გიორგი ბაღათურია

ჰიპერბოლური ამოცანების რამდენიმე არაწრფივი ვარიანტი შერეული ტიპის კვაზიწრფივ განტოლებათა ერთი კლასისათვის

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2008

Гиорги Багатуриа

Несколько Нелинейных Вариантов Гиперболических Задач для Одного Класса Квазилинейных Уравнений Смешанного Типа

На Соискание Степени Академического Доктора

Грузинский Технический Университет

Тбилиси,0175,Грузия

Июль, 2008

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით გიორგი ბაღათურიას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: "*ჰიპერბოლური ამოცანების რამდენიმე არაწრფივი ვარიანტი შერეული ტიპის კვაზიწრფივ განტოლებათა ერთი კლასისათვის*" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: ____________________

რეცენზენტი: ____________________

რეცენზენტი: ____________________

რეცენზენტი: ____________________

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
2008 წელი

ავტორი: *გიორგი ბაღათურია*

დასახელება: *ჰიპერბოლური ამოცანების რამდენიმე არაწრფივი ვარიანტი შერეული ტიპის კვაზიწრფივ განტოლებათა ერთი კლასისათვის*

ფაკულტეტი: *ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი*

ხარისხი: *დოქტორი*

სხდომა ჩატარდა:

Резюме

В работе рассмотренны начальная задача,нелинейный вариант известной характеристической задачи Гурса,а также характеристическая задача со свободным носителем данных,как некий аналог известной линейной постановки.Эти задачи рассматриваются для класса уравнений

$$L(u)=(u_y^2-u_y)u_{xx}-(2u_xu_y+u_y-u_x-1)u_{xy}+(u_x^2+u_x)u_{yy}=F(u_x,u_y,y) \qquad (0.1)$$

главная часть которой представлена нестрого гиперболическим оператором L. Определённые ею характеристические корни

$$\lambda_1 = -\frac{p+1}{q}, \lambda_2 = \frac{p}{1-q} \qquad (0.2)$$

где $p \equiv u_x$; $q \equiv u_y$ - обозначения Монжа.

При различных функциях $u \in C^1(R^2)$ они ведут себя по-разному: При некоторых $u(x,y)$ они могут совпадать везде.Тогда вдоль таких функций оператор (0.1) перестаёт быть гиперболичным и параболически вырождается. Этот класс функций определяется условием

$$p-q+1=0 \qquad (0.3)$$

Если решение заданного уравнения принадлежит этому классу, оно будет параболическим решением. Из структуры корней (0.2) следует, что при параболических решениях не только совпадают их значения, но и они оба равны $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Следовательно, в таком случае характеристическое направления совпадают с направлением семейства прямых $x+y=c$. Если условие (0.3) выполняется не всюду, а только на определённом множестве точек, то решение относится к параболически вырожденному гиперболическому классу.В классе гиперболических решении уравнение (0.1) даёт две пары характеристических дифференциальных соотношений.первые соотношения каждой пары равносильны соотношениям характеристических направлении.Другие-же следуют иэ самого уравнения.Для первых интегралов ξ , η этих соотношениий соответственно строятся неполные системы дифференциальных уравнениий первого порядка

$$\xi_x-\frac{p+1}{q}\xi_y-\xi_u+\frac{F}{q^2-q}\xi_p=0, \quad p\xi_p+(q-1)\xi_q=0 \qquad (0.4)$$

$$\frac{q-1}{p}\eta_x-\eta_y-\eta_u+\frac{F}{pq}\eta_p=0, \qquad (p+1)\eta_p+q\eta_q=0 \qquad (0.5)$$

Первые интегралы

$$\xi = u + x , \quad \eta = u - y \qquad (0.6)$$

в данном случае непосредственно определяются. Для определения остальных первых интегралов расширяем системы (0.4) и (0.5) с помощю скобок Якоби и на правую часть уравнения (0.1) налагаем такие условия, чтобы каждая система была расширена до полной системы Клебша-Якоби состоящая из трёх уравнений. В этом случае уравнение будет иметь по две характеристических инварианта для каждого семейства [26].

Для существования общего интеграла в работе устанавливаются достсточные условия относительно правой части F уравнения (0.1).

На оснований этих достаточных условий выделен подкласс уравнений, для которых общий интеграл не только существует , но и стройтся в явном виде. В частности,один из подклассов уравнений (0.1)определяется следующим образом

$$L(u) = (u_x - u_y + 1)\frac{L^*(k)}{k_y - k_x} \qquad (0.7)$$

где $k \in C^2(R^2)$ - произвольно заданная функция, а оператор L^* имеет вид

$$L^*(k) = -k_{xx}(u_y^2 - u_y) + k_{xy}(2u_x u_y - u_x + u_y - 1) - k_{yy}(u_x^2 + u_x)$$

Установлено, что общие интегралы уравнений (0.7) представляется соотношением

$$f(u+x) + g(u-y) = k(x,y), \qquad (0.8)$$

где $f, g \in C^2(R^1)$- произвольные функции.

В частном случае при $k(x,y) = y^2$, уравнение

$$L(u) = -\frac{1}{y}p(p+1)(p-q+1) \qquad (0.9)$$

вполне интегрируемо и его общий интеграл имеет вид

$$f(u+x) + g(u-y) = y^2, \qquad (0.10)$$

с произвольными функциями $f, g \in C^2(R^1)$.

Отметим, что как общий интеграл (0.8) уравнений (0.7), так и интеграл (0.10) конкретного уравнения (0.9) не связаны с какими-либо корректными задачами. Доказано эквивалентность общих интегралов и соответствующих им уравнений.

Во второй главе рассмотрена задача Коши для уравнения (0.9) , когда на носителе начальных данных известны значения искомой функций и её пройзводной по некоторому некасательному направлению. Носитель начальных условий жордановая разомкнутая дуга γ, однозначно проектируется на координатных осях и представлена параметрически $x = \lambda(s), y = \mu(s),$ функциями λ, $\mu \in C^2[0,l]$ длины дуги $s \in [0,l]$ кривой γ, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки. l длина всей дуги. На интервале$[0,l]$ заданы также функции $\varphi \in C^2[0,l], \psi \in C^1[0,l]$.

Задача Коши. Найти регулярное решение уравнения (0.9) и область его определения, если выполняются условия

$$u\Big|_{\gamma} = \varphi(s)$$
$$u_y\Big|_{\gamma} = \psi(s) \qquad (0.11)$$

Теорема. Пусть на дуге γ всюду выполняется одно из условий

$$\varphi' = -\lambda', \quad \varphi' = \mu' \qquad (0.12)$$

Если значения выражения

$$H \equiv \frac{\psi^2 - \psi}{\lambda'} p' - \frac{p^2 - p}{\mu'} \psi' \qquad (0.13)$$

где

$$p(s) \equiv \left[\varphi'(s) - \psi(s)\mu'(s)\right]\lambda(s)^{-1} \; ,$$

на дуге γ всюду совпадает со значениями правой части уравнения (0.9),тогда задача (0.9), (0.12) не имеет решения. В противном случае задача имеет бесчисленние множество решений.

Рассматривается также случай, когда равенства (0.13) выполняются одновременно. В этом случае носитель γ является отрезком некоторой прямой семейства x+y=c. Как отмечалось выше, уравнение (0.9) вдоль такой прямой параболически вырождена. Более того, носитель γ принадлежит обоим семействам характеристик и этот отрезок параболического вырождения уравнения (0.9) одновременно является его характеристикой.

Когда нарушается условие вышеуказанных теорем, установлена

Теорема. Если условия (0.13) на всей дуге γ нарушены,функций $\varphi(s) + \lambda(s),$ $\varphi(s) - \mu(s)$ имеют однозначные обратные

$$k(z), \quad z \in \left[\varphi(0) + \lambda(0), \varphi(l) + \lambda(l)\right] \qquad (0.14)$$

$$h(t), \quad t \in \left[\varphi(0) - \lambda(0), \varphi(l) - \lambda(l)\right] \qquad (0.15)$$

соответственно,тогда существует и интеграл задачи (0.9), (0.11),и он представляется формулой

$$\mu^2\left[k(u + x)\right] + \int_{k(u+x)}^{h(u-y)} A(s)ds = y^2 \qquad (0.16)$$

где введено обозначение

$$A \equiv \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} \qquad (0.17)$$

Интеграл (0.16) дает возможность описания структур обеих семейств характеристик. Из каждой точки $(\lambda(s), \mu(s))$ носителя данных выходит по одной характеристической кривой каждого семейства. Из интервала $[0,l]$ фиксируем некоторое значение **a** параметра s, которому соответствует конкретная точка $(\lambda(a),\mu(a))$. На характеристике корня λ_1, проходящей через эту точку,инвариант u+x сохраняет постоянное значение равное $\varphi(a)+\lambda(a)$ а значения другого инварианта u-y на этой же характеристике будет $\varphi(a)+\lambda(a)-x-y$.Отсюда из(0.18)непосредственно следует соотношение,связывающее переменные x и y на дуге γ:

$$\mu^2(a)+\int_a^{h(\varphi(a)+\lambda(a)-(x+y))} A(s)ds = y^2 \qquad (0.18)$$

где $A(s)$ обозначает выражение (0.17).Это соотношение в неявном виде представляет характеристику семейства корня λ_1,проходящей через точку $(\lambda(a),\mu(a))$.

Возможно другое эквивалентное представление интеграла рассматриваемой задачи, где фигурирует другой характеристический инвариант η:

$$\mu^2\left[h(u-y)\right]+\int_{h(u-y)}^{k(u+x)} B(s)ds = y^2 \qquad (0.19)$$

где $B\equiv\dfrac{2\mu(\varphi'-\mu'\psi)(\varphi'+\lambda')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}$.

Характеристика семейства λ_2 , проходящей через указанную точку $(\lambda(a),\mu(a))$ кривой γ описивается формулой:

$$\mu^2(a)+\int_a^{k(\varphi(a)-\mu(a)+x+y)} B(s)ds = y^2$$

(0.20)

в которой величину a можно рассматривать в качестве параметра.

Подстановкой в (0.18) и (0.20) значении параметра $a=0$, $a=l$,получим уравнения всех четырех кривых, составляющих границу области D определения интеграла рассматриваемой задачи.

В работе установлены достаточные условия того,чтобы в области D определения решения семейство характеристик корня λ_1 не имело дискриминантных точек.

Аналогичное условия установлены и для семейства характеристик корня λ_2.

На основании представления (0.16) и (0.19) интегралов задачи (0.9), (0.11), построено эквивалентное представление,содержащее характеристическиу инварианты в симметричном виде.

Перемножением уравнения на знаменатель правой части (0.9) можно рассмотреть уравнение с вырождением порядка.В таком случае правая часть становится непрерывной, но главная часть будет вырождаться на прямой y=0.Это вырождение может стать причиной некорректности задачи Коши когда некоторый отрезок прямой y=0 попадает в состав носителя данных[23],[27]. Как выясняется, если на этой части носителя уравнение параболически вырождается, то задача (0.9),(0.11) может имееть бесконечное число решении.

Рассматривается Задача Коши, когда носителем начальных данных целиком является отрезком прямой x=0,где заданы условия:

$$\begin{aligned} &u(0,y)=\varphi(y) \\ &\qquad\qquad a \le y \le b,\ \ a>0 \\ &u_x(0,y)=\psi(y) \end{aligned} \tag{0.21}$$

$\varphi \in C^2[a,b], \psi \in C^1[a,b]$ - заданные функции.

Доказано, что если функции φ, ψ строго монотонны на отрезке [a,b] и функции φ и $\varphi - y$ имеют однозначные обратные k и h соответственно,тогда интеграл рассматриваемой задачи существует и представляется формулой

$$\int\limits_{h(u+x)}^{k(u-y)} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1} + [k(u-y)]^2 = y^2 \tag{0.22}$$

На основании этого представления непосредственно можно получить неявные уравнения характеристик обоих семейств , выпущенных из точек $(0.c)$, $a \le c \le b$ носителя.Они имеют вид:

$$\int\limits_{c}^{k(\varphi(c)-x-y)} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1} + [\varphi(c)-x-y]^2 = y^2 \tag{0.23}$$

$$\int\limits_{h(\varphi(c)-c-x-y)}^{c} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1} + c^2 = y^2, \tag{0.24}$$

где ординату c можно принять за параметр для обейх множеств кривых.

Устанавливается,что все характеристики (0.23),(0.24) при определённых условиях относительно длины носителя сходятся в начале координат,где они все касаются прямой $x+y=0$.

Для наглядности в работе приведены случай простых начальных возмущений и дана их численная реализация.В регулярном случае доказано,что область определения интеграла задачи Коши (0.9),(0.11)ограничена характеристиками (0.23),(0.24) при значениях $c=a, c=b$ параметра c.

Во второй главе исследована Характеристическая задача Гурса: заданны характеристики выходящие из общей точки.Они строго монотонные,гладкие,разомкнутые Жордановы дуги γ и δ представленные в явном виде $y=\varphi(x), \varphi\in C^2[x_0,x_1]$ и $y=\psi(x), \psi\in C^2[x_0,x_2]$ соответственно,где $\varphi'(x)\neq 0, \psi'(x)\neq 0$.Ествественно должно быть $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$. Вместе со своей областью определения найти решение u(x,y) уравнения (0.9) при его известном значении u_0 в точке (x_0,y_0) если вдоль него дуга γ является хфрфктеристикой семейства корня λ_1 а дуга δ - семейства корня λ_2.доказана

Теорема. Если функциональные уравнения $\varphi(x)-x+u_0+x_0=z$, $\psi(x)+x+u_0-\psi(x_0)=\varsigma$ однозначно разрешимы на сегментах $[x_0,x_1]$ и $[x_0,x_2]$ соответственно,их решения

$$x=\tau(z),\ \ z\in[u_0-\varphi(x_0),u_0+x_0-x_1-\varphi(x_1)]$$

$$x=\nu(\varsigma),\ \ \varsigma\in[u_0-\psi(x_0),u_0-\psi(x_0)+x_1+\psi(x_1)]$$

дважды непрерывно дифференцируемы и

$$\tau(u_0-\varphi(x_0))=x_0\ \ ,\nu(u_0+x_0)=x_0$$

и если выполняются условия

$$(\varphi\cdot\tau'\cdot\psi\cdot\nu'+\varphi^2\tau'^2)^2+(\psi\cdot\nu'\cdot y+\psi\cdot\nu'\cdot\varphi\cdot\tau')^2\neq 0$$

$$(\varphi\cdot\tau'+\psi\cdot\nu')^2+(\psi\cdot\nu'\cdot y-\psi^2\cdot\nu'^2)^2\neq 0,$$

тогда существует интеграл характеристической задачи для уравнения (0.9), регулярный в области ограниченной характеристиками γ , δ и

$$\psi^2(\nu(u_0+x_0-x_1-\varphi(x_1)+x+y))+\varphi^2(\tau(u_0+x_0-x_1-\varphi(x_1))=y^2+y_0^2$$

$$\psi^2(\nu(u_0-y_0+x_2+\psi(x_2))+\varphi^2(\tau(u_0-y_0+x_2+\psi(x_2)-x-y)=y^2+y_0^2.$$

На оснований рассмотренной характеристической задачи исследована задача со свободным ностелем данных. Задача заключается в следующем:Найти решение уравнения (0.9)принимающую значение u_0 в точке $(x_0,\varphi(x_0))$ и область его определения, если кривая γ является соответствующей этому решению характеристикой семейства корня λ_1 а вдоль другой, неизвестной кривой δ, характеристики семейства λ_2, выпущенной из точки $(x_0,\varphi(x_0))$ оно удовлетворяет условию

$$\alpha(x)u_x+\beta(x)u_y=\theta(x),\qquad x\in[x_0,x_2] \qquad (0.25)$$

$$\alpha,\ \beta,\ \theta\in C^1[x_0,x_2].$$

Обозначим через ψ неизвестную функцию, представляющую дугу δ уравнением

$$y=\psi(x),\quad \psi(x_0)=y_0,\ \ \psi\in C^2[x_0,x_2].$$

Доказана

Теорема. Если выполнены условия

$$\begin{aligned}
&\beta(x_0) \neq \alpha(x_0)\varphi'(x_0),\\
&\left(\frac{\beta y}{\alpha+\beta}\right)' \neq 0,\\
&\Lambda(\beta-\theta)(\theta+\alpha) < 0,\\
&\Lambda[\alpha'(\beta-\theta)-\alpha(\beta'-\theta')]+\beta(\beta-\theta-\alpha)=0,
\end{aligned}$$

где постоянная $\Lambda \equiv \dfrac{\varphi'(x_0)\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)+1}$, то функция $y=\psi(x)$, и тем самым характеристика δ, определяются однозначно.

Установленны ещё некоторые условия, при выполнении которых также можно однозначно определить функцию $y=\psi(x)$.

Таким образом, установлены некоторые достаточные условия существования функций $\psi(x)$, которая явно определяет дугу δ в классе кривых, однозначно проэцируемых на ось абсцисс. От этих ограничений можно освободится, если дугу δ будем искать в классе кривых, однозначно проэцируемых на ось ординат. В таком случае, в условиях (0.25) задачи параметры $\alpha,\ \beta,\ \theta$ будем считать функциями аргумента $y\in[y_0,y_1]$, где y_1 - некоторое число $y_1 \neq y_0$, а кривую γ предположим представленной соотношением $x=\varphi(y),\ x_0=\varphi(y_0)$,

$$\alpha(y)u_x+\beta(y)u_y=\theta(y), \qquad y\in[y_0,y_1],$$

$$\alpha,\ \beta,\ \theta \in C_1[y_0,y_1].$$

Доказано, что в этом случае Кривая δ будет представлена решением

$$\psi(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{(t-\Lambda)(\beta(t)-\theta(t))-\alpha(t)\cdot t}{\beta(t)(\Lambda-t)-\Lambda\cdot\theta(t)}\,dt+x_0$$

и функция $\psi(y)$ определена в интервале $[y_0,y_1]$.

Abstract

In this work there are considered initial problem, non-linear variant of known characteristic Goursat problem and characteristic problem with partially free support. These problems are considered for one class of differential equations:

$$L(u) = (u_y^2 - u_y)u_{xx} - (2u_x u_y + u_y - u_x - 1)u_{xy} + (u_x^2 + u_x)u_{yy} = F(u_x, u_y, y) \quad (0.1)$$

the main part of which is a non-strictly hyperbolic second-order operator L. Characteristic roots defined by it

$$\lambda_1 = -\frac{p+1}{q}, \lambda_2 = \frac{p}{1-q} \quad (0.2)$$

where $p \equiv u_x$; $q \equiv u_y$ are Monge designations, behave differently with different functions $u \in C^1(R^2)$: with some $u(x, y)$ they may coincide at all points. Then along such functions operator (0.1) ceases to be hyperbolic and parabolically degenerates. This class of the function is defined by means of the condition

$$p - q + 1 = 0 \quad (0.3)$$

If the solution of the given equation belongs to this class it will be a parabolic solution. It follows from the structure of the roots (0.2) that when having parabolic solutions their values not only coincide but they both equal to $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Accordingly, in such case characteristic directions coincide with the direction of the family of lines $x + y = c$. If the conditions (0.3) are not fulfilled at all points but only at the determined number of points then the solution is related to the parabolically degenerated hyperbolic class. In the class of hyperbolic solutions the equation (0.1) gives two couples of characteristic differential relations. First relations of each couple are equivalent to the relations of the characteristic directions, while the others result from the equation itself. For the first integrals ξ, η of these relations correspondingly the incomplete systems of first order differential equations are constructed

$$\xi_x - \frac{p+1}{q}\xi_y - \xi_u + \frac{F}{q^2 - q}\xi_p = 0, \quad p\xi_p + (q-1)\xi_q = 0 \quad (0.4)$$

$$\frac{q-1}{p}\eta_x - \eta_y - \eta_u + \frac{F}{pq}\eta_p = 0, \quad (p+1)\eta_p + q\eta_q = 0 \quad (0.5)$$

In the present case the first integrals

$$\xi = u + x, \quad \eta = u - y \quad (0.6)$$

are directly defined. In order to define the rest of the first integrals we expand the systems (0.4) and (0.5) by means of the brackets of Jacob and apply to the right hand side of the equation (0.1) such conditions which expand each system to the complete system of Klebsh-Jacob consisting of three equations. In this case the equation will have two characteristic invariants for each family [26].

In this work we determine sufficient conditions which the right hand part F of the equation (0.1) must fulfill for the existence of general integral.

On the basis of these sufficient conditions the subclass of equations is chosen for which the general integral not only exists but is also constructed in explicit form. In particular, one of the subclasses of the equations (0.1) are defined as follows

$$L(u) = (u_x - u_y + 1)\frac{L^*(k)}{k_y - k_x} \qquad (0.7)$$

where $k \in C^2(R^2)$ is an arbitrary function and the operator L^* has the following form

$$L^*(k) = -k_{xx}(u_y^2 - u_y) + k_{xy}(2u_x u_y - u_x + u_y - 1) - k_{yy}(u_x^2 + u_x)$$

It is established that the general integrals of the equation (0.7) are represented by the following relation

$$f(u+x) + g(u-y) = k(x,y), \qquad (0.8)$$

where $f, g \in C^2(R^1)$ are arbitrary functions.

In particular case when $k(x,y) = y^2$, the equation

$$L(u) = -\frac{1}{y}p(p+1)(p-q+1) \qquad (0.9)$$

can be fully integrated and its general integral has the following form

$$f(u+x) + g(u-y) = y^2, \qquad (0.10)$$

with the arbitrary functions $f, g \in C^2(R^1)$.

It should be noted that the general integral (0.8) of the equation (0.7) as well as the integral (0.10) of the concrete equation (0.9) are not connected to any kind of correct problems. Equivalence of general integrals and corresponding to them equations is proved.

In the second chapter we consider the Cauchy problem for the equation (0.10) when on the initial data support the values of unknown function and its derivative to a certain non-tangential direction are known. The initial data support, the unclosed Jordan arc γ is uniquely projected on the coordinate axes. It is represented parametrically $x = \lambda(s), y = \mu(s)$, in terms of the functions $\lambda, \mu \in C^2[0,l]$ of the arc length $s \in [0,l]$ of the curve γ, counting from a certain fixed point. l is the length of the entire arc. $\varphi \in C^2[0,l], \psi \in C^1[0,l]$ are also the given functions in the interval $[0,l]$.

Cauchy problem: Find a regular solution of equation (0.9) together with its domain of definition, satisfying the conditions

$$u\big|_{\gamma} = \varphi(s)$$

$$u_y\big|_{\gamma} = \psi(s) \tag{0.11}$$

Theorem. Let everywhere on the arc only one of the conditions is fulfilled

$$\varphi' = -\lambda', \qquad \varphi' = \mu' \tag{0.12}$$

If the values of the expression

$$H \equiv \frac{\psi^2 - \psi}{\lambda'} p' - \frac{p^2 - p}{\mu'} \psi' \tag{0.13}$$

Where

$$p(s) \equiv [\varphi'(s) - \psi(s)\mu'(s)]\lambda(s)^{-1}$$

everywhere on the arc γ coincides with the values of the right hand side of the equation (0.9) then the problem (0.9), (0.11) has no solution at all. Otherwise it has infinitely many solutions.

The case when the equalities (0.13) are fulfilled simultaneously is also considered. In this case the support γ is a segment of a certain line of the family x+y=c. As it was noted above, the equation (0.9) is parabolically degenerated along such line. Moreover, support γ belongs to both characteristic families' and this segment of parabolic degeneracy of the equation (0.9) is its characteristic at the same time.

If the condition of the above mentioned theorems is not fulfilled it is established

Thorem. If the conditions (0.13) are violated along the entire arc γ, then the functions $\varphi(s) + \lambda(s), \quad \varphi(s) - \mu(s)$

have unique reverses

$$k(z), \quad z \in [\varphi(0) + \lambda(0), \varphi(l) + \lambda(l)] \tag{0.14}$$

$$h(t), \quad t \in [\varphi(0) - \lambda(0), \varphi(l) - \lambda(l)] \tag{0.15}$$

correspondingly. In such case an integral of the problem (0.9), (0.11) also exists and is represented by the formula

$$\mu^2[k(u + x)] + \int_{k(u+x)}^{h(u-y)} A(s)ds = y^2 \tag{0.16}$$

where the following notation is introduced

$$A \equiv \frac{2\mu(\mu'\psi-\varphi'-\lambda')(\varphi'-\mu')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')} \tag{0.17}$$

The integral (0.16) allows us to describe structure of both characteristic families. From each point $(\lambda(s),\mu(s))$ of the data support derives one characteristic line of each family. We fix a certain value **a,** from the interval $[0,l]$, of the parameter **s**, to which the concrete point $(\lambda(a),\mu(a))$ corresponds. Invariant u+x, passing through this point, on the characteristic of the root λ_1, maintains its constant value which equals to $\varphi(a)+\lambda(a)$ while the value of another invariant u-y on the same characteristic will be $\varphi(a)+\lambda(a)-x-y$. From (0.16) directly follows the relation which relates variables x and y on the arc γ:

$$\mu^2(a)+\int_a^{h(\varphi(a)+\lambda(a)-(x+y))} A(s)ds = y^2 \tag{0.18}$$

where $A(s)$ denotes the expression (0.17). This relation in the explicit form represents characteristic of the family of the root λ_1, which passes through the point $(\lambda(a),\mu(a))$.

Another equivalent representation of the integral of the considered problem is possible, with other characteristic invariant η:

$$\mu^2[h(u-y)]+\int_{h(u-y)}^{k(u+x)} B(s)ds = y^2 \tag{0.19}$$

where $B \equiv \dfrac{2\mu(\varphi'-\mu'\psi)(\varphi'+\lambda')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}$. .

Characteristic of the family λ_2, which passes through the referred point of the curve γ, is described by the formula:

$$\mu^2(a)+\int_a^{k(\varphi(a)-\mu(a)+x+y)} B(s)ds = y^2 \tag{0.20}$$

where the quantity a may be considered as a parameter.

By substituting the values of the parameter $a=0$, $a=l$ into (0.18) and (0.20) we will obtain the equations of all four curves which make up the boarders of the domain of definition D of the integral of the considered problem.

In this work we found the sufficient conditions for the solutions of the characteristic family of the root λ_1 when they do not have discriminant points in the domain of definition D.

Analogous conditions are found for the characteristic family of the root λ_2.

On the bases of representation of the integrals (0.16) and (0.19) of the problem (0.9), (0.11) the equivalent representation containing characteristic invariants in the symmetric form are constructed.

By multiplying the equations on the denominator of the right hand side of the (0.9) we can consider the equation with the order degeneracy. In such case the right hand side of the equation becomes continued and it's main part will be degenerated on the straight line y=0. The degeneracy may cause the incorrectness of the Cauchy problem when a certain segment of the straight line y=0 becomes a part of the data support [23], [27]. As it turns out, if on this part of the support the equation is parabolically degenerated, the problem (0.9), (0.11) may have infinite number of solutions.

The Cauchy problem is considered when the initial data support is entirely the segment of the straight line x=0, where the following conditions are fulfilled:

$$\begin{aligned} &u(0,y)=\varphi(y) \\ &\qquad\qquad\qquad a\le y\le b,\ \ a>0 \\ &u_x(0,y)=\psi(y) \end{aligned} \tag{0.21}$$

$\varphi\in C^2[a,b], \psi\in C^1[a,b]$ are the given functions.

It is proved that if the functions φ, ψ are strictly monotonous on the segment [a, b] and the functions φ and $\varphi-y$ correspondingly have a unique reverses **k** and **h**, then there exists the integral of the considered problem and it is represented by the formula

$$\int\limits_{h(u+x)}^{k(u-y)} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+[k(u-y)]^2=y^2 \tag{0.22}$$

On the basis of this representation we can directly obtain implicit equations of characteristics of both families coming from the points $(0.c)$, $a\le c\le b$ of the support. They have a form:

$$\int\limits_{c}^{k(\varphi(c)-x-y)} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+[\varphi(c)-x-y]^2=y^2 \tag{0.23}$$

$$\int\limits_{h(\varphi(c)-c-x-y)}^{c} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1} + c^2 = y^2 \tag{0.24}$$

where we can regard the ordinate **c** as a parameter for both numbers of curves.

It is established that all characteristics (0.23), (0.24), when a certain conditions are fulfilled concerning the length of the support, converge in the origin of the coordinate system where they all touch the straight line $x + y = 0$.

For visual demonstration we present in this work the cases of simple initial perturbation and give their numerical realization. In the regular case we prove that the domain of definition of the integral of the Cauchy problem (0.9), (0.11) is bounded by the characteristics (0.23), (0.24) when the values of the parameter c are $c = a, c = b$. .

In the second chapter the characteristic problem of Goursat is studied: there are given characteristics which come from the common point. They are strictly monotonous, smooth, unclosed Jordan arcs γ and δ represented correspondingly in the explicit form $y = \varphi(x), \varphi \in C^2[x_0, x_1]$ and $y = \psi(x), \psi \in C^2[x_0, x_2]$, where $\varphi'(x) \neq 0, \psi'(x) \neq 0$. Naturally there should be $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$. Find the solution u(x, y) of the equation (0.9) with its domain of definition when u_0 is the known value in the point (x_0, y_0) and if along with it the arc γ is the characteristic of the family of the root λ_1 while the arc δ is the characteristic of the root λ_2. The following theorem is proved

Theorem. If the functional equations $\varphi(x) - x + u_0 + x_0 = z$, $\psi(x) + x + u_0 - \psi(x_0) = \varsigma$ are uniquely solved on the segments $[x_0, x_1]$ and $[x_0, x_2]$ correspondingly, their solutions

$$x = \tau(z), \quad z \in [u_0 - \varphi(x_0), u_0 + x_0 - x_1 - \varphi(x_1)]$$

$$x = \nu(\varsigma), \quad \varsigma \in [u_0 - \psi(x_0), u_0 - \psi(x_0) + x_1 + \psi(x_1)]$$

are twice continuously differentiable and

$$\tau(u_0 - \varphi(x_0)) = x_0 \ , \quad \nu(u_0 + x_0) = x_0$$

and if the following conditions are fulfilled

$$(\varphi \cdot \tau' \cdot \psi \cdot \nu' + \varphi^2 \tau'^2)^2 + (\psi \cdot \nu' \cdot y + \psi \cdot \nu' \cdot \varphi \cdot \tau')^2 \neq 0$$

$$(\varphi \cdot \tau' + \psi \cdot \nu')^2 + (\psi \cdot \nu' \cdot y - \psi^2 \cdot \nu'^2)^2 \neq 0,$$

then there exists an integral of the characteristic problem of the equation (0.9), which is regular in the domain bounded by the characteristics γ, δ and

$$\psi^2(\nu(u_0 + x_0 - x_1 - \varphi(x_1) + x + y)) + \varphi^2(\tau(u_0 + x_0 - x_1 - \varphi(x_1)) = y^2 + y_0^2$$

$$\psi^2(\nu(u_0 - y_0 + x_2 + \psi(x_2)) + \varphi^2(\tau(u_0 - y_0 + x_2 + \psi(x_2) - x - y) = y^2 + y_0^2$$

On the basis of the considered characteristic problem the problem with the arbitrary data support is studied. The problem is as follows: find the solution of the equation (0.9) the value of which is u_0 in the point $(x_0, \varphi(x_0))$ and its domain of definition if the curve γ corresponds to this solution by the characteristic of the family of the root λ_1 and along another, unknown curve

δ of the characteristic of the family λ_2, coming from the point $(x_0, \varphi(x_0))$ it satisfies the condition

$$\alpha(x)u_x + \beta(x)u_y = \theta(x), \ \ x \in [x_0, x_2] \tag{0.25}$$

$$\alpha, \ \beta, \ \theta \in C^1[x_0, x_2]$$

Let's denote by ψ the unknown function which represents the arc δ by the equation

$$y = \psi(x), \qquad \psi(x_0) = y_0, \quad \psi \in C^2[x_0, x_2]$$

The following theorem is proved

Theorem. If the following conditions are fulfilled

$$\beta(x_0) \neq \alpha(x_0)\varphi'(x_0),$$
$$\left(\frac{\beta y}{\alpha + \beta}\right)' \neq 0,$$
$$\Lambda(\beta - \theta)(\theta + \alpha) < 0,$$
$$\Lambda[\alpha'(\beta - \theta) - \alpha(\beta' - \theta')] + \beta(\beta - \theta - \alpha) = 0,$$

where the constant $\Lambda \equiv \dfrac{\varphi'(x_0)\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0) + 1}$, then the function $y = \psi(x),$ and the characteristic δ are uniquely defined.

There are also established some other conditions by fulfillment of which we can uniquely define the function $y = \psi(x)$. .

Thus, we established certain sufficient conditions for the existence of the function $\psi(x)$ which explicitly defines the arc δ in the class of curves uniquely projected on the axis of abscissa. We can be freed from these restrictions if we look for the arc δ in the class of curves uniquely projected on the ordinate axis. In such case when (0.25) conditions of the problem are fulfilled we'll regard the parameters α, β, θ as functions of the argument $y \in [y_0, y_1]$, where y_1 is a certain number $y_1 \neq y_0$ and we suppose the curve γ is represented by the relations $x = \varphi(y), \ x_0 = \varphi(y_0)$,

$$\alpha(y)u_x + \beta(y)u_y = \theta(y), \ \ y \in [y_0, y_1],$$
$$\alpha, \ \beta, \ \theta \in C_1[y_0, y_1],$$

It is proved that in this case the curve δ will be represented by the solution

$$\psi(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{(t - \Lambda)(\beta(t) - \theta(t)) - \alpha(t) \cdot t}{\beta(t)(\Lambda - t) - \Lambda \cdot \theta(t)} dt + x_0$$

and the function $\psi(y)$ will be defined in the interval $[y_0, y_1]$. .

Содержание

Перечень рисунков

Введение

Граничные задачи для уравнении с частными пройзводными различных типов ставятся по разному. Например для эллиптических уравнении как правило, рассматриваются задачи, когда следует найти решение в заданной области, по заданными на всей её границе условиями. На границе могут быть известны значения либо искомого решения, либо значения его пройзводной по какому-либо некасательному направлению, либо их какая-нибудь определённая комбинация. Для них исследовны задачи со свободными границами, когда известна лишь часть границы области, а другую часть определяют вместе с решениями [1-3]. Задачи поставленные для гиперболических уравнений в основном, фактически являются задачами со свободными границами. Заданы разомкнутые носители данных и требуется найти вместе с решением и область их определения.

Хотя, Адамар показал, что для гиперболических уравнений могут оказаться корректными и задачи, типичные для эллиптических уравнений [4,5].

В расспространений решений гиперболических уравнений важную роль играют характеристические многообразия, которые определяются лишь главной частью уравнения. Понятие этих многообразий вводится по-разному. Например, они могут быть рассмотрены, как возможные пути распространения интегрируемых разрывов, или как многообразия, поставленные на которых начальные задачи некорректны [6]. Все определения приводят к одному и тому же результату. эти многообразия примечательны и тем, что составляют границу или её часть области определения решений тех или иных задач.

Семейство характеристик уравнений с линейной главной частью не зависят от неизвестных решений и поэтому области определения решений задач известны a’priori.

Именно поэтому в постановке задач многие авторы заранее указывают, где ищется решение. Естественно, что для уравнений с квазилинейной главной частью такая постановка вопроса исключена и вместе с решением приходится искать и область его определения.

Обстановка существенно усложняется, когда уравнение на некоторых множествах теряет гиперболичность и параболически вырождается. Множество точек этого вырождения может быть определено независимыми переменными. Тогда это множество не зависит от решения и вполне определено. Но может оказаться, что параболическое вырождение определяется решением. В таком случае данные задачи могут оказаться причиной параболического вырождения уравнения.

Не исключено, что множество точек параболического вырождения сама окажется характеристической линией. В таком случае поставленные задачи, в том числе и задача Коши не будут корректными [7].

С точки зрения постановки задача Коши для нелинейных уравнений не встречает препятствий и исследование осуществляется известными методами. В случае конечного носителя условий результаты получены в условиях довольно строгих ограничений и они часто имеют локальный характер. Кроме этого появляются особые явления подобные градиентной катастрофе, когда начальные носители и данные на ней условия вместе с коэффициентами уравнения и значениями решения гладкие и ограниченные, а первые производные решений вне начального носителя на определенном множестве точек неограничены[8].

Для характеристических задач дело обстоит иначе. Формулировка характеристических задач для линейных уравнений не всегда могут распространены на случаи нелинейных уравнений. Основнвя причина этого- зависимость семейства характеристических линий от значений искомых решений. Необходимо принимать во внимание эту зависимость при подборе носителей характеристических условий. При этом целесообразно такой подбор носителей, чтобы формулировка задач как для линейных, так и нелинейных уравнений оказалось в общих рамках. Существуют различные варианты постановок этих задач [8-17]. Постановки и исслдование таких задач с приурочением общих интегралов и структур характеристических многообразии впервые встречаются в работах [18-20]. Следует ометить, что для нелинейных уравнений пока не существует единой теории и, поэтому, каждое уравнение или какой-либо отдельный класс уравнений требует индивидуального подхода.

Для выявления каким образом должны быть подобраны эти носители условий для одного конкретного класса строго или параболически вырождающихся нелинейных уравнений в данной работе будут использованы 1) общие интегралы, построенные на основе теории характеристик и 2) свойства получающейся из их структуры этих интегралов. Теория построения общих интегралов имеет давную историю. Эта теория берет начала из фундаментальных трудов Монжа, Дарбу, Гурса [24],[25]. Основной целью данной работы является формулировка и исследование характеристических задач для класса уравнений допускающих явные представления общих интегралов.

В данной работе рассмотрен класс нелинейных уравнений второго порядка, главная часть которых представляется оператором

$$L(u) = (u_y^2 - u_y)u_{xx} - (2u_x u_y + u_y - u_x - 1)u_{xy} + (u_x^2 - u_x)u_{yy} \quad (0.26)$$

Этот оператор является гиперболическим вдоль всех функции, подчинённых условию

$$u_x - u_y + 1 \neq 0 \quad (0.27)$$

Если условие (0.27) нарушено везде, то оператор является параболическим, а когда это условие выполняется на всюду, его следует отнести к классу операторов смешанного гиперболо-параболического типа [21-23].

Коме указанных существенных особеностей уравнения, рассмотренные в данной работе, имеют вырождение порядка на прямой $y=0$ и в общем виде задаются соотношением

$$yL(u) = f(u_x, u_y) \qquad (0.28)$$

Заметим, что вырождение порядка рассматриваемых уравнений пройсходит независимо от решения. Такие уравнения можно переписать и в таком виде, где порядок не вырождается, но взамен младшие члены перестают быть ограниченными. В таком случае, рассматриваемые уравнения с главной частью (0.26) можно отнести к классу нелинейных вариантов уравнения Эилера-Дарбу[24-26].

Из-за наличия всех указанных особенностей в начальных и характеристических задачах следует выявить эффекты слияния нелинейности, вырождения порядка и вырождения типа.

С этой целью наряду с другими методами воспользуемся общими интегралами рассматриваемых уравнений, которые будут построены в данной работе на оснований теорий характеристик. Ниже рассматриваются уравнения, общие интегралы которых имеют сравнительно простую структуру.

Глава 1.
Общий интеграл одного нестрого гиперболического уравнения с общими интегралами в виде суммы двух произвольных функций

§ 1. Достаточные условия существования гладких инвариантов

На плоскости (x,y) рассмотрим нестрого гиперболическое квазилинейное уравнение

$$L(u) = F(x,y,u,p,q) \tag{1.1}$$

главная часть которого

$$L(u) = (q^2 - q)u_{xx} + (2pq + q - p - 1)u_{xy} + (p^2 + p)u_{yy}$$

дифференциальный оператор второго порядка и согласно обозначениям Монжа $p = u_x$, $q = u_y$.

Характеристические корни оператора L

$$\lambda_1 = -\frac{p+1}{q}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{q-1}. \tag{1.2}$$

зависят от производных p,q неизвестного решения и определяют в каждой точке два характеристических направления. Эти направления могут совпадать, что выражается условием

$$p - q + 1 = 0. \tag{1.3}$$

Для решений, вдоль которых выполняется условие (1.3), данное управление параболическое. Следовательно, условием (1.3) определяется класс параболических решений уравнения (1.1). Когда для некоторого конкретного решения (1.3) всюду нарушено, тогда вдоль неё данное уравнение гиперболического типа и этим условием определяется класс гиперболических решений уравнения (1.1). В случае когда условие (1.3) выполняется только в изолированных точках или на линиях, уравнение гиперболического типа с параболическим вырождением.

Уравнение (1.1) может иметь строго гиперболические, строго параболические или параболически вырожденные гиперболические решения. Исходя из этого уравнение (1.1) принадлежит нестрого гиперболическому классу.

Соотношения характеристических направлений соответствующие характеристическим корням (1.2) определяют характеристические инварианты оператора L. Эти выражения для корней λ_1 и λ_2 соответственно $\xi = u + x$ и $\eta = u - y$. Для всех решений эти инварианты сохраняют постоянное значение вдоль соответствующих характеристических линий.

Данное уравнение (1.1) общего вида и представляет довольно широкий класс уравнений. Для уравнений этого класса исследование поставленных задач можно вести разными методами, хотя результат будет иметь в основном локальный характер. Для уравнения (1.1) рассмотрим задачу Коши и нелинейные варианты характеристической задачи, когда правая часть F конкретного вида, для которого возможно явное представление общего интеграла и этот интеграл как можно простой структуры.

Как известно,[31] для построения общего интеграла достаточно иметь промежуточные интегралы, а в свою очередь эти промежуточные интегралы получаются на основе первых интегралов характеристических дифференциальных соотношений и характеристических инвариантов.

Дифференциальные соотношения, соответствующие корню λ_1, имеет вид

$$\begin{cases} dy + \dfrac{p+1}{q} dx = 0, \\ dp - \dfrac{p}{q-1} dq - \dfrac{F}{q^2 - q} dx = 0. \end{cases} \qquad (1.4)$$

Дифференциальные соотношения, соответствующие корню λ_2, запишутся так

$$\begin{cases} dy + \dfrac{p}{q-1}dx = 0, \\ dp - \dfrac{p+1}{q}dq - \dfrac{F}{q^2-q}dx = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Учитывая обозначения Монжа, обе системы (1.4) и (1.5) следует дополнить условием

$$du = p\,dx + q\,dy. \tag{1.6}$$

Характеристические дифференциальные соотношения (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6) состоят из трёх уравнений и содержат пять неизвестных величин x, y, u, p, q. Все эти величины связывают между собой первые интегралы $\xi(x, y, u, p, q)$ и $\eta(x, y, u, p, q)$ дифференциальных соотношений (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6).

Нам известны по одному первому интегралу соотношений (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6).

Исходя из системы (1.4), (1.6) для существования промежуточного интеграла требуется построение еще одного характеристического инварианта ξ_1.

Для первого интеграла $\xi(x, y, u, p, q)$ из системы (1.4), (1.6) получается

$$\begin{cases} M_1(\xi) := \xi_x - \dfrac{p+1}{q}\xi_y - \xi_u + \dfrac{F}{q^2-q}\xi_p = 0, \\ M_2(\xi) := p\cdot\xi_p + (q-1)\xi_q = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

составленная скобками Пуассона система этих двух уравнений можно дополнить до пяти уравнений. Но так как система должна иметь только два первых интеграла, согласно теореме Якобы, из этих пяти уравнений независимых должно быть только три [31]. После расширения и некоторых упрощении будем иметь:

$$M_3(\xi):=[p(q-1)-(q-1)^2]\xi_y+H\cdot\xi_p,$$

$$\begin{aligned}M_4(\xi):=(q-1)(F+H)\xi_y&+[q(q-1)H_x-(p+1)(q-1)H_y-\\&-q(q-1)H_u+F\cdot H_p-(p-q+1)(q-1)F_y-H\cdot F_p]\xi_p=0,\end{aligned}$$

$$M_5(\xi):=2(q-1)(p-q+1)\xi_y+[p\cdot H_p+(q-1)H_q-H)\xi_p=0,$$

где $H=F(3q-1)-p\cdot q\cdot F_p-q(q-1)F_q$.

Легко видеть что тройка операторов M_1, M_2, M_3 независимы. Действительно, если рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{p+1}{q} & -1 & \dfrac{F}{q^2-q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q-1 \\ 0 & p(q-1)-(q-1)^2 & 0 & H & 0 \\ 0 & (q-1)(F+H) & 0 & T & 0 \\ 0 & 2(q-1)(p-q+1) & 0 & p\cdot H_p+(q-1)H_q-H & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned}T=q(q-1)H_x&-(p+1)(q-1)H_y-q(q-1)H_u+\\&+F\cdot H_p-(p-q+1)(q-1)F_y-H\cdot F_p\end{aligned}$$

непосредственным вычислением убедимся, что ранг этой матрицы равен трем.

Что касается операторов M_4 и M_5, для существования двух первых интегралов следует потребовать, чтобы

$$\begin{aligned}&-(p-q+1)pq^2(q-1)F_{px}-(p-q+1)q^2(q-1)^2F_{qx}+\\&+pq(p+1)(q-1)(p-q+1)F_{py}+(p-q+1)(q-1)^2qF_{qy}+\\&+(p-q+1)pq^2(q-1)F_{pu}+(p-q+1)q^2(q-1)^2F_{qu}-\\&-(p-q+1)p\cdot q\cdot F\cdot F_{pp}-q(q-1)(p-q+1)F_{pq}\cdot F+\end{aligned}$$

$$+(p-q+1)q(q-1)(3q-1)F_x-q(q-1)(3p+2)F_y-q(q-1)(3q-1)F_x+$$
$$+pq(1-pq)F_p^2+q(q-1)(1+2pq)F_p\cdot F_q+q^2(q-1)^2F_q^2+$$
$$+(6pq-pq-q)F\cdot F_p+q(q-1)(6q-1)F\cdot F_q+$$
$$+(3q-1)(3q-2)F^2=0, \qquad (1.8)$$

$$p^2\cdot F_{pp}+2p(q-1)F_{pq}+(q-1)^2F_{qq}-2pF_p+2(q-1)F_q+6F=0. \qquad (1.9)$$

Аналогично рассмотрим дифференциальные соотношения (1.5), (1.6). Мы знаем один из первых интегралов этой системы $\eta=u-y$. Для построения других первых интегралов рассматриваем систему линейных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(\eta):=\dfrac{q-1}{p}\eta_x-\eta_y-\eta_u+\dfrac{F}{pq}\eta_p=0, \\ \mathcal{L}_2(\eta):=(p+1)\eta_p+q\cdot\eta_q=0. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Полученная система (1.10), расширяется скобками Пуассона следующими тремя уравнениями

$$\mathcal{L}_3(\eta):=q(q-p-1)\eta_x+K\cdot\eta_p=0,$$

$$\mathcal{L}_4(\eta):=q[K(q-1)-F\cdot p]\eta_x+[pq(q-1)K_x-p^2qK_y-p^2q\cdot K_u+$$
$$+p\cdot F\cdot K_p-pq(q-p-1)F_x-K\cdot p\cdot F_p+K\cdot F]\eta_p=0,$$

$$\mathcal{L}_5(\eta):=-2q(q-p-1)\eta_x+(K-(p+1)K_p-q\cdot K_p)\eta_p=0,$$

где

$$K=(3p+1)F-p(p+1)F_p-p\cdot q\cdot F_q$$

Как для случая (1.7), здесь аналогично доказывается, что операторы L_1, L_2, L_3 независимы. Для существования еще одного первого интеграла следует потребовать чтобы операторы L_4 и L_5 были линейно зависимы от операторов L_1, L_2, L_3. Согласно этому требованию можно записать

$$F_x[pq(q-1)(q-p-1)(3p+1)-pq(q-p-1)]-$$
$$-p^2q(q-p-1)(3p+1)F_y-p^2q(q-p-1)(3p+1)F_u+$$

$$+F_{px}[p^2q(q-1)(p+1)(q-p-1)]+F_{py}[p^3q(p+1)(q-p+1)]-$$
$$-F_{qx}[p^2q^2(q-1)(q-p-1)]+F_{qy}(q-p-1)p^3q^2+$$

$$+F_{pu}[p^3q(q-p-1)(p+1)]+F_{qu}[p^3q^2(q-p-1)+F_{qx}(q-p-1)p^3q^2+$$
$$+F\cdot F_p[-p(p+1)(q-p-1)-p(q-p-1)(5p+2)]+$$

$$+F\cdot F_q[-2pq(q-p-1)]+(p+1)(q-p-1)F_p^2+F_q^2(p^2q^2(q-1)+$$
$$+p^2q(q-p-1)F_p\cdot F_q-p^2(p+1)(q-p-1)F\cdot F_{pp}-p^2q(q-p-1)F\cdot F_{qp}+$$

$$+F^2[(3p+1)(q-p-1)+3p(q-p-1)]=0, \qquad (1.11)$$

$$(p+1)^2F_{pp}+2q(p+1)F_{pq}+q^2\cdot F_{qq}-4(p+1)F_p-4q\cdot F_q+6F=0. \qquad (1.12)$$

Таким образом справедлива

Теорема. Для того чтобы системы (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6) имели точно по два первых интеграла, достаточно чтобы первая часть уравнения (1.1) удовлетворяла соотношениям (1.8), (1.9), (1.11), (1.12).

§ 2. Влияние правой части на структуру общего интеграла

Как видим наши требования относительно функции F не уступают сложностью основному уравнению (1.1). Нашей целью не является интегрирование уравнений (1.8), (1.9), (1.11), (1.12). На их основе мы попытаемся подобрать такой подкласс уравнений (1.1), для которых удается построение общих интегралов в явном виде. Например когда правая часть уравнения (1.1) равна нулю. общий интеграл строится явно и имеет довольно простую структуру

$$f(u+x)+g(u-y)=x. \qquad (1.13)$$

Как выясняется интеграл (1.13) можно представить и в другом равносильном виде. В частности, если произвольные функции в интеграле (1.13) возьмем в виде

$$f(z) = \alpha z + f_1(z),$$
$$g(t) = -\alpha t + g_1(t),$$

где α некоторое произвольное число, а через f_1 и g_1 обозначены новые произвольные функции. Тогда интеграл (1.13) можно записать таким образом:

$$f_1(u+x) + g_1(u-y) = (1-\alpha)x - \alpha y. \qquad (1.14)$$

Интеграл (1.14) не следует рассматривать как обобщение представления (1.13). Таким образом, в случае нулевой правой части уравнения (1.1), его общий интеграл можно представить в явном виде разными идентичными соотношениями.

Из класса заданного уравнения (1.1) с точки зрения практических и теоретических исследований, интересными являются уравнения со специфическими правыми частями

$$L(u) = (u_x - u_y + 1)\frac{L^*(k)}{k_x - k_y}, \qquad (1.15)$$

где функция $k(x,y)$ заданная гладкая функция и соответствует воздействиям внешных сил специального вида в дифференциальных моделях физических процессов. Здесь введено обозначение

$$L^*(k) = -K_{xx}(u_y^2 - u_y)(u_x - u_y + 1) + K_{xy}(2u_x u_y - u_x + u_y - 1)(u_x - u_y + 1) -$$
$$- K_{yy}(u_x^2 + u_x)(u_x - u_y + 1).$$

Как выясняется правая часть уравнения (1.15) удовлетворяет всем условиям приведенной выше теоремы. Отсюда следует что соответствующие дифференциальные соотношения имеют точно по два первых интеграла. Следовательно, для данного уравнения возможно построение общего интеграла. Если мы будем следовать методу характеристик, непосредственными вычислениями убеждаемся, что представление общего интеграла уравнения (1.15) не только существует, но возможно её явное построение. Решение представляется, как сумма двух произвольных функции

$$f(u+x)+g(u-y)=k(x,y), \qquad (1.16)$$

где f и g произвольные дважды дифференцируемые функции. На основании представления (1.16) общего интеграла для уравнения (1.15) можно исследовать различные задачи. В том числе задачу Коши а также некоторые нелинейные варианты характеристических задач.

Для иллюстрации возьмем функцию $k(x,y)$ простейшего вида.

Теорема. Если $k(x,y)=y^2$, тогда уравнение (1.15) имеет вид

$$L(u)=-\frac{1}{y}p(p+1)(p-q+1) \qquad (1.17)$$

и его общий интеграл представляется формулой

$$f(u+x)+g(u-y)=y^2, \qquad (1.18)$$

где f,g произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, заметим, что для некоторых решений правая часть в окрестности прямой $y=0$ может оказаться неограниченной. Поэтому уравнение (1.17) можно рассматривать как один из нелинейных вариантов известных уравнений Эйлера-Дарбу [22].

Доказательство. Система соотношений

$$\begin{cases} q\,dy+(p+1)dx=0, \\ (q-1)dp+p\,dq+p(p+1)(p-q+1)dx=0, \\ du=p\,dx+q\,dy \end{cases} \qquad (1.19)$$

соответствует характеристическому корню λ_1, а другая система определённая корнем λ_2, имеет вид

$$\begin{cases} (q-1)\,dy + p\,dx = 0, \\ yq(q-1)dp - y(p+1)(q-1)\,dq + p(p+1)(p-q+1)dx = 0, \\ du = p\,dx + q\,dy. \end{cases} \tag{1.20}$$

Начнём с рассмотрения системы (1.19). Вводя обозначения $\xi(x,y,u,p,q)$ для первого интеграла системы (1.19), получаем систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(\xi) := \dfrac{q}{p+1}\xi_x + \xi_y + \dfrac{q}{p+1}\xi_u - \dfrac{p-q+1}{y}\xi_q = 0, \\ \mathcal{L}_2(\xi) := \xi_p + \dfrac{q-1}{p}\xi_q = 0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Как известно [31] процесс построения первых интегралов системы вида (1.21) сводится к интегрированию некоторой полной (в смысле Якоби) системы. Для сведения системы (1.21) к полной системе расширим её при помощи скобок Пуассона:

$$\mathcal{L}_3(\xi) = \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(\xi)) - \mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1(\xi)) = \frac{p-q+1}{p(p+1)}(\xi_x - \xi_u) = 0. \tag{1.22}$$

Как видно, уравнение (1.22) линейно независимо с уравнениями системы (1.21). Дальнейшее применение скобок Пуассона к расширенной системе (1.21), (1.22) даёт новые уравнения, которые представимы линейными комбинациями входящих в ней уравнений. Следовательно, однородная система (1.21), (1.22)

$$\mathcal{L}_k(\xi) = 0, \quad k = 1,2,3,$$

где операторы $\mathcal{L}_k$ определены формулами (1.21) и (1.22), является полной по Якоби.

Вообще говоря, интеграл системы (1.21), (1.22) может зависит от всех пяти аргументов. Мы будем следовать классическому методу исследования совместных систем уравнений в частных производных первого порядка [31], [32] вида (1.21), (1.22).

Перепишем систему (1.21), (1.22) в эквивалентном упрощённом виде:

$$\begin{cases} X_1(\xi) := \xi_k - \xi_x = 0, \\ X_2(\xi) := \xi_p + \dfrac{(q-1)y}{p(p-q+1)}\xi_y = 0, \\ X_3(\xi) := \xi_q - \dfrac{y}{p-q+1}\xi_p = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

и введём новую группу переменных $z_k,\ k=1,\dots,5$ следующим образом:

$$z_1 = x,\ \ z_2 = y,\ \ z_3 = u + x,\ \ z_4 = p,\ \ z_5 = q.$$

В терминах переменных z_k система (1.23) принимает вид

$$\begin{cases} Y_1(\xi) := \xi_{z_1} = 0, \\ Y_2(\xi) := \xi_{z_4} + \dfrac{(z_5-1)z_2}{z_4(z_4-z_5+1)}\xi_{z_2} = 0, \\ Y_3(\xi) := \xi_{z_5} - \dfrac{z_2}{z_4-z_5+1}\xi_{z_2} = 0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Как видно из первого уравнения, интеграл ξ не зависит от аргумента z_1 и остаётся четвёрка аргументов. Второе уравнение равносильно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих аргумент z_5 в качестве параметра

$$\frac{dz_4}{1} = \frac{z_4(z_4-z_5+1)}{(z_5-1)z_3} = \frac{dz_3}{0} = \frac{dz_5}{0}$$

два интеграла которой $z_3 = c$ и $z_5 = c$ усматриваются непосредственно. Третий интеграл $\dfrac{z_4\, z_2}{z_4 - z_5 + 1} = c$ можно определить из уравнения

$$\frac{dz_4}{z_4(z_4-z_5+1)} = \frac{dz_2}{z_2(z_5-1)},$$

где величина z_5 играет опять роль параметра.

Введением нового регулярного преобразования переменных $t_1 = z_1$, $t_2 = \dfrac{z_4 z_2}{z_4 - z_5 + 1}$, $t_3 = z_3$, $t_4 = z_4$, $t_5 = z_5$ уравнения $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$ принимают вид

$$R_2(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t_4} = 0,$$

$$R_3(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t_5} = 0$$

соответственно.

Таким образом, установлено, что выражение $t_2 = \dfrac{z_4 z_2}{z_4 - z_5 + 1}$ является первым интегралов рассматриваемой системы и в терминах исходных переменных его можно представить в виде

$$\xi_1 = \frac{py}{p - q + 1}.$$

Следовательно система (1.21), (1.22) имеет два и только два независимых дважды непрерывно дифференцируемых первых интеграла и они оба представлены в явном виде формулами:

$$\xi = u + x, \quad \xi_q = \frac{py}{p - q + 1}. \tag{1.25}$$

Эти первые интегралы усматривались непосредственно из системы (1.19) дифференциальных характеристических соотношении. Однако мы провели полный анализ характеристической системы, чтобы убедится что эта система не имеет других первых интегралов.

Для первого интеграла η дифференциальных характеристических соотношении (1.20) также имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(\eta) \equiv \dfrac{1-q}{p}\eta_x + \eta_y + \eta_u - \dfrac{p - q + 1}{y}\eta_q = 0, \\ \mathcal{L}_2(\eta) \equiv \eta_p + \dfrac{q}{p+1}\eta_q = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

расширяемую скобками Пуассона до полной по Якоби системы:

$$\begin{cases} X_1(\eta) := \eta_x = 0, \\ X_2(\mu) := \dfrac{qy}{(p-q+1)(p+1)}(\eta_y + \eta_u + \eta_p) = 0, \\ X_3(\eta) := \dfrac{y}{p-q+1}(\eta_y + \eta_u + \eta_q) = 0. \end{cases}$$

Эта система интегрируется аналогично предыдущей. Доказывается, что она также имеет два и только два дважды непрерывно дифференциальных первых интеграла:

$$\eta_1 = u - y, \quad \eta_2 = \frac{p+1}{p-q+1}. \tag{1.27}$$

Как известно, системе (1.19) удовлетворяет любая функция от двух переменных величин ξ, ξ_1. Аналогично, общий интеграл системы (1.20) представляется произвольной функцией аргументов η, η_1. Отсюда следует, что между характеристическими инвариантами ξ, ξ_1 и инвариантами η, η_1 попарно существуют функциональные связи:

$$\xi_1 = \frac{1}{2} f'(\xi), \quad \eta_1 = \frac{1}{2} g'(\eta), \tag{1.28}$$

где f, g произвольные функций класса $C^2(R^1)$.

Следовательно, уравнение (1.17) допускает ровно два промежуточных интеграла, представленных в терминах характеристических инвариантов в виде (1.28).

В исходных переменных эти промежуточные интегралы имеют вид:

$$y\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} f'(u+x)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 1\right), \tag{1.29}$$

$$y\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) = \frac{1}{2} g'(u-y)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + 1\right). \tag{1.30}$$

Мы будем следовать классической схеме построения общего интеграла уравнения (1.17) на оснований промежуточных интегралов [25].

Из (1.29) и (1.30) определим величины:

$$p=-\frac{f'(\xi)}{g'(\eta)+f'(\xi)},\quad q=-\frac{g'(\xi)}{g'(\eta)+f'(\xi)},$$

а затем подставим их в условие согласованности:

$$du=-\frac{f'(\xi)}{g'(\eta)+f'(\xi)}dx+\frac{g'(\eta)+2y}{g'(\eta)+f'(\xi)}dy.$$

Интегрируя полученное равенство легко приходим к соотношению

$$f(\xi)+g(\eta)=y^2, \tag{1.31}$$

которое с учётом первых соотношении из (1.25), (1.27), равносильно представлению интеграла уравнения (1.17) т.е. принимает вид (1.18):

$$f(u+x)+g(u-y)-y^2=0.$$

Лемма. Если произвольные функции $f,g\in C^2(R^1)$ то соотношение (1.18) является общим интегралом уравнения (1.17).

Действительно, из полученных дифференцированием по x,y равенства (1.18) соотношений

$$\begin{cases}(u_x+1)\,f(u+x)+g'(u-y)u_x=0,\\ u_y\;f'(u+x)+(u_y-1)\,g'(u-y)=0\end{cases} \tag{1.32}$$

определяем производные f',g' произвольных функций.

Повторное дифференцирование соотношений (1.32) приводит нас к системе трёх соотношений относительно производных f'',g''.

$$f''(u+x)(u_x+1)^2+f'(u+x)u_{xx}+g''(u-y)u_x^2+g'(u-y)u_{xx}=0,$$
$$f''(u+x)u_y^2+f'(u+x)u_{yy}+g''(u-y)(u_y-1)^2+g'(u-y)u_{yy}=0,$$
$$f''(u+x)(u_x+1)u_y+f'(u+x)u_{xy}+g''(u-y)u_x(u_y-1)+g'(u-y)u_{xy}=0,$$

где первые производные

$$f'(u+x),\quad g'(u-y)$$

уже определены из предыдущей системы. Если из произвольных двух уравнений последней системы определить вторые производные

$$f''(u+x),\quad g''(u-y)$$

и внести их в оставщейся третье уравнение, мы получим рассматриваемое уравнение (1.17), что и требовалось. Итак неше предложение полностью доказано т.е. общий интеграл уравнения (1.17) имеет вид (1.18).

Глава 2. Задача Коши

§1.Общий случай

Ниже рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.17).Применением общих интегралов задача Коши, а также другие задачи, в том числе и характеристические, были исследованы для квазилинеиных нестрого-гиперболических уравнений различных видов в работах [9],[10],[18],[26-30]. В основу исследования задачи Коши для уравнения (1.17) также будет положено представление его общего интеграла (1.18).

Рассматриваемая нами задача равносильна задаче Коши, втом смысле,что на носителе данных взамен производной по нормали, задана производная первого порядка искомого решения по любому другому некасательному направлению [12].

Пусть γ заданная разомкнутая гладкая дуга Жордановой кривой, однозначно проецируемая на координатных осях. Предположим, что она представлена параметрически строго монотонными функциями $\lambda, \mu \in C^2[0,l]$ длины дуги s, отсчитываемой от одной из её конечных точек. Пусть $\varphi \in C^2[0,l], \psi \in C^1[0,l]$ также заданные функций.

Задача заключается в следующем: вместе со своей областью определения найти регулярное решение u(x,y) уревнения (1.17) удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{\gamma} = \varphi(s) \qquad (2.1)$$

$$s \in [0,l]$$

$$u_y\big|_{\gamma} = \psi(s) \qquad (2.2)$$

Из-за нелинейности уравнения (1.17), от функции φ и ψ зависит многое, в том числе и разрешимость поставленной задачи. Поэтому, прежде чем приступать к исследованию поставленной задачи, выясним насколько согласованы начальные возмущеня φ и ψ с уравнением (1.17).

Сперва определим значения характеристических корней (1.2) уравнения (1.17) на носителе γ начальных данных (2.1),(2.2). Эти корни выражаются значениями производных первого порядка искомого решения. Производная $u_y[\lambda(s),\mu(s)]$ на носителе данных γ определена условием (2.2). Другая же производная u_x определяется дифференцированием условия (2.1) по аргументу s

$$u_x[\lambda(s),\mu(s)]\cdot\lambda'(s)+u_y[\lambda(s),\mu(s)]\cdot\mu'(s)=\varphi'(s)$$

и подстановкой производной $u_y=\psi(s)$ полученное равенство

$$u_x[\lambda(s),\mu(s)]=\frac{\varphi'-\psi\,\mu'}{\lambda'}\equiv p(s) \qquad (2.3)$$

Из наших предположении относительно дуги γ, следует ограниченность этой производной на всём носителе данных (2.1), (2.2).

Подстановкой этих значении u_x, u_y в (1.2) выражаем λ_1и λ_2 через начальных данных в виде:

$$\lambda_1=-\frac{\varphi'-\psi\,\mu'+\lambda'}{\psi\lambda'} \quad , \quad \lambda_2=\frac{\varphi'-\psi\,\mu'}{\lambda'(1-\psi)} \qquad (2.4)$$

чем мы определяем направление характеристик в каждой точке кривой γ. Безусловно, не исключено, что характеристические направления в некоторых точках могут совпадать. Это происходит когда $\lambda_1|_\gamma=\lambda_2|_\gamma$,что равносильно равенству

$$\varphi'+\lambda'-\psi(\lambda'+\mu')=0 \qquad (2.5)$$

В таком случае на носителе данных γ уравнение (1.17) параболически вырождается. Это вырождение, как мы видим,зависит не только от кривой γ, но и от значений производных $u_x=p(s)$, $u_y=\psi(s)$ на этой кривой. Это - эффект нелинейности уравнения (1.17).

Для простоты дальнейшего изложения введем обозначение

$$H(s) \equiv \frac{\psi^2 - \psi}{\lambda'} p' - \frac{p^2 + p}{\mu'} \psi'$$

где $p(s) = [\varphi'(s) - \psi(s)\mu'(s)]\lambda'(s)^{-1}$.

Теорема. Если всюду на интервале $[0,1]$ выполняется только одно из условий

$$\varphi' = -\lambda' \ , \qquad (2.6)$$

$$\varphi' = \mu' \quad , \qquad (2.7)$$

то при $H \neq \frac{F}{y}|_\gamma = -p(p+1)(p-q+1)y^{-1}|_\gamma$ задача (1.17), (2.1), (2.2) вовсе не имеет решения, а при

$$H = \frac{F}{y}|_\gamma \qquad (2.8)$$

эта задача имеет бесконечное множество решений.

Доказательство. Допустим сперва, что $\varphi' = -\lambda'$.Тогда на основании полученных значении (2.4) корней λ_1 и λ_2 на γ заключаем, что во всех точках γ характеристическое направление определённое корнем λ_1 совпадает с направлением касательной самой кривой γ

$$\lambda_1 = -\frac{\varphi' - \psi\,\mu' + \lambda'}{\psi\lambda'} = \frac{\mu'}{\lambda'}$$

Как известно, кривая касательная которой в каждой точке имеет характеристическое направление, сама является особой характеристикой [13]. Поэтому носитель данных γ окажется характеристикой уравнения (1.17) семейства соответствующего корню λ_1.

Если бы мы ограничивались аналитическими решениями u(x,y) и, следуя Коши [7], попытались бы в окрестности дуги γ представить решение уравнения (1.17) в виде ряда Теилора, следовало бы определить значения всех его производных произвольного порядка в каждой точке этой дуги. Прозводные первого порядка уже известны и они представлены формулами (2.2) и (2.3). Поэтому следует начинать с определения значений производных второго порядка. Для них формальным дифференцированием (2.2) и (2.3) получаем два соотношения

$$\lambda'(s)u_{xx}[\lambda(s),\mu(s)]+\mu'(s)u_{xy}[\lambda(s),\mu(s)]=p'(s)$$

$$\lambda'(s)u_{xy}[\lambda(s),\mu(s)]+\mu'(s)u_{yy}[\lambda(s),\mu(s)]=\psi'(s)\ .$$

Эти соотношения мы дополним взятым вдоль дуги γ уравнением (1.17):

$$A(s)u_{xx}[\lambda(s),\mu(s)]+B(s)u_{xy}[\lambda(s),\mu(s)]+C(s)u_{yy}[\lambda(s),\mu(s)]=\overline{F}$$

где введены обозначения

$$A(s)=\psi^2(s)-\psi(s),$$

$$B(s)=-2p(s)\psi(s)-\psi(s)+p(s)+1,$$

$$C(s)=p^2(s)+p(s),$$

$$\overline{F}(s)=\frac{F}{y}|_{\gamma}=-\frac{1}{\mu(s)}p(s)[p(s)+1][p(s)-\psi(s)+1].$$

Эти три соотношения рассмотрим как систему линейных алгебраических уравнений относительно производных второго порядка. Детерминант этой системы

$$\psi(\psi-1)\mu'^2+p^2(p+1)\lambda'^2+(2p\psi+\psi-p-1)\lambda'\mu'=(\varphi'+\lambda')(\varphi'-\mu')$$

согласно условию (2.6), всюду на γ обращается в нуль.Следовательно, для трёхкомпонентных векторов $\vec{m}_1=(\lambda'(s),\mu'(s),0)$, $\vec{m}_2=(0,\ \lambda'(s),\ \mu'(s))$, $\vec{m}_3=(A(s),B(s),C(s))$ существуют такие функции $\alpha(s),\ \beta(s)$, что будет иметь место раветство:

$$\alpha\vec{m}_1+\beta\overline{m}_2=\overline{m}_3$$

Отсюда определяем:

$$\alpha=\frac{A}{\lambda'},\quad \beta=-\frac{C}{\mu'}$$

Если между правыми частями систем существует зависимость

$$\alpha\, p' + \beta\psi' = \overline{F}\,,$$

или подставляя значения α и β ,

$$\frac{\psi^2 - \psi}{\lambda'}\, p' - \frac{p^2 + p}{\mu'}\psi' = \overline{F}(s)$$

то задача будет иметь бесконечно много решений. В противном случае задача неразрешима, что и требовалось доказать.

Случай $\varphi' = \mu'$ рассматривается аналогично.

Интересен случай, когда условия (2.6), (2.7) выполняются одновременно. При таком предположений $\lambda' + \mu' = 0$, откуда следует, что наклон касательной кривой γ всюду равен -1. Поэтому дуга γ является отрезком прямой $x + y = c$ с произвольным постоянным c.

С другой стороны, учитывая условия (2.6), (2.7) в (2.4), заключаем

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что в данном случае рассматриваемая дуга γ, являясь отрезком прямой $x + y = c$, принадлежит к обеим семеиствам характеристик. Другими словами, на этом отрезке уравнение (1.17) имеет характеристическое параболическое вырождение [14].

Следует отметить, что это вырождение порождается функциями φ, λ, μ, их производными и никак не зависит от значений производной $u_y = \psi$ на γ.

Что касается вопроса о существований решения при одновременном соблюдении условий (2.6), (2.7) как легко проверить,равенство (2.8) в этом случае тождественно выполняется всюду на отрезке γ и, согласно теореме, задача (1.17),(2.1), (2.2) имеет неограниченное число решений.

Рассмотрим теперь тот случай, когда ни одно из условий (2.6), (2.7) не выполняется. Тогда справедлива

Теорема.Если $\varphi' \neq -\lambda' \quad \varphi' \neq \mu'$, то задача (1.17), (2.1), (2.2) разрешима и интеграл определятся в области ограниченной кривыми

$$\mu^2(a) + \int_a^{h(\varphi(a)+\lambda(a)-(x+y))} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds = y^2 \qquad a = 0, a = l,$$

$$\mu^2(a) + \int_a^{k(\varphi(a)-\mu(a)+x+y)} \frac{2\mu(\varphi' - \mu'\psi)(\varphi' + \lambda')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds = y^2 \qquad a = 0, a = l.$$

Для доказательства этой теоремы приурочим общий интеграл (1.18) к задаче (1.17), (2.1), (2.2) и распространим метод Даламбера на наш случай [15], [16].

Подчиним общий интеграл (1.18) уравнения (1.17) начальному условию (2.1). Учитывая, что вдоль носителя данных все три величины

$$x = \lambda(s), \; y = \mu(s), u = \varphi(s) \qquad (2.9)$$

известны, для определения произвольных функции f,g получаем соотношение

$$f[\varphi(s) + \lambda(s)] + g[\varphi(s) - \mu(s)] = \mu^2(s) \qquad (2.10)$$

Затем из продифференцированного по y общего интеграла

$$f'(u + x)u_y + g'(u - y)(u_y - 1) = 2y$$

с учётом (2.1), (2.2) будем иметь:

$$f'[\varphi(s) + \lambda(s)]\psi(s) + g'[\varphi(s) - \mu(s)](\psi(s) - 1) = 2\mu(s) \qquad (2.11)$$

Таким образом, начальные условия (2.1), (2.2) совместно с общим интегралом (1.18) повлекли за собой соотношения (2.10), (2.11), из которых и следует определить точный вид произвольных функции f,g.

С этой целью продифференцируем (2.10) по s и полученный результат

$$f'[\varphi(s) + \lambda(s)](\varphi'(s) + \lambda'(s)) + g'[\varphi(s) - \mu(s)](\varphi'(s) - \mu'(s)) = 2\mu(s)\mu'(s) \qquad (2.12)$$

рассмотрим совместно с (2.11) в качестве линейной алгебраической системы относительно производных f',g'.

Пусть начальные функций и носитель данных подобраны таким образом, что вдоль носителя исключено параболическое вырождение уравнения (1.17), т.е. исходя из (2.5) детерминант системы (2.11), (2.12) отличен от нуля. В этом случае производные f' и g' от произвольных функций определяются однозначно:

$$f'(\varphi(s)+\lambda(s))=\frac{2\mu(\varphi'-\mu'\psi)}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')} \qquad (2.13)$$

$$g'((\varphi(s)-\lambda(s))=\frac{2\mu(\mu'\psi-\varphi'-\lambda')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')} \qquad (2.14)$$

Сами же произвольные функции f,g определяем интегрированием (2.13), (2.14) в пределах (s_0,s),где s_0 произвольное значение аргумента s из интервала$(0,l)$:

$$f'(\varphi(s)+\lambda(s))=\int_{s_0}^{s}\frac{2\mu(\varphi'-\mu'\psi)(\varphi'+\lambda')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}ds+f[\varphi(s_0)+\lambda(s_0)], \qquad (2.15)$$

$$g'((\varphi(s)-\lambda(s))=\int_{s_0}^{s}\frac{2\mu(\mu'\psi-\varphi'-\lambda')(\varphi'-\mu')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}ds+g[\varphi(s_0)-\mu(s_0)] \qquad (2.16)$$

Для окончательного определения функций f,g следует из функциональных равенств

$$\varphi(s)+\lambda(s)=z \qquad (2.17)$$

$$\varphi(s)-\mu(s)=\varsigma \qquad (2.18)$$

выразить величину s в виде функции аргументов z,ς соответственно. Производные комбинаций (2.17), (2.18) по s,согласно нашим предположением, отличны от нуля всюду на носителе γ . При обращении в нуль хотя бы одного из них, т.е. при выполнений (2.6) или (2.7), вопрос о разрешимости задачи уже обсуждался выше.

Будем предпологать существование однозначных решений уравнений (2.17), (2.18):

$$s=k(z),\quad z\in\left[\varphi(0)+\lambda(0),\varphi(l)+\lambda(l)\right]$$

$$s = h(\varsigma), \quad \varsigma \in \left[\varphi(0) - \mu(0), \varphi(l) - \mu(l)\right]$$

которые удовлетворяет условиям нормировки

$$k\left[\varphi(0) + \lambda(0)\right] = 0, \qquad h[\varphi(0) - \mu(0)] = 0$$

соответственно.

Предположения об однозначной разрешимости функциональных уравнений (2.17), (2.18) не противоречат условиям теоремы о неявной функций. Таким образом, имеем

$$f(z) = \int\limits_{s_0}^{k(z)} \frac{2\mu(\varphi' - \mu'\psi)(\varphi' + \lambda')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + f[\varphi(s_0) + \lambda(s_0)], \qquad (2.19)$$

$$z \in \left[\varphi(0) + \lambda(0), \varphi(l) + \lambda(l)\right]$$

$$g(\varsigma) + \int\limits_{s_0}^{h(\varsigma)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + g[\varphi(s_0) - \mu(s_0)] \qquad (2.20)$$

$$\varsigma \in \left[\varphi(0) - \mu(0), \varphi(l) - \mu(l)\right]$$

Подстановкой в общий интеграл (1.18) полученных функций f,g,выраженных формулами (2.19), (2.20), строим интеграл задачи (1.17), (2.1), (2.2):

$$\int\limits_{s_0}^{k(u+x)} \frac{2\mu(\varphi' - \mu'\psi)(\varphi' + \lambda')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + \int\limits_{s_0}^{h(u-y)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + \qquad (2.21)$$

$$g[\varphi(s_0) - \mu(s_0)] + f[\varphi(s_0) + \lambda(s_0)] = y^2$$

Но учитывая, что всюду на γ выполняется условие (2.1), имеем:

$$f[u(\lambda(s'), \mu(s')) + \lambda'(s)] + g'[u(\lambda(s'), \mu(s')) - \mu'(s)] = \mu^2(s')$$

какое бы не было значение s' из интервала $[0,l]$, в том чиле и при $s' = s_0$. Поэтому из (2.21) получаем окончательный вид интеграла рассматриваемой задачи:

$$\int\limits_{s_0}^{k(u+x)} \frac{2\mu(\varphi' - \mu'\psi)(\varphi' + \lambda')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + \int\limits_{s_0}^{h(u-y)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + + \mu^2(s_0) = y^2 \qquad (2.22)$$

Содержание произвольного параметра s_0 в интеграле (2.22) задачи (1.17), (2.1), (2.2) как-бы указывает, что этих интегралов бесконечное множество. Но такая зависимость интеграла (2.22) от постоянного параметра s_0 формальна. Действительно, если разобём один из интегральных слагаемых, скажем, второе слагаемое на два интеграла следующим образом:

$$\int\limits_{s_0}^{h(u-y)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{k(u+x)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds + \int\limits_{k(u+x)}^{h(u-y)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds$$

и объединим два интегральных члена с общими пределами $[s_0, k(u+x)]$ интегрирования будем иметь:

$$\int\limits_{k(u+x)}^{h(u-y)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds +$$

$$\int\limits_{s_0}^{k(u+x)} \left[\frac{2\mu(\varphi' - \mu'\psi)(\varphi' + \lambda')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} + \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} \right] ds$$

Простыми вычислениями получим, что второе интегральное слагаемое в последнем соотношении равен $-\mu^2(s_0) + \mu^2[k(u+x)]$. Следовательно, интеграл (2.22) окончательно можно переписать в виде:

$$\mu^2[k(u+x)] + \int\limits_{k(u+x)}^{h(u-y)} \frac{2\mu(\mu'\psi - \varphi' - \lambda')(\varphi' - \mu')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds = y^2 \qquad (2.23)$$

Тем самым доказано, что интеграл (2.22) рассматриваемой задачи равносилен интегралу (2.23) и от произвольного параметра s_0 не зависит. Следовательно, задача (1.17), (2.1), (2.2) имеет единственный интеграл и он строится в явном виде формулой (2.23).

Интеграл (2.23) можно переписать в эквивалентной форме

$$\mu^2\left[h(u-y)\right]+\int\limits_{h(u-y)}^{k(u+x)} \frac{2\mu(\varphi'-\mu'\psi)(\varphi'+\lambda')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}ds = y^2 \qquad (2.24)$$

если в (2.22) разобём не второе, а первое интегральное слагаемое.

Сложением представлений (2.23) и (2.24) можно получить интеграл рассматриваемой задачи в более симметричной форме:

$$\mu^2\left[k(u+x)\right]+\mu^2\left[h(u-y)\right]+$$
$$\int\limits_{h(u+x)}^{h(u-y)} 2\mu\,\frac{2\varphi'\mu'\psi-2\varphi'^2-2\varphi'\lambda'+\mu[\varphi'+\lambda'-\psi(\lambda'-\mu')]}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}ds = y^2 \qquad (2.25)$$

В таком представлении характеристическим инвариантом u+x,u-y уже не предаются преймущества и входят равноправно. Докажем теперь, что все эти интегралы (2.23), (2.24), (2.25) действительно согласованы с задачей Коши (1.17), (2.1),(2.2) и фигурирующая в них функция u(x,y) удовлетворяет всем её условиям. Так как все представленные выше интегралы взаимно эквивалентны, доказательство достаточно будет провести на одном из них, например для интеграла (2.23). Что это соотношение является интегралом уравнения (1.17), видно из процесса его построения и структуры.

Следует проверить действительно ли удовлетворяет входящая в (2.23) функция u(x,y) начальным условиям (2.1),(2.2). Тот факт, что она действительно принимает на

γ значения $\varphi(s)$, следует из тождества полученного из (2.23) при подстановке вместо $x,\ y,\ u(x,y)$ значения $\lambda(s),\ \mu(s), \varphi(s)$. К этому заключению приходим на том оснований, что на кривой γ пределы интеграла суть

$$h(u-y)\,|_{\gamma} = h(\varphi(s)-\mu(s)) = s\ ,$$

$$k(u+x)\,|_{\gamma} = k(\varphi(s)+\lambda(s)) = s$$

и окончательно получаем тождество:

$$y^2 = \mu^2(s)$$

Для проверки второго начального условия продифференцируем интеграл (2.23) по переменного y. Имеем

$$\begin{aligned}&2\mu(k(u+x))\mu'(k(u+x))k'(u+x)u_y + A(h(u-y))h'(u-y)(u_y-1) + \\ &\qquad + A(k(u+x))k'(u+x)u_y = 2y\end{aligned} \qquad (2.26)$$

где A(s) - подинтегральная функция в (2.23).

Рассмотрим теперь это соотношение на γ, подставляя соответствующие значения величин u,x,y. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}&2\mu(s)\mu'(s))k'(\varphi(s)+\lambda(s))u_y(\lambda(s),\mu(s)) + \\ &+ A(s)\{h'(\varphi(s)-\mu(s))(u_y(\lambda(s),\mu(s))-1) + \\ &+ k'(\varphi(s)+\lambda(s))u_y(\lambda(s),\mu(s))\} = 2\mu(s)\end{aligned}$$

С учётом соотношений

$$k'(\varphi(s)+\lambda(s)) = \frac{1}{\varphi'(s)+\lambda'(s)}$$

$$h'(\varphi(s)-\mu(s)) = \frac{1}{\varphi'(s)-\mu'(s)}$$

после простых преобразований приходим к выводу, что

$$u_y\,|_{\gamma} = \psi(s)$$

Следовательно, функция u(x,y) на γ удовлетворяет начальным условиям (2.1),(2.2).

В дальнейших изложениях воспользуемся тем представлением интеграла задачи (1.17), (2.1), (2.2), которое будет более удобным в конкретном данном случае.

Для нахождения области определения решения следует описать структуру обеих семейств характеристик. На основании интеграла (2.23) или интеграла (2.24) рассматриваемой задачи можно получить явное представление характеристик выпущенных из точек $(\lambda(s),\mu(s))$, $s\in[0,l]$ носителя начальных данных γ.

Зафиксируем некоторое значение a параметра s из интервала $[0,l]$, по которому определяется вполне конкретная точка $(\lambda(s),\mu(s))\in\gamma$.Через эту точку проходят характеристики обеих семеиств. Вдоль характеристики соответствующей корню λ_1 мы можем подсчитать значение инмарианта u+x. Это значение равно $\varphi(a)+\lambda(a)$ вдоль этой характеристики.

Более того, на этой характеристике можно определить значение другого инварианта u-y. Деиствительно

$$u(x,y)-y=u(x,y)+x-(x+y)=\varphi(a)+\lambda(a)-(x+y)$$

Учитывая значения обейх инвариантов вдоль искомой характеристики в представлении (2.23) общего интеграла, получим:

$$\mu^2(a)+\int\limits_a^{h(\varphi(a)+\lambda(a)-(x+y))}\frac{2\mu(\mu'\psi-\varphi'-\lambda')(\varphi'-\mu')}{\varphi'+\lambda'-\psi(\mu'+\lambda')}ds=y^2 \qquad (2.27)$$

Таким образом, нам удалось построить уравнение, которое описывает характеристику семейства корня λ_1, выпущенную из точки носителя γ при значении параметра a.

Значение параметра s=a было взято произвольно из интервала $[0,l]$. Если мы придадим этому параметру все значения из указанного интервала, формулой (2.27) будут определены все характеристики семейства корня λ_1. Как оказывается, это есть однопараметрическое семейство кривых.

Совершенно аналогично строится семейство характеристик, соответствующее корню λ_2:

$$\mu^2(a) + \int\limits_a^{k(\varphi(a)-\mu(a)+x+y)} \frac{2\mu(\varphi' - \mu'\psi)(\varphi' + \lambda')}{\varphi' + \lambda' - \psi(\mu' + \lambda')} ds = y^2 \qquad (2.28)$$

на оснований представления (2.24) интеграла задачи. Разница лишь в том, что вдоль этох характеристик инварианты равны:

$$u(x,y) - y = \varphi(a) - \mu(a)$$

$$u(x,y) + x = \varphi(a) - \mu(a) + x + y$$

Естественно (2.28) также является однопараметрическим семейством кривых со значениями параметра из того же интервала $[0,l]$.

Для того, чтобы в области определения решения задачи (1.17), (2.1), (2.2) не было никаких особенностей, нам придётся для обоих семейств (2.27), (2.28) выявить некоторые условия. А именно, кривые принадлежащие разным семействам, но выпущенные из общей точки при s=a, не должны больше пересекатся в какой-либо другой точке т.е. система уравнений (2.27),(2.28) должна иметь единственное решение $x = \lambda(a)$, $y = \mu(a)$.

Кроме того, кривые одного и того же семейства не должны иметь особых точек. Чтобы выразить это условие конкретной формулой, например для семейства (2.27), из выражения (2.26) и продифференцированного по x выражения(2.23)

$$\begin{gathered} 2\mu(k(u+x))\mu'(k(u+x))k'(u+x)(u_x+1) + A(h(u-y))h'(u-y)u_x - \\ - A(k(u+x))k'(u+x)(u_x+1) = 0 \end{gathered} \qquad (2.29)$$

определим первые пройзводные u_x, u_y искомого решения $u(x,y)$ и внесем их в дифференциальные соотношения характеристических направлений корней λ_1, λ_2 сответственно.Получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A[h(u-y)]h'(u-y)}{2y + 2\mu[k(u+x)]\mu'[k(u+x)]k'(u+x) + A(h(u-y))h'(u-y)} \qquad (2.30)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{A[k(u+x)]k'(u+x) - 2\mu[k(u+x)]\mu'[k(u+x)]k'(u+x)}{2y + A[k(u+x)]k'(u+x)} \qquad (2.31)$$

Как известно,семейство характеристик сответствующих корням λ_1, λ_2,не будет иметь особых точек,если в выражениях (2.30),(2.31) числитель и знаменатель одновременно не обращаются в нуль. Следовательно,чтобы исключить существование особых точек для семейств λ_1, λ_2, при любых переменных θ и σ должны выполнятся следующие условия:

$$\left[A(h(\sigma))h'(\sigma)\right]^2 + \left[2y + 2\mu(k(\theta))\mu'(k(\theta))k'(\theta) + A(h(\sigma))h'(\sigma)\right]^2 \neq 0 \qquad (2.32)$$

$$\left[A(k(\theta))k'(\theta) - 2\mu(k(\theta)\mu'(k(\theta))k'(\theta)\right]^2 + \left[2y + A(k(\theta))k'(\theta)\right]^2 \neq 0 \qquad (2.33)$$

Отметим,что если в качестве носителя начальных данных взять отрезок прямой y=0,задача может оказатся некорректным.

Действительно,в этом случае начальные условия (2.1),(2.2)образуют задачу Коши:

$$u|_{y=0} = \varphi(x)$$

$$a \le y \le b, \qquad (2.36)$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x)$$

Рассмотрим соотношения,полученные дифференцированием выражения(1.18) по переменным x и y.С учётем в них начальныч условий (2.36) будем иметь

$$f'[\varphi(x)+x](\varphi'(x)+1) + g'[\varphi(x)]\varphi'(x) = 0$$

$$f'[\varphi(x)+x]\psi(s) + g'[\varphi(x)](\psi(s)-1) = 0$$

Из этой системы заключаем, что она имеет бесконечное число решении если на носителе данных уравнение параболически вырождается т.е.выполняется условие $\varphi(x) - \psi(s) + 1$. В противном случае пройзвольные функций f и g определяются как постоянные функций.Естественно,что если носитель данных является частью прямой y=0, то задача Коши окажется некорректным,так,как на этой части носителя вырождается порядок уравнения (1.17).

Кроме этого, если носител начальных данных касается прямой y=0,характеристические кривые обоих семеиств будут иметь особенность в точке касания. Действительно,пусть s_0 значение параметра, соответствующее точке $(\lambda(s_0),\mu(s_0))$ касания с прямой $y=0$.Тогда имеем $\mu(s_0)=0$. Рассмотрим соотношения (2.30),(2.31) характеристических направлений. Учитывая равенства

$$h(\varphi(s_0)-\mu(s_0))=s_0$$

$$k(\varphi(s_0)+\lambda(s_0))=s_0$$

$$A(s_0)=0$$

выполняемые в точке $(\lambda(s_0),\mu(s_0))$ заключаем ,что в этой точке числитель и знаменатель обойх соотношений (2.30),(2.31) одновременно обращаются в нуль. Следовательно, эта точка является сингулярной для характеристических кривых обоих семеиств.

§2.Задача Коши.(Специальный случай)

Рассмотрим еще один конкретный случай носителя начальных данных. Пусть заданы начальные условия:

$$\begin{matrix} u(0,y)=\varphi(y) \\ u_x(0,y)=\psi(y) \end{matrix} \qquad a\le y\le b,\ \ a>0 \tag{2.37}$$

где $\varphi\in C^2[a,b],\psi\in C^1[a,b]$ заданные функции, подчинеенные условию

$$\varphi'(x)-\psi(x)-1=0 \tag{2.38}$$

Применяя метод Даламбера[] к рассматриваемой задаче, общий интеграл (1.18) с учетом начальных данных(2.37) дает два следующих соотношения

$$f[\varphi(y)] + g[\varphi(y) - y)] = y^2$$
$$f'[\varphi(y)](\psi(y) + 1) + g'[\varphi(y) - y]\psi(y) = 0,$$

из которых следует определить произвольные функции f и g. В первом соотношении фигурируют функции f,g, а во втором их производные первого порядка.

Дифференцированием первого из этих соотношений, получаем

$$f'[\varphi(y)](\varphi(y) + g'[\varphi(y) - y](\varphi'(y) - y) = 2y$$

Комбинируя полученное выражение со вторым соотношением, получаем линейную систему алгебраических уравнений относительно производных f',g' неизвестных функций f,g. В нашем случае эта система однозначно разрешима, так как ее детерминант согласно условию (2.38) отличен от нуля.

Таким образом, производные f',g' произвольных функции f,g вполне определяются начальными возмущениями (2.37). Интегрированием полученных соотношений определяются функции f и g с точностью до постоянного слагаемого.

$$f[\varphi(y)] = -\int_a^y \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t) - \psi(t) - 1} + f[\varphi(a)],$$

$$g[\varphi(y) - y] = \int_a^y \frac{2t(\psi(t) + 1)(\varphi'(t) - 1)dt}{\varphi'(t) - \psi(t) - 1} + g[\varphi(a) - a]$$

Для подстановки в интеграл значения этих произвольных функций требуется разрешимость функциональных уравнений

$$\varphi(y) = z$$
$$\varphi(y) - y = \xi$$

относительно переменной y.Таким образом,вопрос сводится к существованию обратных функций для $\varphi(y)$ и $\varphi(y) - y$. Если мы будем опираться только на теорему о неявной функций, тогда можно судить только о локальной обратимости. Допустим что для функции φ существует гладкая обратная функция определенная на интервале $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Обозначим её через $y=h(z)$, где $z\in[\varphi(a),\varphi(b)]$, $h(\varphi(a))=a$, $h(\varphi(b))=b$. Аналогично допустим, что функция $\varphi(y)-y$ однозначно обратима и её обратная также гладкая функция $y=k(\xi)$, где $\xi\in[\varphi(a)-a,\varphi(b)-b]$, $k[\varphi(a)-a]=a,\quad k[\varphi(b)-b]=b$. Тогда для функции f и g будем иметь

$$f(z)=-\int\limits_a^{h(z)}\frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+f[\varphi(a)]\qquad z\in[\varphi(a),\varphi(b)],$$

$$g(\xi)=-\int\limits_a^{k(\xi)}\frac{2t(\psi(t)+1)(\varphi'(t)-1)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+g[\varphi(a)-a],\ \xi\in[\varphi(a)-a,\varphi(b)-b]$$

С Учётом этих выражений общего интеграла (1.18) после элементарных преобразовании окончательно получим

$$\int\limits_{h(u+x)}^{k(u-y)}\frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+[k(u-y)]^2=y^2 \qquad (2.39)$$

Теорема. Если $\varphi(y)$ и $\varphi(y)-y$ однозначно обратимы на всем непреривные производные первого порядка, тогда существует единственный интеграл задачи (1.17),(2.37) выражающийся формулой (2.39).

Для установления структуры области определения интеграла (2.39) требуется описание семейства характеристик,выпущенних из произвольной точки носителя. Возмем на носителе начальных данных произвольную точку 0,c). Вдоль характеристики семейства корня λ_1, выпущенной из этой точки должны быть

$$u(x,y)+x=\varphi(c)$$

$$u(x,y)-y=\varphi(c)-x-y$$

С учётом которых из (2.39) следует связь между переменными x и y

$$\int\limits_c^{k(\varphi(c)-x-y)}\frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+[k(\varphi(c)-x-y)]^2=y^2 \qquad (2.40)$$

Тем самым формулой (2.40) получим уравнение характеристической линии семейства λ_1 в неявном виде.

Аналогичными рассуждениями строится уравнение характеристик корня λ_2

$$\int\limits_{h(\varphi(c)-c+x+y}^{c} \frac{2t\psi(t)\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)-\psi(t)-1}+c^2 = y^2 \qquad (2.41)$$

Как известно, область определения решения задачи ограничивается характеристическими линиями выпущенными из конечных точек носителя. Исходя из этого, если в формулах (2.40) и (2.41) подставим значения параметра c=a и c=b, получим уравнения четырех линии, которые образуют границу области D определения решения рассматриваемой задачи. Справедлива

Теорема. Если выполняется условие

$$[A(k(u-y)k'(u-y)+2k(u-y)k'(u-y)]^2 +$$
$$[2y+A(k(u-y)k'(u-y)+2k(u-y)k'(u-y)]^2 \neq 0,$$

где A-подынтегральная функция из (2.39), тогда семейство характеристических линии, корня λ_1, в области D не имеет дискриминантных точек.

Из этой теоремы следует, что характеристические линии семейства λ_1 взаимно не пересекаются в области D определения интеграла (2.39).

Аналогичное утверждение справедливо и для характеристических линии, соответствуюшей корню λ_2, если выполнено условие:

$$[A(h(u+x)h'(u+x)]^2 + [2y+A(h(u+x)h'(u+x)]^2 \neq 0,$$

Пример. В качестве примера для наглядности рассмотрим случай,когда $\varphi(y)=-y$, $\psi(y)=1$ характеристики корня λ_1

исходящие из точек $(0,\beta)$ носителя начальных данных,образуют однопараметрическое семейство гипербол

$$x^2+2xy-2y^2+2\beta(x+y)=0 \qquad (2.42)$$

с параметром β [рис.1].

Характеристики корня λ_2 образуют семейство эллипсов

$$x^2+2xy+4y^2-4\beta(x+y)=0 \qquad (2.43)$$

с тем же параметром β [рис.2]. Заметить, что все характеристики (2.42) с носителем данных пересекаются под одним и тем же углом $arctg2$,семейство эллипсов (2.43)под углом $\delta = arctg\left(-\frac{1}{6}\right)$.Все эллипсы и гиперболы в начале координат касаются прямой x+y=0. Оба семейства этих характеристик имеют узел в начале координат. Угол θ между эллипсом и гиперболой, выпущенными из общей точки $(0,\beta)$,равен $arctg\left(-\frac{13}{4}\right)$ при любом $\beta\in[a,b]$.

Если рассмотрим гиперболу исходящую из точки $(0,\beta_1)$ и эллипс исходящей из точки $(0,\beta_2)$ где $\beta_1>\beta_2$,возможно, что они пересекутся. Это произоидет в случае, когда $\beta_1\le 2\beta_2$. Точки пересечения суть

$$\left(2\beta_2-\beta_1\mp\sqrt{\frac{(2\beta_2+\beta_1)(2\beta_2-\beta_1)}{3}};\pm\sqrt{\frac{(2\beta_2+\beta_1)(2\beta_2-\beta_1)}{3}}\right)$$

Первая из них находится в верхней полуплоскости y>0, а вторая в нижней полуплоскости. Кроме этого как было отмечено эти линии соприкасаются в начале координат.

Когда $\beta_1>2\beta_2$, эти линии не пересекаются и имеют точку касания в начале координат.

Все эти факты учтены как в решении задачи так и в описании структуры области определения.

Интеграл (2.39) задачи в конкретном случае является простым и возможно представление в явном виде

$$u(x,y) = -\frac{2y^2 + x^2}{2(x+y)}$$

Когда b<2a, область определения решения не распространяется до оси абсцисс [рис.3]. В этом случае граница состоит из эллипсов и гипербол выходящих из точек (0,a), (0,b) и представляет характеристический криволинейный четырехугольник. Более интересным является второй случай когда b>2a. Как уже было отмечено все эллипсы выходящие из точки $(0,\beta)$ сходятся в начале координат и находятся между гиперболой, исходящей из точки (0,b) (где a<b<2a) и осью ординат.

Отсюда получается, что граница области определения доходит до начала координат, а само начало является точкой возта. Областью определения опять является характеристический четырехугольник и начало является особой точкой[рис.4]. Для исследования поведения решения в этой точке нецелесообразно вводить полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, так как это приводит к неверному заключению. Получается, что предельное значение решения в этой точке нулевое при стремлении к началу под любым углом. Внутри области к началу мы можем стремиться только по направлению которая составляет с положительным направлением оси абсцис угол равный $\frac{3\pi}{4}$. Получается, что при переходе к полярным координатам мы переходим к границе проходя через точки лежащие вне области. В действительности мы имеем право переходить к пределу только вдоль линий, которые находятся между гиперболой, выходящей из точки (0,b) и эллипса, выходящей из точки (0,a).Так как известно решение в явном виде, воспользуемся тем фактом, что на характеристиках комбинации u+x и u-y сохраняют разные постоянные значения. В частности комбинация

$$u + x = \frac{x^2 + 2xy - 2y^2}{2(x + y)}$$

на гиперболе $x^2 + 2xy - 2y^2 + 2\beta(x + y) = 0$ всегда равна β, также и в том случае когда $x \to 0$. Отсюда видно, что значение решения в начале координат зависит от пути по которой стремится точка к точке (0,0). Это показывает, что начало особая точка. Причиной, вызывающей этот факт является одномерное вырождение порядка и типа уравнения.

В качестве примера ещё исследован случай начальных условии $\varphi(y) = 2y$, $\psi(y) = \frac{5}{7}$ и эти условия тоже заданны на отрезке[a,b] прямой $x = 0$,где a=1,b=2. В этом случае решение имеет вид

$$u = \frac{1}{19}(24y + 5x + \sqrt{196y^2 + 240xy + 120x^2})$$

структура характеристик в этом случае показан на рис 5.

Глава 3.
Характеристическая Задача Гурса

§1.Задача с извеестными характеристиками

Наряду с задачей Коши для уравнения (1.17) рассматриваются и некоторые нелинейные варианты характеристических задач. Следует отметить, что в отличие от начальной задачи, линейные постановки характеристических задач не расспространяются на случай нелинейных уравнений.Основной причиной этого является зависимость характеристических семейств от неизвестного решения.В этом случае следует установить какими должны быть носители данных.Существуют разные варианты такого подбора. Например, можно задавать некоторые комбинаций решения или его пройзводных на нейзвестных характеристиках,определение которых требуется одновременно с решением.Мы рассмотрим вариант нелинеиной задачи Гурса,когда заданны характеристики выходящие из общей точки.Они строго монотонные,гладкие,разомкнутые Жордановы дуги γ и δ представленные в явном виде $y=\varphi(x),\ \varphi\in C^2[x_0,x_1]$ и $y=\psi(x),\ \psi\in C^2[x_0,x_2]$ соответственно, где $\varphi'(x)\neq 0, \psi'(x)\neq 0$.Естественно должно быть $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$.

Характеристическая задача:вместе со своей областью определения найти решение u(x,y)уравнения (1.17) при его известном значении u_0 в точке (x_0,y_0)если вдоль него дуга γ является хфрфктеристикой семейства корня λ_1 а дуга δ - семейства корня λ_2 .

Теорема. Если функциональные уравнения $\varphi(x)-x+u_0+x_0=z$, $\psi(x)+x+u_0-\psi(x_0)=\varsigma$ однозначно разрешимы на сегментах $[x_0,x_1]$ и $[x_0,x_2]$ соответственно,их решения

$$x=\tau(z),\quad z\in[u_0-\varphi(x_0),u_0+x_0-x_1-\varphi(x_1)]$$

$$x=\nu(\varsigma),\quad \varsigma\in[u_0-\psi(x_0),u_0-\psi(x_0)+x_1+\psi(x_1)]$$

дважды непрерывно дифференцируемы и

$$\tau(u_0-\varphi(x_0))=x_0 \ , \nu(u_0+x_0)=x_0 \ ,$$

и если выполняются условия

$$(\varphi\cdot\tau'\cdot\psi\cdot\nu'+\varphi^2\tau'^2)^2+(\psi\cdot\nu'\cdot y+\psi\cdot\nu'\cdot\varphi\cdot\tau')^2\neq 0$$

$$(\varphi\cdot\tau'+\psi\cdot\nu')^2+(\psi\cdot\nu'\cdot y-\psi^2\cdot\nu'^2)^2\neq 0\,,$$

тогда существует интеграл характеристической задачи для уравнения (1.17), регулярный в области ограниченной характеристиками γ , δ и

$$\psi^2(\nu(u_0+x_0-x_1-\varphi(x_1)+x+y))+\varphi^2(\tau(u_0+x_0-x_1-\varphi(x_1))=y^2+y_0^2 \quad (3.1)$$

$$\psi^2(\nu(u_0-y_0+x_2+\psi(x_2))+\varphi^2(\tau(u_0-y_0+x_2+\psi(x_2)-x-y)=y^2+y_0^2\,. \quad (3.2)$$

Согласно условию задачи,дуга γ принадлежит семейству характеристик корня λ_1.Поэтому на этой дуге всюду значение инварианта u+x постоянна.Значение этой комбинации то же что и в точке (x_0,y_0).Следовательно

$$(u(x,\varphi(x)+x)|_\gamma=u_0+x_0\,.$$

Несложно определть значения характеристического инварианта $u-y$ другого семейства на этой-же дуге

$$(u(x,\varphi(x)+y)|_\gamma=-x-\varphi(x)+u_0+x_0\,.$$

С учётом значений этих инвариантов иэ общего интеграла (1.18)получаем

$$g[-\varphi(x)-x+u_0+x_0]=\varphi^2(x)-f(u_0+x_0)$$

С целью окончательного определения пройзвольной функции g рассмотрим её аргумент

$$-\varphi(x)-x+u_0+x_0=z$$

и попытаемся определить величину x в виде функции аргумента z из этого функционального уравнения.Согласно условиям теоремы это уравнение имеет обратную

$$x=\tau(z)\,,$$

тогда имеем

$$g(z) = \varphi^2[\tau(z)] - f(u_0 + x_0) \qquad (3.3)$$

дважды непрерывно дифференцируемую в интервале

$$z \in [u_0 - \varphi(x_0), u_0 + x_0 - x_1 - \varphi(x_1)]$$

С учётом свойств характеристических инвариантов семейства корня λ_2 и повторением аналогичных рассуждении вдоль дуги δ, получаем выражение произвольной функции f общего интеграла (1.18)

$$f(\varsigma) = \psi^2[\nu(\varsigma)] - g(u_0 - \psi(x_0)), \qquad (3.4)$$

которая также дважды непрерывно дифференцируемая в интервале

$$\varsigma \in [u_0 - \psi(x_0), u_0 - \psi(x_0) + x_1 + \psi(x_1)] .$$

Подстановкой полученных для f и g выражении(3.3), (3.4) в общии интеграл (1.18), имеем

$$\psi^2[\nu(u + x)] + \varphi^2[\tau(u - y)] - f(u_0 + x_0) - g(u_0 - y_0) = y^2$$

С учётом соотношения

$$f(u_0 + x_0) + g(u_0 - y_0) = y_0^2 ,$$

которое следует из представления общего интеграла, взятого в точке (x_0, y_0), приходим к окончательному результату:

$$\psi^2[\nu(u + x)] + \varphi^2[\tau(u - y)] = y^2 + y_0^2 . \qquad (3.5)$$

Полученный интеграл (3.5) характеристической задачи даёт возможность определения всех характеристик, выпущенных из точек носителя данных.

Сперва рассмотрим характеристики семейства корня λ_2, которые выпущенны из точек дуги γ.

Возмём точку $(\alpha, \varphi(\alpha))$ на дуге γ произвольно. В этой точке известны значения решения u

$$u(\alpha, \varphi(\alpha)) = u_0 + x_0 - \alpha$$

Следовательно известно и значение инварианта $u - y$ семейства характеристик корня λ_2. Значения

$$u_0 + x_0 - \varphi(\alpha) - \alpha \equiv \varepsilon$$

этого инварианта должна быть постоянной вдоль характеристики семейства λ_2 выпущенной из точки $(\alpha,\varphi(\alpha))$. Обозначим эту характеристику через $\delta(\alpha)$. Тогда

$$(u+x)|_{\delta(\alpha)}=u-y+y+x=u_0+x_0-\alpha-\varphi(\alpha)+x+y \;.$$

Подставляя полученные значения значения комбинации $u+x$ и $u-y$ в интеграл (3.5) задачи, получим уравнение характеристической кривой $\delta(\alpha)$ в неявном виде

$$\psi^2[\nu(u_0+x_0-\alpha-\varphi(\alpha)+x+y)]+\varphi^2[\tau(u_0+x_0-\alpha-\varphi(\alpha)]=y^2+y_0^2 \;.$$

Аналогичными рассуждениями получаем уравнение характеристической кривой $\gamma(\beta)$ семейства λ_1, выпущенного из точки $(\beta,\psi(\beta))$:

$$\psi^2[\nu(u_0-y_0+\beta+\psi(\beta)]+\varphi^2[\tau(u_0-y_0+\beta+\psi(\beta)-x-y]=y^2+y_0^2 \;.$$

Если продифференцируем соотншшение (3.5) по x и y, из полученных соотношеении определим пройзводные u_x и u_y, а затем внесём их в выражения характеристических направлении (0.4), получим, что если выполняются условия

$$(\varphi\cdot\tau'\cdot\psi\cdot\nu'+\varphi^2\tau'^2)^2+(\psi\cdot\nu'\cdot y+\psi\cdot\nu'\cdot\varphi\cdot\tau')^2\neq 0$$

$$(\varphi\cdot\tau'+\psi\cdot\nu')^2+(\psi\cdot\nu'\cdot y-\psi^2\cdot\nu'^2)^2\neq 0 \,,$$

тогда ни одно из характеристических семейств не имеет дискриминантных точек в области определения решения. Следовательно граница области определения решения будет состоять из кривых γ , δ и (3.1), (3.2). Теорема доказана.

В качестве примера исследована задача когда характеристические условия заданы на прямых $y=x+1$ и $y=2x+1$. В общей точке (0.1) значение нейзвестного решения равно 0. В этом случае решение задачи гурса имеет вид

$$u=-\frac{16}{25}x-\frac{3}{5}+\frac{9}{25}y+\frac{6}{25}\sqrt{-4x^2-20x-8xy-20y+21y^2}$$

Расположение характеристик показано на рис.6. На этом рисунке показана ветв гиперболы

$$-4x^2-20x-8xy-20y+21y^2=0 \,,$$

которая касается прямой $y = x + 1$ и одновременно является дискриминантной кривой для обейх семейств характеристик.

§2.Задача Гурса со свободной характеристикой

На оснований рассмотренной выше характеристической задачи можно исследовать задачу со свободным ностелем данных. Задача заключается в следующем:Найти решение уравнения (1.17)принимающую значение u_0в точке $(x_0, \varphi(x_0))$ и область его определения, если кривая γ является соответствующей этому решению характеристикой семейства корня λ_1 а вдоль другой, неизвестной кривой δ, характеристики семейства λ_2, выпущенной из точки $(x_0, \varphi(x_0))$ оно удовлетворяет условию

$$\alpha(x)u_x + \beta(x)u_y = \theta(x), \qquad x \in [x_0, x_2] \tag{3.6}$$

$$\alpha,\ \beta,\ \theta \in C^1[x_0, x_2]$$

В первую очередь выясним, достаточны ли условия задачи для определения свободной характеристики δ. Обозначим через ψ неизвестную функцию, представляющую дугу δ уравнением

$$y = \psi(x), \quad \psi(x_0) = y_0, \quad \psi \in C^2[x_0, x_2]$$

Лемма. Если выполнены условия

$$\beta(x_0) \neq \alpha(x_0)\varphi'(x_0), \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{\beta y}{\alpha + \beta}\right)' \neq 0, \tag{3.8}$$

$$\Lambda(\beta - \theta)(\theta + \alpha) < 0, \tag{3.9}$$

$$\Lambda[\alpha'(\beta - \theta) - \alpha(\beta' - \theta')] + \beta(\beta - \theta - \alpha) = 0, \tag{3.10}$$

где постоянная $\Lambda \equiv \dfrac{\varphi'(x_0)\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0) + 1}$, то функция $y = \psi(x)$, и тем самым характеристика δ, определяются однозначно.

Доказательство. Как уже было сказано, выражение u+x являясь характкристичеким инвариантом семейства корня λ_1, постояно вдоль γ. Постоянное значение этого инварианта на γ определяется непосредственно

$$u(x,\varphi(x)) + x = u_0 + x_0 \qquad (3.11)$$

Более того, условиями (3.6),(3.11) определяются значения производных первого порядка u_x, u_y в точке $(x_0,\varphi(x_0))$. Для этого продифференцированное соотоношение (3.11) рассмотрим вместе с условием (3.6) в точке $(x_0,\varphi(x_0))$, где они оба должны выполнятся одновременно. Полученная линеинная алгебраическая система относительно значений производных u_x, u_y при условии (3.7) разрешима

$$u_x((x_0,\varphi(x_0)) = -\frac{\beta(x_0)+\varphi'(x_0)\theta(x_0)}{\beta(x_0)-\alpha(x_0)\varphi'(x_0)} \equiv p_0$$

$$u_y((x_0,\varphi(x_0)) = \frac{\theta(x_0)+\alpha(x_0)}{\beta(x_0)-\alpha(x_0)\varphi'(x_0)} \equiv q_0$$

Значениями p_0, q_0 можно определить постоянную, которой равен инвариант $\xi = y(u_x+1)(u_x-u_y+1)^{-1}$ на неизвестной характеристике δ:

$$\left.\frac{(u_x+1)y}{(u_x-u_y+1)}\right|_{\delta} = \frac{\varphi'(x_0)\,\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)+1} \equiv \Lambda,$$

или что то же самое,

$$[\psi(x)-\Lambda]u_x(x,\psi(x)) + \Lambda u_y(x\psi(x)) = \Lambda - \psi(x) \qquad (3.12)$$

Согласно условию (3.8) система (3.6),(3.12) обеспечивает зависимость производных u_x и u_y от функций $\psi(x)$ на δ:

$$u_x((x,\psi(x)) = \frac{\beta(x)(\Lambda-\psi(x))-\theta(x)\cdot\Lambda}{\beta(x)(\psi(x)-\Lambda)-\alpha(x)\cdot\Lambda},$$

$$u_y((x,\psi(x)) = \frac{(\psi(x)-\Lambda)(\theta(x)-\alpha(x))}{\beta(x)(\psi(x)-\Lambda)-\alpha(x)\cdot\Lambda}\ .$$

Действительно, из условия (3.8) следует, что выражение $\frac{\beta y}{\alpha+\beta}$ не принимает постоянного значения на δ,чем и исключается возможность того,что уравнения (3.6) и (3.12) были равносильны. Иными словами, коэфициенты на неизвестной характеристике δ должны было подобраны таким образом, чтобы оно не было равносильно характеристическому инварианту на той же дуге δ.

Подстановкой выражений (3.13),(3.14) в соответствующее соотношение характеристического направления

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{1-q}$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $y=\psi(x)$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\beta(x)y-(\beta(x)-\theta(x))\cdot\Lambda}{(\beta(x)-\theta(x)-\alpha(x))\cdot y-(\beta(x)-\theta(x))\cdot\Lambda}\,. \qquad (3.16)$$

Нужно заметить ,что так как $\frac{\varphi'(x_0)\,\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)+1}\equiv\Lambda$, из соотношения (3.16)вытекает,что если в качестве известной характеристики взять кривую $\varphi(x)$ для которой $\varphi'(x)=0$,тогда функция $y=\psi(x)$ определяется однозначно

$$y=-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\beta}{\beta-\theta-\alpha}dx+y_0$$

Уравнению Абеля второго рода (3.16) придадим более удобный вид

$$y'\left[y-\frac{\beta-\theta}{\beta-\theta-\alpha)}\Lambda\right]=-\frac{\beta\cdot y}{\beta-\theta-\alpha}+\frac{\beta-\theta}{\beta-\theta-\alpha}\Lambda \qquad (3.17)$$

Подстановкой

$$y-\frac{\beta-\theta}{\beta-\theta-\alpha)}\Lambda\equiv v(x)$$

после простых преобразований уравнение (3.16) можно переписать в виде

$$vv' + \frac{v}{(\beta-\theta-\alpha)^2}\Lambda[\alpha'(\beta-\theta)-\alpha(\beta'-\theta')]+\beta(\beta-\theta-\alpha)+$$
$$+\Lambda\frac{(\beta-\theta)(\theta+\alpha)}{(\beta-\theta-\alpha)^2}=0,$$

При выполнений (3.10) получаем, что

$$(v^2)' = -2\Lambda\frac{(\beta-\theta)(\theta+\alpha)}{(\beta-\theta-\alpha)^2}$$

откуда и следует

$$v(x)=\pm\left[\int_{x_0}^{x} -2\Lambda\frac{(\beta-\theta)(\theta+\alpha)}{(\beta-\theta-\alpha)^2}dx+v^2(x_0)\right]^{\frac{1}{2}}$$

что является действительной функцией согласно условию теоремы (3.9). Знак перед корнем подбирается условием нормировки

$$v(x_0)=y_0-\frac{\beta(x_0)-\theta(x_0)}{\beta(x_0)-\theta(x_0)-\alpha(x_0)}\Lambda$$

Для функций y(x) с учётом (3.17) окончательно получаем:

$$y(x)=\left[\int_{x_0}^{x} -2\Lambda\frac{(\beta-\theta)(\theta+\alpha)}{(\beta-\theta-\alpha)^2}dx+\left(\varphi(x_0)-\frac{\beta(x_0)-\theta(x_0)}{\beta(x_0)-\theta(x_0)-\alpha(x_0)}\Lambda\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+ \qquad (3.18)$$
$$+\frac{\beta(x)-\theta(x)}{\beta(x)-\theta(x)-\alpha(x)}\Lambda$$

чем доказательство леммы завершается.

Нужно отметить,что нейзвестную характеристику в явном виде можно определить и в других конкретных случаях.Например, если уравнение имеет вид (3.17) и выполняется равенство

$$\beta(\beta-\theta-\alpha)=-\Lambda\left(\frac{\theta-\beta}{\alpha}\right)' \quad , \qquad (3.19)$$

тогда нейзвестная функция $y(x)$ определяется следующим образом

$$y(x)=\frac{(\beta-\theta)\Lambda}{(\beta-\theta-\alpha)}+\left[2\Lambda\int_{x_0}^{x}\int\frac{\beta-\theta}{\beta-\theta-\alpha}\left(1+\frac{\Lambda}{(\beta-\theta-\alpha)^2}\right)\left(\frac{\theta-\beta}{\alpha}\right)'dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Интересен случай,когда вяполняется равенство

$$\alpha+\theta=0,$$

тогда уравнение (3.16),в случае если $y\neq\frac{(\beta(x)-\theta(x))\cdot\Lambda}{\beta(x)}$ принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=-1$$

и нейзвестная функция $y(x)$ определяется следующим образом

$$y=-x+1,$$

т.е. в роле нейзвестной характеристики оказалось прамая линия ,которая принадлежит семейству особых линии уравнения (1.17).

Таким образом, установлены некоторые достаточные условия существования функций $\psi(x)$, которая явно определяет дугу δ в классе кривых, однозначно проэцируемых на ось абсцисс. От этих ограничений можно освободится, если дугу δ будем искать в классе кривых, однозначно проэцируемых на ось ординат. В таком случае, в условиях (3.6) задачи параметры $\alpha,\ \beta,\ \theta$ будем считать функциями аргумента $y\in[y_0,y_1]$, где y_1 - некоторое число $y_1\neq y_0$, а кривую γ предположим представленной соотношением $x=\varphi(y),\ x_0=\varphi(y_0)$,

$$\alpha(y)u_x+\beta(y)u_y=\theta(y),\qquad y\in[y_0,y_1], \tag{3.19}$$

$$\alpha,\ \beta,\ \theta\in C_1[y_0,y_1].$$

В этом случае для определения функций ψ рассуждения аналогичные. А именно, на γ по прежнему имеем:

$$u(\varphi(y),y)+\varphi(y)=u_0+x_0$$

Продифференцируем это равенство и рассмотрим полученное равенство в качестве алгебраической системы вместе с условием (3.6) в точке $(\varphi(y_0), y_0)$, или что тоже самое, в точке $(\psi(y_0), y_0)$. Будем иметь:

$$u_x(\varphi(y_0), y_0)\varphi'(y_0) + u_y = -\varphi'(y_0)$$

$$\alpha(y_0)u_x(\varphi(y_0), y_0) + \beta(y_0)u_y(\varphi(y_0), y_0) = \theta(y_0),$$

Отсюда определяем производные u_x, u_y в данной точке, если $\varphi'(y_0)\beta(y_0) - \alpha(y_0) \neq 0$,

$$u_x(\varphi(y_0), y_0) = \frac{-\varphi'(y_0)\beta(y_0) - \theta(y_0)}{\varphi'(y_0)\beta(y_0) - \alpha(y_0)}$$

$$u_x(\varphi(y_0), y_0) = \frac{\varphi'(y_0)(\theta(y_0) + \alpha(y_0))}{\varphi'(y_0)\beta(y_0) - \alpha(y_0)}.$$

Аналогично предыдущему случаю, с помощью этих варажении мы можем определить постоянную, которой равен инвариант $\xi = y(u_x + 1)(u_x - u_y + 1)^{-1}$ на нейзвестной характеристике δ:

$$\left.\frac{(u_x + 1)y}{(u_x - u_y + 1)}\right|_{\delta} = \frac{y_0}{\varphi'(y_0) + 1} \equiv \Lambda,$$

Или, что то же самое,

$$[y - \Lambda]u_x(\psi(y), y) + \Lambda u_y(\psi(y), y) = \Lambda - y \qquad (3.20)$$

Рассмотривая уравнение (3.20) вместе с условием (3.19) в качестве линейной алгебраической системы, мы можем определить производные u_x, u_y на неизвестной дуге δ

$$u_x(\psi(y), y) = \frac{\beta(y)(\Lambda - y) - \theta(y)\cdot\Lambda}{\beta(x)(y - \Lambda) - \alpha(x)\cdot\Lambda}, \qquad (3.21)$$

$$u_y(\psi(y), y) = \frac{(y - \Lambda)(\theta(x) + \alpha(x))}{\beta(x)(y - \Lambda) - \alpha(x)\cdot\Lambda} \qquad (3.22)$$

только с условием что $\beta(x)(y - \Lambda) - \alpha(x)\cdot\Lambda \neq 0$.

Подстановкой выражений (3.21),(3.22) в соответствующее соотношения характеристического направления

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - q}{p}$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(y-\Lambda)(\beta(y)-\theta(y))-\alpha(y)\cdot y}{\beta(y)(\Lambda-y)-\Lambda\cdot\theta(y)}.$$

Кривая δ будет представлена решением

$$\psi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(t-\Lambda)(\beta(t)-\theta(t))-\alpha(t)\cdot t}{\beta(t)(\Lambda-t)-\Lambda\cdot\theta(t)}\,dt+x_0 \qquad (3.23)$$

Итак, функция $\psi(y)$ определена в интервале $[y_0, y_1]$ и наша задача редуцирована к нелинейной задаче Гурса (б), когда известные две характеристические кривые γ и δ выходящие из общей точки $(\varphi(y_0), y_0)$, представлены из класса кривых однозначно проэцируемых на оси ординат, т.е. определяются функциями аргумента y следующим образом $x=\varphi(y),\ x=\psi(y),\quad x_0=\varphi(y_0)=\psi(y_0)$. В самой точке значение u_0 искомого решения $u(x,y)$ задано. Требуется найти решение уравнения (1) одновременно со своей областью определения при условий, что кривая γ является характеристикой семейства корня λ_1, а кривая δ принадлежит другому семейству характеристик. Заимёмся рассмотрением этой задачи.

В этом случае на характеристике $x=\varphi(y)$ имеем:

$$u+x=u_0+\varphi(y_0),$$

$$u-y=u_0+\varphi(y_0)-\varphi(y)-y, \qquad y\in[y_0,y_1]$$

$$f(u_0+\varphi(y_0))+g(u_0+\varphi(y_0)-\varphi(y)-y)=y^2 \qquad (3.23)$$

На характеристике $x=\psi(y)$ будем иметь соответственно:

$$u-y=u_0-y_0$$

$$u+x=u_0-y_0+y+\psi(y), \qquad y\in[y_0,y_2]$$

$$f(u_0-y_0+y+\psi(y))+g(u_0-y_0)=y^2. \qquad (3.24)$$

Для обратных функций выражений

$$u_0+\varphi(y_0)-\varphi(y)-y\equiv z$$

$$u_0 - y_0 + y + \psi(y) \equiv \varsigma$$

введём соответственно следующие обозначения

$$y = \tau(z)$$

$$y = \mu(\varsigma)$$

Тогда равенства (3.23),(3.24) примут вид:

$$g(z) = \tau^2(z) - f(u_0 + \varphi(y_0))$$

$$f(\varsigma) = \mu^2(\varsigma) - g(u_0 - y_0)$$

Подставим эти выражения для f и g в общий интеграл (1.18),получим интеграл нашей задачи

$$\mu^2(u+x) + \tau^2(u-y) = y^2 + y_0^2 \qquad (3.25)$$

который опять определяется с точностью до постоянной y_0^2, т.е. квадрата ординаты точки из которой выпущены обе характеристики $x = \varphi(y)$ и $x = \psi(y)$.

Теперь переидём на изучение свойств характеристических кривых и структуры области определения решения задачи Гурса (б).

Сперва займёмся построением характеристического семейства корня λ_2, выпущенного из некоторой точки $(\varphi(b), b)$ кривой γ.

На характеристике γ значение инварианта u+x равно числу $u_0 + \varphi(y_0)$, следовательно значение самого решения будет

$$u|_\gamma = u_0 + \varphi(y_0) - x$$

Таким образом в точке $(\varphi(b), b)$ определяется значение другого инварианта u-y следующим образом

$$u - y|_{(\varphi(b),b)} = u_0 + \varphi(y_0) - \varphi(b) - b$$

Это значение инварианта u-y должно быть сохранено вдоль характеристики семейства λ_2, выпущенной из точки $(\varphi(b), b)$. Обозначим эту характеристику через $\delta(b)$. Тогда

$$u + x|_{\delta(b)} = u - y + y + x = u_0 + \varphi(y_0) - \varphi(b) - b + x + y$$

Подставляя полученные значения комбинации $u+x$ и $u-y$ в интеграл (3.25) задачи Гурса (б), получим уравнение характеристической кривой $\delta(b)$ в неявном виде

$$\mu^2(u_0+\varphi(y_0)-\varphi(b)-b+x+y)+\tau^2(u_0+\varphi(y_0)-\varphi(b)-b)=y^2+y_0^2 \qquad (3.26)$$

Так как точка $(\varphi(b),b)$ на γ была выбрана произвольно, то величину b мы можем принять за параметр. Тогда уравнение (3.26) будем представлять однопараметрическое семейство характеристик семейства λ_2 выпущенных из любой точки характеристики γ.

Аналогично строится однопараметрическое семейство кривых семейства λ_1 выпущенных из точек $(\psi(d),d)$ характеристики δ:

$$\mu^2(\psi(d)-d+\varphi(y_0)+y)+\tau^2(\varphi(y_0)+y_0+\psi(d)-d+x+y)=y^2+y_0^2,$$

где величина d также играет роль параметра.

Заключение

Комбинирование метода характеристик с современными методами нелинейного анализа при исследовании начальных и характеристических задач для уравнения с нелинейной главной частью может оказатся вполне эффектным. Слиянием этих методов для определённых классов уравнений становится возможным полное описание структур областей определения решений начальной задачиб выявление особенностей решений.Имеются в виду существование особенности ограниченных решений,выявление которых методом априорных оценок не удаётся.Учитывая структуры семейств характеристических многообразии в работе представлены естественные постановки нелинейных характеристических задач как с заданными так и со свободными носителями данных и эти постановки укладываются в рамки общей теорий линейных гиперболических уравнений.

Как видно из результатов данной работы, предложенные методы могут быть вполне успешны при исследовании задач для уравнений с вырождением порядка, а также в классах гиперболических решений и в классе вырождающихся гиперболо-параболических решений,вдоль которых уравнение имеет слабое (Трикомовское) или сильное (типа Чибрарио-Келдыша)параболическое вырождение.

С помощью Этих методов можно доказать существование или отсутствие решений рассматриваемых задач.

Следует отметить,что в работе класс уравнений конкретный и соответствующие результаты тоже конкретн, но они являются прецендентом и аналогичные явления могут возникнуть и для уравнений более общего вида исследование которых может оказатся предметом дальнейших исследований.

рис1.

$$plot\left(\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3\,x^2+6\,x+1},\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3\,x^2+6\,x+1}\right], x=-1..1, color=[red, blue]\right);$$

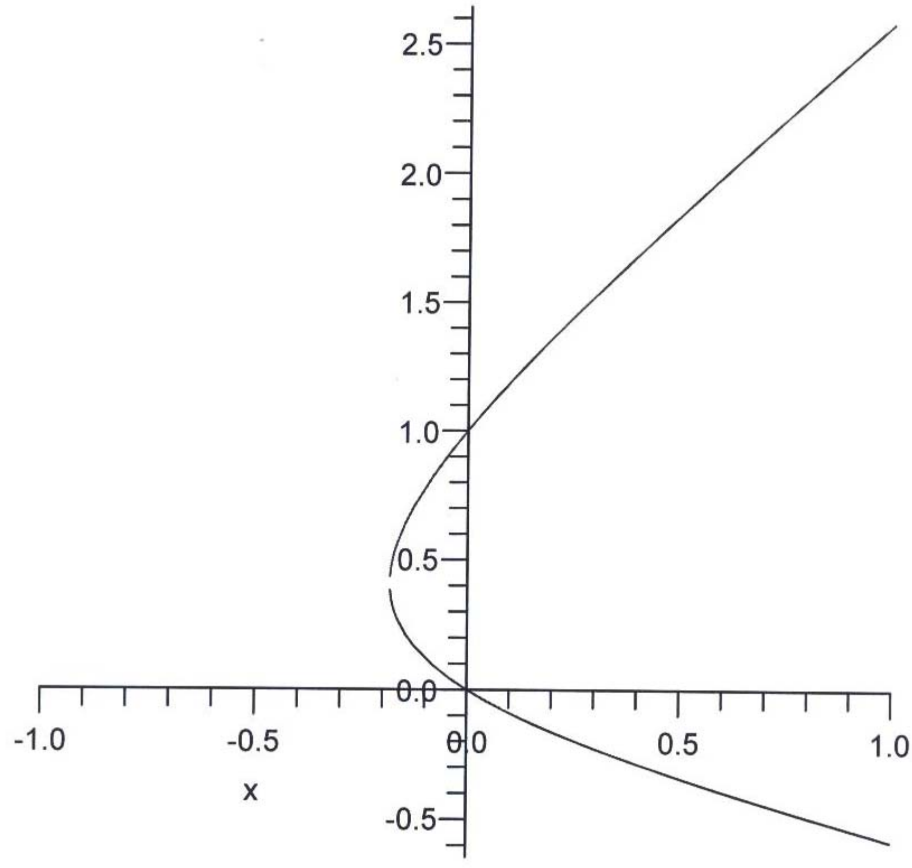


рис2.

$$plot\left(\left[\ *\left(4-x,\ \frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\sqrt{-3\,x^2+16\,x+16},\ *\left(4-x,\ \frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{-3\,x^2+16\,x+16}\ \right],\ x=-2\,..10,\ color=[red,\ blue]\right);$$

1

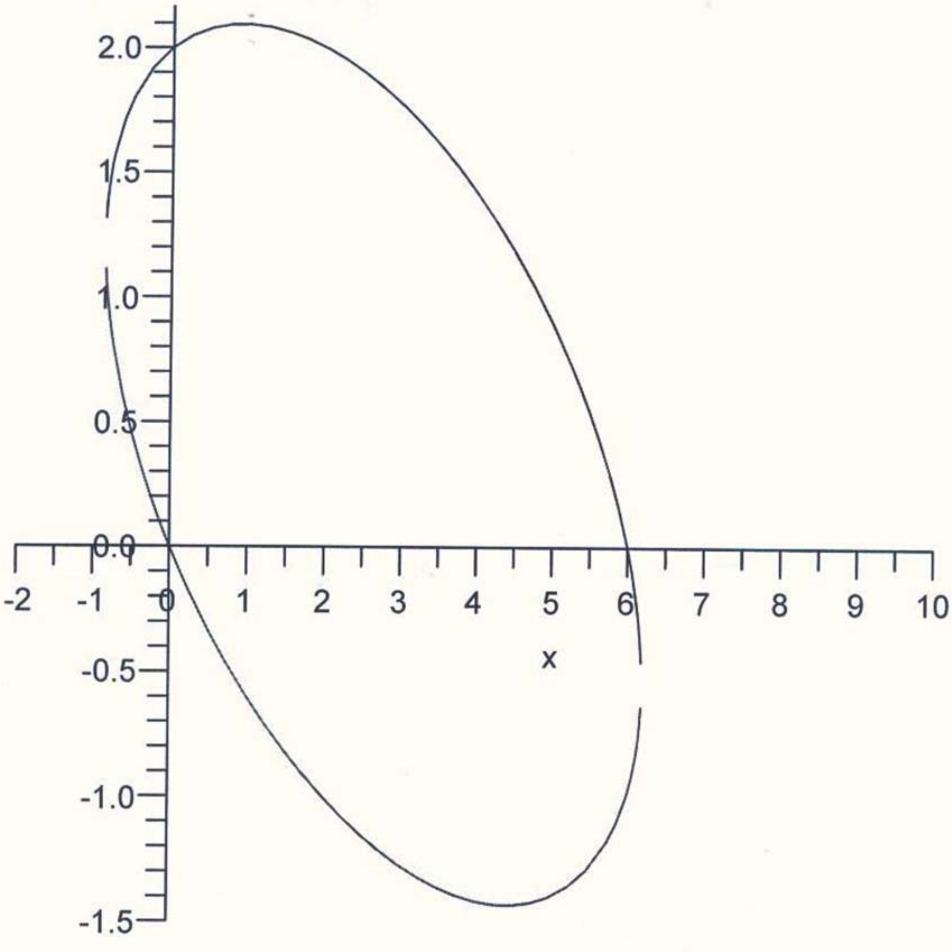


рис.3

$$plot\left(\left[*\left(6-x,\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+36x+36},\ *\left(6-x,\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+36x+36},\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+18x+9},\ \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+18x+9},\ *\left(4-x,\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+24x+16},\ *\left(4-x,\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+24x+16},\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+12x+4},\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+12x+4}\right], x=-1..1, color=[red, blue, red, blue, red, blue, red, blue]\right);$$

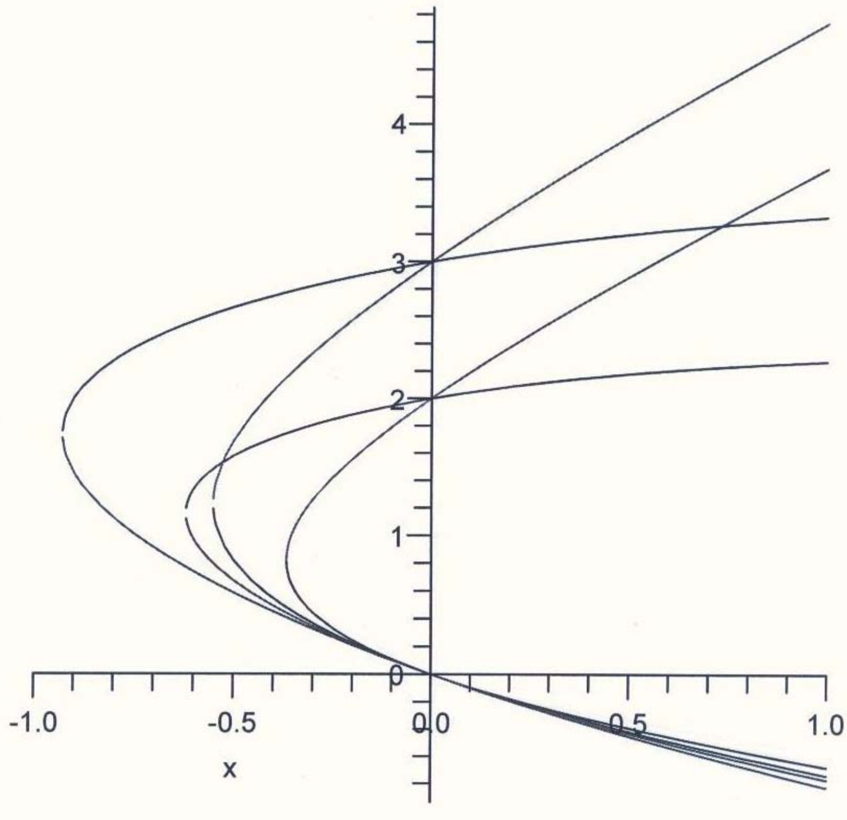


рис.4

$$plot\left(\left[*\left(2-x, \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+12x+4}, *\left(2-x, \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+12x+4}, *\left(6-x, \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+36x+36}, *\left(6-x, \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{-3x^2+36x+36}, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+18x+9}, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+18x+9}, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+6x+1}, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+6x+1} \right], x=-1..1, color=[red, blue, red, blue, red, blue, red, blue]\right);$$

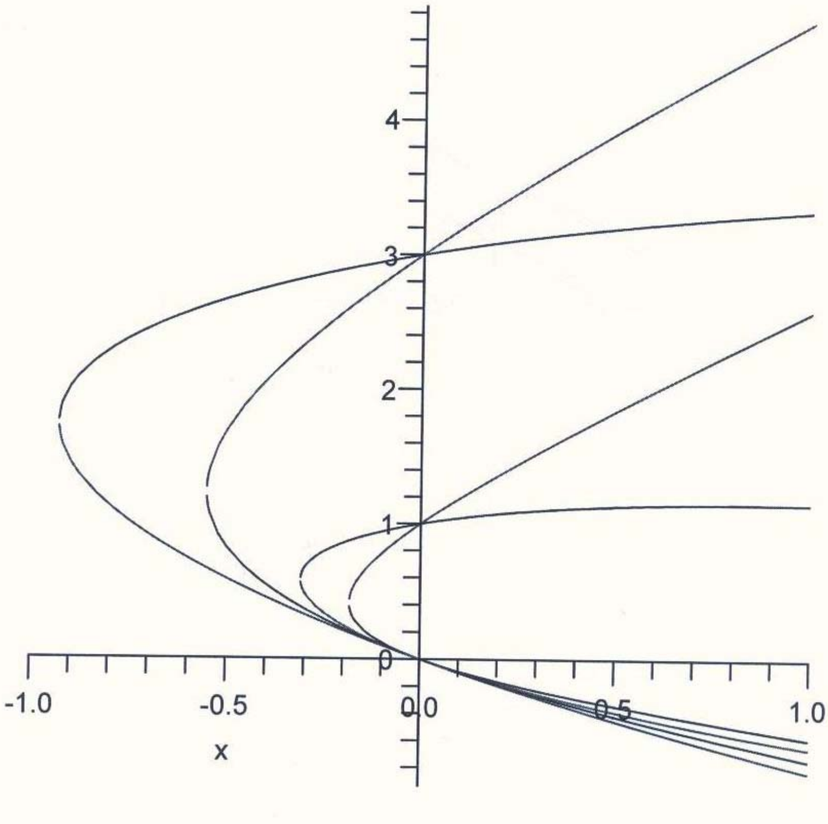


рис.5.

$$plot\left(\left[-\frac{6}{5}x+\frac{24}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{-48x+6x^2+196},\ -\frac{6}{5}x+\frac{12}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{-24x+6x^2+49},\ -\frac{10}{9}-\frac{5}{9}x+\frac{2}{9}\sqrt{196-20x-5x^2},\ -\frac{5}{9}-\frac{5}{9}x+\frac{2}{9}\sqrt{49-10x-5x^2}\right], x=-5..5, color=[red, red, blue, blue]\right)$$

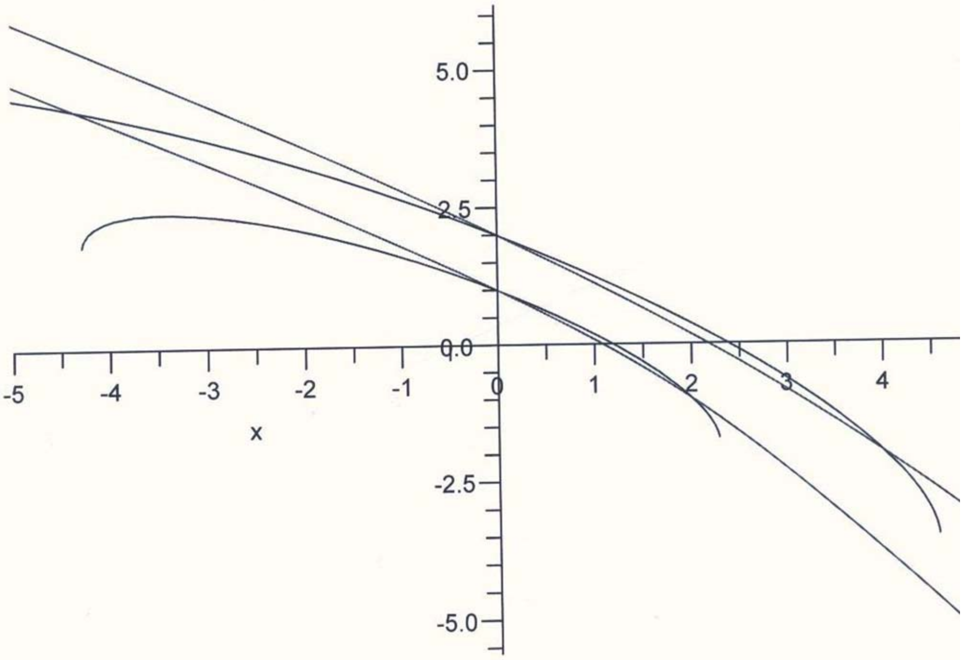
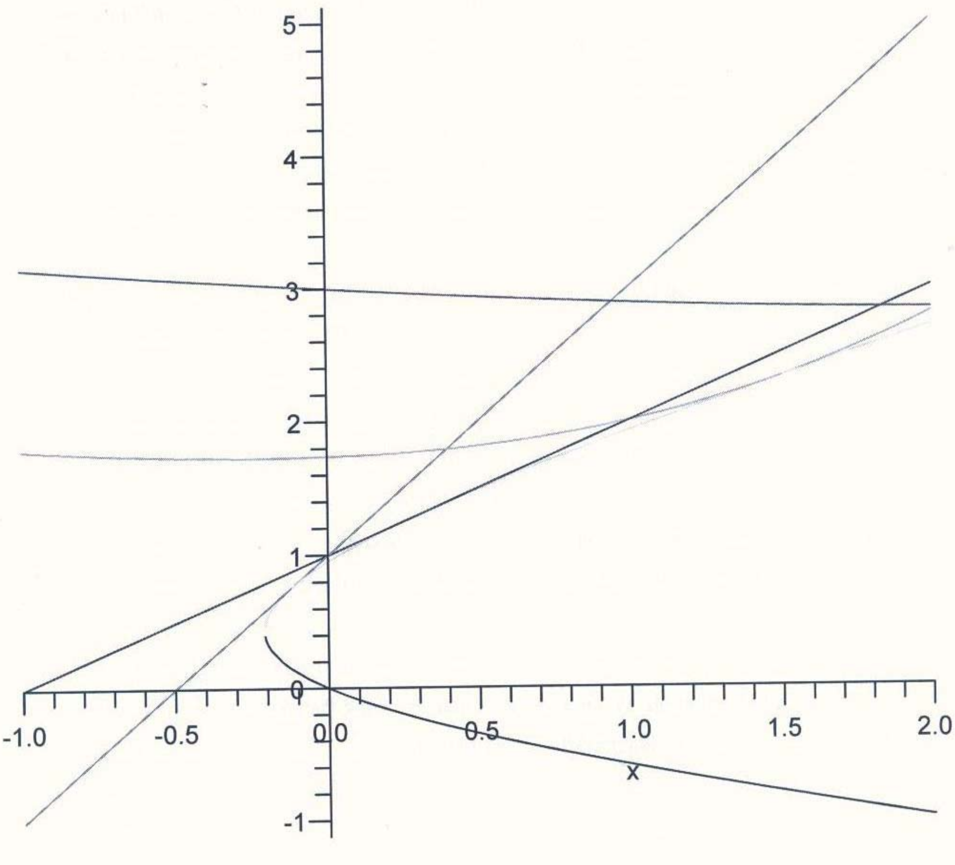


рис.6.

$$plot\left(\left[x+1,\ 2\cdot x+1,\ \frac{4}{21}\,x+\frac{10}{21}+\frac{10}{21}\sqrt{x^2+5\,x+1},\ \frac{4}{21}\,x+\frac{10}{21}-\frac{10}{21}\sqrt{x^2+5\,x+1},\ \frac{1}{3}\,x-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-10\,x+49},\ \frac{4}{5}\,x-\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\sqrt{x^2-3\,x+6}\right],\ x=-1\,..2\right)$$



Литература

1. G. Birkhoff, E.H. Zarantanello, “Jets ,Wakes and Cavities”. Academic Press, Inc. Publishers. NY, 1957.
2. L. Bers “Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics”. John Wiley and Sons, Inc. NY-London,1958.
3. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, «Методы Теорий Функций Комплексного Переменного» - Москва, «Наука», 1987.
4. Hadamard I. Proc.Benares Math.Soc.35,1936,5.
5. С.Л.Соболев. «Пример Корректной Краевой Задачи для Уравнения Колебаний Струны с Данными на всей Границе» - ДАН СССР, Т.109, № 4, 1956.
6. Shih-I Pai. “Introduction to the Theory of Compresible Flow”. D.Van Nostrand Company,Inc. Toronto-NY, 1960.
7. А.В. Бицадзе. «Некоторые Классы Уравнений в Частных Производных». Москва, «Наука», 1981.
8. Б.А. Рождественский, Н.Н. Яненко. «Системы Квазилинейных Уравнений» - Москва, «Наука», 1968.
9. E. Mitidieri and S.I. Pohozaev, A priori estimates and the absence of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities. proc. Steklov Inst. Math., 2001,No.3 (324), 1-326.
10. S. Kharibegashvili, On the nonexistence of global solutions of the characteristic Cauchy problem for nonlinear wave equation in a conical domain. (English) Differential Equations, **42** (2006), No.2. Translated from Differentsial’nye Uravnenia **42** (2006), No. 2, 261-271.
11. Дж.К.Гвазава. «О Некоторых Классах Квазилинейных Уравнений Смешанного Типа».-«Мецниереба», Тбилиси, 1981. стр.93.
12. Ментешашвили М. О Задаче Коши на Единичнои Окружности. Сообщ. АН Грузии, 1993, т.148, №2, с. 190-193.

13. Bitsadze R. On the Version of Goursat Problem for the Class of Equation of Nonlinear Vibration. Tbilisi, Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, vol 4 No1, 1989.
14. Klebanskaya M. Some Nonlinear Versions of Darboux and Goursat Problems for an Hyperbolic Equation with Parabolic Degeneracy. Diffrerential Equations and Mathematical Physics, in Abstracts of International Symposium, Tbilisi,1997.
15. Matheshvili D. On Characteristic Problems for an Second Order Nonlinear Mixed Type Equation. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 14(1), 1999
16. Baghaturia G. On Singular Points of Support for Regular Initial Pertupbations. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 14(1), 1999.
17. Baghaturia G. On an Nonlinear Version of Goursat Problem. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 16(1-3), 2001.
18. J. Gvazava,"General Integrals and Initial-characteristic problems for the second-order nonlinear equations with straight characteristics". Lithuanian mathematical Journal **40** (2000), No.4,352-363.
19. J. Gvazava. "On Second Order Nonlinear Equations with Rectilinear Characteristics".Georgian Mathematical Journal. Volume 7 (2000),No.2, 299-316.
20. Дж.К. Гвазава. «Об одной видоизменённой постановке задачи Гурса для Квазилинейного вырождающегося Гиперболического Уравнения второго порядка». Дифференциальные Уравнения. т.18, №2, 1982, стр.285-290.

20. F. Tricomi. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine di tipo misto.*Acc.Linc.Rend*.(5) **14** (1923), 133-247.
21. S. Gellerstedt, Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derives partielles du second ordre de type mixte. *These, Uppsala, Almqvist och wiksells,*1935.
22. А.В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа. АН СССР, Москва,1959.
23. Jac. Hadamard. "Lecons sur la Propagation des ondes et les Equations De L'Hydrodynamique". A.Hermann.Paris,1903.
24. G. Darboux. Lecons sur la Theorie des Surfaces Generale et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal.Paris, Gauthier-Villars.1894.
25. E. Goursat. Lecons sur L'integration des equations aux derivees partielles du second ordre.T. 2. Hermann, Paris, 1898.
26. L. Hörmander,Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. Math. and Appl., 26, Springer-Verlag,Berlin,1997.
27. M. Struwe, Wave maps. Boston etc.: Birkhäuser,1997.(Progr. Nonlin. Diff. Equat. And Appl.: v.29)
28. O. Jokhadze, Riemann function of hyperbolic equations and systems of higher order with dominates lower terms. (English) Differential Equations, **39** (2003), No.9. Translated from Differentsial'nye Uravnenia **39** (2003), No. 9, 1-13.
29. Ментешашвили М. О Численном Решении Задачи Гурса для Одного Квазилинеиного Уравнения. Доклады Семинара Кафедры Матем. Обеспечения ЭВМ ТГУ им. Ив. Джавахишвили, 1994, с. 10-16.
30. С.Л.Соболев.Уравнения Математической Физики.ГИТТЛ, Москва-Ленинград,1950.стр.49.
31. Э.Гурса. Курс математического Анализа.ГТТИ, Москва-Ленинград,1933.
32. Н.М.Гюнтер.Интегрирование уравнений первого порядка в частных пройзводных.ОНТИ-ГТТИ,1934.