ანდრია რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი

ხელნაწერის უფლებით

მარინა კლებანსკაია

საწყისი და მახასიათებელი ამოცანები არამკაცრად ჰიპერბოლური კვაზიწრფივი განტოლებებისათვის

01.01.02 - დიფერენციალური განტოლებები

ფიზიკა - მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი 2006

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებილია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ჯონდო გვაზავა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნირებათა დოქტორი,

პროფესორი

ოფიციალური ოპონენტები: სერგო ხარიბეგაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფესორი

ილია თავხელიძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2006 წლის "______" ________" ______" საათზე ანდრია რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტთან არსებული Ph.M.01.01 №1 სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე (თბილისი 0193, მ. ალექსიძის ქ. №1)

დისერტაციის გაცნობა შესაძლებელია ანდრია რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის ბიბლიოთეკაში.

ავტორეფერატი დაიგზავნა 2006 წლის "_____" _______".

სადისერტაციო საბჭოს

სწავლული მდივანი, ფიზიკა-მათემატიკის

მეცნიერებათა კანდიდატი თ. ბუჩუკური

თემის საერთო დახასიათება

თემის აქტუალობა. შერეული ტიპის კერძოწარმოებულებიანი განტოლებების შესწავლა მჭიდროდაა დაკავშირებული ბევრ პრაქტიკულ და მათემატიკურ მოდელთან, რომელიც შეესაბამება სხვადასხვა ფიზიკურ პროცესს. ასეთი განტოლებები, როგორც წესი, არაწრფივია და მათთვის დღემდე არ არსებობს მწყობრი თეორია, როგორიც წრფივი განტოლებებისათვის არის აგებული. ამიტომ არაწრფივ განტოლებათა ყოველი ცალკეული კლასი მოითხოვს ინდივიდუალურ მიდგომას. ზოგ შემთხვევაში, არსებითი შეზღუდვებისა და დაშვებების საფუძველზე არაწრფივი განტოლებები წრფივზე დაიყვანება.

ცნობილია, რომ წრფივი ელიფსური და ჰიპერბოლური განტოლებები დაბალი რიგის წევრთა წყვეტილი კოეფიციენტებით პარაბოლურად გადაგვარებად განტოლებებზე დაიყვანება.

ამ და სხვა ფაქტების ფუნდამენტურ კვლევაზე დაყრდნობით, ფ. ტრიკომიმ შეიმუშავა სასაზღვრო ამოცანების თეორია შერეული ტიპის წრფივი განტოლებებისათვის, რომელმაც შემდგომში განვითარება ჰპოვა გ. ფონ კარმანის, მ.ლავრენტიევის, მ. კელდიშის, ა. ბიწაძის, და სხვათა შრომებში.

შერეული ტიპის არაწრფივი განტოლებების თაობაზე პირველი ნაშრომები ეკუთვნის ჯ. გვაზავას, ი. მაიოროვს, მ. ალიევს. შემდგომში ამ საკითხებით დაინტერესდნენ რ. ბიწაძე, მ. მენთეშაშვილი, ო. მენშიხი, ა. პოდგაევი, ო. ჯოხაძე და სხვანი. მათ შრომებში შესწავლილია სხვადასხვა ამოცანა არაწრფივი ანალიზის მეთოდების გამოყენებით.

წინამდებარე ნაშრომში განხილულია მეორე რიგის შერეული ტიპის პარაბოლურად გადაგვარებადი კვაზიწრფივი ჰიპერბოლური განტოლებები, რომელთა ზოგადი ამოხსნების წარმოდგენა შესაძლებელია ორი ნებისმიერი ფუნქციის სუპერპოზიციის სახით. ცნობილია, რომ ზოგადი ინტეგრალის და ზოგადი ამოხსნის აგება ხერხდება არაწრფივ განტოლებათა მხოლოდ სპეციალური კლასისათვის.

აღსანიშნავია, რომ არაწრფივი, განსაკუთრებით ჰიპერბოლური ტიპის, განტოლებებისათვის, კლასიკური ამოცანების დასმის დროს თავს იჩენს მნიშვნელოვანი დაბრკოლებები. წრფივ შემთხვევაში ამოხსნათა სიმრავლე კარგად შესწავლილი ჯგუფებით არის წარმოდგენილი, რომელთა სპეციფიკა მნიშვნელოვნად უწყობს ხელს მათთვის დასმული ამოცანების გადაწყვეტას. ზოგადად, არაწრფივ განტოლებებზე მათი პირდაპირი გადატანის საშუალება არა გვაქვს. ძირითადად, ეს განპირობებულია ნამდვილი მახასიათებელი მრავალსახეობების დამოკიდებულებით უცნობ ამოხსნებზე. შერეული ან მახასიათებელი ამოცანების დასმის დროს, როცა ამოცანის პირობების მზიდები შეიცავენ მახასიათებელ რკალებს, იმისდა მიუხედავად, რომ ამოცანა კორექტულად არის დასმული, მისი ამოხსნადობის დადგენა ყოველთვის ვერ ხერხდება.

დისერტაციის მიზანია შერეული ტიპის პარაბოლურად გადაგვარებად კვაზიწრფივ განტოლებათა კლასისათვის კოშის საწყისი ამოცანის შესწავლა და

დარბუსა და გურსას მახასიათებელი ამოცანების არაწრფივი ანალოგების კვლევა. ასევე, მათი ამოხსნადობის პირობების მიღება, ამოხსნებისა და მათი განსაზღვრის არეების ცხადი სახით დადგენა.

კვლევის მეთოდიკა დაფუძნებულია მახასიათებელთა კლასიკურ მეთოდზე. მახასიათებელი სისტემების ანალიზზე დაყრდნობით აგებულია განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და ზოგადი ამოხსნა, რომელთა საფუძველზე დასმულია და შესწავლილი ამოცანები. გამოყენებულია საშუალო მნიშვნელობის თვისების არაწრფივი ანალოგები.

კვლევის ობიექტებია შერეული ტიპის პარაბოლურად გადაგვარებადი ჰიპერბოლური განტოლებები.

სამეცნიერო სიახლე. დასმულია კოშის საწყისი ამოცანა და დარბუს ამოცანის არაწრფივი ვარიანტი. ამასთან, გამოკვლეულია გურსას ამოცანის რამდენიმე არაწრფივი ვარიანტიც. მათ შორის, საშუალო მნიშვნელობის თვისების არაწრფივი მოდიფიკაციის საფუძველზე. განხილულია პარაბოლური გადაგვარების შემთხვევა და მოყვანილია ამოხსნების განსაზღვრის არეების სტრუქტურა და აგების გზები.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები:

ა) აგებულია პარაბოლურად გადაგვარებადი კვაზიწრფივი განტოლების ზოგადი ინტეგრალი და ზოგადი ამოხსნა;

ბ) შესწავლილია კოშის ამოცანა, ნაპოვნია მისი ამოხსნის განსაზღვრის არე;

გ) გამოკვლეულია დარბუს პირველი ამოცანა და გურსას მახასითებელი ამოცანის რამდენიმე ვარიანტი;

დ) საშუალო მნიშვნელობის თვისებაზე დაყრდნობით დამტკიცებულია გურსას ამოცანის ამოხსნადობა რეგულარულ და განზოგადებულ ამოხსნათა კლასში.

ნაშრომის აპრობაცია - სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები სხვადასხვა დროს მოხსენებული იყო თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებულ სხდომებზე (1995, 1997, 1999), დიფერენტიალურ განტოლებებსა და მათემატიკურ ფიზიკაში გამართულ საერთაშორისო სიმპოზიუმზე (DEMPჰ 1997), ა.რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის დიფერენციალურ განტოლებებსა და მათემატიკურ ფიზიკაში გამართულ სიმპოზიუმზე (DEMPჰ 2003).

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა - სადისერტაციო ნაშრომი, რომლის საერთო მოცულობაა 67 ნაბეჭდი გვერდი, შედგება შესავლისა და სამი თავისაგან. მითითებულია გამოყენებული ლიტერატურის სია, რომელიც შეიცავს 41 დასახელებას. აგრეთვე მითითებულია ავტორის მიერ დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებული ნაშრომების სია, რომელიც შეიცავს 4 დასახელებას.

დისერტაციის შინაარსი

შესავალში დასაბუთებულია სადისერტაციო ნაშრომში განხილული ამოცანების აქტუალობა და მოყვანილია დისერტაციის მოკლე შინაარსი.

პირველი თავი ეთმობა მეორე რიგის კვაზიწრფივი განტოლების განხილვას

$$L(u) \equiv 2y\left(u_y - 2y\right)u_{xx} + \left(u_y - 2yu_x - 2y\right)u_{xy} - u_x u_{yy} = 2u_x\left(u_x - 1\right). \tag{1}$$

L დიფერენციალურ ოპერატორს შეესაბამება შემდეგი ორი ნამდვილი მახასიათებელი მიმართულება

$$2ydy = dx, \qquad \left(u_y - 2y\right)dy + u_x dx = 0. \tag{2}$$

(1) განტოლების ერთი ოჯახი განსაზღვრულია დამოუკიდებელი ცვლადებით, მეორე კი დამოკიდებულია ამოხსნის პირველი რიგის წარმოებულებზე.

წერტილთა იმ სიმრავლეზე, სადაც შესრულებულია

$$u_y + 2y\left(u_x - 1\right) = 0 \tag{3}$$

პირობა, (1) განტოლება პარაბოლურად გადაგვარდება. ამიტომ, მოცემული განტოლება განეკუთვნება შერეული ტიპის პარაბოლურად გადაგვარებად ჰიპერბოლურ განტოლებათა კლასს.

ზოგადი ინტეგრალის ასაგებად მივმართეთ მახასიათებელთა კლასიკურ მეთოდს.

პირველი თავის პირველ პარაგრაფში მახასიათებელი თანაფარდობების დიფერენციალურ სისტემებს

$$2y\,dy - dx = 0, \quad du_x - \frac{u_x}{u_y - 2y}du_y - \frac{u_x\left(u_x - 1\right)}{y\left(u_y - 2y\right)}dx = 0, \tag{4}$$

$$\left(u_y - 2y\right)dy + u_x\,dx = 0, \quad du_x + \frac{du_y}{2y} - \frac{u_x\left(u_x - 1\right)}{y\left(u_y - 2y\right)}dx = 0 \tag{5}$$

ემატება თავსებადობის პირობა

$$du = u_x dx + u_y dy. \tag{6}$$

ჰიპერბოლურ ამოხსნათა კლასში სამართლიანია შემდეგი:

<u>თეორემა.</u> *(1) განტოლების თითოეული მახასიათებელი სისტემა (4), (6) და (5), (6) უშვებს ორ-ორ პირველ ინტეგრალს, რომლებიც წარმოდგენილია ფორმულებით:*

$$\xi = x - y^2, \quad \xi_1 = \frac{q - 2y}{p} + 2y \tag{7}$$

და

$$\eta = u - y^2\,,\ \ \eta_1 = 2y(p-1) + q \tag{8}$$

ეს პირველი ინტეგრალები ლიტერატურაში ცნობილია მახასითებელი ან რიმანის ინვარიანტების სახელით. ξ და ξ_1 მახასიათებელი ინვარიანტები პირველი მახასიათებელი ფესვის შესაბამისი ოჯახის თითიეული მახასიათებელი წირის გასწვრივ მუდმივ მნიშვნელობებს ინარჩუნებენ და მთლიანად განსაზღვრავენ ამ ოჯახს. მახასიათებელთა ამ სიმრავლეს შემდგომში ვუწოდებთ $\xi-$ ოჯახს. ზემოდმოყვანილი თეორემის მე-(7) თანაფარდობებიდან გამომდინარე, (1) განტოლებას გააჩნია შემდეგი სახის შუალედური ინტეგრალი:

$$\frac{q-2y}{p} + 2y = G\left(x - y^2\right),$$

სადაც $G \in C^2\left(R^1\right)$- არის ნებისმიერი ფუნქცია.

ინვარიანტთა მეორე წყვილი η და η_1 განისაზღვრება მეორე მახასიათებელი ფესვით და ამ წყვილის შესაბამის მახასიათებლთა სიმრავლეს ვუწოდებთ $\eta-$ ოჯახს. ანალოგიურად, მე-(8) თანაფარდობები გვაძლევენ (1) განტოლების მეორე შუალედურ ინტეგრალს

$$2y(p-1) + q = H\left(u - y^2\right)$$

$H \in C^2\left(R^1\right)$ ნებიამიერი ფუნქციით.

მეორე პარაგრაფში რიმანის ინვარიანტებისა და შუალედური ინტეგრალების გამოყენებით იგება (1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი

$$y = g\left(x - y^2\right) + h\left(u - y^2\right), \tag{9}$$

სადაც g და h - ნებისმიერი გლუვი ფუნქციებია. მტკიცდება შემდეგი

<u>თეორემა.</u> *(1) განტოლება ინტეგრებადია და მისი ზოგადი ამოხსნა წარმოიდგინება ორი ნებისმიერი ფუნქციის სუპერპოზიციის სახით*

$$u = y^2 + f\left[\ y + g\left(x - y^2\right)\right], \tag{10}$$

სადაც f - აგრეთვე ნებისმიერი გლუვი ფუნქციაა.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, (1) განტოლება პარაბოლურად გვარდება მახასიათებელი ფესვების დამთხვევის დროს და ყველა მისი პარაბოლური ამოხსნა განისაზღვრება (3) პირობით. ამ უკანასკნელის (1) განტოლებაში გათვალისწინება შესაძლებელია ორნაირად.

კერძოდ, თუ $\left(2y - u_y\right)/u_x$ თანაფარდობას შევცვლით $2y$ -ით, ვღებულობთ წრფივ პარაბოლურ განტოლებას

$$4y^2 u_{xx} + 4y u_{xy} + u_{yy} = -2(u_x - 1)\,,$$

რომლის მახასიათებელ განტოლებას გააჩნია ჯერადი ფესვი

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2y},$$

ხოლო მისი ზოგადი ამოხსნა შემდეგი ფორმულით განისაზღვრება:

$$u = x + y\, f_1\left(x - y^2\right) + g_1\left(x - y^2\right),$$

სადაც f_1 და g_1 - ნებისმიერი ფუნქციებია.

თუ კი (1) განტოლებაში $2y$ -ს შევცვლით $u_y/(1-u_x)$ გამოსახულებით, მივიღებთ პარაბოლური ტიპის კვაზიწრფივ განტოლებას

$$u_y^{\,2}\, u_{xx} - 2u_y(u_x - 1)\, u_{xy} + (u_x - 1)^2 u_{yy} = -2(u_x - 1)^3,$$

რომელსაც შეესაბამება ჯერადი მახასიათებელი ფესვი

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{u_x - 1}{u_y}.$$

ამ განტოლების ზოგად ინტეგრალს აქვს შემდეგი სახე:

$$x = y^2 - y\varphi(u - x) + \psi(u - x),$$

სადაც φ და ψ კვლავ ნებისმიერი ფუნქციებია.

აქედან ვასკვნით, რომ (1) განტოლებაში (3) პირობის გათვალისწინებით ვღებულობს ორ, წრფივ და არაწრფივ, განტოლებას. სამივე ეს განტოლება ერთმანეთის მონათესავეა. არსებობს მათი ზოგადი ამოხსნები. მაგრამ, განტოლებებისგან განსხვავებით, ისინი ერთმანეთს არ უკავშირდებიან, რადგანაც (3) პირობა შეიცავს ამოხსნების პირველი რიგის წარმოებულებს და არა თვით ამოხსნებს. თუმცა, ამ სამივე ზოგადი ამოხსნის გაწარმოება გვაძლევს ერთსა და იმავე შედეგს – (3) პირობას, რომელიც განსაზღვრავს (1) განტოლების პარაბოლურ ამოხსნათა კლასს.

მეორე თავში განხილულია კოშის საწყისი ამოცანა და დარბუს მახასიათებელი ამოცანის არაწრფივი ანალოგი.

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში შესწავლილია კოშის შემდეგი საწყისი ამოცანა: დავუშვათ $\tau(x)$ და $\nu(x)$ - შესაბამისად ორჯერ და ერთჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუქციებია $[-1,1]$ სეგმენტზე. ამასთან მოცემულ სეგმენტზე ყველგან სრულდება უტოლობა $\nu(x) \neq 0,\ x \in J$, სადაც

$$J = \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ y = 0\}.$$

აქ $y = 0$ წრფის $[-1, 1]$ მონაკვეთი შერჩეულია ზოგადობის დაურღვევლად.

<u>კოშის ამოცანა.</u> *თავის განსაზღვრის არესთან ერთად ვიპოვოთ (1) განტოლების რეგულარული ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს საწყის პირობებს:*

$$u\big|_{y=0}=\tau(x),\quad x\in[-1,1], \tag{11}$$
$$u_y\big|_{y=0}=\nu(x),\; x\in[-1,1]\;, \tag{12}$$

სადაც $\tau\in C^2[-1,1]$, $\nu\in C^1[-1,1]$ *- მოცემული ფუნქციებია.*

საწყისი ფუნქციები $\tau(x)$, $\nu(x)$ და წარმოებული $\tau'(x)$ განსაზღვრავენ როგორც მახასითებელ მიმართულებებს მზიდის ყოველ წერტილში, ასევე განტოლების ყოფაქცევას, მის პარაბოლურ გადაგვარებას. კერძოდ,

1) თუ მზიდის ყველა წერტილში ν ფუნქცია ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ J მზიდზე მახასიათებლებს სხვადასხვა მიმართულება აქვთ და განტოლება ჰიპერბოლური ტიპისაა;
2) თუ J მზიდის რომელიმე x_0 წერტილში ν უტოლდება ნებიამიერი რიგის ნულს, ხოლო $\tau'(x_0)\neq 0$, მაშინ x_0 წერტილში ორი მახასიათებელი მიმართულების დამთხვევის გამო, ამ წერტილში (1) განტოლება პარაბოლური ტიპისაა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\vartheta'(x)=\frac{\tau'(x)}{\nu(x)},\, \vartheta'(x)\neq 0,\; x\in[-1,1],$$

სადაც $\vartheta\in C^2[-1,1]$ *- ნებისმიერი ფუნქციაა.*

მოვთხოვოთ ϑ ფუნქციას შემდეგი პირობის შესრულება: $\zeta=\vartheta(x)$ განტოლებას $\forall\zeta\in[\vartheta(-1),\vartheta(1)]-$ სათვის ჩაკეტილ ინტერვალში გააჩნია ერთადერთი უწყვეტად წარმოებადი ამოხსნა

$$x=G(\zeta),\; G(0)=0\,.$$

<u>თეორემა.</u> *თუ საწყისი ფუნქციები მთელ* $[-1,1]$ *ინტერვალზე აკმაყოფილებენ უტოლობებს*

$$\tau'(x)\neq 0,\; \nu(x)\neq 0\,,\; \vartheta'(x)\neq 0\,,$$

ხოლო $\zeta=\vartheta(x)$ *განტოლება ცალსახადაა ამოხსნადი* x *ცვლადის მიმართ* $x=G(\zeta)$ *,* $G(0)=0$ *, მაშინ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი რეგულარული ამოხსნა, რომელიც წარმოდგენილია*

$$u=y^2+\tau\left\{G\left[y+\vartheta\left(x-y^2\right)\right]\right\}$$

ფორმულით და მისი განსაზღვრის არე შემოსაზღვრულია ორივე ოჯახის მახასიათებლით: $x-y^2=-1$, $x-y^2=1$ *და* $y+\vartheta\left(x-y^2\right)=\vartheta(-1)$, $y+\vartheta\left(x-y^2\right)=\vartheta(1)$.

ამავე თავის მეორე პარაგრაფში განხილულია დარბუს პირველი ამოცანა. საზოგადოდ, დარბუს ამოცანა ითვალისწინებს ამოხსნის აგებას საერთო წერტილიდან გამომავალ ორ სხვადასხვა წირზე მოცემული მნიშვნელობებით, რომელთაგან ერთი მახასიათებელია, მეორე კი თავისუფალი. ჩვენ ვიხილავთ შემთხვევას, როცა საერთო წერტილი კოორდინატთა სათავეა, ერთი წირი არის $\xi-$ოჯახის მახასიათებელი $x=y^2$, $x\in[0,a]$ პარაბოლის რკალი, მეორე კი $y=0$ ღერძის $x\in[0,b]$ მონაკვეთი. ამოცანის დასმის მიხედვით, ეს მეორე წირი თავისუფალი უნდა იყოს. ამისათვის, მეორე მახასიათებელი ფესვის სტრუქტურიდან გამომდინარე, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{u_x}{u_y-2y}$ მახასიათებელი მიმართულება არ უნდა განსაზღვრავდეს Ox ღერძის პარალელურ მიმართულებას. აქედან გამომდინარე მოვითხოვთ

$$u(x,0)\neq const \tag{13}$$

პირობის შესრულებას.

<u>დარბუს ამოცანა.</u> *თავის განსაზღვრის არესთან ერთად ვიპოვოთ (1) განტოლების რეგულარული ამოხსნა, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

$$\begin{aligned} u\big|_{y=\sqrt{x}} &= \varphi(x),\ 0\le x\le a\ , \\ u\big|_{y=0} &= \psi(x),\ \ 0\le x\le b\,,\ a\le b\,, \end{aligned} \tag{14}$$

სადაც $\varphi\in C^2[0,a]$, $\psi\in C^1[0,b]$ *მოცემული ფუნქციებია და* $\varphi(0)=\psi(0)$.

შევნიშნოთ, რომ φ და ψ ფუნქციებზე დამოკიდებულებით, (1), (14) ამოცანა შეიძლება აღმოჩნდეს როგორც გურსას, ასევე დარბუს ამოცანის ანალოგი. მაგალითად, თუ $\psi=const$, (1), (14) ამოცანა წარმოადგენს გურსას ცნობილ ამოცანას და ცალსახადაა ამოხსნადი; თუ $\varphi(x)=x+c$, მაშინ $x=y^2$ პარაბოლა იქნება მახასიათებელი და ამავე დროს (1) განტოლების გადაგვარების წირი.

<u>თეორემა.</u> *თუ შესრულებულია (13) უტოლობა და შემდეგი პირობები:*

1. $\varphi(x)-x=z$ *ფუნქციონალურ განტოლებას* $\forall\ z\in[\varphi(0),\varphi(a)-a]-$ *ის აქვს ერთადერთი ამოხსნა* $x=\Phi(z)$, $\Phi(\varphi(0))=0$;
2. $\varphi'(x)>1$;
3. $\psi(x)<\varphi(a)-a,\quad x\in[0,b]$,

მაშინ (1), (14) ამოცანა ცალსახადაა ამოხსნადი რეგულარულ ამოხსნათა კლასში; მისი ამოხსნა წარმოიდგინება

$$u=y^2+\varphi\left\{\left[\ y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}\ \right]^2\right\}-\left\{\ y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}\ \right\}^2 \tag{15}$$

ცხადი სახით და განისაზღვრება მრუდწირულ ოთხკუთხედში, რომელიც შემოსაზღვრულია ამოცანის მზიდებით, $y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}=\sqrt{a}$ *მახასიათებელი წირით და* $x-y^2=b$ *პარაბოლის რკალით;*

<u>თეორემა.</u> *თუ შესრულებულია (13) უტოლობა, წინა თეორემის 1. და 2. პირობა და* $\psi(x)\geq\varphi(a)-a$, $x\in[0,b]$, *მაშინ (1), (14) ამოცანას აქვს ერთადერთი რეგულარული ამოხსნა; მისი ამოხსნა წარმოდგენილია (15) ფორმულით და განისაზღვრება მრუდწირულ სამკუთხედში, რომელიც შემოსაზღვრულია ამოცანის მზიდებით და* $y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}=\sqrt{a}$ *მახასიათებლით.*

უნდა აღინიშნოს, რომ დარბუს ამოცანის ამოხსნა შემოუსაზღვრელიც შეიძლება იყოს: თუ b არის უსასრულოდ დიდი რიცხვი, მაშინ $\eta-$ ოჯახის არცერთი მახასიათებელი არ კვეთს $x-y^2=b$.

მესამე თავი ეძღვნება გურსას მახასიათებელი ამოცანის კვლევას. გურსას ამოცანა მოითხოვს საერთო წერტილიდან გამომავალი ორი სხვადასხვა მახასიათებლის სასრულ ან უსასრულო რკალებზე მოცემული მნიშვნელობებით ამოხსნის განსაზღვრას. ჩვენ შემთხვევაში ერთი მახასიათებელი არის $x=y^2+\delta$ პარაბოლა, მეორე დამოკიდებულია ამოხსნაზე და მას ნებისმიერად ვირჩევთ. მხოლოდ ვუყენებთ შემდეგ პირობებს: $\xi-$ოჯახის მახასიათებლებთან არ უნდა ჰქონდეს თანაკვეთის ერთზე მეტი წერტილი და არსად არ უნდა ეხებოდეს არცერთ მათგანს. დავუშვათ, რომ ეს მეორე მახასითებელი მოცემულია ცხადი სახით

$$x=\omega(y),\qquad a\leq y\leq c,\quad \omega(a)=\delta+a^2, \tag{16}$$

სადაც $\omega\in C^2[a,c]$. ჩვენი მოთხოვნები ამ მახასიათებლის მიმართ ω ფუნქციის ტერმინებში შემდეგი სახით გამოიხატება:

$$\omega(y)-y^2=k \tag{17}$$

განტოლებას y ცვლადის მიმართ ნებისმიერი $k>0$ მარჯვენა მხარისათვის არ ექნება ერთზე მეტი ამოხსნა და ყველგან $[a,c]$ ინტერვალში შესრულდება უტოლობა

$$\omega'(y)-2y\neq 0. \tag{18}$$

ამიტომ, (17) განტოლებას ნებისმიერი დადებითი $k\in\left[\delta,\omega(c)-c^2\right]$-ის ჩაკეტილ ინტერვალში აქვს უწყვეტად წარმოებადი ერთადერთი ამოხსნა

$$y=W(k),\ W(\delta)=a. \tag{19}$$

ამასთან, $\omega(y)-y^2=k$ და $y=W(k)$ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია.

<u>გურსას ამოცანა.</u> *თავის განსაზღვრის არესთან ერთად ვიპოვოთ (1) განტოლების რეგულარული ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$u\Big|_{x=y^2+\delta} = \upsilon(y), \quad a \le y \le b\,, \ \upsilon \in C^2[a\,,b], \tag{20}$$

ხოლო (16) წირის რკალი η – ოჯახის მახასიათებელია.

<u>თეორემა.</u> *თუ შესრულებულია (17), (18) პირობები და $\omega(y) - y^2 = k$, $\upsilon(y) - y^2 = t$ ფუნქციები ცალსახად შექცევადია: $y = W(k)$, $W(\delta) = a$ და $y = V(t)$, $V\left[\upsilon(a) - a^2\right] = a$ შესაბამისად, მაშინ (1), (16), (20) ამოცანას აქვს ერთადერთი რეგულარული ამოხსნა; ეს ამოხსნა წარმოდგენილია*

$$u = y^2 + \upsilon\left\{y - W\left(x - y^2\right) + a\right\} - \left\{y - W\left(x - y^2\right) + a\right\}^2 \tag{21}$$

ფორმულით და განისაზღვრება ჩაკეტილ მრუდწირულ ოთხკუთხედში, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი მახასიათებელი წირებით:

$$x = y^2 + \delta\,,\ x = \omega(y)\,,\ x = y^2 + \omega(y + a - b) + (y + a - b)^2\,,\ x = y^2 + \omega(c) - c^2\,.$$

მესამე თავის მეორე პარაგრაფში შესწავლილია გურსას სინგულარული ამოცანა, როდესაც მახასიათებლები საერთო წერტილში ეხებიან ერთმანეთს. ჩვენ შემთხვევაში ეს არის კოორდინატთა სათავე. აქ ამოცანის მზიდებად აღებულია ξ – ოჯახის მახასიათებელი პარაბოლა

$$x = y^2 \tag{22}$$

და γ წირი, რომელიც წარმოდგენილია

$$x = \omega(y), \qquad 0 \le y \le b\,,\ \omega(0) = 0\,,\ \ \omega'(0) = 0 \tag{23}$$

განტოლებით, სადაც $\omega \in C^2[0,b]$ - მოცემული ფუნქციაა და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\omega(y) - y^2 = \zeta \tag{24}$$

განტოლებას y ცვლადის მიმართ $\forall\zeta > 0$ მარჯვენა მხარისთვის არ შეიძლება ერთზე მეტი ამოხსნა ჰქონდეს და ყველგან $[0,b]$ ინტერვალში შესრულებულია (18) უტოლობა. აქედან გამომდინარე, (24) განტოლებას ნებისმიერი დადებითი $\forall\ \zeta \in \left[0, \omega(b) - b^2\right]$-ის აქვს $C\left[0, \omega(b) - b^2\right] \cap C^1\left(0, \omega(b) - b^2\right]$ კლასის ამოხსნა:

$$y = W(\zeta),\ W(0) = 0\,. \tag{25}$$

$\omega(y) - y^2 = \zeta$ და $y = W(\zeta)$ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია.

<u>გურსას ამოცანა.</u> *თავის განსაზღვრის არესთან ერთად ვიპოვოთ (1) განტოლების რეგულარული ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$u\Big|_{x=y^2} = \upsilon(y), \quad 0 \le y \le a\,,\ \upsilon \in C^2\,[0,a], \tag{26}$$

ხოლო (23) ტოლობით წარმოდგენილი γ წირის რკალი η - ოჯახის მახასიათებელია.

სამართლიანია შემდეგი:

<u>თეორემა.</u> *თუ შესრულებულია (18), (24) პირობები და $\omega(y)-y^2=\zeta$, $\upsilon(y)-y^2=z$ ფუნქციონალური განტოლებები ამოხსნადია: $y=W(\zeta)$, $W(0)=0$ და $y=V(z)$, $V(\upsilon(0))=0$ შესაბამისად, მაშინ გურსას ამოცანას აქვს*

$$u=y^2+\upsilon\left\{y-W\left(x-y^2\right)\right\}-\left\{y-W\left(x-y^2\right)\right\}^2 \tag{27}$$

ფორმულით წარმოდგენილი რეგულარული ამოხსნა. ეს ამოხსნა განისაზღვრება და უწყვეტია ყველგან მრუდწირულ ოთხკუთხედში, რომელიც შემოსაზღვრულია $x=y^2$, $x=\omega(y)$, $x=\omega(y-a)+2ay-a^2$, $x=y^2+\omega(b)-b^2$ მახასიათებელი წირებით; ხოლო მისი პირველი რიგის წარმოებულებისათვის $x=y^2$ წირი არის სინგულარული.

მაგალითისათვის მოყვანილია კერძო შემთხვევა, რომელშიც $x=y^2$ პარაბოლა წარმოადგენს $\eta-$ ოჯახის მომვლებს და ამ ოჯახის ყველა წირი ერთმანეთთან თანაიკვეთება.

შემდეგ პარაგრაფში გურსას ამოცანა გამოკვლეულია საშუალო მნიშვნელობის თვისების არაწრფივი ანალოგის საფუძველზე. ეს თვისება საშუალებას გვაძლევს დავამტკიცოთ ამოცანის ამოხსნადობა, როგორც რეგულარულ, ასევე განზოგადებულ ამოხსნათა კლასში.

მოცემული კვაზიწრფივი განტოლებისათვის საშუალო მნიშვნელობის თვისება შემდეგია: *მახასიათებელი ოთხკუთხედის მოპირდაპირე წვეროების ორდინატთაAჯამები ერთმანეთის ტოლია.*

მახასითებელი წირები მოცემულია (22) და

$$x=\omega(y), \quad 0\le y\le b\,, \quad \omega(0)=0 \tag{28}$$

განტოლებებით, სადაც $\omega\in C^2[0,b]$ - მოცემული ფუნქციაა. (24) განტოლებას y ცვლადის მიმართ $\forall\zeta>0$ -ის არ შეიძლება ერთზე მეტი ამოხსნა ჰქონდეს და ყველგან $[0,b]$ ინტერვალში შესრულებულია (18) უტოლობა. აგრეთვე, (24) განტოლებას $\forall\zeta\in\left[0,\,\omega(b)-b^2\right]$-სათვის აქვს უწყვეტად წარმოებადი ერთადერთი (25) ამოხსნა. ამასთან, $\omega(y)-y^2=\zeta$ და $y=W(\zeta)$ კვლავ ურთიერთშექცეული ფუნქციებია.

<u>გურსას ამოცანა</u>. *თავის განსაზღვრის არესთან ერთად ვიპოვოთ (1) განტოლების ამოხსნა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას*

$$u\big|_{x=y^2} = \upsilon(y), \quad 0 \le y \le a\,, \ \upsilon \in C^2[0,a],$$

ხოლო (28) წირის რკალი η - ოჯახის მახასიათებელია.

ამ პარაგრაფში ნაჩვენებია, რომ (28) წირის მოცემული რკალით შესაძლებელია η-ოჯახის ყველა იმ მახასიათებლის ცხადი სახით წარმოდგენა, რომელიც $x = y^2$ პარაბოლის წერტილებიდან გამოდის. ამით მთლიანად აღიწერება დასმული ამოცანის ამოხსნის განსაზღვრის არე.

<u>თეორემა.</u> *თუ შესრულებულია (18), (24) პირობები და $\omega(y) - y^2 = \zeta$ ფუნქციას აქვს ერთადერთი შექცეული $y = W(\zeta), W(0) = 0$, მაშინ გურსას ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ამოხსნათა კლასში; მისი ამოხსნა წარმოდგენილია (27) ფორმულით და განისაზღვრება მრუდწირულ ოთხკუთხედში, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი მახასიათებელი წირებით:*

$$x = y^2\,,\ x = \omega(y)\,,\ x = y^2 + \omega(y-a) + (y-a)^2\,,\ x = y^2 + \omega(b) - b^2\,.$$

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები ასახულია ავტორის შემდეგ ნაშრომებში:

1. M. Klebanskaya, On Cauchy and Goursat problems for the class of quasilinear mixed type equations. // *Tbilisi University Press, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.*, **10**(1995), No.1, 52-54. [83]
2. M. Klebanskaya, Darboux problem for hyperbolic equation with parabolic degeneracy. // *Tbilisi University Press, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua App. Math,* **12** (1997), No. 1-3, 12-14. [83]
3. M. Klebanskaya, On Singular Nonlinear Goursat Problem. // *Tbilisi University Press, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua App. Math*, **14** (1999), No. 1, 42-45. [83]
4. M. Klebanskaya, On One Nonlinear Analogue of the Mean Value Property and its Application to the Investigation of the Nonlinear Goursat Problem. // *Proc.A.Razmadze Math. Inst.*, **141**(2006), 67-74. [214]