ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ნ ი ნ ო რ ო ყ ვ ა

ბადითა და $\sum_3(X,6)$ კლასის X -ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები

01.01.06 – მათემატიკური ლოგიკა,
ალგებრა და რიცხვთა თეორია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი – 2006

ნაშრომი შესრულებულია შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: **იაშა დიასამიძე** - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ოფიციალური ოპონენტები: **მიხეილ ამაღლობელი** - ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ტარიელ ქემოკლიძე – ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2006 წლის "-------" -----------------" "------" საათზე ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის Ph.M 01.06 №6 სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე. მისამართი: თბილისი 0143, უნივერსიტეტის ქუჩა 2, აუდიტორია № 202.

დისერტაციის გაცნობა შესაძლებელია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ცენტრალურ სამეცნიერო ბიბლიოთეკაში.

ავტორეფერატი დაიგზავნა 2006 წლის "------" 2 ------------------"

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული მდივანი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი გ.ბარელაძე

თემის აქტუალურობა. ბინარულ მიმართებათა თეორიის განვითარება დაიწყო მათემატიკური ლოგიკის, როგორც მათემატიკის ერთ-ერთი დარგის წარმოშობასთან ერთად. ბინარულ მიმართებათა თეორიის ძირითადი ცნებები პირველად შემოტანილი იქნა დე მორგანის, პირსისა და ფრეგეს შრომებში. ე. შრედერმა ბინარულ მიმართებათა თეორიას მთელი თავი მიუძღვნა წიგნში - «ლოგიკის ალგებრა». მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს ბინარულ მიმართებათა თეორიის განვითარებაში უაიტხედმა და რასელმა. ფრანგმა მათემატიკოსმა რიგემ მოახდინა რა ბინარულ მიმართებათა თეორიის მოდერნიზება, უფრო მოსახერხებელი გახადა მისი გამოყენება.

ამჟამად ბინარულ მიმართებებს დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკურ ლინგვისტიკაში, ბიოლოგიაში, ავტომატთა თეორიაში. ბინარულ მიმართებათა თეორიის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია არის გრაფთა თეორია.

ალგებრაში განსაკუთრებულია ბინარული მიმართებების მნიშვნელობა. მაგალითად, ექვივალენტობის მიმართება დიდ როლს ასრულებს სხვადასხვა მათემატიკური ობიექტების გაიგივების საქმეში. ალგებრულ ოპერაციებსა და დალაგების მიმართებებს შორის კავშირი დამატებით ინფორმაციას გვაწვდის შესასწავლი მათემატიკური ობიექტების შესახებ.

უნდა აღინიშნოს, რომ მიმართებათა ალგებრა და მესერთა თეორია მჭიდროდ უკავშირდება ერთმანეთს და მათი პრობლემები შეიძლება გადაჭრილ იქნას ამ კავშირის გათვალისწინებით.

ნაწილობრივ ასახვათა ალგებრის განხილვისას ვ.ვ. ვაგნერი მივიდა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის ცნებამდე. ამის გამო ვ.ვ. ვაგნერმა კიდევ ერთხელ მოახდინა ბინარულ მიმართებათა თეორიის მოდერნიზება და მისცა მას თანამედროვე სახე.

ნახევარჯგუფთა თეორიაში დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი ნახევარჯგუფი იზომორფულია არაცარიელ X სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა $B(X)$ ნახევარჯგუფის რომელიღაც ქვენახევარჯგუფის.OMსწორედ, აქედან გამომდინარეობს ბადითა და $\Sigma_3(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფების შესწავლის აქტუალობა.

არაცარიელ X სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფების ინტენსიური შესწავლა მე-20 საუკუნის 50-იან წლებში დაიწყო და უკავშირდება ვ.ვ. ვაგნერის, კ.ა. ზარეცკის, ბ.მ. შაინის, შ. შვარცის, ტ. ტამურას, ა. კლიფფორდის, კ. ბატლერისა და სხვათა სახელებს. ქართველი მათემატიკოსებიდან მათ შორის არიან ხ. დევაძე, ი. დიასამიძე, შ. მახარაძე, ზ. ავალიანი, გ. ფარტენაძე, ო. გივრაძე და სხვები. დღეისათვის ბინარულ მიმართებათა თეორიას მიეძღვნა 130-ზე მეტი ნაშრომი.

ნაშრომის მიზანი და კვლევის საგანი. სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების შესწავლა, რომლებიც განისაზღვრებიან ბადითა და $\Sigma_3(X,6)$ კლასის გაერთიანებათაAსრული X -ნახევარმასერებით.

კვლევის ობიექტებია როგორც ბადე და $\Sigma_3(X,6)$ კლასის გაერთიანებათაA სრული X -ნახევარმასერები, ისე ამ ნახევარმასერებითა და ბადით განსაზღვრული ყველა ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფები. როგორც ამას გამოკვლევები გვიჩვენებს, გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერები მნიშვნელოვან ინფომრმაციას ატარებენ იმ ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესახებ, რომლებსაც ისინი განსაზღვრავენ.

ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე

განმარტებულია ბადე, გამოკვლეულია ბადისა და $\Sigma_3(X,6)$ კლასის ნახევარმესერების თვისებები შესაბამისი დიაგრამების მიხედვით.

ნაშრომში პირველად განიხილება ბინარულ მიმართებათა იმ სრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების კლასები, რომლებიც განსაზღვრულია როგორც ბადით, ისე $\Sigma_3(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით.

აღწერილია შესაბამისი კლასის ყოველი D ნახევარმესერით განსაზვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები.

როცა X სასრულო სიმრავლეა, გამოყვანილია $\Sigma_3(X,6)$ კლასში ნახევარმესერების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

გამოყვანილია ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესაბამის კლასებში იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

აღწერილია შესაბამისი კლასის ყოველი D ნახევარმესერით განსაზღვრული $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტები.

გამოყვანილია ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესაბამის კლასებში რეგულარული ელემენტების რაოდენობის დათვლის ფორმულები.

აღწერილია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალური ქვეჯგუფები.

აღნიშნული საკითხების შესწავლა ეყრდნობა გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერის თვისებებს. აღმოჩნდა, რომ ეს მეთოდი ეფექტურია. ნაშრომში მიღებული შედეგები საშუალებას იძლევა გავაკეთოთ დასკვნა შესწავლაში მყოფი ნახევარჯგუფების მახასიათებელ თვისებებზე კლასის განმსაზღვრელი იმ დიაგრამის მიხედვით, რომელიც წინასწარ არის დაფიქსირებული. კერძოდ, გააჩნია თუ არა ნახევარჯგუფს მარჯვენა ერთეული, როგორაა აგებული მისი იდემპოტენტური და რეგულარული ელემენტები, მაქსიმალური ქვეჯგუფები და სხვა მრავალი.

კვლევის ზოგადი მეთოდიკა. ცნობილია, რომ იდემპოტენტური ელემენტები, ცალმხრივი ერთეულები, რეგულარული ელემენტები და მაქსიმალური ქვე-ჯგუფები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ნახევარჯგუფთა აბსტრაქტული თვისებების შესწავლაში. ამის გამო ბინარულ მიმართებათა სრულ ნახევარჯგუფებში დიდი ყურადღება ეთმობა ამ საკითხების შესწავლას.

სადისერტაციო ნაშრომში ნახევარჯგუფთა თვისებების შესწავლა ხდება ნახევარმესერთა თვისებების საშუალებით. მეთოდი, რომელიც გამოიყენება X სიმრავლეზე ყველა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფების

შესასწავლად, არის ახალი და ეფექტური. ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების აბსტრაქტული თვისებების მნიშვნელოვანი ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება იმ გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერებით, რომლებიც განსაზღვრავენ მოცემული კლასის ელემენტებს. ნაშრომში გამოიყენება მესერთა თეორიის, ნახევარჯგუფთა თეორიის, სიმრავლეთა თეორიისა და კომბინატორიკის ზოგადი მეთოდები და აპარატი.

დისერტაციის სტრუქტურა. სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, 6 პარაგრაფის მომცველი 2 თავისა და დანართისაგან. ნაშრომის საერთო მოცულობა არის კომპიუტერით დაკაბადონებული 136 გვერდი.

ნაშრომის შინაარსი

მოვიყვანოთ ის ძირითადი განმარტებები და აღნიშვნები, რომლებიც შემდეგში გამოიყენება დისერტაციაში.

ვთქვათ, X - ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. როგორც ცნობილია, X სიმრავ-ლეზე ბინარული მიმართების ქვეშ გვესმის ამ სიმრავლის თავისთავზე დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერი ქვესიმრავლე. შემდეგში $(x,y)\in\alpha$ პირობას, სადაც $x,y\in X$ ჩავწერთ შემდეგი სახით: $x\alpha y$. გარდა ამისა, B_X სიმბოლოთი აღვნიშ-ნავთ X სიმრავლეზე ყველა ბინარულ მიმართებათა სიმრავლეს. B_X სიმრავლეში α და β მიმართებების ნამრავლი $\alpha\circ\beta$ განიმარტება შემდეგნაირად: $(x,y)\in\alpha\circ\beta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოიძებნება ისეთი $z\in X$ ელემენტი, რომ $x\alpha z\beta y$.

B_X სიმრავლე ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ არის ნახევარჯგუფი, რომელსაც ეწოდება X სიმრავლეზე ყველა ბინარულ მიმართებათა ნახევარჯგუფი.

ვთქვათ, D არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი არაცარიელი სიმრავლე, რომელიც ჩაკეტილია D სიმრავლის ელემენტების თეორიულ-სიმრავლური გაერთიანების ოპერაციის მიმართ, ე.ი. D-ს ნებისმიერი რაოდენობის ელემენტების გაერთიანება არის D-ს ელემენტი. ასეთ D სიმრავლეს ვუწოდებთ გაერთიანებათა სრულ X-ნახევარმესერს.

ცხადია, რომ $\cup D\in D$ და ის იქნება D სიმრავლის უდიდესი ელემენტი. შემდეგში ამ ელემენტს აღვნიშნავთ $\breve{D}$ სიმბოლოთი, Eე.ი. $\cup D=\breve{D}$.

X სიმრავლის D სიმრავლეში ყოველ f ასახვას შევუსაბამოთ α_f ბინარული მიმართება X სიმრავლეზე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით: $\alpha_f=\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$. მტკიცდება, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ყველა α_f ბინარულ მიმართებათა $B_X(D)$ სიმრავლე ბინარულ მიმართებათა გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ნახევარჯგუფს. შემდეგში ამ ნახევარჯგუფს ვუწოდებთ გაერთიანებათა სრული X - ნახევარმესერით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრულ ნახევარჯგუფს.

დავუშვათ, რომ B არის B_X ნახევარჯგუფის ნებისმიერი ქვენახევარჯგუფი და $D(B)=\cup V\left(X^*_{\alpha\in B},\alpha\right)$. მტკიცდება, რომ ყოველი B-სათვის $D(B)$ წარმოადგენს გაერთიანებათა სრულ X-ნახევარმესერს. შევნიშნოთ, რომ არსებობს B_X ნახევარჯგუფის ისეთი ქვენახევარჯგუფები B და B', რომ $B\neq B'$ და $D(B)=D(B')$. მტკიცდება, რომ $B_X(D)$ არის B_X ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფი და წარმოადგენს უდიდეს ნახევარჯგუფს ყველა იმ B' ქვენახევარჯგუფთა შორის, რომელთათვისაც სამართლიანია ტოლობა $D(B')=D$(B). თუ $D=2^X$, სადაც 2^X აღნიშნავს X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს, მაშინ $B_X(D)=B_X$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი მტკიცება $B_X(D)$ ნახევარჯგუფისათვის, რომელიც დამტკიცებულია D პარამეტრზე ყოველგვარი შეზღუდვის გარეშე, სამართლიანი იქნება ასევე B_X ნახევარჯგუფისათვის.

თუ $|X|=n$ და $|D|=m$, მაშინ $|B_X(D)|=m^n$ ($|Z|$ სიმბოლოთი აღინიშნება Z სიმრავლის სიმძლავრე).

დავუშვათ, რომ $x\in X$, $Y\subseteq X$ და $\alpha\in B_X(D)$. შემდეგში ვისარგებლებთ აღნიშვნებით:

1) $y\alpha=\{z\in X \mid y\alpha z\}$; $Y\alpha=\bigcup_{y\in Y} y\alpha$, $\Delta_Y=\{(y,y) \mid y\in Y\}$;

2) $X^*=2^X\setminus\{\varnothing\}$, $V(D,\alpha)=\{Y\alpha \mid Y\in D\}$, $V(\alpha)=V\left(2^X,\alpha\right)$.

$V(D,\alpha)$ არის D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერი. $\varnothing$სიმბოლოთი აღინიშნება ასევე ცარიელი ბინარული მიმართება.

α ბინარულ მიმართებას ეწოდება რეფლექსური, თუ $\Delta_X\subseteq\alpha$, სიმეტრიული, თუ $\alpha=\alpha^{-1}$, ანტისიმეტრიული, თუ $\alpha\cap\alpha^{-1}\subseteq\Delta_X$, ტრანზიტული, თუ $\alpha\circ\alpha\subseteq\alpha$ და იდემპოტენტური, თუ $\alpha\circ\alpha=\alpha$.

რეფლექსურ და ტრანზიტულ მიმართებას ეწოდება კვაზიდალაგების მიმართება, ხოლო თუ ის სიმეტრიულიცაა, მაშინ მას ეწოდება ექვივალენტობის მიმართება. ანტისიმეტრიულ კვაზიდალაგების მიმართებას ეწოდება დალაგების მიმართება.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ε მიმართებას ეწოდება ამ ნახევარჯგუფის მარჯვენა (მარცხენა) ერთეული, თუ $\alpha\circ\varepsilon=\alpha$ $(\varepsilon\circ\alpha=\alpha)$ ყოველი α მიმართებისათვის $B_X(D)$-დან.

ყოველი ბინარული მიმართება $\alpha\in B_X(D)$შეიძლება წარმოდგენილ იქნას $\alpha=\bigcup_{T\in V[\alpha]}\left(Y_T^\alpha\times T\right)$სახით, რომელსაც კვაზინორმალურ წარმოდგენას უწოდებენ და რომლის დროსაც სრულდება პირობები:

1) $Y_T^\alpha\cap Y_{T'}^\alpha=\varnothing$, *ყოველი* $T,T'\in D$ *და* $T\neq T'$;

2) $X=\bigcup_{T\in V[\alpha]} Y_T^\alpha$.

ვთქვათ, D არის გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერი, $\varnothing\neq D'\subseteq D$ და $N(D,D')=\{Z\in D \mid Z\subseteq Z',\forall Z'\in D'\}$. ცხადია, რომ $N(D,D')$არის D-ს არაცარიელი D'სიმრავლის ყველა ქვედა საზღვრების სიმრავლე D ნახევარმესერში. თუ $N(D,D')\neq\varnothing$, მაშინ $\cup N(D,D')\in D$ და იგი არის D' სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი D-ში. ამ ელემენტს აღვნიშნავთ $\wedge(D,D')$სიმბოლოთი.

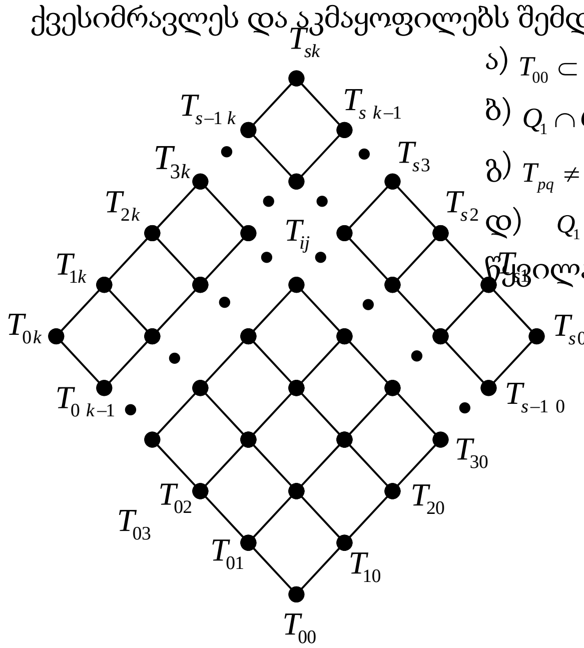
ვამბობთ, რომ D გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერი არის გაერთიანებათა XI-ნახევარმესერი, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

ა) $\wedge\left(D,D'\right)\in D$ ყოველი $t\in\breve{D}$-თვის,

ბ) $Z=\bigcup\limits_{t\in Z}\wedge\left(D,D'\right)$ ნებისმიერი არაცარიელი $Z\in D$-სათვის.

პირველი თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულია ბადის განმარტება; დამტკიცებულია მისი ზოგიერთი თვისება. კერძოდ:

განმარტება 1.1.1. D გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერის $Q=\left\{T_{ij}\subseteq X\,\middle|\, i\in N_s,\, j\in N_k\right\}$, $N_m=\{0,1,2,\cdots,m\},(m\geq 1)$ ქვენახევარმესერს ეწოდება $(s+1,k+1)$ ზომის ბადე, თუ იგი შეიცავს ორ $Q_1=\{T_{00},T_{10},\ldots,T_{S0}\}$ და $Q_2=\{T_{00},T_{01},\ldots,T_{0k}\}$ ქვესიმრავლეს და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:



ნახ. 1

ა) $T_{00}\subset T_{10}\subset\cdots\subset T_{S0}$, $T_{00}\subset T_{01}\subset\cdots\subset T_{0k}$;

ბ) $Q_1\cap Q_2=\{T_{00}\}$;

გ) $T_{pq}\neq T_{ij}$, როცა $(p,q)\neq(i,j)$;

დ) Q_1 და Q_2 სიმრავლეთა ელემენტები წყვილ-წყვილად არაშედარებადია;

ე) $T_{ij}\cup T_{i'j'}=T_{pq}$, როცა $p=\max\{i,i'\}$ და $q=\max\{j,j'\}$.

აღნიშნული წესით განმარტებული ბადე მოიცემა შემდეგი სახის დიაგრამით.

ლემა 1.1.1. თუ გაერთიანებათა X-ნახევარმესერი არის ბადე, მაშინ:

1) $T_{pq}\subseteq T_{ij}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $p\leq i$ და $q\leq j$;

2) $Q_1\cup Q_2$ წარმოადგენს Q ბადის დაუყვან წარმომქმნელ სიმრავლეს;

3) $|Q|=(s+1)\cdot(k+1)$.

Q_{mn}-ით აღვნიშნავთ Q ბადის ექვივალენტობის იმ θ-კლასს, რომლის ყოველი ელემენტი ფარავს Q ბადის n ელემენტს და თავად იფარება Q ბადის m ელემენტით.

ლემა 1.1.2. თუ φ არის Q ბადის ავტომორფიზმი და $T_{ij}\in Q_{mn}$, მაშინ

$$\varphi\left(T_{ij}\right)\in Q_{mn}.$$

ლემა 1.1.3. Q ბადის ექვივალენტობის ყველა θ-კლასი ამოიწურება შემდეგი სახის სიმრავლეებით

$Q_{02}=\{T_{sk}\}$, $Q_{20}=\{T_{00}\}$, $Q_{12}=\{T_{1k},T_{2k},\ldots,T_{s-1\,k},T_{s1},T_{s2},\ldots,T_{s\,k-1}\}$,

$Q_{21}=\{T_{01},T_{02},\ldots,T_{0\,k-1},T_{10},T_{20},\ldots,T_{s-1\,0}\}$, $Q_{11}=\{T_{0k},T_{s0}\}$ და

$Q_{22}=Q\setminus\left(Q_{02}\cup Q_{20}\cup Q_{12}\cup Q_{21}\cup Q_{11}\right)$

თეორემა1.1.1. თუ φ არის $(s+1,k+1)$განზომილების მქონე Q ბადის ავტომორფიზმი, მაშინ^

1) როცა $s\neq k$, φ არის იგივური ავტომორფიზმი;

2) როცა $s=k$, φ არის ან იგივური ავტომორფიზმი ან $\varphi\left(T_{ij}\right)=T_{ji}$, ყოველი $T_{ij}\in Q$-თვის.

ლემა 1.1.4. თუ გაერთიანებათა X -ნახევარმესერი არის Q ბადე, მაშინ

1) ფორმალურ ტოლობებს აქვთ სახე $T_{pq} = P_{sk} \cup \bigcup_{T_{ij} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}} \varphi(T_{ij})$, სადაც T_{pq} არის Q ბადის ნებისმიერი ელემენტი.

2) Q ბადის ბაზისური წყაროებია $P_1 = \{P_{0k}, P_{1k}, \ldots, P_{s-1k}, P_{s0}, P_{s1}, \ldots, P_{sk-1}\}$ სიმრავლის ელემენტები;

3) $P \setminus P_1$ სიმრავლის ელემენტები Q ბადის სისავსის წყაროებია;

4) $Q^{\wedge} = Q_1 \cup Q_2$.

თეორემა1.1.2. თუ Q არის ბადე, მაშინ იგი გაერთიანებათა XI ნახევარმესერს წარმოადგენს.

პირველი თავის მეორე პარაგრაფში აღწერილია Q ბადით წარმოქ-მნილი $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტები, იდემპოტენტები და მარჯვენა ერთეულები; გამოყვანილია მათი დათვლის ფორმულები, როცა X სასრულო სიმრავლეა.

თეორემა1.2.1. ვთქვათ, D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ქვენახევარმესერი Q არის ბადე. $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება, რომელსაც აქვს ისეთი $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij})$ სახის კვაზინორმალური წარმოდ-გენა, რომ $Q = V(D, \alpha)$, წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგუ-ლარულ ელემენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Q ნახევარმესერის $D' \subseteq D$ რომელიღაც ქვენახევარმესერზე არსებობს ისეთი φ α -იზომორ-ფიზმი, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{0k}) \cap \varphi(T_{s0}), \quad Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{01}),$

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{02}), \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{0k}),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{10}),$

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{20}), \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{S0}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{S0}),$

$Y_{ij}^{\alpha} \cup \varphi(T_{ij}) \neq \varnothing,$ ნებისმიერი $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$ -თვის.

თეორემა1.2.2. ვთქვათ, D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ქვენახევარმესერი Q არის ბადე. $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება, რომელსაც აქვს ისეთი $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} (Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij})$ სახის კვაზინორმალური წარმოდგენა, რომ $Q = V(D, \alpha)$, წარმოადგენს $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპო-ტენტურ ელემენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობები:

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{S0}, \quad Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},$

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k},$

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq T_{20}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{S0}^{\alpha} \supseteq T_{S0},$

$Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing$, ნებისმიერი $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$ -თვის.

ლემა 1.2.3. ვთქვათ, D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერი Q არის ბადე, მაშინ:

1) $\{T_{S0} \cap T_{0k}, X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0k}, X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{S0}, X \setminus T_{Sk}\}$ სიმრავლის ელემენტები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია;

2) $X = \left(X \setminus T_{Sk} \right) \cup \left(T_{S0} \cap T_{0k} \right) \cup \bigcup_{j=1}^{k} X_{0j} \cup \bigcup_{i=1}^{s} X_{i0}$.

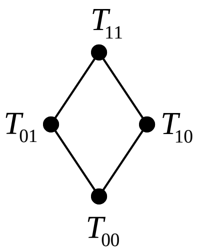
თეორემა1.2.4. ვთქვათ, D გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერი Q არის ბადე. თუ Q ბადე და $D' = \left\{ \overline{T}_{ij} \middle| i = 0,1,\ldots,s;\ j = 0,1,\ldots k \right\}$ ნახევარმესერი α-იზომორფულია, ხოლო $\left| \Omega(Q) \right| = m_0$, მაშინ

1) $$\left| R(D') \right| = m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} \left((j+1)^{\left| \overline{T}_{0j} \setminus \left(\overline{T}_{0j-1} \cup \overline{T}_{S0} \right) \right|} - j^{\left| \overline{T}_{0j} \setminus \left(\overline{T}_{0j-1} \cup \overline{T}_{SO} \right) \right|} \right) \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{s} \left((i+1)^{\left| \overline{T}_{i0} \setminus \left(\overline{T}_{i-10} \cup \overline{T}_{0k} \right) \right|} - i^{\left| \overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-10} \cup \overline{T}_{0k} \right|} \right) \cdot \left| Q \right|^{\left| X \setminus \overline{T}_{sk} \right|}$$

როცა $s \neq k$ და

2) $$\left| R(D') \right| = 2 \cdot m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} \left((j+1)^{\left| \overline{T}_{0j} \setminus \left(\overline{T}_{0j-1} \cup \overline{T}_{S0} \right) \right|} - j^{\left| \overline{T}_{0j} \setminus \left(\overline{T}_{0j-1} \cup \overline{T}_{SO} \right) \right|} \right) \cdot,$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{s} \left((i+1)^{\left| \overline{T}_{i0} \setminus \left(\overline{T}_{i-10} \cup \overline{T}_{0k} \right) \right|} - i^{\left| \overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-10} \cup \overline{T}_{0k} \right|} \right) \cdot \left| Q \right|^{\left| X \setminus \overline{T}_{sk} \right|}$$

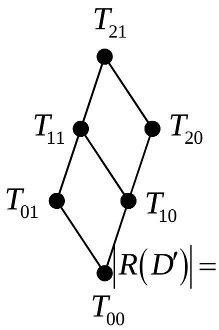
როცა $s = k$.



ნახ. 2

შედეგი 1.2.1. ვთქვათ D ნახევარმესერის ქვენახე-ვარ-მესერი $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}\}$ არის ბადე დიაგრამით (ნახ.2.). თუ Q ბადე და $D' = \left\{ \overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{11} \right\}$ ნახევარმესე-რი იზომორფულია, ხოლო $\left| \Omega(Q) \right| = m_0$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left| R(D') \right| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{\left| \overline{T}_{01} \setminus \overline{T}_{10} \right|} - 1 \right) \cdot \left(2^{\left| \overline{T}_{10} \setminus \overline{T}_{01} \right|} - 1 \right) \cdot 4^{\left| X \setminus \overline{T}_{11} \right|}.$$



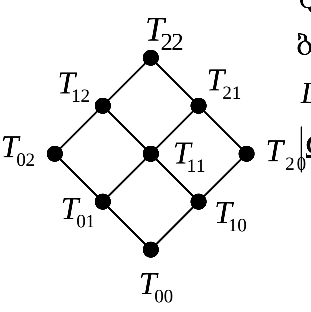
ნახ. 3

შედეგი 1.2.2. ვთქვათ D ნახევარმესერის ქვენახევარ-მესერი $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}, T_{20}, T_{21}\}$ არის ბადე დიაგრამ-ით(ნახ.3). თუ Q ბადე და $D' = \left\{ \overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{11}, \overline{T}_{20}, \overline{T}_{21} \right\}$ ნახევარმესერი იზომორფულია, ხოლო $\left| \Omega(Q) \right| = m_0$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left| R(D') \right| = m_0 \cdot \left(2^{\left| \overline{T}_{01} \setminus \overline{T}_{10} \right|} - 1 \right) \cdot \left(2^{\left| \overline{T}_{10} \setminus \overline{T}_{01} \right|} - 1 \right) \cdot \left(3^{\left| \overline{T}_{20} \setminus \left(\overline{T}_{10} \cup \overline{T}_{01} \right) \right|} - 2^{\left| \overline{T}_{20} \setminus \left(\overline{T}_{10} \cup \overline{T}_{01} \right) \right|} \right) \cdot 6^{\left| X \setminus \overline{T}_{21} \right|}.$$

შედეგი 1.2.3. ვთქვათ D ნახევარმესერის ქვენახევარმესერი $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{02}, T_{11}, T_{20}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$ არის ბადე დიაგრამით (ნახ.4). თუ Q ბადე და ნახევარმესერი $D' = \left\{ \overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{02}, \overline{T}_{11}, \overline{T}_{20}, \overline{T}_{12}, \overline{T}_{21}, \overline{T}_{22} \right\}$ იზომორფულია, ხოლო $\left| \Omega(Q) \right| = m_0$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left| R(D') \right| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{\left| \overline{T}_{01} \setminus \overline{T}_{10} \right|} - 1 \right) \cdot \left(2^{\left| \overline{T}_{10} \setminus \overline{T}_{01} \right|} - 1 \right) \cdot$$
$$\cdot \left(3^{\left| \overline{T}_{20} \setminus \left(\overline{T}_{10} \cup \overline{T}_{01} \right) \right|} - 2^{\left| \overline{T}_{20} \setminus \left(\overline{T}_{10} \cup \overline{T}_{01} \right) \right|} \right) \cdot \left(3^{\left| \overline{T}_{02} \setminus \left(\overline{T}_{01} \cup \overline{T}_{10} \right) \right|} - 2^{\left| \overline{T}_{02} \setminus \left(\overline{T}_{01} \cup \overline{T}_{10} \right) \right|} \right) 9^{\left| X \setminus \overline{T}_{21} \right|}.$$



ნახ. 4

მეორე თავის პირველ პარაგრაფში მოცემულია $\Sigma_3(X,6)$ კლასის განმარტება; დამტკიცებულია ამ კლასის ნახევარმესერების ზოგიერთი ძი-რითადი თვისება; მოცემულია მათი აგების წესი და სასრულო X სიმრავ-ლის შემთხვევაში გამოყვანილია მათი რაოდენობის გამოსათვლელი ფორმულა; ნაპოვნია ყველა ქვენახევარმესერი; დამტკიცებულია, რომ $\Sigma_3(X,6)$ კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრულ ბინარულ მიმართებათა სრულ ნახევარჯგუფებს არ გააჩნიათ მარჯვენა ერთეული; ნაპოვნია D ნახევარმესერის ყველა XI-ქვენახევარმესერი.

$\Sigma(X,m)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ m სიმძლავრის მქონე გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერების კლასს. თუ $D\in\Sigma(X,m)$, მაშინ ვიტყვით, რომ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფი განსაზღვრულია $\Sigma(X,m)$ კლასის D ნახევარმესერით.

ვთქვათ, X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს $\Sigma_3(X,6)$კლასის ნახევარმესერებით განსაზღვრული ბინარულ მიმართებათა სრული ნახევარჯგუფების შესწავლა.

განვიხილავთ $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ ისეთ გაერთიანებათა სრულ X-ნახევარმესერებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

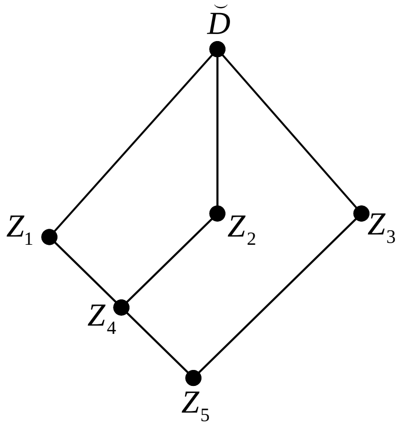
$Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,\breve{D}\subseteq X$,

$Z_5\subset Z_4\subset Z_1\subset\breve{D},\ Z_5\subset Z_4\subset Z_2\subset\breve{D},$

$Z_5\subset Z_3\subset\breve{D},\ Z_1\setminus Z_2\neq\varnothing,\ Z_2\setminus Z_1\neq\varnothing,$

$Z_1\setminus Z_3\neq\varnothing,\ Z_3\setminus Z_1\neq\varnothing,\ Z_2\setminus Z_3\neq\varnothing,\ Z_3\setminus Z_2\neq\varnothing,$

ასეთი თვისებების მქონე გაერთიანებათა სრული X-ნახევარმესერის დიაგრამა ფიქსირებულია და აქვს შემდეგი სახე (ნახ.5).



ნახ. 5

ვთქვათ $\alpha\in B_X(D)$, მაშინ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის განსაზღვრიდან გამომდინარე მოიძებნება $f:X\to D$Aასახვა, ისეთი რომ$\alpha=\alpha_f$. თუ მოცემუ-ლი$D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ნახევარმესერის ელემენტების წინა სახეთა ერთობლიობას f ასახვისას Aაღვნიშნავთ შესაბამისად Y_5,Y_4,Y_3,Y_2,Y_1,Y_0 სიმბო-ლოებით, მაშინ α ბინარული მიმართება შეიძლება ჩაწერილ იქნას კვაზინორმალური წარმოდგენის სახით:

$$\alpha=(Y_5\times Z_5)\cup(Y_4\times Z_4)\cup(Y_3\times Z_3)\cup$$
$$\cup(Y_2\times Z_2)\cup(Y_1\times Z_1)\cup(Y_0\times\breve{D}).$$

თუ $C(D)=\{P_5,P_4,P_3,P_2,P_1,P_0\}$ არის X სიმრავლის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ქვესიმრავლეების რომელიღაც სიმრავლეთა ოჯახი, ხოლო φ არის D ნახევარმესერის $C(D)$-ზე ისეთი ასახვა, როცა $\varphi(\breve{D})=P_0$ და $\varphi(Z_i)=P_i$ ნებისმიერი $i=1,2,3,4,5$-თვის, მაშინ $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ნახე-ვარმესერის ფორმალურ ტოლობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$\breve{D}=P_0\cup P_1\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5$; $\quad Z_1=P_0\cup P_2\cup P_3\cup P_4\cup P_5$;

$Z_2=P_0\cup P_1\cup P_3\cup P_4\cup P_5$; $\quad Z_3=P_0\cup P_1\cup P_2\cup P_4\cup P_5$;

$Z_4 = P_0 \cup P_3 \cup P_5$; $Z_5 = P_0$.

მტკიცდება, რომ D ნახევარმესერის ელემენტების აღნიშნული სახით წარმოდგენისას P_i, $i = 0,1,\dots,5$ პარამეტრებს შორის არსებობს ისეთები, რომლებიც მოცემული D ნახევარმესერებისათვის არ შეიძლება იყოს ცარიელი სიმრავლეები. ასეთ P_i სიმრავლეებს ბაზისური წყაროებს ვუწოდებთ, ხოლო იმ $P_j\left(0 \le j \ge 5\right)$ სიმრავლეებს, რომლებიც შეიძლება იყვნენ ცარიელი სიმრავლეებიც, სისავსის წყაროებს ვუწოდებთ. φ ასახვისას ბაზისური წყაროს წინასახის დამფარავი ელემენტების რაოდენობა ყოველთვის ტოლია ერთის, ხოლო φ ასახვისას სისავსის წყაროების დამფარავი ელემენტები ან არ არსებობენ, ან მათი რაოდენობა მეტია ერთზე. შევნიშნოთ, რომ P_0 სიმრავლე ყოველთვის ითვლება სისავსის წყაროდ. ჩვენს შემთხვევაში $|P_1| \ge 1$, $|P_2| \ge 1$, $|P_3| \ge 1$, $|C| \ge 0$, $|P_4| \ge 0$, $|P_5| \ge 0$, ე.ი. P_1, P_2 და P_3 ბაზისური წყაროებია, ხოლო P_0, P_4 და P_5 სისავსის წყაროებს წარმოადგენენ.

ლემა 2.1.1. ვთქვათ X სასრულო სიმრავლეა, $|X| = n \ge 3$ და $\left|\Sigma_3\left(X,6\right)\right| = s$, მაშინ

$$s = \frac{1}{2}\left(7^n - 3\cdot 6^n + 3\cdot 5^n - 4^n\right).$$

ეს ფორმულა საინტერესო შედეგებს გვაძლევს სხვადასხვა n-თვის $\Sigma_3\left(X,6\right)$ კლასში $B_X(D)$ ნახევარჯგუფების რაოდენობისა და ცალკეულ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფში ელემენტების რაოდენობის განსაზღვრის შესახებ. ასე მაგალითად: თუ $n = 3,4,5,6,7,8,9,10$, მაშინ $\Sigma_3\left(X,6\right)$ კლასის სიმძლავრე შესაბამისად ტოლია რიცხვების $3, 66, 915, 10230, 100863,$ $916146, 7858875, 64662510$, ხოლო ცალკეულ ნახევარჯგუფში ელემენტების შესაბამისი რაოდენობაა $216, 1296, 7776, 46656, 279936, 1679616,$ $10077696, 60466176$

ლემა 2.1.3. ვთქვათ $D = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X,6\right)$. $B_X(D)$ ნახევარ-ჯგუფს მარჯვენა ერთეული არ გააჩნია.

ლემა 2.1.4. ვთქვათ $D = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \Sigma_3\left(X,6\right)$. D ნახევარმესერის XI-ქვენახევარმესერებია:

1) $\{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\breve{D}\}$;

2) $\{Z_5, Z_4\}$, $\{Z_5, Z_3\}$, $\{Z_5, Z_2\}$, $\{Z_5, Z_1\}$, $\{Z_4, Z_2\}$, $\{Z_4, Z_1\}$, $\{Z_5, \breve{D}\}$, $\{Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_1, \breve{D}\}$;

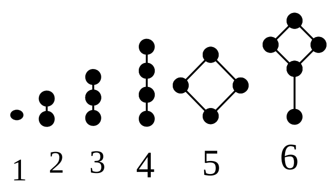
3) $\{Z_5, Z_4, Z_2\}$, $\{Z_5, Z_4, Z_1\}$, $\{Z_5, Z_4, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_1, \breve{D}\}$;

4) $\{Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}$;

5) $\{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$, $\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$;

6) $\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.

შესაბამისი დიაგრამებია:



ნახ. 6

მეორე თავის მეორე პარაგრაფში აღწერილია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ელემენტები, როცა $Z_5=\varnothing$; გამოყვანილია დემპოტენური ელემენტების დათვლის ფორმულები; იგივე საკითხებია გადაწყვეტილი როცა $Z_5=\varnothing$; აღწერილია მაქსიმალური ქვეჯგუფები.

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_3(X,6)$ და $Z_5=\varnothing$.M კვაზინორმალური წარ-მოდგენის მქონე $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება იდემპოტენტური ელემენ-ტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის აკმაყოფილებს ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან ერთ-ერთს:

$1)\ \alpha=\varnothing$ ან $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)$, სადაც $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^{\alpha}\neq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$ და $Y_T^{\alpha}\cap T\neq\varnothing$;

2) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)$, სადაც $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq T$, $Y_T^{\alpha}\cap T\neq\varnothing$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{Z_4}^{\alpha}\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$, სადაც $Y_4^{\alpha},Y_T^{\alpha},Y_0^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\supseteq Z_4$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq T$, $Y_4^{\alpha}\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^{\alpha}\cap T\neq\varnothing$, $Y_0^{\alpha}\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$,სადაც $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$, $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq T$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq T'$, $Y_T^{\alpha}\cap T\neq\varnothing$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap T'\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^{\alpha}\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^{\alpha}\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$,სადაც $Y_4^{\alpha},Y_2^{\alpha},Y_1^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\supseteq Z_4$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\supseteq Z_1$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_2^{\alpha}\supseteq Z_2$, $Y_2^{\alpha}\cap Z_2\neq\varnothing$, $Y_1^{\alpha}\cap Z_1\neq\varnothing$, $Y_4^{\alpha}\cap Z_4\neq\varnothing$.

თეორემა2.2.2. თუ $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5=\varnothing$ და X სასრულო სიმრავლეა, მაშინ $B_X(D)$Nნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:N

$$
\begin{aligned}
|I|={}&1+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\
&\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}\\
&+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\cap Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

თეორემა2.2.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $Z_5 \neq \varnothing$.Mკვაზინორმალური წარმოდგენის მქონე $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება იდემპოტენტური ელემენტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის აკმაყოფილებს ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან ერთ-ერთს:

1) $\alpha = Y_T^\alpha \times T$, სადაც $T \in D$;

2) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$, სადაც $T, T' \in D, T \subset T', Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}, Y_T^\alpha \supseteq T$, და $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$;

3) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'')$,სადაც$T, T', T'' \in D,\ T \subset T' \subset T''$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

4) $\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,სადაც$Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_1, Z_2\}$, $Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap T \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

5) $\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T'') \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$,სადაც$T \in \{Z_5, Z_4\}, T' \in \{Z_3, Z_2\}$, $T'' \in \{Z_4, Z_2, Z_1\}$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_T^\alpha \supseteq T$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq T'$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha \cap T' \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\alpha \cap T'' \neq \varnothing$;

6) $\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_2^\alpha \times Z_2) \cup (Y_1^\alpha \times Z_1) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, სადაც $Y_5^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_1^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_2^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_2^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, $Y_1^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$.

თეორემა2.2.4. თუ $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 \neq \varnothing$ და X სასრულოა, მაშინ $B_X(D)$Nნახევარჯგუფის ყველა იდემპოტენტური ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:N

$$
\begin{aligned}
|I| = 6 &+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_4|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_3|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \\
&+ \left(2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus Z_1|} + \\
&+ \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_2|} + \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus Z_1|} + \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
&+ 2 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \left(2^{|(Z_1 \cap Z_2) \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|}\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|}\right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}
$$

$G_X(D, \varepsilon)$

სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის მაქსიმალურ ქვეჯგუფს, რომლის ერთეულია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იდემპოტენტური ε ბინარული მიმართება.

თეორემა 2.2.5. $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ნებისმიერი იდემპოტენტური ε ბინარული მიმართებისათვის $G_X(D, \varepsilon)$ მაქსიმალური ქვეჯგუფი წარმოადგენს ჯგუფს, რომლის რიგი არ აღემატება ორს.

მეორე თავის მესამე პარაგრაფში მოცემულია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების აღწერა იმ შემთხვევაში, როცა $Z_5=\varnothing$; გამოყვანილია რეგულარული ელემენტების დათვლის ფორმულები.

განმარტების თანახმად φ სრული იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ და D' სრულ ნახევარმესერებს შორის არის სრული α-იზომორფიზმი, თუ $\varphi(\varnothing)=\varnothing$, როცა $\varnothing\in V(D,\alpha)$ და $\varphi(T)\alpha=T$ ყოველი $T\in V(D,\alpha)$-თვის.

თეორემა 2.3.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_3(X,6)$ და $Z_5=\varnothing$.Mკვაზინორმალური წარმოდგენის მქონე $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი სრული α-იზომორფიზმი $V(D,\alpha)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D' ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან ერთ-ერთს :

1) $\alpha=\varnothing$;

2) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)$, სადაც $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^\alpha\neq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$ და $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$;

3) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$, სადაც $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$,
$Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

4) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$, სადაც $Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$,
$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$,
$Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$, სადაც $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$,
$Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Y_T^\alpha\cap Y_{T'}^\alpha$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$,
$Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

6) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$, სადაც $Y_4^\alpha,Y_{Z_2}^\alpha,Y_{Z_1}^\alpha\notin\{\varnothing\}$,
$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$,
$Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$.

ვთქვათ Q და D' შესაბამისად D გაერთიანებათა სრული $X-$ნახევარმესერის რომელიღაც XI და X ნახევარმესერებია. განმარტების თანახმად $R_\varphi(Q,D')$ არის $B_X(D)$ნახევარჯგუფის ისეთი ქვესიმრავლე, რომ $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$ მხოლოდ მაშინ, როცა α და φ ელემენტებისათვის სრულდე-
ბა შემდეგი პირობები:

ა) ბინარული მიმართება α არის რეგულარული ელემენტი;

ბ) $V(D,\alpha)=Q$;

გ) φ არის სრული α-იზომორფიზმი Q და D' გაერთიანებათა სრულ ნახევარმესერებს შორის.

თუ $\alpha\in R_\varphi(Q,D')$, მაშინ $Q=V(D,\alpha)$ და D' ნახევარმესერებს შორის სრული α-იზომორფიზმისმისათვის ყოველთვის აიღება φ სრული ავტომორფიზმი.

$\Omega(Q)$-თი აღვნიშნავთ D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერის ყვე-

ლა ისეთი XI -ნახევარმესერების სიმრავლეს, რომ $Q'\in\Omega(Q)$ მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს რომელიღაც სრული იზომორფიზმი Q' და Q ნახევარმესერებს შორის.

$\Sigma_{XI}(D)$ აღნიშნავს D გაერთიანებათა სრული X -ნახევარმესერის ყველა ქვესიმრავლეთა ისეთ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტი არის D გაერთიანებათა სრული X ნახევარმესერის რომელიღაც XI ქვენახევარმესერის სახე α -იზომორფიზმის დროს.

როცა $\varnothing\in D$, მაშინ ცარიელი სიმრავლის მქონეა შესაბამისი XI ქვენახევარმესერიც. $\vartheta_{XI}\subseteq\Sigma_{XI}(D)\times\Sigma_{XI}(D)$, $D'\vartheta_{XI}D''$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს რომელიღაც სრული φ იზომორფიზმი D' და D'' ნახევარმესერებს შორის.

ϑ_{XI} ბინარული მიმართება ექვივალენტობის მიმართება არის $\Sigma_{XI}(D)$ სიმრავლეზე. $Q\vartheta_{XI}$ სიმბოლოთი აღინიშნება $\Sigma_{XI}(D)$ სიმრავლეზე ϑ_{XI} ექვივალენტობის ის კლასი, რომელიც შეიცავს $Q\in\Sigma_{XI}(D)$ ელემენტს და $R^*(Q)=\bigcup\limits_{D'\in Q\vartheta_{XI}}R(D')\cdot$

თეორემა 2.3.1.-ის პირობებში

$Q_1=\{\varnothing\}$; $Q_2=\{\varnothing,T\}$, სადაც $\varnothing\neq T\in D$;

$Q_3=\{\varnothing,T,T'\}$,სადაც $T,T'\in D$ და $\varnothing\neq T\subset T'$;

$Q_4=\{\varnothing,Z_4,T,\breve{D}\}$,სადაც $T\in\{Z_1,Z_2\}$

$Q_5=\{\varnothing,T,T',\breve{D}\}$, სადაც $T\in\{Z_3,Z_2\}$ და $T'\in\{Z_1,Z_2,Z_4\}$.

$Q_6=\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$.

აღვნიშნოთ $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების სიმრავლე R -ით. ცხადია, რომ

$$|R|=|R^*(Q_1)|+|R^*(Q_2)|+|R^*(Q_3)|+|R^*(Q_4)|+|R^*(Q_5)|+|R^*(Q_6)|\cdot$$

$Q_i, i=1,\dots,6$ სახის XI -ნახევარმესერების იზომორფული ქვენახევარმესერების რაოდენობას D-ში აღვნიშნავთ m_0-ით, $|\Omega(Q)|=m_0$. როცა $Z_5=\varnothing$, მათ შორის განვიხილავთ მხოლოდ ისეთებს, რომლებიც შეიცავენ ცარიელ სიმრავლეს.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლე-ბიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან პირველს, $Q_1=\{\varnothing\}$. შესაბამისად $Q_1\vartheta_{XI}=\{\{\varnothing\}\}$ და $|R^*(Q_1)|=1\cdot$

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეორეს, $Q_2=\{\varnothing,T\}$.

შესაბამისად $Q_2\vartheta_{XI}=\{\{\varnothing,Z_4\},\{\varnothing,Z_3\},\{\varnothing,Z_2\},\{\varnothing,Z_1\},\{\varnothing,\breve{D}\}\}$,

ე.ი. $m_0=5$ და ამიტომ

$$|R^*(Q_2)|=5\cdot\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot2^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მესამეს, $Q_3=\{\varnothing,T,T'\}$.შესაბამისად

$$Q_3\vartheta_{XI}=\left\{\{\varnothing,Z_4,Z_2\},\{\varnothing,Z_4,Z_1\},\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_3,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$$

ე.ი. $m_0=6$. ვადგენთ, თუ როდის არის ცარიელი $Q_3\vartheta_{XI}$ -ის ელემენტების თანაკვეთა; თანაკვეთის არსებობის შემთხვევაში ვსაზღვრავთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს; ვპოულობთ თანაკვეთაში ელემენტების რაოდენობას.

ლემა 2.3.1. თუ $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5=\varnothing$ და $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\begin{gathered}\left|R^*(Q_3)\right|=\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{\varnothing,Z_3,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\right|-\\-\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\right\}\right|-\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\right|\end{gathered}$$

ლემა 2.3.2. თუ $D\in\Sigma_3(X,6)$ და $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

ა) $\alpha\in\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\right\}\right|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

ბ) $\alpha\in\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\right|$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$

ლემა 2.3.3. ვთქვათ $D\in\Sigma_3(X,6)$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

ა) $\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\right\}\right|=6\cdot\left(2^{|Z_2|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$;

ბ) $\left|R\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\right|=6\cdot\left(2^{|Z_1|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

თეორემა 2.3.2. ვთქვათ $D\in\Sigma_3(X,6)$ და $Z_5=\varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\begin{gathered}\left|R^*(Q_3)\right|=6\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\left(2^{|Z_3|}-1\right).\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right).3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\+6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{gathered}\quad B_X(D)$$

ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეოთხეს, $Q_4=\left\{\varnothing,Z_4,T,\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\{Z_1,Z_2\}$; მოცემულ შემთხვევაში

$Q_4\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$, ე.ი. $m_0=2$.

ლემა 2.3.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5=\varnothing$ და $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეოთხეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*(Q_4)\right|=\left|R\left\{\varnothing,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{\varnothing,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right|$$

თეორემა 2.3.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $Z_5 = \varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენ-ტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეოთხეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*(Q_4)\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$
$$+\,2.\left(2^{|Z_4|}-1\right).\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right).\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right).4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, $Q_5 = \left\{\varnothing, T, T', \breve{D}\right\}$, სადაც $T \in \{Z_3, Z_2\}$ და $T' \in \{Z_1, Z_2, Z_4\}$;

შესაბამისად გვაქვს:

$$Q_5\vartheta_{XI} = \left\{\left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\},$$

ე.ი. $m_0 = 4$, ხოლო Q ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმების რიცხვი $q = 2$. დადგენილია, თუ როდის არის ცარიელი $Q_5\vartheta_{XI}$-ის ელემენტების თანაკვეთა; თანაკვეთის არსებობის შემთხვევაში განსაზღვრულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ნაპოვნია თანაკვეთაში ელემენტების რაოდენობა.

ლემა 2.3.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 = \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*(Q_5)\right| = \left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right| + \left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}\right| + \left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right| +$$
$$+\left|R\left\{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right| - \left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right| -$$
$$-\left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right|.$$

ლემა 2.3.6. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგუ-ლარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეხუთეს. $\alpha \in R\left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_2, Z, \breve{D}\right\}$, სადაც $Z \in \{Z_1, Z_2\}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობები:

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ \ Y_5^\alpha \supseteq Z_3 \cap Z,\ \ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_3,\ \ Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z,$$
$$Y_T^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ \ \ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing.$$

ლემა 2.3.7. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $Z_5 = \varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავ-ლეა და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

ა) $\left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right| = 8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$;

ბ) $\left|R\left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right| = 8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

თეორემა2.3.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $Z_5 = \varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*\left(Q_5\right)\right| = 8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}.$$

$B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეექვსეს, $Q_6=\left\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$. შესაბამისად $Q_6\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$,ე.ი. $m_0=1$.

Q ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმების რიცხვი მოცემულ შემთხვევაში $q=2$.

თეორემა 2.3.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ და $Z_5=\varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეექვსეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right| = 2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus \breve{D}\right|}.$$

თეორემა 2.3.6. ვთქვათ $D=\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,6\right)$, $Z_5=\varnothing$ და X სასრულოა, მაშინ $B_X\left(D\right)$Nნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:N

$$\begin{aligned}|R| &= 1+5\cdot\left(2^{\left|\breve{D}\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+6\cdot\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+6\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\\ &\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

მეორე თავის მეოთხე პარაგრაფში განიხილება შემთხვევა, როცა $Z_5\neq\varnothing$. მოცემულია $B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების აღწერა; გამოყვანილია რეგულარული ელემენტების დათვლის ფორმულები. კერძოდ, სამართლიანია:

თეორემა 2.4.1. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ და $Z_5\neq\varnothing$ .M კვაზინორმალური წარმოდგენის მქონე $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი სრული α-იზომორფიზმი $V\left(D,\alpha\right)$ ნახევარმესერისა D ნახევარმესერის რომელიღაც D'ქვენახევარმესერზე, რომელიც აკმაყოფილებს ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობებიდან ერთ-ერთს :

1) $\alpha=Y_T^\alpha\times T$, სადაც $T\in D$;

2) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$, სადაც $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$,

$Y_T^\alpha\supseteq\varphi\left(T\right)$ და $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$

3) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$,სადაც$T,T',T''\in D$,$T\subset T'\subset T''$,

$Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$, $Y_T^\alpha\supseteq\varphi\left(T\right)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi\left(T'\right)$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi\left(T'\right)\neq\varnothing$ და $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi\left(T''\right)\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, სადაც $T\in\left\{Z_1, Z_2\right\}$, $Y_4^\alpha, Y_3^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha\notin\left\{\varnothing\right\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$

$Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi\left(T\right)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi\left(T\right)\neq\varnothing$ და$Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^{\alpha}\times T''\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times \breve{D}\right)$, სადაც $T\in\{Z_5,Z_4\}$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}$,

$T''\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$ $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},Y_{T''}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^{\alpha}\cup Y_{T''}^{\alpha}\supseteq\varphi(T'')$,

$Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$ და $Y_{T''}^{\alpha}\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^{\alpha}\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^{\alpha}\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times \breve{D}\right)$, სადაც $Y_4^{\alpha},Y_2^{\alpha},Y_1^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$,

$Y_5^{\alpha}\supseteq Z_5$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\supseteq Z_4$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_1^{\alpha}\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_2^{\alpha}\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_4^{\alpha}\cap Z_4\neq\varnothing$,

$Y_1^{\alpha}\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$ და $Y_2^{\alpha}\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$.

ცხადია, რომ

$$|R|=\left|R^*(Q_1)\right|+\left|R^*(Q_2)\right|+\left|R^*(Q_3)\right|+\left|R^*(Q_4)\right|+\left|R^*(Q_5)\right|+\left|R^*(Q_6)\right|.$$

განხილულია $B_X(D)$ ნახევარჯგუფის რეგულარული ელემენტების დათვლა Q_i, $i=1,2,\ldots,6$ სახის XI-ნახევარმესერების იზომორფულ იმ ქვენახევარმესერებთან მიმართებაში, რომლებიც არ შეიცავენ ცარიელ სიმრავლეს. თეორემა 2.4.1.-ის პირობებიდან გამომდინარე:

$Q_1=\{T\}$; $Q_2=\{T,T'\}$, სადაც $T,T'\in D$ და $T\subset T'$;

$Q_3=\{T,T',T''\}$,სადაც $T,T',T''\in D$ და $T\subset T'\subset T''$;

$Q_4=\left\{Z_5,Z_4,T,\breve{D}\right\}$,სადაც $T\in\{Z_1,Z_2\}$;

$Q_5=\left\{T,T',T'',\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\{Z_5,Z_4\}$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}$ და $T''\in\{Z_1,Z_2,Z_4\}$.

$Q_6=\left\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან პირველს, $Q_1=\{T\}$.შესაბამისად $Q_1\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\right\}$. ამიტომაც $\left|R^*(Q_1)\right|=6$.

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეორეს, $Q_2=\{T,T'\}$,სადაც $T\subset T'$.შესაბამისად

$$Q_2\vartheta_{XI}=\left\{\begin{array}{l}\{Z_5,Z_4\},\{Z_5,Z_3\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2\},\\ \{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}\end{array}\right\},$$

ე.ი. $m_0=11$,ხოლო Q_2 ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმების რიცხვი მოცემულ შემთხვევაში $q=1$.

ლემა 2.4.1. თუ $D\in\Sigma_3(X,6)$ და $Z_5\neq\varnothing$,ხოლო α რეგულარული ელემენტი აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1.-ის პირობებიდან მეორეს, მაშინ

$$\left|R^*(Q_2)\right|=\left|R\left\{Z_5,\breve{D}\right\}\right|.$$

თეორემა 2.4.2. თუ $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$ და X სასრული სიმრავლეა და $\alpha\in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეორესეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left|R^*(Q_2)\right|=11\cdot\left(2^{X\setminus Z_5}-2^{X\setminus\breve{D}}\right).$$

$B_X(D)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მესამეს, $Q_3=\{T,T',T''\}$,სადაც $T\subset T'\subset T''$.შესაბამისად

$$Q_3\vartheta_{XI} = \left\{ \begin{array}{l} \{Z_5, Z_4, Z_1\}, \{Z_5, Z_4, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_2\}, \{Z_5, Z_1, \breve{D}\}, \\ \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_4, Z_1, \breve{D}\} \end{array} \right\},$$

ე.ი. $m_0 = 8$, ხოლო Q_3 ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმების რიცხვი მოცემულ შემთხვევაში $q = 1$. ვადგენთ, თუ როდის არის ცარიელი $Q_3\vartheta_{XI}$-ის ელემენტების თანაკვეთა; თანაკვეთის არსებობის შემთხვევაში ვსაზღვრავთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს; ვპოულობთ თანაკვეთაში ელემენტების რაოდენობას.

ლემა 2.4.2. თუ $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმარ თება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*(Q_3)\right| = \left|R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\}\right| + \left|R\{Z_5, Z_3, \breve{D}\}\right| + \left|R\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}\right| + \left|R\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}\right| -$$
$$-\left|R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}\right| - \left|R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}\right|.$$

ლემა 2.4.3. თუ $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმარ- თება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მესამეს,

ა) $\alpha \in R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$$

ბ) $\alpha \in R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5, Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

ლემა 2.4.4. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავ ლეა და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყო-ფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

ა) $\left|R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{Z_5, Z_2, \breve{D}\}\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$;

ბ) $\left|R\{Z_5, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{Z_5, Z_1, \breve{D}\}\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$.

თეორემა2.4.3. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$ და $Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრულო სიმ- რავლეა და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფი-ლებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მესამეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*(Q_3)\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 8 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 1\right) . \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|}\right) \cdot$$
$$\cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 8 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 8 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}.$$

$B_X(D)$

ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეოთხეს, $Q_4 = \{Z_5, Z_4, T, \breve{D}\}$, სადაც $T \in \{Z_1, Z_2\}$; შესაბამისად $Q_4\vartheta_{XI} = \{\{Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}, \{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}\}$, ე.ი. $m_0 = 2$.

ლემა 2.4.5. ვთქვათ $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 \neq \varnothing$ და $\alpha \in B_X(D)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეოთხეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*(Q_4)\right| = \left|R\{Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\}\right| + \left|R\{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\}\right|$$

თეორემა 2.4.4. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ და $Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრულო სიმ- რავლეა და $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეოთხეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right| &= 2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\\ &+2.\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right).\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right).\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right).4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

$B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, $Q_5=\left\{T,T',T'',\breve{D}\right\}$, სადაც $T\in\left\{Z_5,Z_4\right\},\ T'\in\left\{Z_3,Z_2\right\}$ და $T''\in\left\{Z_1,Z_2,Z_4\right\}$; შესაბამისად გვაქვს:

$$Q_5\vartheta_{XI}=\left\{\begin{array}{c}\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\\ \left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\end{array}\right\},$$

ე.ი. $m_0=5$, ხოლო Q ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმების რიცხვი $q=2$. დადგენილია, თუ როდის არის ცარიელი $Q_5\vartheta_{XI}$-ის ელემენტების თანაკვეთა; თანაკვეთის არსებობის შემთხვევაში განსაზღვრულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები; ნაპოვნია თანაკვეთაში ელემენტების რაოდენობა.

ლემა 2.4.6. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$, $Z_5\neq\varnothing$ და $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_5\right)\right| &= \left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right|+\left|R\left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right|-\\ &-\left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right|-\left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right|.\end{aligned}$$

ლემა 2.4.7. თუ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right), Z_5\neq\varnothing$ და $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ:

$\alpha\in R\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\right\}$, სადაც $Z\in\left\{Z_1,Z_2\right\}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება პირობები:

$$\begin{aligned}&Y_5^{\alpha}\supseteq Z_5,\ \ Y_5^{\alpha}\supseteq Z_3\cap Z,\ \ Y_5^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq Z_3,\ \ Y_5^{\alpha}\cup Y_{T''}^{\alpha}\supseteq Z,\\ &Y_{T'}^{\alpha}\cap Z_3\neq\varnothing,\ \ \ Y_{T''}^{\alpha}\cap Z_4\neq\varnothing.\end{aligned}$$

ლემა 2.4.8. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ და $Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავ- ლეა და $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს:

ა) $\left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right|=10\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$;

ბ) $\left|R\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right|=10\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

თეორემა 2.4.5. ვთქვათ $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ და $Z_5\neq\varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha\in B_X\left(D\right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენ-ტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეხუთეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left|R^*\left(Q_5\right)\right|=10\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+10\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

$B_X\left(D\right)$ ნახევარჯგუფის იმ რეგულარული ელემენტებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ

თეორემა 2.3.1-ის პირობებიდან მეექვსეს, $Q_6 = \left\{ Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\}$.შესაბამისად, $Q_6 \vartheta_{XI} = \left\{ \left\{ Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\} \right\}$,

ე.ი. $m_0 = 1$. Q ნახევარმესერის ყველა ავტომორფიზმების რიცხვი მოცემულ შემთხვევაში $q = 2$.

თეორემა 2.4.6. ვთქვათ $D \in \Sigma_3 \left(X, 6 \right)$ და $Z_5 \neq \varnothing$. თუ X სასრულო სიმრავლეა და $\alpha \in B_X \left(D \right)$ ბინარული მიმართება რეგულარული ელემენტია, რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 2.4.1-ის პირობებიდან მეექვსეს, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left| R^* \left(Q_6 \right) \right| = 2 \cdot \left(2^{\left| (Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_5 \right|} - 1 \right) \cdot \left(3^{\left| Z_2 \setminus Z_1 \right|} - 2^{\left| Z_2 \setminus Z_1 \right|} \right) \cdot \left(3^{\left| Z_1 \setminus Z_2 \right|} - 2^{\left| Z_1 \setminus Z_2 \right|} \right) \cdot 5^{\left| X \setminus \breve{D} \right|}.$$

თეორემა 2.4.7. თუ $D = \left\{ Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D} \right\} \in \Sigma_3 \left(X, 6 \right)$, $Z_5 \neq \varnothing$ და X სას- რულოა, მაშინ $B_X \left(D \right)$Nნახევარჯგუფის ყველა რეგულარული ელემენტების რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned}
|R| = {} & 6 + 11 \cdot \left(2^{|X \setminus Z_5|} - 2^{|X \setminus \breve{D}|} \right) + 8 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_4|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_4|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 8 \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_5|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_3|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_3|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 8 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 8 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|D \setminus Z_1|} - 2^{|D \setminus Z_1|} \right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|} + 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|} \right) \cdot \\
& \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} \right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|} \right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} \right) 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 10 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_3|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_4|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + 10 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 1 \right) \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 1 \right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\
& + 2 \cdot \left(2^{|(Z_2 \cap Z_1) \setminus Z_5|} - 1 \right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_1|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_1|} \right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_2|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_2|} \right) \cdot 5^{|X \setminus \breve{D}|}.
\end{aligned}$$

სადისერტაციო ნაშრომს ბოლოში ერთვის დანართი, სადაც მოცემულია სამი მაგალითი, რომლებშიც აგებულია $B_X \left(D \right)$ ნახევარგუფები, მითითებულია იდემპო- ტენტური და რეგულარული ელემენტები და ნაჩვენებია, რომ პრაქტიკული და თეორიული გათვლები ემთხვევა ერთმანეთს.

პრაქტიკული და თეორიული ღირებულება. სადისერტაციო ნაშრომი ატარებს თეორიულ ხასიათს. ნაშრომში მიღებული შედეგები და მოყვანილი მეთოდები შეიძლება შემდგომში გამოყენებული იქნას ნახევარჯგუფთა და ნახევარმესერთა გამოკვლევებში.

ნაშრომის აპრობაცია. ნაშრომში მიღებული შედეგები სხვადასხვა დროს იქნა მოხსენებული ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელობის სახელმწიფო უნივერსი- ტეტის მათემატიკის კათედრაზე.

დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია შემდეგი სტატიები

1. N.Rokva-Idempotent Elements of Semigroup *BX*(*D*) Defined by *X*-Semilattices of Class Σ_3(X,6). Bull. Georgian Acad. Sci. 173, 1, 2006, 26-29.

2. N.Rokva ,Ya. Diasamidze, Sh. Makharadze-Strukture of some types of Regular Elements and Idempotents of Semigroup $B_X(D)$. Bull. Georgian Acad. Sci. 173, 2, 2006, 233-235.

3. N.Rokva-Regular Elements of Semigroup $B_X(D)$ defined by X-Semilattices of Class $\Sigma_3(X,6)$. Bull. Georgian Acad. Sci. 174, 1, 2006, 36-39.