Phi_{010}(s,x)}{dx}=$$

$$=-\alpha V(s)g_{110}(s)a_1(s,x)\Phi_{000}(s,x)-\gamma\Phi_{011}(s,x); \tag{3.27}$$

$$\Phi_{001}(s,x)=\left\{\left[g_{001}(s)a_2(s,x)+\frac{\alpha V(s)}{s+\alpha+\beta}g_{101}(s)(1-a_2(s,x))\right]+\right. \tag{3.28}$$
$$\left.+\frac{\beta}{s+\alpha+\beta}(1-a_2(s,x))\left[V(s)g_{011}(s)a_3(s,x)+V(s)g_{111}(s)(a_1(s,x)-a_3(s,x))\right]\right\}\Phi_{000}(s,x);$$

$$\Phi_{011}(s,x)=\left\{V(s)g_{011}(s)a_3(s,x)+V(s)g_{111}(s)\left[a_1(s,x)-a_3(s,x)\right]\right\}\Phi_{000}(s,x); \tag{3.29}$$

Здесь

$$a_1(s,x)=e^{-s(\tau_0-x)};a_2(s,x)=e^{-(s+\alpha+\beta)(\tau_0-x)};a_3(s,x)=e^{-(s+\alpha)(\tau_0-x)}.$$

Нетрудно систему уравнений (3.26)$\div$(3.29), содержащих 4 неизвестных, привести к системе содержащей два неизвестных – $\Phi_{000}(s,x)$ и $\Phi_{010}(s,x)$:

$$\left[\alpha g_{100}(s)-s-\lambda\right]\Phi_{000}(s,x)+\frac{d\Phi_{000}(s,x)}{dx}=-\beta\Phi_{010}(s,x)-$$
$$-\gamma\left\{\left[g_{001}(s)a_2(s,x)+\frac{\alpha V(s)}{s+\alpha+\beta}g_{101}(s)(1-a_2(s,x))\right]+\right. \tag{3.30}$$
$$\left.+\frac{\beta}{s+\alpha+\beta}(1-a_2(s,x))\left[V(s)g_{011}(s)a_3(s,x)+V(s)g_{111}(s)(a_1(s,x)-a_3(s,x))\right]\right\}\Phi_{000}(s,x);$$

$$-\left[s+\alpha+\gamma\right]\Phi_{010}(s,x)+\frac{d\Phi_{010}(s,x)}{dx}=$$

$$=\left\{-\alpha V(s)g_{110}(s)a_1(s,x)-\right.$$

$$\left.-\gamma\left[V(s)g_{011}(s)a_3(s,x)+V(s)g_{111}(s)(a_1(s,x)-a_3(s,x))\right]\right\}\Phi_{000}(s,x). \tag{3.31}$$

Таким образом, в результате решения (3.30) и (3.31), которые являются линейными дифференциальными уравнениями относительно x, находим функцию распределения $\Phi_{000}(s,x)$, а полагая в нем $x=0$, определяем искомую функцию распределения $\Phi_{000}(s,0)$, после обращения которого переходим к оригиналу $\Phi_{000}(t,0)$.

Однако практический интерес представляет определение его числовых характеристик, в основном математическое ожидание, тем более, что для его определения не требуется обратное преобразование, т.е. переход к оригиналу. Для этого используем выражение

$$\mathrm{T}_{ijk}(x) = -\left|S\Phi_{ijk}(s,x)\right|'_{s=0}, \tau_{ijk} = -\left|g_{ijk}(s)\right|'_{s=0};$$

Здесь «$'$» - символ производной по S при $s=0$.

Для перехода к математическому ожиданию используем систему уравнений $(3.30) \div (3.31)$. Умножая обе стороны этих уравнений на S и дифференцируя их почлено по S при $s=0$, получим

$$(\alpha+\beta)\mathrm{T}_{000}(x) - \frac{d\mathrm{T}_{000}(x)}{dx} - \beta\mathrm{T}_{010}(x) - \gamma\mathrm{T}_{001}(x) = (1+\alpha\tau_{100}); \quad \textbf{(3.32)}$$

$$(\alpha+\gamma)\mathrm{T}_{010}(x) - \frac{d\mathrm{T}_{010}(x)}{dx} - \alpha\mathrm{T}_{000}(x) - \gamma\mathrm{T}_{011}(x) = 1+\alpha\tau_k+\alpha\tau_{110}+(\tau_0-x)\alpha; \quad \textbf{(3.33)}$$

$$\mathrm{T}_{000}(x) - \mathrm{T}_{011}(x) = \left\{-\tau_{011}e^{-\alpha(\tau_0-x)} - \tau_k - \tau_{111}(1-e^{-\alpha(\tau_0-x)}) - (\tau_0-x)\right\}; \quad \textbf{(3.34)}$$

$$\mathrm{T}_{001}(x) - \left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}a_2(0,x)\right]\mathrm{T}_{000}(x) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-a_2(0,x))\mathrm{T}_{011}(x) =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta} + \left[\tau_{001}+\tau_0-x-\frac{1}{\alpha+\beta}\right]a_2(0,x) - \frac{\beta}{\alpha+\beta}(\tau_0-x)a_2(0,x); \quad \textbf{(3.35)}$$

Здесь $a_2(0,x) = e^{-(\alpha+\beta)(\tau_0-x)}$.

Теперь осуществим переход в уравнениях $(3.32)\div(3.35)$ к переменной $y=\tau_0-x.$ Обозначим $\alpha+\beta=a,$

$$\mathrm{T}_{000}(x)=\mathrm{T}_{000}(\tau_0-y)=\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y);\frac{d\mathrm{T}_{000}(x)}{dx}=-\frac{d\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y)}{dy};$$

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(0)=\tau_k;\widetilde{\mathrm{T}}_{010}(0)=\tau_k+\tau_{010};\frac{d\mathrm{T}_{010}(x)}{dx}=-\frac{d\widetilde{\mathrm{T}}_{010}(y)}{dy}.$$

Соответственно:

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y)}{dy}+(\gamma+\beta)\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y)-\beta\widetilde{\mathrm{T}}_{010}(y)-\gamma\widetilde{\mathrm{T}}_{001}(y)=(1+\alpha\tau_{100}); \qquad \textbf{(3.36)}$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{T}}_{010}(y)}{dy}+(\alpha+\gamma)\widetilde{\mathrm{T}}_{010}(y)-\alpha\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y)-\gamma\widetilde{\mathrm{T}}_{011}(y)=(1+\alpha(\tau_k+\tau_{110}+y); \qquad \textbf{(3.37)}$$

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{001}(y)=(\tau_{001}+y-\frac{1}{a})e^{-ay}+\frac{1}{a}+e^{-ay}\frac{\beta}{a}\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y)+$$

$$+\frac{\alpha}{a}\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y)-\frac{\beta}{a}ye^{-ay}+\frac{\beta}{a}\widetilde{\mathrm{T}}_{011}(y)-\frac{\beta}{a}e^{-ay}\widetilde{\mathrm{T}}_{011}(y); \qquad \textbf{(3.38)}$$

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{011}(y)=\tau_{011}e^{-\alpha y}+(1-e^{-\alpha y})\tau_{111}+\tau_k+y+\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(y); \qquad \textbf{(3.39)}$$

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{000}(0)=\tau_k.$$

Применив преобразование Лапласа к $(3.36)\div(3.39)$, нетрудно решить поставленную задачу. В данной работе для примера решена поставленная задача при $\gamma=0.$ Для этого случая система уравнений $(3.36)\div(3.39)$ принимает следующий вид:

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{T}}_{00}(y)}{dy}+\beta\widetilde{\mathrm{T}}_{00}(y)-\beta\widetilde{\mathrm{T}}_{01}(y)=(1+\alpha\tau_{10}); \qquad \textbf{(3.40)}$$

$$\frac{d\widetilde{\mathrm{T}}_{01}(y)}{dy}+\alpha\widetilde{\mathrm{T}}_{01}(y)-\alpha\widetilde{\mathrm{T}}_{00}(y)=1+\alpha(\tau_k+\tau_{11}+y). \qquad \textbf{(3.41)}$$

$$\widetilde{\mathrm{T}}_{00}(0)=\tau_k;\widetilde{\mathrm{T}}_{01}(0)=\tau_k+\tau_{01}$$

В результате совместного решения (3.40) и (3.41) и подстановки $x=0$, имеем

$$\mathrm{T}_{00}(0)=\beta(\tau_k+\tau_{01})(1-e^{-\lambda\tau_0})\frac{1}{\lambda}+\beta\left[1+\alpha\left(\tau_k+\tau_{11}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\tau_0-(1-e^{-\lambda\tau_0})\frac{1}{\lambda}\right]\frac{1}{\lambda}+\beta\alpha\left[\frac{\tau_0^2}{2\lambda}-\frac{\tau_0}{\lambda^2}+(1-e^{-\lambda\tau_0})\frac{1}{\lambda^3}\right]+ \qquad \textbf{(3.42)}$$

$$+(1+\alpha\tau_{10})(1-e^{-\lambda\tau_0})\frac{1}{\lambda}+\frac{\alpha}{\lambda}\left[\tau_0-(1-e^{-\lambda\tau_0})\frac{1}{\lambda}\right]+\tau_k\left[e^{-\lambda\tau_0}+\frac{\alpha}{\lambda}(1-e^{-\lambda\tau_0})\right];\lambda=\alpha+\beta.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) $\beta=\infty$ (достоверность безотказной работы системы проверяется только периодическим контролем). После подстановки в (3.42) $\beta=\infty$, получаем

$$\mathrm{T}_{00}(0)=\tau_k+\tau_{01}+\left[1+\alpha(\tau_k+\tau_{11})\right]\tau_0+\frac{\alpha\tau_0^2}{2};$$

2) $\alpha=0;\lambda=\beta.$

$$\mathrm{T}_{00}(0)=\tau_0+\tau_k+(1-e^{-\beta\tau_0})\tau_{01}.$$

3) $\alpha=0;\beta=0;\lambda=0.$ При этих значениях

$$\mathrm{T}_{00}=\tau_0+\tau_k.$$

Полученные частные результаты доказывают справедливость полученных формул.

В результате анализа формулы (3.42), можно найти рациональное значение периодичности контроля и коэффициент использования технической системы.

3.3. Выводы к Главе 3.

Среди множества методов повышения надежности ВС важное место занимает выбор способов контроля и диагностики аппаратных средств, которые допускают остановки для проведения восстановительных работ в процессе эксплуатации. В ВС могут возникать различные типы отказов. Часть из них может быть обнаружена непрерывным контролем в процессе функционирования непосредственно в момент их возникновения, а часть отказов – только в процессе достоверного периодического контроля. Такие проверки желательно проводить таким образом, чтобы они позволяли выявить те отказы, которые нельзя обнаружить непрерывным контролем. Так как каждая такая проверка сопряжена с определенными затратами времени и средств, нежелательно проводить их, с одной стороны, слишком часто, но, с другой стороны, существуют определенные потери, зависящие от того, сколько времени прошло с момента возникновения отказа, до момента его обнаружения. Поэтому возникает вопрос определения некоторых оптимальных правил проверок ВС. В данной главе отказ контрольной аппаратуры также носит случайный характер.

На основе более универсального подхода в данной работе предложен эффективный метод определения коэффициента производительности для непрерывно и периодически контролируемых технических систем. В свете выше изложенного в третьей главе получены следующие основные результаты:

1) Предлагается оригинальный метод, позволяющий обоснованно вырабатывать требования по надежности и производить их оценку в соответствии с заданным режимом использования и технического обслуживания.

2) Предлагаемый аппарат позволяет наилучшим образом выбрать временную диаграмму использования ВС, что приводит к значительному выигрышу в надежности.

3) Полученные оригинальные результаты позволяют выбрать некоторые характеристики системы контроля, вид контроля и периодичность контроля, обеспечивающие заданные требования по вероятности выполнения средней полезной наработки за планируемое календарное время.

4) Полученные результаты позволяют связать характеристики надежности ВС с такой важной характеристикой как производительность.

5) Для рассмотренных в этой главе моделей технического обслуживания характерно минимальное ограничение на функции распределения исходных параметров, что делает их более адекватными к оригиналам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современные инженерные методы создания и эксплуатации вычислительныз систем (ВС) и систем передачии информации (СПИ) предпологают на всех этапах их жизненного цикла активное привлечение количественных методов анализа и синтеза, поскольку только такой подход позволяет построить рационально спроектированные и высокоэффективные в использовании системы. Это же в полной мере относится и к проблеме обеспечения надежности ВС и СПИ.

Совокупность положений, выдвинутых и обоснованных в диссертации, является обобщением и решением важной научной проблемы имеющей теоретическое и прикладное значение, а именно, в результате системного подхода к исследованию и оптитмизации надежности получены следующие основные результаты:

1) На основе обзора и анализа существующего материала проведен сравнительный анализ различных методов и средств повышения надежности и живучести ВС и СПИ. В результате этого анализа делается вывод, что наиболее эффективным методом является временное резервирование
2) Проведена классификация отказов ВС и СПИ. Обосновывается правомерность использования некоторых общих законов распределения вероятности безотказной работы и целесообразность их аппроксимации смесью Эрлалга.

3) Впервые определены основные показатели надежности ВС и СПИ подверженных разнородным видам отказов для двух случаев:

a) оба вида отказа обнаруживаются в момент их возникновения идеальным непрерывным контролем;
b) непрерывный аппаратный контроль работоспособности ВС и СПИ является недостоверным (обнаруживает только внезапные отказы), а постепенные (износовые) отказы обнаруживаются в процессе периодического контроля или в процессе восстановления.

4) Впервые исследована общая математическая модель канала связи с учетом длительности самоустраняющегося мешающего фактора. В этой модели время передачи пакета, устранения причин отказа и длительность мешаюшего фактора, а также интервалы времени между отказами распределены по произвольному закону или закону Эрланга. Исходя из общей модели рассмотрены частные модели, имеющие практическое значение.

5) Получено обобщенное выражение вероятности того, что сооображение (пакеты) будет переданно без искажения за заданное время. На основе этого выражения получена формула вычисления математического ожидания времени многократной передачи пакета. Анализ этой формулы с учетом объема передаваемой информации и характеристик канала связи позволяет выбрать рациональную стратегию безошибочной передачи сообщений за заданное время. Полученные результаты

можно использовать с целью наилучшего применения технических систем в процессе эксплуатации.

6) Полученные в диссертации результаты позволяют обосновано выбирать требования по надежности и производить их оценку в соответствии с заданным режимом использования и технического обслуживания в процессе эксплуатации; наилучшим образом выбрать временную диаграмму использования ВС и СПИ; оптимально выбирать некоторые важные характеристики системы контроля – вид и периодичность контроля, с учетом надежности контрольной аппаратуры; связать характеристики надежности ВС и СПИ с их производительностью.

7) Все рассмотренные в диссертации модели надежности характеризуются наименьшим ограничением на исходные случайные процессы, что является гарантией общности предлагаемых моделей и их адекватности с оригиналом, поэтому область применения полученных в диссертации результатов весьма широка.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Атовмян И.О., Вайрадян А.С., Руднев Ю.П. Надежность АСУ. М.: Высшая школа, 1979. – 287 с.

2. Баруга-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. Пер. с анг. М.: Наука, 1969. – 511 с.

3. Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А. и др. О минимаксных критериях и задачах надежности //Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, №3, 1971, с.87-98.

4. Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. М.: Сов.радио, 1971, 271 с.

5. Барзилович Е.Ю. Определение оптимальных профилактических работ на автоматических системах //Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, №3, 1964, с. 38-45.

6. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Сов.радио, 1969. – 448 с.

7. Барзилович Е.Ю., Захаренко С.К. В кн. О надежности сложных систем, недоступных непрерывным проверкам. М.: Сов.радио, 1966 – с. 53-70.

8. Базовский И. Надежность: теория и практика. М.: Мир, 1965. -373 с.

9. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание (пер. с немецкого). М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.

10. Беляев Ю.К. Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности //Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и мат. статистике. Вильнюс, 1962. – с.309-324.

11. Беляев Ю.К. Производительность при наличии двух типов отказов. В кн.: Кибернетику – на службу коммунизма. Т.2, М.: Энергия, 1954, с. 303-309.

12. Белецкий В.В. Теория и практические методы резервирования радиоэлектронной аппаратуры. М.: Энергия, 1977. – 360 с.

13. Бродецкий Г.Л. Особенности организации контроля точек на траектории вычислительного процесса для одного класса стратегии управления //Автоматика, №2, 1985, с. 75-77.

14. Бродецкий Г.Л. Об одной задаче переодического запоминания результатов //Кибернетика, №3, 1978, с. 70-74.

15. Вайрадян А.С., Петров М.Н., Хетагуров Я.А. Методика расчета надежности системы реального времени с аппаратно-временной избыточностью. В кн.: Организация решения задач в вычислительных системах. М.: МДНТП, 1977, с. 183-190.

16. Вентцель Е.С. Теория вероятности. М.: Физматгиз, 1962. – 564 с.

17. Голинкевич Т.А. Прикладная теория надежности. М.: Высшая школа, 1977. – 159 с.

18. Гнеденко Б.В. курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988. – 447 с.

19. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.

20. Глазунов Л.П., Грабовский В.П., Щербаков О.В. Основы теории надежности АСУ. Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 207 с.

21. Гаркави А.Л., Гоголевский В.Б., Грабовецкий В.П. Надежность контролируемых восстанавливаемых устройств с временной избыточностью. В кн. Теория надежности и массовое обслуживание. М.: Наука, 1969. – 108-118 с.

22. Герцбах И.Б., Кординский Х.Б. Модели отказов, М.: Сов. Радио, 1966. – 166 с.

23. Глухов В.Н. Время исполнения как характеристика надежности систем // Аи Т, №5, 1972. – с. 175-179.

24. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем. М.: Энергоатомиздат, 1986.

25. Дедков В.К., Северцев П.А. Основные вопросы эксплуатации сложных систем. М.: Высшая школа, 1976. – 406 с.

26. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z преобразования. М.: Наука, 1971. – 208 с.

27. Ежов И.И., Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения //Кибернетика, №5, 1967. – с. 58-65.

28. Журавлев Ю.П., Котелюк Л.А., Циклинский Н.И. Надежность и контроль ЭВМ. М.: Сов.радио, 1978. – 416 с.

29. Какубава Р.В., Микадзе И.С. Вероятностная характеристика производительности вычислительной машины при программном и программно-аппаратурном контроле обнаружения неисправности //автометрия, АН СССР, СО, №2, 1978. – с.88 – 92.

30. Какубава Р.В., Кукава Р.К., Курцер М.М., Микадзе И.С. Распределение времени выполнения задания на ЭВМ с учетом ее надежности. //Автоматика и телемеханика, №7, 1981. – с. 173 – 187.

31. Коваленко И.Н., Стойкова Л.С. О производительности системы и времени решения задачи при случайных отказах и переодическом запоминании результатов //Кибернетика, №5, 1974. – с. 73 – 75.

32. Королюк В.С. Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний // УМЖ, №3, 1965. – с. 5-8.

33. System //Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 162, №3, 2000, pp. 462 -465.

34. Микадзе И.С., Куциава Н.А., Зауташвили И.З. Анализ надежности технических систем с разнородными отказами //Международная научно-техническая конференция «Системные

проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий». ч.7. Москва-Сочи, 2000, с.96 – 108.

35. Микадзе И.С., Куциава Н.А., Резервирование аналоговых устройств автоматики //Труды XIV международного симпозиума управления большими системами. Control 2000, с. 219 – 224.

36. Микадзе И.С., Начкебия Ш.Ш., Какубава Р.В. Вложенно-линейчатые марковские процессы //Труды ГТУ, 1(417), Тбилиси, 1998, с. 199 – 208.

37. Микадзе И.С. К вопросу осуществимости выполнения задания вычислительным устройством с ненагруженным резервом //Автометрия АН СССР, СО, №6, 1977, с.86 – 91.

38. Микаде И.С. Вероятностная характеристика производительности ЦВУ с учетом ее надежности //Автоматика и телемеханика, №2, 1979, с. 175 – 186.

39. Микаде И.С. К вопросу надежности контролируемой системы //Автоматика и телемеханика, №6, 1985, с. 160 – 166.

40. Микаде И.С. Многоприборная система обслуживания //Кибернетика, №3, 1989, с. 102 – 103.

41. Микаде И.С. Система обслуживания со многими состояниями функционирования //Автоматика и телемеханика, №2, 1987, с. 104 – 116.

42. Микаде И.С. Периодически контролируемая система обслуживания с ненадежными приборами //Кибернетика, №1, 1988, с. 56 – 61.

43. Микадзе И.С. Об одном способе определения интервального коэффициента готовности //Сообщения АН ГССР, 92, №2, 1978, с. 417 – 420.

44. Микадзе И.С., Хочолава В.В. Об одной модели передачи данных по ненадежному каналу связи, подверженному разномерным отказам. АВТю №3, 2005. с. 40 – 45.

45. Микадзе И.С., Хочолава В.В. Об одной модели передачи информации по ненадежному каналу связи. А и Т, РАН, №8, 2004. с. 85 – 90.

46. Микадзе И.С., Арабули Н.В., Элиаури Л.Ш. Компьютер с аппаратурным контролем в конце передачи пакета. Georgian Engineering News, 2005, №2, с. 104 – 106.

47. Марьянович Т.П. Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться. //УМЖ 3, №12, 1960, с.279-286.Намичеишвили О.М. Теория вероятности. Тбилиси, ТГУ, 1984. – с. 238.

48. Надежность технических систем. Справочник (под ред. И.А. Ушакова). М.: Радио и связь, 1985, 606 с.

49. Нечипоренко В.И. Структурный анализ систем (эфективность и надежность). М.: Сов.радио, 1977, 76 с.

50. Нечипоренко В.И. Структурный анализ и методы построения надежных систем. М.: Сов.радио, 1968, 256 с.

51. Овчинников В.Н., Соловьёв А.Д. Асимптотический анализ послеотказовых характеристик надежности //Труды III Всесоюз. школы-совещания по теории массового обслуживания. т.1, Пущино, 1974, М.: МГУ, 1976.

52. Проников А.С. Надежность машин. М.: Машиностроение, 1978. – 592 с.

53. Половко А.М. Основы теории надежности. М.: Наука, 1964. – 406 с.

54. Раикин А.Л. Вероятностные модели функционирования резервированных устройств. М.: Наука, 1971. – 264 с.

55. Розенблат М.А., Хуродзе Р.А. Прецизионный безинерционный востанавливающий орган для резервирования аналоговых устройств //Приборы и системы управления, №11, 1996, с.27-29.

56. Розенблат М.А., Хуродзе Р.А. Упрощенная реализация востанавливающего органа для троированных аналоговых устройств //Приборы и системы управления, №8, 1996, с.32 – 33.

57. Рожков Л.И. Контроль и коммутация оборудования в системах передачи данных. – М.: Сов.радио, 1979. 240с.

58. Рожков Л.И. Средства передачи данных в АСУ. К.Ж Техника, 1977. 184с.

59. Рябинин И.А. Расчет надежности систем со структурной избыточностью //Справочник в десяти томах «Надежность и эффективность в технике». Т.5. – С. 58 – 101. – М.: Машиностроение, 1998.

60. Рябинин И.А., Черкесов Г.Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. – М.: Радио и связь, 1981. - 264 с.

61. Сандлер Дж. Техника надежности систем. М.: Наука, 1966. – 300 с.

62. Спортак М., Паппас Ф. Компьютерные сети и сетевые технологии. М.: ДиаСофт, 2005. 720с.

63. Статистика ошибок при передаче цифровой информации. Пер. с анг. под редакцией Самоиленко С.И. М.: Мир, 1966. 302с.

64. Ушаков И.А. Построение высоконадежных систем. М.: Знание, 1974.

65. Феллер В. Введение в теорию вероятности и ее приложения (т.I и II). Пер. с англ. М.: Мир, 1964. – 498 с.

66. Харкевич А.А. Борьба с помехами. М.:Наука, 1965. 275с.

67. Хенли Э.Дж., Кумамото Х. Надежность технических систем и оценка риска. – М.: Машиностроение, 1984. – 528с.

68. Хетагуров Я.А. Надежность автоматизированных систем управления. М.: Высшая школа, 1979. – 287с.

69. Хетагуров Я.А., Руднев Ю.П. Повышение надежности цифровых устройств методами избыточного кодирования. М.: Энергия, 1974.

70. Хетагуров Я.А. Проблемы надежности в сложных системах управления. //Международная научно-техническая конференция «Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий». ч.7. Москва-Сочи, 2000, с. 1 – 4.

71. Хуродзе Р.А., Начкебия Ш.Ш., Микадзе И.С. Методы оценки надежности комплексированных измерительных устройств //Georgian Engineering News, №4, 1997, с. 50 – 58.

72. Хуродзе Р.А., Начкебия Ш.Ш., Микадзе И.С. Анализ надежности и точности информационно-измерительных устройств // Georgian Engineering News, №4, 1997, с. 59 – 68.

73. Хуродзе Р.А. Дис. на соиск. учен. степени докт. техн. наук, Тбилиси, 1997, 173.

74. Хуродзе Р.А. Экономический подход к выбору уровня и структуры резервирования датчиков и аналоговых устройств //Труды ГТУ, 2(407), 1996, с. 106 – 111.

75. Хуродзе Р.А. Применение принципа робастного оценивания для определения рационального преобразования сигналов паралельного включения датчиков //Труды ГТУ, 3(408), 1995.

76. Хуродзе Р.А. Параметрические отказы аналоговых устройств и структурные методы их уменьшения. Тбилиси: ГТУ, 1996, 112 с.

77. Хуродзе Р.А. Резервирование датчиков и аналоговых устройств в отношении катастрофических отказов. Тбилиси: ГТУ, 1998, 106 с.

78. Черкесов Г.Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. М.: Сов.радио, 1974. – 295 с.

79. Черкесов Г.Н. Влияние резерва времени на работоспособность восстановления систем. В кн.: Теория и техника вычислительных устройств. Вып. 1. М.: Энергия, 1967. с. 131 – 139.

80. Шварцман В.О. (ред.) Каналы передачи данных. М.: Связь, 1970. 304с.

81. Шварцман В.О., Емальянов Г.А. Теория передачи дискретной информации. М.: Связь, 1990. 424с.

82. Barlow R.E., Proshan F. Importance of system components and fault tree analysis. Operations Research Center. University of California, report ORC 74-3, 1974

83. Chande P., Tokekar S. Expert-based maintenance: A study of its effectiveness. IEEE Transactions on Reliability. Vol.47, 1, 199. – pp. 53 – 58.

84. Coit D., Smith A. Redundancy allocation to maximize a lower percentile of the system time-to-failure distribution. IEEE Transactions on Reliability. Vol.47, 1, 199. – pp. 79 – 87.

85. D.C.Kendall. Stochastic processes occurring in the theory of queens and their analyses by the method of the embedded Markovian chain. Ann Math. Statistic 24, 1953, pp. 338 – 354.

86. Hariga M.A. A maintenance inspection model for a single machine with general failure distribution. Microelectronics and reliability. Vol.36, 3, 1996. – pp. 353 – 358.

87. IEEE Project 802. Local Network Standards Revision D. December, 1982, pp. 569 – 579.

88. Jain M. An (m, M) machine repair problem with spares and state dependent rates: a diffusion process approach. Microelectronics and reliability. Vol.37, 6, 1997. – pp. 929 – 934.

89. J.Cao. Reliability analysis of M/G/1 queuing system with repairable service station of reliability series structure. Microelectronics and reliability. Vol.34, 4, 1994. – pp. 721 – 726.

90. Kazumi Yasui and Toshio Nakagawa. Reliability considerations of selective-repeat ARQ policy for a data communications system. Microelectronics and reliability. Vol.35, 1, 1995. – pp. 41 – 44.

91. LCN. Loosely Coupled Network. Control Data Corporation «Computer network and Protocol in the Soviet Union» - Washington, Los-Angeles, 1981, pp. 69 – 79.

92. Luo T., Trivedi K. An improved algorithm for coherent-system reliability. IEEE Transactions on Reliability. Vol.47, 1, 199. – pp. 73 – 78.

93. Makri F.S. and Psillakis Z.M. Bounds for reliability of k-within two-dimensional consecutive-r-out-of-n failure systems. Microelectronics and reliability. Vol.36, 3, 1996. – pp. 341 – 346.

94. Mikadze I.S. and Kakubava R.V., Nachkebia Sh.Sh. Generalization of the Virtual Waiting Time Problem. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 157, 1, 1998, pp. 93-95.

95. Mikadze I.S., Nachkebia Sh.Sh. Throughput of Technical System with Nondevaluating Failure. Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 157, №2, 1998, 270-273.

96. Mikadze I.S., Kutsiava N.A. On Reliability of One Duplicated System //Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, 161, 1, 2000, pp. 83-87.

97. Mikadze I.S., Kutsiava N.A., Mikadze Z.I. On embedded Markovian processes with the supplementary Variable //Georgian Engineering News, №1, 2000, pp. 5 – 21.

98. Mikadze I.S., Kutsiava N.A., Topuria E. Reliability of a combined control Engineering

99. Mingjian Zuo. Reliability and component importance of a consecutive-k-out-of-n system. Microelectronics and reliability. Vol.33, 2, 1993. – pp. 243 – 258.

100. Novell's GUIDE TO Network LAN Analysis and edition by Laura A.Chappell and Dan E.Hakes. Copyright, 1994, SYBEX Inc., 2021, Challenger Drive, Alameda, Ca 94501.

101. Oiying Hu. The optimal replacement of a marcovian deteriorative system under stochastic shocks. Microelectronics and reliability. Vol.35, 1, 1995. – pp. 27 – 32.

102. Ryabinin I.A. Reliability of Engineering Systems. Principles and Analysis. Ь.: Mir, 1976.

103. Satow T. and Nakagawa T. Three replacement models with two kinds of damage. Microelectronics and reliability. Vol.37, 6, 1997. – pp. 909 – 914.

104. Siddiqui S.A., Jain S. Chauhan R.K. Bayesian analysis of reliability and hazard rate function of a mixture model. Microelectronics and reliability. Vol.37, 6, 1997. – pp. 935 – 942.

105. Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Грун Г.И., Пойани В.С. Обеспечение и методы оптимизации надежности химических и других производств., 1987 – 272 с.

106. Коваленко К.А., Ласновский В.Л., Прохоров А.Г. - К вопросу повышения надёжности функционирования средств и программно-логических методов., А и Т, N3 1997 с.226-233.

107. Бертскас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных., М.: Мир 1989 554 с.

108. Боргуславский А.Б., Дрожинов В.И., Основы построения вычислительных сетей для автоматизированных систем., М.: Энергоатомиздат., 1990, 253 с.

109. Зайка А. Компьютерные сети. М.: ОЛМА-Пресс, 2006, 448 с.

110. Зеленцев В.А., Гагин А.А. Надежность, живучесть и техническое обслуживание связи. М.: ЬЩ СССР; 1991, 169 с.

111. Мартин Дж. Системный анализ передачи данных. Т1 и Т2. М.: Мир 1975 311-334 с.

112. Мизин И.А., Богатырев В.А., Кулешов А.П. Сети коммутации пакетов. М.: «Радио и связь» 1986, 408 с.

113. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления: Пер с анг. М. 1967 320 с.

114. К.Шеннон, Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 824с. (перевод с английского).

115. У.Питерсон, Э.Уэлдон, Коды исправляющие ошибки. М.: «Мир», 1976, 594с.

116. Микадзе И.С., Шелегия Р.С. Некоторые вопросы определения производительности ЦВМ. Сообщение АН ГССР. т.70, N1, 1970, с. 45-48.

117. Майер А.А., Микадзе И.С. Об одной модели передачи данных по каналам связи подверженным самоустраняющимся отказам. Georgian Engineering News, GIFD, Грузия, Тбилиси, 2008, №4

118. Майер А.А., Микадзе И.С. Об эффективности использования технических систем, подверженных отказам. Georgian Engineering News, GIFD, Грузия, Тбилиси, 2008, №4

119. Майер А.А., Камкамидзе Е.К., Микаишвили Н.В. Анализ возможности повышения производительности вычислительного кластера за счёт применения современных сетевых технологий. Georgian Engineering News, GIFD, Грузия, Тбилиси, 2006, №1