Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили

На правах рукописи

Заза Меликидзе

Некоторые вопросы базисности многомерной ортонормированной всплеск-системы типа Хаара и расходимости на множествах меры нуль

01.01.01 математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Тбилиси, 2006 г.

Работа выполнена в Тбилисском государственном университете им. Ив. Джавахишвили

Научный руководитель: Тенгиз Копалиани, кандидат физико-математических наук

Официальные оппоненты: Омар Дзагнидзе, доктор физико-математических наук;

Васил Бугадзе, доктор физико-математических наук

Защита диссертации состоится 27 октября 2006 года в 14 часов на заседании Диссертационного совета Ph.M.01.06.№6 Тбилисского государственного университета им. Ив. Джавахишвили. Адрес: Тбилиси, ул. Университетская №2, аудитория №202.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Тбилисского государственного университета им. Ив. Джавахишвили.

Автореферат разослан 27.09.2006 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета, кандидат физико-математических наук Г. Бареладзе

Общая характеристика диссертации

Актуальность темы. В современной математике тематика всплесков появилась в 1980-ых годах и оказала большое влияние как на чистую математику (гармонический анализ, функциональный анализ, теория апроксимаций, фрактальные множества и т. д.), так и на прикладную математику (теория сигналов, математическая физика и т.д.) Она становится предметом все более и более широкого обсуждения математиков в настоящее время. В этой тематике в разных журналах опубликовано более тысячи статей и издано несколько монографий выдающихся математиков.

Цель работы. Целью данной работы является построение функции, умножение которой на неполную (или полную) всплеск-систему типа Хаара, дает базис в пространстве Банаха L_Q^p. Построение функции данного вида представляет интерес, т.к оно эквивалентно базисности этой системы в весовом пространстве Банаха $L_Q^p(\psi(x)dx)$. Кроме того, нашей целью было определить насколько “плохой” могла оказаться всплеск-система типа Хаара с точки зрения точечной расходимости на множестве меры нуль.

Общая методика исследования. Предметом исследования диссертации является установление базисности и расходимости на множестве меры нуль системы функций (соответственно, тотальность и минимальность систем функции и ограниченность частных сумм рядов Фурье-Хаара). Методика исследования основывается на нако-пленном опыте доказательств известных теорем и неравенств.

Научная новизна. Все результаты диссертации новые и получены автором.

1. Построена функция, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара дает базис пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

2. Установлены все Борелевы меры μ, для которых всплеск-система типа Хаара является базисом в пространстве $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$.

3. Для заранее заданного множества меры нуль построена измеримая ограниченная функция, ряд типа Фурье-Хаара которой расходится на этом множестве.

Научная и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в даль-нейших исследованиях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были изложены на научном семинаре кафедры теории функции и функционального анализа Тбилисского государственного уни-верситета имени Ив. Джавахишвили (зав. кафедрой академик Академии наук Грузии Л.В. Жижиашвили), на II-ой Республиканской конференций молодых ученых (г. Кутаиси, 8-10 октября 2004 г); на Международной конференции, посвященной 110-летию профессора Арчила Харадзе, 31 августа-5 сентября, 2005 г, Тбилиси).

<u>Объем и структура работы</u>. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы, который содержит 16 наименований. Общий объем работы 76 страниц, набранных на компьютере.

Содержание диссертации

Введение содержит историю постановки данной задачи, результаты изложенные в каждой главе и их связь с результатами полученными другими авторами.

В первой главе диссертации установлено необходимое и достаточное условие на функцию, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара даёт замкнутую минимальную систему в пространстве L_Q^p, $1 \le p < \infty$. Построена функция, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара даёт базис пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$. Построена функция, умножение которой на неполную всплеск-систему типа Хаара, даёт замкнутую и минимальную систему пространства L_Q^p, $1 \le p < \infty$, которая не является базисом.

В первом параграфе этой главы определена многомерная всплеск-система типа Хаара. Конкретно: допустим, $Q \subset R^n$ - измеримое множество. Символом L_Q^p, $1 \le p < \infty$, обозначено Банахо-во пространство всех таких функций f, для которых

$$\|f\|_{L_Q^p} = \left(\int_Q |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty .$$

Кроме этого,

$$\|f\|_{L_Q^\infty} = \operatorname*{supess}_{x \in Q} |f(x)| .$$

Символом $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $\psi(x) \ge 0$, $1 \le p < \infty$, обозначено Банахово пространство всех таких функций f, для которых

$$\|f\|_{L_Q^p(\psi(x)dx)} = \left(\int_Q |f(x)|^p \psi(x) dx \right)^{1/p} < \infty$$

и

$$\|f\|_{L_Q^\infty(\psi(x)dx)} = \operatorname*{supess}_{x \in Q} |f(x)| .$$

Символом Z^n обозначено n-мерное множество векторов, компоненты которых целые числа.

$A : R^n \to R^n$ линейное отображение, для которого $A(Z^n) \subset Z^n$ и все (комплексные) характеристические числа отображения A по абсолютной величине больше 1.

Пусть $|\det A| = \delta$. Отметим, что $\delta \ge 2$-натуральное число.

Рассмотрим Z^n как аддитивную группу. $A(Z^n)$ есть её нормаль-ная подгруппа, и поэтому мы можем разделить Z^n на комножества $A(Z^n)$. Ясно, что они образуют группу. Подмножество Z^n, которое содержит по одному элементу из комножеств $A(Z^n)$, называется вычетом полной системы по модулю A. Известно, что ([1] предложение 5.5) количество различных комножеств $A(Z^n)$ равно $|\det A| = \delta$.

Для фиксированных вычетов полной системы $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ определено множество

$$\overline{Q}=\left\{x\in R^n : x=\sum_{j=1}^{\infty} A^{-j}s_j, \text{ когда } s_j\in S\right\} \qquad (1)$$

Легко проверяемо, что в (1) приведенный ряд всегда абсолютно сходится.

Известно, что для некоторых вычетов полной системы множество $\overline{Q}$ может быть очень сложным. Такие типы множества называют фракталами.

Для вычетов полной системы $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ определены векторы:

$$k_0^{(1)}=\theta \quad (\text{где } \theta \text{ нулевой вектор})$$
$$k_{n+1}^{(\delta(m-1)+i)}=k_n^{(m)}+A^{-(n+1)}(k_i),$$
$$n=0,1,... \quad m=1,...,\delta^n \quad i=1,...,\delta$$

и множества

$$\overline{Q}_n^{(m)}=A^{-n}(Q)+k_n^{(m)} \quad n=0,1,... \quad m=1,...,\delta^n.$$

Допустим $\overline{Q}$ есть множество, определенное равенством (1). Известно, что ([1] предложение 5.19)

а) $\overline{Q}$ есть компактное подмножество R^n;

б) $\overline{Q}=\bigcup_{m=1}^{\delta^n}\overline{Q}_n^{(m)}$, $n=0,1,...$;

в) $\bigcup_{\gamma\in Z^n}(\overline{Q}+\gamma)\equiv R^n$;

г) $\overline{Q}$ содержит открытое множество;

Допустим, что кроме того вычеты $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ полной системы подобраны так, что выполняется условие:

д) $\mu(\overline{Q})=1$.

Если из множества $\overline{Q}$ отбросим его границу (её мера равна нулю), получим открытое множество, которое обозначается символом Q. Для каждого множества $\overline{Q}_n^{(m)}$, $(n=0,1,...;\ m=1,...,\delta^n)$ отбросим его границу (мера и здесь ровна нулю) и полученное открытое множество обозначим символом $Q_n^{(m)}$. Множества $Q_n^{(m)}$ называются множествами Хаара.

Пусть $A_\delta=(\alpha_{i,j})$, $i=0,...,\delta-1$, $j=1,...,\delta$ - матрица, имеющая свойства: $\alpha_{0,j}=1,\ j=1,...,\delta$ и $\sum_{j=1}^{\delta}\alpha_{n,j}\alpha_{m,j}=\delta\delta_{n,m}$, где $\delta_{n,m}$ - символ Кроникера, а система функции $\chi_n^{(m)}$ определена равенствами:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1_Q(x),$$

$$\chi_n^{(m)}(x)=\begin{cases}\delta^{n/2}\alpha_{i,j}, & \text{когда } x\in Q_{n+1}^{(\ell\delta+j)}\\ 0, & \text{когда} x\in Q\setminus\overline{Q}_n^{(\ell+1)},\quad n=0,1,... \quad m=1,...,\delta^n(\delta-1) \quad j=1,...\delta,\end{cases}$$ где

$i=(m-1)\mathrm{mod}(\delta-1)+1$ и $\ell=\left[\dfrac{m-1}{\delta-1}\right]$ ($[a]$ есть целая часть действительного числа a), она пронумеровано в следующем виде:

$$\chi_1(x)=\chi_0^{(0)}(x) \text{ и когда } \quad n=\delta^k+j \quad \chi_n(x)=\chi_k^{(j)}(x). \qquad (2)$$

Значения функций системы $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в точках разрыва (их мера ровна нулю) для нас не интересны, и их не рассмотрим.

Система, определенная равенством (2), называется системой типа Хаара, она - ортонормированный базис во всех пространствах L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Для множества $E \subset \overline{Q}$ введено обозначение $CE \equiv \overline{Q} \setminus E$

Во втором параграфе введены вспомогательные предложения, которые нужны для получения основного результата. Конкретно, на основании теоремы К. Казаряна для всплеск-системы типа Хаара, получена

Лемма 1.2.1. Допустим, что $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ есть система, определенная равенством (2). Следующие два условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ где $1 \le N \le \delta - 1$ и $M(x) \in L_Q^p$, $1 \le p < \infty$, была бы замкнутым и минимальным в пространстве L_Q^p:

а) существует N различных множеств Хаара

$$\begin{array}{l} Q_1^{(i_{1,1})} \supset \ldots \supset Q_k^{(i_{1,k})} \supset \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_1^{(i_{N,1})} \supset \ldots \supset Q_k^{(i_{N,k})} \supset \ldots \end{array}$$

где каждое $i_{n,k}$ $(1 \le n < N; k = 1,2,\ldots)$- одно из чисел $1,\ldots,\delta^k$, для которых

$$Q_1^{(i_{n,1})} \cap Q_1^{(i_{m,1})} = \varnothing, \text{ при } n \ne m \quad (1 \le n, m \le N)$$

и

$$[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_k^{(i_{n,k})}}, \ [M(x)]^{-1} \in L^q_{C\bigcup_{n=1}^{N} Q_k^{(i_{n,k})}} \quad (1 \le n \le N; k = 1,2,\ldots),$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$;

б)
$$\begin{array}{l} V_1 = (\ 1;\ldots;1\ ) \\ V_2 = (\alpha_{1,i_{1,1}};\ldots;\alpha_{1,i_{N,1}}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_N = (\alpha_{N-1,i_{1,1}};\ldots;\alpha_{N-1,i_{N,1}}) \end{array}$$

система линейно независимых векторов (базис пространства R^N).

В третьем параграфе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.3.1. Допустим $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ система, определенная равенством (2) (Подразумеваем, что $J_1 = (\alpha_{0,1};\ldots;\alpha_{0,N});\ldots;$ $J_N = (\alpha_{N-1,1};\ldots;\alpha_{N-1,N})$ линейно независимая система векторов; Этого можно достигнуть изменением нумерации функции $\chi_1;\ldots;\chi_\delta$). Тогда система $\{M_N(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ где $(1 \le N \le \delta - 1)$ и

$$M_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^{k-1}}, \text{ когда } x \in Q_k^{((n-1)\delta^{k-1}+i)} (k = 2,3,\ldots; 1 \le n \le N; 2 \le i \le \delta) \\ 1, \quad \text{когда} \quad x \in Q_1^{(i)} \quad (N+1 \le i \le \delta) \end{cases}$$

является базисом всех пространствах L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.3.2. Допустим, система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенная равенством (2), и N любое натуральное число. Существует изме-римая ограниченная функция $M(x)$, такая что $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом всех пространствах L_Q^p, $1 \le p < \infty$.

Теорема 1.3.3. Допустим $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$- система определенная равенством (2).

Существует измеримая ограниченная функция $M(x)$, такая, что $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ - замкнута и минимальна в L_Q^p, $1\le p<\infty$, но она не является базисом пространства L_Q^p, $1\le p<\infty$.

Теорема 1.3.4. Из системы $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определённой равенством (2), можно удалить бесконечное количество функции так, что оставшаяся часть после умножения на некоторую измеримую ограниченную функцию, будет базисом в L_Q^p, $1\le p<\infty$.

Мультипликативное дополнение системы функции $\{f_n(x)\}$ с функцией $M(x)$ до базиса в пространстве L_Q^p эквивалентно базисности системы функций $\{f_n(x)\}$ в весовом пространстве $L_Q^p(\psi(x)dx)$ $\left(\psi(x)=|M(x)|^p\right)$. Отсюда получаем результаты:

Следствие 1.3.1. Если из всплеск-системы типа Хаара удалить конечное количество функции, то существует функция $\psi(x)>0$ такая, что оставшаяся часть системы является базисом в весовом про-странстве $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$.

Следствие 1.3.2. Из всплеск-системы типа Хаара можно удалить бесконечное множество функций так, чтобы оставшаяся часть системы являлась базисом в весовом пространстве $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$ для некоторой весовой функции $\psi(x)>0$.

Во второй главе диссертации установлено необходимое и достаточное условие, когда система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, минимальная в про-странстве L_Q^p и тотальная в L_Q^1 является базисом пространства $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$, $\psi(x)\in L_Q^1$, $\psi(x)>0$ п.в. на Q (в широком смисле).

Также установлены необходимые и достаточные условия для борелевской меры μ, для которой $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L_Q^p(d\mu)$, $1\le p<\infty$.

В первом параграфе введены некоторые нужные определения.

Во втором параграфе доказана следуюшая

Теорема 2.2.1. Допустим, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна в пространстве L_Q^{∞} и тотальна в L_Q^1. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сопряжённая система. Следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была (в широким смисле) базисом простра-нства $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$, $\psi(x)\in L_Q^1$, $\psi(x)>0$ п.в на Q: для любого натурального числа n

$$[\psi_n(x)]^p[\psi(x)]^{-1}\in L_Q^{1/(p-1)}.$$

В третьем параграфе с помощью теоремы 2.2.1 и двух лемм К. Казаряна доказаны следующие теоремы:

Теорема 2.3.1. Следующие условия (а)-(г) являются необходи-мыми и достаточными для того, чтобы система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была базисом пространства $L_Q^p(d\mu)$, $1\le p<\infty$:

(а) существует интегрируемая по Лебегу функция $\psi(x)$ такая, что $d\mu(x)=\psi(x)dx$;

(б) $\psi(x)>0$ п.в на Q;

(в) $[\psi(x)]^{-1}\in L_Q^{1/(p-1)}$;

(г) существует постоянная $M_p > 0$ такая, что для каждого множества Хаара $Q_n^{(m)}$, $n = 1,2,\dots$, $m = 1,\dots,\delta^n$, имеем:

$$\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int_{Q_n^{(m)}}\psi(x)dx\right)\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int_{Q_n^{(m)}}[\psi(x)]^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \le M_p .$$

Теорема 2.3.2. Для того чтобы система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была широ-ком смысле базисом пространства $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (а), (б) и (в) теоремы 2.3.1. Также доказана

Лемма 2.3.1. Допустим μ удовлетворяет условиям (а), (б) и (в) теоремы 2.3.1, тогда для каждой $N \ge 1$ $(N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta - 1)))$ имеем

$$S_N(f,x) = \frac{1}{|\Gamma_n|}\int_{\Gamma_n} f(t)dt, \text{ когда } x \in \Gamma_n,\ 1 \le n \le N$$

В третьей главе для каждого множества меры нуль в $\overline{Q}$ построена ограниченная измеримая функция, ряд Фурье которой по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (с ограничением $|\det A| = 2$) расходится на этом множестве .

В первом параграфе этой главы введены несколько обозначений и доказаны следующие леммы:

Лемма 3.1.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой точки $M \in \overline{Q}$ существует такое множество Хаара, что:

$$M \in \overline{Q}_k^{(i)} \subset B(M,\varepsilon),$$

где

$$B(M,\varepsilon) = \left\{x : \|M - x\|_{R^n} < \varepsilon\right\}.$$

Лемма 3.1.2. Для любого открытого множество $H \subset \overline{Q}$ суще-ствует последовательность множеств Хаара $\left\{\overline{Q}_{m_n}^{(i_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$Q_{m_r}^{(i_r)} \cap Q_{m_s}^{(i_s)} = \varnothing \quad (r \ne s) \text{ и } H = \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{Q}_{m_n}^{(i_n)} .$$

Во втором параграфе доказана основная

Теорема 3.2.1. Для любого множества $E \subset \overline{Q}$, $\mu(E) = 0$ существует ограниченная измеримая функция, ряд Фурье которой по системе $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится на множество E.

Цитируемая литература

1. Wojtaszczyk P., *A mathematical introduction to wavelets*, Cambridge University Press, 1977.
2. Казарян К.С., *О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в* L^p, $1 \le p < \infty$, Analysis Math., 4, No.1,1978, pp. 37-52.
3. Казарян К.С., *О мультипликативном дополнении некоторых систем,* Изв. А Н Арм. ССР, №4, 1978, С. 315-351.
4. Kazarian K.S., *On bases and unconditional bases in the spaces* $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Studia Math., 71, No.3, 1982, pp. 227-249.
5. Бугадзе В.М., *О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль,* Мат. Заметки, 51, 1992, С 20-26.
6. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 1, 2004, pp. 30-32.
7. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized wavelet systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 172, No. 1, 2005, pp. 17-19.
8. Melikidze Z., *On bases of multidimentional Haar type wavelet systems in the spaces* $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Proc. A. Razmadze Math. Inst., v. 139, 2005, pp. 61-70.
9. Melikidze Z., *On noncorvergence of Fourier-Haar type series of bounded functions on the sets with measure zero,* Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 3, 2004, pp. 450-451.
10. Haar A., *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systeme*, Math. Ann., 69, 1910, pp. 331-371.
11. Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, М. :Наука, 1984.
12. Braun Ben-Ami, *On the multiplicative completion of certain basic sequences in* L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 499-508.
13. Бабенко К.Н., *О сопряженних функциях*, Докл. АН СССР, 12, №2, 1948, С 157-160.
14. Банах С., *Курс функціонального аналізу*, Київ, Радянська школа, 1948.
15. Кранцберг А.С., *О базисах системы Хаара в весовом пространстве,* Моск. Инст. Электр. Мат., 24, 1971.
16. Hunt R., Muckenhoupt B. and Wheeden R., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform,* Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 227-251.

Работы по теме диссертации

Статьи цитированной литературы [6], [7], [8] и [9].