Тбилисский Государственный Университет имени Иванэ Джавахишвили

на правах рукописи

НИНО РОКВА

ПОЛНЫЕ ПОЛУГРУППЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ СЕТКОЙ И X – ПОЛУРЕШЕТКАМИ КЛАССА $\Sigma_3(X,6)$

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тбилиси – 2006

Работа выполнена в Батумском Государственном
Университете имени Шота Руставели

Научный руководитель: **Я. Диасамидзе** - доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **М. Амаглобели** - доктор физико-математических наук,
профессор

Т. Кемоклидзе - кандидат физико-математических наук

Защита диссертации состоится “-------“ -----------------“ 2006 года в “------“часов, на заседании Диссертационного совета Ph.M.01.06 №6 Тбилисского Государственного Университета имени Иванэ Джавахишвили. Адрес: Тбилиси, ул. Университетская 2, высотный корпус университета, аудитория № 202.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Тбилисского Государственного Университета имени Иванэ Джавахишвили.

Автореферат разослан “------“------------------“ 2006 года.

Ученый секретарь Диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук **Г. Бареладзе**

Актуальность темы. Развитие теории бинарных отношений началось с возникновения математической логики, как одного из разделов математики. Основные понятия теории бинарных отношений были введены впервые в работах Де Моргана, Пирса и Фреге. Е.Шредер в своей книге «Алгебра логики» посвятил этой теории целую главу. В начале нашего века Уайтхед и Рассел внесли значительный вклад в эту теорию. В дальнейшем французский математик Риге модернизировал теорию бинарных отношений и начал использовать эту теорию для изучения упорядоченных множеств.

В настоящее время бинарные отношения широко применяются в математической лингвистике, биологии и разных областях математики. Теория бинарных отношений имеет важное приложение в теории автоматов. Геометрической интерпретацией теории бинарных отношений является теория графов.

В алгебре теория бинарных отношений имеет большое применение. В частности, отношения эквивалентности играют важную роль при отождествлении разных математических объектов. Связь между алгебраическими операциями и отношениями порядка дает дополнительную информацию об изучаемых математических объектах. Алгебра отношений и теория решеток тесно связаны друг с другом. Поэтому их проблемы можно решать принимая во внимание эту связь.

При изучении теории частичных отображений В.В. Вагнер пришёл к понятию полугруппы бинарных отношений. Поэтому В.В. Вагнер ещё раз модернизировал теорию бинарных отношений и придал этой теории её современный вид.

В теории полугрупп доказано, что любая полугруппа изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы всех бинарных отношений, определенной на некотором непустом множестве X. Этим и объясняется актуальность изучения полных полугрупп бинарных отношений, определенных сеткой и классом $\Sigma_3(X,6)$.

Интенсивное изучение полугруппы всех бинарных отношений на некотором непустом множестве X было начато ещё пятидесятых годах двадцатого века и связанно с именами известных алгебраистов В.В. Вагнер, К.А. Зарецкий, Б.М. Шаин, Ш. Шварц, Т. Тамура, А. Клиффорд, К. Батлер и другие. Над изучением полугрупп этого класса работали и в настоящее время работают грузинские алгебраисты Х. Девадзе, И. Диасамидзе, Ш. Махарадзе, З. Авалиани, О.Гиврадзе, Г.Фартенадзе и другие. В настоящее время полугруппам бинарных отношений посвящено более 130 работ.

Цель работы и предмет исследования. Основная цель диссертационной работы состоит в изучении абстрактных свойств полных полугрупп бинарных отношений, которые определяются сеткой и полными X-полурешетками объединений класса $\Sigma_3(X,6)$.

Объектами исследования являются как сетки и полные X-полурешетки объединений класса $\Sigma_3(X,6)$, так и полные полугруппы бинарных отношений, определенные сеткой и полными X-полурешетками объединений класса $\Sigma_3(X,6)$. Исследования показывают, что полные X-полурешетки объединений, несут значительную информацию о тех полных полугруппах бинарных отношений, которые они определяют.

Основные результаты и научная новизна

Дано определение сетки; По соответствующих диаграмм исследовано основные свойства сетки и полных X-полурешеток объединений класса $\Sigma_3(X,6)$.

В работе впервые рассматривается классы полных полугрупп бинарных отношений $B_X(D)$, определенные сеткой и полурешетками класса $\Sigma_3(X,6)$, где параметр D меняется на множестве полных X-полурешеток объединений рассматриваемых классов.

Описаны идемпотентные элементы полных полугрупп бинарных отношений соответствующих классов;

Выведено формула для подсчета полурешеток класса $\Sigma_3(X,6)$, когда X конечное множество;

Выведены формулы для подсчета всех идемпотентных элементов полных полугрупп бинарных отношений соответствующих классов;

Охарактеризовано максимальные подгруппы полугруппы $B_X(D)$;

Описаны регулярные элементы полных полугрупп бинарных отношений соответствующих классов;

Выведены формулы для подсчета всех регулярных элементов полных полугрупп бинарных отношений соответствующих классов;

Все эти вопросы изучены по свойством полных X-полурешеток объединений. Метод оказался эффективным. Результаты, полученные в работе, дает возможность по диаграмме той $X-$ полурешетки объединений, которая фиксировано заранее и которая определяет данный класс, делать выводы о многих абстрактных свойствах данной полугруппы.

Общая методика исследования. Известно, что идемпотентные элементы, односторонние единицы, регулярные элементы и максимальные подгруппы играют важную роль при изучении абстрактных свойств полугрупп. Поэтому, при изучении класса полных полугрупп бинарных отношений, большое внимание уделялось изучению вышеназванных вопросов.

В диссертационной работе, изучение свойств полугрупп осуществляется при помощи свойств полурешеток. Метод, который используется при изучении классов подполугрупп полугруппы всех бинарных отношений на множестве X, является новым и перспективным.

В работе используются аппараты и общие методы теории полугрупп, теории решеток, теорий множеств и комбинаторики.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, которая разлагается на шесть параграфов, из списка цитированной литературы и приложений. Общий объём работы составляет 136 страниц, отпечатанных на компьютере.

Содержание работы. Сначала приведем те основные определения и обозначения, которыми будем пользоваться в диссертации.

Пусть X - произвольное непустое множество. Под бинарным отношением на множестве X понимается произвольное подмножество декартово произведения множества X на X. Условие $(x,y)\in\alpha$, где $x,y\in X$, запишем в виде $x\alpha y$. Через B_X обозначается множество всех бинарных отношений на множестве X. Во множестве B_X умножение $(\circ)$ бинарных отношений α и β определяется следующим образом: $(x,y)\in\alpha\circ\beta$ в том и только в том случае, когда существует такой элемент $z\in X$, что $x\alpha z\beta y$.

Множество B_X, относительно операции умножения бинарных отношений будет полугруппой, которая называется полугруппой всех бинарных отношений на множестве X.

Пусть D есть некоторое множество подмножеств множества X, замкнутое относительно операции теоретико-множественного объединения элементов из D, т.е., если $D'\subseteq D$ и $D'\neq\varnothing$, то $\cup D'\in D$. В дальнейшем такое множество D будем называть полной X-полурешеткой объединений. Понятно, что $\cup D\in D$ будет наибольшим элементом множества D. В дальнейшем, этот элемент обозначаем символом $\breve{D}$, т.е. $\cup D=\breve{D}$.

Каждому отображению f множества X в D сопоставим бинарное отношение α_f на множестве X, которое определяется следующим образом: $\alpha_f=\bigcup\limits_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$. Множество всех таких бинарных отношений α_f $(f\colon X\to D)$ обозначим через $B_X(D)$. Можно доказать, что множество $B_X(D)$ относительно умножения бинарных отношений образует полугруппу. В дальнейшем эту полугруппу будем называть полной полугруппой бинарных отношений, определенной полной X -полурешеткой объединений.

$B_X(D)$ всегда будет подполугруппой полугруппы B_X. При этом, если $D = 2^X$, где через 2^X обозначено множество всех подмножеств множества X, то $B_X(D) = B_X$. Из этого следует, что каждое утверждение для полугруппы $B_X(D)$, которое доказано без каких - либо ограничений на параметр D, будет справедливым и для полугруппы B_X.

Если $|X| = n$ и $|D| = m$, то $|B_X(D)| = m^n$, через $|Z|$ обозначается мощность множества Z.

Пусть $x \in X$, $Y \subseteq X$ и $\alpha \in B_X(D)$. В дальнейшем будут использованы следующие обозначения:

1) $y\alpha = \{z \in X \mid y\alpha z\}$; $Y\alpha = \bigcup_{y \in Y} y\alpha$, $\Delta_Y = \{(y, y) \mid y \in Y\}$;

3) $X^* = 2^X \setminus \{\varnothing\}$, $V(D, \alpha) = \{Y\alpha \mid Y \in D\}$, $V(\alpha) = V(2^X, \alpha)$.

$V(D, \alpha)$ есть подполурешетка полурешетки D. Через $\varnothing$ обозначается пустое бинарное отношение.

Бинарное отношение α называется рефлексивным, если $\Delta_X \subseteq \alpha$, симметричным, если $\alpha = \alpha^{-1}$, антисимметричным, если $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \Delta_X$, транзитивным, если $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$ и идемпотентным, если $\alpha \circ \alpha = \alpha$.

Рефлексивное и транзитивное бинарное отношение называется отношением квазипорядка, а если оно также и симметрично, то отношением эквивалентности. Антисимметричное бинарное отношение квазипорядка называется отношением порядка.

Бинарное отношение ε полугруппы $B_X(D)$ является правой (левой) единицей полугруппы $B_X(D)$, если $\alpha \circ \varepsilon = \alpha$ $(\varepsilon \circ \alpha = \alpha)$ для всех α из $B_X(D)$.

Любое бинарное отношение α полугруппы $B_X(D)$ всегда можно представит в виде $\alpha = \bigcup_{T \in V[\alpha]} (Y_T^\alpha \times T)$, которое называют квазинормальным.

Отметим, что при квазинормальном представлении бинарного отношения α не все множества Y_T^α могут быть отличными от пустого множества. Но при таком представлении всегда выполняются следующие условия:

a) *$Y_T^\alpha \cap Y_{T'}^\alpha = \varnothing$, для любых $T, T' \in D$ и $T \neq T'$;*

b) *$X = \bigcup_{T \in V[\alpha]} Y_T^\alpha$.*

Пусть D есть полная $X-$полурешетка объединений, $\varnothing \neq D' \subseteq D$ и $N(D, D') = \{Z \in D \mid Z \subseteq Z' \text{ для любого } Z' \in D'\}$. Ясно, что $N(D, D')$ есть множество всех нижних граней непустого подмножества D' в полурешетке D. Если $N(D, D') \neq \varnothing$, то $\cup N(D, D') \in D$ и есть точная нижняя грань множества D' в D. Этот элемент обозначают символом $\Lambda(D, D')$.

Полная $X-$полурешетка объединений D является $XI-$полурешеткой объеди-нений, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

a) $\Lambda(D,D_t)\in D$ *для любого* $t\in\breve{D}$,

b) $Z=\bigcup\limits_{t\in Z}\Lambda(D,D_t)$ *для любого непустого элемента* Z *полурешетки* D.

В первом параграфе первой главы дано определение сетки, доказаны ее некоторые свойства. В частности:

Определение 1.1.1. *Подполурешетка* $Q=\{T_{ij}\subseteq X \mid i\in N_s, j\in N_k\}$, *где* $N_m=\{0,1,2,...,m\}$ $(m\geq 1)$, *полной* $X-$*полурешетки объединений* D *будем называть сеткой размера* $(s+1,\,k+1)$, *если она содержит два подмножество* $Q_1=\{T_{00},T_{10},\ldots,T_{s0}\}$, $Q_2=\{T_{00},T_{01},...,T_{0k}\}$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

a) $T_{00}\subset T_{10}\subset\ldots\subset T_{s0}$ *и* $T_{00}\subset T_{01}\subset T_{02}\subset\ldots\subset T_{0k}$;

b) $Q_1\cap Q_2=\{T_{00}\}$;

c) $T_{pq}\neq T_{ij}$, *если* $(p,q)\neq(i,j)$;

d) *элементы множеств* Q_1 *и* Q_2 *попарно несравнимы;*

e) $T_{ij}\cup T_{i'j'}=T_{pq}$, *если* $p=\max\{i,i'\}$ *и* $q=\max\{j,j'\}$.

Отметим, что диаграмма сетки Q изображена на Рис. 1.

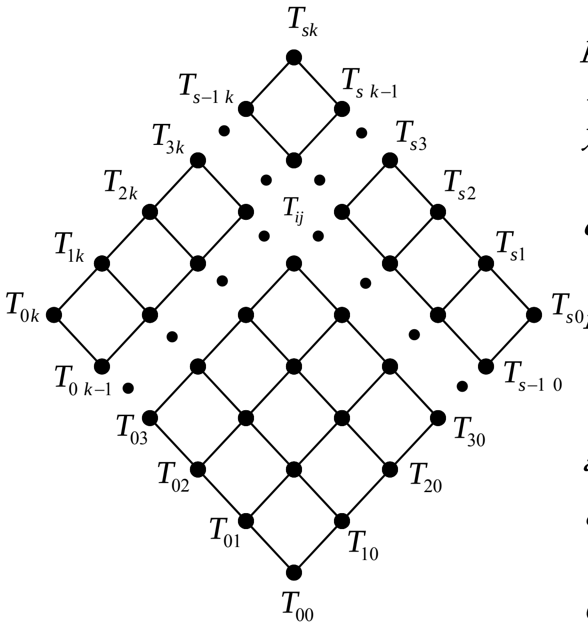


Рис. 1

Лемма 1.1.1. *Пусть* $X-$*полурешетка объдинений* Q *есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $T_{pq}\subseteq T_{ij}$ *в том и только в том случае, когда* $p\leq i$ *и* $q\leq j$;

b) $Q_1\cup Q_2$ *есть неприводимое порождающее множество сетки* Q;

c) $|Q|=(s+1)\cdot(k+1)$.

Лемма 1.1.2. *Если* φ *есть автоморфизм* сетки Q *и* $T_{ij}\in Q_{mn}$, *то* $\varphi(T_{ij})\in Q_{mn}$.

Лемма 1.1.3. *Множествами вида* $Q_{02}=\{T_{sk}\}$, $Q_{20}=\{T_{00}\}$, $Q_{12}=\{T_{1k},T_{2k},...,T_{s-1\,k},T_{s1},T_{s2},...,T_{s\,k-1}\}$, $Q_{21}=\{T_{01},T_{02},...,T_{0\,k-1},T_{10},T_{20},...,T_{s-1\,0}\}$, $Q_{11}=\{T_{0k},T_{s0}\}$ *и* $Q_{22}=Q\setminus(Q_{02}\cup Q_{20}\cup Q_{12}\cup Q_{21}\cup Q_{11})$ *исчерпываются все* $\theta-$*классы эквивалентности сетки* Q.

Теорема 1.1.1. *Если* φ *есть автоморфизм сетки* Q *размерности* $(s+1,k+1)$, *то* φ *совпадает хотя бы одному из автоморфизмов приведенному ниже:*

a) *если* $s\neq k$, *то* φ *есть тождественный автоморфизм;*

b) *если* $s=k$, *то* φ *либо тождественный автоморфизм, либо* $\varphi(T_{ij})=T_{ji}$ *для любого* $T_{ij}\in Q$.

Лемма 1.1.4. *Пусть* $X-$*полурешетка объединений* Q *есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *формальные равенства сетки* Q *имеют вид* $T_{pq} = P_{sk} \cup \bigcup_{T_{ij} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}} \varphi(T_{ij})$, *где* T_{pq} *есть произвольный элемент сетки* Q;

b) *элементы множества* $P_1 = \{P_{0k}, P_{1k}, \ldots, P_{s-1\,k}, P_{s0}, P_{s1}, \ldots, P_{s\,k-1}\}$ *являются базисными источниками сетки* Q;

c) *элементы множества* $P \setminus P_1$ *являются источниками полноты сетки* Q;

d) $Q^{\wedge} = Q_1 \cup Q_2$.

Теорема 1.1.2. *Если* Q *есть сетка, то она является* $XI-$*полурешеткой объединений.*

Во втором параграфе первой главы описаны регулярные элементы, идемпотентные элементы и правые единицы полугруппы $B_X(D)$,*определенной сеткой* Q; *Выведены формулы для подсчета этих элементов, когда* X *конечное множество; Приняты соответствующие следствия.*

Лемма 1.2.1. *Бинарное отношение* ε, *имеющее представление вида*

$$\varepsilon = \bigcup_{n=0}^{k-1}(P_{sn} \times T_{0\,n+1}) \cup \bigcup_{m=0}^{s-1}(P_{mk} \times T_{m+1\,0}) \cup \left(\left(P_{sk} \cup \bigcup_{\substack{0 \le m < s \\ 0 \le n < k}} P_{mn}\right) \times T_{00}\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{Q}} (\{t'\} \times f(t')),$$

где f *есть произвольное отображение множества* $X \setminus \breve{Q}$ *в сетке* Q, *всегда является правой единицей полугруппы* $B_X(Q)$.

Лемма 1.2.2. *Пусть* Q *есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *множество* $D^{\wedge} \setminus \{\varnothing\} = (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$ *не имеет предельных элементов в сетке* Q;

b) *элемент* $T_{ij} \neq \varnothing$ *сетки* Q *только в том случае является непредельным элементом множества* $\ddot{Q}_{T_{ij}}$ *в сетке* Q, *когда* $T_{ij} \in Q_1 \cup Q_2$;

Теорема 1.2.1. *Пусть подполурешетка* Q *полной* $X-$*полурешетки объединений* D *есть сетка. Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее такое квазинормальное представление вида* $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij})$, *что* $Q = V(D, \alpha)$, *является регулярным элементом полугруппы* $B_X(D)$ *в том и только в том случае, когда для некоторого* α *- изоморфизма* φ *полурешетки* Q *на некоторой подполурешетке* D' *полурешетки* D *выполняются следующие условия:*

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{0k}) \cap \varphi(T_{s0})$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{01}),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{02}), \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{0k})$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{10}),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{20}), \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{s0})$,

$Y_{ij}^{\alpha} \cap \varphi(T_{ij}) \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$.

Теорема 1.2.2. *Пусть подполурешетка* Q *полной* $X-$*полурешетки объединений* D *есть сетка. Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее такое квазинормальное представление вида* $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij})$, *что*

$Q=V(D,\alpha)$, *является идемпотентным элементом полугруппы* $B_X(D)$ *в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{s0}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02}, ..., Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup ... \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq T_{20}, ..., Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup ... \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq T_{s0}$,

$Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$.

Теорема 1.2.3. *Пусть подполурешетка* Q *полной* X *– полурешетки объединений* D *есть сетка. Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее такое квазинормальное представление вида* $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij})$, *что* $Q=V(D,\alpha)$, *является правой единицей полугруппы* $B_X(Q)$ *в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{s0}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02}, ..., Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup ... \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq T_{20}, ..., Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup ... \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq T_{s0}$,

$Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$.

Лемма 1.2.3. *Пусть* X *– полурешетка объединений есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *элементы множества* $\{T_{s0} \cap T_{0k}, X_{01}, X_{02}, ..., X_{0k}, X_{10}, X_{20}, ..., X_{s0}, X \setminus T_{sk}\}$ *попарно не пересекаются;*

b) $X = (X \setminus T_{sk}) \cup (T_{s0} \cap T_{0k}) \cup \bigcup_{j=1}^{k} X_{0j} \cup \bigcup_{i=1}^{s} X_{i0}$.

Теорема 1.2.4. *Пусть подполурешетка* Q *полурешетки* D *есть сетка. Если сетка* Q *и полурешетка* $D' = \{\overline{T}_{ij} \mid i = 0,1,...,s;\ j = 0,1,...,k\}$ - α *-изоморфны и* $|\Omega(Q)| = m_0$, *то справедливы следующие утверждения:*

$$a)\quad |R(D')| = m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} \left((j+1)^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus (\overline{T}_{0\ j-1} \cup \overline{T}_{s0})\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus (\overline{T}_{0\ j-1} \cup \overline{T}_{s0})\right|} \right) \cdot \prod_{i=1}^{s} \left((i+1)^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus (\overline{T}_{i-1\ 0} \cup \overline{T}_{0k})\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus (\overline{T}_{i-1\ 0} \cup \overline{T}_{0k})\right|} \right) \cdot |Q|^{|X \setminus \overline{T}_{sk}|},$$

если $s \neq k$ и

$$b)\quad |R(D')| = 2 \cdot m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} \left((j+1)^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus (\overline{T}_{0\ j-1} \cup \overline{T}_{s0})\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus (\overline{T}_{0\ j-1} \cup \overline{T}_{s0})\right|} \right) \cdot \prod_{i=1}^{s} \left((i+1)^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus (\overline{T}_{i-1\ 0} \cup \overline{T}_{0k})\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus (\overline{T}_{i-1\ 0} \cup \overline{T}_{0k})\right|} \right) \cdot |Q|^{|X \setminus \overline{T}_{sk}|},$$

если $s = k$.

Следствие 1.2.1. *Пусть* X *– полурешетка объединений* Q *есть сетка. Если через* $E_X^{(r)}(Q)$ *обозначено множество всех правых единиц полугруппы* $B_X(Q)$, *то число* $|E_X^{(r)}(Q)|$ *всех правых единиц полугруппы* $B_X(Q)$ *можно вычислить по формуле*

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right|=\prod_{j=1}^{k}\left((j+1)^{\left|\bar{T}_{0j}\setminus\bar{T}_{s\,j-1}\right|}-j^{\left|\bar{T}_{0j}\setminus\bar{T}_{s\,j-1}\right|}\right)\cdot\prod_{i=1}^{s}\left((i+1)^{\left|\bar{T}_{i0}\setminus\bar{T}_{i-1\,k}\right|}-i^{\left|\bar{T}_{i0}\setminus\bar{T}_{i-1\,k}\right|}\right)\cdot|Q|^{\left|X\setminus\bar{T}_{sk}\right|}.$$

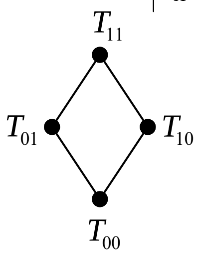


Рис. 2

Следствие 1.2.2. *Пусть подполурешетка* $Q=\{T_{00},T_{01},T_{10},T_{11}\}$ *полурешетки* D *есть сетка (см. Рис. 2). Если сетка* Q *и полурешетка* $D'=\{\bar{T}_{00},\bar{T}_{01},\bar{T}_{10},\bar{T}_{11}\}$ *изоморфны и* $|\Omega(Q)|=m_0$, *то справедливо следующее равенство*

$$|R(D')|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{|\bar{T}_{01}\setminus\bar{T}_{10}|}-1\right)\cdot\left(2^{|\bar{T}_{10}\setminus\bar{T}_{01}|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\bar{T}_{11}|}.$$

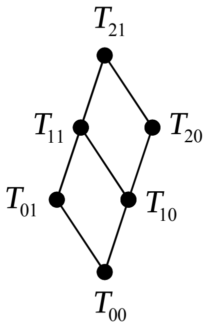


Рис. 3

Следствие 1.2.3. *Пусть подполурешетка* $Q=\{T_{00},T_{01},T_{10},T_{11}\}$ *полурешетки* D *есть сетка (см. Рис.3). Если сетка* Q *и полурешетка* $D'=\{\bar{T}_{00},\bar{T}_{01},\bar{T}_{10},\bar{T}_{11},\bar{T}_{20},\bar{T}_{21}\}$ *изоморфны и* $|\Omega(Q)|=m_0$, *то справедливо следующее равенство*

$$|R(D')|=m_0\cdot\left(2^{|\bar{T}_{01}\setminus\bar{T}_{20}|}-1\right)\cdot\left(2^{|\bar{T}_{10}\setminus\bar{T}_{01}|}-1\right)\cdot\left(3^{|\bar{T}_{20}\setminus\bar{T}_{11}|}-2^{|\bar{T}_{20}\setminus\bar{T}_{11}|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\bar{T}_{21}|}.$$

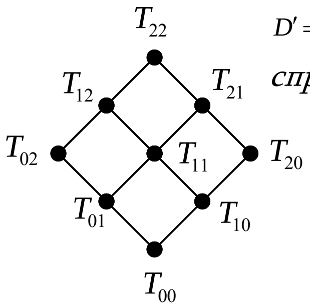


Рис. 4

Следствие 1.2.4. *Пусть* подполурешетка $Q=\{T_{00},T_{01},T_{10},T_{02},T_{11},T_{20},T_{12},T_{21},T_{22}\}$ полурешетки D *есть сетка (см.Рис.4). Если сетка* Q *и полурешетка* $D'=\{\bar{T}_{00},\bar{T}_{01},\bar{T}_{10},\bar{T}_{02},\bar{T}_{11},\bar{T}_{20},\bar{T}_{12},\bar{T}_{21},\bar{T}_{22}\}$ *изоморфны и* $|\Omega(Q)|=m_0$, *то справедливо следующее равенство*

$$|R(D')|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{|\bar{T}_{01}\setminus\bar{T}_{20}|}-1\right)\cdot\left(2^{|\bar{T}_{10}\setminus\bar{T}_{01}|}-1\right)\cdot$$
$$\left(3^{|\bar{T}_{20}\setminus\bar{T}_{11}|}-2^{|\bar{T}_{20}\setminus\bar{T}_{11}|}\right)\cdot\left(3^{|\bar{T}_{02}\setminus\bar{T}_{11}|}-2^{|\bar{T}_{02}\setminus\bar{T}_{11}|}\right)\cdot 9^{|X\setminus\bar{T}_{22}|}.$$

В *первом* параграфе главы второй дано определение класса $\Sigma_3(X,6)$; Доказаны некоторые основные свойства полурешеток данного класса; Дано правило для ее строения и когда X конечное множество, получено формула, которым определяется мощность класса $\Sigma_3(X,6)$; Найдены все подполурешетки; Доказано, что полугруппы бинарных отношений $B_X(D)$, которые определены $X-$полурешетками объединений, принадлежащих классу $\Sigma_3(X,6)$, не имеют правых единиц; Найдены все XI-подполурешетки полурешетки D.

Через $\Sigma(X,m)$ обозначается класс $X-$полурешеток объединений, мощность, которой равен m. Если $D\in\Sigma(X,m)$, то скажем, что полугруппа $B_X(D)$ определенно полурешетками класса $\Sigma(X,m)$.

Пусть, $\alpha\in B_X(D)$. Отметим, что квазинормальное представление любого элемента α полугруппы $B_X(D)$, когда $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ имеет вид

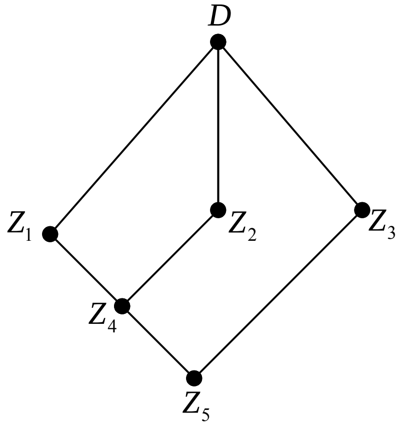


Рис. 5

$$\alpha = \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right),$$

$Y_i\,(i = 1,2,\ldots,5)$ являются некоторыми попарно непересекающимися подмножествами множества X, объединение которых равно X.

Пусть X и $\Sigma_3(X,6)$ соответственно являются произвольным непустым множеством и таким классом между собой изоморфных X – полурешеток объединений, каждый элемент которого изоморфна некоторой X – полурешетке объединенный $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&Z_5 \subset Z_4 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_5 \subset Z_4 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_5 \subset Z_3 \subset \breve{D}, \\
&Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing, \qquad \ldots(1)\\
&Z_1 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_2 \neq \varnothing,
\end{aligned}$$

Полурешетка, удовлетворяющая условий (1) изображена на Рис. 1.

Если $C(D) = \{P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0\}$ есть некоторое семейство попарно непересекающихся подмножеств множества X, а φ есть такое отображение полурешетки D на множество $C(D)$, что $\varphi(\breve{D}) = P_0$, $\varphi(Z_i) = P_i$ для любого $i = 1,2,3,4,5$. Тогда формальные равенства для элементов заданной полурешетки имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \\
&Z_1 = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \\
&Z_2 = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \qquad (2)\\
&Z_3 = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5, \\
&Z_4 = P_0 \cup P_3 \cup P_5, \\
&Z_5 = P_0.
\end{aligned}$$

Доказывается, что при представлении элементов полурешетки D в виде (2), среди параметров $P_i\,(i = 0,1,2,3,4,5)$ существуют такие, которые для данной полурешетки D не могут быть пустыми множествами. Такие множества P_i $(0 < i \leq 5)$ называем базисными источниками, а те множества P_j $(0 \leq j \leq 5)$, которые могут быть и пустыми множествами, называем источниками полноты.

Доказывается, что число покрывающих элементов прообраза базисного источника при отображении φ всегда равно единице, а число покрывающих элементов прообраза источника полноты, при отображении φ, или не существуют, или всегда больше единицы. Отметим, что множество P_0 всегда считается источником полноты.

При наших условиях $|P_1| \geq 1$, $|P_2| \geq 1$, $|P_3| \geq 1$, $|C| \geq 0$, $|P_4| \geq 0$, $|P_5| \geq 0$, т.е. элементы P_1, P_2 и P_3 являются базисными источниками, а P_0, P_4, и P_5 суть источники полноты X – полурешеток объединений D.

Лемма 2.1.1. *Пусть X – конечное множество $|X| = n \geq 3$ и $|\Sigma_3(X,6)| = s$. Тогда*
$$s = \frac{1}{2} \cdot \left(7^n - 3 \cdot 6^n + 3.5^n - 4^n\right) \cdot$$

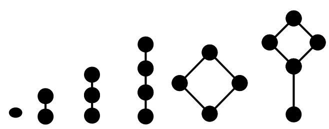
Полученная формула дает интересных результатов при различных n, в частности: Если $n = 3,4,5,6,7,8,9,10$ тогда мощность класса $\sum_3(X,6)$ соответственно равняется числам $3,66,915,10230,100863,916146,7858875,64662510$, а число элементов в каждой полугруппе равняется следующим числам $216,1296,7776,46656,279936,1679616,10077696,60466176$.

Лемма 2.1.3. *Пусть* $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,6)$. *Полугруппа* $B_X(D)$ *не имеет правых единиц.*

Лемма 2.1.4. *Пусть* $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,6)$. *Тогда все XI – подполурешетки полурешетки D исчерпываются полурешетками вида:*

1) $\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$;
2) $\{Z_5,Z_4\}$, $\{Z_5,Z_3\}$, $\{Z_5,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_1\}$, $\{Z_4,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_1\}$, $\{Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_1,\breve{D}\}$;
3) $\{Z_5,Z_4,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$;
4) $\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$;
5) $\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$;
6) $\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$.

Соответствующие диаграммы имеют вид:



1 2 3 4 5 6

Рис. 6

Во втором параграфе главы второй дано описание идемпотентных элементов полугруппы $B_X(D)$, когда $Z_5=\varnothing$; Выведены формулы для подсчетов всех идемпотентных элементов; Те же вопросы решены в случае, когда $Z_5\neq\varnothing$; Изучаются максимальные подгруппы идемпотентных элементов полугруппы $B_X(D)$, определенной полурешеткой класса $\Sigma_3(X,6)$.

Теорема 2.2.1. *Если* $D\in\Sigma(X,6)$ *и* $Z_5=\varnothing$, *то* бинарное *отношение* $\alpha\in B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление, является идемпотентным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

1) $\alpha=\varnothing$ *или* $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^\alpha\neq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$ *и* $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$;

2) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$,

$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

3) $\alpha = (Y_5^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_4^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $T \in \{Z_1, Z_2\}$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

4) $\alpha = (Y_5^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_3, Z_2\}$, $T' \in \{Z_4, Z_2, Z_1\}$, $Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

5) $\alpha = (Y_5^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$ $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$;

Теорема 2.2.2. *Пусть* X *– конечное множество и* $Z_5 = \varnothing$. *Если* I *есть множество всех идемпотентных элементов полугруппы* $B_X(D)$, *то число всех идемпотентных элементов вычисляется по следующей формула:*

$$
\begin{aligned}
|I| = {} & 1 + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \\
& + \left(2^{|\breve{D}|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_1|} + \\
& + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_1 \cap Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

Теорема

2.2.3. *Пусть* $D \in \Sigma_3(X, 6)$ *и* $Z_5 \neq \varnothing$. *Тогда* $\alpha \in B_X(D)$ *бинарное отношение, имеющее квазинормальное представление вида (1), является идемпотентным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

1) $\alpha = Y_T^\alpha \times T$ *для некоторых* $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T, T' \in D$, $T \subset T'$, $Y_T^\alpha \supseteq T$ *и* $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

4) $\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_1, Z_2\}$, $Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_5, Z_4\}$, $T' \in \{Z_3, Z_2\}$, $T'' \in \{Z_4, Z_2, Z_1\}$, $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

6) $\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$ *для некоторых* $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$.

Теорема 2.2.4. *Пусть X – конечное множество и $Z_5 \neq \varnothing$. Если I есть множество всех идемпотентных элементов полугруппы $B_X(D)$, то число $|I|$ можно вычислять по формуле:*

$$
\begin{aligned}
|I| &= 6+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\
&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\\
&+2\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\left(2^{|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

Символом $G_X(D,\varepsilon)$ обозначается максимальная подгруппа полугруппы $B_X(D)$, имеющей своей единицей идемпотентное бинарное отношение ε полугруппы $B_X(D)$.

Теорема 2.2.5. Для любого идемпотентного бинарного отношения ε полугруппы $B_X(D)$, подгруппа $G_X(D,\varepsilon)$ полугруппы $B_X(D)$ является группой порядка не больше двух.

В третьем параграфе второй главы при $Z_5=\varnothing$ дано описание всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$; Выведены формулы для подсчета всех регулярных элементов, в частности:

Теорема 2.3.1. *Пусть $D=\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,6)$ и $Z_5=\varnothing$. Тогда бинарное отношение α полугруппы $B_X(D)$, имеющее квазинормальное представление, является регулярным элементом данной полугруппы, в том и только в том случае, когда существует полный $\alpha-$изоморфизм φ полурешетки $V(D,\alpha)$ на некоторой подполурешетке D' полурешетки D, удовлетворяющий хотя бы одному из условии, приведенных ниже:*

1) $\alpha=\varnothing$;
2) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^\alpha\neq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$ $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$;
3) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;
4) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;
5) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Y_T^\alpha\cap Y_{T'}^\alpha$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

б) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$ $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$;

Взаимно однозначное отображение φ *между полными* $X-$ *полурешетками объединений* D' *и* D'' *называют полным изоморфизмом, если для каждого непустого подмножества* D_1 *полурешетки* D' *выполняется условие* $\varphi(\cup D_1)=\bigcup\limits_{T'\in D_1}\varphi(T')$.

Пусть $\alpha\in B_X(D)$, *полный изоморфизм* φ *между полными полурешетками объединений* $V(D,\alpha)$ *и* D' *есть полный* $\alpha-$*изоморфизм, если* $\varphi(\varnothing)=\varnothing$ *при* $\varnothing\in V(D,\alpha)$ *и* $\varphi(T)\alpha=T$ *для любого* $T\in V(D,\alpha)$.

Пусть Q *и* D' *соответственно суть некоторые* XI *и* $X-$*подполурешетки полной* $X-$*полурешетки объединений* D. $R_\varphi(Q,D')$ *есть такое подмножество полугруппы* $B_X(D)$, *что* $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$ *только в том случае, когда для элементов* α *и* φ *выполняются следующие условия:*

a) *бинарное отношение* $\alpha-$*регулярно;*

b) $V(D,\alpha)=Q$;

c) φ *есть полный* $\alpha-$ *изоморфизм между полными полурешетками объединений* Q *и* D'.

Если $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$, *то для полного* $\alpha-$*изоморфизма между полурешетками* $Q=V(D,\alpha)$ *и* D' *всегда берётся полный автоморфизм* φ. $\Omega(Q)$ есть множество всех таких $XI-$подполурешеток полной $X-$полурешетки объединений D, что $Q'\in\Omega(Q)$ только в том случае, когда существует некоторый полный изоморфизм между полурешетками Q' и Q.

По определению $\Sigma'_{XI}(D)$ *обозначает такое подмножество всех подполурешеток* $X-$*полурешетки объединений* D, *каждый элемент которого при* $\varnothing\in D$ *есть образ некоторого полного* $\alpha-$*изоморфизма некоторой* $XI-$*подполурешетки* $X-$*полурешетки объединений* D, *содержащий пустое множество, или обозначает такое подмножество всех подполурешеток* $X-$ *полурешетки объединений* D, *каждый элемент, которого есть образ некоторого полного* $\alpha-$*изоморфизма некоторой* $XI-$*подполурешетки* $X-$*полурешетки объединений* D. $\vartheta_{XI}\subseteq\Sigma'_{XI}(D)\times\Sigma'_{XI}(D)$; $D'\vartheta_{XI}D''$ *только в том случае, когда существует некоторый полный изоморфизм* φ *между полурешетками* D' *и* D''; *бинарное отношение* ϑ_{XI} *есть отношение эквивалентности на множестве* $\Sigma'_{XI}(D)$; *символом* $Q\vartheta_{XI}$ *обозначается тот* $\vartheta_{XI}-$*класс эквивалентности* ϑ_{XI} *множества* $\Sigma'_{XI}(D)$, *который содержит элемент* $Q\in\Sigma'_{XI}(D)$ *и* $R^*(Q)=\bigcup\limits_{D'\in Q\vartheta_{XI}}R(D')$.

По требованиям теоремы 2.3.1.имеем:

$Q_1=\{\varnothing\}$; $Q_2=\{\varnothing,T\}$, где $T\in D$;

$Q_3=\{\varnothing,T,T'\}$, где $T,T'\in D$ и $T\subset T'$;

$Q_4 = \left\{\varnothing, Z_4, T, \breve{D}\right\}$,где $T \in \left\{Z_1, Z_2\right\}$;

$Q_5 = \left\{\varnothing, T, T', \breve{D}\right\}$, где $T \in \left\{Z_3, Z_2\right\}$ и $T' \in \left\{Z_1, Z_2, Z_4\right\}$;

$Q_6 = \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$.

Обозначаем через R множество всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$. Понятно, что

$$|R| = \left|R^*(Q_1)\right| + \left|R^*(Q_2)\right| + \left|R^*(Q_3)\right| + \left|R^*(Q_4)\right| + \left|R^*(Q_5)\right| + \left|R^*(Q_6)\right|.$$

Число подполурешеток $Q_i, i = 1,\ldots,6$, которые являются изоморфными существующих XI-полурешеток, обозначаем через m_0, $|\Omega(Q)| = m_0$. Если $Z_5 = \varnothing$, среди них рассматриваем только те, которые содержат пустое множество.

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 1) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_1 = \{\varnothing\}$; тогда

$Q_1\vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing\}\right\}$ и $\left|R^*(Q_1)\right| = 1$.

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 2) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_2 = \{\varnothing, T'\}$, тогда

$$Q_2\vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing, Z_4\}, \{\varnothing, Z_3\}, \{\varnothing, Z_2\}, \{\varnothing, Z_1\}, \{\varnothing, \breve{D}\}\right\},$$

т.е. $m_0 = 5$ и поэтому $\left|R^*(Q_2)\right| = 5 \cdot \left(2^{|\breve{D}|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$.

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 3) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_3 = \{\varnothing, T', T''\}$ тогда

$$Q_3\vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing, Z_4, Z_2\}, \{\varnothing, Z_4, Z_1\}, \{\varnothing, Z_4, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_3, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_2, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}\right\},$$

значит $m_0 = 6$. Выясняем, имеют ли пересечения элементы множества $Q_3\vartheta_{XI}$; В случае пересечении определяем необходимые и достаточные условия; находим число элементов существующих в пересечении.

Лемма 2.3.1. Пусть $D \in \Sigma_3(X, 6)$ и $Z_5 = \varnothing$, тогда место имеет равенство:

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right| &= \left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\}\right| + \left|R\left\{\varnothing, Z_3, \breve{D}\right\}\right| + \left|R\left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}\right| + \left|R\left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\}\right| - \\ &- \left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}\right| - \left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\}\right|\end{aligned}$$

Лемма 2.3.2. Пусть $D \in \Sigma_3(X, 6)$, $Z_5 = \varnothing$ и $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, тогда место имеет равенство:

а) $\alpha \in R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия: $Y_5^\alpha \supseteq \varnothing, Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

б) $\alpha \in R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия: $Y_5^\alpha \supseteq \varnothing, Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

Лемма 2.3.2. Пусть $D \in \Sigma_3(X, 6)$, $Z_5 = \varnothing$.Если X конечное множество, тогда имеют место равенство:

а) $\left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}\right| = 6 \cdot \left(2^{|Z_2|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$;

b) $\left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\}\right| = 6 \cdot \left(2^{|Z_1|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$.

Теорема 2.3.2. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 = \varnothing$.Если X конечное множество, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_3)\right| = 6 \cdot \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 6\left(2^{|Z_3|} - 1\right) . \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) . 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ + 6 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 6 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 4) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_4 = \{\varnothing, Z_4, T, \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$ и

$Q_4 \vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_4, Z_1, \breve{D}\}\right\}$, т.е. $m_0 = 2$.

Лемма 2.3.4. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$ и $Z_5 = \varnothing$, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_4)\right| = \left|R\{\varnothing, Z_4, Z_2, \breve{D}\}\right| + \left|R\{\varnothing, Z_4, Z_1, \breve{D}\}\right|$$

Теорема 2.3.3. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 = \varnothing$. Если X конечное множество, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_4)\right| = 2 \cdot \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ + 2 . \left(2^{|Z_4|} - 1\right) . \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) . \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) . 4^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 5) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_5 = \{\varnothing, T, T', \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_3, Z_2\}$, $T' \in \{Z_1, Z_2, Z_4\}$.

$Q_5 \vartheta_{XI} = \left\{\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right\}$,

т.е. $m_0 = 4$, а число всех автоморфизмов полурешетки Q, $q = 2$. Выяснено, когда является пустым пересечение элементов множества $Q_5 \vartheta_{XI}$; В случае пересечении определяем необходимые и достаточные условия; находим число элементов существующих в пересечении.

Лемма 2.3.5. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$ и $Z_5 = \varnothing$, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_5)\right| = \left|R\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\right| + \left|R\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\}\right| + \left|R\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\}\right| + + \left|R\{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\right| - \\ - \left|R\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\right| - \left|R\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\}\right|.$$

Лемма 2.3.6. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6), Z_5 = \varnothing$ и $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом. Если X конечное множество, тогда имеет место равенство:

$\alpha \in R\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_2, Z, \breve{D}\}$, где $Z \in \{Z_1, Z_2\}$ в том и только в том случае, когда

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_5^\alpha \supseteq Z_3 \cap Z,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z,\ Y_T^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing.$$

Лемма 2.3.7. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 = \varnothing$. Если X конечное множество, тогда имеют место равенство:

а) $\left|R\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\}\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$;

б) $\left|R\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\}\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$.

Теорема 2.3.4. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 = \varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условию 5) теоремы 2.3.1, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_5)\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + 8 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 6) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_6=\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, в этом случае имеем $Q_6\vartheta_{XI}=\{\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}\}$, т.е. $m_0=1$; Число всех автоморфизмов полурешетки Q равняется двум, $q=2$.

Теорема 2.3.5. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5=\varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условию 5) теоремы 2.3.1, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_6)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Теорема 2.3.6. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5=\varnothing$. Если X конечное множество тогда число всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$можно вычислять по формуле:

$$\begin{aligned}|R|&=1+5\cdot\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+6\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+6\cdot\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+6\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

В четвертом параграфе второй главы рассмотрен случай, когда $Z_5\neq\varnothing$. Дано описание все возможных регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$; Выведены формулы для подсчета всех регулярных элементов, в частности:

Теорема 2.4.1. *Пусть* $D=\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \breve{D}\}\in\Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5\neq\varnothing$. *Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление, является регулярным элементом данной полугруппы, в том и только в том случае, когда существует полный* $\alpha-$*изоморфизм* φ *полурешетки* $V(D,\alpha)$ *на некоторой подполурешетке* D' *полурешетки* D, *удовлетворяющий хотя бы одному из условии, приведенных ниже:*

1) $\alpha=Y_T^\alpha\times T$, где $T\in D$;

2) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$,где $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$; $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$ и $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$

3) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, где $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$ и $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, где $T\in\{Z_1, Z_2\}$, $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ и $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$.

5) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, где $T\in\{Z_5, Z_4\}$, $T'\in\{Z_3, Z_2\}$, $T''\in\{Z_4, Z_2, Z_1\}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$ и $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, где $Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$,

$Y_1^\alpha \cap \varphi(Z_1) \neq \varnothing$ и $Y_2^\alpha \cap \varphi(Z_2) \neq \varnothing$.

Дан подсчет всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$ относительно тех подполурешеток Q_i, $i = 1,2,\ldots,6$ которые изоморфны существующих XI-полурешеток и которые не содержат пустое множество. По требованиям теоремы 2.4.1.имеем

$Q_1 = \{T\}$; $Q_2 = \{T,T'\}$, где $T,T' \in D$ и $T \subset T'$;

$Q_3 = \{T,T',T''\}$,где $T,T',T'' \in D$ и $T \subset T' \subset T''$;

$Q_4 = \{Z_5, Z_4, T, \breve{D}\}$,где $T \in \{Z_1, Z_2\}$;

$Q_5 = \{T,T',T'',\breve{D}\}$, где $T \in \{Z_5, Z_4\}, T' \in \{Z_3, Z_2\}$ и $T'' \in \{Z_1,Z_2,Z_4\}$;

$Q_6 = \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.

Понятно, что

$$|R| = |R^*(Q_1)| + |R^*(Q_2)| + |R^*(Q_3)| + |R^*(Q_4)| + |R^*(Q_5)| + |R^*(Q_6)|.$$

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 1) теоремы 2.4.1. соответствует $Q_1 = \{T\}$. В этом случае имеем

$Q_1\vartheta_{XI} = \{\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\}$, т.е. $m_0 = 6$ и $|R^*(Q_1)| = 6$.

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 2) теоремы 2.4.1. соответствует $Q_2 = \{T,T'\}$, где $T \subset T'$.В этом случае имеем,

$Q_2\vartheta_{XI} = \left\{ \begin{matrix} \{Z_5,Z_4\},\{Z_5,Z_3\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2\}, \\ \{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\} \end{matrix} \right\}$, т.е. $m_0 = 11$, число всех автоморфизмов полурешеток Q_2 равняется одному, т.е. $q = 1$.

Лемма 2.4.1. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6), Z_5 \neq \varnothing$ и $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 2) теоремы 2.4.1. Если X конечное множество, тогда имеет место равенство:

$$|R^*(Q_2)| = |R\{Z_5,\breve{D}\}|.$$

Теорема 2.4.2. Пусть $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 \neq \varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условию 2) теоремы2.4.1, тогда место имеет равенство:

$$|R^*(Q_2)| = 11 \cdot \left(2^{|X \setminus Z_5|} - 2^{|X \setminus \breve{D}|}\right).$$

Относительно тех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 3) теоремы 2.4.1, $Q_3 = \{T,T',T''\}$, где $T \subset T' \subset T''$. Соответственно, в этом случае имеем,

$$Q_3\vartheta_{XI} = \left\{ \begin{matrix} \{Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_5,Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}, \\ \{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\} \end{matrix} \right\},$$

т.е. $m_0 = 8$, а число всех автоморфизмов полурешеток Q_3 равняется одному, $q = 1$.

Установлено, когда является пустым пересечение элементов множества $Q_3\vartheta_{XI}$; В случае пересечении определяем необходимые и достаточные условия; находим число элементов существующих в пересечении.

Лемма 2.4.2. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6), Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 3) теоремы 2.4.1, тогда место имеет равенство:

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right|=&\left|R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}\right|-\\&-\left|R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}\right|-\left|R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}\right|\end{aligned}$$

Лемма 2.4.3. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 3) теоремы 2.4.1,тогда

а) $\alpha\in R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}$ только и только тогда, когда

$Y_T^\alpha\supseteq Z_5, Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

б) $\alpha\in R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}$ только и только тогда, когда

$Y_T^\alpha\supseteq Z_5, Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$

Лемма 2.4.3. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 3) теоремы 2.4.1,тогда справедливы равенства:

а) $\left|R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}\right|=8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}$;

в) $\left|R\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}\right|=8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}$.

Теорема 2.4.3. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условию 3) теоремы 2.4.1, тогда место имеет равенство:

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right|=&8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right).\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

Относительно тех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условиям 4) теоремы 2.4.1, $Q_4=\{Z_5,Z_4,T,\breve{D}\}$, где $T\in\{Z_1,Z_2\}$. Соответственно, в этом случае имеем,

$Q_4\vartheta_{XI}=\{\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}\}$, т.е. $m_0=2$, число автоморфизмов и в этом случае равен одному.

Лемма 2.4.5. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 4) теоремы 2.4.1,тогда

$$\left|R^*(Q_4)\right|=\left|R\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}\right|$$

Теорема 2.4.4. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 4) теоремы 2.4.1, тогда место имеет равенство:

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_4)\right|=&2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\\&+2.\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right).\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right).\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right).4^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

Относительно тех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условиям 5) теоремы 2.4.1, $Q_5=\{T,T',T'',\breve{D}\}$, где $T\in\{Z_5,Z_4\}$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}, T''\in\{Z_1,Z_2,Z_4\}$. Соответственно, в этом случае имеем,

$$Q_5\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right\},$$

т.е. $m_0=5$, число автоморфизмов $q=2$. Установлено, когда является пустым пересечение элементов множества $Q_5\vartheta_{XI}$; В случае пересечении определяем необходимые и достаточные условия; находим число элементов существующих в пересечении.

Лемма 2.4.6. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6), Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 5) теоремы 2.4.1,тогда

$$\begin{gathered}\left|R^*(Q_5)\right|=\left|R\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right|+\left|R\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right|-.\\ -\left|R\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\right|-\left|R\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right|\end{gathered}$$

Лемма 2.4.7. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6), Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 5) теоремы 2.4.1,тогда

$\alpha\in R\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_2,Z,\breve{D}\}$, где $Z\in\{Z_1,Z_2\}$ только и только тогда, когда выполняются условия:

$$Y_5^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha\supseteq Z_3\cap Z,\ Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_5^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ \ Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing.$$

Лемма 2.4.8. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6), Z_5\neq\varnothing$ и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 5) теоремы 2.4.1,тогда место имеют равенства:

а) $\left|R\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}\right|=10\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$;

в) $\left|R\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\}\cap R\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}\right|=10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}$.

Теорема 2.4.5. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 5) теоремы 2.4.1, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_5)\right|=10\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Относительно тех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условиям 6) теоремы 2.4.1, $Q_6=\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$.Соответственно $Q_6\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\right\}$. Число всех автоморфизмов в этом случае $q=2$.

Теорема 2.4.6. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$. Если X конечное множество и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий условиям 6) теоремы 2.4.1, тогда место имеет равенство:

$$\left|R^*(Q_6)\right|=2\cdot\left(2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Теорема 2.4.7. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6), Z_5\neq\varnothing$. Если X конечное множество тогда число всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$можно вычислять по формуле:

$$
\begin{aligned}
|R| = {} & 6+11\cdot\left(2^{|X\setminus Z_5|}-2^{|X\setminus\breve{D}|}\right)+8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|D\setminus Z_1|}-2^{|D\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot \\
& \cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +10\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+ \\
& +2\cdot\left(2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

N

В конце диссертации дано приложение, где приведено три примера, в которых построены полугрупп $B_X(D)$, указаны их идемпотентные и регулярные элементы и показано, что практические и теоретические расчеты совпадают.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в работе результаты и приведенные методы могут быть использованы в дальнейшем для исследований, как по полугруппам, так и по теории решеток.

Апробация работы. Результаты, полученные в работе, в разные времена докладывались на семинарах кафедры математики Батумского государственного университета имени Ш. Руставели.

По теме диссертации опубликованы следующие статьи

1. N.Rokva-Idempotent Elements of Semigroup $B_X(D)$ Defined by X-Semilattices of Class $\Sigma_3(X,6)$. Bull. Georgian Acad. Sci. 173, 1, 2006, 26 – 29.
2. N.Rokva ,Ya. Diasamidze, Sh. Makharadze,-Strukture of some types of Regular Elements and Idempotents of Semigroup $B_X(D)$. Bull. Georgian Acad. Sci. 173, 2, 2006, 233- 235.
3. N.Rokva-Regular Elements of Semigroup $B_X(D)$ defined by X-Semilattices of Class $\Sigma_3(X,6)$. Bull. Georgian Acad. Sci. 174, 1, 2006, 36-39.