Тбилисский Государственный Университет

Имени Иванэ Джавахишвили

Нино Роква

ПОЛНЫЕ ПОЛУГРУППЫ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЁННЫЕ СЕТКАМИ И ПОЛУРЕШЁТКАМИ КЛАССА $\sum_3 (X,6)$

01.01.06. – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: Диасамидзе Яша – доктор физико-Математических наук, профессор.

Тбилиси 2006

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В в е д е н и е

Полугруппа – множество с одной бинарной операцией, удовлетворяющее закону ассоциативности. Абстрактное изучение обратимых ассоциативных операций взяла на себя теория групп. Абстрактное изучение ассоциативных операций, не являющихся повсюду обратимыми – задача теории полугрупп.

Теория полугрупп является одной из активно развивающихся областей современной алгебры. Она имеет тесные связи с самыми различными математическими дисциплинами: дифференциальной геометрией, функциональным анализом, теорией графов, теорией алгоритмов, абстрактной теорией автоматов и др.

Примеры полугрупп чрезвычайно многочисленны. Всякая совокупность преобразований произвольного множества M, замкнутая относительно операций композиции, будет полугруппой относительно этой операций: такова в частности, совокупность всех преобразовании множества M, называемая симметрической полугруппой на множестве M. С другой стороны, всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований(см.[49]). Таким образом, именно понятие полугруппы оказывается наиболее подходящим для изучения в самом общем виде преобразований и в большой степени, через рассмотрение преобразований осуществляются связи теории полугрупп с другими областями математики. К полугруппам приводит рассмотрение и бинарных отношений относительно операций умножения.

Пусть X – произвольное непустое множество; $X \times X$ – декартово произведение множества X на себя. Произвольное подмножество множества $X \times X$ называется бинарным отношением на множестве X. B_X есть множество всех бинарных отношений на множестве X и $\alpha, \beta \in B_X$. Отметим, что условие $(x, y) \in \alpha$ будем записывать в виде $x\alpha y$, а его отрицание - в виде $(x, y) \notin \alpha$. На множестве B_X определяется операция умножения $(\circ)$ бинарных отношений α и β следующим образом: $\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{существует такой } z \in X, \text{ что } x\alpha z \text{ и } z\beta y\}$. Операция умножения бинарных отношений ассоциативна и поэтому множество B_X будет полугруппой относительно умножения бинарных отношений. Она называется полугруппой всех бинарных отношений на множестве X (см.[49]).

Так как любую полугруппу можно изоморфно вложить в некоторую полугруппу бинарных отношений, то при изучении подполугрупп полугруппы B_X изучаются вообще полугруппы.

Понятие бинарного отношения является одним из основных понятий математики. Частным случаем бинарного отношения может служить отображение некоторого множества в некоторое множество.

Впервые основные понятия теории бинарных отношений были введены в работах Де Моргана, Пирса и Фреге, посвященных математической логике. В девяностых годах XIX века Е. Шредер в третьем томе своей книги «Алгебра логики» дал систематическое изложение теории бинарных отношений. В начале XX века в работе Уайтхеда и Рассела, которая опиралась на труд Е. Шредера, этой теории была посвящена целая глава. Но эти работы в теории бинарных отношений, в основном, служили в интересах основания математики и математической логики, а в других областях математики почти не применялись.

Французский математик Риге модернизировал теорию бинарных отношений Е. Шредера и сделал ее более удобной для применения. Опираясь на эту теорию, он начал систематическое построение теории упорядоченных множеств.

Отметим, что геометрический аспект теории бинарных отношений есть теория графов. Теория графов является частью теории бинарных отношений, хотя она рассматривается изолированно от последней, так как теория графов изучает свойства бинарных отношений для специальных приложений этой теории.

Теория бинарных отношений имеет важное приложение в математической лингвистике, математической биологии и целом ряде других прикладных областей математики, в теории автоматов. В частности, каждый конечный универсальный автомат можно представить, как помеченный ориентированный граф, называемый диаграммой состояний.

Одной из главных задач теории полугрупп является классификация всевозможных полугрупп, описание их строения. Это осуществляется, прежде всего, наложением на рассматриваемые полугруппы различных ограничений и выделением тем самым различных типов полугрупп. Ограничения могут иметь разную природу. Полугруппа может удовлетворять фиксированной системе тождеств (типичные примеры – коммутативные полугруппы, полугруппы идемпотентов(см.[52]). или другим условиям, выражаемым формулой узкого исчисления предикатов (напр, регулярные полугруппы).

Сложность изучения полугрупп бинарных отношений связана с тем, что они, как правило, не являются регулярными полугруппами, что технически затрудняет их исследование. В этой связи весьма интересным представляется систематическое изучение полугрупп бинарных отношений и их наиболее важных классов при помощи полных $X-$полурешеток объединений(см.[16]). Опишем этот метод. Для этого сначала введем несколько определений и обозначений.

Символом D обозначено некоторое непустое множество подмножеств множества X, замкнутое относительно теоретико-множественного объединения элементов множества D. Очевидно, что множество D является коммутативной полугруппой идемпотентных элементов относительно операций теоретико-множественного объединения. Кроме этого, D является таким частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения, что его любое непустое подмножество обладает точной верхней гранью, т.е. оно является полной полурешеткой. В дальнейшем, множество D будем называть полной $X-$полурешеткой объединений. По определению множества D имеем, что $\cup D=\bigcup_{Y\in D}Y\in D$. Этот элемент, в дальнейшем, обозначим символом $\breve{D}$, т.е. $\cup D=\breve{D}$ и является наибольшим элементом множества D.

Пусть $x, y, z-$некоторые элементы множества X; $Y-$произвольное подмножество множества X; $\alpha-$произвольный элемент полугруппы B_X, а символом $\varnothing$ обозначено пустое множество или пустое бинарное отношение. Тогда $\alpha^{-1}=\{(x,y)\mid y\alpha x\}$; $x\alpha=\{y\in X\mid x\alpha y\}$, $Y\alpha=\bigcup_{x\in Y}x\alpha$, $\alpha x=x\alpha^{-1}$, $\alpha Y=Y\alpha^{-1}$, $2^X=\{Y\mid Y\subseteq X\}$, $X^*=\{Y\mid\varnothing\neq Y\subseteq X\}$, $V(D,\alpha)=\{Y\alpha\mid Y\in D\}$, $V^{-1}(D,\alpha)=\{\alpha Y\mid Y\subseteq\breve{D}\}$, $V(X^*,\alpha)=\{Y\alpha|\varnothing\neq Y\subseteq X\}$ и $\ddot{D}'_T=\{Z'\in D'\mid Z'\subseteq T\}$. Ясно, что множества 2^X, X^*, $V(D,\alpha)$ и $V^{-1}(D,\alpha)$ являются полными $X-$полурешетками объединений.

Пусть B произвольная подполугруппа полугруппы B_X и $D(B)=\bigcup_{\alpha\in B}V(X^*,\alpha)$. Доказывается, что $D(B)$ является полной $X-$полурешеткой объединений. Отметим, что существуют такие подполугруппы B и B' полугруппы B_X, что $B\neq B'$ и $D(B)=D(B')$,(см.[39]). Допустим, что полугруппа B фиксирована. Оказывается, что существует такая подполугруппа $\overline{B}$ полугруппы B_X, для которых $D(\overline{B})=D(B)$, которая содержит все полугруппы данного множества.

В самом деле, пусть $X-$произвольное непустое множество и D является полной $X-$полурешеткой объединений. Рассмотрим произвольное отображение $f:X\to D$.Каждому такому отображению f сопоставим бинарное отношение α_f,удовлетворяющее условию $\alpha_f=\bigcup_{x\in X}(\{x\}\times f(x))$. Множество всех таких α_f обозначим через $B_X(D)$. Очевидно, что $B_X(D)$ подмножество полугруппы B_X всех бинарных отношений,(см.[39]). Доказывается, что $B_X(D)$ есть подполугруппа полугруппы B_X и является наибольшей среди тех подполугрупп B' полугруппы B_X, для которых справедливо равенство $D(B')=D$. Необходимо отметить, что $B_X(2^X)=B_X$ и $|B_X(D)|=|D|^{|X|}$, если $X-$конечное множество.

В дальнейшем класс всех полных полугрупп бинарных отношений обозначим символом Ξ . Очевидно, что каждый элемент класса Ξ зависит как от множества X , так и от полных $X-$ полурешеток объединений, которыми они определяются.

Доказательство следующих теорем можно найти в работе [39].

Теорема 1. *Пусть* $\alpha, \beta \in B_X(D)$. *В полугруппе* $B_X(D)$ *отношение* α *делится справа на отношение* β *в том и только в том случае, если* $V(X^*, \alpha) \subseteq V(D, \beta)$,*(см. теорему 4.1[39]).*

Теорема 2. *Бинарное отношение* $\varepsilon \in B_X(D)$ *является правой единицей данной полугруппы в том и только в том случае, если* $\varepsilon -$ *идемпотентно и* $D = V(D, \varepsilon)$, *(см. теорему 4.3,[39]).*

Если $\varnothing \in D$, то пустое бинарное отношение есть нуль полугруппы $B_X(D)$.

Определение 1. *Пусть* D *есть полная* $X-$ *полурешетка объединений,* $\varnothing \neq D' \subseteq D$ *и* $N(D, D') = \{Z \in D \mid Z \subseteq Z' \text{ для любого } Z' \in D'\}$. *Ясно, что* $N(D, D')$ *есть множество всех нижних граней непустого подмножества* D' *в полурешетке* D. *Если* $N(D, D') \neq \varnothing$, *то* $\cup N(D, D') \in D$ *и есть точная нижняя грань множества* D' *в* D. *Обозначим этот элемент символом* $\Lambda(D, D')$, *т.е.* $\Lambda(D, D') = \cup N(D, D')$.Если элемент $\Lambda(D, D')$ в полурешетке D существует, то мы будем писать $\Lambda(D, D') \in D$, а в противном случае - $\Lambda(D, D') \notin D$,*(см.опр.1.14.1[39]).*

Определение 2. *Будем говорить, что полная* X*–полурешетка объединений* D *является* XI*–полурешеткой объединений, если она удовлетворяет следующим двум условиям:*

a) $\Lambda(D, D_t) \in D$ *для любого* $t \in \breve{D}$,

b) $Z = \bigcup_{t \in Z} \Lambda(D, D_t)$ *для любого непустого элемента* Z *полурешетки* D,*(см.[40]).*

Теорема 3. *Пусть* D *есть полная* $X-$ *полурешетка объединений. Полугруппа* $B_X(D)$ *обладает правой единицей в том и только в том случае, если* D *является* $XI-$ *полурешеткой объединений, (см. теорему 6.1.3[39]).*

Теорема 4. *Пусть* $\beta \in B_X(D)$. *Бинарное отношение* β *является регулярным элементом полугруппы* $B_X(D)$ *в том и только в том случае, когда полная* $X-$ *полурешетка объединений* $D' = V(D, \beta)$ *удовлетворяет следующим двум условиям:*

a) $V\left(X^*,\beta\right)\subseteq D'$;

b) D' *есть полная* $XI-$*полурешетка объединений.*

Определение 3. *Пусть* D *есть произвольная полная* $X-$*полурешетка объединений,* $\alpha\in B_X\left(D\right)$ *и* $Y_T^{\alpha}=\left\{x\in X\mid x\alpha=T\right\}$. *Если*

$$V\left[\alpha\right]=\begin{cases}V\left(X^*,\alpha\right), \text{ если } \varnothing\notin D,\\ V\left(X^*,\alpha\right), \text{ если } \varnothing\in V\left(X^*,\alpha\right),\\ V\left(X^*,\alpha\right)\cup\left\{\varnothing\right\}, \text{ если } \varnothing\notin V\left(X^*,\alpha\right) \text{ и } \varnothing\in D,\end{cases}$$

то очевидно, что любое бинарное отношение α *полугруппы* $B_X\left(D\right)$ *всегда можно представит в виде* $\alpha=\bigcup\limits_{T\in V[\alpha]}\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)$. *В дальнейшем такое представление бинарного отношения* α *будем называть квазинормальным*, *(см. опр.1.11.1[39]).*

при квазинормальном представлении бинарного отношения α не все множества Y_T^{α} могут быть отличными от пустого множества. Но при таком представлении всегда выполняются следующие условия:

a) $Y_T^{\alpha}\cap Y_{T'}^{\alpha}=\varnothing$, для любых $T,T'\in D$ и $T\neq T'$;

b) $X=\bigcup\limits_{T\in V[\alpha]}Y_T^{\alpha}$.

Определение 4. *Пусть* $\tilde{D}$ *и* D' *- некоторые непустые подмножества полной* $X-$*полурешетки объединений* D. *Будем говорить, что подмножество* $\tilde{D}$ *полурешетки* D *порождает множество* D', *если любой элемент множества* D' *есть теоретико-множественное объединение некоторых элементов множества* $\tilde{D}$. *В частности, множество* $\tilde{D}$ *будем называть неприводимым порождающим множеством множества* D', *если* $\tilde{D}$ *порождает множество* D' *и в множестве* $\tilde{D}$ *нет собственного подмножества, порождающего* D' (см. опр.1.12.1[39])..

Пусть D' есть произвольное непустое подмножество полной $X-$полурешетки объединений D; $T\in D'$ и $l\left(D',T\right)=\cup\left(D'\setminus D'_T\right)$, где $D'_T=\left\{Z\in D'\mid T\subseteq Z\right\}$.

Определение 5. *Будем говорить, что непустое множество* T *является предельным элементом множества* D' *в полурешетке* D, *если* $T\setminus l\left(D',T\right)=\varnothing$ (см. опр.1.13.1[39])..

Определение 6. *Будем говорить, что непустое множество* T *является непредельным элементом множества* D' *в полурешетке* D, *если* $T\setminus l\left(D',T\right)\neq\varnothing$
(см. опр.1.13.2[39]).

Пусть $\alpha \in B_X(D)$. $T \in V(X^*, \alpha)$, $Y_T^\alpha = \{y \in X \mid y\alpha = T\}$ и $V\langle\alpha\rangle = \{T \in V(X^*, \alpha) \mid Y_T^\alpha \neq \varnothing\}$.

Определение 7. *Взаимно однозначное отображение φ между полными $X-$полурешетками объединений D' и D'' будем называть полным изоморфизмом, если для каждого непустого подмножества D_1 полурешетки D' выполняется условие $\varphi(\cup D_1) = \bigcup_{T' \in D_1} \varphi(T')$,(см. опр.6.3.2[39]).*

Определение 8. *Пусть $\alpha \in B_X(D)$. Будем говорить, что полный изоморфизм φ между полными полурешетками объединений $V(D,\alpha)$ и D' есть полный $\alpha-$изоморфизм, если $\varphi(\varnothing) = \varnothing$ при $\varnothing \in V(D,\alpha)$ и $\varphi(T)\alpha = T$ для любого $T \in V(D,\alpha)$,(см. опр.6.3.3).*

Теорема 5. *Пусть α и $\sigma-$такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, что $\alpha \circ \sigma \circ \alpha = \alpha$; Если $D(\alpha)-$некоторое порождающее множество полурешетки $V(D,\alpha)\setminus\{\varnothing\}$ и $\alpha = \bigcup_{T \in V(D,\alpha)} (Y_T^\alpha \times T)$ является квазинормальным представлением отношения α, то $V(D,\alpha)$ будет полной $XI-$полурешеткой объединения. Кроме того, существует такой полный $\alpha-$изоморфизм φ между полурешетками $V(D,\alpha)$ и $D' = \{T\sigma \mid T \in V(D,\alpha)\}$, которое удовлетворяет следующим условиям:*

a) $\varphi(T) = T\sigma$, *для любого* $T \in V(D,\alpha)$;

b) $\bigcup_{T' \in \ddot{D}(\alpha)_T} Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T)$, *для любого* $T \in D(\alpha)$;

c) $Y_T^\alpha \cap \varphi(T) \neq \varnothing$ *для любого непредельного элемента T множества $\ddot{D}(\alpha)_T$ в полурешетке $V(D,\alpha)$;*

С другой стороны, пусть $\alpha-$ такое бинарное отношение полугруппы $B_X(D)$, что множество $V(D,\alpha)$ есть $XI-$полурешетка объединений. Если для некоторого полного $\alpha-$изоморфизма φ полурешетки $V(D,\alpha)$ на некоторой подполурешетке D' полурешетки D, выполняются условия a), b) и c) данной теоремы, то α будет регулярным элементом полугруппы $B_X(D)$,(см. теор.6.3.2,[39]).

Определение 9. *Пусть $\alpha \in B_X$ и φ есть взаимно однозначное отображение некоторого подмножества D_1' полурешётки D на полурешетке $V(X^*, \alpha)$. Будем говорить, что представление бинарного отношения α в виде $\alpha = \bigcup_{T \in D_1} (Y_T^\alpha \times \varphi(T))$ является* *нормальным, если для* Y_T^{α} *и* $\varphi(T)$ *данного представления одновременно выполняются следующие условия:*

a) $D_1 \subseteq D_1'$*;*

b) $\varnothing \neq Y_T^{\alpha} \subseteq X$ *для любого* $T \in D_1$*;*

c) $Y_T^{\alpha} = Y_{T'}^{\alpha}$*, если* $\varphi(T) = \varphi(T')$*;*

d) $Y_T^{\alpha} \cap Y_{T'}^{\alpha} = \varnothing$*, если* $T, T' \in D_1$ *и* $T \neq T'$*;*

e) $\bigcup\limits_{T \in D_1} Y_T^{\alpha} = X$ *(см. опр.1.11.2).*

Символом $G_X(D,\varepsilon)$ обозначим максимальную подгруппу полугруппы $B_X(D)$, имеющей своей единицей идемпотентное бинарное отношение ε полугруппы $B_X(D)$.

Теорема 6. *Пусть* $\varepsilon = \bigcup\limits_{T \in V\langle\varepsilon\rangle} \left(Y_T^{\varepsilon} \times T\right)$ *есть нормальное представление идемпотентного бинарного отношения* ε *полугруппы* $B_X(D)$*. Тогда бинарное отношения* α *полугруппы* $B_X(D)$ *принадлежит к группе* $G_X(D,\varepsilon)$ *в том и только в том случае, когда его нормальное представление имеет вид* $\alpha = \bigcup\limits_{T \in V\langle\varepsilon\rangle} \left(Y_T^{\varepsilon} \times \varphi_{\alpha}(T)\right)$*, где* φ_{α} *является некоторым полным автоморфизом полной* $X-$*полурешетки объединений* $V(D,\varepsilon)$*,(см. теор.7.4.1[39]).*

Теорема 7. *Для любого идемпотентного бинарного отношения* ε *полугруппы* $B_X(D)$*, группа* $G_X(D,\varepsilon)$ *антиизоморфна группе всех полных автоморфизмов полурешетки* $V(D,\varepsilon)$*,(см. теор.7.4.2[39]).*

Определение 10. *Будем говорить, что элемент* α *полугруппы* S *является внешним, если для любых* $\alpha_1, \alpha_2 \in S \setminus \{\alpha\}$ *имеет место* $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \neq \alpha$*,(см. опр.1.15.1[39]).*

Теорема 8. *Пусть полная* $X-$*полурешетка объединений* D *есть цепь. Полугруппа* $B_X(D)$ *обладает правой единицей в том и только в том случае, если* $\cap D = \varnothing$ *или* $\cap D \in D$*,(см. теор.15.1.1[39]).*

Теорема 9. *Пусть* D *есть конечная цепь. Тогда все правые единицы полугруппы* $B_X(D)$ *являются внешними элементами полугруппы* $B_X(D)$*,(см. теор.15.4.3[39]).*

Теорема 10. *Пусть полная* $X-$*полурешетка объединений* D *есть цепь вида*

$T_0 \subset T_1 \subset ... \subset T_m$ $\left(T_p \neq T_q,\ p \neq q \text{ и } p, q = 0, 1, 2, ..., m\right)$

и $|T_j \setminus T_{j-1}| = k_j$*, где* $j = 1, 2, ..., m$*. Если* X *- конечное множество, то число* s *всех правых единиц полугруппы* $B_X(D)$ *равно*

$s=\left(2^{k_1}-1\right)\cdot\left(3^{k_2}-2^{k_2}\right)\cdots\left(\left(m+1\right)^{k_m}-m^{k_m}\right)\cdot|D|^{|X\setminus\breve{D}|}$, *(см.следствие 13.1.5[39]).*

Определение 11. *Будем говорить, что элемент* α *полугруппы* S *является внутренним, если существуют такие* $\alpha_1,\alpha_2\in S\setminus\{\alpha\}$, *что* $\alpha_1\cdot\alpha_2=\alpha$ *(см. опр.1.15.2[39]).*

Определение 12. *Пусть* Y *и* $Z-$*различные подмножества множества* X. *Будем говорить, что пара множеств* Y *и* $Z-$*нецепная, если* $Y\cap Z=\varnothing$ *или* $Y\setminus Z\neq\varnothing$ *и* $Z\setminus Y\neq\varnothing$, *если* $Y\cap Z\neq\varnothing$, *(см. опр.1.12.2[39]).*

Определение 13. *Пусть* $\tilde{D}$ *есть множество подмножеств множества* X. *Будем говорить, что* $\tilde{D}$ *есть множество нецепных пар, если каждая пара различных непустых элементов множества* $\tilde{D}$ *является нецепной, (см. опр.1.12.3[39]).*

Очевидно, $\tilde{D}$ есть множество нецепных пар, если теоретико-множественное пересечение любых двух различных элементов множества $\tilde{D}$ является пустым множеством.

Теорема 11. *Пусть* $\tilde{D}$ *есть такое множество нецепных пар, порождающее полную* $X-$*полурешетку объединений* D, *что* $Z_1\cap Z_2\neq\varnothing$ *для некоторых различных* Z_1 *и* Z_2 *множества* $\tilde{D}$. *Если полугруппа* $B_X(D)$ *обладает правой единицей, то все правые единицы полугруппы* $B_X(D)$ *являются её внутренними элементами,(см.теор.9.2.2 [16]).*

Теорема 12. *Пусть* $\tilde{D}$ *есть такое множество нецепных пар, порождающее полную* $X-$*полурешетку объединений* D, *что* $Z_1\cap Z_2\neq\varnothing$ *для некоторых различных элементов* Z_1 *и* Z_2 *множества* $\tilde{D}$; T *является произвольным элементом множества* $\tilde{D}^*=\tilde{D}\setminus\{\varnothing\}$, *а* T' *есть теоретико-множественное объединение всех элементов множества* $\tilde{D}$, *отличных от* T. *Если* X *есть конечное множество,* $\varnothing\in D$ *и* $T\setminus T'\neq\varnothing$ *для всех* $T\in\tilde{D}^*$, *то число* s *всех правых единиц полугруппы* $B_X(D)$ *равно* $s=\prod\limits_{T\in\tilde{D}\setminus\{\varnothing\}}\left(2^{|T\setminus T'|}-1\right)\cdot|D|^{|X\setminus\breve{D}|}$, *(см. теор.9.1.2 [16]).*

Теорема 13. *Если* $\tilde{D}$ *есть некоторое непустое множество попарно непересекающихся подмножеств множества* X, *порождающее полную* $X-$*полурешетку объединений* D, *то полугруппа* $B_X(D)$ *обладает правой единицей, (см. теор.14.2.1 [39]).*

Теорема 14. *Пусть* $\varnothing\in\tilde{D}$ *и* $\tilde{D}$ *есть множество попарно непересекающихся подмножеств конечного множества* X, *порождающего полную* $X-$*полурешетку объединений* D. *Тогда число* s *всех правых единиц полугруппы* $B_X(D)$ *равно* $s=\prod\limits_{T\in\tilde{D}^*}\left(2^{|T|}-1\right)\cdot|D|^{|X\setminus\breve{D}|}$, *(см. теор.9.3.3 [16]).*

Следствие 2. *Пусть* $\varnothing \notin \tilde{D}$ *и* $\tilde{D}$ *есть множество попарно непересекающихся подмножеств конечного множества* X *и порождает полную* $X-$*полурешетку объединений* D. *Тогда число* s *всех правых единиц полугруппы* $B_X(D)$ *равно* $s=|D|^{|X\setminus\tilde{D}|}$*,(см. следствие 9.3.1 [16]).*

Из теоремы 4 следует, что для описания строений регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$ необходимо метод, который даст возможность найти все $XI-$подполурешетки полной $X-$полурешетки объединений D. Из определения 2 следует, что главной трудностью по этому направлению является вопрос о нахождения точной нижней грани $\Lambda(D,D_t)$ множества D_t $(t\in\breve{D})$ в полурешетке D. Этот вопрос для конечной полурешетки решается следующим образом.

Теорема 15. *Пусть* $D=\{\breve{D},Z_1,Z_2,...,Z_{m-1}\}$ *есть некоторая конечная* $X-$*полурешетка объединений, а* $C(D)=\{P_0,P_1,P_2,...,P_{m-1}\}$ *является семейством множеств попарно непересекающихся подмножеств множества* X. *Если* χ *есть отображение полурешетки* D *на семействе множеств* $C(D)$, *удовлетворяющее условию* $\chi(\breve{D})=P_0$ *и* $\chi(Z_i)=P_i$, *для любого* $i=1,2,...,m-1$ *и* $\hat{D}_Z=D\setminus\{T\in D\,|\,Z\subseteq T\}$, *то справедливы следующие равенства:*

$$\breve{D}=P_0\cup P_1\cup P_2\cup...\cup P_{m-1},\ Z_i=P_0\cup\bigcup_{T\in\hat{D}_{Z_i}}\chi(T). \qquad ...(1)$$

В дальнейшем приведенные равенства будем называть формальными *(см. [34] и [35]).*

Доказывается, что при представлении элементов полурешетки D в виде (1), среди параметров P_i $(i=0,1,2,...,m-1)$ существуют такие, которые для данной полурешетки D не могут быть пустыми множествами. Такие множества P_i $(0<i\le m-1)$ будем называть базисными источниками, а те множества P_j $(0\le j\le m-1)$, которые могут быть и пустыми множествами, будем называть источниками полноты.

Доказывается, что число покрывающих элементов прообраза базисного источника при отображении χ всегда равно единице, а число покрывающих элементов прообраза источника полноты, при отображении χ, или не существуют, или всегда больше единицы.

Отметим, что множество P_0 всегда считается источником полноты.

Отметим, что применением формальных равенств, решение вопроса, является или нет конечная $X-$полурешетка объединений $XI-$полурешеткой, решается сравнительно просто.

Теорема 16. *Пусть* D' *есть полная подполурешетка полной* $X-$*полурешетки объединений* D*;* $\breve{D}'=\cup D'$ *и* f *есть произвольное отображение множества* $X\setminus\breve{D}'$ *в* D'*. Если* D' *есть полная* $XI-$*полурешетка объединений, то бинарное отношение*

$$\alpha=\alpha\left(D',f\right)=\bigcup_{t\in\breve{D}'}\left(\{t\}\times\Lambda\left(D,D'_t\right)\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}'}\left(\{t'\}\times f\left(t'\right)\right)$$

является идемпотентным элементом полугруппы $B_X\left(D\right)$ *и* $D'=V\left(D',\alpha\right)$ *(см. теор. 8.6.1 из [16]).*

Отметим, когда $D'=D$ и если принять во внимание теорему 16, получим справедливость следующего утверждения.

Следствие 3. *Пусть* D *есть полная* $X-$*полурешетка объединений,* f *- произвольное отображение множества* $X\setminus\breve{D}$ *в полурешетке* D*. Если* D *является полной* $XI-$*полурешеткой объединений, то бинарное отношение* $\alpha=\alpha\left(D,f\right)=\bigcup_{t\in\breve{D}}\left(\{t\}\times\Lambda\left(D,D_t\right)\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{D}}\left(\{t'\}\times f\left(t'\right)\right)$ *является правой единицей полугруппы* $B_X\left(D\right)$*,(см. следствие 8.6.2 [16]).*

Далее, символом $\Sigma_n\left(X,m\right)$ обозначим класс всех полных $X-$полурешеток объединений, каждый элемент, которого изоморфен некоторой фиксированной полурешетке D мощности m.

Теорема 17. *Пусть* $X-$*конечное множество* $\left|X\right|=n\geq 1$ *и* $\left|\Sigma_n\left(X,m\right)\right|=s$*. Если,* δ *и* q *соответственно являются числом базисных источников и числом всех автоморфизмов полурешетки* D*, то* $s=\dfrac{1}{q}\sum_{p=\delta}^{m}\sum_{i=1}^{p+1}\dfrac{\left(-1\right)^{p+j+1}\cdot C_{m-\delta}^{p-\delta}\cdot\left(p!\right)\cdot i^n}{\left(i-1\right)!\cdot\left(p+1-i\right)!}$, где $C_j^k=\dfrac{j!}{k!\cdot\left(j-k\right)!}$ *(см. теор.11.5.4 [39]).*

Здесь же отметим, что изучение класса Ξ при помощи изучения каждого элемента данного класса непосильная задача. Более естественным является подход, когда из класса Ξ выделяются подклассы, замкнутые относительно изоморфных образов элементов данного класса и затем изучаются выделенные классы. Одно из решений поставленной задачи даёт следующее утверждение.

Теорема 18. *Пусть* $\varnothing\in D_1$*. Если полугруппы* $B_X\left(D_1\right)$ *и* $B_X\left(D_2\right)$*, определенные полными* $X-$*полурешетками объединений* D_1 *и* D_2*, изоморфны, то также изоморфны* D_1 *и* D_2*, как частично упорядоченные множества относительно теоретико-множественного включения,(см. теор. 5.4.1 [16]).*

Из приведенной теоремы непосредственно следует, что для изучения подклассов класса Ξ, более естественно заранее зафиксировать некоторую полную $X-$полурешетку объединений и рассмотреть такой класс полных полугрупп бинарных отношений, каждый элемент которой определяется полной $X-$полурешеткой объединений, изоморфной заранее заданной полурешетке.

Если $X-$полурешетка объединений - конечное множество и ввиду того, что диаграммы изоморфных частично упорядоченных множеств идентичны, поэтому вместе фиксирований $X-$полурешетки объединений, можно фиксировать диаграмму данной полурешетки и рассмотреть такой класс полных полугрупп бинарных отношений, каждый элемент которой определяется полной $X-$полурешеткой объединений, диаграмма которой совпадает с заранее заданной диаграммой.

Следует отметить, что подкласс класса Ξ, выделенный выше описанным способом, в общем случае может содержать несколько подклассов неизоморфных полугрупп.

Отметим, что исключительно важную роль при изучении абстрактных свойств полугрупп играют регулярные элементы, идемпотенты, односторонние единицы, неприводимые и внешние элементы изучаемых полугрупп.

Сначала отметим, если $X-$конечное множество, то число s из теоремы 17 указывает на мощность класса полных полугрупп бинарных отношений, каждый элемент которого определяется некоторой полурешеткой из класса $\Sigma_n\left(X,m\right)$.

Теперь укажем общий метод, при помощи которого достигается описание идемпотентных и регулярных элементов полугрупп, принадлежащих некоторому фиксированному подклассу класса Ξ. Более того, в случае, когда $X-$конечное множество, будут указаны формулы для вычисления их числа.

для описания всех идемпотентов полугруппы $B_X\left(D\right)$ надо выделить такие полные подполугруппы бинарных отношений полугруппы $B_X\left(D\right)$, которые обладают правыми единицами. В силу теоремы 6 для выделения полных подполугрупп бинарных отношений полугруппы $B_X\left(D\right)$, которые обладают правыми единицами, сначала надо найти все такие D' подполурешетки полной $X-$полурешетки объединений D, которые являются $XI-$полурешетками и затем охарактеризовать правые единицы полугрупп $B_X\left(D'\right)$. При этом, если $\varnothing \in D$, берутся все те $XI-$подполурешетки полурешетки D, которые содержат пустое множество. Если $\varnothing \notin D$, то берутся все $XI-$подполурешетки полурешетки D.

Определение 14. *Пусть* Q *и* D' *соответственно суть некоторые* XI *и* $X-$*подполурешетки полной* $X-$*полурешетки объединений* D. $R_{\varphi}(Q,D')$ *есть такое подмножество полугруппы* $B_X(D)$, *что* $\alpha\in R_{\varphi}(Q,D')$ *только в том случае, когда для элементов* α *и* φ *выполняются следующие условия:*

a) *бинарное отношение* $\alpha-$*регулярно;*

b) $V(D,\alpha)=Q$*;*

c) φ *есть полный* $\alpha-$*изоморфизм между полными полурешетками объединений* Q *и* D'*,(см. опр.6.3.4).*

Теперь пусть $R(Q,D')=\bigcup\limits_{\varphi\in\Phi(Q,D')}R_{\varphi}(Q,D')$, где $\Phi(Q,D')$ есть множество всех полных $\alpha-$изоморфизмов полурешетки Q на полурешетку D'.

Отметим, что множества $R_{\varphi}(Q,D')$ *и* $R_{\psi}(Q,D')$ *для различных* φ *и* ψ $(\varphi,\psi\in\Phi(Q,D'))$ *всегда считаются различными. При этом если* $\alpha\in R_{\varphi}(Q,D')$, *то для полного* $\alpha-$*изоморфизма между полурешетками* $Q=V(D,\alpha)$ *и* D' *всегда берётся полный автоморфизм* φ.

Далее, пусть $R(D')=\bigcup\limits_{Q'\in\Omega(Q)}R(Q',D')$, где $\Omega(Q)$ есть множество всех таких $XI-$подполурешеток полной $X-$полурешетки объединений D, что $Q'\in\Omega(Q)$ только в том случае, когда существует некоторый полный изоморфизм между полурешетками Q' и Q.

Определение 15. *Допустим, что* $\Sigma'_{XI}(D)$ *обозначает такое подмножество всех подполурешеток* $X-$*полурешетки объединений* D, *каждый элемент которого при* $\varnothing\in D$ *есть образ некоторого полного* $\alpha-$*изоморфизма некоторой* $XI-$*подполурешетки* $X-$*полурешетки объединений* D, *содержащий пустое множество, или обозначает такое подмножество всех подполурешеток* $X-$ *полурешетки объединений* D, *каждый элемент, которого есть образ некоторого полного* $\alpha-$*изоморфизма некоторой* $XI-$*подполурешетки* $X-$*полурешетки объединений* D*,(см. опр.6.3.5[39]).*

Далее, пусть $D',D''\in\Sigma'_{XI}(D)$ *и* $\vartheta_{XI}\subseteq\Sigma'_{XI}(D)\times\Sigma'_{XI}(D)$. *Будем считать, что* $D'\vartheta_{XI}D''$ *только в том случае, когда существует некоторый полный изоморфизм* φ *между полурешетками* D' *и* D''. *Легко проверяется, что бинарное отношение* ϑ_{XI} *есть отношение эквивалентности на множестве* $\Sigma'_{XI}(D)$.

Понятно, что каждый $\vartheta_{XI}-$*класс эквивалентности* ϑ_{XI} *множества* $\Sigma'_{XI}(D)$ *содержит некоторую* $XI-$*подполурешетку* $X-$*полурешетки объединений* D. *В каждом* $\vartheta_{XI}-$*классе эквивалентности* ϑ_{XI} *множества* $\Sigma'_{XI}(D)$ *выберем, такой представитель и через* $\Sigma_{XI}(D)$ *обозначим множество представителей всех* $\vartheta_{XI}-$*классов эквивалентности* ϑ_{XI} *множества* $\Sigma'_{XI}(D)$.

Далее, если $Q\in\Sigma'_{XI}(D)$, *то символом* $Q\vartheta_{XI}$ *обозначается тот* $\vartheta_{XI}-$*класс эквивалентности* ϑ_{XI} *множества* $\Sigma'_{XI}(D)$, *который содержит элемент* $Q\in\Sigma'_{XI}(D)$ *и* $R^*(Q)=\bigcup\limits_{D'\in Q\vartheta_{XI}} R(D')$.

Теперь пусть $I(D')$ *есть множество всех идемпотентов, содержащихся в множестве* $R(D')$ *и* $I^*(Q)=\bigcup\limits_{D'\in Q\vartheta_{XI}} I(D')$.

Теорема 19. *Пусть* R *есть множество всех регулярных элементов полугруппы* $B_X(D)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $R(D')\cap R(D'')=\varnothing$ *для любых* $D',D''\in\Sigma_{XI}(D)$ *и* $D'\neq D''$*;*

b) $R=\bigcup\limits_{D'\in\Sigma_{XI}(D)} R(D')$**;**

c) *если* $X-$*конечное множество, то* $|R|=\sum\limits_{D'\in\Sigma_{XI}(D)}\left|R(D')\right|$,*(см. теор. 6.3.6[39]).*

Следствие 5. *Пусть* Q *есть некоторая* $XI-$*подполурешетка* $X-$*полурешетки объединений* D. *Если символом* $i(Q,D)$ *обозначено число всех таких идемпотентных бинарных отношений полугруппы* $B_X(D)$ *для которых* $V(D,\alpha)=Q$, *то* $i(Q,D)=\frac{1}{m_0\cdot q}\cdot\left|R(D')\right|$, *где* $\Phi(Q,Q)=q$ и $\Omega(Q)=m_0$,*(см. следствие. 6.3.6[39]).*

Теорема 20. Пусть $Q=\{T_0,T_1,...,T_m\}$ $(m\geq 1)$ есть такая подполурешетка полурешетки объединений D, что $T_0\subset T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_m$.

Если XI-полурешетки $Q=\{T_0,T_1,\cdots,T_m\}$ и $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\cdots\overline{T}_m\}$ изоморфны и $\left|\Omega(Q)\right|=m_0$, то

$$\left|R(D')\right|=m_0\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_0\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\right|}-2^{\left|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1\right|}\right)\cdots\left((m+1)^{\left|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}\right|}-m^{\left|\overline{T}_m\setminus\overline{T}_{m-1}\right|}\right)\cdot(m+1)^{\left|X\setminus\overline{T}_m\right|},$$

(см.теор.13.1.2[39]).

Глава 1

1.1. ПОЛУГРУППЫ $B_X(D)$, ОПРЕДЕЛЁННЫЕ КОНЕЧНЫМИ СЕТКАМИ

Определение 1.1.1. *Пусть* $N_m=\{0,1,2,...,m\}$ $(m\geq 1)$. *Подполурешетка* $Q=\{T_{ij}\subseteq X\,|\,i\in N_s, j\in N_k\}$ *полной* $X-$*полурешетки объединений* D *будем называть сеткой размера* $(s+1,\,k+1)$, *если она содержит два подмножество* $Q_1=\{T_{00},T_{10},\ldots,T_{s0}\}$, $Q_2=\{T_{00},T_{01},...,T_{0k}\}$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

a) $T_{00}\subset T_{10}\subset\ldots\subset T_{s0}$ *и* $T_{00}\subset T_{01}\subset T_{02}\subset\ldots\subset T_{0k}$*;*

b) $Q_1\cap Q_2=\{T_{00}\}$*;*

c) $T_{pq}\neq T_{ij}$, *если* $(p,q)\neq(i,j)$*;*

d) *Элементы множеств* Q_1 *и* Q_2 *попарно несравнимы;*

e) $T_{ij}\cup T_{i'j'}=T_{pq}$, *если* $p=\max\{i,i'\}$ *и* $q=\max\{j,j'\}$.

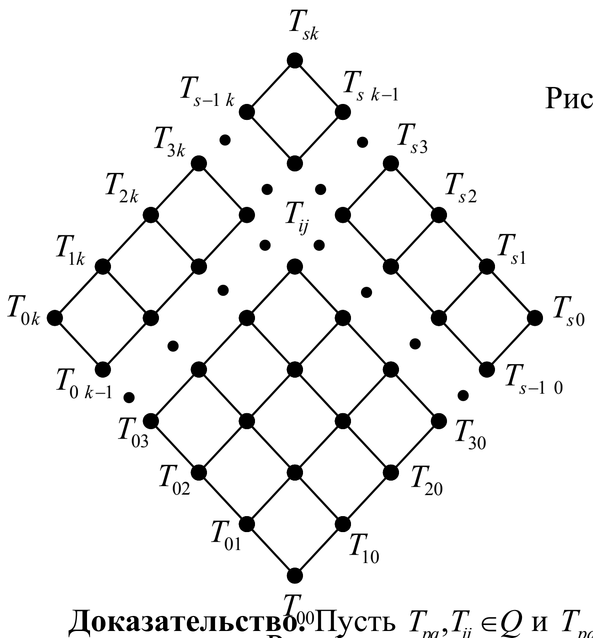


Рис. 1

Отметим, что диаграмма сетки Q изображена на Рис. 1.

Лемма 1.1.1. *Пусть* $X-$*полурешетка объединений* Q *есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $T_{pq}\subseteq T_{ij}$ *в том и только в том случае, когда* $p\leq i$ *и* $q\leq j$*;*

b) $Q_1\cup Q_2$ *есть неприводимое порождающее множество сетки* Q*;*

c) $|Q|=(s+1)\cdot(k+1)$.

Доказательство. Пусть $T_{pq},T_{ij}\in Q$ и $T_{pq}\subseteq T_{ij}$. Тогда $T_{pq}\cup T_{ij}=T_{ij}$. Отсюда в силу условий e) определения 1.1. получим, что $i=\max\{p,i\}$ и $j=\max\{q,j\}$, т.е. $p\leq i$ и $q\leq j$.

С другой стороны, если для элементов $T_{pq},T_{ij}\in Q$ выполняются условия $p\leq i$ и $q\leq j$, то $\max\{p,i\}=i$, $\max\{q,j\}=j$ и поэтому $T_{pq}\cup T_{ij}=T_{ij}$. Значит, справедливо включение $T_{pq}\subseteq T_{ij}$.

Утверждение а) доказано.

Далее, пусть T_{ij} произвольный элемент сетки Q. Тогда $0 \le i \le s$, $0 \le j \le k$ и в силу условий е) определения сетки получаем, что $T_{ij} = T_{i0} \cup T_{0j}$, где $T_{i0} \in Q_1$ и $T_{0j} \in Q_2$. Значит, $Q_1 \cup Q_2$ есть порождающее множество сетки Q.

Теперь пусть T_{mn} - такой элемент множества $Q_1 \cup Q_2$ и Q' - такое собственное подмножество множества $Q_1 \cup Q_2$, что $T_{mn} \notin Q'$ и $T_{mn} = \cup Q'$.

1) Если $Q' \subseteq Q_1$ или $Q' \subseteq Q_2$, то в силу условия а) определения множество Q' есть конечный цепь, поэтому $\cup Q'$ совпадает наибольшему элементу цепы Q'. Отсюда следует, что $T_{mn} \in Q'$. Однако последнее условие противоречит предположению, что $T_{mn} \notin Q'$.

2) Теперь пусть $Q' \cap Q_1 \ne \varnothing$ и $Q' \cap Q_2 \ne \varnothing$. Если T_{i0} и T_{0j} соответственно суть наибольшие элементы цепи $Q' \cap Q_1$ и $Q' \cap Q_2$, то $T_{mn} = T_{i0} \cup T_{0j}$. Отсюда в силу условия е) определения 1.1. получим, что $m = \max\{i, 0\}$ и $n = \max\{0, j\}$, т.е. $m = i$ и $n = j$. Значит, $T_{i0} = T_{m0}$, $T_{0j} = T_{0n}$ и $T_{mn} = T_{m0} \cup T_{0n}$.

В силу того, что $T_{mn} \in Q_1 \cup Q_2$ имеем $m = 0,\ n \ne 0$ или $m \ne 0,\ n = 0$ или $m = n = 0$. Учитывая равенства $T_{mn} = T_{m0} \cup T_{0n}$, соответственно получим: $T_{0n} = T_{00} \cup T_{0n} = T_{0n} \in Q_2$ или $T_{m0} = T_{m0} \cup T_{00} = T_{m0} \in Q_1$ или $T_{00} = T_{00} \cup T_{00} = T_{00} \in Q_1$. Но условия $T_{0n} \in Q_2$, $T_{m0} \in Q_1$ и $T_{00} \in Q_1$ противоречит предположению, что $T_{mn} \notin Q'$.

Противоречия, полученные в пунктах 1) и 2) показывают, что $Q_1 \cup Q_2$ является неприводимым порождающим множеством сетки Q,*(см. опр. 1.12.1 из [39]).*

Утверждение b) доказано.

Утверждение с) данной леммы непосредственно следует из условий с) определения сетки.

Лемма доказана.

Теперь опишем все автоморфизмы сетки Q. Для этого на сетке Q определим бинарное отношение θ, согласно которому $T_{ij} \theta T_{pq}$ $\left(T_{ij}, T_{pq} \in Q\right)$ только в том случае, когда элементы T_{ij} и T_{pq} покрываются одинаковым числом элементов сетки Q и покрывают одинаковое число элементов сетки Q.

Ясно, что бинарное отношение θ есть отношение эквивалентности на сетке Q. Обозначим символом Q_{mn} тот $\theta-$класс эквивалентности сетки Q, каждый элемент, которого покрывается m элементами сетки Q и покрывает n элементов сетки Q (m и n - натуральные числа).

Лемма 1.2. *Если φ есть автоморфизм сетки Q и $T_{ij} \in Q_{mn}$, то $\varphi(T_{ij}) \in Q_{mn}$.*

Доказательство. Будем считать, что $Q'(T)$ и $Q''(T)$ соответственно суть множество всех тех элементов сетки Q, которые покрывают элемента T в сетке Q и множество всех тех элементов сетки Q, которые покрываются элементом T.

Пусть $T_{ij} \in Q_{mn}$. Тогда по определению множества $Q'(T_{ij})$ имеем $T \supset T_{ij}$ для любого $T \in Q'(T_{ij})$. По предположению отображение φ есть автоморфизм сетки Q и поэтому $\varphi(T) \supset \varphi(T_{ij})$. Далее, если T' - такой элемент сетки Q, что $\varphi(T) \supseteq \varphi(T') \supseteq \varphi(T_{ij})$, то отсюда и из условия, что отображение φ^{-1}есть автоморфизмом сетки Q получаем $T \supseteq T' \supseteq T_{ij}$. По предположению элемент T покрывает элемента T_{ij} в сетке Q. Поэтому из включений $T \supseteq T' \supseteq T_{ij}$ следуют равенства $T = T'$ или $T' = T_{ij}$. Итак, $\varphi(T) = \varphi(T')$ или $\varphi(T') = \varphi(T_{ij})$. Последние равенства означают, что элемент $\varphi(T)$ покрывает элемента $\varphi(T_{ij})$ в сетке Q. Значит, справедливо неравенство $\left|Q'(T_{ij})\right| \le \left|Q'(\varphi(T_{ij}))\right|$.

Аналогично можно показать, что $\left|Q'(\varphi(T_{ij}))\right| \le \left|Q'(T_{ij})\right|$, т.е. имеет место следующее равенство $\left|Q'(T_{ij})\right| = \left|Q'(\varphi(T_{ij}))\right|$. Принимая во внимание тот факт, что $m = \left|Q'(T_{ij})\right|$, будем иметь $\left|Q'(\varphi(T_{ij}))\right| = m$.

Аналогично можно получить, что $\left|Q''(\varphi(T_{ij}))\right| = n$.

Из условий $\left|Q'(\varphi(T_{ij}))\right| = m$ и $\left|Q''(\varphi(T_{ij}))\right| = n$ по определению множества Q_{mn} следует, что $\varphi(T_{ij}) \in Q_{mn}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Множествами вида*

$Q_{02} = \{T_{sk}\}$, $Q_{20} = \{T_{00}\}$, $Q_{12} = \{T_{1k}, T_{2k}, \ldots, T_{s-1\,k}, T_{s1}, T_{s2}, \ldots, T_{s\,k-1}\}$,

$Q_{21} = \{T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0\,k-1}, T_{10}, T_{20}, \ldots, T_{s-1\,0}\}$, $Q_{11} = \{T_{0k}, T_{s0}\}$ *и*

$Q_{22} = Q \setminus (Q_{02} \cup Q_{20} \cup Q_{12} \cup Q_{21} \cup Q_{11})$

исчерпываются все $\theta-$классы эквивалентности сетки Q.

Доказательство. Данная лемма непосредственно следует из определения сетки Q.

Пусть $W_0=\{T_{00}\}$ и W_i множество всех тех элементов сетки Q, которые покрывают некоторого элемента множества W_{i-1}, где $i=1,2,...,s+k$.Из определения множеств W_i и сетки Q непосредственно следует, что $W_0=\{T_{00}\}$, $W_1=\{T_{01},T_{10}\}$, $W_2=\{T_{02},T_{11},T_{20}\}$,…, $W_{s+k-1}=\{T_{s-1\,k},T_{s\,k-1}\}$, $W_{s+k}=\{T_{sk}\}$, т.е. $T_{pq}\in W_i$, только в том случае, когда $p+q=i$.

Лемма 1.4. *Элементы множества W_i попарно не сравнимы относительно теоретико-множественного включения.*

Доказательство. Пусть $T_{ij},T_{pq}\in W_k$ $(0\le k\le s+k)$. Тогда $i+j=p+q=k$ и без ограничения общности можем считать, что $T_{ij}\subseteq T_{pq}$. Тогда в силу утверждения а) леммы 1.1. будем иметь: $i\le p$ и $j\le q$.

Относительно $i\le p$ и $j\le q$ рассмотрим следующие случаи.

1) $i<p$. По предположению имеем $j=k-i$ и $j\le q$. Значит, справедливы неравенства $k-i\le q$ и $k-p<q$. Отсюда получим $k<p+q$. Однако, неравенство $k<p+q$ противоречит предположению, что $p+q=k$. Полученное противоречие показывает справедливость равенства $i=p$. Значит, $j=q$, так как $i+j=p+q=k$.

2) $j<q$. Тогда, как и в случае 1), можно получит, что $j=q$ и $i=p$.

Результаты, полученные в пунктах 1) и 2) показывают, что $T_{ij}=T_{pq}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если φ есть автоморфизм сетки Q и $T_{pq}\in W_j$, где $0\le j\le s+k$, то $\varphi(T_{pq})\in W_j$.*

Доказательство. Докажем данную лемму по индукции по натуральному числу j. В самом деле, из условия $T_{00}\in W_0$ следует $\varphi(T_{00})=T_{00}\in W_0$, так как T_{00} есть наименьший элемент полурешетки Q. Далее будем считать, что для любого $i<j$ из условия $T\in W_i$ всегда следует условие $\varphi(T)\in W_i$. Теперь пусть $T_1\in W_j$ для некоторого $T_1\in Q$. Тогда в силу определения множества W_j в множестве W_{j-1} существует такой элемент T_1', что элемент T_1 покрывает элемента T_1' в сетке Q. Тогда элемент $\varphi(T_1)$ будет покрывать элемента $\varphi(T_1')$ в сетке Q. По индуктивному предположению имеем $\varphi(T_1')\in W_{j-1}$, так как $T_1'\in W_{j-1}$. Из условия,

что элемент $\varphi(T_1)$ покрывает элемента $\varphi(T_1')$ множества W_{j-1} и по определению множества W_j следует, что $\varphi(T_1) \in W_j$.

Значит, если φ есть автоморфизм сетки Q и $T_{pq} \in W_j$, то $\varphi(T_{pq}) \in W_j$ для любого $j = 0, 1, 2, ..., s+k$.

Лемма доказана.

Теорема 1.1.1. *Если φ есть автоморфизм сетки Q размерности $(s+1, k+1)$, то φ совпадает хотя бы одному из автоморфизмов приведенному ниже:*

a) *если $s \neq k$, то φ есть тождественны автоморфизм;*

b) *если $s = k$, то либо тождественный автоморфизм, либо $\varphi(T_{ij}) = T_{ji}$ для любого $T_{ij} \in Q$.*

Доказательство. Пусть φ есть некоторый автоморфизм сетки Q. Тогда в силу леммы 1.2 имеем, что $\varphi(T_{sk}) = T_{sk}$, $\varphi(T_{00}) = T_{00}$. Кроме того, согласно той же леммы, для множества Q_{11} имеем:

$\varphi(T_{0k}) = T_{s0}$ и $\varphi(T_{s0}) = T_{0k}$ или $\varphi(T_{0k}) = T_{0k}$ и $\varphi(T_{s0}) = T_{s0}$.

Сначала рассмотрим случаи $\varphi(T_{0k}) = T_{s0}$ и $\varphi(T_{s0}) = T_{0k}$. По определению сетки Q имеем, что $T_{0\,k-1} \in Q_{21}$ и элемент T_{0k} покрывает элемента $T_{0\,k-1}$. Поэтому, элемент $\varphi(T_{0k}) = T_{s0}$ покрывает элемента $\varphi(T_{0\,k-1})$. По определению сетки Q тот единственным элементом сетки Q и принадлежащий множеству Q_{21} (см. лемму 1.2.), которое покрывается элементом $\varphi(T_{0k}) = T_{s0}$ является элемент $T_{s-1\,0}$, т.е. $\varphi(T_{0\,k-1}) = T_{s-1\,0}$. Далее, элемент $T_{0\,k-2}$ покрывается элементом $T_{0\,k-1}$. Поэтому элемент $\varphi(T_{0\,k-2})$ покрывается элементом $\varphi(T_{0\,k-1}) = T_{s-1\,0}$. Но тот единственный элемент в сетке Q и принадлежащий множеству Q_{21}, который покрывается элементом $T_{s-1\,0}$ есть элемент $T_{s-2\,0}$, т.е. $\varphi(T_{0\,k-2}) = T_{s-2\,0}$. Продолжая выше приведенный процесс, получим:

$$\varphi(T_{0\,k-1}) = T_{s-1\,0},\ \varphi(T_{0\,k-2}) = T_{s-2\,0},\ \ldots.\ \ldots(1.1)$$

Теперь относительно чисел s и k рассмотрим следующие случаи:

1) $s > k$**.** Тогда из условий (1) непосредственно следует справедливость следующих включений:

$$\varphi(T_{0\,k-1}) = T_{s-1\,0},\ \varphi(T_{0\,k-2}) = T_{s-2\,0},\ \ldots,\ \varphi(T_{01}) = T_{s-k+1\,0},$$

где $s-k+1\geq 2$. По определению сетки Q имеем, что элемент T_{01} покрывает элемента T_{00} и поэтому элемент $\varphi(T_{01})$ покрывает элемента $\varphi(T_{00})$. Далее ввиду того, что $\varphi(T_{01})=T_{s-k+1\ 0}$ и в сетки Q элемент $T_{s-k+1\ 0}$ покрывает единственного элемента $T_{s-k\ 0}$, поэтому $\varphi(T_{00})=T_{s-k\ 0}$. Но по определению сетки Q имеем, что $\varphi(T_{00})=T_{00}$. Однако равенства $T_{s-k\ 0}=T_{00}$ невозможен ввиду выполнения условий $s>k$.

Полученное противоречие показывает, что случай $s>k$ невозможен.

2) $k>s$. В этом случае в силу условий (1.1) будем иметь:

$$\varphi(T_{0\ k-1})=T_{s-1\ 0},\ \varphi(T_{0\ k-2})=T_{s-2\ 0},\ \ldots,\ \varphi(T_{0\ k-s+1})=T_{10},$$

где $k-s+1\geq 2$. Здесь, как и в пункте 1) получим, что $T_{0\ k-s}=T_{00}$, что также невозможно, в силу выполнения условий $k>s$.

3) $k=s$**.** В этом случае из условий (1.1) получаем:

$$\varphi(T_{0\ \mathrm{s}-1})=T_{s-1\ 0},\ \varphi(T_{0\ \mathrm{s}-2})=T_{s-2\ 0},\ \ldots,\ \varphi(T_{01})=T_{10}.$$

В этих условиях для любого $T_{ij}\in Q\setminus(Q_{02}\cup Q_{20}\cup Q_{21}\cup Q_{11})$ будем иметь $T_{ij}=T_{i0}\cup T_{0j}$, т.е. $T_{i0},T_{0j}\subseteq T_{ij}$ и поэтому $\varphi(T_{i0}),\varphi(T_{0j})\subseteq\varphi(T_{ij})$. Из включения $\varphi(T_{i0}),\varphi(T_{0j})\subseteq\varphi(T_{ij})$ получим:

$$\varphi(T_{ij})\supseteq\varphi(T_{i0})\cup\varphi(T_{0j})=T_{0i}\cup T_{j0}=T_{ji}.$$

По предположению $T_{ij}\in W_{i+j}$. В силу леммы 1.4. имеем, что $\varphi(T_{ij})\in W_{i+j}$. По определению сетки Q и множества W_{i+j} также имеем, что $T_{ji}\in W_{i+j}$. Значит, $\varphi(T_{ij}),T_{ji}\in W_{i+j}$ и $\varphi(T_{ij})\supseteq T_{ji}$. Отсюда согласно той же лемме получим, что $\varphi(T_{ij})=T_{ji}$.

Итак, при $s=k$ имеем $\varphi(T_{ij})=T_{ji}$ для любого элемента T_{ij} сетки Q.

4) $\varphi(T_{0k})=T_{0k}$ и $\varphi(T_{s0})=T_{s0}$. По определению сетки Q имеем, что $T_{0\ k-1}\in Q_{21}$ и элемент T_{0k} покрывает элемента $T_{0\ k-1}$. Поэтому, элемент $\varphi(T_{0k})=T_{0k}$ покрывает элемента $\varphi(T_{0\ k-1})$. По определению сетки Q единственным элементом сетки Q, которое покрывается элементом $\varphi(T_{0k})=T_{0k}$ является элемент $T_{0\ k-1}$, т.е. $\varphi(T_{0\ k-1})=T_{0\ k-1}$. Далее, элемент $T_{0\ k-2}$ покрывается элементом $T_{0\ k-1}$. Поэтому элемент $\varphi(T_{0\ k-2})$ покрывается элементом $\varphi(T_{0\ k-1})=T_{0\ k-1}$. Но тот единственный элемент в сетке Q, который покрывается элементом $T_{0\ k-1}$ есть элемент $T_{0\ k-2}$, т.е. $\varphi(T_{0\ k-2})=T_{0\ k-2}$. Продолжая выше приведенный процесс, получим:

$$\varphi(T_{0\ k-1})=T_{0\ k-1},\ \varphi(T_{0\ k-2})=T_{0\ k-2},\ \ldots\varphi(T_{01})=T_{01}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\varphi\left(T_{s-1\ 0}\right)=T_{s-1\ 0},\ \varphi\left(T_{s-2\ 0}\right)=T_{s-2\ 0},\ldots,\varphi\left(T_{10}\right)=T_{10}.$$

Итак, выполняются следующие условия:

$\varphi\left(T_{0k}\right)=T_{0k}$, $\varphi\left(T_{s0}\right)=T_{s0}$, $\varphi\left(T_{sk}\right)=T_{sk}$ и $\varphi\left(T_{00}\right)=T_{00}$,

$\varphi\left(T_{0\ k-1}\right)=T_{0\ k-1}$, $\varphi\left(T_{0\ k-2}\right)=T_{0\ k-2}$, $\ldots.\varphi\left(T_{01}\right)=T_{01}$, …(1.2)

$\varphi\left(T_{0\ k-1}\right)=T_{0\ k-1}$, $\varphi\left(T_{0\ k-2}\right)=T_{0\ k-2}$, $\ldots.\varphi\left(T_{01}\right)=T_{01}$.

Теперь принимая во внимание условий (1.2) аналогично пункту 3) для любого $T_{ij}\in Q\setminus\left(Q_{02}\cup Q_{20}\cup Q_{21}\cup Q_{11}\right)$ можно доказать, что $\varphi\left(T_{ij}\right)=T_{ij}$, т.е. φ есть тождественный автоморфизм сетки Q.

Теорема доказана.

Лемма 1.1.6. *Пусть X – полурешетка объединений Q есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *формальные равенства сетки Q имеют вид $T_{pq}=P_{sk}\cup\bigcup\limits_{T_{ij}\in Q\setminus Q_{T_{pq}}}\varphi\left(T_{ij}\right)$, где T_{pq} есть произвольный элемент сетки Q;*

b) *элементы множества $P_1=\left\{P_{0k},P_{1k},\ldots,P_{s-1\ k},P_{s0},P_{s1},\ldots,P_{s\ k-1}\right\}$ являются базисными источниками сетки Q;*

c) *элементы множества $P\setminus P_1$ являются источниками полноты сетки Q;*

d) $Q^{\wedge}=Q_1\cup Q_2$.

Доказательство. Сначала найдём формальные равенства сетки Q. В самом деле, пусть P_{ij} $\left(i=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots,k\right)$ - некоторые попарно непересекающиеся подмножества множества X и $P=\left\{P_{ij}\mid i=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots,k\right\}$. φ есть отображение полурешетки Q на множестве P, удовлетворяющее условию $\varphi\left(T_{ij}\right)=P_{ij}$ для любого $T_{ij}\in Q$. Тогда формальные равенства сетки Q в силу равенств *(см. [34] и [35])* будут иметь вид $T_{pq}=P_{sk}\cup\bigcup\limits_{T_{ij}\in Q\setminus Q_{T_{pq}}}\varphi\left(T_{ij}\right)$ для любого $T_{pq}\in Q$.

Утверждение а) доказано.

Далее, из диаграммы сетки Q (см. Рис. 1) непосредственно видно, что число элементов покрываемых элемента T_{pk} и T_{sq}, $\left(p=0,1,2,\ldots,s-1,\ q=0,1,2,\ldots,k-1\right)$ в сетке Q равно единице. Отсюда и принимая во внимание следствие 11.4.2 из [39] получим, что элементы множества $P_1 = \{P_{0k}, P_{1k}, ..., P_{s-1\,k}, P_{s0}, P_{s1}, ..., P_{s\,k-1}\}$ являются базисными источниками сетки Q.

Утверждение b) доказано.

Теперь, если $T_{ij} \in Q \setminus \{T_{0k}, T_{1k}, ..., T_{s-1\,k}, T_{s0}, T_{s1}, ..., T_{s\,k-1}\}$ и $T_{ij} \neq T_{sk}$, то элемент T_{ij} покрывается элементами $T_{i+1\,j}$ и $T_{i\,j+1}$ (см. Рис. 1). Поэтому в силу следствие 11.4.2 из [39] получим, что элементы множества $P \setminus P_1$ являются источниками полноты сетки Q.

Утверждение c) доказано.

Отметим, что силу утверждения a) леммы 1.1.1 справедливы следующие равенства

$$T_{sk} = P_{sk} \cup \bigcup_{T_{ij} \in Q \setminus Q_{T_{sk}}} \varphi(T_{ij}) = P_{sk} \cup \bigcup_{T_{ij} \in Q \setminus \{T_{sk}\}} P_{ij} = \cup P.$$

Поэтому для любого $t \in \breve{Q}$ существует такое $P_{mn} \in P$ $(0 \leq m \leq s,\ 0 \leq n \leq k)$, что $t \in P_{mn}$.

Найдём необходимые и достаточные условия, когда $t \in P_{mn} \subseteq T_{pq}$. Иначе говоря, для элементов $t \in P_{mn}$ найдём необходимые и достаточные условия, когда $T_{pq} \in Q_t$.

В самом деле, если $P_{m\,n} \subseteq T_{p\,q}$, то в силу утверждения a) леммы 1.1.1 будем иметь, что $P_{mn} = P_{sk}$ или $T_{mn} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}$.

1) Если $P_{mn} = P_{sk}$, то $t \in T_{pq}$ для любого $T_{pq} \in Q$. Значит, $Q_t = Q$ и поэтому $\Lambda(Q, Q_t) = T_{00}$ по определению сетки Q.

Дальше будем считать, что $(m,n) \neq (s,k)$ и $T_{mn} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}$. Относительно элементов m и n рассмотрим следующие случаи:

2) $m = s$, $0 \leq n < k$. Тогда в силу $T_{sn} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}$ будем иметь $T_{sn} \in Q$ и $T_{sn} \notin Q_{T_{pq}}$. В силу определения множества $Q_{T_{pq}}$ (см. опр. 1.10 из [39]) условие $T_{sn} \notin Q_{T_{pq}}$ имеет место только в том случае, когда $T_{pq} \not\subseteq T_{sn}$. В силу утверждения a) леммы 1.1. условие $T_{pq} \not\subseteq T_{sn}$ выполняется только тогда, когда $q \leq n$ не имеет место, так как неравенство $p \leq s$ всегда справедливо по предположению. Значит, условие $q \leq n$ не имеет место, когда $q > n$.

Итак, если $0 \leq n < k$ и $T_{sn} \notin Q_{T_{pq}}$, то $q \geq n+1$.

Следовательно, если $t \in P_{sn}$ и $0 \leq n < k$, то

$$Q_t = \{T_{pq} \in Q \mid 0 \leq p \leq s \text{ и } q \geq n+1, \text{ где } 0 \leq n < k\}.$$

Далее, в силу утверждения а) леммы 1.1. следует, что $T_{0\ n+1}$ является наименьшим элементом множества Q_t. Поэтому $\Lambda(Q, Q_t) = T_{0\ n+1}$ для любого $t \in P_{sn}$ и $0 \le n < k$.

3) $0 \le m < s$, $n = k$. Тогда в силу $T_{mk} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}$ будем иметь $T_{mk} \in Q$ и $T_{mk} \notin Q_{T_{pq}}$. В силу определения множества $Q_{T_{pq}}$ (см. 1.10 из [39]) условие $T_{mk} \notin Q_{T_{pq}}$ имеет место только в том случае, когда $T_{pq} \not\subseteq T_{mk}$. В силу утверждения а) леммы 1.1. условие $T_{pq} \not\subseteq T_{mk}$ выполняется только тогда, когда $p \le m$ не имеет место, так как условие $q \le k$ всегда справедливо по предположению. Значит, условие $p \le m$ не имеет место, когда $p > m \ge 0$.

Итак, если $0 \le m < s$ и $T_{mk} \notin Q_{T_{pq}}$, то $p \ge m+1$.

Следовательно, если $t \in P_{mk}$ и $0 \le m < s$, то

$$Q_t = \left\{ T_{pq} \in Q \mid 0 \le q \le k \text{ и } p \ge m+1, \text{ где } 0 \le m < s \right\}.$$

Далее, в силу утверждения а) леммы 1.1.1. следует, что $T_{m+1\ 0}$ является наименьшим элементом множества Q_t. Поэтому $\Lambda(Q, Q_t) = T_{m+1\ 0}$ для любого $t \in P_{mk}$ и $0 \le m < s$.

4) $0 \le m < s$, $0 \le n < k$ и $T_{mn} \in Q \setminus Q_{T_{pq}}$. Тогда $T_{mn} \in Q$ и $T_{mn} \notin Q_{T_{pq}}$. В силу определения множества $Q_{T_{pq}}$ (см. 1.10 из [39]) условие $T_{mn} \notin Q_{T_{pq}}$ имеет место только в том случае, когда $T_{pq} \not\subseteq T_{mn}$. В силу утверждения а) леммы 1.1.1. условие $T_{pq} \not\subseteq T_{mn}$ выполняется только тогда, когда хотя бы одно из условий $p \le m$ или $q \le n$ не имеет место. Значит, условия $p \le m$ или $q \le n$ не имеет место, когда $p > m \ge 0$ или $q > n \ge 0$.

Значит, если $0 \le m < s$, $0 \le n < k$ и $T_{mn} \notin Q_{T_{pq}}$, то $p \ge m+1$ или $q \ge n+1$.

Следовательно, если $t \in P_{mn}$ и $0 \le m < s$, $0 \le n < k$, то

$$Q_t = \left\{ p \ge m+1,\ q \ge n+1, \text{ где } 0 \le m < s \text{ и } 0 \le n < k \right\}.$$

Итак, если $t \in P_{mn}$ и $0 \le m < s$, $0 \le n < k$, то $T_{m+1\ 0}, T_{0\ n+1} \in Q_t$. Отсюда и по определению сетки Q получим, что $\Lambda(Q, Q_t) = T_{00}$.

Теперь принимая во внимание результаты, полученные в пунктах 1) – 4) будем иметь, что

$$Q^{\wedge} = \left\{ T_{00}, T_{01}, T_{02}, ..., T_{0k}, T_{10}, T_{10}, ..., T_{s0} \right\} = Q_1 \cup Q_2.$$

Утверждение d) доказано.

Лемма доказана.

Из утверждения b) леммы 1.1.1 и из определения базисных источников полурешетки Q непосредственно следует, что для существования сетки Q размера $(s+1, k+1)$ необходимо, что $|X| \geq s+k$. В этих условиях будем иметь

$$\left|B_X(Q)\right| \geq |Q|^{s+k}.$$

Теорема 1.1.2. *Если Q есть сетка, то она является $XI-$полурешеткой объединений.*

Доказательство. Сначала отметим, что $N(Q, Q_t) \neq \varnothing$ $\left(T_{00} \in N(Q, Q_t)\right)$ для любого $t \in \breve{Q}$. Отсюда и в силу утверждения a) леммы 1.14.1 из [39] получим, что $\Lambda(Q, Q_t) \in Q$ для любого $t \in \breve{Q}$.

Далее, в силу утверждения d) леммы 1.1.6. имеем, что $Q^{\wedge} = Q_1 \cup Q_2$. Кроме того, в силу утверждения b) леммы 1.1.1 следует, что $Q^{\wedge}$ есть порождающее множество сетки Q. Значит, любой непустой элемент сетки Q является объединением некоторых элементов множества $Q^{\wedge}$. Отсюда и принимая во внимание тот факт, что $\Lambda(Q, Q_t) \in Q$ для любого $t \in \breve{Q}$ получим, что Q есть $XI-$полурешетка объединений.

Теорема доказана.

1.2. Правые единицы, идемпотентны и регулярные элементы полугрупп $B_X(D)$, определённых конечными сетками

Лемма 1.2.1. *Бинарное отношение ε, имеющее представление вида*

$$\varepsilon = \bigcup_{n=0}^{k-1}\left(P_{sn} \times T_{0\ n+1}\right) \cup \bigcup_{m=0}^{s-1}\left(P_{mk} \times T_{m+1\ 0}\right) \cup \left(\left(P_{sk} \cup \bigcup_{\substack{0 \leq m < s \\ 0 \leq n < k}} P_{mn}\right) \times T_{00}\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{Q}}\left(\{t'\} \times f(t')\right),$$

где f есть произвольное отображение множества $X \setminus \breve{Q}$ в сетке Q, всегда является правой единицей полугруппы $B_X(Q)$.

Доказательство. В силу следствии 3 из введении имеем, что бинарное отношение ε, имеющее представление вида

$$\varepsilon = \bigcup_{t \in \breve{Q}}\left(\{t\} \times \Lambda(Q, Q_t)\right) \cup \bigcup_{t' \in X \setminus \breve{Q}}\left(\{t'\} \times f(t')\right),$$

где f есть произвольное отображение множества $X\setminus\breve{Q}$ в сетке Q, является правой единицей полугруппы $B_X(Q)$. Отсюда и в силу утверждений 1) – 4) из леммы 1.6 получим, что

$$\varepsilon=\bigcup_{t\in\breve{Q}}\left(\{t\}\times\Lambda(Q,Q_t)\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{Q}}\left(\{t'\}\times f(t')\right)=$$
$$=\bigcup_{n=0}^{k-1}\left(P_{sn}\times T_{0\,n+1}\right)\cup\bigcup_{m=0}^{s-1}\left(P_{mk}\times T_{m+1\,0}\right)\cup\left(\left(P_{sk}\cup\bigcup_{\substack{0\le m<s\\0\le n<k}}P_{mn}\right)\times T_{00}\right)\cup\bigcup_{t'\in X\setminus\breve{Q}}\left(\{t'\}\times f(t')\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 1.2.2. *Пусть Q есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *множество $D^\wedge\setminus\{\varnothing\}=(Q_1\cup Q_2)\setminus\{\varnothing\}$ не имеет предельных элементов в сетке Q;*

b) *элемент $T_{ij}\neq\varnothing$ сетки Q только в том случае является непредельным элементом множества $\ddot{Q}_{T_{ij}}$ в сетке Q, когда $T_{ij}\in Q_1\cup Q_2$;*

Доказательство. Пусть $T_{ij}\in Q^\wedge\setminus\{\varnothing\}$. Тогда $i=j=0$ или $i=0$, $j>1$, или $i>1$, $j=0$.

1) Если $i=j=0$, то

$$l\left(Q^\wedge,T_{00}\right)=\cup\left(Q^\wedge\setminus Q^\wedge_{T_{00}}\right)=\cup\left(Q^\wedge\setminus Q^\wedge\right)=\varnothing \text{ и } T_{00}\setminus l\left(Q^\wedge,T_{00}\right)=T_{00}\setminus\varnothing\neq\varnothing .$$

2) Если $i=0$ и $j>1$, то справедливы следующие равенства:

$$l\left(Q^\wedge,T_{0j}\right)=\cup\left(Q^\wedge\setminus Q^\wedge_{T_{0j}}\right)=\cup\left(Q^\wedge\setminus\left\{T_{0j},T_{0\,j+1},\ldots,T_{0k},\right\}\right)=$$
$$=\cup\left(Q_1\cup\left\{T_{00},T_{01},\ldots,T_{0\,j-1}\right\}\right)=T_{s\,j-1},$$
$$T_{0j}\setminus l\left(Q^\wedge,T_{0j}\right)=T_{0j}\setminus T_{s\,j-1}\neq\varnothing ,$$

так как $T_{0j}\not\subseteq T_{s\,j-1}$ в силу утверждения а) леммы 1.1.1.

3) Если $i>1$ и $j=0$, то аналогично пункту 2) получим, что $l\left(Q^\wedge,T_{i0}\right)=T_{i-1\,k}$ и $T_{i0}\setminus T_{i-1\,k}\neq\varnothing$.

Из условий 1), 2) и 3) непосредственно следуют, что множество $D^\wedge\setminus\{\varnothing\}$ не имеет предельных элементов в сетке Q.

Утверждение а) доказано.

Теперь пусть $\varnothing\neq T_{ij}\in Q$ и относительно элемента T_{ij} рассмотрим следующие случаи:

4) $T_{ij}\in Q\setminus(Q_1\cup Q_2)$. Тогда $i\ge1$ и $j\ge1$. В силу условия $i\ge1$ и $j\ge1$ будем иметь:

$$l\left(\ddot{Q}_{T_{ij}},T_{ij}\right)=\cup\left(\ddot{Q}_{T_{ij}}\setminus\left\{T_{ij}\right\}\right)\supseteq\cup\left\{T_{i-1\,j}\cup T_{i\,j-1}\right\}=T_{ij},$$

$$T_{ij} \setminus l\left(\ddot{Q}_{T_{ij}}, T_{ij}\right) \subseteq T_{ij} \setminus T_{ij} = \varnothing,$$

т.е. в данном случае элемент T_{ij} является предельным элементом множества $\ddot{Q}_{T_{ij}}$ в сетке Q.

5) $T_{ij} \in Q_1 \cup Q_2$. Тогда $i = 0$ или $j = 0$ и принимая во внимание условия a) определения 1.1.1 получим, что

$$l\left(\ddot{Q}_{T_{ij}}, T_{ij}\right) = \cup\left(\ddot{Q}_{T_{ij}} \setminus \left\{T_{ij}\right\}\right) = \begin{cases} T_{0\,j\text{-}1}, \text{ если } i = 0 \text{ и } j > 1, \\ T_{i-1\,0}, \text{ если } i > 1 \text{ и } j = 0, \\ \varnothing, \text{ если } i = j = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим, что $T_{ij} \setminus l\left(\ddot{Q}_{T_{ij}}, T_{ij}\right) \neq \varnothing$ для любого $T_{ij} \in Q_1 \cup Q_2$. Значит, T_{ij} является непредельным элементом множества $\ddot{Q}_{T_{ij}}$ в сетке Q.

Утверждение b) доказано.

Лемма доказана.

Теорема 1.2.1. *Пусть подполурешетка Q полной $X-$полурешетки объединений D есть сетка. Тогда бинарное отношение α полугруппы $B_X(D)$, имеющее такое квази-нормальное представление вида $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} \left(Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij}\right)$, что $Q = V(D, \alpha)$, является регулярным элементом полугруппы $B_X(D)$ в том и только в том случае, когда для некоторого α-изоморфизма φ полурешетки Q на некоторой подполурешетке D' полурешетки D выполняются следующие условия:*

$$Y_{00}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{0k}\right) \cap \varphi\left(T_{s0}\right),$$

$$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{01}\right),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{02}\right), \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{0k}\right),$$

$$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{10}\right),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{20}\right), \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq \varphi\left(T_{s0}\right),$$

$Y_{ij}^{\alpha} \cap \varphi\left(T_{ij}\right) \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in \left(Q_1 \cup Q_2\right) \setminus \{\varnothing\}$.

Доказательство. Отметим, что в силу утверждения b) леммы 1.1.1.и в силу утверждении d) леммы 1.1.6. имеем, что $Q^{\wedge}$ есть неприводимое порождающее множество сетки Q. Кроме того, в силу леммы 1.2.2. следует, что все элементы множество $D^{\wedge} \setminus \{\varnothing\} = \left(Q_1 \cup Q_2\right) \setminus \{\varnothing\}$ непредельные в сетке Q. Теперь, принимая во внимание теорему 6.3.3 из [39], получим:

a) $\bigcup_{T_{ij} \in \ddot{Q}_{T_{pq}}^{\wedge}} Y_{ij}^{\varepsilon} \supseteq \varphi\left(T_{pq}\right)$ для любого $T_{pq} \in Q^{\wedge}$.

b) $Y_{ij}^{\alpha} \cap \varphi(T_{ij}) \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$.

Из условия a) данной теоремы непосредственно следуют справедливость следующих включений:

$$\begin{gathered} Y_{00}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{00}),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{01}),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{02}), \ldots, \\ , \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{0k}) \end{gathered} \quad \ldots(1.2.1)$$

$$\begin{gathered} Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{10}),\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{20}), \ldots, \\ , \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq \varphi(T_{s0}). \end{gathered} \quad \ldots(1.2.2)$$

Из равенств (1.2.1) и (1.2.2) получим, что

$$Y_{00}^{\alpha} = \left(Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\varphi} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha}\right) \cap \left(Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha}\right) \supseteq \varphi(T_{0k}) \cap \varphi(T_{0s})$$

Теорема доказана.

Теорема 1.2.2. *Пусть подполурешетка* Q *полной* $X-$*полурешетки объединений* D *есть сетка. Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее такое квази-нормальное представление вида* $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} \left(Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij}\right)$, *что* $Q{=}V(D,\alpha)$, *является идемпотентным элементом полугруппы* $B_X(D)$ *в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{s0}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq T_{20}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq T_{s0}$,

$Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$.

Доказательство. Данная теорема непосредственно следует из теорем 1.1.1,1.2.2. и 6.3.9 из [39].

Теорема доказана.

Теорема 1.2.3. *Пусть подполурешетка* Q *полной* $X-$*полурешетки объединений* D *есть сетка. Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее такое квази-нормальное представление вида* $\alpha = \bigcup_{T_{ij} \in Q} \left(Y_{ij}^{\alpha} \times T_{ij}\right)$, *что* $Q{=}V(D,\alpha)$, *является правой единицей полугруппы* $B_X(Q)$ *в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

$Y_{00}^{\alpha} \supseteq T_{0k} \cap T_{s0}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq T_{01},\ Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq T_{02}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{01}^{\alpha} \cup Y_{02}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq T_{0k}$,

$Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq T_{10}$, $Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq T_{20}, \ldots, Y_{00}^{\alpha} \cup Y_{10}^{\alpha} \cup Y_{20}^{\alpha} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq T_{s0}$,

$Y_{ij}^{\alpha} \cap T_{ij} \neq \varnothing$ *для любого* $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$.

Доказательство. Данная теорема непосредственно следует из теоремы 6.3.10 из [39]. Отметим, что справедливы следующие включения:

$$(T_{0k} \setminus T_{s0}) \supset (T_{0\,k-1} \setminus T_{s0}) \supset (T_{0\,k-2} \setminus T_{s0}) \supset \ldots \supset (T_{02} \setminus T_{s0}) \supset (T_{01} \setminus T_{s0}),$$

$$(T_{s0} \setminus T_{0k}) \supset (T_{s-1\,0} \setminus T_{0k}) \supset (T_{s-2\,0} \setminus T_{0k}) \supset \ldots \supset (T_{20} \setminus T_{0k}) \supset (T_{10} \setminus T_{0k}),$$

так как $T_{0k} \supset T_{0\,k-1} \supset T_{0\,k-2} \supset \ldots \supset T_{02} \supset T_{01}$ и $T_{s0} \supset T_{s-1\,0} \supset T_{s-2\,0} \supset \ldots \supset T_{20} \supset T_{10}$ по предположению. Отсюда получим:

$$((T_{0k} \setminus T_{0\,k-1}) \setminus T_{s0}) \supset ((T_{0\,k-1} \setminus T_{0\,k-2}) \setminus T_{s0}) \supset \ldots \supset ((T_{02} \setminus T_{01}) \setminus T_{s0}),$$

$$((T_{s0} \setminus T_{s-1\,0}) \setminus T_{0k}) \supset ((T_{s-1\,0} \setminus T_{s-2\,0}) \setminus T_{0k}) \supset \ldots \supset ((T_{20} \setminus T_{10}) \setminus T_{0k}).$$

Кроме того, легко проверяется справедливость следующих равенств:

$$T_{0k} \setminus T_{s0} = T_{00} \cup \bigcup_{j=1}^{k} ((T_{0j} \setminus T_{0\,j-1}) \setminus T_{s0}), \ldots (1.2.3.)$$

$$T_{s0} \setminus T_{0k} = T_{00} \cup \bigcup_{i=1}^{s} ((T_{i0} \setminus T_{i-1\,0}) \setminus T_{0k}). \ldots (1.2.4.)$$

Теперь введем следующие обозначения: $X_{0j} = (T_{0j} \setminus T_{0\,j-1}) \setminus T_{s0}$, $X_{i0} = (T_{i0} \setminus T_{i-1\,0}) \setminus T_{0k}$,

где $j = 1, 2, \ldots, k$ и $i = 1, 2, \ldots, s$. Легко проверяется, что

$$\overline{X}_{0j} = \overline{T}_{0j} \setminus (\overline{T}_{0\,j-1} \cup \overline{T}_{s0}) \text{ и } \overline{X}_{i0} = \overline{T}_{i0} \setminus (\overline{T}_{i-1\,0} \cup \overline{T}_{0k}).$$

Лемма 1.2.3. *Пусть* $X -$ *полурешетка объединений есть сетка. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) *элементы множества* $\{T_{s0} \cap T_{0k}, X_{01}, X_{02}, \ldots, X_{0k}, X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{s0}, X \setminus T_{sk}\}$ *попарно не пересекаются;*

b) $X = (X \setminus T_{sk}) \cup (T_{s0} \cap T_{0k}) \cup \bigcup_{j=1}^{k} X_{0j} \cup \bigcup_{i=1}^{s} X_{i0}$.

Доказательство. Для доказательства данной леммы рассмотрим следующие случаи.

1) $1 \leq j < q \leq k$. Тогда

$$X_{0q} \cap X_{0j} = ((T_{0q} \setminus T_{0\,q-1}) \setminus T_{s0}) \cap ((T_{0j} \setminus T_{0\,j-1}) \setminus T_{s0}) \subseteq$$
$$\subseteq (T_{0q} \setminus T_{0\,q-1}) \cap (T_{0j} \setminus T_{0\,j-1}) = \varnothing,$$

так как $T_{0\,j-1} \subset T_{0j} \subseteq T_{0q-1} \subset T_{0q}$ по предположению $(j < q)$.

2) $1 \leq i < p \leq k$. В этом случае, как в пункте 1) получим, что

$$\left(\left(T_{p0}\setminus T_{p-1\,0}\right)\setminus T_{0k}\right)\cap\left(\left(T_{i0}\setminus T_{i-1\,0}\right)\setminus T_{0k}\right)=\varnothing,$$

так как $T_{i\text{-}1\,0}\subset T_{i0}\subseteq T_{p-1\,0}\subset T_{p0}$.

3) Пусть $j=1,2,...,k$ и $i=1,2,...,s$. Тогда

$$\begin{aligned}X_{0j}\cap X_{i0}&=\left(\left(T_{0j}\setminus T_{0\,j-1}\right)\setminus T_{s0}\right)\cap\left(\left(T_{i0}\setminus T_{i-1\,0}\right)\setminus T_{0k}\right)\subseteq\\&\subseteq\left(T_{0j}\setminus T_{s0}\right)\cap\left(T_{i0}\setminus T_{0k}\right)\subseteq\left(T_{0k}\setminus T_{s0}\right)\cap\left(T_{s0}\setminus T_{0k}\right)=\varnothing,\end{aligned}$$

так как $T_{0j}\subseteq T_{0k}$ и $T_{i0}\subseteq T_{s0}$. Далее,

$$\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cap\left(T_{0j}\setminus T_{s0}\right)=T_{0k}\cap\left(T_{s0}\cap\left(T_{0j}\setminus T_{s0}\right)\right)=T_{0k}\cap\varnothing=\varnothing,$$

$$\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cap\left(T_{i0}\setminus T_{0k}\right)=T_{s0}\cap\left(T_{0k}\cap\left(T_{i0}\setminus T_{0k}\right)\right)=T_{s0}\cap\varnothing=\varnothing,$$

$$\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cap\left(X\setminus T_{sk}\right)=\varnothing,\ T_{0j}\cap\left(X\setminus T_{sk}\right)=\varnothing,\ T_{i0}\cap\left(X\setminus T_{sk}\right)=\varnothing,$$

так как $T_{s0}\cap T_{0k}\subseteq T_{sk}$, $T_{0j}\subseteq T_{sk}$ и $T_{i0}\subseteq T_{sk}$ по определению полурешетки Q.

Из результатов полученных в пунктах 1), 2) и 3) непосредственно следует, что элементы множества $\left\{T_{s0}\cap T_{0k},X\setminus T_{sk},X_{01},X_{02},...,X_{0k},X_{10},X_{20},...,X_{s0}\right\}$ попарно не пересекаются.

Далее, имеем

$$\begin{aligned}&\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cup\bigcup_{j=1}^{k}X_{0j}\cup\bigcup_{i=1}^{s}X_{i0}=\\&=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup\left(\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cup T_{00}\right)\cup\bigcup_{j=1}^{k}X_{0j}\cup\bigcup_{i=1}^{s}X_{i0}=\\&=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cup\left(T_{00}\cup\bigcup_{j=1}^{k}X_{0j}\right)\cup\left(T_{00}\cup\bigcup_{i=1}^{s}X_{i0}\right)=\\&=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cup\left(T_{0k}\setminus T_{s0}\right)\cup\left(T_{s0}\setminus T_{0k}\right)=\\&=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup\left(\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cup\left(T_{0k}\setminus T_{s0}\right)\right)\cup\left(\left(T_{s0}\cap T_{0k}\right)\cup\left(T_{s0}\setminus T_{0k}\right)\right)=\\&=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup T_{0k}\cup T_{s0}=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup\left(T_{0k}\cup T_{s0}\right)=\\&=\left(X\setminus T_{sk}\right)\cup T_{sk}=X,\end{aligned}$$

так как $T_{00}\subseteq T_{s0}\cap T_{0k}$ по определению полурешетки Q.

Лемма доказана.

Теорема 1.2.4. *Пусть подполурешетка Q полурешетки D есть сетка. Если сетка Q и полурешетка $D'=\left\{\overline{T}_{ij}\mid i=0,1,...,s;\ j=0,1,...,k\right\}$ - α-изоморфны и $\left|\Omega\left(Q\right)\right|=m_0$, то справедливы следующие утверждения:*

$$a)\quad \left|R\left(D'\right)\right| = m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k}\left(\left(j+1\right)^{\left|\overline{T}_{0j}\setminus\left(\overline{T}_{0\ j-1}\cup\overline{T}_{s0}\right)\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j}\setminus\left(\overline{T}_{0\ j-1}\cup\overline{T}_{s0}\right)\right|}\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(\left(i+1\right)^{\left|\overline{T}_{i0}\setminus\left(\overline{T}_{i-1\ 0}\cup\overline{T}_{0k}\right)\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0}\setminus\left(\overline{T}_{i-1\ 0}\cup\overline{T}_{0k}\right)\right|}\right)\cdot\left|Q\right|^{\left|X\setminus\overline{T}_{sk}\right|},$$

если $s \neq k$ и

$$b)\quad \left|R\left(D'\right)\right| = 2\cdot m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k}\left(\left(j+1\right)^{\left|\overline{T}_{0j}\setminus\left(\overline{T}_{0\ j-1}\cup\overline{T}_{s0}\right)\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j}\setminus\left(\overline{T}_{0\ j-1}\cup\overline{T}_{s0}\right)\right|}\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{i=1}^{s}\left(\left(i+1\right)^{\left|\overline{T}_{i0}\setminus\left(\overline{T}_{i-1\ 0}\cup\overline{T}_{0k}\right)\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0}\setminus\left(\overline{T}_{i-1\ 0}\cup\overline{T}_{0k}\right)\right|}\right)\cdot\left|Q\right|^{\left|X\setminus\overline{T}_{sk}\right|},$$

если $s = k$.

Доказательство. Сначала отметим, что сетка Q имеет одного тождественного ψ_0 автоморфизма, если $s \neq k$ или два автоморфизма ψ_0, ψ_1, если $s = k$. В частности имеем:

$$\psi_0\left(T_{ij}\right) = T_{ij} \text{ для любого } T_{ij}\in Q;\ \psi_1\left(T_{ij}\right) = T_{ji} \text{ для любого } T_{ij}\in Q.$$

Значит, $\left|\Phi\left(Q,Q\right)\right| = 1$ или $\left|\Phi\left(Q,Q\right)\right| = 2$. Отсюда в силу теоремы 1.1.1 получим, что

$$\left|\Phi\left(Q,D'\right)\right| = \begin{cases}1, \text{ если } s\neq k,\\ 2, \text{ если } s = k.\end{cases} \quad \ldots(1.2.5.)$$

При этом,

$$R\left(Q,D'\right) = \begin{cases}R_{\psi_0}\left(Q,D'\right),\ \textit{если}\ s\neq k,\\ R_{\psi_0}\left(Q,D'\right)\cup R_{\psi_1}\left(Q,D'\right),\ \textit{если}\ s = k.\end{cases} \quad \ldots(1.2.6.)$$

Пусть $\alpha \in \overline{R}\left(Q,D'\right)$ и квазинормальное представление регулярного бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha = \bigcup_{T_{ij}\in Q}\left(Y_{ij}^{\alpha}\times T_{ij}\right). \quad \ldots(1.2.7.)$$

Тогда в силу теоремы 1.2.1. последнее условие имеет место в том и только в том случае, когда

$$Y_{00}^{\alpha} \supseteq \overline{T}_{0k}\cap\overline{T}_{s0}, \quad \ldots(1.2.8)$$

$$Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha} \supseteq \overline{T}_{01},\ Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\cup Y_{02}^{\alpha} \supseteq \overline{T}_{02},\ldots,Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\cup Y_{02}^{\alpha}\cup\ldots\cup Y_{0k}^{\alpha} \supseteq \overline{T}_{0k}, \quad \ldots(1.2.9)$$

$$Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{10}^{\alpha} \supseteq \overline{T}_{10},\ Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{10}^{\alpha}\cup Y_{20}^{\alpha} \supseteq \overline{T}_{20},\ldots,Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{10}^{\alpha}\cup Y_{20}^{\alpha}\cup\ldots\cup Y_{s0}^{\alpha} \supseteq \vec{T}_{s0}, \quad \ldots(1.2.10)$$

$$Y_{ij}^{\alpha}\cap\overline{T}_{ij} \neq \varnothing\ \textit{для любого}\ T_{ij}\in\left(Q_1\cup Q_2\right)\setminus\left\{\varnothing\right\}. \quad \ldots(1.2.11)$$

Теперь допустим, что f_α есть такое отображение множества X в D, что $f_\alpha(t)=t\alpha$ для любого $t\in X$. $f_{00\,\alpha}$, $f_{01\,\alpha}$, $f_{02\,\alpha},\dots,f_{0k\,\alpha}$, $f_{10\,\alpha}$, $f_{20\,\alpha},\dots,f_{s0\,\alpha}$ и f'_α соответственно суть ограничений отображения f_α на множествах

$$\overline{T}_{s0}\cap\overline{T}_{0k},\overline{X}_{01},\overline{X}_{02},...,\overline{X}_{0k},\overline{X}_{10},\overline{X}_{20},...,\overline{X}_{s0},X\setminus\overline{T}_{sk}.$$

В силу леммы 1.2.3. имеем, что приведенные множества попарно не пересекаются и теоретико-множественное объединение всех данных множеств равно X.

Теперь установим свойства отображений $f_{00\,\alpha}$, $f_{01\,\alpha}$, $f_{02\,\alpha},\dots,f_{0k\,\alpha}$, $f_{10\,\alpha}$, $f_{20\,\alpha},\dots,f_{s0\,\alpha}$ и f'_α.

1) $t\in\overline{T}_{s0}\cap\overline{T}_{0k}$. Тогда в силу включения $t\in\overline{T}_{s0}\cap\overline{T}_{0k}\subseteq Y_{00}^{\alpha}$ будем иметь, что $t\alpha=T_{00}$ по определению множества Y_{00}^{α}. Итак, $f_{00\,\alpha}(t)=T_{00}$ для любого $t\in\overline{T}_{s0}\cap\overline{T}_{0k}$.

Ясно, что $f_{00\,\alpha}$ - пустое отображение, если $\overline{T}_{s0}\cap\overline{T}_{0k}$.

Значит, в обоих случаях число отображений $f_{00\,\alpha}$ равно единице.

2) $t\in\overline{X}_{0j}=\left(\overline{T}_{0j}\setminus\overline{T}_{0j-1}\right)\setminus\overline{T}_{s0}$ $(j=1,2,...,k)$. В этом случае в силу включения (1.2.9.) имеем, что $t\in\overline{X}_{0j}=\left(\overline{T}_{0j}\setminus\overline{T}_{0j-1}\right)\setminus\overline{T}_{s0}\subseteq Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\cup Y_{02}^{\alpha}\cup...\cup Y_{0j}^{\alpha}$. Значит, из условий $t\in\left(\overline{T}_{0j}\setminus\overline{T}_{0j-1}\right)\setminus\overline{T}_{s0}$ следует, что $t\in Y_{00}^{\alpha}\cup Y_{01}^{\alpha}\cup Y_{02}^{\alpha}\cup...\cup Y_{0j}^{\alpha}$. Поэтому $t\alpha\in\left\{T_{00},T_{01},...,T_{0j}\right\}$. в силу определения множеств $Y_{00}^{\alpha},Y_{01}^{\alpha},...,Y_{0j}^{\alpha}$. Итак, $f_{0j\,\alpha}(t)\in\left\{T_{00},T_{01},...,T_{0j}\right\}$ для любого $t\in\left(\overline{T}_{0j}\setminus\overline{T}_{0j-1}\right)\setminus\overline{T}_{s0}$.

С другой стороны, $Y_{0j}^{\alpha}\cap\overline{T}_{0j}\neq\varnothing$. Поэтому $t_{0j}\in Y_{0j}^{\alpha}$ для некоторого $t_{0j}\in\overline{T}_{0j}$. Отсюда получим, что $t_{0j}\alpha=T_{0j}$. Далее, если $t_{0j}\in\overline{T}_{0\,j-1}\cup\overline{T}_{s0}$, то в силу равенств (1.2.9) и (1.2.10) имеем, что $t_{0j}\alpha\in\left\{T_{00},T_{01},...,T_{0\,j-1}\right\}$ или $t_{0j}\alpha\in\left\{T_{00},T_{10},...,T_{s0}\right\}$. Однако последние условия противоречат равенству $t_{0j}\alpha=T_{0j}$. Полученное противоречие показывает, что $t_{0j}\in\left(\overline{T}_{0j}\setminus\overline{T}_{0j-1}\right)\setminus\overline{T}_{s0}$. Итак, $f_{0j\,\alpha}\left(t_{0j}\right)=T_{0j}$ для некоторого $t_{0j}\in\left(\overline{T}_{0j}\setminus\overline{T}_{0j-1}\right)\setminus\overline{T}_{s0}$.

3) $t\in\overline{X}_{i0}=\left(\overline{T}_{i0}\setminus\overline{T}_{i-1\,0}\right)\setminus\overline{T}_{0k}$ $(i=1,2,...,s)$. Тогда аналогично пункту 2) доказывается, что $f_{i0\,\alpha}(t)\in\left\{T_{00},T_{10},...,T_{i0}\right\}$ для любого $t\in\left(\overline{T}_{i0}\setminus\overline{T}_{i-1\,0}\right)\setminus\overline{T}_{0k}$ и $f_{i0\,\alpha}\left(t_{i0}\right)=T_{i0}$ для некоторого $t_{i0}\in\left(\overline{T}_{i0}\setminus\overline{T}_{i-1\,0}\right)\setminus\overline{T}_{0k}$.

4) $t \in X \setminus \overline{T}_{sk}$. Тогда в силу условия $X = \bigcup\limits_{\substack{0 \le i \le s, \\ 0 \le j \le k.}} Y_{ij}^{\alpha}$ следует, что $t \in \bigcup\limits_{\substack{0 \le i \le s, \\ 0 \le j \le k.}} Y_{ij}^{\alpha}$. Отсюда получим, что $t\alpha \in \{T_1, T_2, ..., T_{2m-1}\}$. Значит, $f_{\alpha}'(t) \in Q$ для любого $t \in X \setminus \overline{T}_{sk}$.

Следовательно, для бинарного отношения $\alpha \in \overline{R}(Q, D')$, имеющего представление вида (1.2.7) всегда существует однозначно определенная система

$$\left(f_{00\ \alpha}, f_{01\ \alpha}, f_{02\ \alpha}, ..., f_{0k\ \alpha}, f_{10\ \alpha}, f_{20\ \alpha}, ..., f_{s0\ \alpha}, f_{\alpha}'\right). \quad ...(1.2.12)$$

Очевидно, что различным элементам множества $\overline{R}(Q, D')$ соответствуют различные упорядоченные системы вида (1.2.12).

Теперь пусть

$f_{00} : \overline{T}_{s0} \cap \overline{T}_{0k} \to \{T_{00}\}$; $f_{0j} : \left(\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{0\, j-1}\right) \setminus \overline{T}_{s0} \to \{T_{00}, T_{01}, ..., T_{0j}\}$ $(j = 1, 2, ..., k)$;

$f_{i0} : \left(\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\ 0}\right) \setminus \overline{T}_{0k} \to \{T_{00}, T_{10}, ..., T_{i0}\}$ $(i = 1, 2, ..., s)$; $f' : X \setminus \overline{T}_{sk} \to Q$

такие отображения, которые удовлетворяют следующим условиям:

5) f_{00} либо пустое отображение, либо $f_{00}(t) = T_{00}$ для любого $t \in \overline{T}_{s0} \cap \overline{T}_{0k}$;

6) $f_{0j}(t) \in \{T_{00}, T_{01}, ..., T_{0j}\}$ для любого $t \in \left(\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{0\, j-1}\right) \setminus \overline{T}_{s0}$ и $f_{0j}(t_{0j}) = T_{0j}$ для некоторого $t_{0j} \in \left(\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{0\, j-1}\right) \setminus \overline{T}_{s0}$;

7) $f_{i0}(t) \in \{T_{00}, T_{10}, ..., T_{i0}\}$ для любого $t \in \left(\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\ 0}\right) \setminus \overline{T}_{0k}$ и $f_{i0}(t_{i0}) = T_{i0}$ для некоторого $t_{i0} \in \left(\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\ 0}\right) \setminus \overline{T}_{0k}$;

8) $f'(t) \in Q$ для любого $t \in X \setminus \overline{T}_{sk}$.

Теперь определим отображение $f : X \to D$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} f_{00}, \text{ если } t \in \overline{T}_{s0} \cap \overline{T}_{0k}, \\ f_{0j}, \text{ если } t \in \left(\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{0\, j-1}\right) \setminus \overline{T}_{s0}, \ j = 1, 2, ..., k, \\ f_{i0}, \text{ если } t \in \left(\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\ 0}\right) \setminus \overline{T}_{0k}, \ i = 1, 2, ..., s, \\ f', \text{ если } t \in X \setminus \overline{T}_{sk}. \end{cases}$$

Отображению f сопоставим бинарное отношение $\beta = \bigcup\limits_{t \in X} \left(\{t\} \times f(t)\right)$. Далее, пусть $Y_{ij}^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = T_{ij}\}$, где $i = 1, 2, ..., s$ и $j = 1, 2, ..., k$. При этих обозначениях бинарное отношение β представляется в виде $\beta = \bigcup\limits_{T_{ij} \in Q} \left(Y_{ij}^{\beta} \times T_{ij}\right)$. Кроме того, из определения бинарного отношения β непосредственно имеем, что

$Y_{00}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{0k} \cap \overline{T}_{s0}$,

$Y_{00}^{\beta} \cup Y_{01}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{01}$, $Y_{00}^{\beta} \cup Y_{01}^{\beta} \cup Y_{02}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{02}, \ldots,$ $Y_{00}^{\beta} \cup Y_{01}^{\beta} \cup Y_{02}^{\beta} \cup \ldots \cup Y_{0k}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{0k}$,

$Y_{00}^{\beta} \cup Y_{10}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{10}$, $Y_{00}^{\beta} \cup Y_{10}^{\beta} \cup Y_{20}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{20}, \ldots, Y_{00}^{\beta} \cup Y_{10}^{\beta} \cup Y_{20}^{\beta} \cup \ldots \cup Y_{s0}^{\beta} \supseteq \overline{T}_{s0}$,

$Y_{ij}^{\beta} \cap \overline{T}_{ij} \neq \varnothing$ для любого $T_{ij} \in (Q_1 \cup Q_2) \setminus \{\varnothing\}$

для любых $i = 1, 2, \ldots, s$ и $j = 1, 2, \ldots, k$.

Отсюда в силу теоремы 1.2.1. получим, что бинарное отношение β есть регулярный элемент полугруппы $B_X(D)$, принадлежащий множеству $\overline{R}(Q, D')$.

Значит, между бинарными отношениями α множества $\overline{R}(Q, D')$, имеющих представлений вида (1.2.7), и упорядоченными системами вида

$$\left(f_{00\,\alpha}, f_{01\,\alpha}, f_{02\,\alpha}, \ldots, f_{0k\,\alpha}, f_{10\,\alpha}, f_{20\,\alpha}, \ldots, f_{s0\,\alpha}, f'_{\alpha}\right)$$

существует взаимно однозначное соответствие.

Числа всех отображений вида $f_{00\,\alpha}, f_{01\,\alpha}, f_{02\,\alpha}, \ldots, f_{0k\,\alpha}, f_{10\,\alpha}, f_{20\,\alpha}, \ldots, f_{s0\,\alpha}, f'_{\alpha}$ $\left(\alpha \in \overline{R}(Q, D')\right)$ соответственно равны

$$1,\ (j+1)^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \left(\overline{T}_{0\,j-1} \cup \overline{T}_{s0}\right)\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \left(\overline{T}_{0\,j-1} \cup \overline{T}_{s0}\right)\right|},\ (i+1)^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \left(\overline{T}_{i-1\,0} \cup \overline{T}_{0k}\right)\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \left(\overline{T}_{i-1\,0} \cup \overline{T}_{0k}\right)\right|},\ |Q|^{\left|X \setminus \overline{T}_{sk}\right|},$$

где $j = 1, 2, \ldots, k$ и $i = 1, 2, \ldots, s$. Отсюда получим

$$\left|\overline{R}(Q, D')\right| = \prod_{j=1}^{k}\left((j+1)^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{s\,j-1}\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{s\,j-1}\right|}\right) \cdot \prod_{i=1}^{s}\left((i+1)^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\,k}\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\,k}\right|}\right) \cdot |Q|^{\left|X \setminus \overline{T}_{sk}\right|},$$

так как $T_{0\,j-1} \cup T_{s0} = T_{s\,j-1}$ и $T_{i-1\,0} \cup T_{0k} = T_{i-1\,k}$ по определению сетки Q.

Теперь принимая во внимание равенства $|\Omega(Q)| = m_0$, $|\Phi(Q, D')| = q$ и теорему 6.3.5 из [39] получим, что

$$|R(D')| = q \cdot m_0 \cdot \prod_{j=1}^{k}\left((j+1)^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{s\,j-1}\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{s\,j-1}\right|}\right) \cdot \prod_{i=1}^{s}\left((i+1)^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\,k}\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\,k}\right|}\right) \cdot |Q|^{\left|X \setminus \overline{T}_{sk}\right|}..$$

Теорема доказана.

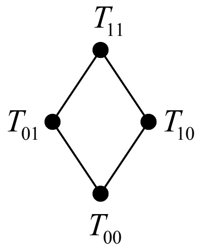
Следствие 1.2.1. *Пусть $X-$полурешетка объединений Q есть сетка. Если через $E_X^{(r)}(Q)$ обозначено множество всех правых единиц полугруппы $B_X(Q)$, то число $\left|E_X^{(r)}(Q)\right|$ всех правых единиц полугруппы $B_X(Q)$ можно вычислить по формуле*

$$\left|E_X^{(r)}(Q)\right| = \prod_{j=1}^{k}\left((j+1)^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{s\,j-1}\right|} - j^{\left|\overline{T}_{0j} \setminus \overline{T}_{s\,j-1}\right|}\right) \cdot \prod_{i=1}^{s}\left((i+1)^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\,k}\right|} - i^{\left|\overline{T}_{i0} \setminus \overline{T}_{i-1\,k}\right|}\right) \cdot |Q|^{\left|X \setminus \overline{T}_{sk}\right|}.$$

Доказательство. В силу теоремы 6.3.11 из [39] имеем, что $E_X^{(r)}(Q) = R_{\varepsilon_Q}(Q,Q)$, где ε_Q есть тождественное отображение сетки Q. Теперь принимая во внимание теорему 1.2.4, получим справедливость данного следствия.

Следствие доказано.

Следствие 1.2.2. *Пусть подполурешетка* $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}\}$ *полурешетки* D *есть сетка (см. Рис. 2). Если сетка* Q *и полурешетка* $D' = \{\overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{11}\}$ *изоморфны и* $|\Omega(Q)| = m_0$*, то справедливо следующее равенство*

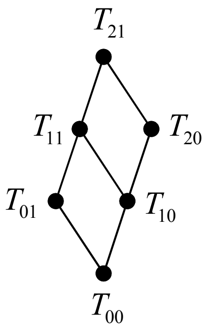


$$\left|R(D')\right| = 2\cdot m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_{01}\setminus\overline{T}_{10}|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_{10}\setminus\overline{T}_{01}|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\overline{T}_{11}|}.$$

Рис. 2

Доказательство. Ясно, что в данном случае $q = 2$. Поэтому данное следствие непосредственно следует из теоремы 1.2.4. и из того факта, что $T_{00} \subset T_{01}$ и $T_{00} \subset T_{10}$ по определению сетки Q.

Следствие 1.2.3. *Пусть подполурешетка* $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11}\}$ *полурешетки* D *есть сетка (см. Рис. 3). Если сетка* Q *и полурешетка* $D' = \{\overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{11}, \overline{T}_{20}, \overline{T}_{21}\}$ *изоморфны и* $|\Omega(Q)| = m_0$, *то справедливо следующее равенство*



$$\left|R(D')\right| = m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_{01}\setminus\overline{T}_{20}|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_{10}\setminus\overline{T}_{01}|}-1\right)\cdot\left(3^{|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}|}-2^{|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\overline{T}_{21}|}.$$

Рис. 3

Доказательство. Сначала отметим, что $q = 1$.В силу теоремы 1.2.4. имеем, что

$$\begin{aligned}\left|R(D')\right| &= m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_{01}\setminus(\overline{T}_{00}\cup\overline{T}_{20})|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_{10}\setminus(\overline{T}_{00}\cup\overline{T}_{01})|}-1\right)\cdot\left(3^{|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}|}-2^{|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\overline{T}_{21}|} = \\ &= m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_{01}\setminus\overline{T}_{20}|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_{10}\setminus\overline{T}_{01}|}-1\right)\cdot\left(3^{|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}|}-2^{|\overline{T}_{20}\setminus\overline{T}_{11}|}\right)\cdot 6^{|X\setminus\overline{T}_{21}|},\end{aligned}$$

так как $T_{00} \subset T_{01}$, $T_{00} \subset T_{10}$ и $T_{01} \cup T_{10} = T_{11}$.

Следствие доказано.

Следствие 1.2.4. *Пусть подполурешетка* $Q = \{T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{02}, T_{11}, T_{20}, T_{12}, T_{21}, T_{22}\}$ *полурешетки* D *есть сетка (см. Рис. 4). Если сетка* Q *и полурешетка* $D' = \{\overline{T}_{00}, \overline{T}_{01}, \overline{T}_{10}, \overline{T}_{02}, \overline{T}_{11}, \overline{T}_{20}, \overline{T}_{12}, \overline{T}_{21}, \overline{T}_{22}\}$ *изоморфны и* $|\Omega(Q)| = m_0$*, то справедливо следующее равенство*

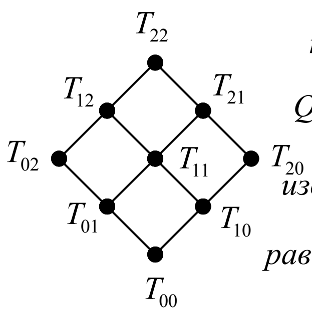


Рис. 4

$$\left|R\left(D'\right)\right| = 2 \cdot m_0 \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_{01} \setminus \overline{T}_{20}\right|} - 1\right) \cdot \left(2^{\left|\overline{T}_{10} \setminus \overline{T}_{01}\right|} - 1\right) \cdot$$
$$\cdot \left(3^{\left|\overline{T}_{20} \setminus \overline{T}_{11}\right|} - 2^{\left|\overline{T}_{20} \setminus \overline{T}_{11}\right|}\right) \cdot \left(3^{\left|\overline{T}_{02} \setminus \overline{T}_{11}\right|} - 2^{\left|\overline{T}_{02} \setminus \overline{T}_{11}\right|}\right) \cdot 9^{\left|X \setminus \overline{T}_{22}\right|}.$$

Доказательство. По предположению имеем, что $s = k = 3$. Теперь справедливость данного следствия непосредственно следует из теоремы 1.2.4. и из условия, что $q = 2$

Г л а в а 2

Полугруппы бинарных отношений, определенные полурешетками класса $\Sigma_3\left(X, 6\right)$

2.1. Определение и некоторые основные свойства

Пусть X и $\Sigma_3\left(X, 6\right)$ соответственно являются произвольным непустым множеством и таким классом между собой изоморфных $X-$полурешеток объединений, каждый элемент которого изоморфна некоторой $X-$полурешетке объединенный $D = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&Z_5 \subset Z_4 \subset Z_1 \subset \breve{D},\ Z_5 \subset Z_4 \subset Z_2 \subset \breve{D},\ Z_5 \subset Z_3 \subset \breve{D},\\
&Z_1 \setminus Z_2 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_1 \neq \varnothing, \qquad \ldots(2.1.1)\\
&Z_1 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_1 \neq \varnothing,\ Z_2 \setminus Z_3 \neq \varnothing,\ Z_3 \setminus Z_2 \neq \varnothing,
\end{aligned}$$

Полурешетка, удовлетворяющая условий (2.1.1) изображена на Рис. 1. Будем считать, что $C(D) = \{P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0\}$ есть некоторое множество попарно непересекающихся подмножеств множества X, а φ есть такое отображение полурешетки D на множество $C\left(D\right)$, что $\varphi\left(\breve{D}\right) = P_0$, $\varphi\left(Z_i\right) = P_i$ для любого $i = 0,1,2,3,4,5$. Тогда формальные равенства для элементов заданной полурешетки имеют вид:

$$\breve{D} = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \qquad (2.1.2)$$

$$Z_1 = P_0 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \qquad (2.1.3)$$

$$Z_2 = P_0 \cup P_1 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5, \qquad (2.1.4)$$

$$Z_3 = P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5, \qquad (2.1.5)$$

$$Z_4 = P_0 \cup P_3 \cup P_5, \qquad (2.1.6)$$

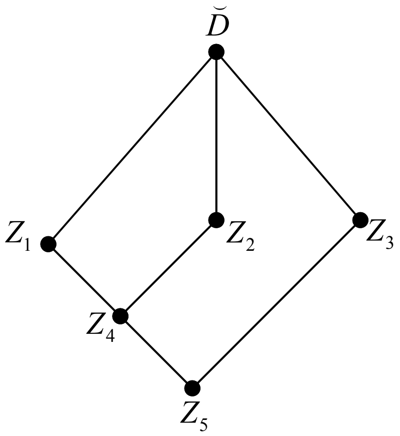


Рис. 1

$$Z_5 = P_0, \qquad (2.1.7)$$

где $|P_1| \geq 1$, $|P_2| \geq 1$, $|P_3| \geq 1$, $|C| \geq 0$, $|P_4| \geq 0$, $|P_5| \geq 0$, т.е. элементы P_1, P_2 и P_3 являются базисными источниками, а P_0, P_4, и P_5 суть источники полноты X – полу-
решетки объединений D (см. [34] и [35]).

Лемма 2.1.1. *Пусть* X – *конечное множество* $|X| = n \geq 3$ *и* $|\Sigma_3(X,6)| = s$. *Тогда* $s = \frac{1}{2} \cdot \left(7^n - 3 \cdot 6^n + 3.5^n - 4^n\right)$.

Доказательство. По определению полурешеток данного класса имеем, что число базисных источников $\delta = 3$. Кроме того, автоморфизмы любой полурешетки класса $\Sigma_3(X,6)$ исчерпываются отображениями вида

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 \\ \breve{D} & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 \end{pmatrix}, \ \varphi_2 = \begin{pmatrix} \breve{D} & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_2 & Z_1 \\ \breve{D} & Z_5 & Z_4 & Z_3 & Z_1 & Z_2 \end{pmatrix},$$

поэтому их число $q = 2$ кроме того по предположению $m = 6$, соответственно $3 \leq \mathrm{P} \leq 6$. Теперь принимая во внимание теорему 18, получим

--,

где $C_j^k = \dfrac{j!}{(k!) \cdot (j-k)!}$. После упрощения предпоследнего выражения получаем:

$$s = \frac{1}{2}\left(7^n - 3 \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n - 4^n\right).$$

Лемма доказана.

Для определенности: Если $n = 3,4,5,6,7,8,9,10$ тогда мощность класса $\sum_3(X,6)$ соответственно равняется числам $s = 3,66,915,10230,100863,916146, 7858875,64662510$, а число элементов в каждой полугруппе $|B_X(D)| = 216,1296,7776,46656,279936,1679616,$ $10077696,60466176$. К примеру: 1) если $n = 3$, т.е. $X = \{1,2,3\}$ тогда полурешетками из рассматриваемого $\sum_3(X,6)$ класса будут $D_1 = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3\},\{\varnothing\}\}$;

$D_2 = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2\},\{\varnothing\}\}$; $D_3 = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{\varnothing\}\}$.

2)если $n = 4$, т.е. $X = \{1,2,3,4\}$ тогда полурешеток 66, ими будут:

$D_1 = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3\},\{\varnothing\}\}$; $D_2 = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2\},\{\varnothing\}\}$

$D_3 = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1\},\{\varnothing\}\}$; $D_4 = \{\{1,2,4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{4\},\{\varnothing\}\}$

$D_5 = \{\{1,2,4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$; $D_6 = \{\{1,2,4\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$

$D_7 = \{\{1,3,4\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\},\{4\},\{\varnothing\}\}$; $D_8 = \{\{1,3,4\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$

$D_9 = \{\{1,3,4\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$; $D_{10} = \{\{2,3,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$

$D_{11} = \{\{2,3,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$; $D_{12} = \{\{2,3,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4\},\{\varnothing\}\}$

$D_{13} = \{\{1,2,3,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{4\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{14} = \{\{1,2,3,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$

$D_{15} = \{\{1,2,3,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,2\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{16} = \{\{1,2,3,4\},\{2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{4\},\{\varnothing\}\}$

$D_{17} = \{\{1,2,3,4\},\{2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{2\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{18} = \{\{1,2,3,4\},\{2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$

$D_{19} = \{\{1,2,3,4\},\{2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{20} = \{\{1,2,3,4\},\{2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$

$D_{21} = \{\{1,2,3,4\},\{2,3\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{1,4\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{22} = \{\{1,2,3,4\},\{1,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{4\},\{\varnothing\}\}$ $D_{23} = \{\{1,2,3,4\},\{1,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1\},\{\varnothing\}\}$
; $D_{24} = \{\{1,2,3,4\},\{1,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{2,3\},\{\varnothing\}\}$

$D_{25} = \{\{1,2,3,4\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{26} = \{\{1,2,3,4\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$

$D_{27} = \{\{1,2,3,4\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,4\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{28} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$

$D_{29} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{30} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{\varnothing\}\}$

$D_{31} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$;

$D_{32} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,4\},\{1\}\}$
$D_{33} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{34} = \{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{35} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,3\},\{1\}\}$
$D_{36} = \{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{\varnothing\}\}$

$D_{37}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$
$D_{38}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{39}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{40}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{1\}\}$
$D_{41}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{2,4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{42}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$
$D_{43}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3\},\{\varnothing\}\}$
$D_{44}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$
$D_{45}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3\},\{\varnothing\}\}$
$D_{46}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,4\},\{2\}\}$
$D_{47}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{2,3\},\{2\}\}$
$D_{48}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{49}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2\},\{2\}\}$
$D_{50}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{51}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$
$D_{52}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,4\},\{\varnothing\}\}$
$D_{53}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$
$D_{54}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$
$D_{55}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{3\},\{\varnothing\}\}$
$D_{56}=\{\{1,2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$
$D_{57}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{3\}\}$
$D_{58}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2,3\},\{3\}\}$
$D_{59}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1\},\{\varnothing\}\}$
$D_{60}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2\},\{\varnothing\}\}$
$D_{61}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{2\},\{\varnothing\}\}$
$D_{62}=\{\{1,2,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,3\},\{3\}\}$
$D_{63}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\},\{1,2\},\{\varnothing\}\}$
$D_{64}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{3,4\},\{4\}\}$
$D_{65}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{2,4\},\{4\}\}$
$D_{66}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,4\},\{4\}\}$

Наша цель - изучить полные полугруппы бинарных отношений $B_X(D)$, определенные X – полурешетками объединений D класса $\Sigma_3(X,6)$.

Понятно, что квазинормальные представления любого элемента полугруппы $B_X(D)$ имеет вид

$$\alpha = \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_3^\alpha \times Z_3\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right), \ \ldots(2.1.8.)$$

где Y_5^α, Y_4^α, Y_3^α, Y_2^α, Y_1^α и Y_0^α являются некоторыми попарно непересекающимися подмножествами множества X ,объединение которых равно X .

Сначала опишем идемпотентные элементы полугруппы $B_X(D)$. Чтобы решить поставленную задачу, в силу теоремы 2.4 из [33]надо сначала в полурешетке D выделить XI – подполурешетки объединений .

Лемма 2.1.2. *Пусть* $D = \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\} \in \sum_3(X,3)$. *Тогда подмножествами вида*

1) $\left\{\breve{D}\right\}, \left\{Z_1\right\}, \left\{Z_2\right\}, \left\{Z_3\right\}, \left\{Z_4\right\}, \left\{Z_5\right\}$*;*

2) $\left\{Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_1\right\}, \left\{Z_4, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_1\right\}, \left\{Z_5, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_3\right\}$, $\left\{Z_5, Z_4\right\}$*;*

3) $\left\{Z_5, Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_2\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_1\right\} \left\{Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$,

4) $\left\{Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$,

5) $\left\{Z_5, Z_4, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}$,

6) $\left\{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_3, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\} \left\{Z_5, Z_2, Z_1, \breve{D},\right\}, \left\{Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$,

7) $\left\{Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D},\right\}, \left\{Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

8) $\left\{Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$,

9) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$

10) $\left\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$,

11) $\left\{Z_5, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$,

12) $\left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$.

13) $\left\{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$.

исчерпываются все подполурешетки полурешетки D.

Доказательство. Очевидно, что все одноэлементные подмножества полурешетки D являются её подполурешетками. их число равно $C_6^1 = 6$.

Число двухэлементных подмножеств полурешетки D равно $C_6^2=15$. Ими являются:

$$\{Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_3,\breve{D}\},\ \{Z_4,\breve{D}\},\ \{Z_5,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_1\},\ \{Z_4,Z_1\},$$

$$\{Z_3,Z_1\},\ \{Z_2,Z_1\},\ \{Z_5,Z_2\},\{Z_4,Z_2\},\ \{Z_3,Z_2\},\ \{Z_5,Z_3\},\ \{Z_4,Z_3\},\ \{Z_5,Z_4\}$$

Из этих подмножеств подполурешетками $X-$полурешетки объединений D будут только те подмножества, которые являются $X-$цепями. Они имеют вид 2).

Число всех трёхэлементных подмножеств $X-$полурешетки объединений D равно $C_6^3=20$.

$$\{Z_5,Z_4,Z_3\},\ \{Z_5,Z_4,Z_2\},\ \{Z_5,Z_4,Z_1\},\ \{Z_5,Z_4,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_3,Z_2\},\{Z_5,Z_3,Z_1\},$$

$\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}$,

$$\{Z_5,Z_2,Z_1\},\ \{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_2\},\ \{Z_4,Z_3,Z_1\},\ \{Z_4,Z_3,\breve{D}\},\ \{Z_4,Z_2,Z_1\},$$

$$\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_4,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_3,Z_2,Z_1\},\{Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

Легко проверяются, что из приведенных подмножеств не являются подполурешетками $\{Z_4,Z_3,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_1\}$, $\{Z_3,Z_2,Z_1\}$, и $\{Z_4,Z_2,Z_1\}$.

Число всех четырёхэлементных подмножеств полурешетки D равно $C_6^4=15$. Они имеют вид:

$$\{Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\ \{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},$$

$$\{Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D},\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\ \{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1\},\ \{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2\},$$

$$\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1\},\ \{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1\},\ \{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1\};$$

Проверяются, что из приведенных подмножеств полурешеткой не являются последние 5 множеств.

Число всех пятиэлементных подмножеств полурешетки D равно $C_6^5=6$. Они имеют вид:

$\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$,$\{Z_5,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1\}$.

Легко проверяется, что из приведенных подмножеств полурешеткой не является последнее.

Единственное шестиэлементное подмножество $\{\breve{D},Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5\}$ является подполурешеткой полурешетки D. Лемма доказана.

Из доказанной леммы непосредственно следует, что диаграммами вида 2 исчерпываются все диаграммы соответственных подполурешеток полурешетки D.

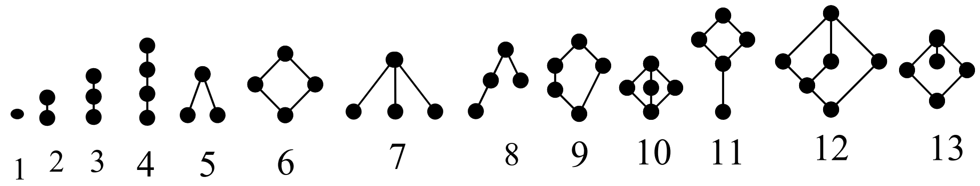


Рис. 2

Лемма 2.1.3. *Пусть* $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_1(X,6)$. *Полугруппа* $B_X(D)$ *не имеет правых единиц.*

Доказательство. Пусть $t\in\breve{D}$. Тогда согласно формальным равенствам (2) имеем, что подмножества D_t полурешетки D определяются следующим образом:

$$D_t=\begin{cases} D, \text{ если } t\in \mathrm{P}_0\\ \{Z_3,Z_2,\breve{D}\}, \text{ если } t\in P_1,\\ \{Z_3,Z_1,\breve{D}\}, \text{ если } t\in P_2,\\ \{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}, \text{ если } t\in P_3,\\ \{Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}, \text{ если } t\in P_4,\\ \{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}, \text{ если } t\in P_5, \end{cases}$$

По определению полурешетки D имеем, что для точной нижней грани множества D_t в полурешетке D выполняются следующие условия: $\Lambda(D,D_t)\notin D$ если $t\in \mathrm{P}_0\cup P_4\cap P_5$ и

$$\Lambda(D,D_t)=\begin{cases} Z_4, \text{ если } t\in P_3,\\ Z_5, \text{ если } t\in P_2,\\ Z_5, \text{ если } t\in P_1, \end{cases}$$

где $|P_5|\geq 0$, $|P_4|\geq 0$, $|\mathrm{P}_0|\geq 0$, $|P_3|\geq 1$, $|P_2|\geq 1$ и $|P_1|\geq 1$.Так как для любого непустого элемента полурешетки D не выполняется условие $Z=\bigcup\limits_{t\in Z}\Lambda(D,D_t)$ это означает что Полугруппа $B_X(D)$ не обладает правой единицей.

Лемма доказана.

Лемма 2.1.4. *Пусть* $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,6)$. *Тогда все* $XI-$*подполурешетки полурешетки* D *исчерпываются полурешетками вида:*

1) $\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}$;

2) $\{Z_5,Z_4\}$, $\{Z_5,Z_3\}$, $\{Z_5,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_1\}$, $\{Z_4,Z_2\}$, $\{Z_4,Z_1\}$, $\{Z_5,\breve{D}\}$, $\{Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_1,\breve{D}\}$;

3) $\{Z_5,Z_4,Z_2\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_1\}$, $\{Z_5,Z_4,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}$;

4) $\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}$;

5) $\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_4,Z_3,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, $\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$;

6) $\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$

Доказательство. Отметим, что данная лемма непосредственно следует из леммы 2.1.2. и из теорем 11.6.1, 11.6.2 и 11.6.3 из [39].

Известно, что если D' является конечной цепью, то полугруппа $B_X(D')$ всегда обладает правой единицей и естественно представляет собой $XI-$подполурешеток.
Такими являются подмножества, которые описаны в пунктах 1-3.

Известно также: 1) Согласно теоремы 11.6.3[39],если полурешетка дается подмножествами, которые описаны в пункте 6 леммы 2.1.2 тогда они всегда являются $XI-$полурешетками.

2) Если полурешетка дается подмножествами которые описаны в пункте 4 леммы 2.1.2 тогда полурешетка D' является $XI-$полурешеткой только в том случае когда $T \cap T' = \varnothing$ (см. теорему 11.6.2, из [39]), где $T \in \{Z_4, Z_2\}$ и $T' \in \{Z_3, Z_1\}$. По определению полурешеток класса $\Sigma_3(X,6)$ не выполняется данное условие, так как $Z_4 \cap Z_3 = (P_0 \cup P_3 \cup P_5) \cap (P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup P_4 \cup P_5) \neq \varnothing$,аналогично $Z_2 \cap Z_1 \neq \varnothing$, $Z_2 \cap Z_3 \neq \varnothing$, поэтому эти полурешетки не являются $XI-$полурешетками. Аналогично можно показать что $XI-$полурешетками не являются полурешетки которые даны в пунктах 7), 8), 9), 10), и 11) леммы 2.1.2.

Так, как полурешеток $D' = \{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ не имеет правую единицу (см. лемму 2.1.3), то согласно теоремы 2.4 из [33], она не является $XI-$полурешеткой.

Из доказанной леммы непосредственно следует, что диаграммами, которые описаны на Рис.3, исчерпываются все диаграммы $XI-$подполурешеток полурешетки D.

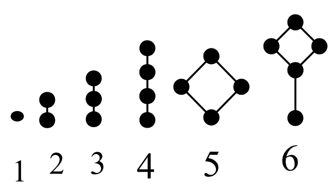


Рис. 3

2.2. Идемпотентные элементы полугрупп бинарных отношений, определенных полурешетками класса $\Sigma_3(X,6)$

Пусть $D=\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ произвольный элемент множества $\Sigma_3(X,6)$ и относительно элемента Z_5 полурешетки D рассмотрим следующие две случаи 1) $Z_5=\varnothing$ и 2) $Z_5\neq\varnothing$

По определению полурешеток D из класса $\Sigma_3(X,6)$ следует, что диаграммами, приведенными на Рис.3 исчерпываются все диаграммы $XI-$подполурешеток полурешетки D. Квазинормальные представление элементов полугрупп, которые определяются данными $XI-$полурешетками и удовлетворяют условию $Z_5=\varnothing$, может иметь один из видов приведенных ниже:

1) $\alpha=\varnothing$ *или* $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^\alpha\neq\varnothing$,

2) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$;

3) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$,

4) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$ *для некоторых* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$,

5) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_2^\alpha\times Z_2)\cup(Y_1^\alpha\times Z_1)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$,

Теорема 2.2.1. *Если* $D\in\Sigma(X,6)$ *и* $Z_5=\varnothing$, *то бинарное отношение* $\alpha\in B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление вида (2.1.8) является идемпотентным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

1) $\alpha=\varnothing$ *или* $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^\alpha\neq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$ *и* $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$;

2) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_4^\alpha\times Z_4)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

4) $\alpha=(Y_5^\alpha\times\varnothing)\cup(Y_T^\alpha\times T)\cup(Y_{T'}^\alpha\times T')\cup(Y_0^\alpha\times\breve{D})$ *для некоторых* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2$ $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$*;*

Доказательство. Пусть $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ и бинарное отношение α является идемпотентным элементом полугруппы $B_X\left(D\right)$. Тогда согласно теоремы 4 из введении множество $V\left(D,\alpha\right)$ будет $XI-$подполурешеткой полурешетки D. По определению полурешеток D из класса $\Sigma_3\left(X,6\right)$ следует, что диаграммами, приведенными на Рис.3 исчерпываются все диаграммы $XI-$подполурешеток полурешетки D.Соответственно квазинормальные представления элементов полугрупп, которые определяются данными $XI-$полурешетками и удовлетворяют условию $Z_5=\varnothing$, могут иметь один из видов приведенных в пунктах 1), 2), 3), 4) и 5). Теперь принимая во внимание следствие 13.1.1 и следствие 13.3.1 из [39] получим справедливость утверждений данной теоремы.

Теорема доказана.

Введем следующие обозначения:

1) $Q_0=\{\varnothing\}$;

2) $Q_1=\{\varnothing,T\}$, где $\varnothing\neq T\in D$;

3) $Q_2=\{\varnothing,T,T'\}$, где $T,T'\in D$ и $\varnothing\neq T\subset T'$;

4) $Q_3=\left\{\varnothing,Z_4,T,\breve{D}\right\}$, где $T\in\left\{Z_1,Z_2\right\}$;

5) $Q_4=\left\{\varnothing,\mathrm{T},\mathrm{T}',\breve{D}\right\}$; где $\mathrm{T}\in\left\{\mathrm{Z}_3,\mathrm{Z}_2\right\}$ и $\mathrm{T}'\in\left\{\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}_2,\mathrm{Z}_4\right\}$

6) $Q_5=\left\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$.

Пусть $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$. Символом I_t $\left(t\in\{1,2,3,4,5\}\right)$, обозначим множество всех идемпотентных элементов полугруппы $B_X\left(D\right)$, имеющих квазинормальные представления вида t, символом I обозначено множество всех идемпотентных элементов полугруппы $B_X\left(D\right)$.

Относительно полурешеток Q_i $(i=0,1,2,3,4,5)$ рассмотрим следующие случаи:

Если $Q_0=\{\varnothing\}$, то $Q_0\vartheta_{XI}=\{\varnothing\}$ и поэтому

$$\left|I\left(Q_0\right)\right|=1$$

(см. определение 6.3.5 из [39]).

Если $Q_1=\{\varnothing,T\}$, где $\varnothing\neq T\in D$; то $Q_1\vartheta_{XI}=\left\{\{\varnothing,\mathrm{Z}_4\},\{\varnothing,\mathrm{Z}_3\},\{\varnothing,\mathrm{Z}_2\},\{\varnothing,\mathrm{Z}_1\},\{\varnothing,\breve{D}\}\right\}$.

Известно, что число $I(\varnothing,T)$ идемпотентных бинарных отношений, имеющих квазинормальные представления вида $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^\alpha\neq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$ *и* $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, можно вычислить по формуле:

$$\left|I(\varnothing,T)\right|=\left(2^{|T|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus T|}$$

(см. теорему 6.3.13 и следствие 13.1.5 из [39]). соответственно

$$I=I\left(\varnothing,\breve{D}\right)\cup I\left(\varnothing,Z_1\right)\cup I\left(\varnothing,Z_2\right)\cup I\left(\varnothing,Z_3\right)\cup I\left(\varnothing,Z_4\right)$$

При этом элементы последнего объединения попарно не пересекаются. Поэтому

$$\left|I(Q_1)\right|=\left|I\left(\varnothing,\breve{D}\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_1\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_2\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_3\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_4\right)\right|$$

Отсюда и, принимая во внимание формулу $\left|I(\varnothing,T)\right|=\left(2^{|T|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus T|}$, получаем

$$\left|I(Q_1)\right|=\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Если $Q_2=\{\varnothing,T,T'\}$, где $T,T'\in D$ и $\varnothing\neq T\subset T'$, то

$$Q_2\vartheta_{XI}=\left\{\{\varnothing,Z_4,Z_2\},\{\varnothing,Z_4,Z_1\},\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_3,\breve{D}\}\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\}\right\}$$

$$I(Q_2)=I(\varnothing,Z_4,Z_2)\cup I(\varnothing,Z_4,Z_1)\cup I\left(\varnothing,Z_4,\breve{D}\right)\cup I\left(\varnothing,Z_3,\breve{D}\right)\cup I\left(\varnothing,Z_2,\breve{D}\right)\cup I\left(\varnothing,Z_1,\breve{D}\right).$$

При этом элементы последнего объединения попарно не пересекаются. Поэтому

$$\left|\mathrm{I}(Q_2)\right|=\left|I(\varnothing,Z_4,\mathrm{Z}_2)\right|+\left|I(\varnothing,Z_4,Z_1)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_4,\breve{D}\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_3,\breve{D}\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_2,\breve{D}\right)\right|+\left|I\left(\varnothing,Z_1,\breve{D}\right)\right|.$$

Известно, что число $I(\varnothing,T,T')$ идемпотентных бинарных отношений, имеющих квазинормальные представления вида $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$, *где* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$ можно вычислить по формуле

$$\left|I(\varnothing,T,T')\right|=\left(2^{|T|}-1\right)\cdot\left(3^{|T'\setminus T|}-2^{|T'\setminus T|}\right)\cdot 3^{|X\setminus T|}$$

Теперь принимая во внимание следствие 13.1.5 и теорему 6.3.12 из [39] получаем

$$\left|I(Q_2)\right|=\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$\left(2^{|Z_2|}-1\right).\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right).3^{|\mathrm{X}\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Если $Q_3=\{\varnothing,Z_4,T,\breve{D}\}$, где $\mathrm{T}\in\{\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}_2\}$ то $Q_3\vartheta_{XI}=\{\{\varnothing,Z_4,Z_1,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_4,Z_2,\breve{D}\}\}$ и $\mathrm{I}(Q_3)=\mathrm{I}\{\varnothing,\mathrm{Z}_4,\mathrm{Z}_2,\breve{D}\}\cup\mathrm{I}\{\varnothing,\mathrm{Z}_4,\mathrm{Z}_1,\breve{D}\}$. Очевидно что имеет место равенство $\left|\mathrm{I}(Q_3)\right|=\left|\mathrm{I}\{\varnothing,\mathrm{Z}_4,\mathrm{Z}_2,\breve{D}\}\right|+\left|\mathrm{I}\{\varnothing,\mathrm{Z}_4,\mathrm{Z}_1,\breve{D}\}\right|$. Известно, что число $I\left(\varnothing,\mathrm{Z}_4,T,\breve{D}\right)$ идемпотентных бинарных отношений, имеющих квазинормальные представления вида $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$*, где* $T\in\{Z_1,Z_2\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;
можно вычислить по формуле

$$\left|I\left(\varnothing,\mathrm{Z}_4,T,\breve{D}\right)\right|=\left(2^{|\mathrm{Z}_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\mathrm{T}\setminus\mathrm{Z}_4|}-2^{|T\setminus\mathrm{Z}_4|}\right).\left(4^{\left|\breve{D}\setminus\mathrm{T}\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus\mathrm{T}\right|}\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$

(см. следствие 13.1.5 из [39]). Принимая во внимание теорему 6.3.12 из [39] получаем

$$\begin{aligned}\left|I(Q_3)\right|&=\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\&+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

Если $Q_4=\{\varnothing,\mathrm{T},\mathrm{T}',\breve{D}\}$; где $\mathrm{T}\in\{\mathrm{Z}_3,\mathrm{Z}_2\}$ и $\mathrm{T}'\in\{\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}_2,\mathrm{Z}_4\}$, то

$Q_4\vartheta_{XI}=\{\{\varnothing,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_3,\mathrm{Z}_4,\breve{D}\},\{\varnothing,Z_3,\mathrm{Z}_1,\breve{D}\},\{\varnothing,\mathrm{Z}_2,\mathrm{Z}_1,\breve{D}\}\}$, соответственно

$\left|\mathrm{I}(Q_4)\right|=\left|\mathrm{I}\left(\varnothing,\mathrm{Z}_3,\mathrm{Z}_2,\breve{D}\right)\right|+\left|\mathrm{I}\left(\varnothing,\mathrm{Z}_3,\mathrm{Z}_4,\breve{D}\right)\right|+\left|\mathrm{I}\left(\varnothing,\mathrm{Z}_3,\mathrm{Z}_1,\breve{D}\right)\right|+\left|\mathrm{I}\left(\varnothing,\mathrm{Z}_2,\mathrm{Z}_1,\breve{D}\right)\right|$. Известно, что число $I\{\varnothing,\mathrm{T},\mathrm{T}',\breve{D}\}$ идемпотентных бинарных отношений, где $\mathrm{T}\in\{\mathrm{Z}_3,\mathrm{Z}_2\}$ и $\mathrm{T}'\in\{\mathrm{Z}_1,\mathrm{Z}_2,\mathrm{Z}_4\}$, имеющих квазинормальные представления вида 4) вычисляется по формуле $\left|I\{\varnothing,T,T',\breve{D}\}\right|=\left(2^{T\setminus T'}-1\right).\left(2^{T'\setminus T}-1\right).4^{X\setminus\breve{D}}$. Теперь принимая во внимание следствие 13.3.3 и теорему 6.3.12 из [39]получим, что

$$\begin{aligned}\left|I(Q_4)\right|&=\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right).\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right).4^{\left|\mathrm{X}\setminus\breve{D}\right|}+\\&\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right).\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right).4^{\left|\mathrm{X}\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right).\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right).4^{\left|\mathrm{X}\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

Если $Q_5=\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$, то $Q_5\vartheta_{XI}=\{\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\}$ и число идемпотентных бинарных отношений, имеющих квазинормальные представления вида 5) можно вычислять по формуле

$$\left|I(Q_5)\right|=\left(2^{|Z_1\cap Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $X-$ *конечное множество и* $Z_5=\varnothing$. *Если* I *есть множество всех идемпотентных элементов полугруппы* $B_X(D)$, *то для числа* $|I|$ *справедлива следующая формула*

$$\begin{aligned}|I|&=1+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\\
&\left(2^{|\breve{D}|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}\\
&+\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\
&+\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\cap Z_2|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

Доказательство: В силу теоремы 6.3.13 из [39] имеем, что

$$|I|=\left|I(Q_1)\right|+\left|I(Q_2)\right|+\left|I(Q_3)\right|+\left|I(Q_4)\right|+\left|I(Q_5)\right|.$$

Теперь справедливость данной теоремы непосредственно следует из выше полученных результатов.

Теорема доказана.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $D\in\Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5\neq\varnothing$. *Тогда* $\alpha\in B_X(D)$ *бинарное отношение, имеющее квазинормальное представление вида (2.1.8), является идемпотентным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий:*

1) $\alpha=Y_T^\alpha\times T$ *для некоторых* $T\in D$;

2) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T,T'\in D$, $T\subset T'$, $Y_T^\alpha\supseteq T$ *и* $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$, $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_5^\alpha,Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap T\neq\varnothing$, $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_5,Z_4\}$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}$, $T''\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$, $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq T''$, $Y_{T'}^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\alpha\cap T''\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_5^\alpha,Y_4^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq Z_2$, $Y_2^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$;

Доказательство. По определению полурешеток D из класса $\Sigma_3(X,6)$ следует, что диаграммами, приведенными на Рис.3 исчерпываются все диаграммы $XI-$ подполурешеток полурешетки D. Квазинормальные представление элементов полугрупп, которые определяются данными $XI-$полурешетками и удовлетворяют условию $Z_5 \neq \varnothing$, может иметь один из видов приведенных ниже в пунктах а), б), с), д), е) и f).

а) $\alpha = Y_T^\alpha \times T$ *для некоторых* $T \in D$;

в) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T, T' \in D$, $T \subset T'$;

с) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$;

д) $\alpha = \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_1, Z_2\}$;

е) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_5, Z_4\}$, $T' \in \{Z_3, Z_2\}$, $T'' \in \{Z_4, Z_2, Z_1\}$;

f) $\alpha = \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$;

Теперь принимая во внимание следствие 13.1.1 и следствие 13.3.1 из [39] получим справедливость утверждений 1), 2), 3), 4) 5) и 6) данной теоремы.

Теорема доказана.

Введем следующие обозначения:

1) $Q_1 = \{\mathrm{T}\}$;

2) $Q_2 = \{T, T'\}$, где $T \subset T'$ и $T, T' \in D$;

3) $Q_3 = \{T, T', T''\}$, где $T, T', T'' \in D$ и $T \subset T' \subset T''$;

4) $Q_4 = \left\{Z_5, Z_4, T, \breve{D}\right\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$;

5) $Q_5 = \left\{T, T', T'', \breve{D}\right\}$; где $T \in \{Z_5, Z_4\}$ $T' \in \{Z_3, Z_2\}$ и $T'' \in \{Z_1, Z_2, Z_4\}$

6) $Q_6 = \left\{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}$.

Рассмотрим случаи:

Если $Q_1 = \{T\}$, то $Q_1 \vartheta_{XI} = \left\{\{Z_5\}, \{Z_4\}, \{Z_3\}, \{Z_2\}, \{Z_1\}, \{\breve{D}\}\right\}$ и поэтому $\left|I(Q_0)\right| = 6$.

Если $Q_2 = \{T, T'\}$, то

$$Q_2\vartheta_{XI}=\Big\{\{Z_5,Z_4\},\{Z_5,Z_3\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},$$
$$\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}\Big\}$$

Принимая во внимание следствие 13.1.5 и теорему 6.3.12 из [39] получим

$$\left|I(Q_2)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_4|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_3|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+$$
$$+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_5|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus Z_1|}$$
$$+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 2^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Если $Q_3=\{T,T',T''\}$, где $T,T',T''\in D$ и $T\subset T'\subset T''$ то

$$Q_3\vartheta_{XI}=\Big\{\{Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_5,Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},$$
$$\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}\Big\}$$

Теперь принимая во внимание следствие 13.1.5 и теорему 6.3.12 из [39] получим

$$\left|I(Q_3)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_2|}+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus Z_1|}+$$
$$+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Если $Q_4=\{Z_5,Z_4,T,\breve{D}\}$, где $T\in\{Z_1,Z_2\}$,

то $Q_4\vartheta_{XI}=\Big\{\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\}\Big\}$.

Принимая во внимание следствие 13.1.5 и теорему 6.3.12 из [39] получим

$$\left|I(Q_4)\right|=\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Если $Q_5=\{T,T',T'',\breve{D}\}$; где $T\in\{Z_5,Z_4\}$ $T'\in\{Z_3,Z_2\}$ и $T''\in\{Z_1,Z_2,Z_4\}$

то $Q_5\vartheta_{XI}=\Big\{\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\Big\}$. Теперь принимая во внимание следствие 13.3.3 и теорему 6.3.12 из [39] получим

$$\left|I(Q_5)\right|=\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+$$
$$+\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+2\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Если $Q_6=\left\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, то $Q_6\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$. Согласно следствии 13.3.3 и теоремы 6.3.12 из [39] получим

$$\left|I\left(Q_6\right)\right|=\left(2^{\left|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Теорема 2.2.4. *Пусть $X-$конечное множество и $Z_5\neq\varnothing$. Если I есть множество всех идемпотентных элементов полугруппы $B_X(D)$, то для числа $|I|$ справедлива следующая формула*

$$\begin{aligned}
|I|={}&6+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_4\right|}+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_3\right|}+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_2\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_2\right|}+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\
&+\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_2\right|}+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus Z_1\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\
&+2\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\left(2^{\left|(Z_1\cap Z_2)\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.
\end{aligned}$$

Доказательство. В силу теоремы 6.3.13 из [39] имеем, что

$$|I|=|I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|+|I_5|+|I_6|.$$

Теперь справедливость данной теоремы непосредственно следует из результатов полученных выше.

Символом $G_X(D,\varepsilon)$ обозначается максимальная подгруппа полугруппы $B_X(D)$, имеющей своей единицей идемпотентное бинарное отношение ε полугруппы $B_X(D)$.

Теорема 2.2.5. Для любого идемпотентного бинарного отношения ε полугруппы $B_X(D)$, подгруппа $G_X(D,\varepsilon)$ полугруппы $B_X(D)$ является группой порядка не больше двух.

Доказательство. Пусть ε произвольное бинарное отношение полугруппы $B_X\left(D\right)$.Рассмотрим следующие случай:

1) Пусть идемпотентное бинарное отношение ε имеет квазинормальное представление, удовлетворяющей требованиям 1,2,3,4 теоремы 2.2.3. Тогда полурешетка $V\left(D,\varepsilon\right)$ является X-цепью. Известно, что X-цепь обладает единственным тождественным автоморфизмом. Согласно следствии 7.4.2 из [39] получаем, что $\left|G_X\left(D,\varepsilon\right)\right|=1$;

2) Пусть идемпотентное бинарное отношение ε имеет квазинормальное представление, удовлетворяющий требованиям 5) теоремы 2.2.3. Тогда диаграмма полурешетка $V\left(D,\varepsilon\right)$ имеет вид 5 на рис.3. Число автоморфизмов полурешетки $V\left(D,\varepsilon\right)$ в этом случае равно двум. Согласно теоремы 7.4.2 из [39] получаем, что $\left|G_X\left(D,\varepsilon\right)\right|=2$;

3) Пусть идемпотентное бинарное отношение ε имеет квазинормальное представление, удовлетворяющий требованиям 6) теоремы 2.2.3. Тогда диаграмма полурешетка $V\left(D,\varepsilon\right)$ имеет вид 6 на рис.3. Число автоморфизмов полурешетки $V\left(D,\varepsilon\right)$ и в этом случае равно двум. Согласно следствии 13.3.6 из [39] получаем, что $\left|G_X\left(D,\varepsilon\right)\right|=2$;

Так, как квазинормальные представления идемпотентных бинарных отношений полугруппы $B_X\left(D\right)$ исчерпываются рассмотренными 1-6 видами теоремы 2.2.3, поэтому для любого $\varepsilon\in B_X\left(D\right)$ идемпотента, подгруппа $G_X\left(D,\varepsilon\right)$ полугруппы $B_X\left(D\right)$ является группой порядка не больше двух.

Теорема доказана.

2.3. Регулярные элементы полугруппы $B_X\left(D\right)$ в случае, когда $Z_5=\varnothing$

Пусть $D=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,6\right)$. Допустим, что $Z_5=\varnothing$ и опишем регулярные элементы тех полных полугрупп бинарных отношений, которые определяются полурешетками класса $\sum_3\left(X,6\right)$.

По определению полурешеток D из класса $\Sigma_3(X,6)$ следует, что диаграммами, приведенными на Рис.3 исчерпываются все диаграммы $XI-$подполурешеток полурешетки D. Квазинормальные представления элементов полугрупп, которые определяются данными $XI-$полурешетками и удовлетворяют условию $Z_5=\varnothing$, могут иметь один из видов приведенных ниже:

1) $\alpha=\varnothing$;

2) $\alpha=\left(Y_{\varnothing}^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D, Y_T^{\alpha}\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_{\varnothing}^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$;

4) $\alpha=\left(Y_{\varnothing}^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{Z_4}^{\alpha}\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{\breve{D}}^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_{Z_4}^{\alpha},Y_T^{\alpha},Y_{\breve{D}}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$,

5) $\alpha=\left(Y_{\varnothing}^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)\cup\left(Y_{\breve{D}}^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$,

$T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$,

6) $\alpha=\left(Y_{\varnothing}^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_{Z_4}^{\alpha}\times Z_4\right)\cup\left(Y_{Z_2}^{\alpha}\times Z_2\right)\cup\left(Y_{Z_1}^{\alpha}\times Z_1\right)\cup\left(Y_{\breve{D}}^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_{Z_4}^{\alpha},Y_{Z_2}^{\alpha},Y_{Z_1}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$,

Теорема 2.3.1. *Пусть* $D=\{Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5,\breve{D}\}\in\Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5=\varnothing$. *Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление, приведенное ниже, является регулярным элементом данной полугруппы, в том и только в том случае, когда существует полный* $\alpha-$*изоморфизм* φ *полурешетки* $V(D,\alpha)$ *на некоторой подполурешетке* D' *полурешетки* D, *удовлетворяющий хотя бы одному из условии, приведенных ниже:*

1) $\alpha=\varnothing$;

2) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\in D$, $Y_T^{\alpha}\neq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$ *и* $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$;

3) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)$ *для некоторых* $\varnothing\neq T\subset T'$, $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$,

$Y_5^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

4) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^{\alpha}\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_4^{\alpha},Y_T^{\alpha},Y_0^{\alpha}\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_1,Z_2\}$,

$Y_5^{\alpha}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\supseteq Z_4$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_4^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_4^{\alpha}\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$, $Y_0^{\alpha}\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_5^{\alpha}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\alpha}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\alpha}\times T'\right)\cup\left(Y_0^{\alpha}\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_T^{\alpha},Y_{T'}^{\alpha},\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$,

$T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$, $Y_5^{\alpha}\supset\varphi(T)\cap\varphi(T')$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_T^{\alpha}\supseteq\varphi(T)$, $Y_5^{\alpha}\cup Y_{T'}^{\alpha}\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^{\alpha}\cap\varphi(T)\neq\varnothing$,

$Y_{T'}^{\alpha}\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, $Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$ $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$;

Доказательство: Справедливость утверждений 1- 3 непосредственно следует из теоремы 13.1.1,(см. [39]).

Далее, если $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, то $Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ *и* поэтому $V(D,\alpha)=\left\{\varnothing,Z_4,T,\breve{D}\right\}$, где $T\in\{Z_1,Z_2\}$. Значит, $V(D,\alpha)$ есть цепь $\varnothing\subset Z_4\subset T\subset\breve{D}$, образ которой, при полном $\alpha-$изоморфизме φ также будет цепью. По определению полурешетки D, изоморфными цепями данной цепы могут быть следующие цепы:

$$\varnothing\subset Z_4\subset Z_1\subset\breve{D} \text{ и } \varnothing\subset Z_4\subset Z_2\subset\breve{D}.$$

Отсюда получаем, что $\varphi(\varnothing)=\varnothing$, $\varphi(Z_4)=Z_4$ и $\varphi\left(\breve{D}\right)=\breve{D}$. Теперь если примем во внимание теорему 13.1.1 из [39], то получим справедливость утверждения 4) данной теоремы.

Если $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, то $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$ *и* поэтому $V(D,\alpha)=\left\{\varnothing,T,T',\breve{D}\right\}$. По определению полурешетки D, полурешетками $\left\{\left\{\varnothing,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{\varnothing,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$ исчерпываются все подполурешетки полурешетки D, содержащие пустое множество. Отсюда получаем, что $\varphi(\varnothing)=\varnothing$ и $\varphi\left(\breve{D}\right)=\breve{D}$. Принимая во внимание следствие 6.3.3 и теорему 13.3.1,(см. [39]) получаем справедливость утверждения 5) данной теоремы.

Аналогично доказывается справедливость утверждения 6) данной теоремы.

Теорема доказана.

По соглашению символом $Q\vartheta_{XI}$ *обозначается тот* $\vartheta_{XI}-$*класс эквивалентности* ϑ_{XI} *множества* $\Sigma'_{XI}(D)$, *который содержит элемент* $Q\in\Sigma'_{XI}(D)$ *и* $R^*(Q)=\bigcup\limits_{D'\in Q\vartheta_{XI}}R(D')$. *По требованиям теоремы 2.3.1. имеем:*

$Q_1=\{T\}$; $Q_2=\{T,T'\}$, где $T,T'\in D$ и $T\subset T'$;

$Q_3=\{T,T',T''\}$, где $T,T',T''\in D$ и $T\subset T'\subset T''$;

$Q_4=\left\{Z_5,Z_4,T,\breve{D}\right\}$,где $T\in\{Z_1,Z_2\}$;

$Q_5=\left\{T,T',T'',\breve{D}\right\}$, где $T\in\{Z_5,Z_4\}$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}$ и $T''\in\{Z_1,Z_2,Z_4\}$;

$Q_6 = \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.

Обозначаем через R множество всех регулярных элементов полугруппы $B_X(D)$.

Понятно, что

$$|R| = |R^*(Q_1)| + |R^*(Q_2)| + |R^*(Q_3)| + |R^*(Q_4)| + |R^*(Q_5)| + |R^*(Q_6)|.$$

Число подполурешеток $Q_i,\ i = 1, \ldots, 6$, которые являются изоморфными существующих XI-полурешеток, обозначаем через m_0, $|\Omega(Q)| = m_0$. В случае, когда $Z_5 = \varnothing$, среди них рассматриваем только те, которые содержат пустое множество.

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 1) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_1 = \{\varnothing\}$; тогда

$$Q_1 \vartheta_{XI} = \{\{\varnothing\}\} \text{ и } |R^*(Q_1)| = 1.$$

Регулярным элементам полугруппы $B_X(D)$, которые удовлетворяют условию 2) теоремы 2.3.1. соответствует $Q_2 = \{\varnothing, T'\}$, тогда $Q_2 \vartheta_{XI} = \{\{\varnothing, Z_4\}, \{\varnothing, Z_3\}, \{\varnothing, Z_2\}, \{\varnothing, Z_1\}, \{\varnothing, \breve{D}\}\}$, т.е. $m_0 = 5$ и поэтому в силу следствия 13.1.4 (см. [39]) имеем $|R^*(Q_2)| = 5 \cdot \left(2^{|\breve{D}|} - 1\right) \cdot 2^{|X \setminus \breve{D}|}$. так как в нашем случае $|D| = 6$.

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида 3).

В этом случае имеем, что $Q_3 = \{\varnothing, T, T'\}$, где $T, T' \in D$ и $\varnothing \neq T \subset T'$, то

$$Q_3 \vartheta_{XI} = \{\{\varnothing, Z_4, Z_2\}, \{\varnothing, Z_4, Z_1\}, \{\varnothing, Z_4, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_3, \breve{D}\} \{\varnothing, Z_2, \breve{D}\}, \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}\}$$

Отсюда следует, что $|\Phi(Q_3, Q_3)| = 1$ и $|\Omega(Q_3)| = 6$. Ведем обозначения:

$$D_1' = \{\varnothing, Z_4, Z_2\},\ D_2' = \{\varnothing, Z_4, Z_1\},\ D_3' = \{\varnothing, Z_4, \breve{D}\},$$

$$D_4' = \{\varnothing, Z_3, \breve{D}\},\ D_5' = \{\varnothing, Z_2, \breve{D}\},\ D_6' = \{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}.$$

Поэтому

$R^*(Q_2) = R(D_1') \cup R(D_2') \cup R(D_3') \cup R(D_4') \cup R(D_5') \cup R(D_6')$ …………(2.3.1)

Лемма 2.3.1. *Пусть* $D \in \Sigma_3(X,6)$, $Z_5 = \varnothing$ и $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.3.1, тогда справедливо равенство*

$$\left|R^*(Q_3)\right| = \left|R\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\}\right| + \left|R\{\varnothing, Z_3, \breve{D}\}\right| + \left|R\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\}\right| + \left|R\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}\right| -$$
$$- \left|R\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\}\right| - \left|R\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\} \cap R\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\}\right|$$

Доказательство. Сначала докажем следующие включения:

1) $R(D_1') \subseteq R(D_3')$; 5) $R(D_4') \cap R(D_5') = \varnothing$;

2) $R(D_2') \subseteq R(D_3')$; 6) $R(D_4') \cap R(D_3') = \varnothing$;

3) $R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing$; 7) $R(D_4') \cap R(D_2') = \varnothing$;

4) $R(D_4') \cap R(D_6') = \varnothing$; 8) $R(D_4') \cap R(D_1') = \varnothing$;

Допустим, что квазинормальное представление бинарного отношения α полугруппы $B_X(D)$ имеет вид $\alpha = (Y_5^\alpha \times \varnothing) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T')$ и $\alpha \in R(D_1')$. Тогда в силу утверждения 3) теоремы 2.3.1 имеем:

$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$;

Так как $Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, естественно, что $Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$. Значит, справедливы следующие условия:

$$Y_5^\alpha \neq \varnothing,\ Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing \text{ и } Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$$

т.е. $\alpha \in R(D_3')$ а это означает справедливость включений $R(D_1') \subseteq R(D_3')$**.**

Аналогично доказывается справедливость включения

$$R(D_2') \subseteq R(D_3').$$

Теперь пусть $\alpha \in R(D_5') \cap R(D_6')$. Тогда в силу утверждения 3) теоремы 2.3.1 выполняются следующие условия:

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \text{ и}$$
$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_T^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

Отсюда получим: $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2 \cup Z_1 = \breve{D}$ и $(Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$. Однако неравенство $(Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha) \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$ противоречит о квазинормальности представления бинарного отношения α. Полученное противоречие показывает, что $R(D_5') \cap R(D_6') = \varnothing$

Допустим что $\alpha \in R(D_4') \cap R(D_6')$. Вытекая из утверждений 3) теоремы 2.3.1 имеется:

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_3,\ Y_T^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_T^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$$

Сравнивая эти данные имеется что $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_3 \cup Z_1 = \breve{D}$ и $\left(Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$, но $\left(Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_{T'}^\alpha \neq \varnothing$ противоречит о квазинормальности представления бинарного отношения α, т. е $R\left(D_4'\right) \cap R\left(D_6'\right) = \varnothing$. Аналогичным образом можно показать справедливость утверждений 5) 6) 7) 8).

Принимая во внимание полученных результатов равенство (2.3.1) примет следующий вид:

$$\left|R^*\left(Q_2\right)\right| = \left|R\left(D_3'\right)\right| + \left|R\left(D_4'\right)\right| + \left|R\left(D_5'\right)\right| + \left|R\left(D_6'\right)\right| - \left|R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_5'\right)\right| - \left|R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_6'\right)\right|.$$

(см. [51] , стр. 22).

Лемма доказана.

Лемма 2.3.2. *Пусть* $D \in \Sigma_3\left(X, 6\right)$, $Z_5 = \varnothing$ *и* $\alpha \in B_X\left(D\right)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.3.1, тогда :*

а) $\alpha \in R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing, Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$$

б) $\alpha \in R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия: $Y_5^\alpha \supseteq \varnothing, Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing, Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_5'\right)$. Тогда в силу утверждения 3) теоремы 2.3.1 выполняются следующие условия:

$$Y_\varnothing^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_\varnothing^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$$

$$Y_\varnothing^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_\varnothing^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

Отсюда получим: $Y_\varnothing^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_\varnothing^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$.

С другой стороны, если выполняются все последние условия, то из включения $Z_4 \subset Z_2$ получим, что $\alpha \in R\left(D_3'\right) \cap R\left(D_5'\right)$.

Утверждение а) доказано.

Аналогично доказывается утверждение b).

Лемма доказана.

Лемма 2.3.3. Пусть $D \in \Sigma_3\left(X,6\right)$, $Z_5 = \varnothing$.Если X конечное множество и $\alpha \in B_X\left(D\right)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.3.1,* тогда имеют место равенство:

ა)$\left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_2, \breve{D}\right\}\right| = 6 \cdot \left(2^{|Z_2|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$;

ბ)$\left|R\left\{\varnothing, Z_4, \breve{D}\right\} \cap R\left\{\varnothing, Z_1, \breve{D}\right\}\right| = 6 \cdot \left(2^{|Z_1|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$.

Доказательство. *Заметим, что* $\left|\Phi\left(Q_2, Q_2\right)\right| = 1$. *Отсюда и в силу леммы 6.3.2(см. [39]) будем иметь, что* $\left|\Phi\left(Q_2, D'\right)\right| = 1$.

Пусть $\alpha \in R\left(D_3'\right) \cap R\left(\left\{\varnothing, Z, \breve{D}\right\}\right)$, где $Z \in \left\{Z_2, Z_1\right\}$ и α имеет квазинормальное представление, которое дано в третьем пункте теоремы 2.3.1

$$\alpha = \left(Y_5^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right).$$

Тогда в силу леммы 2.3.2 имеем

$$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing,\ Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z,\ Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_{T'}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing. \ldots(2.3.2)$$

Далее, допустим, что f_α есть такое отображение множества X в полурешетке D, что $f_\alpha\left(t\right) = t\alpha$ для любого $t \in X$. $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ соответственно суть ограничений отображения f_α на множествах Z_4, $Z \setminus Z_4$, $\breve{D} \setminus Z$ и $X \setminus \breve{D}$.

По предположению имеем, что множества Z_4, $Z \setminus Z_4$, $\breve{D} \setminus Z$ и $X \setminus \breve{D}$ попарно не пересекаются и объединение всех данных множеств равно X. Установим свойства отображений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

1) $t \in Z_4$. Тогда согласно включению $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z$, имеем, что $t \in Z_4 \subset Z \subseteq Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha$ и по определению множеств Y_5^α и Y_T^α ,$t\alpha \in \left\{\varnothing, T\right\}$. Итак, $f_{0\alpha}\left(t\right) \in \left\{\varnothing, T\right\}$ для любого $t \in Z_4$.

С другой стороны т.к. $Y_T^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, поэтому $t_1 \in Y_T^\alpha$ для некоторого элемента t_1 множества Z_4 и соответственно $t_1\alpha = T$ т .е. $f_{0\alpha}\left(t_1\right) = T$ для некоторого $t_1 \in T_3$.

2) $t \in Z \setminus Z_4$. В этом случае в силу включения $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z$ из условий (2.3.2) получается, что $t \in Z \setminus Z_4 \subseteq Z \subseteq Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha$. Значит, $t\alpha \in \left\{\varnothing, T\right\}$ по определению множеств Y_0^α и Y_T^α. Итак, $f_{1\alpha}\left(t\right) \in \left\{\varnothing, T\right\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_4$.

3) $t \in \breve{D} \setminus Z$. В этом случае имеем, что $t \in \breve{D} \setminus Z \subseteq X = Y_{\varnothing}^{\alpha} \cup Y_{T}^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}$ и $t\alpha \in \{\varnothing, T, T'\}$ по определению множеств Y_5^{α}, Y_T^{α} и $Y_{T'}^{\alpha}$.

С другой стороны, согласно условии $Y_{T'}^{\alpha} \cap \breve{D} \neq \varnothing$,существует элемент t_2 множества $\breve{D}$, что $t_2 \in Y_{T'}^{\alpha}$. В результате получается, что $t_2\alpha = T' = \breve{D}$. Допустим, что $t_2 \in Z$, тогда в силу доказанного выше, в пункте 2) имеем $t_2\alpha \in \{\varnothing, T\}$. Однако это противоречит равенству $t_2\alpha = \breve{D}$. Полученное противоречие показывает, что $t_2 \in \breve{D} \setminus Z$. Итак, $f_{2\alpha}(t_2) = \breve{D}$ для некоторого $t_2 \in \breve{D} \setminus Z$.

4) $t \in X \setminus \breve{D}$. Тогда в силу условия $X = Y_5^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}$ следует, что $t \in Y_5^{\alpha} \cup Y_T^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}$. Отсюда имеем, что $t\alpha \in \{\varnothing, T, T'\}$. Значит, $f_{3\alpha}(t) \in \{\varnothing, T, T'\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Следовательно, для бинарного отношения $\alpha \in R(D_3') \cap R(\{\varnothing, Z, \breve{D}\})$, имеющее квази-нормальное представление, всегда существует однозначно определенная система

$$(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}). \quad \ldots(2.3.3)$$

Очевидно, что различным элементам множества $R(D_3') \cap R(\{\varnothing, Z, \breve{D}\})$ соответствуют различные упорядоченные системы указанного вида.

Теперь пусть $f_0 : Z_4 \to \{\varnothing, T\}$, $f_1 : Z \setminus Z_4 \to \{\varnothing, T\}$, $f_2 : \breve{D} \setminus Z \to \{\varnothing, T, T'\}$ и $f_3 : X \setminus \breve{D} \to \{\varnothing, T, T'\}$ такие отображения, которые удовлетворяют следующим условиям:

$f_0(t) \in \{\varnothing, T\}$ для любого $t \in Z_4$ и $t_1\alpha = T$ для некоторого $t_1 \in Z_4$;

$f_1(t) \in \{\varnothing, T\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_4$;

$f_2(t) \in \{\varnothing, T, T'\}$ для любого $t \in \breve{D} \setminus Z$ и $t_2\alpha = \breve{D}$ для некоторого $t_2 \in \breve{D} \setminus Z$;

$f_3(t) \in \{\varnothing, T, T'\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Теперь определим отображение $f : X \to D$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{если } t \in Z_4, \\ f_1(t), & \text{если } t \in Z \setminus Z_4, \\ f_2(t), & \text{если } t \in \breve{D} \setminus Z, \\ f_3(t), & \text{если } t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

Отображению *f* сопоставим бинарное отношение $\beta = \bigcup_{t \in X} (\{t\} \times f(t))$. Далее, пусть $Y_5^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = \varnothing\}$, $Y_T^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = T\}$ и $Y_{T'}^{\beta} = \{t \in X \mid t\beta = T'\}$. При этих обозначениях квазинормальное представление бинарное отношение β примет вид $\beta=\left(Y_5^{\beta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\beta}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\beta}\times T'\right)$. Кроме того, из определения бинарного отношения β непосредственно следует, что $Y_5^{\beta}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\beta}\cup Y_T^{\beta}\supseteq Z$, $Y_T^{\beta}\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_{T'}^{\beta}\cap\breve{D}\neq\varnothing$, так как $t_1\in Y_T^{\beta}\cap Z_4$ и $t_2\in Y_{T'}^{\beta}\cap\breve{D}$. Отсюда в силу леммы 2 п. 2.3 получим, что бинарное отношение β есть регулярный элемент полугруппы $B_X\left(D\right)$, принадлежащий множеству $R\left(D_3'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z,\breve{D}\right\}\right)$.

Значит, между бинарными отношениями $\alpha\in R\left(D_3'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z,\breve{D}\right\}\right)$, имеющие соответствующее квазинормальное представления и упорядоченными системами вида $\left(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha}\right)$ существует взаимно однозначное соответствие. Числа всех отображений вида $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ $\left(\alpha\in R\left(D_3'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z,\breve{D}\right\}\right)\right)$ соответственно равны $2^{|Z_4|}-1$, $2^{|Z\setminus Z_4|}$, $3^{\left|\breve{D}\setminus Z\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z\right|}$ и $3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$. При этом, число полученное умножением $\left(2^{|Z|}-2^{|Z\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$ не зависит от выбора цепей $\varnothing\neq T\subset T'$ $\left(T,T'\in D\right)$ полурешетки D. Так как число таких различных цепей полурешетки D $\left|\Omega\left(Q_2\right)\right|=6$, поэтому для произвольных $T,T'\in D$, где $\varnothing\neq T\subset T'$ число регулярных элементов множества $R\left(D_3'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z,\breve{D}\right\}\right)$ вычисляется по формуле

$$\left|R\left(D_3'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z,\breve{D}\right\}\right)\right|=6\cdot\left(2^{|Z|}-2^{|Z\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Учитывая, что $Z\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$ получаем утверждения a) и b)

$$\left|R\left(\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_2,\breve{D}\right\}\right)\right|=6\cdot\left(2^{|Z_2|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$
$$\left|R\left(\left\{\varnothing,Z_4,\breve{D}\right\}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_1,\breve{D}\right\}\right)\right|=6\cdot\left(2^{|Z_1|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $D\in\Sigma_5\left(X,5\right)$ *и* $Z_5=\varnothing$. *Если* $X-$ *конечное множество* и $\alpha\in B_X\left(D\right)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.3.1, то справедливо равенство*

$$\left|R^*\left(Q_3\right)\right|=6\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\left(2^{|Z_3|}-1\right).\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right).3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Доказательство. В силу леммы 2.3.1 и 2.3.3, теорем 6.3.12 и 13.3.2 (см.[39]) будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\left|R^*(Q_3)\right| = \left|R\left(\varnothing, Z_4, \breve{D}\right)\right| + \left|R\left(\varnothing, Z_3, \breve{D}\right)\right| + \left|R\left(\varnothing, Z_2, \breve{D}\right)\right| + \left|R\left(\varnothing, Z_1, \breve{D}\right)\right| \\
&- \left|R\left(\varnothing, Z_4, \breve{D}\right) \cap R\left(\varnothing, Z_2, \breve{D}\right)\right| - \left|R\left(\varnothing, Z_4, \breve{D}\right) \cap R\left(\varnothing, Z_1, \breve{D}\right)\right| = \\
&= 6 \cdot \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_4\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + 6 \cdot \left(2^{|Z_3|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\
&+ 6 \cdot \left(2^{|Z_2|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + 6\left(2^{|Z_1|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) . 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} - \\
&- 6 \cdot \left(2^{|Z_2|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} - 6 . \left(2^{|Z_1|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) . \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) . 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} = \\
&= 6 \cdot \left(2^{|Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_4\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + 6\left(2^{|Z_3|} - 1\right) . \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_3\right|}\right) . 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\
&+ 6 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + 6 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 2^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 3^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}.
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида 4) теоремы 2.3.1. В этом случае имеем $Q_4 = \left\{\varnothing, Z_4, T, \breve{D}\right\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$, $\varnothing \neq Z_4 \subset T \subset \breve{D}$ и

$$Q_4 \vartheta_{XI} = \left\{\left\{\varnothing, Z_4, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_4, Z_1, \breve{D}\right\}\right\}$$

Очевидно, что $\left|\Phi(Q_4, Q_4)\right| = 1$ и $\left|\Omega(Q_4)\right| = 2$. Введем обозначения $D_1' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}$, $D_2' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}$. Тогда будет иметь место равенство

$$R^*(Q_4) = R(D_1') \cup R(D_2').$$

Лемма 2.3.4. *Пусть* $D \in \Sigma_3(X, 6)$ $Z_5 = \varnothing$. $\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 4) теоремы 2.3.1. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\left|R^*(Q_4)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$$

Доказательство. Сначала покажем справедливость утверждения $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$. Допустим, что $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$. Квазинормальное представле-ние бинарного отношения α в силу утверждения 4) теоремы 2.3.1. имеет вид

$$\alpha = \left(Y_5^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right),$$

и в соответствии:

$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

$Y_5^\alpha \supseteq \varnothing$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1$, $Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_T^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing$, $Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$;

Следовательно, справедливы включения $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1 \cup Z_2 = \breve{D}$ и $\left(Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha \supseteq \left(Z_1 \cup Z_2\right) \cap Y_0^\alpha = \breve{D} \cap Y_0^\alpha \neq \varnothing$.

По определению квазинормальности представления бинарного отношения α имеем, что $\left(Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) = \varnothing$.

Принимая во внимание равенство $R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right) = \varnothing$, получаем

$$\left|R^*\left(Q_3\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right| - \left|R\left(D_1'\right) \cap R\left(D_2'\right)\right| = \left|R\left(D_1'\right)\right| + \left|R\left(D_2'\right)\right|.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.3.3. *Пусть* $D \in \Sigma_3\left(X,6\right)$ *и* $Z_5 = \varnothing$. *Если* X *– конечное множество, то число регулярных элементов полугруппы* $B_X\left(D\right)$*, соответствующие квазинормальным представлениям вида 4) теоремы 2.3.1. определяется по формуле*

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right| = 2 \cdot \left(2^{\left|Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} \\ + 2 \cdot \left(2^{\left|Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

Доказательство. В силу леммы 2.3.4, теорем 6.3.12 и 6.3.5 (см.[39]) будем иметь

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right| &= \left|R\left(\varnothing, Z_4, Z_2, \breve{D}\right)\right| + \left|R\left(\varnothing, Z_4, Z_1, \breve{D}\right)\right| = \\ &= 2 \cdot \left(2^{\left|Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|Z_2 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_2\right|}\right) \cdot 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|} + \\ &+ 2 \cdot \left(2^{\left|Z_4\right|} - 1\right) \cdot \left(3^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|} - 2^{\left|Z_1 \setminus Z_4\right|}\right) \cdot \left(4^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|} - 3^{\left|\breve{D} \setminus Z_1\right|}\right) . 4^{\left|X \setminus \breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Бинарным отношениям полугруппы $B_X\left(D\right)$, которые имеют квазинормальные представления вида 5) с теоремы 2.3.1, т.е. $\alpha = \left(Y_\varnothing^\alpha \times \varnothing\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{\breve{D}}^\alpha \times \breve{D}\right)$, где $T \in \left\{Z_3, Z_2\right\}$ *и* $T' \in \left\{Z_4, Z_2, Z_1\right\}$ *соответствует* $Q_5 = \left\{\varnothing, T, T', \breve{D}\right\}$ и в этом случае

$$Q_5 \vartheta_{XI} = \left\{\left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \left\{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\}\right\},\ \left|\Phi\left(Q_5, Q_5\right)\right| = 2,\ \left|\Omega\left(Q_5\right)\right| = 4.$$

Введем обозначения:

$$D_1' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}, \quad D_2' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}, \quad D_3' = \left\{\varnothing, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}, \quad D_4' = \left\{\varnothing, Z_2, Z_1, \breve{D}\right\};$$

Количество регулярных элементов определяется по равенству

$R^*\left(Q_4\right) = R\left(D_1'\right) \cup R\left(D_2'\right) \cup R\left(D_3'\right) \cup R\left(D_4'\right)$, следовательно

$$\begin{aligned}&\left|R^*(Q_4)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_2')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|-\\&-\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_3')\cap R(D_4')\right|+\\&+\left|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\right|+\left|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_4')\right|+\left|R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\right|+\\&+\left|R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\right|\end{aligned}.$$

Лемма 2.3.5. *Если* $D=\left(Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right)\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5=\varnothing$ *и* $\alpha\in B_X(D)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям условии 5) теоремы 2.3.1, тогда справедливо равенство*

$$\left|R^*(Q_4)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_1')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|.$$

Доказательство. Сперва докажем что место имеют равенства:

1) $R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing$; *3)* $R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing$;

2) $R(D_1')\cap R(D_4')=\varnothing$; 4) $R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing$;

Допустим, что $R(D_1')\cap R(D_3')\neq\varnothing$. Тогда существует $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_3')$. Согласно теоремы 2.3.1. $\alpha\in B_X(D)$ бинарное отношение, имеющий квазинормальное представление вида $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ где $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,\notin\{\varnothing\}$, $T\in\{Z_3,Z_2\}$, $T'\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$, является регулярным элементом тогда и только тогда, когда удовлетворены условия:

$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supset\varphi(T)\cap\varphi(T')$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$,

$Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$;

При наших обозначениях, учитывая что $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_3')$, эти условия перепишутся так:

$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z_2$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3$, $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_2$, $Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$ *и*

$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing$, $Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z_1$, $Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3$, $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1$, $Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing$, $Y_{T'}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing$, опирая на них получается, что $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_2\cup Z_1=\breve{D}$ *и* $\left(Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_T^\alpha\supset\breve{D}\cap Y_T^\alpha$. Однако, по условию $Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing$ *и* $Z_3\subset\breve{D}$; Очевидно, что $Y_T^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ и имеем $\left(Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_T^\alpha\neq\varnothing$, но этот результат противоречит о квазинормальности представления бинарного отношения α. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно и что $R(D_1')\cap R(D_3')=\varnothing$.

Аналогичным образом можно показать истинность утверждений 2), 3), 4). Учитывая справедливости полученных результатов и формулу (2.3.4), по которой определяется количество регулярных элементов, имеет место равенство:

$$\left|R^*\left(Q_4\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_1'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3.6. Пусть $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$, $Z_5=\varnothing$. Если $\alpha\in B_X\left(D\right)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям условии 5) теоремы 2.3.1, тогда справедливо равенство*

$\alpha\in R\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\cap R\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}$, где $Z\in\left\{Z_1,Z_2\right\}$ в том и только в том случае, когда

$$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing,\ Y_5^\alpha\supseteq Z_3\cap Z,\ Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z, Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\quad Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing.$$

Доказательство. Допустим, что $\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right), Z\in\left\{Z_1,Z_2\right\}$. *Т*огда в силу теоремы 2.3.1. удовлетворяются условия:

$$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z_4, Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4, Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing\ \text{и}$$

$$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z, Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z, Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing, Y_{T'}^\alpha\cap Z\neq\varnothing.$$

Опирая на них можно определять необходимое и достаточное условия для того, чтобы α принадлежало пересечению $R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$. Если $\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$, тогда имеется что:

$$Y_5^\alpha\supseteq\varnothing, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z, Y_5^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z, Y_T^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing, Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing.$$

С другой стороны, если выполнены полученные условия (2.3.4), тогда в силу включений $Z_4\subset Z_1$ и $Z_4\subset Z_2$ получаем, что:

$$\alpha\in R\left(\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right)$$

$$\alpha\in R\left(\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3.7. *Пусть* $D\in\Sigma_3\left(X,6\right), Z_5=\varnothing$. *Если* X *есть конечное множество* и $\alpha\in B_X\left(D\right)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям условии 4) теоремы 2.3.1, тогда справедливы следующие равенства:*

1) $\left|R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right)\right|=8\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$***;***

2) $\left|R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right)\right|=8\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_3\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$.

Доказательство. Имеем, что $V(D,\alpha)=\{\varnothing,T,T',\breve{D}\}$. При этом $Q\in\{D_1',D_2',D_3',D_4'\}$. В данном случае α -изоморфизмы имеют вид:

$$\varphi_1=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_3 & Z_4 & \breve{D}\end{pmatrix}\ \varphi_2=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_3 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}\ \varphi_3=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_3 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix}\ \varphi_4=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_2 & Z_1 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

$$\varphi_5=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_4 & Z_3 & \breve{D}\end{pmatrix}\ \varphi_6=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_2 & Z_3 & \breve{D}\end{pmatrix}\ \varphi_7=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_1 & Z_3 & \breve{D}\end{pmatrix}\ \varphi_8=\begin{pmatrix}\varnothing & T & T' & \breve{D}\\ \varnothing & Z_1 & Z_2 & \breve{D}\end{pmatrix}$$

Заметим, что мощность множества всех полных автоморфизмов $|\Phi(Q,Q)|=2$. Мощность всех полных изоморфизмов из XI полурешетки Q на X полурешетке D' равно $|\Phi(Q,D')|=8$. Пусть, $\alpha\in R(D_2')\cap R(\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\})$, $Z\in\{Z_1,Z_2\}$ и бинарное отношение $\alpha\in B_X(D)$ имеет квазинормальное представление вида 5) теоремы 2.3.1.

Допустим, что f_α есть такое отображение множества X в полурешетке D, что $f_\alpha(t)=t\alpha$ для любого $t\in X$. Рассмотрим ограничений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ отображения f_α на множествах $Z_3\cap Z$, $Z\setminus Z_3$, $Z_3\setminus Z$ и $X\setminus\breve{D}$.

По предположению имеем, что множества $Z_3\cap Z$, $Z\setminus Z_3$, $Z_3\setminus Z$ и $X\setminus\breve{D}$ попарно не пересекаются и теоретико-множественное объединение всех данных множеств равно X. Установим свойства отображений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

1) $t\in Z_3\cap Z$. Тогда в силу включения $Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z$ (см. лемму 2.3.6) получим, что $t\in Y_5^\alpha$, т.е. $t\alpha\in\varnothing$ и $f_{0\alpha}(t)\in\{\varnothing\}$ для любого $t\in Z_3\cap Z$.

2) $t\in Z\setminus Z_3$. В этом случае силу включения $Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z$ (лемма 2.3.6) имеем, что $t\in Z\setminus Z_3\subseteq Z\subseteq Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha$. Значит, $t\alpha\in\{\varnothing,T'\}$ по определению множеств Y_5^α и $Y_{T'}^\alpha$. Итак, $f_{1\alpha}(t)\in\{\varnothing,T'\}$ для любого $t\in Z\setminus Z_3$.

С другой стороны согласно леммы 2.3.6 имеем $Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$. Поэтому существует элемент t_1, для которого $t_1\in Y_{T'}^\alpha$ и $t_1\in Z_4$. В результате $t_1\alpha=T'$ и т.к. $Z_4\subset Z$, имеем, что $t_1\in Z$. Предположим, что $t_1\in Z_3$, $Y_\varnothing^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq Z_3$ *(см. лемму 2.3.6),* следовательно $t_1\alpha\in\{\varnothing,T\}$. Однако это противоречит равенству $t_1\alpha=T'$. Полученное противоречие показывает, что $t_1\in Z\setminus Z_3$. Итак, $f_{1\alpha}(t)\in\{\varnothing,T'\}$ для любого $t\in Z\setminus Z_3$ и $f_{1\alpha}(t_1)=T'$ для некоторого $t_1\in Z\setminus Z_3$.

3) $t \in Z_3 \setminus Z$. В этом случае по условию $Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_3$ имеем, что $t \in Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha$. Значит, $t\alpha \in \{\varnothing, T\}$ по определению множеств Y_5^α и Y_T^α. Итак, $f_{2\alpha}(t) \in \{\varnothing, T\}$ для любого $t \in Z_3 \setminus Z$.

С другой стороны согласно леммы 2.3.6 имеем $Y_T^\alpha \cap Z_3 \neq \varnothing$. Поэтому существует $t_2 \in Y_T^\alpha$ для некоторого элемента t_2 множества Z_3. Отсюда получим $t_2\alpha = T$ и $t_2 \in Z_3$. Далее, если $t_2 \in Z$, то в силу условий $Y_5^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z$ будем иметь $t_2\alpha \in \{\varnothing, T'\}$. Однако последнее противоречит равенству $t_2\alpha = T$. Полученное противоречие показывает, что $t_2 \in Z_3 \setminus Z$. Итак, $f_{2\alpha}(t_2) = T$ для некоторого $t_2 \in Z_3 \setminus Z$.

4) $t \in X \setminus \breve{D}$. Тогда в силу условия $X = Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \cup Y_0^\alpha$ следует, что $t \in Y_5^\alpha \cup Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha$. Поэтому $t\alpha \in \{\varnothing, T, T'\}$. Значит, $f_{3\alpha}(t) \in \{\varnothing, T, T'\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Следовательно, для бинарного отношения $\alpha \in R(D_2') \cap R(\{\varnothing, Z_3, Z, \breve{D}\})$, имеющее квазинормальное представление вида 5(см. теорему 2.3.1) всегда существует однозначно определенная система

$$(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}). \ \ldots(2.3.4)$$

Очевидно, что различным элементам множества $R(D_2') \cap R(\{\varnothing, Z_3, Z, \breve{D}\})$ соответствуют различные упорядоченные системы вида .

Пусть $f_0 : Z_3 \cap Z \to \varnothing$, $f_1 : Z \setminus Z_3 \to \{\varnothing, T'\}$, $f_2 : Z_3 \setminus Z \to \{\varnothing, T\}$ и $f_3 : X \setminus \breve{D} \to \{\varnothing, T, T'\}$ такие отображения, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_0(t) \in \{\varnothing\}$ для любого $t \in Z_3 \cap Z$;

2) $f_1(t) \in \{\varnothing, T'\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_3$ и $t_1\alpha = T'$ для некоторого $t_1 \in Z \setminus Z_3$;

3) $f_2(t) \in \{\varnothing, T\}$ для любого $t \in Z_3 \setminus Z$ и $t_2\alpha = T$ для некоторого $t_2 \in Z_3 \setminus Z$;

4) $f_3(t) \in \{\varnothing, T, T'\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Теперь определим отображение $f : X \to D$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), \text{ если } t \in Z_3 \cap Z, \\ f_1(t), \text{ если } t \in Z \setminus Z_3, \\ f_2(t), \text{ если } t \in Z_3 \setminus Z, \\ f_3(t), \text{ если } t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

Отображению *f* сопоставим бинарное отношение $\beta = \bigcup_{t \in X} (\{t\} \times f(t))$. Далее, пусть $Y_5^\beta = \{t \in X \mid t\beta = \varnothing\}$, $Y_T^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T'\}$ и $Y_0^\beta = \{t \in X, t\beta = \breve{D}\}$. При этих обозначениях квазинормальное представление бинарного отношения β примет вид $\beta=\left(Y_5^{\beta}\times\varnothing\right)\cup\left(Y_T^{\beta}\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^{\beta}\times T'\right)\cup\left(Y_0^{\beta}\times\breve{D}\right)$. Кроме того, из определения бинарного отношения β непосредственно следует, что $Y_5^{\beta}\supseteq\varnothing$, $Y_5^{\beta}\cup Y_T^{\beta}\supseteq Z_3$, $Y_5^{\beta}\cup Y_{T'}^{\beta}\supseteq Z$, $Y_T^{\beta}\cap Z_3\neq\varnothing$, $Y_{T'}^{\beta}\cap Z\neq\varnothing$, так как $t_1\in Y_{T'}^{\beta}\cap Z_3$ и $t_2\in Y_T^{\beta}\cap Z_3$. Учитывая полученные данные, получаем, что бинарное отношение β есть регулярный элемент полугруппы $B_X(D)$, принадлежащий множеству $R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$.

Значит, между бинарными отношениями $\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$, имеющие представления вида 5(см.т.2.3.1), и упорядоченными системами вида $\left(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha}\right)$ существует взаимно однозначное соответствие. Числа отображений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ ($\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$ соответственно равны 1, $2^{|Z\setminus Z_3|}-1$, $2^{|Z_3\setminus Z|}-1$, и $4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$. При этом, эти числа не зависят от перестановки точек T и T' в полурешетках $D_i'=\left\{\varnothing,T,T',\breve{D}\right\},i=1,2,3,4$, $T\in\left\{Z_3,Z_2\right\}$ *и* $T'\in\left\{Z_4,Z_2,Z_1\right\}$. Так как число таких различных полурешеток D' равно 4, поэтому для произвольных $T,T'\in D$, где $\varnothing\neq T\subset T'$ число регулярных элементов множества $R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$ определяется по формуле

$$\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)\right|=4\cdot2\cdot1\cdot\left(2^{|Z\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

где $Z\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$. Следовательно:

$$\left|R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}\right)\right|=8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|},$$

$$\left|R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}\right)\cap R\left(\left\{\varnothing,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}\right)\right|=8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Лемма доказана.

Теорема **2.3.4.** Пусть $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ и $Z_5=\varnothing$. Если $X-$конечное множество и $\alpha\in B_X\left(D\right)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 5) теоремы 2.3.1, то справедливо равенство

$$\left|R^*\left(Q_5\right)\right|=8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Доказательство. По предположению, в силу теоремы 6.3.5(см. [39]) и лемм 2.3.6-2.3.7 имеем

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_4\right)\right| &= 8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-\\ &-8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}-8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}=\\ &=8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида 6) теоремы 2.3.1. В этом случае $Q_6=\left\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$, $Q_6\vartheta_{XI}=\left\{\left\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$ и по определению полурешетки $D\in\Sigma_3(X,6)$, имеем, что $\left|\Phi\left(Q_6,Q_6\right)\right|=2$, $\left|\Omega\left(Q_6\right)\right|=1$. Соответственно

$$R^*\left(Q_6\right)=R\left(\left\{\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right).$$

Теорема 2.3.5. *Пусть* $D\in\Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5=\varnothing$. *Если* $X-$*конечное множество и* $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 6) теоремы 2.3.1, то справедливо равенство*

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Доказательство. По предположению и в силу теоремы 6.3.5 и следствия 13.3.6(см. [39]) имеем, что

$$\left|R^*\left(Q_6\right)\right|=\left|R\left(\varnothing,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right)\right|=2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.3.6. *Пусть* $D\in\Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5=\varnothing$. *Если* X *есть конечное множество, то для множества* R *всех регулярных элементов полугруппы* $B_X(D)$ *справедливо следующее утверждение:*

$$\begin{aligned}|R| &= 1+5\cdot\left(2^{\left|\breve{D}\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_3|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+6\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+2\cdot\left(2^{|Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+\\ &+2\cdot\left(2^{|Z_2\cap Z_1|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.\end{aligned}$$

Доказательство. Принимая во внимание равенство

$\left|R\right|=\left|R^*\left(Q_0\right)\right|+\left|R^*\left(Q_1\right)\right|+\left|R^*\left(Q_2\right)\right|+\left|R^*\left(Q_3\right)\right|+\left|R^*\left(Q_4\right)\right|+\left|R^*\left(Q_5\right)\right|$ и полученные результаты,

$$\left|R^*\left(Q_1\right)\right|=5\cdot\left(2^{\left|\breve{D}\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$

$$\left|R^*\left(Q_2\right)\right|=6\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right).\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right).3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+6\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$

$$\left|R^*\left(Q_3\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$$
$$+2.\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right).\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right).\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right).4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$

$$\left|R^*\left(Q_4\right)\right|=8\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|};$$

$\left|R^*\left(Q_5\right)\right|=2\cdot\left(2^{\left|Z_2\cap Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}$, получаем формулу для вычисления всех регулярных элементов полугруппы $B_X\left(D\right)$ по которому имеем

$$\left|R\right|=1+5\cdot\left(2^{\left|\breve{D}\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_4\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{\left|Z_3\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_3\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+6\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+6\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-2^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+8\cdot\left(2^{\left|Z_3\setminus Z_4\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_3\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+8\cdot\left(2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-1\right)\cdot\left(2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-1\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_2\cap Z_1\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_1\right|}\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 5^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Теорема доказана.

§ 2.4. Регулярные элементы полугруппы $B_X\left(D\right)$ в случае, когда $Z_5\neq\varnothing$

Пусть $D=\left\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\in\Sigma_3\left(X,6\right)$. В этом пункте считается, что $Z_5\neq\varnothing$ и характеризуются регулярные элементы тех полных полугрупп бинарных отношений, которые определяются полурешетками класса $\Sigma_3\left(X,6\right)$.

По определению полурешеток D из класса $\Sigma_3\left(X,6\right)$ следует, что диаграммами, приведенными на Рис.3 исчерпываются все диаграммы $XI-$подполурешеток полурешетки D. Квазинормальные представление элементов полугрупп, которые определяются данными $XI-$полурешетками и удовлетворяют условию $Z_5\neq\varnothing$, могут иметь один из видов приведенных ниже:

a) $\alpha = Y_T^\alpha \times T$ *для некоторых* $T \in D$*;*

b) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T, T' \in D$, $T \subset T'$*;*

c) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$*;*

d) $\alpha = \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_T^\alpha, Y_0^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_1, Z_2\}$*;*

e) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, $T \in \{Z_5, Z_4\}$, $T' \in \{Z_3, Z_2\}$, $T'' \in \{Z_4, Z_2, Z_1\}$*;*

f) $\alpha = \left(Y_5^\alpha \times Z_5\right) \cup \left(Y_4^\alpha \times Z_4\right) \cup \left(Y_2^\alpha \times Z_2\right) \cup \left(Y_1^\alpha \times Z_1\right) \cup \left(Y_0^\alpha \times \breve{D}\right)$ *для некоторых* $Y_5^\alpha, Y_4^\alpha, Y_2^\alpha, Y_1^\alpha \notin \{\varnothing\}$*;*

Ведем соответственные обозначения:

1) $Q_0 = \{T\}$, где $T \in D$;

2) $Q_1 = \{T, T'\}$, где $T, T' \in D$ и $T \subset T'$;

3) $Q_2 = \{T, T', T''\}$, где $T, T', T'' \in D$ и $T \subset T' \subset T''$;

4) $Q_3 = \{Z_5, Z_4, T, \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_1, Z_2\}$;

5) $Q_4 = \{T, T', T'', \breve{D}\}$, где $T \in \{Z_5, Z_4\}$, $T' \in \{Z_3, Z_2\}$, $T'' \in \{Z_4, Z_2, Z_1\}$;

6) $Q_5 = \{Z_5, Z_4, Z_2, Z_1, \breve{D}\}$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $D = \{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X, 6)$ *и* $Z_5 \neq \varnothing$. *Тогда бинарное отношение* α *полугруппы* $B_X(D)$, *имеющее квазинормальное представление, является регулярным элементом данной полугруппы, в том и только в том случае, когда существует полный* $\alpha-$*изоморфизм* φ *полурешетки* $V(D, \alpha)$ *на некоторой подполурешетке* D' *полурешетки* D, *удовлетворяющий хотя бы одному из условии указанных ниже:*

1) $\alpha = Y_T^\alpha \times T$, *где* $T \in D$*;*

2) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right)$, *для некоторых* $T, T' \in D$, $T \subset T'$ *и* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условий* $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$ *и* $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$*;*

3) $\alpha = \left(Y_T^\alpha \times T\right) \cup \left(Y_{T'}^\alpha \times T'\right) \cup \left(Y_{T''}^\alpha \times T''\right)$, *для некоторых* $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$ *и* $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha, Y_{T''}^\alpha \notin \{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условий* $Y_T^\alpha \supseteq \varphi(T)$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq \varphi(T')$, $Y_{T'}^\alpha \cap \varphi(T') \neq \varnothing$ *и* $Y_{T''}^\alpha \cap \varphi(T'') \neq \varnothing$*;*

4) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{\breve{D}}^\alpha\times\breve{D}\right)$, *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_3^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ *и* $T\in\{Z_1,Z_2\}$, *удовлетворяющих условий* $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_T^\alpha\cap\varphi(T)\neq\varnothing$ *и* $Y_0^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$;

5) $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, *для некоторых* $T\in\{Z_5,Z_4\}$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}$, $T''\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$ *и* $Y_T^\alpha,Y_{T'}^\alpha,Y_{T''}^\alpha\notin\{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условий,* $Y_T^\alpha\supseteq\varphi(T)$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq\varphi(T')$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq\varphi(T'')$, $Y_{T'}^\alpha\cap\varphi(T')\neq\varnothing$ и $Y_{T''}^\alpha\cap\varphi(T'')\neq\varnothing$;

6) $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times Z_2\right)\cup\left(Y_1^\alpha\times Z_1\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, *для некоторых* $Y_4^\alpha,Y_2^\alpha,Y_1^\alpha\notin\{\varnothing\}$, *удовлетворяющих условий* $Y_5^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_1^\alpha\supseteq\varphi(Z_1)$, $Y_5^\alpha\cup Y_4^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq\varphi(Z_2)$, $Y_4^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$, $Y_1^\alpha\cap\varphi(Z_1)\neq\varnothing$ *и* $Y_2^\alpha\cap\varphi(Z_2)\neq\varnothing$.

Доказательство. Справедливость утверждений 1), 2) и 3) непосредственно следует из теоремы 13.1.1(см.[39])

Если $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_4^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$ и согласно условию $Y_5^\alpha,Y_4^\alpha,Y_T^\alpha,Y_0^\alpha\notin\{\varnothing\}$ тогда $V(D,\alpha)=\{Z_5,Z_4,T,\breve{D}\}$, где $T\in\{Z_1,Z_2\}$. Значит, $V(D,\alpha)$ есть цепь $Z_5\subset Z_4\subset T\subset\breve{D}$, образ которой, при полном $\alpha-$изоморфизме φ также будет цепью. По определению полурешетки D, изоморфными цепями данной цепы могут быть следующие цепы: $Z_5\subset Z_4\subset Z_2\subset\breve{D}$ и $Z_5\subset Z_4\subset Z_1\subset\breve{D}$. Следовательно $\varphi(Z_5)=Z_5$, $\varphi(Z_4)=Z_4$ и $\varphi(\breve{D})=\breve{D}$. Теперь если примем во внимание теорему 13.1.1(см.[39]), то получим справедливость утверждения 4) данной теоремы.

Аналогично доказывается справедливость утверждения 5) и 6) данной теоремы.

Теорема доказана.

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида а). В этом случае $Q_1=\{T\}$, где $T\in D$. Поэтому $Q_1\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_5\},\{Z_4\},\{Z_3\},\{Z_2\},\{Z_1\},\{\breve{D}\}\right\}$. Отсюда получим, что

$$R^*(Q_1)=6.$$

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида 2). В этом случае имеем, что $Q_2=\{T,T'\}$, где $T\subset T'$ и тогда

$$Q_2\vartheta_{XI}=\left\{\{Z_5,Z_4\},\{Z_5,Z_3\},\{Z_5,Z_2\},\{Z_5,Z_1\},\{Z_5,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2\},\{Z_4,Z_1\},\{Z_4,\breve{D}\},\{Z_3,\breve{D}\},\{Z_2,\breve{D}\},\{Z_1,\breve{D}\}\right\}.$$

Отсюда получим, что $\left|\Phi\left(Q_2,Q_2\right)\right|=1$ и $\left|\Omega\left(Q_2\right)\right|=11$. Введем обозначения:

$D_1'=\{Z_5,Z_4\}$, $D_2'=\{Z_5,Z_3\}$, $D_3'=\{Z_5,Z_2\}$, $D_4'=\{Z_5,Z_1\}$, $D_5'=\{Z_5,\breve{D}\}$, $D_6'=\{Z_4,Z_2\}$,

$D_7'=\{Z_4,Z_1\}$ $D_8'=\{Z_4,\breve{D}\}$, $D_9'=\{Z_3,\breve{D}\}$, $D_{10}'=\{Z_2,\breve{D}\}$, $D_{11}'=\{Z_1,\breve{D}\}$.

Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned}R^*\left(Q_2\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right)\cup R\left(D_5'\right)\cup R\left(D_6'\right)\cup\\ \cup R\left(D_7'\right)\cup R\left(D_8'\right)\cup R\left(D_9'\right)\cup R\left(D_{10}'\right)\cup R\left(D_{11}'\right).\end{aligned}\qquad\ldots(2.4.1)$$

Лемма 2.4.1. *Пусть* $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\left|R^*\left(Q_2\right)\right|=\left|R\left(D_5'\right)\right|.$$

Доказательство. Допустим, что нормальное представление регулярного бинарного отношения α полугруппы $B_X\left(D\right)$ имеет вид $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)$,

где $T,T'\in D$, $T\subset T'$. Если $\alpha\in D'=R\left(\left\{\overline{T},\overline{T}'\right\}\right)$, то согласно теореме 13.1.1(см.[39]) выполняются условия $Y_T^\alpha\supseteq\overline{T}$ и $Y_{T'}^\alpha\cap\overline{T}'\neq\varnothing$. По определению полурешетки D элемент Z_5 является наименьшим элементом полурешетки D. Поэтому справедливо включение $\overline{T}\supseteq Z_5$. С другой стороны $\breve{D}$ является наибольшим элементом полурешетки D и поэтому $Y_{T'}^\alpha\cap\breve{D}\supseteq Y_{T'}^\alpha\cap\overline{T}'\neq\varnothing$. Значит, выполняется условия $Y_T^\alpha\supseteq Z_5$ и $Y_{T'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$, т.е. $\alpha\in R\left(D_5'\right)$. Получается, что справедливо включение $R\left(\left\{\overline{T},\overline{T}'\right\}\right)\subseteq R\left(D_5'\right)$. Теперь принимая во внимание равенство (2.4.1) будем иметь, что $R^*\left(Q_2\right)=R\left(D_5'\right)$ и $\left|R^*\left(Q_2\right)\right|=\left|R\left(D_5'\right)\right|$.

Лемма доказана.

Теорема 2.4.2. *Пусть* $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ *и* $Z_5\neq\varnothing$. *Если* X *– конечное множество и* $\alpha\in B_X\left(D\right)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 2) теоремы 2.4.1, то справедливо равенство*

$$\left|R^*\left(Q_2\right)\right|=11\cdot\left(2^{\left|X\setminus Z_5\right|}-2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\right).$$

Доказательство. Известно, что число регулярных элементов подполурешетки $D'=\left\{\overline{T}_0,\overline{T}_1\right\}$, которая является изоморфным рассматриваемой XI-подполурешетке

$Q=\{T_0,T_1\}$,где $T_0\subset T_1$ вычисляется по формуле $\left|R(D')\right|=m_0\cdot\left(2^{\left|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_0\right|}-1\right)\cdot 3^{\left|X\setminus\overline{T}_1\right|}, m_0=\left|\Omega(Q)\right|$.

Согласно лемме 2.4.1, при наших обозначениях получаем, что

$$\left|R^*(Q_2)\right|=\left|R\left(\{Z_5,\breve{D}\}\right)\right|=11\cdot\left(2^{\left|\breve{D}\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot 2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}=11\cdot\left(2^{\left|X\setminus Z_5\right|}-2^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}\right).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида 3). В этом случае имеем, что $Q_3=\{T,T',T''\}$, где $T\subset T'\subset T''$ и

$$Q_3\vartheta'_{XI}=\left\{\{Z_5,Z_4,Z_1\},\{Z_5,Z_4,\breve{D}\},\{Z_5,Z_4,Z_2\},\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\{Z_4,Z_2,\breve{D}\},\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}\right\}.$$

Отсюда получаем, что $\left|\Phi(Q_3,Q_3)\right|=1$ и $\left|\Omega(Q_3)\right|=8$. Введем обозначения

$$D_1'=\{Z_5,Z_4,\breve{D}\},\ D_2'=\{Z_5,Z_3,\breve{D}\},\ D_3'=\{Z_5,Z_2,\breve{D}\},\ D_4'=\{Z_5,Z_1,\breve{D}\},\ D_5'=\{Z_5,Z_4,Z_2\},$$

$$D_6'=\{Z_5,Z_4,Z_1\},\ D_7'=\{Z_4,Z_2,\breve{D}\}, D_8'=\{Z_4,Z_1,\breve{D}\}.$$

Тогда имеет место равенство

$$R^*(Q_3)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup R(D_7')\cup R(D_8'). \quad \ldots(2.4.2)$$

Лемма 2.4.2. *Пусть* $D\in\Sigma_3(X,6)$, $Z_5\neq\varnothing$ *и* $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, *удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.4.1,Тогда справедливо следующее равенство*

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_3)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|-\\ -\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|.\end{aligned}$$

Доказательство. Сначала докажем следующие включения:

1) $R(D_5')\subseteq R(D_1')$; 3) $R(D_7')\subseteq R(D_3')$;

2) $R(D_6')\subseteq R(D_1')$; **4)** $R(D_8')\subseteq R(D_4')$.

Если $\alpha\in R(D_5')$, то квазинормальное представление бинарного отношения α имеет вид

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times Z_4\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times Z_2\right),$$

где разбиение Y_5^α, Y_4^α и Y_2^α множества X, удовлетворяет следующим условиям:

$Y_T^\alpha\supseteq Z_5$, $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_4$, $Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$ и $Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$. Так как $Z_2\subset\breve{D}$, из условий $Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing$ непосредственно следует, что $Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$. Это означает, что выполняются все условия чтобы α принадлежало $R(D_1')$. Таким же способом устанавливаем истинность остальных включений, учитывая которых имеем:

$$R^*(Q_3)=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4')\cup R(D_5')\cup R(D_6')\cup R(D_7')\cup R(D_8')=$$
$$=R(D_1')\cup R(D_2')\cup R(D_3')\cup R(D_4').$$

Покажем, что 1) $R(D_2')\cap R(D_1')=\varnothing$; 3) $R(D_2')\cap R(D_4')=\varnothing$;

2) $R(D_2')\cap R(D_3')=\varnothing$; **4)** $R(D_3')\cap R(D_4')=\varnothing$.

В самом деле, если $R(D_2')\cap R(D_1')\neq\varnothing$.Тогда существует бинарное отношение α, $\alpha\in R(D_2')\cap R(D_1')$, т.е. удовлетворяются условия:

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing \text{ и } Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing,$$

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_4,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing \text{ и } Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing.$$

Значит, $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3\cup Z_4=\breve{D}$ и поэтому $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_{T''}^\alpha\supseteq\breve{D}\cap Y_{T''}^\alpha\neq\varnothing$. Однако, по определению квазинормальности $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\right)\cap Y_{T''}^\alpha=\varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $D_2'\cap D_1'=\varnothing$. Легко проверяется и остальные равенства. Учитывая полученных результатов, имеем

$$\begin{aligned}&\left|R^*(Q_3)\right|=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_2')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|-\\&-\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_2')\cap R(D_4')\right|\left|R(D_3')\cap R(D_4')\right|+\\&+\left|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\right|+\left|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_4')\right|+\left|R(D_1')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\right|+\\&-\left|R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_2')\cap R(D_3')\cap R(D_4')\right|=\\&=\left|R(D_1')\right|+\left|R(D_2')\right|+\left|R(D_3')\right|+\left|R(D_4')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_3')\right|-\left|R(D_1')\cap R(D_4')\right|.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.3. *Пусть нормальное представление бинарного отношения* α *полугруппы* $B_X(D)$ *имеет вид* $\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)$, *где* $T,T',T''\in D$, $T\subset T'\subset T''$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_3')$ *в том и только в том случае, когда*

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing \text{ и } Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing;$$

b) $\alpha\in R(D_1')\cap R(D_4')$ *в том и только в том случае, когда*

$$Y_T^\alpha\supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_1,\ Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing \text{ и } Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing.$$

Доказательство. Пусть нормальное представление бинарного отношения α полугруппы $B_X(D)$ имеет вид

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right),$$

где $T, T', T'' \in D$, $T \subset T' \subset T''$ и пусть $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_3')$. В этом случае в силу теоремы 13.1.1(см. [39]) имеем:

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing \text{ и } Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing;$$

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing \text{ и } Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

Сравнивая их, примем необходимое условия, чтобы бинарное отношение α принадлежала множеству $R(D_1') \cap R(D_3')$. Ими будут:

$Y_T^\alpha \supseteq Z_5$, $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z_2$, $Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing$ и $Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing$. Легко проверяется, что они являются и достаточными.

Утверждение a) доказано.

Аналогично доказывается утверждение b).

Лемма доказана.

Лемма 2.4.4. *Пусть* $D = \{Z_5, Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, \breve{D}\} \in \Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5 \neq \varnothing$. *Если* $X-$*конечное множество,* $\alpha \in B_X(D)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.4.1, и* $D_1' = \{Z_5, Z_4, \breve{D}\}$, $D_2' = \{Z_5, Z_3, \breve{D}\}$, $D_3' = \{Z_5, Z_2, \breve{D}\}$, $D_4' = \{Z_5, Z_1, \breve{D}\}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $\left|R(D_1') \cap R(D_3')\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$,

b) $\left|R(D_1') \cap R(D_4')\right| = 8 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_5|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in R(D_1') \cap R(\{Z_5, Z, \breve{D}\})$, где $Z \in \{Z_2, Z_1\}$ и квазинормальное представление бинарного отношения α полугруппы $B_X(D)$ имеет вид

$$\alpha = (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_{T'}^\alpha \times T') \cup (Y_{T''}^\alpha \times T''),$$

где $Q = V(D, \alpha)$; Тогда в силу теоремы 2.4.1 имеем, что

$$Y_T^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z,\ Y_{T'}^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing \ \textit{и}\ Y_{T''}^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing \ \ldots(2.4.3)$$

Допустим, что f_α есть такое отображение множества X в полурешетке D, что $f_\alpha(t) = t\alpha$ для любого $t \in X$. $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ соответственно суть ограничений отображения f_α на множествах Z_4, $Z \setminus Z_4$, $\breve{D} \setminus Z$ и $X \setminus \breve{D}$.

По предположению имеем, что множества Z_4, $Z\setminus Z_4$, $\breve{D}\setminus Z$ и $X\setminus\breve{D}$ попарно не пересекаются и объединение всех данных множеств равно X. Установим свойства отображений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

1) $t\in Z_4$. Тогда в силу включения $Y_T^\alpha \cup Y_{T'}^\alpha \supseteq Z$ из условий (2.4.3) получаем, что

$t\in Z_4\subset Z\subseteq Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha$, т.е. $t\alpha\in\{T,T'\}$ по определению множеств Y_T^α и $Y_{T'}^\alpha$. Итак, $f_{0\alpha}(t)\in\{T,T'\}$ для любого $t\in Z_4$.

С другой стороны $Y_{T'}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing$. Поэтому $t_1\in Y_{T'}^\alpha$ для некоторого элемента t_1 множества Z_4. Это значит, что $t_1\alpha=T'$. Итак, $f_{0\alpha}(t_1)=T'$ для некоторого $t_1\in T_4$.

2) $t\in Z\setminus Z_4$. В этом случае из условий $Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z$ имеем, что $t\in Z\setminus Z_4\subseteq Z\subseteq Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha$. Значит, $t\alpha\in\{T,T'\}$ по определению множеств $Y_T^\alpha, Y_{T'}^\alpha$ и поэтому $f_{1\alpha}(t)\in\{T,T'\}$ для любого $t\in Z\setminus Z_4$.

3) $t\in\breve{D}\setminus Z$. В этом случае имеем, что $t\in\breve{D}\setminus Z\subseteq X=Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha$. Значит, $t\alpha\in\{T,T',T''\}$ по определению множеств Y_T^α, $Y_{T'}^\alpha$ и $Y_{T''}^\alpha$.

С другой стороны $Y_{T''}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$. Поэтому существует элемент t_2 множества $\breve{D}$, для которого $t_2\in Y_{T''}^\alpha$. Получается, что $t_2\alpha=\breve{D}$. Если $t_2\in Z$, то в силу доказанного выше, в пункте 2), имеем, что $t_2\alpha\in\{T,T'\}$. Однако последнее условие противоречит равенству $t_2\alpha=\breve{D}$. Полученное противоречие показывает, что $t_2\in\breve{D}\setminus Z$. Итак, $f_{2\alpha}(t_2)=\breve{D}$ для некоторого $t_2\in\breve{D}\setminus Z$.

4) $t\in X\setminus\breve{D}$.Так, как $X=Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha$, $t\in Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha$. Следовательно, $t\alpha\in\{T,T',T''\}$.

Значит, $f_{3\alpha}(t)\in\{T,T',T''\}$ для любого $t\in X\setminus\breve{D}$.

В результате, для бинарного отношения $\alpha\in R(D_1')\cap R(\{Z_5,Z,\breve{D}\})$, имеющее рассматриваемое квазинормальное представление всегда существует однозначно определенная система

$$(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha}).\ \ldots(2.4.4)$$

Очевидно, что различным элементам множества $R(D_1')\cap R(\{Z_5,Z,\breve{D}\})$ соответствуют различные упорядоченные системы вида (3).

Пусть $f_0 : Z_4 \to \{T, T'\}$, $f_1 : Z \setminus Z_4 \to \{T, T'\}$, $f_2 : \breve{D} \setminus Z \to \{T, T', T''\}$ и $f_3 : X \setminus \breve{D} \to \{T, T', T''\}$ такие отображения, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_0(t) \in \{T, T'\}$ для любого $t \in Z_4$ и $t_1\alpha = Z_4$ для некоторого $t_1 \in Z_4$;

2) $f_1(t) \in \{T, T'\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_4$;

3) $f_2(t) \in \{T, T', T''\}$ для любого $t \in \breve{D} \setminus Z$ и $t_2\alpha = \breve{D}$ для некоторого $t_2 \in \breve{D} \setminus Z$;

4) $f_3(t) \in \{T, T', T''\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Определяем отображение $f : X \to D$ следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), \text{ если } t \in Z_4, \\ f_1(t), \text{ если } t \in Z \setminus Z_4, \\ f_2(t), \text{ если } t \in \breve{D} \setminus Z, \\ f_3(t), \text{ если } t \in X \setminus \breve{D}. \end{cases}$$

Отображению f сопоставим бинарное отношение $\beta = \bigcup_{t \in X} (\{t\} \times f(t))$. Пусть $Y_T^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T\}$, $Y_{T'}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T'\}$ и $Y_{T''}^\beta = \{t \in X \mid t\beta = T''\}$. При этих обозначениях квазинормальное представление бинарного отношения β примет вид $\beta = (Y_T^\beta \times T) \cup (Y_{T'}^\beta \times T') \cup (Y_{T''}^\beta \times T'')$. Кроме того, из определения бинарного отношения β непосредственно следует, что $Y_T^\beta \supseteq Z_5$, $Y_T^\beta \cup Y_{T'}^\beta \supseteq Z$, $Y_{T'}^\beta \cap Z_4 \neq \varnothing$, $Y_{T''}^\beta \cap \breve{D} \neq \varnothing$,так как $t_1 \in Y_{T'}^\beta \cap Z_4$ и $t_2 \in Y_{T''}^\beta \cap \breve{D}$. Отсюда получаем, что бинарное отношение β есть регулярный элемент полугруппы $B_X(D)$, принадлежащий множеству $R(D_1') \cap R(\{Z_5, Z, \breve{D}\})$.

Значит, между бинарными отношениями $\alpha \in R(D_1') \cap R(\{Z_5, Z, \breve{D}\})$ и упорядоченными системами вида $(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha})$ существует взаимно однозначное соответствие. Числа всех отображений вида $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ $\left(\alpha \in R(D_1') \cap R(\{Z_5, Z, \breve{D}\})\right)$ соответственно равны $2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1$, $2^{|Z \setminus Z_4|}$, $3^{|\breve{D} \setminus Z|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z|}$ и $3^{|X \setminus \breve{D}|}$. При этом, число $\left(2^{|Z \setminus Z_5|} - 2^{|Z \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(3^{|\breve{D} \setminus Z|} - 2^{|\breve{D} \setminus Z|}\right) \cdot 3^{|X \setminus \breve{D}|}$ не зависит от выбора цепей $T \subset T' \subset T''$ $(T, T', T'' \in D)$ полурешетки D. Так как число таких различных цепей полурешетки D равно 8, поэтому для произвольных $T, T', T'' \in D$, где $T \subset T' \subset T''$, число регулярных элементов множества $R(D_1') \cap R(\{Z_5, Z, \breve{D}\})$ равно

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(\left\{Z_5,Z,\breve{D}\right\}\right)\right|=8\cdot\left(2^{|Z\setminus Z_5|}-2^{|Z\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z|}-2^{|\breve{D}\setminus Z|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},$$

где $Z\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$. Отсюда получим:

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|=8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)\right|=8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Утверждения a) и b) доказаны.

Лемма доказана.

Теорема 2.4.3. *Пусть* $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ *и* $Z_5\neq\varnothing$. X *– конечное множество и* $\alpha\in B_X\left(D\right)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 3) теоремы 2.4.1, то справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_2\right)\right|&=8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

Доказательство. На основания леммы 2.4.4 и теорем 6.3.5 и 6.3.12(см. [39]) будем иметь, что

$$\begin{aligned}\left|R^*\left(Q_3\right)\right|&=8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-\\&-8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_5|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}-8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_5|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}=\\&=8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+\\&+8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus\breve{D}|}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X\left(D\right)$, которые имеют квазинормальные представления вида 4) теоремы 2.4.1. В этом случае имеем, что $Q_4=\left\{Z_5,Z_4,T,\breve{D}\right\}$, где $T\in\left\{Z_2,Z_1\right\}$ и $Q_4\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}$. Отсюда получим, что $\left|\Phi\left(Q_4,Q_4\right)\right|=1$ и $\left|\Omega\left(Q_4\right)\right|=2$. Будем считать, что $D_1'=\left\{Z_5,Z_4,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_5,Z_4,Z_2,\breve{D}\right\}$. Тогда имеет место равенство $R^*\left(Q_4\right)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)$.

Лемма 2.4.5. Пусть $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ и $Z_5\neq\varnothing$. Если X - конечное множество

$\alpha \in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 4) теоремы 2.4.1, то $\left|R^*(Q_4)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|$.

Доказательство. Допустим, что $R(D_1') \cap R(D_2') \neq \varnothing$. Значит, существует бинарное отношение $\alpha \in R(D_1') \cap R(D_2')$, квазинормальное представление которого имеет вид $\alpha = (Y_5^\alpha \times Z_5) \cup (Y_4^\alpha \times Z_4) \cup (Y_T^\alpha \times T) \cup (Y_0^\alpha \times \breve{D})$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$Y_5^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1,\ Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_1 \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing,$$

и

$$Y_5^\alpha \supseteq Z_5,\ Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \supseteq Z_4,\ Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_2,\ Y_4^\alpha \cap Z_4 \neq \varnothing,\ Y_T^\alpha \cap Z_2 \neq \varnothing,\ Y_0^\alpha \cap \breve{D} \neq \varnothing.$$

Учитывая их, имеем: $Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha \supseteq Z_1 \cup Z_2 = \breve{D}$ и поэтому

$$\left(Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha \supseteq \breve{D} \cap Y_0^\alpha \neq \varnothing,$$

т.е. $\left(Y_5^\alpha \cup Y_4^\alpha \cup Y_T^\alpha\right) \cap Y_0^\alpha \neq \varnothing$. Однако последнее равенство противоречит о квазинормальности представления бинарного отношения α. Полученное противоречие показывает, что $R(D_1') \cap R(D_2') = \varnothing$. В соответствии

$$\left|R^*(Q_4)\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right| - \left|R(D_1') \cap R(D_2')\right| = \left|R(D_1')\right| + \left|R(D_2')\right|.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.4.4. *Пусть* $D \in \Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5 \neq \varnothing$. *Если* $X -$ *конечное множество* $\alpha \in B_X(D)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 4) теоремы 2.4.1, то*

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_4)\right| &= 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_1 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_1 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_1|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_1|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|} + \\ &+ 2 \cdot \left(2^{|Z_4 \setminus Z_5|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_2 \setminus Z_4|} - 2^{|Z_2 \setminus Z_4|}\right) \cdot \left(4^{|\breve{D} \setminus Z_2|} - 3^{|\breve{D} \setminus Z_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}.\end{aligned}$$

Доказательство. Известно, что число регулярных элементов подполурешетки $D' = \{\overline{T}_0, \overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3\}$, которая является изоморфным рассматриваемой *XI*-подполурешетке $Q = \{Z_5, Z_4, Z, \breve{D}\}$, где $Z_5 \subset Z_4 \subset Z \subset \breve{D}$ вычисляется по формуле $\left|R(D')\right| = m_0 \cdot \left(2^{|\overline{T}_1 \setminus \overline{T}_0|} - 1\right) \cdot \left(3^{|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1|} - 2^{|\overline{T}_2 \setminus \overline{T}_1|}\right) \cdot \left(4^{|\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_2|} - 3^{|\overline{T}_3 \setminus \overline{T}_2|}\right) \cdot 4^{|X \setminus \overline{T}_3|}, m_0 = \left|\Omega(Q)\right|$. Согласно лемме 2.4.5, при наших обозначениях получаем, что

$$\left|R^*\left(Q_4\right)\right| = 2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_1\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_1\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}+$$
$$+2\cdot\left(2^{\left|Z_4\setminus Z_5\right|}-1\right)\cdot\left(3^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}-2^{\left|Z_2\setminus Z_4\right|}\right)\cdot\left(4^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}-3^{\left|\breve{D}\setminus Z_2\right|}\right)\cdot 4^{\left|X\setminus\breve{D}\right|}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X\left(D\right)$, которые имеют квазинормальные представления вида 5) теоремы 2.4.1. В этом случае имеем, что $Q_4=\left\{T,T',T'',\breve{D}\right\}$, где $T\in\left\{Z_5,Z_4\right\}$, $T'\in\left\{Z_3,Z_2\right\}$, $T''\in\left\{Z_2,Z_4,Z_1\right\}$ и

$$Q_5\vartheta_{XI}=\left\{\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\},\ \left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\},\left\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}\right\}.$$

В этом случае $\left|\Phi\left(Q_5,Q_5\right)\right|=2$ и $\left|\Omega\left(Q_5\right)\right|=5$.

Будем считать, что

$D_1'=\left\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\right\}$, $D_2'=\left\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\right\}$, $D_3'=\left\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\right\}$, $D_4'=\left\{Z_5,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$

$D_5'=\left\{Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\right\}$.

Тогда имеет место равенство $R^*(Q_5)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right)\cup R\left(D_5'\right)$….(2.4.5)

Лемма 2.4.6. *Пусть* $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$ *и* $Z_5\neq\varnothing$ *Если* $X-$*конечное множество, то* имеем $\left|R^*\left(Q_5\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_1'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|$**.**

Доказательство. В самом деле, пусть $\alpha\in R\left(D'\right)$. Тогда бинарное отношение α имеет квазинормальное представление вида

$$\alpha=\left(Y_T^\alpha\times T\right)\cup\left(Y_2^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_3^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)\ldots\ldots\ldots(2.4.6)$$

которое удовлетворяет условиям: $Y_T^\alpha\supseteq T$, $Y_T^\alpha\cup Y_2^\alpha\supseteq T'$, $Y_T^\alpha\cup Y_3^\alpha\supseteq T''$, $Y_2^\alpha\cap T'\neq\varnothing$, $Y_3^\alpha\cap T''\neq\varnothing$ (см. теорему 2.4.1). Если $T\supseteq\bar{T}$ и $\bar{D}'=\left\{\bar{T},T',T'',\breve{D}\right\}$, тогда $\alpha\in R\left(\bar{D}'\right)$.

Получается, что $R\left(D'\right)\subseteq R\left(\bar{D}'\right)$.По определению рассматриваемой полурешетки $D\in\Sigma_3\left(X,6\right)$, $Z_5\subset Z_4$ т.е. $R\left(D_5'\right)\subseteq R\left(D_4'\right)$ и в соответствий

$$R^*(Q_5)=R\left(D_1'\right)\cup R\left(D_2'\right)\cup R\left(D_3'\right)\cup R\left(D_4'\right).$$

Докажем теперь справедливости равенств:

1) $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing$ ***;*** ***3)*** $R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$ ***;***

2) $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$ ***;*** ***4)*** $R\left(D_3'\right)\cap R\left(D_4'\right)=\varnothing$ **.**

Допустим, что $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)\neq\varnothing$.Тогда существует $\alpha\in R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)$. Согласно теоремы 2.4.1. $\alpha\in B_X\left(D\right)$ бинарное отношение, имеющий квазинормальное представление вида, при наших обозначениях, удовлетворяет условия:

$Y_T^\alpha\supseteq Z_5, Y_T^\alpha\supset Z_3\cap Z_2,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3, Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_2, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_2\neq\varnothing\ и$

$Y_T^\alpha\supseteq Z_5, Y_T^\alpha\supset Z_3\cap Z_1,\ Y_T^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3, Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_1, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap Z_1\neq\varnothing.$

Опирая на них получается, что $Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_2\cup Z_1=\breve{D}$ и $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\right)\cap Y_{T'}^\alpha\supset\breve{D}\cap Y_{T'}^\alpha$. Однако, по условию $Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing$ и $Z_3\subset\breve{D}$. Следовательно, $Y_{T'}^\alpha\cap\breve{D}\neq\varnothing$ и имеем $\left(Y_T^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\right)\cap Y_{T'}^\alpha\neq\varnothing$, но этот результат противоречит о квазинормальности представления бинарного отношения α. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно и что $R\left(D_1'\right)\cap R\left(D_3'\right)=\varnothing$.

Аналогичным образом можно показать истинность утверждений 2), 3), 4). Учитывая полученные результаты и равенство (2.4.5), примем формулу, по которой определяется количество регулярных элементов:

$$\left|R^*\left(Q_5\right)\right|=\left|R\left(D_1'\right)\right|+\left|R\left(D_2'\right)\right|+\left|R\left(D_3'\right)\right|+\left|R\left(D_4'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_1'\right)\right|-\left|R\left(D_2'\right)\cap R\left(D_3'\right)\right|.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.7. *Пусть квазинормальное представление бинарного отношения α полугруппы $B_X\left(D\right)$ имеет вид $\alpha=\left(Y_5^\alpha\times Z_5\right)\cup\left(Y_{T'}^\alpha\times T'\right)\cup\left(Y_{T''}^\alpha\times T''\right)\cup\left(Y_0^\alpha\times\breve{D}\right)$, где $T'\in\left\{Z_3,Z_2\right\}$, $T''\in\left\{Z_4,Z_2,Z_1\right\}$, тогда справедливо следующее утверждение:*

$\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$ где $Z\in\left\{Z_1,Z_2\right\}$, в том и только в том случае, когда

$$Y_5^\alpha\supseteq Z_5, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing.$$

Доказательство. Допустим, что $\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right), Z\in\left\{Z_1,Z_2\right\}$. Тогда согласно теоремы 2.4.1 удовлетворяются условия:

$$Y_5^\alpha\supseteq Z_5, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z_4, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z_4, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing,\ Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing\ и$$

$$Y_5^\alpha\supseteq Z_5, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap Z\neq\varnothing.$$

Опирая на них можно определять необходимое и достаточное условия для того, чтобы α принадлежало пересечению $R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$. Если $\alpha\in R\left(D_2'\right)\cap R\left(\left\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\right\}\right)$, тогда:

$$Y_5^\alpha\supseteq Z_5, Y_5^\alpha\supset Z_3\cap Z, Y_5^\alpha\cup Y_{T'}^\alpha\supseteq Z_3, Y_5^\alpha\cup Y_{T''}^\alpha\supseteq Z, Y_{T'}^\alpha\cap Z_3\neq\varnothing, Y_{T''}^\alpha\cap Z_4\neq\varnothing\ \ldots\ (2.4.7)$$

С другой стороны, если выполнены полученные условия (2.4.7), тогда в силу включений $Z_4 \subset Z_1$ и $Z_4 \subset Z_2$ получаем, что:

$$\alpha \in R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}\right) \cap R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right) ;$$

$$\alpha \in R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}\right) \cap R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4.8. *Пусть* $D \in \Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5 \neq \varnothing$. *Если* X *– конечное множество и* $\alpha \in B_X(D)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 5) теоремы 2.4.1, то справедливы следующие равенства:*

1) $\left|R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}\right) \cap R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_2, \breve{D}\right\}\right)\right| = 10 \cdot \left(2^{|Z_2 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(2^{|Z_3 \setminus Z_2|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$***;***

2) $\left|R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_4, \breve{D}\right\}\right) \cap R\left(\left\{Z_5, Z_3, Z_1, \breve{D}\right\}\right)\right| = 10 \cdot \left(2^{|Z_1 \setminus Z_3|} - 1\right) \cdot \left(3^{|Z_3 \setminus Z_1|} - 1\right) \cdot 4^{|X \setminus \breve{D}|}$.

Доказательство. Заметим, что мощность множества всех полных автоморфизмов $|\Phi(Q,Q)| = 2$.

Мощность всех полных изоморфизмов из XI полурешетки Q на X полурешетке D' равно $|\Phi(Q, D')| = 2$. Пусть, $\alpha \in R(D_2') \cap R\left(\left\{\varnothing, Z_3, Z, \breve{D}\right\}\right)$, $Z \in \{Z_1, Z_2\}$ и бинарное отношение $\alpha \in B_X(D)$ имеет квазинормальное представление вида 5) теоремы 2.4.1. Значит, выполняются условия леммы 2.4.7.

Допустим, что f_α есть такое отображение множества X в полурешетке D, что $f_\alpha(t) = t\alpha$ для любого $t \in X$. Рассмотрим ограничений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$ отображения f_α на множествах $Z_3 \cap Z$, $Z \setminus Z_3$, $Z_3 \setminus Z$ и $X \setminus \breve{D}$.

По предположению имеем, что множества $Z_3 \cap Z$, $Z \setminus Z_3$, $Z_3 \setminus Z$ и $X \setminus \breve{D}$ попарно не пересекаются и теоретико-множественное объединение всех данных множеств равно X. Установим свойства отображений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

1) $t \in Z_3 \cap Z$. Тогда в силу включения $Y_5^\alpha \supset Z_3 \cap Z$ согласно леммы 2.4.7 получаем, что $t \in Y_5^\alpha$, т.е. $t\alpha \in Z_5$ и $f_{0\alpha}(t) \in \{Z_5\}$ для любого $t \in Z_3 \cap Z$.

2) $t \in Z \setminus Z_3$. Так, как $Y_5^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha \supseteq Z$, поэтому $t \in Z \setminus Z_3 \subseteq Z \subseteq Y_5^\alpha \cup Y_{T''}^\alpha$. Значит, по определению множеств Y_5^α и $Y_{T''}^\alpha$, $t\alpha \in \{Z_5, T''\}$. Итак, $f_{1\alpha}(t) \in \{Z_5, T''\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_3$.

С другой стороны, $Y_{T''}^{\alpha} \cap Z_4 \neq \varnothing$. Поэтому существует элемент t_1, для которого $t_1 \in Y_{T''}^{\alpha}$ и $t_1 \in Z_4$. В результате $t_1\alpha = T''$ и т.к. $Z_4 \subset Z$, имеем, что $t_1 \in Z$. Предположим, что $t_1 \in Z_3$, т.к. $Y_5^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Z_3$, значит $t_1\alpha \in \{Z_5, T'\}$. Однако, это противоречит равенству $t_1\alpha = T''$. Полученное противоречие показывает, что $t_1 \in Z \setminus Z_3$. Итак, $f_{1\alpha}(t) \in \{Z_5, T''\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_3$ и $f_{1\alpha}(t_1) = T''$ для некоторого $t_1 \in Z \setminus Z_3$.

3) $t \in Z_3 \setminus Z$. В этом случае по условию $Y_5^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \supseteq Z_3$ имеем, что $t \in Y_5^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha}$. Значит, $t\alpha \in \{Z_5, T'\}$ по определению множеств Y_5^{α} и $Y_{T'}^{\alpha}$. Итак, $f_{2\alpha}(t) \in \{Z_5, T'\}$ для любого $t \in Z_3 \setminus Z$.

С другой стороны, $Y_{T'}^{\alpha} \cap Z_3 \neq \varnothing$. Поэтому существует $t_2 \in Y_{T'}^{\alpha}$ для некоторого элемента t_2 множества Z_3. Отсюда получим $t_2\alpha = T'$ и $t_2 \in Z_3$. Если $t_2 \in Z$, то в силу условий $Y_5^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha} \supseteq Z$ будем иметь $t_2\alpha \in \{Z_5, T''\}$. Однако последнее противоречит равенству $t_2\alpha = T'$. Полученное противоречие показывает, что $t_2 \in Z_3 \setminus Z$. Итак, $f_{2\alpha}(t_2) = T'$ для некоторого $t_2 \in Z_3 \setminus Z$.

4) $t \in X \setminus \breve{D}$. Тогда в силу условия $X = Y_5^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha} \cup Y_0^{\alpha}$ следует, что $t \in Y_5^{\alpha} \cup Y_{T'}^{\alpha} \cup Y_{T''}^{\alpha}$. Поэтому $t\alpha \in \{Z_5, T', T''\}$. Значит, $f_{3\alpha}(t) \in \{Z_5, T', T''\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Следовательно, для бинарного отношения $\alpha \in R(D_2') \cap R(\{Z_5, Z_3, Z, \breve{D}\})$, имеющее квазинормальное представление соответствующего вида, всегда существует однозначно определенная система

$$(f_{0\alpha}, f_{1\alpha}, f_{2\alpha}, f_{3\alpha}). \ldots(2.4.8)$$

Очевидно, что различным элементам множества $R(D_2') \cap R(\{Z_5, Z_3, Z, \breve{D}\})$ соответствуют различные упорядоченные системы .

Теперь пусть $f_0 : Z_3 \cap Z \to Z_5$, $f_1 : Z \setminus Z_3 \to \{Z_5, T''\}$, $f_2 : Z_3 \setminus Z \to \{Z_5, T'\}$ и $f_3 : X \setminus \breve{D} \to \{Z_5, T', T''\}$ такие отображения, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_0(t) \in \{Z_5\}$ для любого $t \in Z_3 \cap Z$;

2) $f_1(t) \in \{Z_5, T''\}$ для любого $t \in Z \setminus Z_3$ и $t_1\alpha = T''$ для некоторого $t_1 \in Z \setminus Z_3$;

3) $f_2(t) \in \{Z_5, T'\}$ для любого $t \in Z_3 \setminus Z$ и $t_2\alpha = T'$ для некоторого $t_2 \in Z_3 \setminus Z$;

4) $f_3(t) \in \{Z_5, T', T''\}$ для любого $t \in X \setminus \breve{D}$.

Теперь определим отображение $f : X \to D$ следующим образом:

$$f(t)=\begin{cases} f_0(t), \text{ если } t\in Z_3\cap Z, \\ f_1(t), \text{ если } t\in Z\setminus Z_3, \\ f_2(t), \text{ если } t\in Z_3\setminus Z, \\ f_3(t), \text{ если } t\in X\setminus \breve{D}. \end{cases}$$

Отображению f сопоставим бинарное отношение $\beta=\bigcup_{t\in X}(\{t\}\times f(t))$.Пусть $Y_5^\beta=\{t\in X \mid t\beta=Z_5\}$, $Y_{T'}^\beta=\{t\in X \mid t\beta=T'\}$, $Y_{T''}^\beta=\{t\in X \mid t\beta=T''\}$ и $Y_0^\beta=\{t\in X, t\beta=\breve{D}\}$. При этих обозначениях квазинормальное представление бинарного отношения β примет вид $\beta=(Y_5^\beta\times Z_5)\cup(Y_{T'}^\beta\times T')\cup(Y_{T''}^\beta\times T'')\cup(Y_0^\beta\times \breve{D})$. Кроме того, из определения бинарного отношения β непосредственно следует, что $Y_5^\beta\supseteq Z_5$, $Y_5^\beta\cup Y_{T'}^\beta\supseteq Z_3$, $Y_5^\beta\cup Y_{T''}^\beta\supseteq Z$, $Y_{T'}^\beta\cap Z_3\neq\varnothing$, $Y_{T''}^\beta\cap Z\neq\varnothing$, так как $t_1\in Y_{T''}^\beta\cap Z_3$ и $t_2\in Y_{T'}^\beta\cap Z_3$. Это означает, что бинарное отношение β есть регулярный элемент полугруппы $B_X(D)$,

принадлежащий множеству $R(D_2')\cap R(\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\})$.

Значит, между бинарными отношениями α, $\alpha\in R(D_2')\cap R(\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\})$, и упорядоченными системами вида $(f_{0\alpha},f_{1\alpha},f_{2\alpha},f_{3\alpha})$ существует взаимно однозначное соответствие. Числа отображений $f_{0\alpha}$, $f_{1\alpha}$, $f_{2\alpha}$, $f_{3\alpha}$($\alpha\in R(D_2')\cap R(\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\})$ соответственно равны 1, $2^{|Z\setminus Z_3|}-1$, $2^{|Z_3\setminus Z|}-1$, и $4^{|X\setminus\breve{D}|}$. При этом, эти числа не зависят от перестановки точек T' и T'' в полурешетках $D_i'=\{Z_5,T',T'',\breve{D}\}, i=1,2,3,4$, $T'\in\{Z_3,Z_2\}$ *и* $T''\in\{Z_4,Z_2,Z_1\}$ D. Так как число таких различных цепей полурешетки D равно 5, поэтому для произвольных $T',T''\in D$, где $Z_5\neq T'\subset T''$ число регулярных элементов множества $R(D_2')\cap R(\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\})$ равно

$$\left|R(D_2')\cap R(\{Z_5,Z_3,Z,\breve{D}\})\right|=5\cdot 2\cdot 1\left(2^{|Z\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

где $Z\in\{Z_2,Z_1\}$. Следовательно:

$$\left|R(\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\})\cap R(\{Z_5,Z_3,Z_2,\breve{D}\})\right|=10\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|},$$

$$\left|R(\{Z_5,Z_3,Z_4,\breve{D}\})\cap R(\{Z_5,Z_3,Z_1,\breve{D}\})\right|=10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.4.5. *Пусть* $D\in\Sigma_5(X,5)$ *и* $Z_5\neq\varnothing$. *Если* X *– конечное множество и*

$\alpha \in B_X(D)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 5) теоремы 2.4.1, то справедливо равенство*

$$\left|R^*(Q_5)\right| = 10\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Доказательство. Известно, что число регулярных элементов α изоморфных XI-полурешетки $Q=\{T_0,T_1,T_2,T_3\}$ и $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3\}$, когда $\left|\Omega(Q)\right|=m_0$ можно найти по формуле $\left|R(D')\right| = 2\cdot m_0\cdot\left(2^{|\overline{T}_1\setminus\overline{T}_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus\overline{T}_3|}$. По нашим предположениям, учитывая полученные результаты и лемму 2.4.8 имеем

$$\begin{aligned}\left|R^*(Q_5)\right| &= 10\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_2|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+\\ &+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-\\ &-10\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}-10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}=\\ &=10\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus\breve{D}|}\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим такие бинарные отношения полугруппы $B_X(D)$, которые имеют квазинормальные представления вида 6) теоремы 2.4.1. В этом случае имеем, что $Q_6=\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}$ и $Q_6\vartheta_{XI}=\{\{Z_5,Z_4,Z_2,Z_1,\breve{D}\}\}$. Следовательно, $\left|\Phi(Q_5,Q_5)\right|=2$, $\left|\Omega(Q_6)\right|=1$, $R^*(Q_6)=R(D')$ и $\left|R^*(Q_6)\right|=\left|R(D')\right|$.

Теорема 2.4.6. Пусть $D\in\Sigma_3(X,6)$ и $Z_5\neq\varnothing$. Если $X-$конечное множество и $\alpha\in B_X(D)$ является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 6) теоремы 2.4.1, то справедливо равенство

$$\left|R^*(Q_6)\right| = 2\cdot\left(2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Доказательство. Известно, что число регулярных элементов XI-полурешетки $Q=\{T_0,T_1,T_2,T_3,T_4\}$ где $T_0\subset T_1\subset T_3\subset T_4, T_0\subset T_2\subset T_3\subset T_4, T_1\setminus T_2\neq\varnothing, T_2\setminus T_1\neq\varnothing, T_1\cup T_2=T_3$, которая является α-изоморфным полурешетке $D'=\{\overline{T}_0,\overline{T}_1,\overline{T}_2,\overline{T}_3,\overline{T}_4\}$ и $\left|\Omega(Q)\right|=m_0$, определяется по формуле $\left|R(D')\right|=2\cdot m_0\cdot\left(2^{|(\overline{T}_2\cap\overline{T}_3)\setminus\overline{T}_0|}-1\right)\cdot\left(3^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_3|}-2^{|\overline{T}_2\setminus\overline{T}_3|}\right)\cdot\left(3^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_2|}-2^{|\overline{T}_3\setminus\overline{T}_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\overline{T}_4|}$. По нашим предположениям

$$\left|R^*(Q_6)\right|=\left|R(D')\right|=2\cdot\left(2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus\breve{D}|}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4.7. *Пусть* $D \in \Sigma_3(X,6)$ *и* $Z_5 \neq \varnothing$. *Если* $X -$ *конечное множество и* $\alpha \in B_X(D)$ *является регулярным элементом, удовлетворяющий требованиям 6) теоремы 2.4.1, то для множества* R *всех регулярных элементов полугруппы* $B_X(D)$ *справедливо следующая формула:*

$$\begin{aligned}|R| = {} & 6+11\cdot\left(2^{|X\setminus Z_5|}-2^{|X\setminus \breve{D}|}\right)+8\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_4|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_4|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_3|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_3|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & +8\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-2^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+8\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_4|}-1\right)\cdot\left(3^{|D\setminus Z_1|}-2^{|D\setminus Z_1|}\right)\cdot 3^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & +2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_4|}-2^{|Z_1\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_1|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_1|}\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+2\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_4|}-2^{|Z_2\setminus Z_4|}\right)\cdot\left(4^{|\breve{D}\setminus Z_2|}-3^{|\breve{D}\setminus Z_2|}\right)4^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & +10\cdot\left(2^{|Z_4\setminus Z_3|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_3\setminus Z_4|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+10\cdot\left(2^{|Z_1\setminus Z_2|}-1\right)\cdot\left(2^{|Z_2\setminus Z_1|}-1\right)\cdot 4^{|X\setminus \breve{D}|}+\\ & +2\cdot\left(2^{|(Z_2\cap Z_1)\setminus Z_5|}-1\right)\cdot\left(3^{|Z_2\setminus Z_1|}-2^{|Z_2\setminus Z_1|}\right)\cdot\left(3^{|Z_1\setminus Z_2|}-2^{|Z_1\setminus Z_2|}\right)\cdot 5^{|X\setminus \breve{D}|}.\end{aligned}$$

Доказательство. Принимая во внимание полученные результаты и равенство

$$|R| = |R^*(Q_1)|+|R^*(Q_2)|+|R^*(Q_3)|+|R^*(Q_4)|+|R^*(Q_5)|+|R^*(Q_6)|$$

непосредственно получаем подтверждение принятой формулы.

Пример1.

Матричная полугруппа $B_3(D)$, изоморфная полугруппе $B_X(D)$, где $X=\{1,2,3\}, D=\{\{\varnothing\},\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$$\begin{pmatrix}000\\000\\000\end{pmatrix}_1^{**},\begin{pmatrix}000\\000\\100\end{pmatrix}_2^{*},\begin{pmatrix}000\\000\\110\end{pmatrix}_3^{*},\begin{pmatrix}000\\000\\101\end{pmatrix}_4^{**},\begin{pmatrix}000\\000\\011\end{pmatrix}_5^{**},\begin{pmatrix}000\\000\\111\end{pmatrix}_6^{**},\begin{pmatrix}000\\100\\000\end{pmatrix}_7^{*},\begin{pmatrix}000\\100\\100\end{pmatrix}_8^{*},\begin{pmatrix}000\\100\\110\end{pmatrix}_9^{*},\begin{pmatrix}000\\100\\101\end{pmatrix}_{10}^{*},\begin{pmatrix}000\\100\\011\end{pmatrix}_{11}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}000\\100\\111\end{pmatrix}_{12}^{*},\begin{pmatrix}000\\110\\000\end{pmatrix}_{13}^{**},\begin{pmatrix}000\\110\\100\end{pmatrix}_{14}^{*},\begin{pmatrix}000\\110\\110\end{pmatrix}_{15}^{**},\begin{pmatrix}000\\110\\101\end{pmatrix}_{16}^{**},\begin{pmatrix}000\\110\\011\end{pmatrix}_{17}^{*},\begin{pmatrix}000\\110\\111\end{pmatrix}_{18}^{**},\begin{pmatrix}000\\101\\000\end{pmatrix}_{19}^{*},\begin{pmatrix}000\\101\\100\end{pmatrix}_{20}^{*},\begin{pmatrix}000\\101\\110\end{pmatrix}_{21}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}000\\101\\101\end{pmatrix}_{22}^{**},\begin{pmatrix}000\\101\\011\end{pmatrix}_{23}^{*},\begin{pmatrix}000\\101\\111\end{pmatrix}_{24}^{*},\begin{pmatrix}000\\011\\000\end{pmatrix}_{25}^{**},\begin{pmatrix}000\\011\\100\end{pmatrix}_{26}^{*},\begin{pmatrix}000\\011\\110\end{pmatrix}_{27}^{*},\begin{pmatrix}000\\011\\101\end{pmatrix}_{28}^{*},\begin{pmatrix}000\\011\\011\end{pmatrix}_{29}^{**},\begin{pmatrix}000\\011\\111\end{pmatrix}_{30}^{*},\begin{pmatrix}000\\111\\000\end{pmatrix}_{31}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}000\\111\\100\end{pmatrix}_{32}^{*},\begin{pmatrix}000\\111\\110\end{pmatrix}_{33}^{*},\begin{pmatrix}000\\111\\101\end{pmatrix}_{34}^{**},\begin{pmatrix}000\\111\\011\end{pmatrix}_{35}^{*},\begin{pmatrix}000\\111\\111\end{pmatrix}_{36}^{**},\begin{pmatrix}100\\000\\000\end{pmatrix}_{37}^{**},\begin{pmatrix}100\\000\\100\end{pmatrix}_{38}^{**},\begin{pmatrix}100\\000\\110\end{pmatrix}_{39}^{*},\begin{pmatrix}100\\000\\101\end{pmatrix}_{40}^{**},\begin{pmatrix}100\\000\\011\end{pmatrix}_{41}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}100\\000\\111\end{pmatrix}_{42}^{**},\begin{pmatrix}100\\100\\000\end{pmatrix}_{43}^{**},\begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix}_{44}^{**},\begin{pmatrix}100\\100\\110\end{pmatrix}_{45}^{*},\begin{pmatrix}100\\100\\101\end{pmatrix}_{46}^{**},\begin{pmatrix}100\\100\\011\end{pmatrix}_{47}^{**},\begin{pmatrix}100\\100\\111\end{pmatrix}_{48}^{**},\begin{pmatrix}100\\110\\000\end{pmatrix}_{49}^{**},\begin{pmatrix}100\\110\\100\end{pmatrix}_{50}^{**},\begin{pmatrix}100\\110\\110\end{pmatrix}_{51}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}100\\110\\101\end{pmatrix}_{52}^{**},\begin{pmatrix}100\\110\\011\end{pmatrix}_{53},\begin{pmatrix}100\\110\\111\end{pmatrix}_{54}^{**},\begin{pmatrix}100\\101\\000\end{pmatrix}_{55}^{*},\begin{pmatrix}100\\101\\100\end{pmatrix}_{56}^{*},\begin{pmatrix}100\\101\\110\end{pmatrix}_{57}^{*},\begin{pmatrix}100\\101\\101\end{pmatrix}_{58}^{**},\begin{pmatrix}100\\101\\011\end{pmatrix}_{59},\begin{pmatrix}100\\101\\111\end{pmatrix}_{60}^{*},\begin{pmatrix}100\\011\\000\end{pmatrix}_{61}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}100\\011\\100\end{pmatrix}_{62},\begin{pmatrix}100\\011\\110\end{pmatrix}_{63},\begin{pmatrix}100\\011\\101\end{pmatrix}_{64},\begin{pmatrix}100\\011\\011\end{pmatrix}^{**}_{65},\begin{pmatrix}100\\011\\111\end{pmatrix}_{66},\begin{pmatrix}100\\111\\000\end{pmatrix}^{**}_{67},\begin{pmatrix}100\\111\\100\end{pmatrix}^{**}_{68},\begin{pmatrix}100\\111\\110\end{pmatrix}^{*}_{69},\begin{pmatrix}100\\111\\101\end{pmatrix}^{**}_{70},\begin{pmatrix}100\\111\\011\end{pmatrix}_{71},$$

$$\begin{pmatrix}100\\111\\111\end{pmatrix}^{**}_{72},\begin{pmatrix}110\\000\\000\end{pmatrix}^{**}_{73},\begin{pmatrix}110\\000\\100\end{pmatrix}^{*}_{74},\begin{pmatrix}110\\000\\110\end{pmatrix}^{**}_{75},\begin{pmatrix}110\\000\\101\end{pmatrix}^{*}_{76},\begin{pmatrix}110\\000\\011\end{pmatrix}^{**}_{77},\begin{pmatrix}110\\000\\111\end{pmatrix}^{**}_{78},\begin{pmatrix}110\\100\\000\end{pmatrix}^{*}_{79},\begin{pmatrix}110\\100\\100\end{pmatrix}^{*}_{80},\begin{pmatrix}110\\100\\110\end{pmatrix}_{81}$$

$$\begin{pmatrix}110\\100\\101\end{pmatrix}_{82},\begin{pmatrix}110\\100\\011\end{pmatrix}_{83},\begin{pmatrix}110\\100\\111\end{pmatrix}_{84},\begin{pmatrix}110\\110\\000\end{pmatrix}^{**}_{85},\begin{pmatrix}110\\110\\100\end{pmatrix}_{86},\begin{pmatrix}110\\110\\110\end{pmatrix}^{**}_{87},\begin{pmatrix}110\\110\\101\end{pmatrix}_{88},\begin{pmatrix}110\\110\\011\end{pmatrix}_{89},\begin{pmatrix}110\\110\\111\end{pmatrix}^{**}_{90},\begin{pmatrix}110\\101\\000\end{pmatrix}^{*}_{91},\begin{pmatrix}110\\101\\100\end{pmatrix}_{92},$$

$$\begin{pmatrix}110\\101\\110\end{pmatrix}_{93},\begin{pmatrix}110\\101\\101\end{pmatrix}^{*}_{94},\begin{pmatrix}110\\101\\011\end{pmatrix}_{95},\begin{pmatrix}110\\101\\111\end{pmatrix}_{96},\begin{pmatrix}110\\011\\000\end{pmatrix}^{*}_{97},\begin{pmatrix}110\\011\\100\end{pmatrix}_{98},\begin{pmatrix}110\\011\\110\end{pmatrix}_{99},\begin{pmatrix}110\\011\\101\end{pmatrix}_{100},\begin{pmatrix}110\\011\\011\end{pmatrix}^{*}_{101},\begin{pmatrix}110\\011\\111\end{pmatrix}_{102},$$

$$\begin{pmatrix}110\\111\\000\end{pmatrix}^{*}_{103},\begin{pmatrix}110\\111\\100\end{pmatrix}_{104},\begin{pmatrix}110\\111\\110\end{pmatrix}^{*}_{105},\begin{pmatrix}110\\111\\101\end{pmatrix}_{106},\begin{pmatrix}110\\111\\011\end{pmatrix}_{107},\begin{pmatrix}110\\111\\111\end{pmatrix}^{*}_{108},\begin{pmatrix}101\\000\\000\end{pmatrix}^{**}_{109},\begin{pmatrix}101\\000\\100\end{pmatrix}^{*}_{110},\begin{pmatrix}101\\000\\110\end{pmatrix}^{*}_{111},\begin{pmatrix}101\\000\\101\end{pmatrix}^{**}_{112}$$

$$,\begin{pmatrix}101\\000\\011\end{pmatrix}^{*}_{113},\begin{pmatrix}101\\000\\111\end{pmatrix}^{*}_{114}\begin{pmatrix}101\\100\\000\end{pmatrix}^{*}_{115},\begin{pmatrix}101\\100\\100\end{pmatrix}^{*}_{116},\begin{pmatrix}101\\100\\110\end{pmatrix}_{117}\begin{pmatrix}101\\100\\101\end{pmatrix}_{118},\begin{pmatrix}101\\100\\011\end{pmatrix}_{119},\begin{pmatrix}101\\100\\111\end{pmatrix}_{120},\begin{pmatrix}101\\110\\000\end{pmatrix}^{*}_{121},\begin{pmatrix}101\\110\\100\end{pmatrix}_{122},$$

$$\begin{pmatrix}101\\110\\110\end{pmatrix}^{*}_{123}\begin{pmatrix}101\\110\\101\end{pmatrix}_{124},\begin{pmatrix}101\\110\\011\end{pmatrix}_{125},\begin{pmatrix}101\\110\\111\end{pmatrix}_{126},\begin{pmatrix}101\\101\\000\end{pmatrix}^{**}_{127},\begin{pmatrix}101\\101\\100\end{pmatrix}_{128},\begin{pmatrix}101\\101\\110\end{pmatrix}_{129}\begin{pmatrix}101\\101\\101\end{pmatrix}^{**}_{130},\begin{pmatrix}101\\101\\011\end{pmatrix}_{131},\begin{pmatrix}101\\101\\111\end{pmatrix}^{*}_{132},$$

$$\begin{pmatrix}101\\011\\000\end{pmatrix}^{**}_{133},\begin{pmatrix}101\\011\\100\end{pmatrix}_{134},\begin{pmatrix}101\\011\\110\end{pmatrix}_{135}\begin{pmatrix}101\\011\\101\end{pmatrix}_{136},\begin{pmatrix}101\\011\\011\end{pmatrix}^{*}_{137},\begin{pmatrix}101\\011\\111\end{pmatrix}_{138},\begin{pmatrix}101\\111\\000\end{pmatrix}^{**}_{139},\begin{pmatrix}101\\111\\100\end{pmatrix}_{140},\begin{pmatrix}101\\111\\110\end{pmatrix}_{141},\begin{pmatrix}101\\111\\101\end{pmatrix}^{**}_{142},$$

$$\begin{pmatrix}101\\111\\011\end{pmatrix}_{143},\begin{pmatrix}101\\111\\111\end{pmatrix}^{*}_{144},\begin{pmatrix}011\\000\\000\end{pmatrix}^{*}_{145},\begin{pmatrix}011\\000\\100\end{pmatrix}^{*}_{146},\begin{pmatrix}011\\000\\110\end{pmatrix}^{*}_{147}\begin{pmatrix}011\\000\\101\end{pmatrix}^{*}_{148},\begin{pmatrix}011\\000\\011\end{pmatrix}^{**}_{149},\begin{pmatrix}011\\000\\111\end{pmatrix}^{*}_{150},\begin{pmatrix}011\\100\\000\end{pmatrix}^{*}_{151},\begin{pmatrix}011\\100\\100\end{pmatrix}^{*}_{152},$$

$$\begin{pmatrix}011\\100\\110\end{pmatrix}_{153}\begin{pmatrix}011\\100\\101\end{pmatrix}_{154},\begin{pmatrix}011\\100\\011\end{pmatrix}_{155},\begin{pmatrix}011\\100\\111\end{pmatrix}_{156}\begin{pmatrix}011\\110\\000\end{pmatrix}^{*}_{157},\begin{pmatrix}011\\110\\100\end{pmatrix}_{158},\begin{pmatrix}011\\110\\110\end{pmatrix}^{*}_{159},\begin{pmatrix}011\\110\\101\end{pmatrix}_{160},\begin{pmatrix}011\\110\\011\end{pmatrix}_{161},\begin{pmatrix}011\\110\\111\end{pmatrix}_{162},$$

$$\begin{pmatrix}011\\101\\000\end{pmatrix}^{*}_{163},\begin{pmatrix}011\\101\\100\end{pmatrix}_{164},\begin{pmatrix}011\\101\\110\end{pmatrix}_{165}\begin{pmatrix}011\\101\\101\end{pmatrix}^{*}_{166},\begin{pmatrix}011\\101\\011\end{pmatrix}_{167},\begin{pmatrix}011\\101\\111\end{pmatrix}_{168}\begin{pmatrix}011\\011\\000\end{pmatrix}^{**}_{169},\begin{pmatrix}011\\011\\100\end{pmatrix}_{170},\begin{pmatrix}011\\011\\110\end{pmatrix}_{171},\begin{pmatrix}011\\011\\101\end{pmatrix}_{172},$$

$$\begin{pmatrix}011\\011\\011\end{pmatrix}^{**}_{173},\begin{pmatrix}011\\011\\111\end{pmatrix}^{*}_{174}\begin{pmatrix}011\\111\\000\end{pmatrix}^{*}_{175},\begin{pmatrix}011\\111\\100\end{pmatrix}_{176},\begin{pmatrix}011\\111\\110\end{pmatrix}_{177},\begin{pmatrix}011\\111\\101\end{pmatrix}_{178},\begin{pmatrix}011\\111\\011\end{pmatrix}^{*}_{179},\begin{pmatrix}011\\111\\111\end{pmatrix}^{*}_{180},\begin{pmatrix}111\\000\\000\end{pmatrix}^{**}_{181},\begin{pmatrix}111\\000\\100\end{pmatrix}^{*}_{182},$$

$$\begin{pmatrix}111\\000\\110\end{pmatrix}^{*}_{183}\begin{pmatrix}111\\000\\101\end{pmatrix}^{*}_{184},\begin{pmatrix}111\\000\\011\end{pmatrix}_{185},\begin{pmatrix}111\\000\\111\end{pmatrix}^{**}_{186}\begin{pmatrix}111\\100\\000\end{pmatrix}^{*}_{187},\begin{pmatrix}111\\100\\100\end{pmatrix}^{*}_{188},\begin{pmatrix}111\\100\\110\end{pmatrix}_{189}\begin{pmatrix}111\\100\\101\end{pmatrix}_{190},\begin{pmatrix}111\\100\\011\end{pmatrix}_{191},\begin{pmatrix}111\\100\\111\end{pmatrix}_{192}$$

$$\begin{pmatrix}111\\110\\000\end{pmatrix}^{*}_{193},\begin{pmatrix}111\\110\\100\end{pmatrix}_{194},\begin{pmatrix}111\\110\\110\end{pmatrix}^{*}_{195}\begin{pmatrix}111\\110\\101\end{pmatrix}_{196},\begin{pmatrix}111\\110\\011\end{pmatrix}_{197},\begin{pmatrix}111\\110\\111\end{pmatrix}_{198},\begin{pmatrix}111\\101\\000\end{pmatrix}^{*}_{199},\begin{pmatrix}111\\101\\100\end{pmatrix}_{200},\begin{pmatrix}111\\101\\110\end{pmatrix}_{201},\begin{pmatrix}111\\101\\101\end{pmatrix}^{*}_{202},$$

$$\begin{pmatrix}111\\101\\011\end{pmatrix}_{203},\begin{pmatrix}111\\101\\111\end{pmatrix}_{204},\begin{pmatrix}111\\011\\000\end{pmatrix}^{**}_{205},\begin{pmatrix}111\\011\\100\end{pmatrix}_{206},\begin{pmatrix}111\\011\\110\end{pmatrix}_{207},\begin{pmatrix}111\\011\\101\end{pmatrix}_{208},\begin{pmatrix}111\\011\\011\end{pmatrix}^{**}_{209},\begin{pmatrix}111\\011\\111\end{pmatrix}_{210},\begin{pmatrix}111\\111\\000\end{pmatrix}^{**}_{211},\begin{pmatrix}111\\111\\100\end{pmatrix}_{212},$$

$$\begin{pmatrix}111\\111\\110\end{pmatrix}_{213},\begin{pmatrix}111\\111\\101\end{pmatrix}_{214},\begin{pmatrix}111\\111\\011\end{pmatrix}_{215},\begin{pmatrix}111\\111\\111\end{pmatrix}^{**}_{216}.$$

Всего идемпотентов 59. Они имеют номера: 1,4,5,6,13,15,16,18,22,25, 29,31,34,36,37,38,40,41,42,43,44,46,47,48,49,50,51,52,54,58,61,65,67,68,70,72, 73,75,77,78,85,87,90,109,112,127,130,133,139,142,149,169,173,181,186,205,209,211,216.

Всего регулярных элементов 134.Ихные номера: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37, 38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,54,55,56,57,58,60,61,65,67,68,69, 70,72,73,74,75,76,77,78,79,80,85,87,90,91,94,97,101,103,105,108,109,110,111, 112,113,114,115,116,121,123,127,130,132,133,137,139,142,144,145,146,147,148,149,150,151, 152,157,159,163,166,169,173,174,175,179,180,181,182,183,184,186, 187,188,193,195,199,202,205,209,211,216.

Число идемпотентных элементов по формуле 2.4, которая было выведено нами после теоретических рассуждениях, определяется так:

$$
\begin{aligned}
|I| &= 1+\left(2^1-1\right)\cdot 2^2+\left(2^2-1\right)\cdot 2^1+\left(2^2-1\right)\cdot 2^1+\left(2^2-1\right)\cdot 2^1+\left(2^3-1\right)\cdot 2^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+\\
&+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^2-2^2\right)\cdot 3^0+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\\
&+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^0+\\
&+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\left(2^2-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\\
&+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 5^0=1+4+6+6+6+7+3+3+5+3+3+3+1+1+1+3+\\
&+1+1+1=59
\end{aligned}
$$

Всего идемпотентов 59. Они имеют номера: 1,4,5,6,13,15,16,18,22,25, 29,31,34,36,37,38,40,41,42,43,44,46,47,48,49,50,51,52,54,58,61,65,67,68,70,72,

73,75,77,78,85,87,90,109,112,127,130,133,139,142,149,169,173,181,186,205,209,211,216.

Всего регулярных элементов 134.Ихные номера: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37, 38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,54,55,56,57,58,60,61,65,67,68,69, 70,72,73,74,75,76,77,78,79,80,85,87,90,91,94,97,101,103,105,108,109,110,111, 112,113,114,115,116,121,123,127,130,132,133,137,139,142,144,145,146,147,148,149,150,151, 152,157,159,163,166,169,173,174,175,179,180,181,182,183,184,186, 187,188,193,195,199,202,205,209,211,216.

Число идемпотентных элементов по формуле 2.4, которая было выведено нами после теоретических рассуждениях, определяется так:

$$
\begin{aligned}
|I| &= 1+\left(2^1-1\right)\cdot 2^2+\left(2^2-1\right)\cdot 2^1+\left(2^2-1\right)\cdot 2^1+\left(2^2-1\right)\cdot 2^1+\left(2^3-1\right)\cdot 2^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+\\
&+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^2-2^2\right)\cdot 3^0+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\\
&+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^0+\\
&+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\left(2^2-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+\\
&+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 5^0=1+4+6+6+6+7+3+3+5+3+3+3+1+1+1+3+\\
&+1+1+1=59
\end{aligned}
$$

Число регулярных элементов в данном случае определяется согласно теоремы 3.5. по которому имеем:

$$
\begin{aligned}
|R| &= 1+5\cdot\left(2^3-1\right)\cdot 2^0+6\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^2-2^2\right)\cdot 3^0+6\cdot\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+6\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+\\
&+6\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^0+2\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^0+2\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^0+\\
&+8\cdot\left(2^2-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+8\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^0+2\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 5^0=\\
&=1+35+30+18+6+6+2+2+24+8+2=134
\end{aligned}
$$

Практические расчеты идемпотентных и регулярных элементов в данном примере совпали с результатами, которые получены по формулам следуя теоретическим рассуждениям.

Пример 2.

Рассмотрим матричную полугруппу $B_4(D)$, которая изоморфна полугруппе $B_X(D)$, где $X=\{1,2,3,4\}, D=\{\{\varnothing\},\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$$
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}_1^{**},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix}_2,
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0000\\1100\end{pmatrix}_3,
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0000\\1010\end{pmatrix}_4,
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0000\\0110\end{pmatrix}_5,
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0000\\1110\end{pmatrix}_6,
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix}_7^{*},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1000\\1000\end{pmatrix}_8^{*},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1000\\1100\end{pmatrix}_9,
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{10},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{11},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{12},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{13}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{14},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{15}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{16},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{17},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{18},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{19}^{**},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{20},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{21},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{22}^{**},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{23},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{24},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{25}^{**},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{26},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{27},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{28},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{29}^{**},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{30},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{31}^{**},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{32},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{33},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{34},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{35},
\begin{pmatrix}0000\\0000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{36}^{**},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix}_{37}^{*},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0000\\1000\end{pmatrix}_{38}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{39},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{40},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{41},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{42},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1000\\0000\end{pmatrix}_{43}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{44}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{45},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{46},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{47},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{48},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{49}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{50}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{51}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{52},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{53},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{54},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{55}^{*},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{56}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{57},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{58}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{59},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{60},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{61}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{62}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{63},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{64},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{65}^{*}
\begin{pmatrix}0000\\1000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{66}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{67}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{68}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{69},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{70},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{71},
\begin{pmatrix}0000\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{72}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\0000\\0000\end{pmatrix}_{73}^{**},
$$

$$
\begin{pmatrix}0000\\1100\\0000\\1000\end{pmatrix}_{74},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\0000\\1100\end{pmatrix}_{75}^{**},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\0000\\1010\end{pmatrix}_{76},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\0000\\0110\end{pmatrix}_{77},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\0000\\1110\end{pmatrix}_{78},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\1000\\0000\end{pmatrix}_{79}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{80}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{81}^{*},
\begin{pmatrix}0000\\1100\\1000\\1010\end{pmatrix}_{82},
$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1100\\1000\\0110\end{pmatrix}_{83},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{84},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1100\\0000\end{pmatrix}_{85}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{86},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{87}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1100\\1010\end{pmatrix}_{88},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1100\\0110\end{pmatrix}_{89},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{90},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1010\\0000\end{pmatrix}_{91}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1100\\1010\\1000\end{pmatrix}_{92},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1010\\1100\end{pmatrix}_{93}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1010\\1010\end{pmatrix}_{94}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1010\\0110\end{pmatrix}_{95},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1010\\1110\end{pmatrix}_{96}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\0110\\0000\end{pmatrix}_{97}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1100\\0110\\1000\end{pmatrix}_{98},\begin{pmatrix}0000\\1100\\0110\\1100\end{pmatrix}_{99}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1100\\0110\\1010\end{pmatrix}_{100}$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1100\\0110\\0110\end{pmatrix}_{101}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1100\\0110\\1110\end{pmatrix}_{102}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1110\\0000\end{pmatrix}_{103}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{104},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{105}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1110\\1010\end{pmatrix}_{106},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1110\\0110\end{pmatrix}_{107},\begin{pmatrix}0000\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{108}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0000\\0000\end{pmatrix}_{109}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1010\\0000\\1000\end{pmatrix}_{110},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0000\\1100\end{pmatrix}_{111},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0000\\1010\end{pmatrix}_{112}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0000\\0110\end{pmatrix}_{113},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0000\\1110\end{pmatrix}_{114},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1000\\0000\end{pmatrix}_{115}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1000\\1000\end{pmatrix}_{116}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1000\\1100\end{pmatrix}_{117},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1000\\1010\end{pmatrix}_{118}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1000\\0110\end{pmatrix}_{119}$$

$$,\begin{pmatrix}0000\\1010\\1000\\1110\end{pmatrix}_{120},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1100\\0000\end{pmatrix}_{121}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1100\\1000\end{pmatrix}_{122},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1100\\1100\end{pmatrix}_{123}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1100\\1010\end{pmatrix}_{124}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1100\\0110\end{pmatrix}_{125},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1100\\1110\end{pmatrix}_{126}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1010\\0000\end{pmatrix}_{127}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1010\\1000\end{pmatrix}_{128},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1010\\1010\\1100\end{pmatrix}_{129},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1010\\1010\end{pmatrix}_{130}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1010\\0110\end{pmatrix}_{131},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1010\\1110\end{pmatrix}_{132},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0110\\0000\end{pmatrix}_{133}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0110\\1000\end{pmatrix}_{134},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0110\\1100\end{pmatrix}_{135},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0110\\1010\end{pmatrix}_{136}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\0110\\0110\end{pmatrix}_{137}^{*}$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1010\\0110\\1110\end{pmatrix}_{138}^{*}\begin{pmatrix}0000\\1010\\1110\\0000\end{pmatrix}_{139}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1110\\1000\end{pmatrix}_{140},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1110\\1100\end{pmatrix}_{141},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1110\\1010\end{pmatrix}_{142}^{*}\begin{pmatrix}0000\\1010\\1110\\0110\end{pmatrix}_{143},\begin{pmatrix}0000\\1010\\1110\\1110\end{pmatrix}_{144}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0000\\0000\end{pmatrix}_{145}^{**},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{146},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\0110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{147},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{148},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0000\\0110\end{pmatrix}_{149}^{**},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0000\\1110\end{pmatrix}_{150},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{151}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{152}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{153},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{154},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{155}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\0110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{156}^{*}\begin{pmatrix}0000\\0110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{157}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{158},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{159}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{160},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{161}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{162}^{*}\begin{pmatrix}0000\\0110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{163}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{164},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\0110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{165},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{166}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{167}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{168}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0110\\0000\end{pmatrix}_{169}^{**},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{170},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{171},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{172},\begin{pmatrix}0000\\0110\\0110\\0110\end{pmatrix}_{173}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\0110\\0110\\1110\end{pmatrix}_{174},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1110\\0000\end{pmatrix}_{175}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{176},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{177},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{178},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{179}^{*},\begin{pmatrix}0000\\0110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{180}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0000\\0000\end{pmatrix}_{181}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{182},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{183},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{184},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0000\\0110\end{pmatrix}_{185},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0000\\1110\end{pmatrix}_{186}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{187}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{188}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{189},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{190},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{191},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{192}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{193}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{194},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{195}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{196}\begin{pmatrix}0000\\1110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{197},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{198}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{199}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{200},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{201},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{202}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{203},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{204}^{**},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0110\\0000\end{pmatrix}_{205}^{*},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{206},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{207},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{208},\begin{pmatrix}0000\\1110\\0110\\0110\end{pmatrix}_{209}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}0000\\1110\\0110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{210},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{211},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{212},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{213},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{214},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{215},\begin{pmatrix}0000\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{216},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{217},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{218},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{219},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{220},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{221},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{222},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{223},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{224},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{225},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{226},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{227},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{228},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{229},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1100\\1000\end{pmatrix}^{*}_{230},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{231},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{232},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{233},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{234},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{235},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1010\\1000\end{pmatrix}^{**}_{236},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{237},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{238},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{239},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{240},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{241},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{242},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{243},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{244},\begin{pmatrix}1000\\0000\\0110\\0110\end{pmatrix}^{**}_{245},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0000\\0110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{246},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{247},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{248},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{249},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{250},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{251},\begin{pmatrix}1000\\0000\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{252},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{253},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{254},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{255},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{256},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{257},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{258},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{259},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{260},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{261},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{262},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{263},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{264},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{265},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}^{*}_{266},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{267},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{268},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{269},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{270},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{271},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1010\\1000\end{pmatrix}^{**}_{272},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{273},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{274},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{275},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{276},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{277},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{278},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{279},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{280},\begin{pmatrix}1000\\1000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{281},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{282},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{283},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{284},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{285},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{286},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{287},\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{288},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{289},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{290},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\0000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{291},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0000\\1010\end{pmatrix}_{292},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0000\\0110\end{pmatrix}_{293},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0000\\1110\end{pmatrix}_{294},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{295},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{296},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{297},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1010\end{pmatrix}_{298},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\0110\end{pmatrix}_{299},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{300},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\0000\end{pmatrix}^{**}_{301},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}^{**}_{302},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{303},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1010\end{pmatrix}_{304},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\0110\end{pmatrix}_{305},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{306},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{307},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1010\\1000\end{pmatrix}^{**}_{308},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\1010\\1100\end{pmatrix}^{**}_{309},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{310},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1010\\0110\end{pmatrix}_{311},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1010\\1110\end{pmatrix}^{**}_{312},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0110\\0000\end{pmatrix}_{313},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0110\\1000\end{pmatrix}_{314},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0110\\1100\end{pmatrix}_{315},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0110\\1010\end{pmatrix}_{316},\begin{pmatrix}1000\\1100\\0110\\0110\end{pmatrix}_{317},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\0110\\1110\end{pmatrix}_{318},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{319},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{320},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{321},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1010\end{pmatrix}_{322},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\0110\end{pmatrix}_{323},\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{324},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{325},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{326},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1010\\0000\\1100\end{pmatrix}_{327},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{328},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0000\\0110\end{pmatrix}_{329},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0000\\1110\end{pmatrix}_{330},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{331},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{332},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1000\\1100\end{pmatrix}_{333},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{334},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1000\\0110\end{pmatrix}_{335},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1010\\1000\\1110\end{pmatrix}_{336},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{337},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1100\\1000\end{pmatrix}^{*}_{338},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{339},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1100\\1010\end{pmatrix}^{*}_{340},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1100\\0110\end{pmatrix}_{341},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{342},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{343},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1010\\1000\end{pmatrix}^{**}_{344},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1010\\1010\\1100\end{pmatrix}_{345},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{346},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1010\\0110\end{pmatrix}_{347},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1010\\1110\end{pmatrix}_{348},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0110\\0000\end{pmatrix}_{349},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0110\\1000\end{pmatrix}_{350},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0110\\1100\end{pmatrix}_{351},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0110\\1010\end{pmatrix}_{352},\begin{pmatrix}1000\\1010\\0110\\0110\end{pmatrix}_{353},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1010\\0110\\1110\end{pmatrix}_{354},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{355},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1110\\1000\end{pmatrix}^{*}_{356},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1110\\1100\end{pmatrix}_{357},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1110\\1010\end{pmatrix}^{*}_{358},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1110\\0110\end{pmatrix}_{359},\begin{pmatrix}1000\\1010\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{360},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{361},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{362},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{363},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{364},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0000\\0110\end{pmatrix}^{**}_{365},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{366},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{367},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{368},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{369},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{370},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{371},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{372},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{373},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{374},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{375},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{376},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{377},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{378},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{379},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{380},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{381},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{382},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{383},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{384},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{385},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{386},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{387},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{388},\begin{pmatrix}1000\\0110\\0110\\0110\end{pmatrix}^{**}_{389},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\0110\\0110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{390},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1110\\0000\end{pmatrix}_{391},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{392},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{393},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{394},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{395},\begin{pmatrix}1000\\0110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{396},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{397},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{398},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{399},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{400},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0000\\0110\end{pmatrix}_{401},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{402},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{403},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{404},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{405},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{406},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{407},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{408},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{409},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}^{*}_{410},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{411},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{412},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{413},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{414},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{415},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1010\\1000\end{pmatrix}^{**}_{416},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{417},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{418},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{419},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1010\\1110\end{pmatrix}^{**}_{420},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0110\\0000\end{pmatrix}_{421},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{422},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{423},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{424},\begin{pmatrix}1000\\1110\\0110\\0110\end{pmatrix}_{425},$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\0110\\1110\end{pmatrix}_{426},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{427},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{428},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{429},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{430},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{431},\begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{432},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{433},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix}_{434},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0000\\0000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{435},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{436},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{437},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{438},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{439},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{440},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{441},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{442},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{443},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{444},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1100\\0000\end{pmatrix}^{**}_{445},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{446},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{447},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{448},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{449},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{450},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1010\\0000\end{pmatrix}^{*}_{451},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{452},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0000\\1010\\1100\end{pmatrix}^{*}_{453},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1010\\1010\end{pmatrix}^{*}_{454},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{455},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1010\\1110\end{pmatrix}^{*}_{456},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{457},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{458},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{459},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{460},\begin{pmatrix}1100\\0000\\0110\\0110\end{pmatrix}^{**}_{461}$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0000\\0110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{462},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{463},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{464},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{465},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{466},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{467},\begin{pmatrix}1100\\0000\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{468},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{469},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{470},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\0000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{471},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{472},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{473},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{474},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{475},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{476},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{477},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{478},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{479},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{480},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{481},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{482},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{483},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{484},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{485},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{486},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{487},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{488},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{489},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{490},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{491},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{492},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{493},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{494},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{495},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{496},\begin{pmatrix}1100\\1000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{497},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{498},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{499},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{500},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{501},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{502},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{503},\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{504},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{505},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0000\\1000\end{pmatrix}_{506},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\0000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{507},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0000\\1010\end{pmatrix}_{508},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0000\\0110\end{pmatrix}_{509},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0000\\1110\end{pmatrix}_{510},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\0000\end{pmatrix}_{511},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{512},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{513},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1010\end{pmatrix}_{514},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\0110\end{pmatrix}_{515},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{516},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\0000\end{pmatrix}^{**}_{517},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{518},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{519},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1010\end{pmatrix}_{520},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\0110\end{pmatrix}_{521},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{522},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1010\\0000\end{pmatrix}_{523},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1010\\1000\end{pmatrix}_{524},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\1010\\1100\end{pmatrix}_{525},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1010\\1010\end{pmatrix}_{526},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1010\\0110\end{pmatrix}_{527},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1010\\1110\end{pmatrix}_{528},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0110\\0000\end{pmatrix}_{529},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0110\\1000\end{pmatrix}_{530},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0110\\1100\end{pmatrix}_{531},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0110\\1010\end{pmatrix}_{532},\begin{pmatrix}1100\\1100\\0110\\0110\end{pmatrix}_{533},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\0110\\1110\end{pmatrix}_{534},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{535},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{536},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{537},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1010\end{pmatrix}_{538},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\0110\end{pmatrix}_{539},\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{540},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{541},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0000\\1000\end{pmatrix}_{542},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1010\\0000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{543},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{544},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0000\\0110\end{pmatrix}_{545},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{546},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1000\\0000\end{pmatrix}_{547},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1000\\1000\end{pmatrix}_{548},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1000\\1100\end{pmatrix}_{549},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1000\\1010\end{pmatrix}_{550},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1000\\0110\end{pmatrix}_{551},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1010\\1000\\1110\end{pmatrix}_{552},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1100\\0000\end{pmatrix}_{553},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1100\\1000\end{pmatrix}_{554},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1100\\1100\end{pmatrix}_{555},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1100\\1010\end{pmatrix}_{556},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1100\\0110\end{pmatrix}_{557},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1100\\1110\end{pmatrix}_{558},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1010\\0000\end{pmatrix}^{*}_{559},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1010\\1000\end{pmatrix}_{560},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1010\\1010\\1100\end{pmatrix}^{*}_{561},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1010\\1010\end{pmatrix}^{*}_{562},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1010\\0110\end{pmatrix}_{563},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1010\\1110\end{pmatrix}^{*}_{564},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0110\\0000\end{pmatrix}_{565},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0110\\1000\end{pmatrix}_{566},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0110\\1100\end{pmatrix}_{567},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0110\\1010\end{pmatrix}_{568},\begin{pmatrix}1100\\1010\\0110\\0110\end{pmatrix}_{569},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1010\\0110\\1110\end{pmatrix}_{570},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1110\\0000\end{pmatrix}_{571},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1110\\1000\end{pmatrix}_{572},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1110\\1100\end{pmatrix}_{573},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1110\\1010\end{pmatrix}_{574},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1110\\0110\end{pmatrix}_{575},\begin{pmatrix}1100\\1010\\1110\\1110\end{pmatrix}_{576},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{577},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{578},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0110\\0000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{579},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{580},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0000\\0110\end{pmatrix}^{*}_{581},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{582},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{583},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{584},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{585},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{586},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{587},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{588},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{589},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{590},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{591},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{592},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{593},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{594},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{595},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{596},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{597},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{598},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{599},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{600},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{601},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{602},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0110\\1100\end{pmatrix}^{*}_{603},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{604},\begin{pmatrix}1100\\0110\\0110\\0110\end{pmatrix}^{*}_{605},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\0110\\0110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{606},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1110\\0000\end{pmatrix}_{607},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{608},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{609},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{610},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{611},\begin{pmatrix}1100\\0110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{612},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{613},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{614},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\0000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{615},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{616},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0000\\0110\end{pmatrix}_{617},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{618},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{619},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{620},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{621},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{622},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{623},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{624},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{625},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{626},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}^{*}_{627},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{628},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{629},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{630},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{631},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{632},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{633},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{634},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{635},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{636},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0110\\0000\end{pmatrix}_{637},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{638},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{639},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{640},\begin{pmatrix}1100\\1110\\0110\\0110\end{pmatrix}_{641},$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\0110\\1110\end{pmatrix}_{642},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{643},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{644},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}^{*}_{645},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{646},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{647},\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{648},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{649},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix}_{650},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{651},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0000\\1010\end{pmatrix}^{**}_{652},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{653},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{654},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{655},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{656},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{657},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{658},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{659},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{660},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{661},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{662},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{663},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1100\\1010\end{pmatrix}^{*}_{664},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{665},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{666},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{667},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{668},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{669},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{670},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{671},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{672},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{673},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{674},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{675},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0110\\1010\end{pmatrix}^{*}_{676},\begin{pmatrix}1010\\0000\\0110\\0110\end{pmatrix}^{*}_{677},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0000\\0110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{678},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{679},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{680},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{681},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1110\\1010\end{pmatrix}^{*}_{682},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{683},\begin{pmatrix}1010\\0000\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{684},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{685},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{686},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{687},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{688},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{689},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{690},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{691},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{692},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{693},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{694},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{695},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{696},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{697},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{698},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{699},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{700},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{701},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{702},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{703},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{704},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{705},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{706},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{707},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{708},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{709},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{710},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{711},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{712},\begin{pmatrix}1010\\1000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{713},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{714},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{715},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{716},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{717},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{718},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{719},\begin{pmatrix}1010\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{720},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{721},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0000\\1000\end{pmatrix}_{722},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1100\\0000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{723},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{724},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0000\\0110\end{pmatrix}_{725},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{726},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1000\\0000\end{pmatrix}_{727},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{728},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{729},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1000\\1010\end{pmatrix}_{730},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1000\\0110\end{pmatrix}_{731},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{732},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{733},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{734},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{735},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1100\\1010\end{pmatrix}^{*}_{736},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1100\\0110\end{pmatrix}_{737},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{738},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1010\\0000\end{pmatrix}_{739},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1010\\1000\end{pmatrix}_{740},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1100\\1010\\1100\end{pmatrix}_{741},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1010\\1010\end{pmatrix}_{742},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1010\\0110\end{pmatrix}_{743},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1010\\1110\end{pmatrix}_{744},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0110\\0000\end{pmatrix}_{745},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0110\\1000\end{pmatrix}_{746},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0110\\1100\end{pmatrix}_{747},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0110\\1010\end{pmatrix}_{748},\begin{pmatrix}1010\\1100\\0110\\0110\end{pmatrix}_{749},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1100\\0110\\1110\end{pmatrix}_{750},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1110\\0000\end{pmatrix}_{751},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{752},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{753},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1110\\1010\end{pmatrix}_{754},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1110\\0110\end{pmatrix}_{755},\begin{pmatrix}1010\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{756},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{757},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0000\\1000\end{pmatrix}_{758},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1010\\0000\\1100\end{pmatrix}_{759},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0000\\1010\end{pmatrix}^{**}_{760},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0000\\0110\end{pmatrix}_{761},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0000\\1110\end{pmatrix}_{762},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1000\\0000\end{pmatrix}_{763},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1000\\1000\end{pmatrix}_{764},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1000\\1100\end{pmatrix}_{765},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1000\\1010\end{pmatrix}_{766},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1000\\0110\end{pmatrix}_{767},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1010\\1000\\1110\end{pmatrix}_{768},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1100\\0000\end{pmatrix}_{769},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1100\\1000\end{pmatrix}_{770},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1100\\1100\end{pmatrix}_{771},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1100\\1010\end{pmatrix}_{772},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1100\\0110\end{pmatrix}_{773},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1100\\1110\end{pmatrix}_{774},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1010\\0000\end{pmatrix}^{**}_{775},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1010\\1000\end{pmatrix}_{776},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1010\\1010\\1100\end{pmatrix}_{777},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1010\\1010\end{pmatrix}^{**}_{778},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1010\\0110\end{pmatrix}_{779},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1010\\1110\end{pmatrix}_{780},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0110\\0000\end{pmatrix}_{781},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0110\\1000\end{pmatrix}_{782},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0110\\1100\end{pmatrix}_{783},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0110\\1010\end{pmatrix}_{784},\begin{pmatrix}1010\\1010\\0110\\0110\end{pmatrix}_{785},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1010\\0110\\1110\end{pmatrix}_{786},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{787},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1110\\1000\end{pmatrix}_{788},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1110\\1100\end{pmatrix}_{789},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1110\\1010\end{pmatrix}^{*}_{790},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1110\\0110\end{pmatrix}_{791},\begin{pmatrix}1010\\1010\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{792},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{793},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{794},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{795},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0000\\1010\end{pmatrix}^{**}_{796},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0000\\0110\end{pmatrix}^{**}_{797},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{798},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{799},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{800},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{801},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{802},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{803},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{804},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{805},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{806},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{807},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{808},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{809},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{810},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{811},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{812},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{813},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{814},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{815},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{816},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{817},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{818},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{819},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0110\\1010\end{pmatrix}^{*}_{820},\begin{pmatrix}1010\\0110\\0110\\0110\end{pmatrix}^{*}_{821},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\0110\\0110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{822},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1110\\0000\end{pmatrix}_{823},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{824},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{825},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{826},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{827},\begin{pmatrix}1010\\0110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{828},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{829},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{830},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{831},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0000\\1010\end{pmatrix}^{**}_{832},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0000\\0110\end{pmatrix}_{833},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{834},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{835},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{836},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{837},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{838},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{839},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{840},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{841},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{842},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{843},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{844},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{845},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{846},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{847}^{**},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{848},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{849},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{850}^{**},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{851},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{852}^{**},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0110\\0000\end{pmatrix}_{853},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{854},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{855},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{856},\begin{pmatrix}1010\\1110\\0110\\0110\end{pmatrix}_{857},$$

$$\begin{pmatrix}1010\\1110\\0110\\1110\end{pmatrix}_{858},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1110\\0000\end{pmatrix}_{859}^{*},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{860},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{861},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{862}^{*},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{863},\begin{pmatrix}1010\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{864}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}_{865}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix}_{866},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{867},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{868},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{869}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{870},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix}_{871}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{872}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{873},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{874},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{875}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{876}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{877}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{878},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{879}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{880},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{881}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{882}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{883}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{884},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{885},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{886}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{887}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{888}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{889}^{**},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{890},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{891},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{892},\begin{pmatrix}0110\\0000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{893}^{**},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{894},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{895}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{896},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{897},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{898},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{899}^{*},\begin{pmatrix}0110\\0000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{900}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix}_{901}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0000\\1000\end{pmatrix}_{902}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{903},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{904},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{905}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0000\\1110\end{pmatrix}_{906}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1000\\0000\end{pmatrix}_{907}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{908}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{909},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{910},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{911}^{*},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{912}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{913},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{914},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{915},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{916},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{917},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{918},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{919},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{920},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{921},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{922},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{923},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{924},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{925},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{926},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{927},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{928},\begin{pmatrix}0110\\1000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{929},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{930},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{931},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{932},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{933},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{934},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{935},\begin{pmatrix}0110\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{936},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0000\\0000\end{pmatrix}_{937}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0000\\1000\end{pmatrix}_{938},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1100\\0000\\1100\end{pmatrix}_{939}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0000\\1010\end{pmatrix}_{940},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0000\\0110\end{pmatrix}_{941}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0000\\1110\end{pmatrix}_{942}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1000\\0000\end{pmatrix}_{943},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{944},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{945},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1000\\1010\end{pmatrix}_{946},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1000\\0110\end{pmatrix}_{947},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{948},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1100\\0000\end{pmatrix}_{949}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{950},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{951}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1100\\1010\end{pmatrix}_{952},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1100\\0110\end{pmatrix}_{953}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{954}^{*},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1010\\0000\end{pmatrix}_{955},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1010\\1000\end{pmatrix}_{956},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1100\\1010\\1100\end{pmatrix}_{957},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1010\\1010\end{pmatrix}_{958},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1010\\0110\end{pmatrix}_{959},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1010\\1110\end{pmatrix}_{960},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0110\\0000\end{pmatrix}_{961},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0110\\1000\end{pmatrix}_{962},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0110\\1100\end{pmatrix}_{963},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0110\\1010\end{pmatrix}_{964},\begin{pmatrix}0110\\1100\\0110\\0110\end{pmatrix}_{965},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1100\\0110\\1110\end{pmatrix}_{966},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1110\\0000\end{pmatrix}_{967},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{968},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{969},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1110\\1010\end{pmatrix}_{970},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1110\\0110\end{pmatrix}_{971},\begin{pmatrix}0110\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{972},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{973},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0000\\1000\end{pmatrix}_{974},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1010\\0000\\1100\end{pmatrix}_{975},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{976},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0000\\0110\end{pmatrix}^{*}_{977},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{978},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1000\\0000\end{pmatrix}_{979},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1000\\1000\end{pmatrix}_{980},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1000\\1100\end{pmatrix}_{981},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1000\\1010\end{pmatrix}_{982},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1000\\0110\end{pmatrix}_{983},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1010\\1000\\1110\end{pmatrix}_{984},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1100\\0000\end{pmatrix}_{985},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1100\\1000\end{pmatrix}_{986},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1100\\1100\end{pmatrix}_{987},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1100\\1010\end{pmatrix}_{988},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1100\\0110\end{pmatrix}_{989},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1100\\1110\end{pmatrix}_{990},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1010\\0000\end{pmatrix}^{*}_{991},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1010\\1000\end{pmatrix}_{992},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1010\\1010\\1100\end{pmatrix}_{993},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1010\\1010\end{pmatrix}^{*}_{994},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1010\\0110\end{pmatrix}^{*}_{995},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1010\\1110\end{pmatrix}^{*}_{996},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0110\\0000\end{pmatrix}_{997},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0110\\1000\end{pmatrix}_{998},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0110\\1100\end{pmatrix}_{999},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1000},\begin{pmatrix}0110\\1010\\0110\\0110\end{pmatrix}_{1001}$$

$$,\begin{pmatrix}0110\\1010\\0110\\1110\end{pmatrix}_{1002},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1110\\0000\end{pmatrix}_{1003},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1004},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1005},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1006},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1007},\begin{pmatrix}0110\\1010\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1008},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1009},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1010},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1011},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1012},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0000\\0110\end{pmatrix}^{**}_{1013},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0000\\1110\end{pmatrix}_{1014},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{1015},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1016},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1017},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1018},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1019},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1020},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{1021},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1022},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1023},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1024},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1025},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1026},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{1027},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1028},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1029},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{1030},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1031},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{1032},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1033},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1034},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1035},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1036},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0110\\0110\end{pmatrix}^{**}_{1037},\begin{pmatrix}0110\\0110\\0110\\1110\end{pmatrix}_{1038},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1039},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1040},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1041},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\0110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1042},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1110\\0110\end{pmatrix}^{*}_{1043},\begin{pmatrix}0110\\0110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1044},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1045},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1046},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1047},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1048},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0000\\0110\end{pmatrix}^{*}_{1049},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1050},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{1051},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1052},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1053},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1054},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1055},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1056},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{1057},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1058},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1059},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1060},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1061},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1062},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{1063},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1064},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1065},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{1066},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1067},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{1068},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1069},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1070},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1071},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1072},\begin{pmatrix}0110\\1110\\0110\\0110\end{pmatrix}^{*}_{1073},$$

$$\begin{pmatrix}0110\\1110\\0110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1074},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1110\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1075},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1076},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1077},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1078},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1110\\0110\end{pmatrix}^{*}_{1079},\begin{pmatrix}0110\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1080},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1081},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0000\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1082},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1083},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1084},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{1085},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1086},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1087},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{1088},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1089},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1090},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1091},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1092},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1093},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1094},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{1095},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1096},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1097},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0000\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1098},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1010\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1099},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1100},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1101},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1010\\1010\end{pmatrix}^{*}_{1102},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1103},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1010\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1104},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1105},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1106},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1107},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1108},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0110\\0110\end{pmatrix}^{**}_{1109},\begin{pmatrix}1110\\0000\\0110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1110},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1111},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1112},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1113},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1114},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1115},\begin{pmatrix}1110\\0000\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1116},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1117},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{1118},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1119},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1120},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0000\\0110\end{pmatrix}_{1121},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1122},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1123},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{1124},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1125},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1126},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1127},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1128},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\0000\end{pmatrix}_{1129},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1130},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1131},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1132},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1133},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1134},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1010\\0000\end{pmatrix}_{1135},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1136},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1137},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1010\\1010\end{pmatrix}_{1138},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1139},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1010\\1110\end{pmatrix}_{1140},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0110\\0000\end{pmatrix}_{1141},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1142},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1143},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1144},\begin{pmatrix}1110\\1000\\0110\\0110\end{pmatrix}_{1145},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\0110\\1110\end{pmatrix}_{1146},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\0000\end{pmatrix}_{1147},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1148},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1149},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1150},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1151},\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1152},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1153},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1154},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0000\\1100\end{pmatrix}^{*}_{1155},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1156},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0000\\0110\end{pmatrix}_{1157},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1158},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\0000\end{pmatrix}_{1159},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1160},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1161},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1162},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1163},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1164},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1165},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1166},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{1167},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1168},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1169},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1170},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1010\\0000\end{pmatrix}_{1171},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1172},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1173},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1010\\1010\end{pmatrix}_{1174},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1175},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1010\\1110\end{pmatrix}_{1176},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0110\\0000\end{pmatrix}_{1177},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1178},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1179},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1180},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0110\\0110\end{pmatrix}_{1181},\begin{pmatrix}1110\\1100\\0110\\1110\end{pmatrix}_{1182},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\0000\end{pmatrix}_{1183},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1184},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1185},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1186},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1187},\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1188},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0000\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1189},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1190},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1191},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0000\\1010\end{pmatrix}^{*}_{1192},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0000\\0110\end{pmatrix}_{1193},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1010\\0000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1194},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1000\\0000\end{pmatrix}_{1195},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1196},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1197},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1198},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1199},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1200},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1100\\0000\end{pmatrix}_{1201},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1010\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1202},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1203},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1204},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1205},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1206},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1010\\0000\end{pmatrix}^{*}_{1207},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1208},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1209},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1010\\1010\\1010\end{pmatrix}^{*}_{1210},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1211},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1010\\1110\end{pmatrix}^{*}_{1212},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0110\\0000\end{pmatrix}_{1213},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1214},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1215},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1216},\begin{pmatrix}1110\\1010\\0110\\0110\end{pmatrix}_{1217},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1010\\0110\\1110\end{pmatrix}_{1218},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1110\\0000\end{pmatrix}_{1219},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1220},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1221},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1222},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1223},\begin{pmatrix}1110\\1010\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1224},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1225},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1226},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1227},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1228},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0000\\0110\end{pmatrix}^{**}_{1229},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1230},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{1231},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1232},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1233},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1234},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1235},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1236},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{1237},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1238},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1239},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1240},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1241},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1242},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{1243},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1244},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1245},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{1246},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1247},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{1248},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1249},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1250},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1251},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1252},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0110\\0110\end{pmatrix}^{**}_{1253},\begin{pmatrix}1110\\0110\\0110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1254},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1110\\0000\end{pmatrix}_{1255},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1256},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1257},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\0110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1258},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1259},\begin{pmatrix}1110\\0110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1260},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0000\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1261},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0000\\1000\end{pmatrix}_{1262},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0000\\1100\end{pmatrix}_{1263},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0000\\1010\end{pmatrix}_{1264},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0000\\0110\end{pmatrix}_{1265},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\0000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1266},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\0000\end{pmatrix}_{1267},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1268},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1269},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1010\end{pmatrix}_{1270},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\0110\end{pmatrix}_{1271},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1272},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\0000\end{pmatrix}_{1273},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1274},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1275},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1010\end{pmatrix}_{1276},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\0110\end{pmatrix}_{1277},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1278},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1010\\0000\end{pmatrix}_{1279},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1010\\1000\end{pmatrix}_{1280},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1010\\1100\end{pmatrix}_{1281},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1010\\1010\end{pmatrix}_{1282},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1010\\0110\end{pmatrix}_{1283},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1010\\1110\end{pmatrix}_{1284},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0110\\0000\end{pmatrix}_{1285},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0110\\1000\end{pmatrix}_{1286},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0110\\1100\end{pmatrix}_{1287},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0110\\1010\end{pmatrix}_{1288},\begin{pmatrix}1110\\1110\\0110\\0110\end{pmatrix}_{1289},$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\0110\\1110\end{pmatrix}_{1290},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\0000\end{pmatrix}^{**}_{1291},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1292},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1293},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1010\end{pmatrix}_{1294},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\0110\end{pmatrix}_{1295},\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{1296}$$

Всего идемпотентов 156. Они имеют номера: 1,19,22,25,29,31,36,73,75,85, 87,91,93,94,96,103,105,108,127,130,145,149,169,173,181,186,199,202,204,211,216, 217,218,223,224,235,236,238,241,242,245,246,247,248,252,253,254,259,260,271, 272,
274,283,284,288,289,290,291,295,296,297,301,302,303,307,308,309,310,312,319,

320,
321,324,343,344,346,361,362,365,366,385,386,389,390,397,398,402,403,404,408,
415,
416,418,420,427,428,432,433,435,445,447,457,459,461,462,463,465,468,505,507,
517,
519,535,537,540,649,652,667,670,757,760,775,778,793,796,797,798,829,832,834,
847,
850,852,889,893,1009,1013,1033,1037,1081,1086,1105,1109,1110,1111,1116,1225,
1229,1230,1249,1253,1254,1261,1266,1291,1296.

Всего регулярных элементов 405.Они имеют номера:1,7,8,13,15,19,22,25,
31,36,37,38,43,44,49,50,51,55,56,58,61,62,65,66,67,68,72,73,75,79,80,81,85,87,91,
93,
94,96,97,99,101,102,103,105,108,109,112,115,116,118,121,123,124,126,127,130,
133,
136,137,138,139,142,144,145,149,151,152,155,156,157,159,161,162,163,166,167,
168,
169,173,175,179,180,181,186,187,188,192,193,195,198,199,201,202,204,205,209,
210,
211,216,217,218,223,224,229,230,231,235,236,238,241,242,245,246,247,248,252,
253,
254,259,260,265,266,267,271,272,274,283,284,288,289,290,291,295,296,297,301,
302,
303,307,308,309,310,312,319,320,321,324,325,326,328,331,332,334,337,338,339,
340,
342,343,344,346,355,356,358,360,361,362,365,366,385,386,389,390,397,398,402,
403,
404,408,409,410,411,414,415,416,418,420,427,428,432,433,435,439,440,441,445,
447,
451,453,454,456,457,459,461,462,463,465,468,469,470,471,475,476,477,505,507,
517,
519,535,537,540,541,543,544,546,559,561,562,564,577,579,581,582,601,603,605,
606,613,615,618,625,627,630,643,645,648,649,652,655,656,658,661,663,664,666,
667,670,
673,676,677,678,679,682,684,685,686,688,691,692,694,721,723,724,726,733,735,
736,
738,757,760,775,778,790,792,793,796,797,798,817,820,821,822,829,832,834,847,
850,
852,859,862,864,865,869,871,872,875,876,877,879,881,882,883,886,887,888,889,
893,
895,899,900,901,902,905,906,907,908,911,912,937,939,941,942,949,951,953,954,
973,
976,977,978,991,994,995,996,1009,1013,1033,1037,1039,1043,1044,1045,1049,
1050,
1069,1073,1074,1075,1079,1080,1081,1086,1087,1088,1092,1093,1095,1098,1099,
1104,1102,1105,1109,1110,1111,1116,1117,1118,1122,1123,1124,1128,1153,1155,
1158,1165,1167,1170,1189,1192,1194,1207,1210,1212,1225,1229,1230,1249,1253,
1254,1261,1266,1291,1296.

Теперь найдем число идемпотентов и регулярных элементов по формулам выведенным после теоретических рассуждений.

$$|I|=1+\left(2^1-1\right)\cdot 2^3+\left(2^2-1\right)\cdot 2^2+\left(2^2-1\right)\cdot 2^2+\left(2^2-1\right)\cdot 2^2+\left(2^3-1\right)\cdot 2^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^2+$$
$$\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^2+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^2-2^2\right)\cdot 3^1+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+$$
$$+\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^1+$$
$$+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^1+\left(2^2-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^1+\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^1+$$
$$+\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 5^1=1+8+12+12+12+14+9+9+15+9+9+9+4+4+4+$$
$$+12+4+4+5=156$$

Число регулярных элементов в данном случае определяется по формуле:

$$|R|=1+5\cdot\left(2^3-1\right)\cdot 2^1+6\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^2-2^2\right)\cdot 3^1+6\cdot\left(2^2-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+6\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+$$
$$+6\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 3^1+2\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^1+2\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(4^1-3^1\right)\cdot 4^1+$$
$$+8\cdot\left(2^2-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^1+8\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(2^1-1\right)\cdot 4^1+2\cdot\left(2^1-1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot\left(3^1-2^1\right)\cdot 5^1=1+70+90+$$
$$+54+18+18+8+8+96+32+10=405$$

Получили, что теоретические и практические расчеты в рассмотренных примерах между собой совпадают.

Пример3.

Матричная полугруппа $B_4(D)$ изоморфная полугруппе $B_X(D)$, где $X=\{1,2,3,4\}$, $D=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_1^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_2^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_3^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1101\end{pmatrix}_4^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1011\end{pmatrix}_5^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1000\\1111\end{pmatrix}_6^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_7^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_8^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_9^{**}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1101\end{pmatrix}_{10}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1011\end{pmatrix}_{11}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1100\\1111\end{pmatrix}_{12}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{13}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{14}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{15}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1101\end{pmatrix}_{16}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1011\end{pmatrix}_{17}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1110\\1111\end{pmatrix}_{18}^{*}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\1101\\1000\end{pmatrix}_{19}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1101\\1100\end{pmatrix}_{20}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1101\\1110\end{pmatrix}_{21}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1101\\1101\end{pmatrix}_{22}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1101\\1011\end{pmatrix}_{23}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1101\\1111\end{pmatrix}_{24}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1011\\1000\end{pmatrix}_{25}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1011\\1100\end{pmatrix}_{26}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1011\\1110\end{pmatrix}_{27}^{**}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1000\\1011\\1101\end{pmatrix}_{28}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1011\\1011\end{pmatrix}_{29}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1011\\1111\end{pmatrix}_{30}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1111\\1000\end{pmatrix}_{31}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1111\\1100\end{pmatrix}_{32}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1111\\1110\end{pmatrix}_{33}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1111\\1101\end{pmatrix}_{34}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1111\\1011\end{pmatrix}_{35}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1000\\1111\\1111\end{pmatrix}_{36}^{*}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{37}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{38}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{39}^{**}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1101\end{pmatrix}_{40}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1011\end{pmatrix}_{41}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1000\\1111\end{pmatrix}_{42}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{43}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{44}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{45}^{**}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1101\end{pmatrix}_{46}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1011\end{pmatrix}_{47}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1100\\1111\end{pmatrix}_{48}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{49}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{50}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{51}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1101\end{pmatrix}_{52}^{*}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1011\end{pmatrix}_{53}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1100\\1110\\1111\end{pmatrix}_{54}^{*}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\1101\\1000\end{pmatrix}^{**}_{55} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1101\\1100\end{pmatrix}^{**}_{56} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1101\\1110\end{pmatrix}^{**}_{57} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1101\\1101\end{pmatrix}^{*}_{58} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1101\\1011\end{pmatrix}_{59} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1101\\1111\end{pmatrix}^{**}_{60} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1011\\1000\end{pmatrix}^{*}_{61} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1011\\1100\end{pmatrix}_{62} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1011\\1110\end{pmatrix}_{63} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1100\\1011\\1101\end{pmatrix}_{64} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1011\\1011\end{pmatrix}^{*}_{65} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1011\\1111\end{pmatrix}_{66} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1111\\1000\end{pmatrix}^{*}_{67} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1111\\1100\end{pmatrix}^{*}_{68} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1111\\1110\end{pmatrix}^{**}_{69} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1111\\1101\end{pmatrix}^{*}_{70} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1111\\1011\end{pmatrix}_{71} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1100\\1111\\1111\end{pmatrix}^{*}_{72} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{73} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{74} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}^{*}_{75} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1101\end{pmatrix}^{**}_{76} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1011\end{pmatrix}^{*}_{77} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1000\\1111\end{pmatrix}^{*}_{78} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}^{**}_{79} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{80} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{81} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1101\end{pmatrix}_{82} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1011\end{pmatrix}_{83} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1100\\1111\end{pmatrix}_{84} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}^{*}_{85} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{86} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{87} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1101\end{pmatrix}_{88} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1011\end{pmatrix}_{89} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1110\\1111\end{pmatrix}^{*}_{90} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\1101\\1000\end{pmatrix}^{**}_{91} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1101\\1100\end{pmatrix}_{92} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1101\\1110\end{pmatrix}_{93} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{94} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1101\\1011\end{pmatrix}_{95} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1101\\1111\end{pmatrix}_{96} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1011\\1000\end{pmatrix}^{**}_{97} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1011\\1100\end{pmatrix}_{98} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1011\\1110\end{pmatrix}_{99} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1110\\1011\\1101\end{pmatrix}_{100} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1011\\1011\end{pmatrix}^{**}_{101} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1011\\1111\end{pmatrix}_{102} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1111\\1000\end{pmatrix}^{**}_{103} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1111\\1100\end{pmatrix}_{104} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1111\\1110\end{pmatrix}^{**}_{105} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1111\\1101\end{pmatrix}_{106} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1111\\1011\end{pmatrix}_{107} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1110\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{108}$$

$$\wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{109} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{110} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{111} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1000\\1101\end{pmatrix}^{*}_{112} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1000\\1011\end{pmatrix}^{**}_{113} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1000\\1111\end{pmatrix}^{**}_{114} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1100\\1000\end{pmatrix}^{**}_{115} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{116} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1101\\1100\\1110\end{pmatrix}_{117} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1100\\1101\end{pmatrix}_{118} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1100\\1011\end{pmatrix}_{119} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1100\\1111\end{pmatrix}_{120} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{121} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1110\\1100\end{pmatrix}_{122} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{123} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1110\\1101\end{pmatrix}_{124} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1110\\1011\end{pmatrix}_{125}$$

$$\wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1110\\1111\end{pmatrix}_{126} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1101\\1000\end{pmatrix}^{*}_{127} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1101\\1100\end{pmatrix}_{128} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1101\\1110\end{pmatrix}_{129} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1101\\1101\end{pmatrix}^{*}_{130} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1101\\1011\end{pmatrix}_{131} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1101\\1111\end{pmatrix}^{**}_{132} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1011\\1000\end{pmatrix}^{*}_{133} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1101\\1011\\1100\end{pmatrix}_{134} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1011\\1110\end{pmatrix}_{135} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1011\\1101\end{pmatrix}_{136} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1011\\1011\end{pmatrix}^{**}_{137} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1011\\1111\end{pmatrix}_{138} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1111\\1000\end{pmatrix}^{*}_{139} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1111\\1100\end{pmatrix}_{140} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1111\\1110\end{pmatrix}_{141} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1111\\1101\end{pmatrix}^{*}_{142}$$

$$\wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1111\\1011\end{pmatrix}_{143} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1101\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{144} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1000\\1000\end{pmatrix}^{**}_{145} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{146} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{147} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1000\\1101\end{pmatrix}^{**}_{148} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1000\\1011\end{pmatrix}^{*}_{149} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1000\\1111\end{pmatrix}^{*}_{150} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1011\\1100\\1000\end{pmatrix}^{**}_{151} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{152} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1100\\1110\end{pmatrix}_{153} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1100\\1101\end{pmatrix}_{154} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1100\\1011\end{pmatrix}_{155} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1100\\1111\end{pmatrix}_{156} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{157} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1110\\1100\end{pmatrix}_{158} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{159}$$

$$\wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1110\\1101\end{pmatrix}_{160} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1110\\1011\end{pmatrix}_{161} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1110\\1111\end{pmatrix}_{162} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1101\\1000\end{pmatrix}^{**}_{163} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1101\\1100\end{pmatrix}_{164} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1101\\1110\end{pmatrix}_{165} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{166} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1101\\1011\end{pmatrix}_{167} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1011\\1101\\1111\end{pmatrix}_{168} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1011\\1000\end{pmatrix}^{*}_{169} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1011\\1100\end{pmatrix}_{170} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1011\\1110\end{pmatrix}_{171} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1011\\1101\end{pmatrix}_{172} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1011\\1011\end{pmatrix}^{*}_{173} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1011\\1111\end{pmatrix}^{**}_{174} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1111\\1000\end{pmatrix}^{**}_{175} \wedge \begin{pmatrix}1000\\1011\\1111\\1100\end{pmatrix}_{176}$$

$$\wedge\begin{pmatrix}1000\\1011\\1111\\1110\end{pmatrix}_{177}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1011\\1111\\1101\end{pmatrix}_{178}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1011\\1111\\1011\end{pmatrix}^{**}_{179}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1011\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{180}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1000\\1000\end{pmatrix}^{*}_{181}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1000\\1100\end{pmatrix}^{**}_{182}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1000\\1110\end{pmatrix}^{**}_{183}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1000\\1101\end{pmatrix}^{**}_{184}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1111\\1000\\1011\end{pmatrix}^{*}_{185}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1000\\1111\end{pmatrix}^{*}_{186}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1100\\1000\end{pmatrix}^{**}_{187}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{188}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1100\\1110\end{pmatrix}_{189}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1100\\1101\end{pmatrix}_{190}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1100\\1011\end{pmatrix}_{191}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1100\\1111\end{pmatrix}_{192}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1110\\1000\end{pmatrix}^{**}_{193}$$

$$\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1110\\1100\end{pmatrix}_{194}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{195}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1110\\1101\end{pmatrix}_{196}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1110\\1011\end{pmatrix}_{197}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1110\\1111\end{pmatrix}_{198}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1101\\1000\end{pmatrix}^{**}_{199}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1101\\1100\end{pmatrix}_{200}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1101\\1110\end{pmatrix}_{201}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1111\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{202}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1101\\1011\end{pmatrix}_{203}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1101\\1111\end{pmatrix}_{204}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1011\\1000\end{pmatrix}^{*}_{205}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1011\\1100\end{pmatrix}_{206}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1011\\1110\end{pmatrix}_{207}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1011\\1101\end{pmatrix}_{208}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1011\\1011\end{pmatrix}^{*}_{209}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1000\\1111\\1011\\1111\end{pmatrix}_{210}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1111\\1000\end{pmatrix}^{*}_{211}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1111\\1100\end{pmatrix}_{212}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1111\\1110\end{pmatrix}_{213}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1111\\1101\end{pmatrix}_{214}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1111\\1011\end{pmatrix}_{215}\wedge\begin{pmatrix}1000\\1111\\1111\\1111\end{pmatrix}^{*}_{216}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{217}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{218}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{219}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1101\end{pmatrix}_{220}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1011\end{pmatrix}_{221}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1000\\1111\end{pmatrix}_{222}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{223}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{224}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{225}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1101\end{pmatrix}_{226}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1011\end{pmatrix}_{227}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1100\\1111\end{pmatrix}_{228}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{229}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{230}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{231}\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1101\end{pmatrix}_{232}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1011\end{pmatrix}_{233}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1110\\1111\end{pmatrix}_{234}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1101\\1000\end{pmatrix}_{235}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1101\\1100\end{pmatrix}_{236}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1101\\1110\end{pmatrix}_{237}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1101\\1101\end{pmatrix}_{238}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1101\\1011\end{pmatrix}_{239}\begin{pmatrix}1100\\1000\\1101\\1111\end{pmatrix}_{240}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1011\\1000\end{pmatrix}_{241}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1011\\1100\end{pmatrix}_{242}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1011\\1110\end{pmatrix}_{243}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1011\\1101\end{pmatrix}_{244}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1011\\1011\end{pmatrix}_{245}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1011\\1111\end{pmatrix}_{246}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1111\\1000\end{pmatrix}_{247}\begin{pmatrix}1100\\1000\\1111\\1100\end{pmatrix}_{248}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1111\\1110\end{pmatrix}_{249}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1000\\1111\\1101\end{pmatrix}_{250}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1111\\1011\end{pmatrix}_{251}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1000\\1111\\1111\end{pmatrix}_{252}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{253}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{254}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{255}\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1101\end{pmatrix}_{256}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1011\end{pmatrix}_{257}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\1000\\1111\end{pmatrix}_{258}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{259}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}^{*}_{260}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}^{**}_{261}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1101\end{pmatrix}^{*}_{262}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1011\end{pmatrix}^{*}_{263}\begin{pmatrix}1100\\1100\\1100\\1111\end{pmatrix}^{*}_{264}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{265}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}^{*}_{266}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{267}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1101\end{pmatrix}^{*}_{268}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1011\end{pmatrix}_{269}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1110\\1111\end{pmatrix}^{*}_{270}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1101\\1000\end{pmatrix}_{271}\begin{pmatrix}1100\\1100\\1101\\1100\end{pmatrix}^{**}_{272}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1101\\1110\end{pmatrix}^{**}_{273}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\1101\\1101\end{pmatrix}^{*}_{274}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1101\\1011\end{pmatrix}_{275}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1101\\1111\end{pmatrix}^{**}_{276}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1011\\1000\end{pmatrix}_{277}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1011\\1100\end{pmatrix}_{278}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1011\\1110\end{pmatrix}_{279}\begin{pmatrix}1100\\1100\\1011\\1101\end{pmatrix}_{280}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1011\\1011\end{pmatrix}_{281}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1100\\1011\\1111\end{pmatrix}_{282}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1111\\1000\end{pmatrix}_{283}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1111\\1100\end{pmatrix}^{*}_{284}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1111\\1110\end{pmatrix}^{**}_{285}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1111\\1101\end{pmatrix}^{*}_{286}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1111\\1011\end{pmatrix}_{287}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1100\\1111\\1111\end{pmatrix}^{*}_{288}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{289}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{290}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{291}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1101\end{pmatrix}_{292}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1011\end{pmatrix}_{293}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1000\\1111\end{pmatrix}_{294}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{295}\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{296}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}^{**}_{297}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1101\end{pmatrix}^{**}_{298}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1011\end{pmatrix}_{299}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1100\\1111\end{pmatrix}^{**}_{300}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{301}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{302}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{303}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1101\end{pmatrix}_{304}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1011\end{pmatrix}_{305}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1110\\1111\end{pmatrix}^{**}_{306}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1101\\1000\end{pmatrix}_{307}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1101\\1100\end{pmatrix}^{**}_{308}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1101\\1110\end{pmatrix}_{309}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{310}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1101\\1011\end{pmatrix}_{311}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1101\\1111\end{pmatrix}_{312}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1011\\1000\end{pmatrix}_{313}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1011\\1100\end{pmatrix}_{314}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1011\\1110\end{pmatrix}_{315}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1011\\1101\end{pmatrix}_{316}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1011\\1011\end{pmatrix}_{317}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1011\\1111\end{pmatrix}_{318}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1111\\1000\end{pmatrix}_{319}\begin{pmatrix}1100\\1110\\1111\\1100\end{pmatrix}^{**}_{320}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1111\\1110\end{pmatrix}^{**}_{321}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1110\\1111\\1101\end{pmatrix}_{322}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1111\\1011\end{pmatrix}_{323}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1110\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{324}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1000\\1000\end{pmatrix}_{325}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1000\\1100\end{pmatrix}_{326}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1000\\1110\end{pmatrix}_{327}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1000\\1101\end{pmatrix}_{328}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1000\\1011\end{pmatrix}_{329}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1101\\1000\\1111\end{pmatrix}_{330}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1100\\1000\end{pmatrix}_{331}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{332}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1100\\1110\end{pmatrix}^{**}_{333}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1100\\1101\end{pmatrix}^{**}_{334}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1100\\1011\end{pmatrix}_{335}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1100\\1111\end{pmatrix}^{**}_{336}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1110\\1000\end{pmatrix}_{337}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1101\\1110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{338}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{339}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1110\\1101\end{pmatrix}_{340}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1110\\1011\end{pmatrix}_{341}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1110\\1111\end{pmatrix}_{342}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1101\\1000\end{pmatrix}_{343}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1101\\1100\end{pmatrix}^{**}_{344}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1101\\1110\end{pmatrix}_{345}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1101\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{346}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1101\\1011\end{pmatrix}_{347}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1101\\1111\end{pmatrix}^{**}_{348}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1011\\1000\end{pmatrix}_{349}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1011\\1100\end{pmatrix}_{350}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1011\\1110\end{pmatrix}_{351}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1011\\1101\end{pmatrix}_{352}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1011\\1011\end{pmatrix}_{353}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1101\\1011\\1111\end{pmatrix}_{354}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1111\\1000\end{pmatrix}_{355}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1111\\1100\end{pmatrix}^{**}_{356}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1111\\1110\end{pmatrix}_{357}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1111\\1101\end{pmatrix}^{**}_{358}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1101\\1111\\1011\end{pmatrix}_{359}\begin{pmatrix}1100\\1101\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{360}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1000\\1000\end{pmatrix}_{361}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1011\\1000\\1100\end{pmatrix}_{362}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1000\\1110\end{pmatrix}_{363}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1000\\1101\end{pmatrix}_{364}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1000\\1011\end{pmatrix}_{365}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1000\\1111\end{pmatrix}_{366}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1100\\1000\end{pmatrix}_{367}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1100\\1100\end{pmatrix}_{368}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1100\\1110\end{pmatrix}_{369}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1011\\1100\\1101\end{pmatrix}_{370}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1100\\1011\end{pmatrix}_{371}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1100\\1111\end{pmatrix}_{372}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1110\\1000\end{pmatrix}_{373}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1110\\1100\end{pmatrix}_{374}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1110\\1110\end{pmatrix}_{375}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1110\\1101\end{pmatrix}_{376}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1110\\1011\end{pmatrix}_{377}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1011\\1110\\1111\end{pmatrix}_{378}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1101\\1000\end{pmatrix}_{379}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1101\\1100\end{pmatrix}_{380}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1101\\1110\end{pmatrix}_{381}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1101\\1101\end{pmatrix}_{382}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1101\\1011\end{pmatrix}_{383}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1101\\1111\end{pmatrix}_{384}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1011\\1000\end{pmatrix}_{385}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1011\\1011\\1100\end{pmatrix}_{386}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1011\\1110\end{pmatrix}_{387}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1011\\1101\end{pmatrix}_{388}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1011\\1011\end{pmatrix}_{389}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1011\\1111\end{pmatrix}_{390}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1111\\1000\end{pmatrix}_{391}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1111\\1100\end{pmatrix}_{392}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1111\\1110\end{pmatrix}_{393}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1011\\1111\\1101\end{pmatrix}_{394}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1111\\1011\end{pmatrix}_{395}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1011\\1111\\1111\end{pmatrix}_{396}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1000\\1000\end{pmatrix}_{397}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1000\\1100\end{pmatrix}_{398}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1000\\1110\end{pmatrix}_{399}\begin{pmatrix}1100\\1111\\1000\\1101\end{pmatrix}_{400}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1000\\1011\end{pmatrix}_{401}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1111\\1000\\1111\end{pmatrix}_{402}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1100\\1000\end{pmatrix}_{403}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1100\\1100\end{pmatrix}^{**}_{404}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1100\\1110\end{pmatrix}^{**}_{405}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1100\\1101\end{pmatrix}^{**}_{406}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1100\\1011\end{pmatrix}_{407}\begin{pmatrix}1100\\1111\\1100\\1111\end{pmatrix}^{**}_{408}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1110\\1000\end{pmatrix}_{409}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1111\\1110\\1100\end{pmatrix}^{**}_{410}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{411}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1110\\1101\end{pmatrix}_{412}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1110\\1011\end{pmatrix}_{413}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1110\\1111\end{pmatrix}_{414}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1101\\1000\end{pmatrix}_{415}\begin{pmatrix}1100\\1111\\1101\\1100\end{pmatrix}^{**}_{416}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1101\\1110\end{pmatrix}_{417}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1111\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{418}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1101\\1011\end{pmatrix}_{419}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1101\\1111\end{pmatrix}_{420}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1011\\1000\end{pmatrix}_{421}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1011\\1100\end{pmatrix}_{422}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1011\\1110\end{pmatrix}_{423}\begin{pmatrix}1100\\1111\\1011\\1101\end{pmatrix}_{424}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1011\\1011\end{pmatrix}_{425}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1100\\1111\\1011\\1111\end{pmatrix}_{426}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1111\\1000\end{pmatrix}_{427}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1111\\1100\end{pmatrix}^{**}_{428}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1111\\1110\end{pmatrix}_{429}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1111\\1101\end{pmatrix}_{430}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1111\\1011\end{pmatrix}_{431}\wedge\begin{pmatrix}1100\\1111\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{432}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{433}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{434}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{435}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1101\end{pmatrix}_{436}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1011\end{pmatrix}_{437}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1000\\1111\end{pmatrix}_{438}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{439}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{440}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{441}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1101\end{pmatrix}_{442}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1011\end{pmatrix}_{443}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1100\\1111\end{pmatrix}_{444}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{445}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{446}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{447}\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1101\end{pmatrix}_{448}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1011\end{pmatrix}_{449}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1110\\1111\end{pmatrix}_{450}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1101\\1000\end{pmatrix}_{451}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1101\\1100\end{pmatrix}_{452}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1101\\1110\end{pmatrix}_{453}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1101\\1101\end{pmatrix}_{454}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1101\\1011\end{pmatrix}_{455}\begin{pmatrix}1110\\1000\\1101\\1111\end{pmatrix}_{456}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1011\\1000\end{pmatrix}_{457}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1011\\1100\end{pmatrix}_{458}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1011\\1110\end{pmatrix}_{459}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1011\\1101\end{pmatrix}_{460}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1011\\1011\end{pmatrix}_{461}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1011\\1111\end{pmatrix}_{462}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1111\\1000\end{pmatrix}_{463}\begin{pmatrix}1110\\1000\\1111\\1100\end{pmatrix}_{464}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1111\\1110\end{pmatrix}_{465}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1000\\1111\\1101\end{pmatrix}_{466}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1111\\1011\end{pmatrix}_{467}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1000\\1111\\1111\end{pmatrix}_{468}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{469}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{470}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{471}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1101\end{pmatrix}_{472}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1011\end{pmatrix}_{473}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1000\\1111\end{pmatrix}_{474}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{475}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{476}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{477}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1101\end{pmatrix}_{478}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1011\end{pmatrix}_{479}\begin{pmatrix}1110\\1100\\1100\\1111\end{pmatrix}_{480}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{481}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{482}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{483}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1101\end{pmatrix}_{484}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1011\end{pmatrix}_{485}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1110\\1111\end{pmatrix}_{486}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1101\\1000\end{pmatrix}_{487}\begin{pmatrix}1110\\1100\\1101\\1100\end{pmatrix}_{488}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1101\\1110\end{pmatrix}_{489}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1101\\1101\end{pmatrix}_{490}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1101\\1011\end{pmatrix}_{491}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1101\\1111\end{pmatrix}_{492}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1011\\1000\end{pmatrix}_{493}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1011\\1100\end{pmatrix}_{494}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1011\\1110\end{pmatrix}_{495}\begin{pmatrix}1110\\1100\\1011\\1101\end{pmatrix}_{496}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1011\\1011\end{pmatrix}_{497}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1100\\1011\\1111\end{pmatrix}_{498}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1111\\1000\end{pmatrix}_{499}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1111\\1100\end{pmatrix}_{500}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1111\\1110\end{pmatrix}_{501}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1111\\1101\end{pmatrix}_{502}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1111\\1011\end{pmatrix}_{503}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1100\\1111\\1111\end{pmatrix}_{504}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{505}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{506}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{507}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1101\end{pmatrix}_{508}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1011\end{pmatrix}_{509}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1000\\1111\end{pmatrix}_{510}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{511}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{512}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{513}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1101\end{pmatrix}_{514} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1011\end{pmatrix}_{515} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1100\\1111\end{pmatrix}_{516} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{517} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{518} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}^{*}_{519} \begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1101\end{pmatrix}_{520} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1011\end{pmatrix}_{521} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1110\\1111\end{pmatrix}^{*}_{522} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1101\\1000\end{pmatrix}_{523} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1101\\1100\end{pmatrix}_{524} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1101\\1110\end{pmatrix}_{525} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1101\\1101\end{pmatrix}_{526} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1101\\1011\end{pmatrix}_{527} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1101\\1111\end{pmatrix}_{528} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1011\\1000\end{pmatrix}_{529} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1011\\1100\end{pmatrix}_{530} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1011\\1110\end{pmatrix}_{531} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1011\\1101\end{pmatrix}_{532} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1011\\1011\end{pmatrix}_{533} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1011\\1111\end{pmatrix}_{534} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1111\\1000\end{pmatrix}_{535} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1111\\1100\end{pmatrix}_{536} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1111\\1110\end{pmatrix}^{**}_{537} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1110\\1111\\1101\end{pmatrix}_{538} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1111\\1011\end{pmatrix}_{539} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1110\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{540} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1000\\1000\end{pmatrix}_{541} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1000\\1100\end{pmatrix}_{542} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1000\\1110\end{pmatrix}_{543} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1000\\1101\end{pmatrix}_{544} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1000\\1011\end{pmatrix}_{545} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1101\\1000\\1111\end{pmatrix}_{546} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1100\\1000\end{pmatrix}_{547} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1100\\1100\end{pmatrix}_{548} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1100\\1110\end{pmatrix}_{549} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1100\\1101\end{pmatrix}_{550} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1100\\1011\end{pmatrix}_{551} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1100\\1111\end{pmatrix}_{552} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1110\\1000\end{pmatrix}_{553} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1101\\1110\\1100\end{pmatrix}_{554} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1110\\1110\end{pmatrix}_{555} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1110\\1101\end{pmatrix}_{556} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1110\\1011\end{pmatrix}_{557} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1110\\1111\end{pmatrix}_{558} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1101\\1000\end{pmatrix}_{559} \begin{pmatrix}1110\\1101\\1101\\1100\end{pmatrix}_{560} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1101\\1110\end{pmatrix}_{561} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1101\\1101\\1101\end{pmatrix}_{562} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1101\\1011\end{pmatrix}_{563} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1101\\1111\end{pmatrix}_{564} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1011\\1000\end{pmatrix}_{565} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1011\\1100\end{pmatrix}_{566} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1011\\1110\end{pmatrix}_{567} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1011\\1101\end{pmatrix}_{568} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1011\\1011\end{pmatrix}_{569} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1101\\1011\\1111\end{pmatrix}_{570} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1111\\1000\end{pmatrix}_{571} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1111\\1100\end{pmatrix}_{572} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1111\\1110\end{pmatrix}_{573} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1111\\1101\end{pmatrix}_{574} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1111\\1011\end{pmatrix}_{575} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1101\\1111\\1111\end{pmatrix}_{576} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1000\\1000\end{pmatrix}_{577} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1011\\1000\\1100\end{pmatrix}_{578} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1000\\1110\end{pmatrix}_{579} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1000\\1101\end{pmatrix}_{580} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1000\\1011\end{pmatrix}_{581} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1000\\1111\end{pmatrix}_{582} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1100\\1000\end{pmatrix}_{583} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1100\\1100\end{pmatrix}_{584} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1100\\1110\end{pmatrix}_{585} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1011\\1100\\1101\end{pmatrix}_{586} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1100\\1011\end{pmatrix}_{587} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1100\\1111\end{pmatrix}_{588} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1110\\1000\end{pmatrix}_{589} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1110\\1100\end{pmatrix}_{590} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1110\\1110\end{pmatrix}_{591} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1110\\1101\end{pmatrix}_{592} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1110\\1011\end{pmatrix}_{593} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1011\\1110\\1111\end{pmatrix}_{594} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1101\\1000\end{pmatrix}_{595} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1101\\1100\end{pmatrix}_{596} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1101\\1110\end{pmatrix}_{597} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1101\\1101\end{pmatrix}_{598} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1101\\1011\end{pmatrix}_{599} \begin{pmatrix}1110\\1011\\1101\\1111\end{pmatrix}_{600} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1011\\1000\end{pmatrix}_{601} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1011\\1011\\1100\end{pmatrix}_{602} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1011\\1110\end{pmatrix}_{603} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1011\\1101\end{pmatrix}_{604} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1011\\1011\end{pmatrix}_{605} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1011\\1111\end{pmatrix}_{606} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1111\\1000\end{pmatrix}_{607} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1111\\1100\end{pmatrix}_{608} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1111\\1110\end{pmatrix}_{609} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1011\\1111\\1101\end{pmatrix}_{610} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1111\\1011\end{pmatrix}_{611} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1011\\1111\\1111\end{pmatrix}_{612} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1000\\1000\end{pmatrix}_{613} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1000\\1100\end{pmatrix}_{614} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1000\\1110\end{pmatrix}_{615} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1000\\1101\end{pmatrix}_{616} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1000\\1011\end{pmatrix}_{617} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1111\\1000\\1111\end{pmatrix}_{618} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1100\\1000\end{pmatrix}_{619} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1100\\1100\end{pmatrix}_{620} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1100\\1110\end{pmatrix}_{621} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1100\\1101\end{pmatrix}_{622} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1100\\1011\end{pmatrix}_{623} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1100\\1111\end{pmatrix}_{624} \wedge \begin{pmatrix}1110\\1111\\1110\\1000\end{pmatrix}_{625} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1111\\1110\\1100\end{pmatrix}_{626}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1110\\1110\end{pmatrix}^{**}_{627}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1110\\1101\end{pmatrix}_{628}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1110\\1011\end{pmatrix}_{629}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1110\\1111\end{pmatrix}^{**}_{630}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1101\\1000\end{pmatrix}_{631}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1101\\1100\end{pmatrix}_{632}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1101\\1110\end{pmatrix}_{633}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1111\\1101\\1101\end{pmatrix}_{634}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1101\\1011\end{pmatrix}_{635}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1101\\1111\end{pmatrix}_{636}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1011\\1000\end{pmatrix}_{637}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1011\\1100\end{pmatrix}_{638}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1011\\1110\end{pmatrix}_{639}\begin{pmatrix}1110\\1111\\1011\\1101\end{pmatrix}_{640}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1011\\1011\end{pmatrix}_{641}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1110\\1111\\1011\\1111\end{pmatrix}_{642}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1111\\1000\end{pmatrix}_{643}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1111\\1100\end{pmatrix}_{644}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1111\\1110\end{pmatrix}^{**}_{645}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1111\\1101\end{pmatrix}_{646}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1111\\1011\end{pmatrix}_{647}\wedge\begin{pmatrix}1110\\1111\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{648}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{649}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{650}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{651}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1000\\1101\end{pmatrix}_{652}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1000\\1011\end{pmatrix}_{653}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1000\\1111\end{pmatrix}_{654}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{655}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{656}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{657}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1000\\1100\\1101\end{pmatrix}_{658}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1100\\1011\end{pmatrix}_{659}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1100\\1111\end{pmatrix}_{660}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{661}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{662}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{663}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1110\\1101\end{pmatrix}_{664}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1110\\1011\end{pmatrix}_{665}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1000\\1110\\1111\end{pmatrix}_{666}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1101\\1000\end{pmatrix}_{667}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1101\\1100\end{pmatrix}_{668}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1101\\1110\end{pmatrix}_{669}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1101\\1101\end{pmatrix}_{670}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1101\\1011\end{pmatrix}_{671}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1101\\1111\end{pmatrix}_{672}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1011\\1000\end{pmatrix}_{673}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1000\\1011\\1100\end{pmatrix}_{674}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1011\\1110\end{pmatrix}_{675}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1011\\1101\end{pmatrix}_{676}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1011\\1011\end{pmatrix}_{677}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1011\\1111\end{pmatrix}_{678}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1111\\1000\end{pmatrix}_{679}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1111\\1100\end{pmatrix}_{680}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1111\\1110\end{pmatrix}_{681}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1000\\1111\\1101\end{pmatrix}_{682}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1111\\1011\end{pmatrix}_{683}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1000\\1111\\1111\end{pmatrix}_{684}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{685}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{686}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{687}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1000\\1101\end{pmatrix}_{688}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1000\\1011\end{pmatrix}_{689}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1100\\1000\\1111\end{pmatrix}_{690}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{691}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{692}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{693}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1100\\1101\end{pmatrix}_{694}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1100\\1011\end{pmatrix}_{695}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1100\\1111\end{pmatrix}_{696}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{697}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{698}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{699}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1110\\1101\end{pmatrix}_{700}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1110\\1011\end{pmatrix}_{701}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1110\\1111\end{pmatrix}_{702}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1101\\1000\end{pmatrix}_{703}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1101\\1100\end{pmatrix}_{704}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1101\\1110\end{pmatrix}_{705}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1100\\1101\\1101\end{pmatrix}_{706}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1101\\1011\end{pmatrix}_{707}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1101\\1111\end{pmatrix}_{708}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1011\\1000\end{pmatrix}_{709}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1011\\1100\end{pmatrix}_{710}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1011\\1110\end{pmatrix}_{711}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1011\\1101\end{pmatrix}_{712}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1011\\1011\end{pmatrix}_{713}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1100\\1011\\1111\end{pmatrix}_{714}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1111\\1000\end{pmatrix}_{715}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1111\\1100\end{pmatrix}_{716}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1111\\1110\end{pmatrix}_{717}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1111\\1101\end{pmatrix}_{718}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1111\\1011\end{pmatrix}_{719}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1100\\1111\\1111\end{pmatrix}_{720}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{721}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{722}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{723}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1000\\1101\end{pmatrix}_{724}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1000\\1011\end{pmatrix}_{725}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1000\\1111\end{pmatrix}_{726}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{727}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{728}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{729}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1110\\1100\\1101\end{pmatrix}_{730}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1100\\1011\end{pmatrix}_{731}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1100\\1111\end{pmatrix}_{732}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{733}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{734}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{735}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1110\\1101\end{pmatrix}_{736}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1110\\1011\end{pmatrix}_{737}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1110\\1110\\1111\end{pmatrix}_{738}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1101\\1000\end{pmatrix}_{739}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1101\\1100\end{pmatrix}_{740}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1101\\1110\end{pmatrix}_{741}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1101\\1101\end{pmatrix}_{742}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1101\\1011\end{pmatrix}_{743}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1101\\1111\end{pmatrix}_{744}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1011\\1000\end{pmatrix}_{745}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1110\\1011\\1100\end{pmatrix}_{746}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1011\\1110\end{pmatrix}_{747}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1011\\1101\end{pmatrix}_{748}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1011\\1011\end{pmatrix}_{749}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1011\\1111\end{pmatrix}_{750}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1111\\1000\end{pmatrix}_{751}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1111\\1100\end{pmatrix}_{752}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1111\\1110\end{pmatrix}_{753}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1110\\1111\\1101\end{pmatrix}_{754}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1111\\1011\end{pmatrix}_{755}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1110\\1111\\1111\end{pmatrix}_{756}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1000\\1000\end{pmatrix}_{757}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1000\\1100\end{pmatrix}_{758}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1000\\1110\end{pmatrix}_{759}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1000\\1101\end{pmatrix}_{760}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1000\\1011\end{pmatrix}_{761}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1101\\1000\\1111\end{pmatrix}_{762}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1100\\1000\end{pmatrix}_{763}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1100\\1100\end{pmatrix}_{764}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1100\\1110\end{pmatrix}_{765}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1100\\1101\end{pmatrix}_{766}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1100\\1011\end{pmatrix}_{767}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1100\\1111\end{pmatrix}_{768}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1110\\1000\end{pmatrix}_{769}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1101\\1110\\1100\end{pmatrix}_{770}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1110\\1110\end{pmatrix}_{771}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1110\\1101\end{pmatrix}_{772}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1110\\1011\end{pmatrix}_{773}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1110\\1111\end{pmatrix}_{774}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1101\\1000\end{pmatrix}_{775}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1101\\1100\end{pmatrix}_{776}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1101\\1110\end{pmatrix}_{777}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1101\\1101\\1101\end{pmatrix}^{*}_{778}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1101\\1011\end{pmatrix}_{779}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1101\\1111\end{pmatrix}^{**}_{780}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1011\\1000\end{pmatrix}_{781}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1011\\1100\end{pmatrix}_{782}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1011\\1110\end{pmatrix}_{783}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1011\\1101\end{pmatrix}_{784}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1011\\1011\end{pmatrix}_{785}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1011\\1111\end{pmatrix}_{786}$$

$$\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1111\\1000\end{pmatrix}_{787}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1111\\1100\end{pmatrix}_{788}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1111\\1110\end{pmatrix}_{789}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1111\\1101\end{pmatrix}^{*}_{790}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1111\\1011\end{pmatrix}_{791}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1101\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{792}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1000\\1000\end{pmatrix}_{793}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1000\\1100\end{pmatrix}_{794}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1011\\1000\\1110\end{pmatrix}_{795}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1000\\1101\end{pmatrix}_{796}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1000\\1011\end{pmatrix}_{797}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1000\\1111\end{pmatrix}_{798}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1100\\1000\end{pmatrix}_{799}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1100\\1100\end{pmatrix}_{800}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1100\\1110\end{pmatrix}_{801}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1100\\1101\end{pmatrix}_{802}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1011\\1100\\1011\end{pmatrix}_{803}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1100\\1111\end{pmatrix}_{804}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1110\\1000\end{pmatrix}_{805}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1110\\1100\end{pmatrix}_{806}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1110\\1110\end{pmatrix}_{807}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1110\\1101\end{pmatrix}_{808}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1110\\1011\end{pmatrix}_{809}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1110\\1111\end{pmatrix}_{810}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1011\\1101\\1000\end{pmatrix}_{811}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1101\\1100\end{pmatrix}_{812}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1101\\1110\end{pmatrix}_{813}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1101\\1101\end{pmatrix}_{814}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1101\\1011\end{pmatrix}_{815}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1101\\1111\end{pmatrix}_{816}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1011\\1000\end{pmatrix}_{817}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1011\\1100\end{pmatrix}_{818}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1011\\1011\\1110\end{pmatrix}_{819}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1011\\1101\end{pmatrix}_{820}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1011\\1011\end{pmatrix}_{821}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1011\\1111\end{pmatrix}_{822}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1111\\1000\end{pmatrix}_{823}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1111\\1100\end{pmatrix}_{824}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1111\\1110\end{pmatrix}_{825}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1111\\1101\end{pmatrix}_{826}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1011\\1111\\1011\end{pmatrix}_{827}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1011\\1111\\1111\end{pmatrix}_{828}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1000\\1000\end{pmatrix}_{829}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1000\\1100\end{pmatrix}_{830}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1000\\1110\end{pmatrix}_{831}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1000\\1101\end{pmatrix}_{832}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1000\\1011\end{pmatrix}_{833}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1000\\1111\end{pmatrix}_{834}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1111\\1100\\1000\end{pmatrix}_{835}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1100\\1100\end{pmatrix}_{836}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1100\\1110\end{pmatrix}_{837}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1100\\1101\end{pmatrix}_{838}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1100\\1011\end{pmatrix}_{839}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1100\\1111\end{pmatrix}_{840}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1110\\1000\end{pmatrix}_{841}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1110\\1100\end{pmatrix}_{842}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1111\\1110\\1110\end{pmatrix}_{843}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1110\\1101\end{pmatrix}_{844}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1110\\1011\end{pmatrix}_{845}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1110\\1111\end{pmatrix}_{846}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1101\\1000\end{pmatrix}_{847}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1101\\1100\end{pmatrix}_{848}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1101\\1110\end{pmatrix}_{849}\wedge\begin{pmatrix}1101\\1111\\1101\\1101\end{pmatrix}^{**}_{850}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1111\\1101\\1011\end{pmatrix}_{851} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1101\\1111\end{pmatrix}_{852}^{**} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1011\\1000\end{pmatrix}_{853} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1011\\1100\end{pmatrix}_{854} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1011\\1110\end{pmatrix}_{855} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1011\\1101\end{pmatrix}_{856} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1011\\1011\end{pmatrix}_{857} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1011\\1111\end{pmatrix}_{858} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1101\\1111\\1111\\1000\end{pmatrix}_{859} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1111\\1100\end{pmatrix}_{860} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1111\\1110\end{pmatrix}_{861} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1111\\1101\end{pmatrix}_{862}^{**} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1111\\1011\end{pmatrix}_{863} \wedge \begin{pmatrix}1101\\1111\\1111\\1111\end{pmatrix}_{864}^{**} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{865} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{866} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{867} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1000\\1101\end{pmatrix}_{868} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1000\\1011\end{pmatrix}_{869} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1000\\1111\end{pmatrix}_{870} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{871} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{872} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{873} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1100\\1101\end{pmatrix}_{874} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1000\\1100\\1011\end{pmatrix}_{875} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1100\\1111\end{pmatrix}_{876} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{877} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{878} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{879} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1110\\1101\end{pmatrix}_{880} \begin{pmatrix}1011\\1000\\1110\\1011\end{pmatrix}_{881} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1110\\1111\end{pmatrix}_{882} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1000\\1101\\1000\end{pmatrix}_{883} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1101\\1100\end{pmatrix}_{884} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1101\\1110\end{pmatrix}_{885} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1101\\1101\end{pmatrix}_{886} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1101\\1011\end{pmatrix}_{887} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1101\\1111\end{pmatrix}_{888} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1011\\1000\end{pmatrix}_{889} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1011\\1100\end{pmatrix}_{890} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1000\\1011\\1110\end{pmatrix}_{891} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1011\\1101\end{pmatrix}_{892} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1011\\1011\end{pmatrix}_{893} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1011\\1111\end{pmatrix}_{894} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1111\\1000\end{pmatrix}_{895} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1111\\1100\end{pmatrix}_{896} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1111\\1110\end{pmatrix}_{897} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1111\\1101\end{pmatrix}_{898} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1000\\1111\\1011\end{pmatrix}_{899} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1000\\1111\\1111\end{pmatrix}_{900} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{901} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{902} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{903} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1000\\1101\end{pmatrix}_{904} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1000\\1011\end{pmatrix}_{905} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1000\\1111\end{pmatrix}_{906} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{907} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{908} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{909} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1100\\1101\end{pmatrix}_{910} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1100\\1011\end{pmatrix}_{911} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1100\\1111\end{pmatrix}_{912} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{913} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{914} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{915} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1110\\1101\end{pmatrix}_{916} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1110\\1011\end{pmatrix}_{917} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1110\\1111\end{pmatrix}_{918} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1101\\1000\end{pmatrix}_{919} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1101\\1100\end{pmatrix}_{920} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1101\\1110\end{pmatrix}_{921} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1101\\1101\end{pmatrix}_{922} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1100\\1101\\1011\end{pmatrix}_{923} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1101\\1111\end{pmatrix}_{924} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1011\\1000\end{pmatrix}_{925} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1011\\1100\end{pmatrix}_{926} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1011\\1110\end{pmatrix}_{927} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1011\\1101\end{pmatrix}_{928} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1011\\1011\end{pmatrix}_{929} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1011\\1111\end{pmatrix}_{930} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1100\\1111\\1000\end{pmatrix}_{931} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1111\\1100\end{pmatrix}_{932} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1111\\1110\end{pmatrix}_{933} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1111\\1101\end{pmatrix}_{934} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1111\\1011\end{pmatrix}_{935} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1100\\1111\\1111\end{pmatrix}_{936} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{937} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{938} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{939} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1000\\1101\end{pmatrix}_{940} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1000\\1011\end{pmatrix}_{941} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1000\\1111\end{pmatrix}_{942} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{943} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{944} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{945} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1100\\1101\end{pmatrix}_{946} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1110\\1100\\1011\end{pmatrix}_{947} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1100\\1111\end{pmatrix}_{948} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{949} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{950} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{951} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1110\\1101\end{pmatrix}_{952} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1110\\1011\end{pmatrix}_{953} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1110\\1111\end{pmatrix}_{954} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1110\\1101\\1000\end{pmatrix}_{955} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1101\\1100\end{pmatrix}_{956} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1101\\1110\end{pmatrix}_{957} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1101\\1101\end{pmatrix}_{958} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1101\\1011\end{pmatrix}_{959} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1101\\1111\end{pmatrix}_{960} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1011\\1000\end{pmatrix}_{961} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1011\\1100\end{pmatrix}_{962} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1110\\1011\\1110\end{pmatrix}_{963} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1011\\1101\end{pmatrix}_{964} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1011\\1011\end{pmatrix}_{965} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1011\\1111\end{pmatrix}_{966} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1111\\1000\end{pmatrix}_{967} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1111\\1100\end{pmatrix}_{968} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1111\\1110\end{pmatrix}_{969} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1111\\1101\end{pmatrix}_{970} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1110\\1111\\1011\end{pmatrix}_{971} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1110\\1111\\1111\end{pmatrix}_{972} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1000\\1000\end{pmatrix}_{973} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1000\\1100\end{pmatrix}_{974} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1000\\1110\end{pmatrix}_{975} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1000\\1101\end{pmatrix}_{976} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1000\\1011\end{pmatrix}_{977} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1000\\1111\end{pmatrix}_{978} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1101\\1100\\1000\end{pmatrix}_{979} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1100\\1100\end{pmatrix}_{980} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1100\\1110\end{pmatrix}_{981} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1100\\1101\end{pmatrix}_{982} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1100\\1011\end{pmatrix}_{983} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1100\\1111\end{pmatrix}_{984} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1110\\1000\end{pmatrix}_{985} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1110\\1100\end{pmatrix}_{986} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1101\\1110\\1110\end{pmatrix}_{987} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1110\\1101\end{pmatrix}_{988} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1110\\1011\end{pmatrix}_{989} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1110\\1111\end{pmatrix}_{990} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1101\\1000\end{pmatrix}_{991} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1101\\1100\end{pmatrix}_{992} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1101\\1110\end{pmatrix}_{993} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1101\\1101\end{pmatrix}_{994} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1101\\1101\\1011\end{pmatrix}_{995} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1101\\1111\end{pmatrix}_{996} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1011\\1000\end{pmatrix}_{997} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1011\\1100\end{pmatrix}_{998} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1011\\1110\end{pmatrix}_{999} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1000} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1001} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1002} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1101\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1003} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1004} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1005} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1006} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1007} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1101\\1111\\1111\end{pmatrix}_{1008} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1009} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1010} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1011\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1011} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1012} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1013} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1014} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1015} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1016} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1017} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1018} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1011\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1019} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1020} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1021} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1022} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1023} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1024} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1025} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1026} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1011\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1027} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1028} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1029} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1030} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1031} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1032} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1033} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1034} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1011\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1035} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1036} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1011\\1011\end{pmatrix}^{*}_{1037} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1011\\1111\end{pmatrix}^{**}_{1038} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1039} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1040} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1041} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1042} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1011\\1111\\1011\end{pmatrix}^{**}_{1043} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1011\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{1044} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1045} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1046} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1047} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1048} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1049} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1050} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1111\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1051} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1052} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1053} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1054} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1055} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1056} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1057} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1058} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1111\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1059} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1060} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1061} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1062} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1063} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1064} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1065} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1066} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1111\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1067} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1068} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1069} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1070} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1071} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1072} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1011\\1011\end{pmatrix}^{**}_{1073} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1011\\1111\end{pmatrix}^{**}_{1074} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1011\\1111\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1075} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1076} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1077} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1078} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1111\\1011\end{pmatrix}^{**}_{1079} \wedge \begin{pmatrix}1011\\1111\\1111\\1111\end{pmatrix}^{**}_{1080} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1081} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1082} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1000\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1083} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1084} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1085} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1086} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1087} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1088} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1089} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1090} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1000\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1091} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1092} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1093} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1094} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1095} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1096} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1097} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1098} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1000\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1099} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1100} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1101} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1102} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1103} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1104} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1105} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1106} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1000\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1107} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1108} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1109} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1110} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1111} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1112} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1113} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1114} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1000\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1115} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1000\\1111\\1111\end{pmatrix}_{1116} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1117} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1118} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1119} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1120} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1121} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1122} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1100\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1123} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1124} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1125} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1126} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1127} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1128} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1129} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1130} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1100\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1131} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1132} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1133} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1134} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1135} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1136} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1137} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1138} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1100\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1139} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1140} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1141} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1142} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1143} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1144} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1145} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1146} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1100\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1147} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1148} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1149} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1150} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1151} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1100\\1111\\1111\end{pmatrix}_{1152} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1153} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1154} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1110\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1155} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1156} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1157} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1158} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1159} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1160} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1161} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1162} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1110\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1163} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1164} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1165} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1166} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1167} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1168} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1169} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1170} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1110\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1171} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1172} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1173} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1174} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1175} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1176} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1177} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1178} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1110\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1179} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1180} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1181} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1182} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1183} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1184} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1185} \wedge \begin{pmatrix}1111\\1110\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1186} \wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1110\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1187}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1110\\1111\\1111\end{pmatrix}_{1188}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1189}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1190}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1191}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1192}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1193}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1194}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1101\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1195}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1196}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1197}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1198}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1199}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1200}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1201}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1202}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1101\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1203}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1204}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1205}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1206}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1207}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1208}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1209}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1210}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1101\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1211}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1212}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1213}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1214}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1215}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1216}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1217}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1218}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1101\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1219}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1220}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1221}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1222}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1223}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1101\\1111\\1111\end{pmatrix}_{1224}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1225}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1226}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1011\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1227}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1228}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1229}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1230}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1231}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1232}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1233}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1234}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1011\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1235}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1236}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1237}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1238}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1239}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1240}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1241}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1242}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1011\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1243}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1244}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1245}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1246}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1247}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1248}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1249}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1250}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1011\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1251}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1252}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1253}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1254}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1255}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1256}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1257}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1258}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1011\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1259}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1011\\1111\\1111\end{pmatrix}_{1260}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1000\\1000\end{pmatrix}_{1261}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1000\\1100\end{pmatrix}_{1262}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1000\\1110\end{pmatrix}_{1263}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1000\\1101\end{pmatrix}_{1264}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1000\\1011\end{pmatrix}_{1265}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1000\\1111\end{pmatrix}_{1266}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1111\\1100\\1000\end{pmatrix}_{1267}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1100\\1100\end{pmatrix}_{1268}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1100\\1110\end{pmatrix}_{1269}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1100\\1101\end{pmatrix}_{1270}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1100\\1011\end{pmatrix}_{1271}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1100\\1111\end{pmatrix}_{1272}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1110\\1000\end{pmatrix}_{1273}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1110\\1100\end{pmatrix}_{1274}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1111\\1110\\1110\end{pmatrix}_{1275}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1110\\1101\end{pmatrix}_{1276}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1110\\1011\end{pmatrix}_{1277}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1110\\1111\end{pmatrix}_{1278}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1101\\1000\end{pmatrix}_{1279}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1101\\1100\end{pmatrix}_{1280}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1101\\1110\end{pmatrix}_{1281}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1101\\1101\end{pmatrix}_{1282}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1111\\1101\\1011\end{pmatrix}_{1283}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1101\\1111\end{pmatrix}_{1284}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1011\\1000\end{pmatrix}_{1285}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1011\\1100\end{pmatrix}_{1286}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1011\\1110\end{pmatrix}_{1287}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1011\\1101\end{pmatrix}_{1288}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1011\\1011\end{pmatrix}_{1289}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1011\\1111\end{pmatrix}_{1290}\wedge$$

$$\begin{pmatrix}1111\\1111\\1111\\1000\end{pmatrix}_{1291}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1111\\1100\end{pmatrix}_{1292}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1111\\1110\end{pmatrix}_{1293}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1111\\1101\end{pmatrix}_{1294}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1111\\1011\end{pmatrix}_{1295}\wedge\begin{pmatrix}1111\\1111\\1111\\1111\end{pmatrix}^{*}_{1296}.$$

Всего идемпотентных элементов 77.Они имеют следующие номера: 1,4,5,6,13,15,16,18,22,25,29,31,34,36,37,38,40,41,42,43,44,46,48,49,50,51,52,54,58,61,65,67,68, 70,72,73,75,77,78,85,87,90,109,112,127,130,133,139,142,149,150,169,173,181,185,186,205,209, 211,216,260,262,264,266,267,268,270,274,284,286,288,519,522,778,790,1037,1296.

Всего регулярных элементов 209.Они имеют номера:
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35, 36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,48,49,50,51,52,54,55,56,57,58,60,61,65,67,68,69,70,72,73,74,75, 76,77,78,79,80,85,87,90,91,94,97,101,103,105,108,109,110,111,112,113,114,115,116,121,123,127, 130,132,133,137,139,142,144,145,146,147,148,149,150,151,152,157,159,163,166,169,173,174,175 179,180,181,182,183,184,185,186,187,188,193,195,199,202,205,209,211,216,260,261,262,264,266 ,267,268,270,272,273,274,276,284,285,286,288,296,297,298,300,302,303,306,308,310,320,321, 324,332,333,334,336,338,339,344,346,348,356,358,360,404,405,406,408,410,411,416,418,428,432 ,519,522,537,540,627,630,645,648,778,780,790,792,850,852,862,864,1037,1038,1043,1044,1073, 1074,1079,1080,1296.

В действительности, по предположению $Z_5=\{1\}, Z_4=\{1,2\}, Z_3=\{1,3,4\}, Z_2=\{1,2,4\}, Z_1=\{1,2,3\}, \breve{D}=X=\{1,2,3,4\}$. Число идемпотентных элементов в данном случае можно находить по установленной формуле 2.5 следуя которому

$$\begin{aligned}|I| &= 6+(2^1-1)\cdot 2^2+(2^2-1)\cdot 2^1+(2^2-1)\cdot 2^1+(2^2-1)\cdot 2^1+(2^3-1)\cdot 2^0+(2^1-1)\cdot 2^1+(2^1-1)\cdot 2^1+\\ &+(2^2-1)\cdot 2^0+(2^1-1)\cdot 2^0+(2^1-1)\cdot 2^0+(2^1-1)\cdot 2^0+(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^1+(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^1+\\ &+(2^1-1)\cdot(3^2-2^2)\cdot 3^0+(2^2-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+(2^2-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+(2^2-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+(2^1-1)\cdot\\ &\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot(4^1-3^1)\cdot 4^0+(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot(4^1-3^1)\cdot 4^0+\\ &+(2^1-1)\cdot(2^1-1)\cdot 4^0+(2^2-1)\cdot(2^1-1)\cdot 4^0+(2^1-1)\cdot(2^1-1)\cdot 4^0+2\cdot(2^1-1)\cdot(2^1-1)\cdot 4^0+(2^1-1)\cdot\\ &\cdot(3^1-2^1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 5^0=6+4+6+6+6+7+2+2+3+1+1+1+3+3+5+3+3+3+1+1+1+1+1+\\ &+3+1+2+1=77\end{aligned}$$

Число регулярных элементов в данном случае можно находить по установленной формуле 2.5 следуя которому

$$\begin{aligned}|R| &= 6+11\cdot(2^3-2^0)+8\cdot(2^1-1)\cdot(3^2-2^2)\cdot 3^0+8\cdot(2^2-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+8\cdot(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+\\ &+8\cdot(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 3^0+2\cdot(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot(4^1-3^1)\cdot 4^0+2\cdot(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot(4^1-3^1)4^0+\\ &+10\cdot(2^1-1)\cdot(2^2-1)\cdot 4^0+10\cdot(2^1-1)\cdot(2^1-1)\cdot 4^0+2\cdot(2^1-1)\cdot(3^1-2^1)\cdot(3^1-2^1)\cdot 5^0=6+77+\\ &+40+24+8+8+2+2+30+10+2=209\end{aligned}$$

Совпадение практических расчетов теоретически полученными числами подтверждают справедливость наших результатов.

Л и т е р а т у р а

1. Avaliani Z., Complete semigroups of binary relations, defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Geor. Acad. Sci., 164, № 2, 2001, 223-224.
2. Avaliani Z., The idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Geor. Acad. Sci., 164, № 3, 2001, 440-442.
3. Avaliani Z., Regular elements of complete semigroups of binary relations, defined by semilattices of the class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Geor. Acad. Sci., 165, № 2, 2002, 254-255.
4. Avaliani Z., Number of regular elements of complete semigroups of binary relations, defined by semilattices of class $\Sigma_1(X,5)$. Bull. Geor. Acad. Sci., 165, № 3, 2002, 472-473.
5. Avaliani Z., Maximal subgroups of a class of semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 103.

6. Avaliani Z., Sh. Makaradze, Maximal subgroups of some classes of semigroups of binary relations. Geor. Math. J., 11, № 2, 2004, 203-207.
7. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений. Теория полугрупп и ее приложения. Сарат. ун-т., 1, 1965, 3-178.
8. Givradze O., Some properties of semigroup $B_x(D)$, defined by semilattice of class $\sum_1(X,4)$. Bull. Geor. Acad. Sci., 167, № 1, 2003, 43-46.
9. Givradze O., Some properties of the semigroup $B_x(D)$, determined by a semilattice of class $\sum_1(X,4)$. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 117-120.
10. Девадзе Х. М., Порождающие множества некоторых подполугрупп полугруппы всех бинарных отношений в конечном множестве. Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, 387, 1968, 92-100.
11. Девадзе Х. М., Порождающие множества полугруппы всех бинарных отношений в конечном множестве. Докл. АН. БССР. 12, №9, 1968, 765- 768.
12. Девадзе Х. М., Соотношения, определяющие упорядоченность в упорядоченной полугруппе всех бинарных отношений в конечном множестве. Изв. высших учебных заведений, Матем. 70, №3, 1968, 28-36.
13. Диасамидзе Я. И. Об односторонных нулях подмножеств полугруппы бинарных отношений. Укр. мат. ж., 42, №5, 1990, 600-604.
14. Диасамидзе Я. И., Об односторонных единицах подмножеств полугруппы бинарных отношений. Укр.мат.ж., 42, №8, 1990, 1026-1031.
15. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., An abstrakt characteristics of semigroups of the class $\Sigma(X,2)$. Bull. Georg. Acad. Sci., 159, № 2, 1999, 198-200.
16. Диасамидзе Я.И. Полные полугруппы бинарных отношений. Батуми. Изд. Аджара, 2000, 1-176.
17. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Right zeros of complete semigroups of binary relations. Bull. Georg. Acad. Sci., 159, № 3. 1999, 376-378.
18. Diasamidze Ya., Divisibility of elements in complete semigroups of binary relations. Bull. Georg. Acad. Sci., 164, № 2, 2001, 225-227.
19. Diasamidze Ya., Right units and idempotent elements of complete semigroups of binary relations. Bull. Georg. Acad. Sci., 164, № 3, 2001, 443-446.
20. Diasamidze Ya., Maximal submonoids and maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. III съезд математиков Грузии, Тбилиси, 2001.
21. Diasamidze Ya., Complete semigroups of binary relations with unique right units. Bull. Georg. Acad. Sci., 165, № 1, 2001, 18-21.
22. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relation, defined by complete $X-$semilattises generated by sets of nonchainwise pairs. Bull. Georg. Acad. Sci., 165, № 3, 2002, 477-479.
23. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relation, defined by complete $X-$semilattises generated by sets of pairwise nonintersecting sets. Bull. Georg. Acad. Sci., 166, № 1, 2002, 23-26.
24. Diasamidze Ya., Right units of complete semigroups of binary relation, defined by complete $X-$semilattises generated by chains. Bull. Georg. Acad. Sci., 166, № 2, 2002,
25. Diasamidze Ya., To the theory of the binary relations semigroups. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 128, 2002, 1-15.
26. Diasamidze Ya., Right units in the binary relation semigroups. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 128, 2002, 17-36.
27. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Complete semigroups of binary relations, defined by elementary and nodal $X-$semilattices of unions. Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publ. Cor., New York , V. 111, № 1, 2002, 3171-3226.

28. Diasamidze Ya., Diasamidze Il., Semigroups $B_X(D)$, defined by finite $X-$chains. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 107-108.
29. Diasamidze Ya., Irreducible elements of the semigroup. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 109-110.
30. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Maximal subgroups of complete semigroups of binary relations. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 21-38.
31. Диасамидзе Я. И., Сирабидзе Т, Полные полугруппы бинарных отношений, определенные трёхэлементными $X-$цепями. Итоги науки и техники. Серия современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 98, 2002.
32. Diasamidze Ya., Sirabidze T., Complete semigroups of binary relations, defined by 3 elemented $X-$chains. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 117, № 4, 2003, 4320-4350.
33. Diasamidze Ya., Complete semigroups of binary relations. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 117, № 4, 2003, 4271-4319.
34. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Fartenadze G., Givradze O., On finite $X-$ semilattices of unions. Bull. Georg. Acad. Sci., 169, № 2. 2004, 263-266.
35. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Fartenadze G., Givradze O., Description of $\Sigma(X,m)$ Class (m-finite number). Bull. Georg. Acad. Sci., 169, № 3. 2004, 463-465.
36. Diasamidze Il., Semigroups $B_X(D)$, defined by finite $X-$chains. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 105-106.
37. Diasamidze Ya., Makharadze Sh., Fartenadze G., Givradze O., On finite $X-$ semilattices of unions. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York (to apear).
38. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И., Классы полных полугрупп бинарных отношений. Международная алгебраическая конференция, Тезисы докладов, М., 2004, 44-45.
39. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И., Полные полугруппы бинарных отношений. Батуми , 2006, 1-755 .
40. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И., Диасамидзе И. Я. Идемпотентные и регулярные элементы полных полугрупп бинарных отношений, Международная алгебраическая конференция, Тезисы докладов, Екатеринебург, 2005.
41. Диасамидзе Я. И., Махарадзе Ш. И., Г. Ж. Партенадзе, О. Т. Гиврадзе. О конечных $X-$полурешетках объединений. Современная математика и её приложения. т. 27, 2005, 46-94.
42. Зарецкий К. А., Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений. Л., Уч. зап .ЛГПИ им. А.И.Герцена. 183, 1958, 251-263.
43. Зарецкий К. А., Абстрактная характеристика полугруппы всех рефлективных бинарных отношений. Л., Уч. зап. ЛГПИ им. А.И.Герцена, 1958. 265-269.
44. Зарецкий К. А., Регулярные элементы полугруппы бинарных отношений. Успехи матем. Наук, 17, №3, 1962, 177-179.
45. Зарецкий К. А. Полугруппа бинарных отношений. Матем. сб., 61, №3, 1963, 291-305.
46. Zareckii K. A., Maximal Submonoids of the Semigroup of Binary Relations. Semigroup Forum, 9, №5, 1974. 196-208.
47. Зарецкий К. А., Максимальные регулярные подполугруппы полугруппы бинарных отношений. Л., Ассоциативн. Действия, 1983. 40-46.
48. Зарецкий К. А., Решетки срезов бинарных отношений. Саратов. Ун-т., Упорядоч. множества и решетки, 9, 1986, 24-33.
49. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. М., Мир, 1972.
50. Clifford A. H., Union and symmetry preserving endomorphisms of the semigroup of all binary relations on a set. Czechoslovak Math. J., 20, №95, 1970, 303-314.
51. Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, М., Мир, 1970.

52. Ляпин Е. С., Полугруппы, М., Физматгиз, 1960.
53. McAlister D. B., Homomorphisms of semigroups of binary relations. Semigroup Forum, 5, №2, 1851971, -188.
54. Makharadze Sh., On the theory of binary relation semigroup. Bull. Georg. Acad. Sci., 159, №2. 1999, 205-208.
55. Makharadze Sh., Maximal idempotent semigroups in the binary relation semigroup. Bull. Georg. Acad. Sci., 159, № 3, 1999, 373-375.
56. Makharadze Sh., Remarkc on the theory of binary relation semigroups. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 121, 1999. 109-116.
57. Makharadze Sh., Semigroups of binary relations with right units. International Congress of Mathematicans. Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. Beijing 2002, 27.
58. Makharadze Sh., Diasamidze Il., Characteristic sets of complete X -semilatice of the union. Bull. Geor. Acad. Sci., 165, № 3. 2002, 474-476.
59. Makharadze Sh., Maximal subgroups of some classes of complete semigroups of binary relations. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 143-144.
60. Makharadze Sh., Regular elements of the semigroups $B_x(D)$, determined by the cenetalized elementary $X-$semilattices. Proc. of A. Razmadze Math. Inst. 131, 2003, 145-147.
61. Makharadze Sh. I., Semigroups of binary relations with right units. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 117, № 4, 2003, 4351-4392.
62. Makharadze Sh. I., Diasamidze I. Ya., One classes of complete semigroups of binary relations. J. of Math. Sciences, Plenum Publ. Cor., New York, 117, № 4, 2003, 4393-4424.
63. Makharadze Sh., Bakuridze A., Complete semigroups of binary relations, defined by semilattices of the class $\Sigma_2\left(X,5\right)$. Bull. Geor. Acad. Sci., 170, № 3. 2004, 462-465.
64. Norris Fugene, The structure of an idempotent relation. Semigroup Forum, 18, 1979, 319-329.
65. Tamura T., Operations on binary relations and their applications. Bull. Amer. Math. Soc., 70, №1, 1964, 113-120.
66. Plemons R. J., M. T. West, On the semigroup of binary relations. Pacific Journal of Mathematics, 35, №3, 1970, 743-753.
67. Plemons R.J., B.M. Schein, Groups of binary relations. Semigroup Forum, 1, 1970, 267-271.
68. Шайн Б.М., Представление полугрупп при помощи бинарных отношений. Докл. АН СССР, 142, №4, 1962, 808-811.
69. Schein B. M., A construction for idtmpotent binary relations. Proc. Japan Acad., 46, №3, 1970, 246-247.
70. Шайн Б. М., О некоторых классах полугрупп бинарных отношений. Сибирск. матем. ж., 6, №3, 1965, 616-635.
71. Шайн Б. М., Полугруппы прямоугольных бинарных отношений, Докл. АН СССР165, №5, 1965, 1011-1014.
72. Schein B. M., Semigroups of tolerance relations. Diserete Math., 64, №2, 3, 1987, 253-262.
73. Chase Karen, New semigroups of binary relations. Semigroup Forum, 18, №1, 1979, 79-82.
74. Schwarz Štefan, On idempotent binary relations on a finite set. Czechoslovak Mathematikal J., 20, №95, 1970, 696-702.
75. Schwarz Štefan, On the semigroup of binary relations on a finite set. Czechoslovak Mathematikal J., 20, №95, 1970, 631-679.