ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ზაზა მელიქიძე

მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ორთონორმირებული ვეივლეტ-სისტემების ბაზისობისა და ნული ზომის სიმრავლეებზე განშლადობის ზოგიერთი საკითხი

01.01.01 მათემატიკური ანალიზი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი, 2006 წ.

ნაშრომი შესრულებულია ივანე ჯავახიშვილის
სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თენგიზ კოპალიანი ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

ოფიციალური ოპონენტები: ომარ ძაგნიძე ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
ვასილ ბუღაძე ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2006 წლის 27 ოქტომბერს 14 საათზე ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის PŽ.M.01.06. 6 სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე. მისამართი: თბილისი, უნივერსიტეტის ქუჩა, 2, აუდიტორია №202.

დისერტაციის გაცნობა შესაძლებელია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ცენტრალურ სამეცნიერო ბიბლიოთეკაში.

ავტორეფერატი დაიგზავნა 2006 წლის 27 სექტემბერს.

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული
მდივანი, ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა კანდიდატი გ. ბარელაძე

დისერტაციის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა ვეივლეტთა თეორია გასული საუკუნის 80-იან წლებში ჩამოყალიბდა, როგორც ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულება და მან დიდი გამოყენება ჰპოვა, როგორც თეორიულ მათემატიკაში (ფუნქციონალური ანალიზი, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები, ფრაქტალური სიმრავლეები და ა.შ.), ასევე გამოყენებით მათემატიკაში (სიგნალთა დამუშავება, ინფორმაციის შენახვა, მათემატიკური ფიზიკა და ა.შ.). აღნიშნული თეორია სულ უფრო და უფრო პოპულარული ხდება მეცნიერების სხვადასხვა დარგის სპეციალისტებისათვის (ეკონომიკა, ფიზიკა, ბიოლოგია და ა.შ.). ამ თემატიკაზე სხვადასხვა ცნობილ ჟურნალებში დაიბეჭდა ათასზე მეტი სტატია და წიგნის სახით გამოიცა რამოდენიმე მონოგრაფია ცნობილი მათემატიკოსების ავტორობით.

ნაშრომის მიზანი ნაშრომის მიზანს შეადგენს იმ ფუნქციის აგება, რომლის გადამრავლებით არასრული (ან სრული) ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაზე მიიღება ბაზისი ბანახის L_Q^p სივრცეში, სადაც Q ფრაქტალური სიმრავლეა. აღვნიშნოთ, რომ ასეთი ფუნქციის აგება ტოლფასია ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემის ბაზისობასთან $L_Q^p(\psi(x)dx)$ წონიან სივრცეში. ასევე ჩვენი მიზანი იყო დაგვედგინა რამდენად «ცუდი» შეიძლებოდა ყოფილიყო ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემა ნული ზომის სიმრავლეზე წერტილობრივი განშლადობის თვალსაზრისით.

კვლევის ზოგადი მეთოდიკა სადისერტაციო ნაშრომის კვლევის საგანია ფუნქციათა სისტემის ბაზისობის და ნული ზომის სიმრავლეებზე განშლადობის დადგენა, შესაბამისად თავს იჩენს ბაზისობასთან დაკავშირებული ტექნიკური სირთულეები: ფუნქციათა სისტემის ჩაკეტილობის, ტოტალურობის, მინიმალურობის და ფურიე-ჰაარის ტიპის მწკრივების კერძო ჯამების შემოსაზღვრულობის დამტკიცება. კვლევის მეთოდიკა დაფუძნებულია ფუნქციათა სისტემის ამ თვისებებთან დაკავშირებულ აქამდე ცნობილ თუ ნაკლებად ცნობილ თეორემებზე და უტოლობების დამტკიცების დაგროვილ გამოცდილებაზე.

მეცნიერული სიახლე. დისერტაციაში ყველა შედეგი ახალია და მიღებულია ავტორის მიერ.

1. აგებულია ფუნქცია, რომლის გადამრავლებით არასრული ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაზე მიიღება L_Q^p, $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისი.
2. დადგენილია ყველა ბორელის μ ზომა, რომლისთვისაც ჰაარის ტიპის ვეივლეტ სისტემა ბაზისია $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეში.
3. წინასწარ დასახელებული ნული ზომის სიმრავლისთვის აგებულია ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარის ტიპის მწკრივი განშლადია ამ სიმრავლეზე.

<u>მეცნიერული და პრაქტიკული ღირებულება.</u> დისერტაციაში მიღებული შედეგები თეორიული ხასიათისაა და ისინი შეიძლება გამოყენებულ იქნას შემდგომი კვლევისას.

<u>ნაშრომის აპრობაცია.</u> დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის კათედრასთან არსებულ სამეცნიერო სემინარზე (კათედრის გამგე საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი ლევან ჟიჟიაშვილი), საქართველოს ახალგაზრდა მეცნიერთა II რესპუბლიკურ კონფერენციაზე (ქ. ქუთაისი, 8-10 ოქტომბერი, 2004 წ.), პროფესორ არჩილ ხარაძის 110 წლისთავისადმი მიძღვნილ საერთაშორისო კონფერენციაზე (31 აგვისტო-5 სექტემბერი, 2005 წ., თბილისი, საქართველო).

<u>ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა.</u> დისერტაცია შედგება შესავლის, სამი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისაგან, რომელიც შეიცავს 16 დასახელებას. ნაშრომის საერთო მოცულობა კომპიუტერით დაკაბადონებული 76 გვერდია.

დისერტაციის შინაარსი

შესავალში მიმოხილულია დისერტაციაში გადაწყვეტილი ამოცანების დასმის ისტორია ასევე მოცემულია თითოეულ თავში მიღებული ძირითადი შედეგები და ნაჩვენებია მათი კავშირი აქამდე სხვადასხვა ავტორების მიერ მიღებულ შედეგებთან.

დისერტაციის პირველ თავში დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობა ფუნქციისათვის, რომლის გადამრავლებით წინასწარ მოცემული არასრული ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაზე მიიღება ჩაკეტილი და მინიმალური სისტემა L_Q^p , $1 \le p < \infty$, სივრცეში, აგებულია ფუნქცია, რომლის გადამრავლებით წინასწარ მოცემული არასრული ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაზე მიიღება L_Q^p , $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისი, აგებულია ფუნქცია, რომლის გადამრავლებით არასრული ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაზე მიიღება L_Q^p , $1 \le p < \infty$, სივრცის ჩაკეტილი და მინიმალური სისტემა, რომელიც არ არის ამავე სივრცის ბაზისი.

ამ თავის პირველ პარაგრაფში შემოღებულია ზოგიერთი საჭირო განმარტება და განსაზღვრულია მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემა, სახელდობრ: ვთქვათ, $Q \subset R^n$ ზომადი სიმრავლეა. L_Q^p , $1 \le p < \infty$, სიმბოლოთი აღნიშნულია ბანახის სივრცე ყველა ისეთი f ფუნქციისა, რომლისთვისაც

$$\|f\|_{L_Q^p} = \left(\int_Q |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty .$$

გარდა ამისა

$$\|f\|_{L_Q^\infty} = \operatorname*{supess}_{x\in Q}|f(x)|.$$

ასევე $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $\psi(x)\ge 0$, $1\le p<\infty$, სიმბოლოთი აღნიშნულია ბანახის სივრცე ყველა ისეთი f ფუნქციისა, რომლისთვისაც

$$\|f\|_{L_Q^p(\psi(x)dx)} = \left(\int_Q |f(x)|^p \psi(x)dx\right)^{1/p} < \infty,$$

და

$$\|f\|_{L_Q^\infty(\psi(x)dx)} = \operatorname*{supess}_{x\in Q}|f(x)|.$$

Z^n -ით აღნიშნულია n განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლე, რომელთა კომპონენტები მთელი რიცხვებია.

$A: R^n \to R^n$ არის წრფივი გარდაქმნა ისეთი, რომ $A(Z^n)\subset Z^n$ და A -ს ყველა (კომპლექსური) მახასიათებელი რიცხვები აბსოლუტური სიდიდით მეტია 1-ზე.

ვთქვათ, $|\det A| = \delta$. A -ს ზემოთ აღნიშნული თვისებებიდან მარტივად გამომდინარეობს, რომ $\delta \ge 2$ ნატურალური რიცხვია.

Z^n განხილულია როგორც ადიციური ჯგუფი. $A(Z^n)$ არის მისი ნორმალური ქვეჯგუფი, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია Z^n დავშალოთ $A(Z^n)$-ის კოსიმრავლეებად. ცხადია ისინი ქმნიან ჯგუფს. Z^n -ის ქვესიმრავლეს, რომელიც შეიცავს $A(Z^n)$-ის კოსიმრავლეებიდან თითო ელემენტს ეწოდება ნაშთთა სრული სისტემა მოდულით A. ცნობილია, რომ ([1] წინადადება 5.5) $A(Z^n)$-ის განსხვავებული კოსიმრავლეების რაოდენობა უდრის $|\det A| = \delta$.

ფიქსირებული ნაშთთა სრული სისტემისთვის $S = \{k_1,\dots,k_\delta\}$ განსაზღვრულია სიმრავლე

$$\overline{Q} = \left\{ x\in R^n : x = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} s_j, \ \text{სადაც } s_j \in S \right\}. \tag{1}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ (1) ტოლობაში მოყვანილი მწკრივი ყოველთვის აბსოლუტურად კრებადია.

გამოირკვა, რომ ზოგიერთი ნაშთთა სრული სისტემისთვის სიმრავლე $\overline{Q}$ შეიძლება იყოს ძალზე რთული. ასეთი ტიპის სიმრავლეებს ეწოდებათ ფრაქტალები.

$S = \{k_1,\dots,k_\delta\}$ ნაშთთა სრული სისტემისთვის განსაზღვრულია ვექტორები:

$k_0^{(1)} = \theta$, (სადაც θ ნულოვანი ვექტორია)

$k_{n+1}^{(\delta(m-1)+i)} = k_n^{(m)} + A^{-(n+1)}(k_i)$, $n = 0,1,\dots \quad m = 1,\dots,\delta^n \quad i = 1,\dots,\delta$

და სიმრავლეები

$$\overline{Q}_n^{(m)} = A^{-n}(Q) + k_n^{(m)} \quad n = 0,1,\dots \quad m = 1,\dots,\delta^n.$$

ვთქვათ $\overline{Q}$ არის (1) ტოლობით განსაზღვრული სიმრავლე. ცნობილია, რომ ([1] წინადადება 5.19)

ა) $\overline{Q}$ არის R^n-ის კომპაქტური ქვესიმრავლე;

ბ) $\overline{Q}=\bigcup_{m=1}^{\delta^n}\overline{Q}_n^{(m)}$, $n=0,1,...$;

გ) $\bigcup_{\gamma\in Z^n}(\overline{Q}+\gamma)\equiv R^n$;

დ) $\overline{Q}$ შეიცავს ღია სიმრავლეს;

ვთქვათ გარდა ამისა $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ ნაშთთა სრული სისტემა შერჩეულია ისე, რომ სრულდება პირობა:

ე) $\mu(\overline{Q})=1$.

თუ $\overline{Q}$ სიმრავლეს მოვაშორებთ თავის საზღვარს (მისი ზომა ნულის ტოლია), მივიღებთ ღია სიმრავლეს, რომელიც აღნიშნულია Q სიმბოლოთი. ასევე თითოეული $\overline{Q}_n^{(m)}$, $\left(n=0,1,...;\ m=1,...,\delta^n\right)$ სიმრავლისათვის, თუ მას მოვაშორებთ თავის საზღვარს (ზომა აქაც ნულის ტოლია) მიღებული ღია სიმრავლე აღნიშნულია $Q_n^{(m)}$ სიმბოლოთი. $Q_n^{(m)}$ სიმრავლეებს ეწოდებათ ჰაარის სიმრავლეები.

შემოღებულია $A_\delta=(\alpha_{i,j})$, $i=0,...,\delta-1$ $j=1,...,\delta$ მატრიცა, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები: $\alpha_{0,j}=1$, $j=1,...,\delta$ და $\sum_{j=1}^{\delta}\alpha_{n,j}\alpha_{m,j}=\delta\delta_{n,m}$, სადაც $\delta_{n,m}$ არის კრონეკერის სიმბოლო და განსაზღვრულია ფუნქციათა სისტემა:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1_Q(x),$$

$$\chi_n^{(m)}(x)=\begin{cases}\delta^{n/2}\alpha_{i,j}, & \text{როცა } x\in Q_{n+1}^{(\ell\delta+j)}\\ 0, \text{ როცა } x\in Q\setminus\overline{Q}_n^{(\ell+1)}, & n=0,1,...\ \ m=1,...,\delta^n(\delta-1)\ \ j=1,...\delta,\end{cases}$$

სადაც $i=(m-1)\mathrm{mod}(\delta-1)+1$ და $\ell=\left[\frac{m-1}{\delta-1}\right]$ ($[a]$ არის a ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი). იგი გადანომრილია შემდეგი სახით:

$$\chi_1(x)=\chi_0^{(0)}(x) \text{ და როცა } n=\delta^k+j \quad \chi_n(x)=\chi_k^{(j)}(x). \qquad (2)$$

$\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემის მნიშვნელობა წყვეტის წერტილებზე (ცხადია მათი ზომა ნულის ტოლია) ჩვენთვის არ იყო საინტერესო და ისინი აქ არ განვმარტეთ.

(2) ტოლობით განსაზღვრულ სისტემას ეწოდება ჰაარის ტიპის და იგი ორთონორმირებული ბაზისია ყველა L_Q^p, $1\le p<\infty$, სივრცეში.

ზომადი $E\subset\overline{Q}$ სიმრავლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა $CE\equiv\overline{Q}\setminus E$.

მეორე პარაგრაფში მოყვანილია დამხმარე დებულებები, რომლებიც საჭიროა ძირითადი შედეგის მისაღებად. კერძოდ კ. კაზარიანის თეორემის საფუძველზე ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემებისათვის დამტკიცებულია ერთი მნიშვნელოვანი ლემა.

ლემა 1.2.1. ვთქვათ, $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (2) ტოლობით განსაზღვრული სისტემაა. შემდეგი ორი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ სისტემა $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$, სადაც $1\le N\le\delta-1$ და $M(x)\in L_Q^p$, $1\le p<\infty$, იყოს ჩაკეტილი და მინიმალური L_Q^p სივრცეში:

ა) არსებობს ჰაარის სიმრავლეთა N ცალი განსხვავებული მიმდევრობა

$$Q_1^{(i_{1,1})} \supset \ldots \supset Q_k^{(i_{1,k})} \supset \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$Q_1^{(i_{N,1})} \supset \ldots \supset Q_k^{(i_{N,k})} \supset \ldots$$

სადაც ყოველი $i_{n,k}$ $(1 \le n < N; k = 1,2,\ldots)$ არის ერთ-ერთი შემდეგი რიცხვებიდან $1,\ldots,\delta^k$ რომელთათვისაც

$$Q_1^{(i_{n,1})} \bigcap Q_1^{(i_{m,1})} = \varnothing, \text{ როცა } n \ne m \quad (1 \le n, m \le N)$$

და

$$[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_k^{(i_{n,k})}}, \ [M(x)]^{-1} \in L^q_{C\bigcup\limits_{n=1}^{N} Q_k^{(i_{n,k})}} \quad (1 \le n \le N; k = 1,2,\ldots),$$

სადაც $p^{-1} + q^{-1} = 1$;

ბ)

$$V_1 = (\ 1;\ldots;1\ )$$

$$V_2 = (\alpha_{1,i_{1,1}};\ldots;\alpha_{1,i_{N,1}})$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$V_N = (\alpha_{N-1,i_{1,1}};\ldots;\alpha_{N-1,i_{N,1}})$$

ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია (ბაზისია R^N სივრცეში).

მესამე პარაგრაფში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (2) ტოლობით განსაზღვრული სისტემაა (ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $J_1 = (\alpha_{0,1};\ldots;\alpha_{0,N});\ldots;J_N = (\alpha_{N-1,1};\ldots;\alpha_{N-1,N})$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემაა. თუ ეს ასე არ არის $\chi_1;\ldots;\chi_\delta$ ფუნქციების ნუმერაციის შეცვლით ამის მიღწევა შესაძლებელია). მაშინ $\{M_N(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა, სადაც $(1 \le N \le \delta - 1)$ და

$$M_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^{k-1}}, \text{ როცა } x \in Q_k^{((n-1)\delta^{k-1}+i)} (k = 2,3,\ldots;1 \le n \le N; 2 \le i \le \delta) \\ 1, \quad \text{როცა } \ x \in Q_1^{(i)} \quad (N+1 \le i \le \delta) \end{cases}$$

ბაზისია ყველა L_Q^p, $(1 \le p < \infty)$ სივრცეში.

თეორემა 1.3.2. ვთქვათ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (2) ტოლობით განსაზღვრული სისტემაა და N ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. არსებობს ზომადი, შემოსაზღვრული $M(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა ბაზისია ყველა L_Q^p, $1 \le p < \infty$, სივრცეში.

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ, $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (2) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციათა სისტემაა. არსებობს ზომადი შემოსაზღვრული $M(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ ჩაკეტილი და მინიმალურია L_Q^p , $1 \le p < \infty$, სივრცეში, მაგრამ არ არის L_Q^p, $1 \le p < \infty$ სივრცის ბაზისი.

თეორემა 1.3.4. (2) ტოლობით განსაზვრულ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას შეიძლება ჩამოვაშოროთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ დარჩენილი ნაწილის რომელიღაც ზომად, შემოსაზღვრულ ფუნქციაზე გადამრავლების შედეგად მივიღოთ ბაზისი ყველა L_Q^p, $1 \le p < \infty$, სივრცეში.

რადგან $\{f_n(x)\}$ ფუნქციათა სისტემის $M(x)$ ფუნქციით მულტიპლიკაციური გასრულება L_Q^p სივრცის ბაზისამდე ექვივალენტურია $\{f_n(x)\}$ ფუნქციათა სისტემის ბაზისობასთან წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$ სივრცეში $\left(\psi(x)=|M(x)|^p\right)$, ამიტომ აქედან მიღებულია შედეგები.

შედეგი 1.3.1. თუ ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას მოვაცილებთ ფუნქციების სასრულ რაოდენობას, მაშინ არსებობს $\psi(x)>0$ ფუნქცია ისეთი, რომ სისტემის დარჩენილი ნაწილი ბაზისია წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$, სივრცეში.

შედეგი 1.3.2. ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას შეიძლება მოვაცილოთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ სისტემის დარჩენილი ნაწილი იყოს ბაზისი წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$, სივრცეში, რომელიღაც $\psi(x)>0$ ფუნქციისათვის.

დისერტაციის მეორე თავში დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობა, L_Q^p სივრცეში მინიმალური და L_Q^1-ს მიმართ ტოტალური, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემისთვის, რომ იყოს $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$, ($\psi(x)\in L_Q^1$, $\psi(x)>0$ თ. ყ. Q-ზე) სივრცის ფართო აზრით ბაზისი. ასევე დადგენილია აუცილებელი და საკმარისი პირობები ბორელის μ ზომაზე, რომლისთვისაც $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ბაზისია $L_Q^p(d\mu)$, $1\le p<\infty$, სივრცეში.

პირველ პარაგრაფში შემოღებულია ზოგიერთი საჭირო განმარტება და განსაზღვრულია მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემის მნიშვნელობები წყვეტის წერტილებში საშუალო არითმეტიკულის გამოყენებით.

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია დამხმარე თეორემა:

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\in L_Q^{\infty}$ მინიმალურია ამავე სივრცეში და ტოტალურია L_Q^1-ს მიმართ, $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ იყოს მისი შეუღლებული სისტემა. შემდეგი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$, ($\psi(x)\in L_Q^1$, $\psi(x)>0$ თითქმის ყველგან Q-ზე) სივრცის ფართო აზრით ბაზისი: ყველა ნატურალური n რიცხვისთვის

$$[\psi_n(x)]^p[\psi(x)]^{-1}\in L_Q^{1/(p-1)}.$$

მესამე პარაგრაფში კ. კაზარიანის ორი ლემის და 2.2.1 თეორემის დახმარებით დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2.3.1. შემდეგი პირობები (ა)-(დ) არიან აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(d\mu)$, $1\le p<\infty$, სივრცის ბაზისი:

(ა) არსებობს ლებეგის აზრით ინტეგრებადი $\psi(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $d\mu(x)=\psi(x)dx$;

(ბ) $\psi(x)>0$ თითქმის ყველგან Q-ზე;

(გ) $[\psi(x)]^{-1}\in L_Q^{1/(p-1)}$;

(დ) არსებობს $M_p > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ ყოველი ჰაარის სიმრავლისათვის $Q_n^{(m)}$, $n = 1,2,\dots$, $m = 1,\dots,\delta^n$, გვაქვს

$$\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|} \int_{Q_n^{(m)}} \psi(x) dx \right) \left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|} \int_{Q_n^{(m)}} [\psi(x)]^{-1/(p-1)} dx \right)^{p-1} \le M_p .$$

თეორემა 2.3.2. იმისათვის, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისი აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს 2.3.1. თეორემის (ა), (ბ) და (გ) პირობები.

ასევე დამტკიცებულია

ლემა 2.3.1. ვთქვათ μ აკმაყოფილებს 2.3.1. თეორემის ა), (ბ) და (გ) პირობებს, მაშინ ყოველი $N \ge 1$-სთვის $(N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta - 1)))$ გვაქვს

$$S_N(f, x) = \frac{1}{|\Gamma_n|} \int_{\Gamma_n} f(t) dt \text{, როცა } x \in \Gamma_n,\ 1 \le n \le N$$

მესამე თავში ყოველი ნული ზომის სიმრავლისთვის $\overline{Q}$ -დან აგებულია შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ ($|\det A| = 2$ შეზღუდვით) განშლადია აღნიშნულ სიმრავლეზე.

ამ თავის პირველ პარაგრაფში შემოღებულია რამოდენიმე მოსახერხებელი აღნიშვნა და დამტკიცებულია შემდეგი ლემები:

ლემა 3.1.1. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $M \in \overline{Q}$ წერტილისათვის არსებობს ჰაარის $\overline{Q}_k^{(i)}$ სიმრავლე ისეთი, რომ

$$M \in \overline{Q}_k^{(i)} \subset B(M, \varepsilon),$$

სადაც

$$B(M, \varepsilon) = \left\{ x : \|M - x\|_{R^n} < \varepsilon \right\}.$$

ლემა 3.1.2. ნებისმიერი $H \subset \overline{Q}$ ღია სიმრავლისათვის არსებობს $\left\{ \overline{Q}_{m_n}^{(i_n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$Q_{m_r}^{(i_r)} \cap Q_{m_s}^{(i_s)} = \varnothing \ \ (r \ne s) \text{ და } H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_{m_n}^{(i_n)} .$$

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია ძირითადი თეორემა:

თეორემა 3.2.1. ნებისმიერი $E \subset \overline{Q}$, $\mu(E) = 0$ სიმრავლისათვის, არსებობს შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ განშლადია E სიმრავლეზე.

citirebuli literatura

1. Wojtaszczyk P., *A mathematical introduction to wavelets*, Cambridge University Press, 1977.
2. Казарян К.С., *О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в* L^p, $1 \le p < \infty$, Analysis Math., 4, No.1,1978, pp. 37-52.
3. Казарян К.С., *О мультипликативном дополнении некоторых систем,* Изв. А Н Арм. ССР, №4, 1978, С. 315-351.
4. Kazarian K.S., *On bases and unconditional bases in the spaces* $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Studia Math., 71, No.3, 1982, pp. 227-249.
5. Бугадзе В.М., *О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль,* Мат. Заметки, 51, 1992, C 20-26.
6. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 1, 2004, pp. 30-32.
7. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized wavelet systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 172, No. 1, 2005, pp. 17-19.
8. Melikidze Z., *On bases of multidimentional Haar type wavelet systems in the spaces* $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Proc. A. Razmadze Math. Inst., v. 139, 2005, pp. 61-70.
9. Melikidze Z., *On noncorvergence of Fourier-Haar type series of bounded functions on the sets with measure zero,* Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 3, 2004, pp. 450-451.
10. Haar A., *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systeme*, Math. Ann., 69, 1910, pp. 331-371.
11. Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, М. :Наука, 1984.
12. Braun Ben-Ami, *On the multiplicative completion of certain basic sequences in* L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 499-508.
13. Бабенко К.Н., *О сопряженних функциях*, Докл. АН СССР, 12, №2, 1948, С 157-160.
14. Банах С., *Курс функцiонального аналiзу*, Киiв, Радянська школа, 1948.
15. Кранцберг А.С., *О базисах системы Хаара в весовом пространстве,* Моск. Инст. Электр. Мат., 24, 1971.
16. Hunt R., Muckenhoupt B. and Wheeden R., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform,* Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 227-251.

დისერტაციის თემაზე შესრულებული შრომები

ციტირებული ლიტერატურის [6], [7], [8] და [9] სტატიები.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили

На правах рукописи

Заза Меликидзе

Некоторые вопросы базисности многомерной ортонормированной всплеск-системы типа Хаара и расходимости на множествах меры нуль

01.01.01 математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Тбилиси, 2006 г.

Работа выполнена в Тбилисском государственном университете им. Ив. Джавахишвили

Научный руководитель: Тенгиз Копалиани, кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: Омар Дзагнидзе, доктор физико-математических наук;

Васил Бугадзе, доктор физико-математических наук

Защита диссертации состоится 27 октября 2006 года в 14 часов на заседании Диссертационного совета Ph.M.01.06.№6 Тбилисского государственного университета им. Ив. Джавахишвили. Адрес: Тбилиси, ул. Университетская №2, аудитория №202.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Тбилисского государственного университета им. Ив. Джавахишвили.

Автореферат разослан 27.09.2006 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета, кандидат физико-математических наук Г. Береладзе

Общая характеристика диссертации

***Актуальность темы*.** В современной математике тематика всплесков появилась в 1980-ых годах и оказала большое влияние как на чистую математику (гармонический анализ, функциональный анализ, теория апроксимаций, фрактальные множества и т. д.), так и на прикладную математику (теория сигналов, математическая физика и т.д.) Она становится предметом все более и более широкого обсуждения математиков в настоящее время. В этой тематике в разных журналах опубликовано более тысячи статей и издано несколько монографий выдающихся математиков.

***Цель работы*.** Целью данной работы является построение функции, умножение которой на неполную (или полную) всплеск-систему типа Хаара, дает базис в пространстве Банаха L_Q^p. Построение функции данного вида представляет интерес, т.к оно эквивалентно базисности этой системы в весовом пространстве Банаха $L_Q^p(\psi(x)dx)$. Кроме того, нашей целью было определить насколько "плохой" могла оказаться всплеск-система типа Хаара с точки зрения точечной расходимости на множестве меры нуль.

***Общая методика исследования*.** Предметом исследования диссертации является установление базисности и расходимости на множестве меры нуль системы функций (соответственно, тотальность и минимальность систем функции и ограниченность частных сумм рядов Фурье-Хаара). Методика исследования основывается на нако-пленном опыте доказательств известных теорем и неравенств.

***Научная новизна*.** Все результаты диссертации новые и получены автором.

1. Построена функция, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара дает базис пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

2. Установлены все Борелевы меры μ, для которых всплеск-система типа Хаара является базисом в пространстве $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$.

3. Для заранее заданного множества меры нуль построена измеримая ограниченная функция, ряд типа Фурье-Хаара которой расходится на этом множестве.

***Научная и практическая ценность*.** Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в даль-нейших исследованиях.

***Апробация работы*.** Основные результаты диссертации были изложены на научном семинаре кафедры теории функции и функционального анализа Тбилисского государственного уни-верситета имени Ив. Джавахишвили (зав. кафедрой академик Академии наук Грузии Л.В. Жижиашвили), на II-ой Республиканской конференций молодых ученых (г. Кутаиси, 8-10 октября 2004 г); на Международной конференции, посвященной 110-летию профессора Арчила Харадзе, 31 августа-5 сентября, 2005 г, Тбилиси).

***<u>Объем и структура работы</u>*.** Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, который содержит 16 наименований. Общий объем работы 76 страниц, набранных на компьютере.

Содержание диссертации

Введение содержит историю постановки данной задачи, результаты изложенные в каждой главе и их связь с результатами полученными другими авторами.

В первой главе диссертации установлено необходимое и достаточное условие на функцию, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара даёт замкнутую минимальную систему в пространстве L_Q^p, $1 \le p < \infty$. Построена функция, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара даёт базис пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$. Построена функция, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара, даёт замкнутую и минимальную систему пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$, которая не является базисом.

В первом параграфе этой главы определена многомерная всплеск-система типа Хаара. Конкретно: допустим, $Q \subset R^n$ - измеримое множество. Символом L_Q^p, $1 \le p < \infty$, обозначено Банахо-во пространство всех таких функций f, для которых

$$\|f\|_{L_Q^p} = \left(\int_Q |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty .$$

Кроме этого,

$$\|f\|_{L_Q^\infty} = \operatorname*{supess}_{x \in Q} |f(x)| .$$

Символом $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $\psi(x) \ge 0$, $1 \le p < \infty$, обозначено Банахово пространство всех таких функций f, для которых

$$\|f\|_{L_Q^p(\psi(x)dx)} = \left(\int_Q |f(x)|^p \psi(x) dx \right)^{1/p} < \infty$$

и

$$\|f\|_{L_Q^\infty(\psi(x)dx)} = \operatorname*{supess}_{x \in Q} |f(x)| .$$

Символом Z^n обозначено n -мерное множество векторов, компоненты которых целые числа.

$A : R^n \to R^n$ линейное отображение, для которого $A(Z^n) \subset Z^n$ и все (комплексные) характеристические числа отображения A по абсолютной величине больше 1.

Пусть $|\det A| = \delta$. Отметим, что $\delta \ge 2$-натуральное число.

Рассмотрим Z^n как аддитивную группу. $A(Z^n)$ есть её нормаль-ная подгруппа, и поэтому мы можем разделить Z^n на комножества $A(Z^n)$. Ясно, что они образуют группу. Подмножество Z^n, которое содержит по одному элементу из комножеств $A(Z^n)$, называется вычетом полной системы по модулю A. Известно, что ([1] предложение 5.5) количество различных комножеств $A(Z^n)$ равно $|\det A| = \delta$.

Для фиксированных вычетов полной системы $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ определено множество

$$\overline{Q}=\left\{x\in R^n : x=\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}s_j, \text{ когда } s_j\in S\right\} \qquad (1)$$

Легко проверяемо, что в (1) приведенный ряд всегда абсолютно сходится.

Известно, что для некоторых вычетов полной системы множество $\overline{Q}$ может быть очень сложным. Такие типы множества называют фракталами.

Для вычетов полной системы $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ определены векторы:

$$k_0^{(1)}=\theta \quad (\text{где } \theta \text{нулевой вектор})$$
$$k_{n+1}^{(\delta(m-1)+i)}=k_n^{(m)}+A^{-(n+1)}(k_i),$$
$$n=0,1,... \quad m=1,...,\delta^n \quad i=1,...,\delta$$

и множества

$$\overline{Q}_n^{(m)}=A^{-n}(Q)+k_n^{(m)} \quad n=0,1,... \quad m=1,...,\delta^n.$$

Допустим $\overline{Q}$ есть множество, определенное равенством (1). Известно, что ([1] предложение 5.19)

а) $\overline{Q}$ есть компактное подмножество R^n;

б) $\overline{Q}=\bigcup_{m=1}^{\delta^n}\overline{Q}_n^{(m)}$, $n=0,1,...$;

в) $\bigcup_{\gamma\in Z^n}(\overline{Q}+\gamma)\equiv R^n$;

г) $\overline{Q}$ содержит открытое множество;

Допустим, что кроме того вычеты $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ полной системы подобраны так, что выполняется условие:

д) $\mu(\overline{Q})=1$.

Если из множества $\overline{Q}$ отбросим его границу (её мера равна нулю), получим открытое множество, которое обозначается символом Q. Для каждого множества $\overline{Q}_n^{(m)}$, $(n=0,1,...;\ m=1,...,\delta^n)$ отбросим его границу (мера и здесь ровна нулю) и полученное открытое множество обозначим символом $Q_n^{(m)}$. Множества $Q_n^{(m)}$ называются множествами Хаара.

Пусть $A_\delta=(\alpha_{i,j})$, $i=0,...,\delta-1$, $j=1,...,\delta$ - матрица, имеющая свойства: $\alpha_{0,j}=1,\ j=1,...,\delta$ и $\sum_{j=1}^{\delta}\alpha_{n,j}\alpha_{m,j}=\delta\delta_{n,m}$, где $\delta_{n,m}$ - символ Кроникера, а система функции $\chi_n^{(m)}$ определена равенствами:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1_Q(x),$$

$$\chi_n^{(m)}(x)=\begin{cases}\delta^{n/2}\alpha_{i,j}, & \text{когда } x\in Q_{n+1}^{(\ell\delta+j)}\\ 0, & \text{когда} x\in Q\setminus\overline{Q}_n^{(\ell+1)},\end{cases} \quad n=0,1,... \quad m=1,...,\delta^n(\delta-1) \quad j=1,...\delta,$$

где $i=(m-1)\operatorname{mod}(\delta-1)+1$ и $\ell=\left[\frac{m-1}{\delta-1}\right]$ ($[a]$есть целая часть действительного числа a), она пронумеровано в следующем виде:

$$\chi_1(x)=\chi_0^{(0)}(x) \text{ и когда } \quad n=\delta^k+j \quad \chi_n(x)=\chi_k^{(j)}(x). \qquad (2)$$

Значения функций системы $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в точках разрыва (их мера ровна нулю) для нас не интересны, и их не рассмотрим.

Система, определенная равенством (2), называется системой типа Хаара, она - ортонормированный базис во всех пространствах L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Для множества $E \subset \overline{Q}$ введено обозначение $CE \equiv \overline{Q} \setminus E$

Во втором параграфе введены вспомогательные предложения, которые нужны для получения основного результата. Конкретно, на основании теоремы К. Казаряна для всплеск-системы типа Хаара, получена

Лемма 1.2.1. Допустим, что $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ есть система, определенная равенством (2). Следующие два условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ где $1 \le N \le \delta - 1$ и $M(x) \in L_Q^p$, $1 \le p < \infty$, была бы замкнутым и минимальным в пространстве L_Q^p:

а) существует N различных множеств Хаара

$$Q_1^{(i_{1,1})} \supset \dots \supset Q_k^{(i_{1,k})} \supset \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots ,$$
$$Q_1^{(i_{N,1})} \supset \dots \supset Q_k^{(i_{N,k})} \supset \dots$$

где каждое $i_{n,k}$ $(1 \le n < N; k = 1,2,\dots)$ - одно из чисел $1,\dots,\delta^k$, для которых

$$Q_1^{(i_{n,1})} \cap Q_1^{(i_{m,1})} = \varnothing \text{, при } n \ne m \quad (1 \le n, m \le N)$$

и

$$[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_k^{(i_{n,k})}}, \ [M(x)]^{-1} \in L^q_{C\bigcup_{n=1}^{N} Q_k^{(i_{n,k})}} \quad (1 \le n \le N; k = 1,2,\dots),$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$;

б)
$$V_1 = (\ 1;\dots;1\ )$$
$$V_2 = (\alpha_{1,i_{1,1}};\dots;\alpha_{1,i_{N,1}})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$V_N = (\alpha_{N-1,i_{1,1}};\dots;\alpha_{N-1,i_{N,1}})$$

система линейно независимых векторов (базис пространства R^N).

В третьем параграфе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.3.1. Допустим $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ система, определенная равенством (2) (Подразумеваем, что $J_1 = (\alpha_{0,1};\dots;\alpha_{0,N});\dots;$ $J_N = (\alpha_{N-1,1};\dots;\alpha_{N-1,N})$ линейно независимая система векторов; Этого можно достигнуть изменением нумерации функции $\chi_1;\dots;\chi_\delta$). Тогда система $\{M_N(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ где $(1 \le N \le \delta - 1)$ и

$$M_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^{k-1}}, & \text{когда } x \in Q_k^{((n-1)\delta^{k-1}+i)} (k = 2,3,\dots; 1 \le n \le N; 2 \le i \le \delta) \\ 1, & \text{когда } x \in Q_1^{(i)} \quad (N+1 \le i \le \delta) \end{cases}$$

является базисом всех пространствах L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.3.2. Допустим, система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенная равенством (2), и N любое натуральное число. Существует изме-римая ограниченная функция $M(x)$, такая что $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом всех пространствах L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.3.3. Допустим $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - система определенная равенством (2).

Существует измеримая ограниченная функция $M(x)$, такая, что $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ - замкнута и минимальна в L_Q^p, $1 \le p < \infty$, но она не является базисом пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.3.4. Из системы $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённой равенством (2), можно удалить бесконечное количество функции так, что оставшаяся часть после умножения на некоторую измеримую ограниченную функцию, будет базисом в L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Мультипликативное дополнение системы функции $\{f_n(x)\}$ с функцией $M(x)$ до базиса в пространстве L_Q^p эквивалентно базисности системы функций $\{f_n(x)\}$ в весовом пространстве $L_Q^p(\psi(x)dx)$ $\left(\psi(x) = |M(x)|^p\right)$. Отсюда получаем результаты:

Следствие 1.3.1. Если из всплеск-системы типа Хаара удалить конечное количество функции, то существует функция $\psi(x) > 0$ такая, что оставшаяся часть системы является базисом в весовом про-странстве $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$.

Следствие 1.3.2. Из всплеск-системы типа Хаара можно удалить бесконечное множество функций так, чтобы оставшаяся часть системы являлась базисом в весовом пространстве $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$ для некоторой весовой функции $\psi(x) > 0$.

Во второй главе диссертации установлено необходимое и достаточное условие, когда система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, минимальная в про-странстве L_Q^p и тотальная в L_Q^1 является базисом пространства $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$, $\psi(x) \in L_Q^1$, $\psi(x) > 0$ п.в. на Q (в широком смисле).

Также установлены необходимые и достаточные условия для борелевской меры μ, для которой $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$.

В первом параграфе введены некоторые нужные определения.

Во втором параграфе доказана следуюшая

Теорема 2.2.1. Допустим, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна в пространстве L_Q^{∞} и тотальна в L_Q^1. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сопряжённая система. Следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была (в широким смисле) базисом простра-нства $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$, $\psi(x) \in L_Q^1$, $\psi(x) > 0$ п.в на Q: для любого натурального числа n

$$[\psi_n(x)]^p[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}.$$

В третьем параграфе с помощью теоремы 2.2.1 и двух лемм К. Казаряна доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.3.1. Следующие условия (а)-(г) являются необходи-мыми и достаточными для того, чтобы система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была базисом пространства $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$:

(а) существует интегрируемая по Лебегу функция $\psi(x)$ такая, что $d\mu(x) = \psi(x)dx$;

(б) $\psi(x) > 0$ п.в на Q;

(в) $[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}$;

(г) существует постоянная $M_p > 0$ такая, что для каждого множества Хаара $Q_n^{(m)}$, $n = 1,2,\dots$, $m = 1,\dots,\delta^n$, имеем:

$$\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int\limits_{Q_n^{(m)}}\psi(x)dx\right)\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int\limits_{Q_n^{(m)}}[\psi(x)]^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \le M_p .$$

Теорема 2.3.2. Для того чтобы система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была широ-ком смысле базисом пространства $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (а), (б) и (в) теоремы 2.3.1. Также доказана

Лемма 2.3.1. Допустим μ удовлетворяет условиям (а), (б) и (в) теоремы 2.3.1, тогда для каждой $N \ge 1$ $(N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta - 1)))$ имеем

$$S_N(f,x) = \frac{1}{|\Gamma_n|}\int\limits_{\Gamma_n} f(t)dt, \text{ когда } x \in \Gamma_n,\ 1 \le n \le N$$

В третьей главе для каждого множества меры нуль в $\overline{Q}$ построена ограниченная измеримая функция, ряд Фурье которой по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (с ограничением $|\det A| = 2$) расходится на этом множестве .

В первом параграфе этой главы введены несколько обозначений и доказаны следующие леммы:

Лемма 3.1.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой точки $M \in \overline{Q}$ существует такое множество Хаара, что:

$$M \in \overline{Q}_k^{(i)} \subset B(M,\varepsilon),$$

где

$$B(M,\varepsilon) = \left\{x : \|M - x\|_{R^n} < \varepsilon\right\}.$$

Лемма 3.1.2. Для любого открытого множество $H \subset \overline{Q}$ суще-ствует последовательность множеств Хаара $\left\{\overline{Q}_{m_n}^{(i_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$Q_{m_r}^{(i_r)} \cap Q_{m_s}^{(i_s)} = \varnothing \quad (r \ne s) \text{ и } H = \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{Q}_{m_n}^{(i_n)}.$$

Во втором параграфе доказана основная

Теорема 3.2.1. Для любого множества $E \subset \overline{Q}$, $\mu(E) = 0$ существует ограниченная измеримая функция, ряд Фурье которой по системе $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится на множество E.

Цитируемая литература

1. Wojtaszczyk P., *A mathematical introduction to wavelets*, Cambridge University Press, 1977.
2. Казарян К.С., *О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в* L^p, $1 \le p < \infty$, Analysis Math., 4, No.1,1978, pp. 37-52.
3. Казарян К.С., *О мультипликативном дополнении некоторых систем,* Изв. А Н Арм. ССР, №4, 1978, С. 315-351.
4. Kazarian K.S., *On bases and unconditional bases in the spaces* $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Studia Math., 71, No.3, 1982, pp. 227-249.
5. Бугадзе В.М., *О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль,* Мат. Заметки, 51, 1992, С 20-26.
6. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 1, 2004, pp. 30-32.
7. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized wavelet systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 172, No. 1, 2005, pp. 17-19.
8. Melikidze Z., *On bases of multidimentional Haar type wavelet systems in the spaces* $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Proc. A. Razmadze Math. Inst., v. 139, 2005, pp. 61-70.
9. Melikidze Z., *On noncorvergence of Fourier-Haar type series of bounded functions on the sets with measure zero,* Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 3, 2004, pp. 450-451.
10. Haar A., *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systeme*, Math. Ann., 69, 1910, pp. 331-371.
11. Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, М. :Наука, 1984.
12. Braun Ben-Ami, *On the multiplicative completion of certain basic sequences in* L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 499-508.
13. Бабенко К.Н., *О сопряженних функциях*, Докл. АН СССР, 12, №2, 1948, С 157-160.
14. Банах С., *Курс функціонального аналізу*, Київ, Радянська школа, 1948.
15. Кранцберг А.С., *О базисах системы Хаара в весовом пространстве,* Моск. Инст. Электр. Мат., 24, 1971.
16. Hunt R., Muckenhoupt B. and Wheeden R., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform,* Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 227-251.

Работы по теме диссертации

Статьи цитированной литературы [6], [7], [8] и [9].