ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მელიქიძე ზაზა

მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ორთონორმირებული ვეივლეტ-სისტემების ბაზისობისა და ნული ზომის სიმრავლეებზე განშლადობის ზოგიერთი საკითხი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დისერტაცია

01.01.01 – მათემატიკური ანალიზი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზ.–მათ. მეცნიერებათა კანდიდატი,
დოცენტი თ. კოპალიანი

2006

სარჩევი

შესავალი

I. თავი არასრული მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ორთონორმირებული ვეივლეტ – სისტემების მულტიპლიკაციური დამატების შესახებ L_Q^p, $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისამდე და ბაზისობის შესახებ წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეებში

§ 1.1.მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ვეივლეტ – სისტემების განსაზღვრა

§ 1.2. დამხმარე დებულებები

§ 1.3. ძირითადი თეორემები და შედეგები

თავიII. მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ორთონორმირებული ვეივლეტ–სისტემების ბაზისობის შესახებ $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$,სივრცეებში

§ 2.1. წინასწარი განმარტებები და გამოყენებული აღნიშვნები

§ 2.2. დამხმარე დებულებები

§ 2.3.ძირითადი თეორემები და შედეგები

თავი III. შემოსაზღვრულ ფუნქციათა ფურიე–ჰაარის ტიპის მწკრივების განშლადობის შესახებ ნული ზომის სიმრავლეებზე

§ 3.1.გამოყენებული აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები

§ 3.2. ძირითადი თეორემა

ლიტერატურა

შესავალი

1972 წელს ბენ-ამი ბრაუნმა [12] დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - ფუნქციათა სისტემა, განსაზღვრული $E \subset [0,1]$, $\mu(E) > 0$, ზომად სიმრავლეზე, ბაზისია $L^p(E)$, $1 < p < \infty$, სივრცეში. ყოველი ნატურალური N_0 რიცხვისათვის არსებობს $M(x)$, $0 \le M(x) \le 1$, ზომადი ფუნქცია ისეთი, რომ ნებისმიერი f ფუნქციისათვის $L^p(E)$ სივრციდან, მოიძებნება მწკრივი $\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k (M\phi_k)$ (a_k - ნამდვილი რიცხვებია), რომელიც კრებადია f ფუნქციისაკენ $L^p(E)$ სივრცის მეტრიკით.

აღნიშნული თეორემასთან დაკავშირებით ისმის კითხვა: შეიძლება თუ არა, რომ სისტემა $\{M\phi_n\}_{n=N_0}^{\infty}$, სადაც M – რაიმე ზომადი ფუნქციაა, იყოს L^p, $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისი?

1976 წელს კაზარიანმა [2] აჩვენა, რომ პასუხი ამ კითხვაზე დამოკიდებულია როგორც თავდაპირველად აღებულ სისტემაზე, ასევე მისგან მოშორებულ ფუნქციებზე. მან აჩვენა, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის სისტემისათვის, თუ მას მოვაშორებთ ნებისმიერ სასრულ რაოდენობა ფუნქციებს, აღნიშნულ კითხვაზე პასუხი დადებითია, ხოლო ტრიგონომეტრიული და უოლშის $\{W_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემებისთვის – უარყოფითი. ამ ფაქტებიდან მარტივად ვღებულობთ, რომ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ორთონორმირებული სისტემისათვის, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$g_{2n-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\chi_n(2x), \text{ როცა } x \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \\ 0, \text{ როცა } x \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

და

$$g_{2n}(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\\ \sqrt{2}W_n(2x-1), & x\in\left(\tfrac{1}{2},1\right] \qquad (n=1,2,\dots),\end{cases}$$

აღნიშნულ კითხვაზე პასუხი დამოკიდებულია მისგან მოშორებულ ფუნქციებზე. თუ $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას მოვაშორებთ სასრულ რაოდენობა კენტნომრიან ფუნქციებს, მაშინ შესაძლებელია დარჩენილი ფუნქციათა სისტემის მულტიპლიკაციური გასრულება L^p, $1\le p<\infty$, სივრცის ბაზისამდე, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის გაკეთება შეუძლებელია.

ამავე ნაშრომში იგი ამტკიცებს, რომ შესაძლოა ჰაარის სისტემას მოვაშოროთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ დარჩენილი ნაწილის რომელიღაც ზომად, შემოსაზღვრულ ფუნქციაზე გადამრავლების შედეგად მივიღოთ ბაზისი $L^p_{[0,1]}$, $1\le p<\infty$ სივრცეში.

წინამდებარე ნაშრომის პირველ თავში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ კლასიკური ჰაარის სისტემის ზემოთ აღნიშნული თვისებები სამართლიანია აგრეთვე ზოგადად ჰაარის ტიპის მრავალგანზომილებიან ვეივლეტ-სისტემებისათვის, კერძოდ დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაა, მაშინ $\{M_N(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა, სადაც $(1\le N\le\delta-1)$ და

$$M_N(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta^{k-1}}, \text{ როცა } & x\in Q_k^{\left((n-1)\delta^{k-1}+i\right)}\left(k=2,3,\dots;1\le n\le N;2\le i\le\delta\right)\\ 1, \text{ როცა } & x\in Q_1^{(i)} \quad (N+1\le i\le\delta)\end{cases},$$

ბაზისია ყველა L^p_Q, $(1\le p<\infty)$ სივრცეში.

თეორემა 1.3.2. ვთქვათ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაა და N ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. არსებობს ზომადი, შემოსაზღვრული $M(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა ბაზისია ყველა L^p_Q, $1\le p<\infty$ სივრცეში.

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ, $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემაა, არსებობს ზომადი შემოსაზღვრული $M(x)$ ფუნქცია ისეთი,

რომ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ ჩაკეტილი და მინიმალურია L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცეში, მაგრამ არ არის L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცის ბაზისი.

თეორემა 1.3.4. ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ შეიძლება ჩამოვაშოროთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ დარჩენილი ნაწილის რომელიღაც ზომად, შემოსაზღვრულ ფუნქციაზე გადამრავლების შედეგად მივიღოთ ბაზისი ყველა L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცეში.

შედეგი 1.3.1. თუ ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას მოვაცილებთ ფუნქციების სასრულ რაოდენობას, მაშინ არსებობს $\psi(x)>0$ ფუნქცია ისეთი, რომ სისტემის დარჩენილი ნაწილი ბაზისია წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$ სივრცეში.

შედეგი 1.3.2. ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას შეიძლება მოვაცილოთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ სისტემის დარჩენილი ნაწილი იყოს ბაზისი წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1\le p<\infty$ სივრცეში, რომელიღაც $\psi(x)>0$ ფუნქციისათვის.

1948 წელს ბაბენკომ [13] აჩვენა, რომ სისტემა, რომელიც მიიღება ტრიგონომეტრიული სისტემის $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ გადამრავლებით $M_\alpha(x)=|x|^\alpha$, $0<\alpha<1/2$, ფუნქციაზე ქმნის ბაზისს $L_{[-\pi,\pi]}^p$ სივრცეში.

აქვე შევნიშნოთ, რომ თუ $\{f_n(x)\}$ სისტემის გადამრავლებით რაიმე $M(x)$ ფუნქციაზე მიიღება L^p, $1\le p<\infty$, სივრცის ბაზისი, მაშინ თვითონ ეს სისტემა ბაზისია წონიან $L^p(\psi(x)dx)$ სივრცეში, სადაც წონის ფუნქცია $\psi(x)=|M(x)|^p$, და პირიქით.

1972 წელს ჰანტმა, მაკენჰაუპტმა და ვედენმა [16] მოძებნეს ფუნქციათა კლასი, რომლის გადამრავლებით ტრიგონომეტრიულ სისტემაზე მიიღება $L_{[0,2\pi]}^p$ სივრცის ბაზისი.

თეორემა (ჰანტი, მაკენჰაუპტი, ვედენი). ვთქვათ $W(x)$ არაუარყოფითი 2π-პერიოდული ფუნქციაა. ტრიგონომეტრიული სისტემა $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ბაზისია $L_{[0,2\pi]}^p(W(x)dx)$, $1\le p<\infty$ სივრცეში მაშინ და

მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს აბსოლუტური მუდმივა K_p ისეთი, რომ შემდეგი შეფასება სამართლიანია ყოველი I ინტერვალისათვის:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I (W(x))^{-1/p-1}dx\right)^{p-1} \le K_p,$$

$|I|$ აღნიშნავს I ინტერვალის სიგრძეს.

1971 წელს კრანცბერგმა $[15]$ აღწერა ყველა დადებითი ბორელის μ ზომა, რომლისთვისაც კლასიკური ჰაარის სისტემა ბაზისია $L^p_{[0,1]}(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეში.

თეორემა (კრანცბერგი). ვთქვათ μ იყოს დადებითი ბორელის ზომა $[0,1]$-ზე. ჰაარის სისტემა $\{\chi(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ბაზისია $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეში, მასინ და მხოლოდ მაშინ, როცა μ არის შემდეგი სახის

$$d\mu(x) = \psi(x)dx,$$

სადაც $\psi(x)$ არის არაუარყოფითი ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც ყოველ ორობით ინტერვალზე $\Delta = \left((m-1)/2^n, m/2^n\right)$ $\left(n = 1,2,\ldots; m = 1,\ldots,2^n\right)$ აკმაყოფილებს შეფასებას

$$\left(\frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta \psi(x)dx\right)\left(\frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta (\psi(x))^{-1/p-1}dx\right)^{p-1} \le K_p,$$

K_p არის მხოლოდ p-ზე დამოკიდებული აბსოლუტური მუდმივა.

ჰაარის ტიპის მრავალგანზომილებიანი ვეივლეტ-სისტემიებისათვის მსგავსი ტიპის საკითხებს ჩვენ განვიხილავთ მეორე თავში და ვაჩვენებთ, რომ ანალოგიური თეორემა სამართლიანია მათთვისაც, კერძოდ დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_Q^{\infty}$ მინიმალურია ამავე სივრცეში და ტოტალურია L_Q^1-ს მიმართ, $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ იყოს მისი შეუღლებული სისტემა. შემდეგი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$, ($\psi(x) \in L_Q^1$, $\psi(x) > 0$ თითქმის ყველგან Q-ზე) სივრცის ფართო აზრით ბაზისი: ყველა ნატურალური n რიცხვისთვის

$$[\psi_n(x)]^p [\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}.$$

თეორემა 2.3.1. შემდეგი პირობები (ა)-(დ) არიან აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისი:

(ა) არსებობს ლებეგის აზრით ინტეგრებადი $\psi(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $d\mu(x) = \psi(x)dx$;

(ბ) $\psi(x) > 0$ თითქმის ყველგან Q-ზე;

(გ) $[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}$;

(დ) არსებობს $M_p > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ ყოველი ჰაარის სიმრავლისათვის $Q_n^{(m)}$, $n = 1,2,\ldots$, $m = 1,\ldots,\delta^n$, გვაქვს

$$\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int_{Q_n^{(m)}}\psi(x)dx\right)\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int_{Q_n^{(m)}}[\psi(x)]^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \le M_p .$$

თეორემა 2.3.2. იმისათვის, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისი აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს 2.3.1. თეორემის (ა), (ბ) და (გ) პირობები.

ვ. ბუღაძემ $[5]$ 1990 წელს დაამტკიცა, რომ ყოველი ნული ზომის სიმრავლისათვის $[0,1]$ მონაკვეთიდან არსებობს ზომადი შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარის მწკრივი განშლადია აღნიშნულ სიმრავლეზე.

ჩვენთვის საინტერესო იყო ჰაარის სისტემის აღნიშნული თვისება რა ფორმით გავრცელდებოდა ზოგადად ჰაარის ტიპის სისტემებისთვის. ჩვენ ამ საკითხს შევეხებით მესამე თავში და ვაჩვენებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას:

თეორემა 3.2.1. ნებისმიერი $E \subset \overline{Q}$, $\mu(E) = 0$ სიმრავლისათვის, არსებობს შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ განშლადია E სიმრავლეზე.

თავი I
არასრული მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ორთონორმირებული ვეივლეტ-სისტემების მულტიპლიკაციური დამატების შესახებ L_Q^p, $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისამდე და ბაზისობის შესახებ წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეებში

§ 1.1. მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემების განსაზღვრა

ვთქვათ, $Q \subset R^n$ ზომადი სიმრავლეა. L_Q^p, $1 \le p < \infty$ იყოს ბანახის სივრცე ყველა ისეთი f ფუნქციისა, რომლისთვისაც

$$\|f\|_{L_Q^p} = \left(\int_Q |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty .$$

გარდა ამისა

$$\|f\|_{L_Q^\infty} = \operatorname*{supess}_{x \in Q} |f(x)| .$$

ასევე $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $\psi(x) \ge 0$, $1 \le p < \infty$, იყოს ბანახის სივრცე ყველა ისეთი f ფუნქციისა, რომლისთვისაც

$$\|f\|_{L_Q^p(\psi(x)dx)} = \left(\int_Q |f(x)|^p \psi(x) dx \right)^{1/p} < \infty ,$$

და

$$\|f\|_{L_Q^\infty(\psi(x)dx)} = \operatorname*{supess}_{x \in Q} |f(x)| .$$

Z^n-ით აღვნიშნავთ n განზომილებიან ვექტორთა სიმრავლეს, რომელთა კომპონენტები მთელი რიცხვებია.

$A : R^n \to R^n$ იყოს წრფივი გარდაქმნა ისეთი, რომ $A(Z^n) \subset Z^n$ და A-ს ყველა (კომპლექსური) მახასიათებელი რიცხვები აბსოლუტური სიდიდით მეტია 1-ზე.

ვთქვათ $|\det A| = \delta$. A-ს ზემოთ აღნიშნული თვისებებიდან მარტივად გამომდინარეობს, რომ $\delta \ge 2$ ნატურალური რიცხვია.

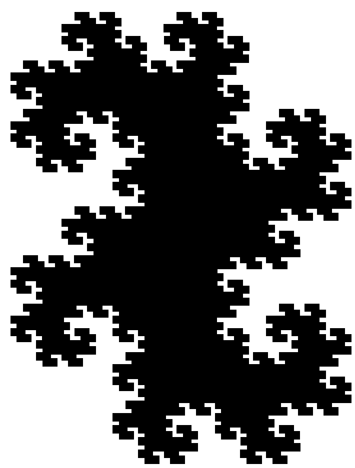
ჩვენ განვიხილავთ Z^n-ს როგორც ადიციურ ჯგუფს. $A(Z^n)$ არის მისი ნორმალური ქვეჯგუფი, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია Z^n დავშალოთ $A(Z^n)$-ის კოსიმრავლეებად. ცხადია ისინი ქმნიან ჯგუფს. Z^n-ის ქვესიმრავლეს, რომელიც შეიცავს $A(Z^n)$-ის კოსიმრავლეებიდან თითო ელემენტს ვუწოდოთ ნაშთთა სრული სისტემა მოდულით A. ცნობილია, რომ ([1] წინადადება 5.5) $A(Z^n)$-ის განსხვავებული კოსიმრავლეების რაოდენობა უდრის $|\det A| = \delta$.

დავაფიქსიროთ ნაშთთა სრული სისტემა $S = \{k_1, \ldots, k_\delta\}$ და განვსაზღვროთ სიმრავლე

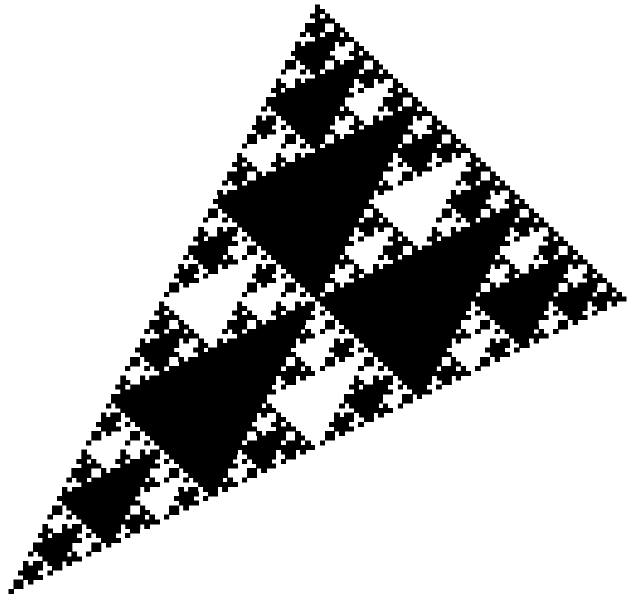
$$\overline{Q} = \left\{ x \in R^n : x = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} s_j, \text{ სადაც } s_j \in S \right\}. \tag{1.1.1}$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ (1.1.1) ტოლობაში მოყვანილი მწკრივი ყოველთვის აბსოლუტურად კრებადია.

გამოირკვა, რომ განსხვავებული ნაშთთა სრული სისტემები გვაძლევენ ძალზე განსხვავებულ $\overline{Q}$ სიმრავლეებს. ზოგიერთი ნაშთთა სრული სისტემისთვის სიმრავლე $\overline{Q}$ შეიძლება იყოს ძალზე რთული. ასეთი ტიპის სიმრავლეებს ეწოდებათ ფრაქტალები.



სურათი 1. «ტყუპი დრაკონის» სახელით ცნობილი $\overline{Q}$ სიმრავლე. მიიღება, როცა $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ და $k_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $k_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



სურათი 2. სამკუთხედის ფორმის $\overline{Q}$ სიმრავლე. მიიღება, როცა $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ და $k_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$, $k_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $k_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $k_4=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}$.

$S=\{k_1,...,k_\delta\}$ ნაშთთა სრული სისტემისთვის განვსაზღვროთ ვექტორები:

$$k_0^{(1)}=\theta,\ \text{(სადაც } \theta \text{ ნულოვანი ვექტორია)}$$
$$k_{n+1}^{(\delta(m-1)+i)}=k_n^{(m)}+A^{-(n+1)}(k_i),\quad n=0,1,...\quad m=1,...,\delta^n\quad i=1,...,\delta$$

და სიმრავლეები

$$\overline{Q}_n^{(m)}=A^{-n}(Q)+k_n^{(m)}\qquad n=0,1,...\quad m=1,...,\delta^n.$$

ვთქვათ $\overline{Q}$ არის (1.1.1) ტოლობით განსაზღვრული სიმრავლე. ცნობილია, რომ ([1] წინადადება 5.19)

ა) $\overline{Q}$ არის R^n-ის კომპაქტური ქვესიმრავლე;

ბ) $\overline{Q}=\bigcup\limits_{m=1}^{\delta^n}\overline{Q}_n^{(m)}$, $n=0,1,...$;

გ) $\bigcup\limits_{\gamma\in Z^n}(\overline{Q}+\gamma)\equiv R^n$;

დ) $\overline{Q}$ შეიცავს ღია სიმრავლეს;

ვთქვათ გარდა ამისა $S=\{k_1,...,k_\delta\}$ ნაშთთა სრული სისტემა შერჩეულია ისე, რომ სრულდება პირობა:

ე) $\mu(\overline{Q})=1$.

თუ $\overline{Q}$ სიმრავლეს მოვაშორებთ თავის საზღვარს (მისი ზომა ნულის ტოლია), მივიღებთ ღია სიმრავლეს, რომელსაც აღვნიშნავთ Q სიმბოლოთი. ასევე თითოეული $\overline{Q}_n^{(m)}$, $\left(n=0,1,...;\ m=1,...,\delta^n\right)$ სიმრავლისათვის, თუ მას მოვაშორებთ თავის საზღვარს (ზომა აქაც ნულის ტოლია) მიღებულ ღია სიმრავლეს აღვნიშნავთ $Q_n^{(m)}$ სიმბოლოთი. შემდგომში ჩვენ $Q_n^{(m)}$ სიმრავლეებს ვუწოდებთ ჰაარის სიმრავლეებს.

ვთქვათ $A_\delta=\left(\alpha_{i,j}\right)$, $i=0,...,\delta-1$ $j=1,...,\delta$ არის მატრიცა, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები: $\alpha_{0,j}=1$, $j=1,...,\delta$ და $\sum_{j=1}^{\delta}\alpha_{n,j}\alpha_{m,j}=\delta\delta_{n,m}$, სადაც $\delta_{n,m}$ კრონეკერის დელტაა. განვსაზღვროთ ფუნქციათა სისტემა:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1_Q(x),$$

$$\chi_n^{(m)}(x)=\begin{cases}\delta^{n/2}\alpha_{i,j},\ \text{როცა}\ x\in Q_{n+1}^{(\ell\delta+j)}\\ 0,\ \ \text{როცა}\ \ x\in Q\setminus\overline{Q}_n^{(\ell+1)},\ n=0,1,...\ m=1,...,\delta^n(\delta-1)\ \ j=1,...\delta,\end{cases}$$

სადაც $i=(m-1)\operatorname{mod}(\delta-1)+1$ და $\ell=\left[\dfrac{m-1}{\delta-1}\right]$ ($[a]$ არის a ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი) და გადავნომროთ შემდეგი სახით:

$$\chi_1(x)=\chi_0^{(0)}(x)\ \text{და როცა}\ n=\delta^k+j\quad \chi_n(x)=\chi_k^{(j)}(x). \tag{1.1.2}$$

$\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემის მნიშვნელობა წყვეტის წერტილებზე (ცხადია მათი ზომა ნულის ტოლია) ჩვენთვის არ არის საინტერესო და ჩვენ მათ აქ არ მოვიყვანთ.

(1.1.2) ტოლობით განსაზღვრულ სისტემას ეწოდება ჰაარის ტიპის და იგი ორთონორმირებული ბაზისია ყველა L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცეში.

$\{f_n(x)\}$ ფუნქციათა სისტემას ვუწოდებთ ჩაკეტილს L_Q^p, $1\le p<\infty$, სივრცეში თუ L_Q^p სივრცის ყოველ ფუნქციას შეიძლება

ამავე სივრცის ნორმით აპროქსიმაცია გაუკეთოთ $f_n(x)$ ფუნქციების სასრული წრფივი კომბინაციით. $\{f_n(x)\}\in L_Q^q$, q აღნიშნავს p-ს შეუღლებულ ხარისხს, სისტემას ვუწოდოთ ტოტალური L_Q^p-ს მიმართ, თუ L_Q^p სივრცის ერთადერთი ფუნქცია, რომელიც ორთოგონალურია ყველა f_n -თან არის ნულოვანი ფუნქცია.

ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს $p\geq 1$ რიგის განსაკუთრებულობა ზომად E სიმრავლეზე, თუ $f(x)\notin L_E^p$.

ზომადი $E\subset \overline{Q}$ სიმრავლისათვის CE სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $\overline{Q}\setminus E$ სიმრავლეს.

§ 1.2. დამხმარე დებულებები

თეორემა 1.2.1. (კაზარიანი $[2]$): ვთქვათ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა ორთონორმირებული სისტემა ტოტალურია L_E^1 სივრცეში, $f_n\in L_E^{\infty}$, $n=1,2,\ldots$. გარდა ამისა, ვთქვათ N ნატურალური რიცხვია და $M(x)\in L_E^p$, $1\leq p<\infty$. იმისათვის, რომ $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ იყოს L_E^p სივრცის ჩაკეტილი მინიმალური სისტემა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:

(1) $[M(x)]^{-1}\sum\limits_{n=1}^{N}a_n f_n(x)$ ფუნქცია, სადაც a_n $(1\leq n\leq N)$ ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის L_E^q სივრცეს, როცა ყველა a_n უდრის ნულს;

(2) ყოველი k-სთვის $(k=N+1,N+2,\ldots)$ არსებობენ ერთადერთი $a_n^{(k)}$ $(n=1,2,\ldots,N)$ ნამდვილი რიცხვები, ისეთი, რომ:

$$\psi_k(x)=[M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N}a_n^k f_n(x)+f_k(x)\right]$$

ფუნქცია ეკუთვნის L_E^q სივრცეს.

ეს თეორემა დაგვეხმარება ერთი მნიშვნელოვანი ლემის დასამტკიცებლად.

ლემა 1.2.1. ვთქვათ, $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(1.1.2.)$ ტოლობით განსაზღვრული სისტემაა. შემდეგი ორი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ სისტემა $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$, სადაც $1 \le N \le \delta - 1$ და $M(x) \in L_Q^p$, $1 \le p < \infty$, იყოს ჩაკეტილი და მინიმალური L_Q^p სივრცეში:

ა) არსებობს ჰაარის სიმრავლეთა N ცალი განსხვავებული მიმდევრობა

$$\begin{array}{l} Q_1^{(i_{1,1})} \supset \ldots \supset Q_k^{(i_{1,k})} \supset \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ Q_1^{(i_{N,1})} \supset \ldots \supset Q_k^{(i_{N,k})} \supset \ldots \end{array} \tag{1.2.1}$$

სადაც ყოველი $i_{n,k}$ $(1 \le n < N; k = 1,2,\ldots)$ არის ერთ-ერთი შემდეგი რიცხვებიდან $1,\ldots,\delta^k$ რომელთათვისაც

$$Q_1^{(i_{n,1})} \bigcap Q_1^{(i_{m,1})} = \varnothing, \text{ როცა } n \ne m \quad (1 \le n, m \le N) \tag{1.2.2}$$

და

$$[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_k^{(i_{n,k})}}, \; [M(x)]^{-1} \in L^q_{C \bigcup\limits_{n=1}^{N} Q_k^{(i_{n,k})}} \quad (1 \le n \le N; k = 1,2,\ldots), \tag{1.2.3}$$

სადაც $p^{-1} + q^{-1} = 1$;

ბ)
$$\begin{array}{l} V_1 = (\; 1;\ldots;1 \;) \\ V_2 = \left(\alpha_{1,i_{1,1}};\ldots;\alpha_{1,i_{N,1}}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_N = \left(\alpha_{N-1,i_{1,1}};\ldots;\alpha_{N-1,i_{N,1}}\right) \end{array} \tag{1.2.4}$$

ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია (ბაზისია R^N სივრცეში).

დამტკიცება. აუცილებლობა. დავამტკიცოთ ინდუქციის მეთოდით. ვთქვათ, $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა ჩაკეტილი და მინიმალურია L_Q^p სივრცეში. თეორემა 1.2.1 –ის (1) პირობის თანახმად

$$[M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x) \notin L_Q^q, \text{ სადაც } \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \ne 0.$$

რადგან $\sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)$ ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს თითოეულ $Q_1^{(k)}$ $(1 \le k \le \delta)$ სიმრავლეზე, ამოტომ გასაგებია, რომ $[M(x)]^{-1}$ ფუნქციას გააჩნია q რიგის განსაკუთრებულობა აღნიშნული სიმრავლეებიდან რამოდენიმეზე. ვთქვათ, მათი რაოდენობაა r ანუ $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_1^{(i_k)}}$ $(1 \le k \le r)$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{C \bigcup_{k=1}^{r} Q_1^{(i_k)}}$, სადაც $1 \le r \le \delta$ ფიქსირებული ნატურალური რიცხვებია.

ვაჩვენოთ, რომ $r \ge N$. მართლაც, ვთქვათ $r < N$. განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა

$$\begin{aligned} &I_1 = (\ 1;\ldots;1\ ) \\ &I_2 = (\alpha_{1,i_1};\ldots;\alpha_{1,i_r}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &I_N = (\alpha_{N-1,i_1};\ldots;\alpha_{N-1,i_r}) \end{aligned}$$

რადგან $r < N$, ამიტომ აღნიშნული ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია და შესაბამისად არსებობენ $a_1;\ldots;a_N$ ნამდვილი რიცხვები, რომელთათვისაც

$$\sum_{n=1}^{N} a_n I_n = 0, \text{ სადაც } \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \ne 0$$

ეს კი თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $[M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლია $\bigcup_{k=1}^{r} Q_1^{(i_k)}$ სიმრავლეზე და ამიტომ

$$[M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x) \in L^q_{\bigcup_{k=1}^{r} Q_1^{(i_k)}} \tag{1.2.5}$$

მეორეს მხრივ

$$[M(x)]^{-1} \in L^q_{C \bigcup_{k=1}^{r} Q_1^{(i_k)}}$$

და აქედან გამომდინარე

$$[M(x)]^{-1}\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\in L^q_{C\bigcup\limits_{k=1}^{r} Q_1^{(i_k)}} \tag{1.2.6}$$

$(1.2.5)$ და $(1.2.6)$ პირობებიდან მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$[M(x)]^{-1}\sum_{n=1}^{N} a_n\chi_n(x)\in L^q_Q$$

სადაც $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^2 \neq 0$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $r \geq N$ და $I_1,...,I_N$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ეხლა დავამტკიცოთ, რომ $r \leq N$. მართლაც ვთქვათ $r > N$. თეორემა 1.2.1-ის (2) პირობის თანახმად ყოველი m-ისათვის $(m = N+1, N+2,...)$ არსებობენ ერთადერთი $a_n^{(m)}$ $(n = 1,...,N)$ ნამდვილი რიცხვები, რომ

$$\psi_m(x) = [M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)}\chi_n(x) + \chi_m(x)\right]\in L^q_Q .$$

რადგან $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(m)}\chi_n(x) + \chi_m(x)$ ფუნქცია $(N+1 \leq m \leq \delta)$ ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს $Q_1^{(i_k)}$ $(k = 1,...,r)$ სიმრავლეებზე და რადგან $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_1^{(i_k)}}$ $1 \leq k \leq r$, ამიტომ მარტივი დასანახია, რომ ყოველი m-ისთვის $(N+1 \leq m \leq \delta)$ $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(m)}\chi_n(x) + \chi_m(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლია $Q_1^{(i_k)}$ $(k = 1,...,r)$ სიმრავლეებზე.

განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა

$$I_1 = (\ 1;...;1\ )$$
$$I_2 = (\alpha_{1,i_1};...;\alpha_{1,i_r})$$
....
$$I_N = (\alpha_{N-1,i_1};...;\alpha_{N-1,i_r})$$
....
$$I_\delta = (\alpha_{\delta-1,i_1};...;\alpha_{\delta-1,i_r})$$

ზემოთ მოყვანილი $a_n^{(m)}$ $(N+1 \leq m \leq \delta; 1 \leq n \leq N)$ რიცხვებისათვის გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)} I_n + I_m = 0 \quad (N+1 \le m \le \delta)$$

გარდა ამისა, რადგან ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად $I_1,...,I_N$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $I_1,...,I_\delta$ სისტემის რანგია N. ეხლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $r > N$, ამიტომ არსებობს r განზომილებიანი ვექტორი I, რომელიც არ გამოისახება $I_1,...,I_N$ და მაშასადამე $I_1,...,I_\delta$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით, მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება იმას, რომ

$$\begin{aligned} &W_1 = (\ 1;...;1\ ) \\ &W_2 = (\alpha_{1,1};...;\alpha_{1,\delta}) \\ &.............................. \\ &W_\delta = (\alpha_{\delta-1,1};...;\alpha_{\delta-1,\delta}) \end{aligned} \qquad (1.2.7)$$

ვექტორთა სისტემა ბაზისია R^δ სივრცეში. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $r \le N$.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $r \ge N$ და $r \le N$ ე.ი. $r = N$. ანუ არსებობს ზუსტად N ცალი $Q_1^{(i_1)},...,Q_1^{(i_N)}$ ჰაარის სიმრავლე, რომელთათვისაც $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_1^{(i_k)}}$ $(1 \le k \le N)$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{C\bigcup_{k=1}^{N} Q_1^{(i_k)}}$.

ეხლა ინდუქციის მეთოდის თანახმად დაუშვათ, რომ არსებობს ჰაარის სიმრავლეები

$$\begin{aligned} &Q_1^{(i_{1,1})} \supset ... \supset Q_m^{(i_{1,m})} \\ &................................ \\ &Q_1^{(i_{N,1})} \supset ... \supset Q_m^{(i_{N,m})} \end{aligned}$$

რომელთათვისაც სრულდება $(1.2.2)$ და $(1.2.3)$ პირობები, როცა $1 \le k \le m$. $(1.2.3)$ პირობის თანახმად, რადგან თითოეული n-ისთვის $(1 \le n \le N)$ $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_m^{(i_{n,m})}}$, ამიტომ $[M(x)]^{-1}$ ფუნქციას გააჩნია q რიგის განსაკუთებულობა $Q_{m+1}^{(k)}$ $(\delta(i_{n,m}-1)+1 \le k \le \delta i_{n,m})$ სიმრავლეებიდან რამოდენიმეზე. ვთქვათ, მათი რაოდენობაა s ანუ არსებობს ზუსტად s ცალი $Q_{m+1}^{(j_{n,k})} \subset Q_m^{(i_{n,m})}$ $(1 \le k \le s)$ სიმრავლე, რომელთათვისაც

$[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_{m+1}^{(j_{n,k})}}$ $(1 \le k \le s)$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{Q_m^{(i_{n,m})} \setminus \bigcup_{k=1}^{s} Q_{m+1}^{(j_{n,k})}}$, სადაც $1 \le s \le \delta$ ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია.

ვაჩვენოთ, რომ $s=1$. მართლაც, ვთქვათ $s>1$. თეორემა 1.2.1.-ის (2) პირობის თანახმად ყოველი ν-სათვის $\left(\delta^m+(\delta-1)(i_{n,m}-1)+1 \le \nu \le \delta^m+(\delta-1)i_{n,m}+1\right)$ არსებობენ ერთადერთი $a_\eta^{(\nu)}$ $(\eta=1,\ldots,N)$ ნამდვილი რიცხვები, რომ

$$\psi_\nu(x)=[M(x)]^{-1}\left[\sum_{\eta=1}^{N} a_\eta^{(\nu)}\chi_\eta(x)+\chi_\nu(x)\right] \in L_Q^q$$

და შესაბამისად

$$\psi_\nu(x)=[M(x)]^{-1}\left[\sum_{\eta=1}^{N} a_\eta^{(\nu)}\chi_\eta(x)+\chi_\nu(x)\right] \in L^q_{Q_m^{(i_{n,m})}}.$$

რადგან $\sum_{\eta=1}^{N} a_\eta^{(\nu)}\chi_\eta(x)+\chi_\nu(x)$ ფუნქცია $\left(\delta^m+(\delta-1)(i_{n,m}-1)+1 \le \nu \le \delta^m+(\delta-1)i_{n,m}+1\right)$ ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს $Q_{m+1}^{(j_{n,k})}$ $(1 \le k \le s)$ სიმრავლეებზე და რადგან $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_{m+1}^{(j_{n,k})}}$ $(1 \le k \le s)$, ამიტომ ადვილი მისახვედრია, რომ ყოველი ν-სათვის $\left(\delta^m+(\delta-1)(i_{n,m}-1)+1 \le \nu \le \delta^m+(\delta-1)i_{n,m}+1\right)$ $\sum_{\eta=1}^{N} a_\eta^{(\nu)}\chi_\eta(x)+\chi_\nu(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლია $Q_{m+1}^{(j_{n,k})}$ $(1 \le k \le s)$ სიმრავლეებზე. (1.2.8)

განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა

$$U_{n,1}=(\ 1;\ldots;1\ )$$
$$U_{n,2}=\left(\alpha_{1,i_{n,1}};\ldots;\alpha_{1,i_{n,s}}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U_{n,\delta}=\left(\alpha_{\delta-1,i_{n,1}};\ldots;\alpha_{\delta-1,i_{n,s}}\right)$$

ზემოთ მოყვანილი $a_\eta^{(\nu)}$ $\left(\delta^m+(\delta-1)(i_{n,m}-1)+1 \le \nu \le \delta^m+(\delta-1)i_{n,m}+1;1 \le \eta \le N\right)$ რიცხვებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_\nu = \sum_{\eta=1}^{N} a_\eta^{(\nu)} \alpha_{\eta,\xi} ,$$

სადაც $\xi = \dfrac{i_{n,m} - 1}{\delta^{m-1}} + 1$ (მარტივი შესამოწმებელია, რომ $\chi_\eta(x)$ $(1 \le \eta \le N)$ ფუნქციის მნიშვნელობა $Q_m^{(i_{n,m})}$ სიმრავლეზე არის სწორედ $\alpha_{\eta,\xi}$). $(1.2.8)$ პირობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$A_\nu + U_\nu = 0 \quad \left(\delta^m + (\delta - 1)(i_{n,m} - 1) + 1 \le \nu \le \delta^m + (\delta - 1) i_{n,m} + 1\right),$$

მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ თითოეული U_ν ვექტორი მუდმივია (ანუ მისი თითოეული კომპონენტი ერთმანეთის ტოლია), რაც ეწინააღმდეგება იმას, რომ $(1.2.7)$ ტოლობით განსაზღვრული $W_1,\ldots,W_\delta$ ვექტორტა სისტემა ბაზისია R^δ სივრცეში. მაშასადამე მივიღეთ, რომ $s = 1$. ანუ თითოეული n-ისათვის $1 \le n \le N$ არსებობს ერთადერთი $Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})} \subset Q_m^{(i_{n,m})}$ ჰაარის სიმრავლე, რომელთათვისაც $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})}}$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{Q_m^{(i_{n,m})} \setminus Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})}}$. ეხლა რადგან $[M(x)]^{-1} \in L^q_{C \bigcup_{n=1}^{N} Q_m^{(i_{n,m})}}$ და

$$\left[C \bigcup_{n=1}^{N} Q_m^{(i_{n,m})} \right] \cup \left[\bigcup_{n=1}^{N} \left(Q_m^{(i_{n,m})} \setminus Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})} \right) \right] = \left[C \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})} \right],$$

ამიტომ მარტივად მივიღებთ, რომ არსებობს ზუსტად N ცალი $Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})} \subset Q_m^{(i_{n,m})}$ $(1 \le n \le N)$ ჰაარის სიმრავლე რომელთათვისაც $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})}}$ $(1 \le n \le N)$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{C \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{(i_{n,m+1})}}$. აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. დაუშვათ სრულდება ლემისა 1.2.1-ის (ა) და (ბ) პირობები (მარტივი შესამოწმებელია, რომ ყოველთვის მოიძებნება $1 \le i_{1,1} < \ldots < i_{N,1} \le \delta$ ნატურალური რიცხვები, რომელთათვისაც სრულდება (ბ) პირობა). საჭიროა მხოლოდ დამტკიცდეს, რომ ამ შემთხვევაში შესრულდება თეორემა 1.2.1-ის (1) და (2) პირობები, როცა $1 \le N \le \delta - 1$.

რადგან $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_1^{(i_{n,1})}}$ $(1 \le n \le N)$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{C\bigcup\limits_{n=1}^{N} Q_1^{(i_{n,1})}}$, ამიტომ $[M(x)]^{-1}\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)$ ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის L^q_Q სივრცეს, როცა $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \chi_n(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლია $Q_1^{(i_{n,1})}$ $(1 \le n \le N)$ სიმრავლეებიდან თითოეულზე. მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n V_n = \theta$ (სადაც $V_1,...,V_N$ $(1.2.4)$ ტოლობით განსაზღვრული ვექტორთა სისტემაა, ხოლო θ ნულოვანი ვექტორია). ეხლა, რადგან $V_1,...,V_N$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ ეს მოხერხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული $a_n = 0$ $(1 \le n \le N)$. ანუ ადგილი აქვს თეორემა 1.2.1-ის (1) პირობას.

თითოეული m-ისათვის $(m = N+1, N+2, ...)$ განვიხილოთ

$$\psi_m(x) = [M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)} \chi_n(x) + \chi_m(x)\right]$$

ფუნქცია. ვთქვათ, $m = \delta^k + j$ $\left(k = 0,1,...; 1 \le j \le \delta^k(\delta - 1)\right)$ ანუ $\chi_m(x) = \chi_k^{(j)}(x)$, რადგან $[M(x)]^{-1} \notin L^q_{Q_{k+1}^{(i_{n,k+1})}}$ $(1 \le n \le N)$ და $[M(x)]^{-1} \in L^q_{C\bigcup\limits_{n=1}^{N} Q_{k+1}^{(i_{n,k+1})}}$ ამიტომ $\psi_m(x)$ ფუნქცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ ეკუთვნის L^q_Q სივრცეს (და ამ შემთხვევაში $\{\psi_m(x)\}_{m=N+1}^{\infty}$ სისტემა არის $\{M(x)\chi_m(x)\}_{m=N+1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემის შეუღლებული), როცა $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n^{(m)} \chi_n(x) + \chi_m(x)$ ფუნქცია ნულის ტოლია თითოეულ $Q_{k+1}^{(i_{n,k+1})}$ $(1 \le n \le N)$ სიმრავლეზე, ანუ როცა

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)} V_n + V = 0,$$

სადაც $V = (v_1; ...; v_N)$ და $\chi_m(x) = v_n$, როცა $x \in Q_{k+1}^{(i_{n,k+1})}$ $(1 \le n \le N)$. ეხლა რადგან $V_1,...,V_N$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია

(ბაზისია R^N სივრცეში), ამიტომ თითოეული m-ისათვის $(m = N+1, N+2,...)$ არსებობენ ერთადერთი ნამდვილი რიცხვები $a_n^{(m)}$ $(1 \le n \le N)$, რომ

$$\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)} V_n + V = 0$$

და შესაბამისად

$$\psi_m(x) = [M(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(m)} \chi_n(x) + \chi_m(x)\right] \in L_Q^q \qquad (1.2.9)$$

ლემა 1.2.1 დამტკიცებულია.

§ 1.3. ძირითადი თეორემები და შედეგები

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(1.1.2)$ ტოლობით განსაზღვრული სისტემაა (ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $J_1 = (\alpha_{0,1};...;\alpha_{0,N});...;J_N = (\alpha_{N-1,1};...;\alpha_{N-1,N})$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემაა. თუ ეს ასე არ არის $\chi_1;...;\chi_\delta$ ფუნქციების ნუმერაციის შეცვლით ამის მიღწევა შესაძლებელია). მაშინ $\{M_N(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა, სადაც $(1 \le N \le \delta - 1)$ და

$$M_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^{k-1}}, & \text{როცა} \quad x \in Q_k^{\left((n-1)\delta^{k-1}+i\right)} \left(k = 2,3,...;1 \le n \le N; 2 \le i \le \delta\right) \\ 1, & \text{როცა} \quad x \in Q_1^{(i)} \quad (N+1 \le i \le \delta) \end{cases}, \quad (1.3.1)$$

ბაზისია ყველა L_Q^p, $(1 \le p < \infty)$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ $Q_k^{(i_{n,k})} \equiv Q_k^{\left((n-1)\delta^{k-1}+i\right)}$. მარტივი შესამოწმებელია, რომ $M_N(x)$ ფუნქციისათვის და ყოველი q-სთვის $(1 < q \le \infty)$, სრულდება ლემა 1.2.1-ის $(1.2.1)$, $(1.2.2)$, $(1.2.3)$ პირობები. შესაბამისად $\{M_N(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემა ჩაკეტილი და მინიმალურია ყველა L_Q^p, $(1 \le p < \infty)$ სივრცეში. თეორემის დასამტკიცებლად საჭიროა ვაჩვენოთ ისეთი $M_p > 0$ რიცხვის არსებობა, რომლისთვისაც

$$\sup_n \left\| \sum_{k=N+1}^{n} c_k M_N(x)\chi_k(x) \right\|_{L_Q^p} \le M_p \|f\|_{L_Q^p} \qquad (1.3.2)$$

ნებისმიერი $f(x) \in L_Q^p$ ფუნქციისათვის, სადაც $c_k = \int_Q f(t)\psi_k(t)dt$, $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ შეუღლებული სისტემაა $\{M_N(x)\chi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემის. $\{M_N(x)\chi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემის შეუღლებული $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ სისტემა $(1.2.9)$-ის თანახმად განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\psi_k(x) = [M_N(x)]^{-1}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)}\chi_n(x) + \chi_k(x)\right].$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ როცა $N(\delta-1)+\delta+1 \le k \le \delta^2$ $k = \delta^m + j$, სადაც $j = (n-1)\delta^{m-1}(\delta-1)+i$ $\left(m = 2,3,\ldots; \delta \le i \le \delta^{m-1}(\delta-1); 1 \le n \le N\right)$, მაშინ ყველა $a_n^{(k)} = 0$ $1 \le n \le N$ და შესაბამისად $\psi_k(x) = [M_N(x)]^{-1}\chi_k(x)$ ეხლა რადგან აღნიშნული k რიცხვებისთვის $\chi_k(x)$ ფუნქციის სუპორტზე $M_N(x)$ ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს, ამიტომ

$$c_k M_N(x)\chi_k(x) \equiv b_k \chi_k(x) \qquad (1.3.3)$$

სადაც

$$c_k = \int_Q f(t)\psi_k(t)dt, \; b_k = \int_Q f(t)\chi_k(t)dt.$$

ინდუქციის მეთოდით დავამტკიცოთ, რომ ჯამი

$$S_m^{(n)}(x) = \sum_{i=N+1}^{\delta} c_i M_N(x)\chi_i(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} M_N(x)\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x) \qquad (m \ge 1)(1 \le n \le N)$$

ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს

$$S_m^{(n)}(x) = \delta^{j+1} \int_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}} f(t)dt \;\; \text{როცა} \;\; x \in Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)} \;\; (2 \le k \le \delta) \;\; 1 \le j \le m \qquad (1.3.4)$$

და

$$S_m^{(n)}(x) = -\delta^{m+1} M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(n)} \setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\delta^{m+1} \sum_{j=N+1}^{\delta} \frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta} M_N(t) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt \qquad (1.3.5)$$

როცა $x \in Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}$

სადაც $\nabla_n^{(j)} = \det\begin{pmatrix} \alpha_{0,1} \ldots \alpha_{N-1,1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{0,j} \ldots \alpha_{N-1,j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{0,N} \ldots \alpha_{N-1,N} \end{pmatrix} n$ და $\Delta = \det\begin{pmatrix} \alpha_{0,1} \ldots \alpha_{N-1,1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{0,N} \ldots \alpha_{N-1,N} \end{pmatrix}$

ხოლო $S_0(x) = \sum_{i=N+1}^{\delta} c_i M_N(x) \chi_i(x)$ ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს

$$S_0(x) = \delta \int\limits_{Q_1^{(k)}} f(t)dt \quad \text{როცა} \quad x \in Q_1^{(k)} \quad (N+1 \le k \le \delta) \qquad (1.3.6)$$

და $S_0(x) = -\delta \sum_{j=N+1}^{\delta} \frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta} M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt$ როცა $x \in Q_1^{(n)}$ $1 \le n \le N$.

გამოვთვალოთ ჯამი $\sum_{k=N+1}^{\delta} c_k M_N(x) \chi_k(x)$

$$c_k = \int\limits_Q [M_N(t)]^{-1}\left[\chi_k(t) + \sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)}\chi_n(t)\right] f(t)dt =$$

$$= \sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\alpha_{k-1,i} + \sum_{n=1}^{N} a_n^{(k)}\alpha_{n-1,i}\right]\int\limits_{Q_1^{(i)}} f(t)dt =$$

$$= \sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\alpha_{k-1,i} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{n-1,i}\right]\int\limits_{Q_1^{(i)}} f(t)dt$$

სადაც $\Delta_n^{(k)} = \det\begin{pmatrix} & & n & & \\ \alpha_{0,1} & \cdots & \alpha_{k-1,1} & \cdots & \alpha_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,N} & \cdots & \alpha_{k-1,N} & \cdots & \alpha_{N-1,N}\end{pmatrix}$ როცა $x \in Q_1^{(m)}$ $(N+1 \le m \le \delta)$.

$$\sum_{k=N+1}^{\delta} c_k M_N(x)\chi_k(x) =$$

$$= \sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m} - \sum_{k=N+1}^{\delta}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{n-1,i}\alpha_{k-1,m}\right]\int\limits_{Q_1^{(i)}} f(t)dt =$$

$$= \sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m} - \sum_{n=1}^{N}\alpha_{n-1,i}\sum_{k=N+1}^{\delta}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{k-1,m}\right]\int\limits_{Q_1^{(i)}} f(t)dt$$

რადგან $\Delta_n^{(k)} = \delta_{k,n}$, $(1 \le k, n \le N)$, სადაც $\delta_{k,n}$ კრონეკერის დელტაა, ამიტომ

$$\sum_{k=N+1}^{\delta} c_k M_N(x)\chi_k(x) =$$

$$= \sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m} - \sum_{n=1}^{N}\alpha_{n-1,i}\left(\sum_{k=1}^{\delta}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{k-1,m} - \alpha_{n-1,m}\right)\right]\int\limits_{Q_1^{(i)}} f(t)dt$$

გამოვთვალოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{\delta}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{k-1,m}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{\delta}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{k-1,j}A_{n-1,j}\alpha_{k-1,m}=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{N}A_{n-1,j}\sum_{k=1}^{\delta}\alpha_{k-1,j}\alpha_{k-1,m}=0$$

რადგან $j\neq m$. (სადაც $A_{n-1,j}$ $(1\le n,j\le N)$ ალგებრული დამატებაა) ე.ი.

$$\sum_{k=N+1}^{\delta}c_kM_N(x)\chi_k(x)=\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m}+\sum_{n=1}^{N}\alpha_{n-1,i}\alpha_{n-1,m}\right]\int_{Q_1^{(i)}}f(t)dt=$$

$$=\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m}\right]\int_{Q_1^{(i)}}f(t)dt=\delta\int_{Q_1^{(m)}}f(t)dt.$$

$$\sum_{k=N+1}^{\delta}c_kM_N(x)\chi_k(x)=$$

$$=M_N(x)\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m}-\sum_{k=N+1}^{\delta}\sum_{n=1}^{N}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{n-1,i}\alpha_{k-1,m}\right]\int_{Q_1^{(i)}}f(t)dt=$$

$$=M_N(x)\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m}-\sum_{n=1}^{N}\alpha_{n-1,i}\sum_{k=N+1}^{\delta}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{k-1,m}\right]\int_{Q_1^{(i)}}f(t)dt=$$

$$=M_N(x)\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m}-\sum_{n=1}^{N}\alpha_{n-1,i}\left(\sum_{k=1}^{\delta}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{k-1,m}-\alpha_{n-1,m}\right)\right]\int_{Q_1^{(i)}}f(t)dt$$

განვიხილოთ ჯამი

$$\sum_{k=1}^{\delta}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta}\alpha_{k-1,m}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{\delta}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{k-1,j}A_{n-1,j}\alpha_{k-1,m}=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{N}A_{n-1,j}\sum_{k=1}^{\delta}\alpha_{k-1,j}\alpha_{k-1,m}=$$

$$=\frac{\delta A_{n-1,m}}{\Delta}$$

ე.ი.

$$\sum_{k=N+1}^{\delta} c_k M_N(x)\chi_k(x) =$$

$$= M_N(x)\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=N+1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m} + \sum_{n=1}^{N}\alpha_{n-1,i}\alpha_{n-1,m} - \delta\sum_{n=1}^{N}\frac{\alpha_{n-1,i}A_{n-1,m}}{\Delta}\right]\int_{Q_1^{(i)}} f(t)dt =$$

$$= M_N(x)\sum_{i=N+1}^{\delta}\left[\sum_{k=1}^{\delta}\alpha_{k-1,i}\alpha_{k-1,m} - \frac{\delta\nabla_m^{(i)}}{\Delta}\right]\int_{Q_1^{(i)}} f(t)dt =$$

$$= -\sum_{i=N+1}^{\delta}\frac{\delta\nabla_m^{(i)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(i)}} f(t)dt$$

როცა $x \in Q_2^{(n\delta+k)}$ $(2 \le k \le \delta)$ $(0 \le n \le N-1)$

$$\Delta_l^{(i,n+1)} = \det\begin{pmatrix} \alpha_{0,1} & \dots & \overset{l}{0} & \dots & \alpha_{N-1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,n+1} & \dots & \alpha_{i,1} & \dots & \alpha_{N-1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{0,N} & \dots & 0 & \dots & \alpha_{N-1,N} \end{pmatrix}$$

გამოვითვალოთ ჯამი

$$\sum_{i=1}^{\delta-1} C_1^{(n(\delta-1)+i)} M_N(x)\chi_1^{(n(\delta-1)+i)}(x)$$

$$C_1^{(n(\delta-1)+i)} = \sum_{j=2}^{\delta}\int_{Q_2^{(n\delta+j)}}[M_N(t)]^{-1}\left[\delta^{1/2}\alpha_{i,j} - \delta^{1/2}\alpha_{i,1}\right]f(t)dt -$$

$$-\delta^{1/2}\sum_{j=N+1}^{\delta}\int_{Q_1^{(j)}}[M_N(t)]^{-1}\sum_{l=1}^{N}\frac{\Delta_l^{(i,n+1)}\alpha_{l,i}}{\Delta}f(t)dt$$

$$\sum_{i=1}^{\delta-1} C_1^{(n(\delta-1)+i)} M_N(x) \chi_1^{(n(\delta-1)+i)} =$$

$$= \delta \sum_{i=1}^{\delta-1} \sum_{j=2}^{\delta} \left[\alpha_{i,j}\alpha_{i,k} - \alpha_{i,1}\alpha_{i,k} \right] M_N(x) \int\limits_{Q_2^{(n\delta+j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$- \frac{\delta}{\Delta} \sum_{i=1}^{\delta-1} \sum_{j=N+1}^{\delta} \left(\sum_{l=1}^{N} \Delta_l^{(i,n+1)} \alpha_{i,k}\alpha_{l,j} \right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt =$$

$$= \delta \sum_{j=2}^{\delta} \left[\sum_{i=0}^{\delta-1} \alpha_{i,j}\alpha_{i,k} - \sum_{i=0}^{\delta-1} \alpha_{i,1}\alpha_{i,k} \right] M_N(x) \int\limits_{Q_2^{(n\delta+j)}} [M(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$- \frac{\delta}{\Delta} \sum_{j=N+1}^{\delta} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{l,j} \left(\sum_{i=1}^{\delta-1} \alpha_{i,1}\alpha_{i,k} A_{n+1,l} \right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$= \delta^2 \int\limits_{Q_2^{(n\delta+k)}} f(t)dt - \frac{\delta}{\Delta} \sum_{j=N+1}^{\delta} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{l,j} A_{n+1,l} \left(\left(\sum_{i=0}^{\delta-1} \alpha_{i,1}\alpha_{i,k} \right) - 1 \right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$= \delta^2 \int\limits_{Q_2^{(n\delta+k)}} f(t)dt + \frac{\delta}{\Delta} \sum_{j=N+1}^{\delta} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{l,j} A_{n+1,l} M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$= \delta^2 \int\limits_{Q_2^{(n\delta+k)}} f(t)dt + \frac{\delta}{\Delta} \sum_{j=N+1}^{\delta} \nabla_{n+1}^{(j)} M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt$$

ამიტომ

$$S_1^{(n)}(x) = \delta^2 \int\limits_{Q_2^{((n-1)\delta+k)}} f(t)dt + \sum_{j=N+1}^{\delta} \frac{\delta\nabla_n^{(j)}}{\Delta} M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt - \sum_{j=N+1}^{\delta} \frac{\delta\nabla_n^{(j)}}{\Delta} M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$= \delta^2 \int\limits_{Q_2^{((n-1)\delta+k)}} f(t)dt$$

როცა $x \in Q_2^{((n-1)\delta+1)}$ $(1 \le n \le N)$

$$\sum_{i=1}^{\delta-1} C_1^{((n-1)(\delta-1)+i)} M_N(x)\chi_1^{((n-1)(\delta-1)+i)}(x) =$$

$$C_1^{((n-1)(\delta-1)+i)} = \sum_{j=2}^{\delta} \int\limits_{Q_2^{((n-1)\delta+j)}} [M_N(t)]^{-1}\left[\delta^{1/2}\alpha_{i,j} - \delta^{1/2}\alpha_{i,1}\right] f(t)dt -$$

$$-\delta^{1/2} \sum_{j=N+1}^{\delta} \int\limits_{Q_1^{(j)}} [M_N(t)]^{-1} \sum_{l=1}^{N} \frac{\Delta_l^{(i,n)}\alpha_{l,i}}{\Delta} f(t)dt$$

$$\sum_{i=1}^{\delta-1} C_1^{((n-1)(\delta-1)+i)} M_N(x)\chi_1^{((n-1)(\delta-1)+i)} =$$

$$= \delta \sum_{i=1}^{\delta-1}\sum_{j=2}^{\delta} \left[\alpha_{i,j}\alpha_{i,1} - \alpha_{i,1}\alpha_{i,1}\right] M_N(x) \int\limits_{Q_2^{((n-1)\delta+j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\frac{\delta}{\Delta}\sum_{i=1}^{\delta-1} \sum_{j=N+1}^{\delta} \left(\sum_{l=1}^{N} \Delta_l^{(i,n)} \alpha_{i,1}\alpha_{l,j}\right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt =$$

$$= \delta \sum_{j=2}^{\delta} \left[\sum_{i=0}^{\delta-1} \alpha_{i,j}\alpha_{i,1} - \sum_{i=0}^{\delta-1} \alpha_{i,1}\alpha_{i,1}\right] M_N(x) \int\limits_{Q_2^{((n-1)\delta+j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\frac{\delta}{\Delta} \sum_{j=N+1}^{\delta} \left(\sum_{l=1}^{N} \alpha_{l,j} \sum_{i=1}^{\delta-1} \alpha_{i,1}\alpha_{i,1} A_{n,l}\right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$= -\delta^2 \sum_{j=2}^{\delta} M_N(x) \int\limits_{Q_2^{((n-1)\delta+j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\frac{\delta}{\Delta} \sum_{j=N+1}^{\delta} \sum_{l=1}^{N} \alpha_{l,j} A_{n,l} \left(\left(\sum_{i=0}^{\delta-1} \alpha_{i,1}\alpha_{i,1}\right) - 1\right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$=-\delta^2 M_N(x)\int\limits_{\bigcup\limits_{j=2}^{\delta} Q_2^{((n-1)\delta+j)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\frac{\delta}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}A_{n,l}(\delta-1)M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt=$$

$$=-\delta^2 M_N(x)\int\limits_{\bigcup\limits_{j=2}^{\delta} Q_2^{((n-1)\delta+j)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\frac{\delta(\delta-1)}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\nabla_n^{(j)}M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt$$

აქედან

$$S_1^{(n)}(x)=-\delta^2 M_N(x)\int\limits_{\bigcup\limits_{j=2}^{\delta} Q_2^{((n-1)\delta+j)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\frac{\delta(\delta-1)}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\nabla_n^{(j)}M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt-$$

$$-\frac{\delta}{\Delta_j}\sum_{j=N+1}^{\delta}\nabla_n^{(j)}M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt=-\delta^2 M_0(x)\int\limits_{\bigcup\limits_{j=2}^{\delta} Q_2^{((n-1)\delta+j)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\delta^2\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt$$

დავუშვათ, რომ სამართლიანია $(1.3.4)$ $(1.3.5)$ ტოლობები. დავთვალოთ ჯამი $S_{m+1}^{(n)}(x)$.

$$S_{m+1}^{(n)}(x)=S_m^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{\delta-1}C_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)}M_N(x)\chi_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)}$$

$$C_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)}=\sum_{j=2}^{\delta}\int\limits_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+j\right)}}[M_N(t)]^{-1}\left[\delta^{m+1/2}\alpha_{i,j}-\delta^{m+1/2}\alpha_{i,1}\right]f(t)dt-$$

$$-\delta^{m+1/2}\alpha_{i,1}\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\delta^{m+1/2}\sum_{j=N+1}^{\delta}\int\limits_{Q_1^{(j)}}[M_N(t)]^{-1}\sum_{l=1}^{N}\frac{\Delta_l^{(i,n)}}{\Delta}\alpha_{l,i}f(t)dt$$

როცა $x\in Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}$ $(2\le k\le\delta)$

$$\sum_{i=1}^{\delta-1} C_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)} M_N(x)\chi_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)} =$$

$$= \delta^{m+1}\sum_{i=1}^{\delta-1}\sum_{j=2}^{\delta}\left[\alpha_{i,j}\alpha_{i,k} - \alpha_{i,1}\alpha_{i,k}\right] M_N(x) \int\limits_{Q_2^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+j\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\sum_{i=1}^{\delta-1}\delta^{m+1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,k}M_N(t) \int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{i=1}^{\delta-1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\left(\sum_{l=1}^{N}\Delta_l^{(i,n)}\alpha_{i,k}\alpha_{l,j}\right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt =$$

$$= \delta^{m+1}\sum_{j=2}^{\delta}\left[\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,j}\alpha_{i,k} - \sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,k}\right] M_N(x) \int\limits_{Q_2^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+j\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\delta^{m+1}\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,k}M_N(t) \int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt +$$

$$+\delta^{m+1}M_N(t) \int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}\left(\sum_{i=1}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,k}A_{n,l}\right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$= \delta^{m+2} \int\limits_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}} f(t)dt + \delta^{m+1}M_N(t) \int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-1} f(t)dt -$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}A_{n,l}\left(\left(\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,k}\right)-1\right) M_N(x) \int\limits_{Q_1^{(j)}} f(t)dt =$$

$$=\delta^{m+2}\int_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}} f(t)dt+\delta^{m+1}M_N(t)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}A_{n,l}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}} f(t)dt=\delta^{m+2}\int_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}} f(t)dt+$$

$$+\delta^{m+1}M_N(t)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+\delta^{m+1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}} f(t)dt$$

აქედან კი მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$S_{m+1}^{(n)}=-\delta^{m+1}M_N(t)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\delta^{m+1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}} f(t)dt+$$

$$+\delta^{m+2}\int_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}} f(t)dt+\delta^{m+1}M_N(t)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+$$

$$+\delta^{m+1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}} f(t)dt=\delta^{m+2}\int_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}} f(t)dt$$

როცა $x\in Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}$ $(2\le k\le\delta)$.

როცა $x\in Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}$

$$\sum_{i=1}^{\delta-1}C_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)}M_N(x)\chi_{m+1}^{\left(\delta^m(\delta-1)(n-1)+i\right)}=$$

$$=\delta^{m+1}\sum_{i=1}^{\delta-1}\sum_{j=2}^{\delta}\left[\alpha_{i,j}\alpha_{i,k}-\alpha_{i,1}\alpha_{i,1}\right]M_N(x)\int_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+j\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{\delta-1}\delta^{m+1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,1}M_N(t)\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{i=1}^{\delta-1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\left(\sum_{l=1}^{N}\Delta_l^{(i,n)}\alpha_{i,1}\alpha_{l,j}\right)M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt=$$

$$=\delta^{m+1}\sum_{j=2}^{\delta}\left[\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,j}\alpha_{i,1}-\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,1}\right]M_N(x)\int\limits_{Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+j\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\delta^{m+1}\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,1}M_N(t)\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+$$

$$+\delta^{m+1}M_N(t)\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}\left(\sum_{i=1}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,1}A_{n,l}\right)M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt=$$

$$=-\delta^{m+2}M_N(x)\int\limits_{\bigcup_{j=2}^{\delta}Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+k\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\delta^{m+2}M_N(t)\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+$$

$$+\delta^{m+1}M_N(t)\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}A_{n,l}\left(\left(\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}\alpha_{i,1}\right)-1\right)M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt=$$

$$=-\delta^{m+2}M_N(x)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+\delta^{m+1}M_N(t)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\frac{\delta^{m+2}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}A_{n,l}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt-\frac{\delta^{m+1}}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\sum_{l=1}^{N}\alpha_{l,j}A_{n,l}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt=$$

$$=-\delta^{m+2}M_N(x)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+\delta^{m+1}M_N(t)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\delta^{m+2}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt+\delta^{m+1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt$$

და შესაბამისად

$$S_{m+1}^{(n)}(x)=-\delta^{m+1}M_N(x)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\delta^{m+1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt-$$

$$-\delta^{m+2}M_N(x)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+2}^{\left(\delta^{m+1}(n-1)+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt+\delta^{m+1}M_N(x)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-$$

$$-\delta^{m+2}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt+\delta^{m+1}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt=$$

$$=-\delta^{m+2}M_N(x)\int_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left(\delta^m(n-1)+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt-\delta^{m+2}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}M_N(x)\int_{Q_1^{(j)}}f(t)dt$$

$(1.3.5)$ ტოლობის გამოყენებით შევაფასოთ $S_m^{(n)}(x)$ $(1\le n\le N)$ ჯამის ნორმა $Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}$ სიმრავლეზე. ამისათვის შევნიშნოთ, რომ

$$\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|M_N(x)|^p dx\right)^{1/p}=\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\delta-1}{\delta^{k+1}}\frac{1}{\delta^{pk}}\right)^{1/p}=\frac{\delta-1}{\delta}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\delta^{(p+1)k}}\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{\delta-1}{\delta}\frac{\frac{1}{\delta^{(p+1)(m+1)}}}{1-\frac{1}{\delta^{p+1}}}\right)^{1/p}=\left(\frac{\delta-1}{\delta}\frac{1}{\delta^{(p+1)(m+1)}}\frac{\delta^{p+1}}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}= \qquad (1.3.7)$$

$$=\left(\frac{\delta-1}{\delta^{(m+1)p}\delta^{m+1}}\frac{\delta^{p}}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}=\frac{1}{\delta^{m+1}}\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta^{m+1}\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}$$

და როცა $p>1$, $q^{-1}+p^{-1}=1$,

$$\left(\int\limits_{Q^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|M_N(t)|^{-q} dt\right)^{1/p}=\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{(\delta-1)\delta^{qk}}{\delta^{k+1}}\right)^{1/q}<\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{(\delta-1)\delta^{qk}}{\delta^{k+1}}\right)^{1/q}=$$

$$=\left(\frac{\delta-1}{\delta}\sum_{k=0}^{m}\delta^{(q-1)k}\right)^{1/q}=\left(\frac{\delta-1}{\delta}\frac{\delta^{(m+1)(q-1)}-1}{\delta^{q-1}-1}\right)^{1/q}<\left(\frac{(\delta-1)\delta^{(m+1)(q-1)}}{\delta^{q}-\delta}\right)^{1/q}=$$

$$=\delta^{\frac{m+1}{p}}\left(\frac{\delta-1}{\delta^{q}-\delta}\right)^{1/q}.$$

ყოველი n და j-სთვის $(1\le n\le N; N+1\le j\le\delta)$ ცხადია $\nabla_n^{(j)}<N!B^N$, სადაც $B=\max\left(\left|\alpha_{i,j}\right|\right)$ $(0\le i\le N-1; N+1\le j\le N)$, ამიტომ

$$\left|\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt\right|<\frac{N!B^N}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\int\limits_{Q_1^{(j)}}|f(t)|dt\le\frac{N!B^N}{\Delta}\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{1}{\delta}\left(\int\limits_{Q_1^{(j)}}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}\le$$

$$\leq \frac{N!B^N(\delta-N)}{\delta}\left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

ეხლა, რადგან

$$\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}\left|S_m^{(n)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\leq\delta^{m+1}\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}\left|M_N(x)\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt\right|^p dx\right)^{1/p}+$$

$$+\delta^{m+1}\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}\left|M_N(x)\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt\right|^p\right)^{1/p}=$$

$$=\delta^{m+1}\left|\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt\right|\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|M_N(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+\delta^{m+1}\left|\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_n^{(j)}}{\Delta}\int\limits_{Q_1^{(j)}}f(t)dt\right|\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|M_N(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

და

$$\left|\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-1}f(t)dt\right|\leq\left(\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}[M_N(t)]^{-q}\,dt\right)^{1/q}\leq$$

$$\leq \left(\int_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-q} \, dt \right)^{1/q}$$

ამიტომ, როცა $p>1$ ვღებულობთ

$$\left(\int_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left| S_m^{(n)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \delta^{m+1} \left(\int_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{Q_1^{(n)} \setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} [M_N(t)]^{-q} \, dt \right)^{1/q} \left(\int_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |M_N(t)|^p \, dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^{m+1} \frac{N! B^N (\delta - N)}{\delta} \left(\int_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |M_N(x)|^p \right)^{1/p} <$$

$$< \delta^{m+1} \delta^{\frac{(m+1)}{p}} \left(\frac{\delta - 1}{\delta^q - \delta} \right)^{1/q} \frac{1}{\delta^{m+1}} \left(\frac{(\delta-1)\delta^p}{\delta^{m+1}\left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} \left(\int_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^{m+1} \frac{N! B^N (\delta - N)}{\delta} \frac{1}{\delta^{m+1}} \left(\frac{(\delta-1)\delta^p}{\delta^{m+1}\left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} \left(\int_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} <$$

$$<\left((\delta-1)\left(\frac{\delta^{p}}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\delta^{q}-\delta}\right)^{1/q}+\frac{N!B^{N}(\delta-N)}{\delta}\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta^{m+1}\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\right)\left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|f(t)|^{p}dt\right)^{1/p}$$

ანუ

$$\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}\left|S_{m}^{(n)}(x)\right|^{p}dx\right)^{1/p}<\alpha_{p}\left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|f(t)|^{p}dt\right)^{1/p}\qquad(1.3.8)$$

სადაც

$$\alpha_{p}=(\delta-1)\left(\frac{\delta^{p}}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\delta^{q}-\delta}\right)^{1/q}+\frac{N!B^{N}(\delta-N)}{\delta}\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta^{m+1}\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p},$$

ხოლო, როცა $p=1$ $(1.3.5)$ ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}\left|S_{m}^{(n)}(x)\right|^{p}dx\right)^{1/p}\leq\delta^{m+1}\left|\int\limits_{Q_{1}^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}\left[M_{N}(t)\right]^{-1}f(t)dt\right|\left\|\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|M_{N}(x)|^{p}dx\right)^{1/p}\right.+$$

$$+\delta^{m+1}\left|\sum_{j=N+1}^{\delta}\frac{\nabla_{n}^{(j)}}{\Delta}\int\limits_{Q_{1}^{(j)}}f(x)dx\right|\left\|\left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|M_{N}(x)|^{p}dx\right)^{1/p}\right.$$

სადაც $M_{N}(x)$ ფუნქციის განმარტების თანახმად

$$\left|\left[M_{N}(x)\right]^{-1}\right|\leq\delta^{m},\ \text{როცა}\ \ x\in Q_{1}^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}$$

ამ უტოლობებიდან და $(1.3.6)$ დამოკიდებულებიდან, როცა $p=1$, ვღებულობთ

$$\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}\left|S_{m}^{(n)}(x)\right|^{p}dx\leq\delta^{m+1}\delta^{m}\int\limits_{Q_{1}^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|f(t)|dt\,\frac{1}{\delta^{m+1}}\frac{(\delta-1)\delta}{\delta^{m+1}\left(\delta^{2}-1\right)}+$$

$$+\delta^{m+1}N!B^N(\delta-N)\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|f(t)|dt\frac{1}{\delta^{m+1}}\frac{(\delta-1)\delta}{\delta^{m+1}\left(\delta^2-1\right)}<$$

$$<\left(\frac{1+N!B^N(\delta-N)}{\delta+1}\right)\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|f(t)|dt$$

ანუ $\displaystyle\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}\left|S_m^{(n)}(x)\right|^p dx<\alpha_1\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|f(t)|dt$ სადაც $\displaystyle\alpha_1=\frac{1+N!B^N(\delta-N)}{\delta+1}$ (1.3.9)

ეხლა (1.3.4) ტოლობიდან გვაქვს

$$\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}\left|S_m^{(n)}(x)\right|^p dx=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2}^{\delta}\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}\delta^{(j+1)p}\left|\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}f(t)dt\right|^p dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2}^{\delta}\delta^{(j+1)p}\left|\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}f(t)dt\right|^p\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}dx=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2}^{\delta}\frac{\delta^{(j+1)p}}{\delta^{j+1}}\left|\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}f(t)dt\right|^p\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2}^{\delta}\frac{\delta^{(j+1)p}}{\delta^{j+1}}\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}|f(t)|^p dt\left(\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}dt\right)^{\frac{p}{q}}=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2}^{\delta}\frac{\delta^{(j+1)p}}{\delta^{j+1}}\frac{1}{\delta^{(j+1)\frac{p}{q}}}\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}|f(t)|^p dt=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2}^{\delta}\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}}|f(t)|^p dt=$$

$$=\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}}|f(t)|^p dt \tag{1.3.10}$$

ასევე $(1.3.6)$-დან ვღებულობთ, რომ

$$\int\limits_{\bigcup_{k=N+1}^{\delta} Q_1^{(k)}} [S_0(x)]^p dx = \sum_{k=N+1}^{\delta} \int\limits_{Q_1^{(k)}} \delta^p \left| \int\limits_{Q_1^{(k)}} f(t)dt \right|^p dx = \sum_{k=N+1}^{\delta} \delta^p \left| \int\limits_{Q_1^{(k)}} f(t)dt \right|^p \int\limits_{Q_1^{(k)}} dx =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\delta} \frac{\delta^p}{\delta} \left| \int\limits_{Q_1^{(k)}} f(t)dt \right|^p \le \sum_{k=N+1}^{\delta} \frac{\delta^p}{\delta} \int\limits_{Q_1^{(k)}} |f(t)|^p dt \left(\int\limits_{Q_1^{(k)}} dx \right)^{\frac{p}{q}} = \tag{1.3.11}$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\delta} \frac{\delta^p}{\delta \delta^{\frac{p}{q}}} \int\limits_{Q_1^{(k)}} |f(t)|^p dt = \sum_{k=N+1}^{\delta} \int\limits_{Q_1^{(k)}} |f(t)|^p dt = \int\limits_{\bigcup_{k=N+1}^{\delta} Q_1^{(k)}} |f(t)|^p dt$$

შევაფასოთ

$$\hat{S}_m(x) = \sum_{i=N+1}^{\delta} c_i M_N(x) \chi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} M_N(x) \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)$$

ჯამის ნორმა $Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}$ $(1 \le n \le N)$ და $Q \setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}$ სიმრავლეებზე.

რადგან $\hat{S}_m(x) = S_m^{(n)}(x)$, როცა $x \in Q_1^{(n)}$ $(1 \le n \le N)$ და $\hat{S}_m(x) = S_0(x)$, როცა $x \in Q_1^{(k)}$ $(N+1 \le k \le \delta)$ ამიტომ $(1.3.8)$ და $(1.3.9)$-ის თანახმად

$$\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx < \alpha_p \left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \qquad p \ge 1 \tag{1.3.12}$$

და $(1.3.10)$ და $(1.3.11)$-ის თანახმად

$$\int\limits_{Q \setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{Q \setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|S_m^{(n)}(x)\right|^p dx + \int\limits_{\bigcup_{k=N+1}^{\delta} Q_1^{(k)}} |S_0(x)|^p dx \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p\,dt + \int\limits_{\bigcup_{k=N+1}^{\delta} Q_1^{(k)}} |f(x)|^p\,dt = \int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p\,dt$$

საიდანაც მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$\left(\int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} \le \left(\int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \qquad (1.3.13)$$

ეხლა $(1.3.12)$ და $(1.3.13)$-დან გვაქვს

$$\left(\int\limits_{Q} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{N} \int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx + \int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N} \left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\hat{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} <$$

$$< \sum_{n=1}^{N} \alpha_p \left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} + \left(\int\limits_{Q\setminus \bigcup_{n=1}^{N} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \le N\alpha_p \left(\int\limits_{Q} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int\limits_{Q} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} = \left(N\alpha_p + 1\right) \left(\int\limits_{Q} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p}.$$

ვთქვათ, $l = \delta^m + (s-1)(\delta-1) + r \quad \left(m = 0,1,\ldots; 1 \le s \le \delta^m; 0 \le r \le \delta - 2\right)$. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $s \ge N\delta^{m-1} + 1$. გვაქვს

$$\left\|\sum_{k=N+1}^{l} c_k M_N(x)\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p} \le$$

$$\le \left\|\sum_{k=1}^{l} b_k \chi_k(x)\right\|_{L_Q^p} + \left\|\sum_{k=1}^{l} b_k \chi_k(x) - \sum_{k=N+1}^{l} c_k M_N(x)\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p} \tag{1.3.14}$$

$(1.3.3)$ ტოლობიდან გამომდინარე

$$\sum_{k=1}^{l} b_k \chi_k(x) - \sum_{k=N+1}^{l} c_k M_N(x)\chi_k(x) = \sum_{k=1}^{\delta} b_k \chi_k(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x) - \sum_{k=N+1}^{\delta} c_k M_N(x)\chi_k(x) - \tag{1.3.15}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} M_N(x) \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)$$

ინდუქციის მეთოდით ასევე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ჯამი

$$\hat{B}_m(x) = \sum_{k=1}^{\delta} b_k \chi_k(x) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)$$

ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს

$$\hat{B}_m(x) = \delta^{j+1} \int_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}} f(t)dt\,, \text{ როცა } x \in Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)} \,(2 \le k \le \delta)\,(1 \le j \le m)$$

$$\hat{B}_m(x) = \delta^{m+1} \int_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} f(t)dt\,, \text{ როცა } x \in Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)} \,(1 \le n \le N)$$

$$\text{და } \hat{B}_m(x) = \delta \int_{Q_1^{(k)}} f(t)dt\,, \text{ როცა } x \in Q_1^{(k)} \,(N \le k \le \delta)$$

შესაბამისად

$$\left(\int_Q \left|\hat{B}_m(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le \left(\int_Q |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (m = 0,1,\dots) \tag{1.3.16}$$

$$\left\|\hat{B}_m(x)-\hat{s}_m(x)\right\|_{L_Q^p}\le\left(N\alpha_p+2\right)\|f\|_{L_Q^p}\tag{1.3.17}$$

და რადგან

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}b_k\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}\le\|f\|_{L_Q^p}\tag{1.3.18}$$

ყოველივე ამის შემდეგ $(1.3.14)$, $(1.3.15)$, $(1.3.17)$ და $(1.3.18)$-დან ვღებულობთ $(1.3.2)$ უტოლობას, სადაც $M_p=N\alpha_p+3$.

ეხლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $s\le N\delta^{m-1}$. გამოვყოთ ორი ქვეშემთხვევა. პირველი, როცა $(v-1)\delta^{m-1}+2\le s\le v\delta^{m-1}$ $(1\le v\le N)$. გვაქვს

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{k=N+1}^{l}c_kM_N(x)\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}\le\\&\le\left\|\sum_{k=1}^{l}b_k\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}+\left\|\sum_{k=1}^{l}b_k\chi_k(x)-\sum_{k=N+1}^{l}c_kM_N(x)\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}\end{aligned}\tag{1.3.19}$$

$(1.3.3)$ ტოლობიდან გამომდინარე

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{l}b_k\chi_k(x)-\sum_{k=N+1}^{l}c_kM_N(x)\chi_k(x)=\sum_{k=1}^{\delta}b_k\chi_k(x)+\\&+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{v}\sum_{j=1}^{\delta-1}b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)+\\&+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=v+1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1}b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)-\sum_{k=N+1}^{\delta}c_kM_N(x)\chi_k(x)-\\&-\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{v}\sum_{j=1}^{\delta-1}c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}M_N(x)\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)-\\&-\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=v+1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1}c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}M_N(x)\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)\end{aligned}\tag{1.3.20}$$

ინდუქციის მეთოდით ასევე შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ჯამი

$$\widetilde{B}_m(x)=\sum_{k=1}^{\delta} b_k\chi_k(x)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\delta-1} b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=\nu+1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)$$

ღებულობს შემდეგ მნიშვნელობებს

$$\widetilde{B}_m(x)=\delta^{j+1}\int\limits_{Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}} f(t)dt,\ \text{როცა}\ \ x\in Q_{j+1}^{\left((n-1)\delta^j+k\right)}\left(2\le k\le\delta\right)\left(1\le j\le m;1\le n\le\nu\right)$$

$$\widetilde{B}_m(x)=\delta^{m+1}\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} f(t)dt,\ \text{როცა}\ \ x\in Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}\left(1\le n\le\nu\right)$$

$$\widetilde{B}_m(x)=\delta^{m}\int\limits_{Q_{m}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}} f(t)dt,\ \text{როცა}\ \ x\in Q_{m}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}\left(\nu+1\le n\le N\right)$$

$$\text{და}\ \ \widetilde{B}_m(x)=\delta\int\limits_{Q_1^{(k)}} f(t)dt,\ \text{როცა}\ \ x\in Q_1^{(k)}\left(N+1\le k\le\delta\right)$$

შესაბამისად

$$\left(\int\limits_Q\left|\widetilde{B}_m(x)\right|^p dx\right)^{1/p}\le\left(\int\limits_Q\left|f(t)\right|^p dt\right)^{1/p}\quad(m=0,1,\ldots)\qquad(1.3.21)$$

შევაფასოთ

$$\widetilde{S}_m(x)=\sum_{i=N+1}^{\delta} c_k M_N(x)\chi_i(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}M_N(x)\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{n=\nu+1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}M_N(x)\chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x)$$

ჯამის ნორმა $Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}$ $(1\le n\le v)$, $Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}$ $(v+1\le n\le N)$ და $Q\setminus\left(\bigcup\limits_{n=1}^{v}Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}\bigcup\bigcup\limits_{n=v+1}^{N}Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}\right)$ სიმრავლეებზე. რადგან $\widetilde{S}_m(x)=S_m^{(n)}(x)$, როცა $x\in Q_1^{(n)}$ $(1\le n\le v)$, $\widetilde{S}_m(x)=S_{m-1}^{(n)}(x)$, როცა $x\in Q_1^{(n)}$ $(v+1\le n\le N)$ და $\widetilde{S}_m(x)=S_0(x)$, როცა $x\in Q_1^{(k)}$ $(N+1\le k\le\delta)$, ამიტომ $(1.3.8)$ და $(1.3.9)$-ის თანახმად

$$\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}\left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx<\alpha_p\left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}\qquad(1\le n\le v;p\ge1);$$

$$\int\limits_{Q_{m}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}}\left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx<\alpha_p\left(\int\limits_{CQ_{m1}^{\left((n-1)\delta^{m-}+1\right)}}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}\qquad(v+1\le n\le N;p\ge1)\quad(1.3.22)$$

და $(1.3.10)$ და $(1.3.11)$-ის თანახმად

$$\int\limits_{Q\setminus\left(\bigcup\limits_{n=1}^{v}Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}\bigcup\bigcup\limits_{n=v+1}^{N}Q_{m1}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}\right)}\left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx=\sum_{n=1}^{v}\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}\left|S_m^{(n)}(x)\right|^p dx+$$

$$\sum_{n=v+1}^{N}\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}}\left|S_m^{(n)}(x)\right|^p dx+\int\limits_{\bigcup\limits_{k=N+1}^{\delta}Q_1^{(k)}}|S_0(x)|^p dx\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{v}\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}}|f(t)|^p dt+\sum_{n=1}^{v}\int\limits_{Q_1^{(n)}\setminus Q_{m}^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}}|f(t)|^p dt+\int\limits_{\bigcup\limits_{k=N+1}^{\delta}Q_1^{(k)}}|f(x)|^p dt=$$

$$= \int\limits_{Q \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{v} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)} \cup \bigcup_{n=v+1}^{N} Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)} \right)} |f(t)|^p \, dt$$

საიდანაც მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$\left(\int\limits_{Q \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{v} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)} \cup \bigcup_{n=v+1}^{N} Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)} \right)} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} \le \left(\int\limits_{Q \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{v} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)} \cup \bigcup_{n=v+1}^{N} Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)} \right)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \qquad (1.3.23)$$

ეხლა (1.3.22) და (1.3.23)-დან გვაქვს

$$\left(\int\limits_{Q} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{v} \int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx + \sum_{n=v+1}^{N} \int\limits_{Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx + \int\limits_{Q \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{v} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)} \cup \bigcup_{n=v+1}^{N} Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)} \right)} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{v} \left(\int\limits_{Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} + \sum_{n=v+1}^{N} \left(\int\limits_{Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int\limits_{Q \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{v} Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)} \cup \bigcup_{n=v+1}^{N} Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)} \right)} \left|\widetilde{S}_m(x)\right|^p dx \right)^{1/p} < \sum_{n=1}^{v} \alpha_p \left(\int\limits_{CQ_{m+1}^{\left((n-1)\delta^m+1\right)}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+\sum_{n=\nu+1}^{N}\alpha_p\left(\int\limits_{CQ_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int\limits_{Q\setminus\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\nu}Q_{m+1}^{\left((n-1)\delta^{m}+1\right)}\cup\bigcup\limits_{n=\nu+1}^{N}Q_m^{\left((n-1)\delta^{m-1}+1\right)}\right)}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le$$

$$\le\nu\alpha_p\left(\int\limits_Q|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+(N-\nu)\alpha_p\left(\int\limits_Q|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int\limits_Q|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}= \tag{1.3.24}$$

$$=\left(N\alpha_p+1\right)\left(\int\limits_Q|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

$(1.3.21)$ და $(1.3.24)$-დან გვაქვს

$$\left\|\widetilde{B}_m(x)-\widetilde{S}_m(x)\right\|_{L_Q^p}\le\left(N\alpha_p+2\right)\|f\|_{L_Q^p} \tag{1.3.25}$$

და რადგან

$$\left\|\sum_{k=1}^{l}b_k\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}\le\|f\|_{L_Q^p} \tag{1.3.26}$$

ყოველივე ამის შემდეგ $(1.3.19)$, $(1.3.20)$, $(1.3.25)$ და $(1.3.26)$-დან ვღებულობთ $(1.3.2)$ უტოლობას, სადაც $M_p=N\alpha_p+3$.

განვიხილოთ მეორე ქვეშემთხვევა, როცა $s\le N\delta^{m-1}$ და $s\le\nu\delta^{m-1}+1$ $(0\le\nu\le N-1)$. გვაქვს

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{k=N+1}^{l}c_kM_N(x)\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}\le\\&\le\left\|\sum_{k=1}^{l}b_k\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}+\left\|\sum_{k=1}^{l}b_k\chi_k(x)-\sum_{k=N+1}^{l}c_kM_N(x)\chi_k(x)\right\|_{L_Q^p}\end{aligned} \tag{1.3.27}$$

$(1.3.3)$ ტოლობიდან გამომდინარე

$$\sum_{k=1}^{l} b_k \chi_k(x) - \sum_{k=N+1}^{l} c_k M_N(x)\chi_k(x) = \sum_{k=1}^{\delta} b_k \chi_k(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{v}\sum_{j=1}^{\delta-1} b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=v+1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} b_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x) +$$

$$+\sum_{j=1}^{r} b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x) - \sum_{k=N+1}^{\delta} c_k M_N(x)\chi_k(x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{v}\sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} M_N(x) \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=v+1}^{N}\sum_{j=1}^{\delta-1} c_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)} M_N(x) \chi_i^{\left(\delta^{i-1}(\delta-1)(n-1)+j\right)}(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{r} c_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x) = \tag{1.3.28}$$

$$= \widetilde{B}_m(x) + \sum_{j=1}^{r} b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x) - \widetilde{S}_m(x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{r} c_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}$$

შევაფასოთ $\sum_{j=1}^{r} b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)$ და $\sum_{j=1}^{r} c_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} M_N(x) \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}$ ჯამების ნორმები. გვაქვს:

$$\left(\int_Q \left|\sum_{j=1}^{r} b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r}\left(\int_Q \left| b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}\chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r}\left(\int_Q \left|\int_Q \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(t) f(t)dt\, \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r}\left(\int_Q \left(\int_Q \left|\chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(t)\right|\left|f(t)\right|dt\left|\chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right|\right)^p dx\right)^{1/p}$$

ეხლა, რადგან $\left|\chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right| \leq B$, სადაც $B = \max\{\alpha_{i,j}\}$ $(0 \leq i \leq \delta - 1; 1 \leq j \leq \delta)$, ამიტომ

$$\left(\int_Q \left|\sum_{j=1}^{r} b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}\chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq B^2 \sum_{j=1}^{r}\left(\int_Q \left(\int_Q \left|f(t)\right|dt\right)^p dx\right)^{1/p} \leq B^2 \sum_{j=1}^{r}\left(\int_Q \left|f(t)\right|^p dt \int_Q dx\right)^{1/p} = \qquad (1.3.29)$$

$$= B^2 r \left(\int_Q \left|f(t)\right|^p dt\right)^{1/p}$$

და

$$\left(\int_Q \left|\sum_{j=1}^{r} c_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} M_N(x)\chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left| b_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)} \chi_m^{\left(\delta^{m-1}(\delta-1)v+j\right)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} B \delta^{m/2} \left| \sum_{k=2}^{\delta} \int_{Q_{m+1}^{\left(\delta^{m} v+k\right)}} \left[M_N(t)\right]^{-1} \left[\delta^{m/2} \alpha_{j,k} - \delta^{m/2} \alpha_{j,1} \right] f(t) dt - \right.$$

$$- \delta^{m/2} \alpha_{j,1} \int_{Q_1^{(v+1)} \setminus Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left[M_N(t)\right]^{-1} f(t) dt -$$

$$\left. - \delta^{m/2} \sum_{k=N+1}^{\delta} \int_{Q_1^{(k)}} \left[M_N(t)\right]^{-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta_n^{(j,v+1)}}{\Delta} \alpha_{n,k} f(t) dt \right| \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left|M_N(x)\right|^p dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} 2 \delta^{m/2} B^2 \sum_{k=2}^{\delta} \int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left| \left[M_N(t)\right]^{-1} f(t) \right| dt + \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left|M_N(x)\right|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^m B^2 \int_{Q_1^{(v+1)} \setminus Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left| \left[M_N(t)\right]^{-1} f(t) \right| dt \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left|M_N(x)\right|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^m B^2 N! B^N N \int_{\bigcup_{k=N+1}^{\delta} Q_1^{(k)}} \left| f(t) \right| dt \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} \left|M_N(x)\right|^p dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} 2\delta^{2m} B^2 \sum_{k=2}^{\delta} \int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+k\right)}} |f(t)| dt \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} |M_N(x)|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^m B^2 \int_{Q_1^{(v+1)} \setminus Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} |f(t)| dt \left(\int_{Q_1^{(v+1)} \setminus Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} |M_N(x)|^{-q} dt \right)^{1/q} \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} |M_N(x)|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^m B^{N+2} N! N \left(\int_Q |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} |M_N(x)|^p dt \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \frac{2\delta^{2m} B^2}{\delta^{\frac{m+1}{q}}} \sum_{k=2}^{\delta} \left(\int_{Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+k\right)}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \frac{1}{\delta^m} \left(\frac{(\delta-1)\delta^p}{\delta^m \left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^m B^2 \left(\int_{Q_1^{(v+1)} \setminus Q_m^{\left(\delta^{m-1} v+1\right)}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \frac{1}{\delta^m} (\delta-1) \left(\frac{\delta^p}{\left(\delta^q-\delta\right)\left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} +$$

$$+ \delta^m B^{N+2} N! N \left(\int_Q |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \frac{1}{\delta^m} \left(\frac{(\delta-1)\delta^p}{\delta^m \left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{r} \frac{2\delta^{2m} B^2 (\delta-1)}{\delta^{\frac{m+1}{q}}} \left(\frac{(\delta-1)\delta^p \delta}{\delta^{m+1} \left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} \left(\int_Q |f(t)|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+ B^2 (\delta-1) \left(\frac{\delta^p}{\left(\delta^q-\delta\right)\left(\delta^{p+1}-1\right)} \right)^{1/p} \left(\int_Q |f(t)|^p dt \right)^{1/p} +$$

$$+B^{N+2}N!N\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq\frac{2\delta^{m}B(\delta-1)}{\delta^{\frac{m+1}{q}}}\frac{\delta}{\delta^{\frac{m+1}{p}}}\left(\frac{(\delta-1)\delta}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+B^{2}(\delta-1)\left(\frac{\delta^{p}}{\left(\delta^{q}-\delta\right)\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+B^{N+2}N!N\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq 2B^{2}(\delta-1)\left(\frac{(\delta-1)\delta}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+B^{2}(\delta-1)\left(\frac{\delta^{p}}{\left(\delta^{q}-\delta\right)\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}+$$

$$+B^{N+2}N!N\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}=\beta_{p}\left(\int_{Q}|f(t)|^{p}\,dt\right)^{1/p}$$

სადაც

$$\beta_{p}=2B^{2}(\delta-1)\left(\frac{(\delta-1)\delta}{\delta^{p+1}-1}\right)^{1/p}+B^{2}(\delta-1)\left(\frac{\delta^{p}}{\left(\delta^{q}-\delta\right)\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}+$$
$$+B^{N+2}N!N\left(\frac{(\delta-1)\delta^{p}}{\delta\left(\delta^{p+1}-1\right)}\right)^{1/p}\qquad(1.3.30)$$

$(1.3.25)$, $(1.3.28)$, $(1.3.29)$ და $(1.3.30)$-ს გამოყენებით გვაქვს

$$\left\|\sum_{k=1}^{l}b_{k}\chi_{k}(x)-\sum_{k=N+1}^{l}c_{k}M_{N}(x)\chi_{k}(x)\right\|_{L_{Q}^{p}}\leq\left(N\alpha_{p}+2+B^{2}r+\beta_{p}\right)\|f\|_{L_{Q}^{p}}\qquad(1.3.31)$$

და რადგან

$$\left\|\sum_{k=1}^{l} b_k \chi_k(x)\right\|_{L_Q^p} \le \|f\|_{L_Q^p} \tag{1.3.32}$$

ყოველივე ამის შემდეგ $(1.3.27)$, $(1.3.31)$ და $(1.3.32)$-დან ვღებულობთ $(1.3.2)$ უტოლობას სადაც $M_p = N\alpha_p + 3 + B^2 r + \beta_p$. ეხლა, რადგან

$$N\alpha_p + 3 + B^2 r + \beta_p > N\alpha_p + 3$$

ამიტომ ნებისმიერი l-ისთვის $(1.3.2)$ უტოლობა სამართლიანი იქნება, როცა $M_p = N\alpha_p + 3 + B^2 r + \beta_p$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.3.2. ვთქვათ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(1.1.2)$ ტოლობით განსაზღვრული სისტემაა და N ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. არსებობს ზომადი, შემოსაზღვრული $M(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა ბაზისია ყველა L_Q^p, $1 \le p < \infty$ სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $N = \delta^m + (l-1)(\delta-1) + r \quad (m = 0,1,\ldots; 1 \le l \le \delta^m;$ $0 \le r \le \delta - 2)$ ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $V_1 = (\alpha_{0,1};\ldots;\alpha_{0,r+1});\ldots;V_{r+1} = (\alpha_{r,1};\ldots;\alpha_{r,r+1})$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორთა სისტემაა. თეორემა 1.3.2-ის პირობებს აკმაყოფილებს $M(x)$ ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$M(x) = \begin{cases} M_1\left(A^{m+1}\left(x - K_{m+1}^{(i)}\right)\right), & \text{როცა } x \in Q_{m+1}^{(i)} \quad (1 \le i \le (l-1)\delta) \\ M_{r+1}\left(A^m\left(x - K_m^{(l)}\right)\right), & \text{როცა } x \in Q_m^{(l)} \\ M_1\left(A^m\left(x - K_m^{(i)}\right)\right), & \text{როცა } x \in Q_m^{(i)} \quad \left(l+1 \le i \le \delta^m\right) \end{cases}$$

სადაც $M_N(x)$ $(1 \le N \le \delta - 1)$ წინა თეორემაში მოყვანილი ფუნქციაა. თეორემა 1.3.2. გამომდინარეობს თეორემა 1.3.1-დან, საჭიროა მხოლოდ შევნიშნოთ, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ სისტემა შედგება $\delta^m + (l-1)(\delta-1)$ ცალი $\{\chi_{n,k}\}$ $\left(1 \le k \le \delta^m + (l-1)(\delta-1)\right)$ ქვესისტემისაგან

$$\chi_{n,k}(x) = \begin{cases} \delta^{\frac{m+1}{2}} \chi_n\left(A^{m+1}\left(x - K_{m+1}^{(i)}\right)\right), & \text{როცა } x \in Q_{m+1}^{(i)} \quad (1 \le i \le (l-1)\delta) \\ 0, \text{ როცა } x \in CQ_m^{(i)} \quad (1 \le i \le (l-1)\delta)(n = 2,3,\ldots) \end{cases}$$

$$\chi_{n,(l-1)\delta+1}(x)=\begin{cases}\delta^{\frac{m}{2}}\chi_n\left(A^m\left(x-K_m^{(l)}\right)\right), & \text{როცა } x\in Q_m^{(l)}\\ 0, \text{ როცა } x\in CQ_m^{(l)} & (n=r+2,r+3,\dots)\end{cases}$$

$$\chi_{n,k}(x)=\begin{cases}\delta^{\frac{m}{2}}\chi_n\left(A^m\left(x-K_m^{(i)}\right)\right), \text{ როცა } x\in Q_m^{(i)} & \left((l-1)\delta+2\le k\le \delta^m+(l-1)(\delta-1)\right)\\ 0, \text{ როცა } x\in CQ_m^{(i)} & \left(l+1\le i\le \delta^m\right)(n=2,3,\dots)\end{cases}$$

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ, $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(1.1.2)$ ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციათა სისტემაა. არსებობს ზომადი შემოსაზღვრული $M(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ ჩაკეტილი და მინიმალურია L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცეში, მაგრამ არ არის L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცის ბაზისი.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია

$$M(x)=\begin{cases}1, \text{ როცა } x\in \bigcup\limits_{k=\delta+2}^{\delta^2} Q_{n+1}^{(k)}\\ \dfrac{1}{\delta^n}, \text{ როცა } x\in Q_{n+1}^{(\delta+1)} & (n=1,2,\dots)\end{cases}$$

აკმაყოფილებს თეორემა 1.3.3-ის პირობებს. როცა $1<q\le\infty$

$$\int\limits_Q |M(x)|^{-q}dx\ge \sum_{k=1}^{\infty}\delta^k\frac{1}{\delta^{k+1}}=\infty$$

აქედან გამომდინარე

$$[M(x)]^{-1}\notin L_Q^q \quad 1<q\le\infty .$$

რადგან ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის

$$[M(x)]^{-1}\notin L^q_{Q_n^{(1)}} \text{ და } [M(x)]^{-1}\in L^q_{CQ_n^{(1)}}$$

ამიტომ ლემა 1.2.1.-ის თანახმად $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ სისტემა ჩაკეტილი და მინიმალურია L_Q^p, $1\le p<\infty$. ვთქვათ $n=\delta^m+k$, $\left(1\le k\le \delta^m(\delta-1)\right)$ $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ სისტემის შეუღლებული $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ სისტემა განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\psi_n(x)=[M(x)]^{-1}\left[\chi_n(x)-\delta^m\alpha_{l,1}\right] \text{ სადაც } l=(k-1)\mathrm{mod}(\delta-1)+1$$

ვაჩვენოთ, რომ მწკრივი

$$S_n(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n M(x)\chi_n(x)$$

სადაც $a_n=\int\limits_Q \chi_1(t)\psi_n(t)dt$ განშლადია ყველა L_Q^p, $1\le p<\infty$ სივრცეში.

მართლაც, შევაფასოთ $\sum\limits_{i=1}^{\delta-1}a_m^{(i)}M(x)\chi_m^{(i)}(x)$ ჯამის ნორმა

$$a_m^{(i)}=\int\limits_Q [M(t)]^{-1}\left[\chi_m^{(i)}-\delta^{\frac{m}{2}}\alpha_{i,1}\right]dt=\sum_{j=2}^{\delta}\delta^{\frac{m}{2}}\left(\alpha_{i,j}-\alpha_{i,1}\right)\int\limits_{Q_{m+1}^{(j)}}[M(t)]^{-1}dt-$$

$$-\delta^{\frac{m}{2}}\alpha_{i,1}\int\limits_{Q_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt$$

როცა $x\in Q_{m+1}^{(1)}$

$$\sum_{i=1}^{\delta-1}a_m^{(i)}M(x)\chi_m^{(i)}(x)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\delta-1}\left(\sum_{j=2}^{\delta}\delta^m\left(\alpha_{i,j}-\alpha_{i,1}^2\right)M(x)\int\limits_{Q_{m+1}^{(j)}}[M(t)]^{-1}dt-\delta^m\alpha_{i,1}^2M(x)\int\limits_{CQ_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt\right)=$$

$$=\delta^m\sum_{j=2}^{\delta}\sum_{i=0}^{\delta-1}\left(\alpha_{i,j}-\alpha_{i,1}^2\right)M(x)\int\limits_{Q_{m+1}^{(j)}}[M(t)]^{-1}dt-\delta^m\sum_{i=0}^{\delta-1}\alpha_{i,1}^2M(x)\int\limits_{CQ_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt+$$

$$+\delta^mM(x)\int\limits_{CQ_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt=\delta^{m+1}M(x)\int\limits_{\bigcup\limits_{j=2}^{\delta}Q_{m+1}^{(j)}}[M(t)]^{-1}dt-\delta^{m+1}M(x)\int\limits_{CQ_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt+$$

$$+\delta^mM(x)\int\limits_{CQ_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt=M(x)\left(-\delta^{m+1}\int\limits_{CQ_{m+1}^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt+\delta^m\int\limits_{CQ_m^{(1)}}[M(t)]^{-1}dt\right)$$

$$\left(\int_Q \left|\sum_{i=1}^{\delta-1} a_m^{(i)} M(x) \chi_m^{(i)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{Q_m^{(1)}} \left|\sum_{i=1}^{\delta-1} a_m^{(i)} M(x) \chi_m^{(i)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} >$$

$$> \left(\int_{Q_{m+1}^{(1)}} \left|\sum_{i=1}^{\delta-1} a_m^{(i)} M(x) \chi_m^{(i)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left|\delta^{m+1} \int_{CQ_{m+1}^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt - \delta^m \int_{CQ_m^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt\right| \left(\int_{Q_{m+1}^{(1)}} [M(x)]^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left|\delta^m \int_{CQ_{m+1}^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt + \delta^m(\delta-1) \int_{CQ_{m+1}^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt - \delta^m \int_{CQ_m^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt\right| \left(\int_{Q_{m+1}^{(1)}} [M(x)]^p dt\right)^{1/p} >$$

$$> \delta^m \int_{CQ_{m+1}^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt \left(\int_{Q_{m+1}^{(1)}} [M(x)]^p dt\right)^{1/p}$$

რადგან $\int_{CQ_{m+1}^{(1)}} [M(t)]^{-1} dt > 1$ ამიტომ

$$\left(\int_Q \left|\sum_{i=1}^{\delta-1} a_m^{(i)} M(x) \chi_m^{(i)}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} > \delta^m \left(\int_{Q_{m+1}^{(1)}} [M(x)]^p dt\right)^{1/p} =$$

$$= \delta^m \left(\sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{\delta^2-\delta-1}{\delta^{k+3}} + \frac{1}{\delta^{(k+2)p}} \frac{1}{\delta^{(k+3)}}\right)\right)^{1/p} =$$

$$= \delta^m \left(\frac{\delta^2-\delta-1}{\delta^{k+3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^k} + \frac{1}{\delta^{(k+2)p}} \frac{1}{\delta^{(k+3)}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^{k(p+1)}}\right)^{1/p} =$$

$$=\delta^{m}\left(\frac{\delta^{2}-\delta-1}{\delta^{k+3}}\frac{1}{1+\frac{1}{\delta}}+\frac{1}{\delta^{(k+2)p}}\frac{1}{\delta^{(k+3)}}\frac{1}{1+\frac{1}{\delta^{p+1}}}\right)^{1/p}=$$

$$=\delta^{m}\left(\frac{\delta^{2}-\delta-1}{\delta^{m}\left(\delta^{3}-\delta^{2}\right)}+\frac{1}{\delta^{pm}}\frac{1}{\delta^{m}}\frac{1}{\delta^{2p+3}-\delta^{p+2}}\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\delta^{(p-1)m}\frac{\delta^{2}-\delta-1}{\delta^{3}-\delta^{2}}+\frac{1}{\delta^{m}\left(\delta^{2p+3}-\delta^{p+2}\right)}\right)^{1/p}>\left(\frac{\delta^{2}-\delta-1}{\delta^{3}-\delta^{2}}\right)^{1/p}$$

ე.ი. მივიღებთ, რომ როცა $\varepsilon=\left(\frac{\delta^{2}-\delta-1}{\delta^{3}-\delta^{2}}\right)^{1/p}$, ნებისმიერი N ნატურალური რიცხვისთვის არსებობენ $u=\delta^{m}+\delta-1$ და $v=\delta^{m}$ ნატურალური რიცხვები (სადაც $m>\log_{\delta}N$ ნატურალური რიცხვია) რომელთათვისაც

$$\left\|S_{u}(x)-S_{v}(x)\right\|_{L_{Q}^{p}}=\left\|\sum_{i=1}^{\delta-1}a_{m}^{(i)}M(x)\chi_{m}^{(i)}(x)\right\|_{L_{Q}^{p}}>\varepsilon$$

ანუ სრულდება კოშის პირობა და შესაბამისად $S_{n}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n}M(x)\chi_{n}(x)$ მწკრივი განშლადია ყველა $L_{Q}^{p},\ 1\leq p<\infty$ სივრცეში.

თეორემა 1.3.3. დამტკიცებულია.

ლემა 1.2.1. და შესაბამისად თეორემა1.3.1. შეიძლება განზოგადდეს იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ჰაარის ტიპის $\{\chi_{n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემისგან მოშორებულია ნებისმიერი სასრული რაოდენობა ფუნქციებისა. ჩვენ ამაზე არ შევჩერდებით, არამედ დავამტკიცებთ, რომ ჰაარის ტიპის სისტემას შეიძლება მოვაცილოთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე რომ შეიძლებოდეს მისი მულტიპლიკაციური გასრულება L_{Q}^{p} სივრცის ბაზისამდე.

თეორემა 1.3.4. $(1.1.2)$ ტოლობით განსაზღვრულ $\{\chi_{n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემას შეიძლება ჩამოვაშოროთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ დარჩენილი ნაწილის რომელიღაც ზომად, შემოსაზღვრულ ფუნქციაზე

გადამრავლების შედეგად მივიღოთ ბაზისი ყველა L_Q^p, $1 \le p < \infty$ სივრცეში.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ, რომ ფუნქციათა სისტემა

$$\left\{M(x)\chi_k^{(n)}(x)\right\}, \quad \left(k = 1,2,\ldots;\delta \le n \le \delta^k\right) \tag{1.3.33}$$

სადაც

$$M(x) = M_1\left(A^j\left(x - k_j^{(i)}\right)\right), \text{ როცა } x \in Q_j^{(i)} \quad (j = 1,2,\ldots;2 \le i \le \delta)$$

და $M_1(x)$ თეორემა 1.3.1.-დან აღებული ფუნქციაა, ბაზისია ყველა L_Q^p, $1 \le p < \infty$ სივრცეში. $(1.3.33)$ სისტემის ჩაკეტილობა და მინიმალურობა გამომდინარეობს $\{M_1(x)\psi_k(x)\}_{n=2}^{\infty}$ სისტემის ჩაკეტილობიდან და მინიმალურობიდან. ვთქვათ, $f(x) \in L_Q^p$ ნებისმიერი ფუნქციაა. განვიხილოთ $(1.3.33)$ სისტემა $Q_j^{(i)}$ სიმრავლეზე $(j = 1,2,\ldots;2 \le i \le \delta)$. j_k, i $(k = 2,3,\ldots;2 \le i \le \delta)$ სიმბოლოთი ავღნიშნოთ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის ყველა იმ ფუნქციის ინდექსი, რომელთათვისაც $Q_n \subset Q_j^{(i)}$. გვაქვს

$$M(x)\chi_{j_k,i}(x) = \begin{cases} M_1\left(A^j\left(x - k_j^{(i)}\right)\right)\chi_k\left(A^j\left(x - k_j^{(i)}\right)\right), & x \in Q_j^{(i)} \\ 0 & x \in Q \setminus Q_j^{(i)} (k = 2,3,\ldots) \end{cases}$$

ვთქვათ, $S_{j,i,m} - f(x)$ ფუქნქციის m-ური კერძო ჯამია $\left\{M(x)\chi_{j_k,i}(x)\right\}_{k=2}^{\infty}$ სისტემის მიმართ. $(1.3.2)$ პირობიდან ვრებულობთ, რომ

$$\sup_m \int_{Q_j^{(i)}} \left|S_{j,i,m}(x)\right|^p dx \le M_p^p \int_{Q_j^{(i)}} |f(x)|^p dx .$$

აქედან მარტივად გამომდინარეობს, რომ

$$\sup_n \|S_n\|_{L_Q^p} \le M_p \|f\|_{L_Q^p}$$

სადაც, S_n $f(x) \in L_Q^p$ ფუნქციის გაშლაა $(1.3.33)$ სისტემის მიმართ. თეორემა 1.3.4. დამტკიცებულია.

შედეგი 1.3.1. თუ ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას მოვაცილებთ ფუნქციების სასრულ რაოდენობას, მაშინ არსებობს $\psi(x) > 0$ ფუნქცია ისეთი, რომ სისტემის დარჩენილი ნაწილი ბაზისია წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$ სივრცეში.

შედეგი 1.3.2. ჰაარის ტიპის ვეივლეტ-სისტემას შეიძლება მოვაცილოთ უსასრულო რაოდენობა ფუნქციებისა ისე, რომ სისტემის დარჩენილი ნაწილი იყოს ბაზისი წონიან $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$ სივრცეში, რომელიღაც $\psi(x) > 0$ ფუნქციისათვის.

თავი II
მრავალგანზომილებიანი ჰაარის ტიპის ორთონორმირებული ვეივლეტ-სისტემების ბაზისობის შესახებ $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეებში

§ 2.1. წინასწარი განმარტებები და გამოყენებული აღნიშვნები

ვთქვათ E არის R^n-ის ბორელის სიმრავლე და μ არის სასრული დადებითი ბორელის ზომა E-ზე. $L_E^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, იყოს ბანახის სივრცე ყველა ისეთი f ფუნქციისა, რომლისთვისაც

$$\|f\|_{L_E^p(d\mu)} = \left(\int_E |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \infty ,$$

გარდა ამისა

$$\|f\|_{L_E^\infty(d\mu)} = \operatorname*{supess}_{x \in E} |f(x)|.$$

იმ შემთხვევაში, როცა μ არის ლებეგის ზომა ჩვენ ვიხმართ L_E^p აღნიშვნას $L_E^p(d\mu)$-ს ნაცვლად.

ამ თავში ჩვენ საქმე გვექნება ზოგად ბორელის ზომასთან, ამიტომ $(1.1.2)$ ფუნქციათა სისტემის მნიშვნელობები წყვეტის წერტილებზე ძალზე მნიშვნელოვანია. ამრიგად $(1.1.2)$ ფუნქციათა სისტემის მნიშვნელობები წყვეტის წერტილებში განვმარტოთ ისე, რომ მივიღოთ $C_{\overline{Q}}$ სივრცის ბაზისი ($C_{\overline{Q}}$ აღნიშნავს $\overline{Q}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეს). კერძოდ $\chi_n^{(m)}(x)$, $n = 0,1,\ldots$, $m = 1,\ldots,\delta^n(\delta - 1)$, ფუნქციის მნიშვნელობები წყვეტის x_0 წერტილში იყოს საშუალო არითმეტიკული ყველა $\delta^{n/2}\alpha_{i,j}$ რიცხვისა, რომელთათვისაც $x_0 \in Q_{n+1}^{(l\delta + j)}$, $j = 1,\ldots,\delta$ სადაც i და l შერჩეულია ისე, რომ $1 \le i \le \delta - 1$, $i - 1 \equiv (m-1)(\mathrm{mod}(\delta - 1))$ და $l = \left[\dfrac{m-1}{\delta - 1}\right]$ ($[a]$ აღნიშნავს a ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს).

ჩვენ ვუწოდებთ $\{f_n(x)\}$ ფუნქციათა სისტემას $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისს თუ ეს სისტემა ჩაკეტილი და

მინიმალურია $L^p(d\mu)$-ში, ხოლო მისი შეუღლებული სისტემა ტოტალურია $L^p(d\mu)$-ს მიმართ.

§ 2.2. დამხმარე დებულებები

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_Q^{\infty}$ მინიმალურია ამავე სივრცეში და ტოტალურია L_Q^1-ს მიმართ, $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ იყოს მისი შეუღლებული სისტემა. შემდეგი პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(\psi(x)dx)$, $1 \le p < \infty$, ($\psi(x) \in L_Q^1$, $\psi(x) > 0$ თითქმის ყველგან Q-ზე) სივრცის ფართო აზრით ბაზისი: ყველა ნატურალური n რიცხვისთვის

$$[\psi_n(x)]^p[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}.$$

დამტკიცება. აუცილებლობა. რადგან $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა $L_Q^p(\psi(x)dx)$ სივრცის ფართო აზრით ბაზისია, ამიტომ მოიძებნება მისი ბიორთონორმირებული $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_Q^q(\psi(x)dx)$ სისტემა $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,

$$\int_Q \varphi_n(x) f_k(x)\psi(x)dx = \delta_{n,k}, \quad n=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots$$

ცხადია ყველა ნატურალური n რიცხვისთვის

$$\int_Q \left[f_k(x) - \varphi_k(x)[\varphi(x)]^{-1}\right]\varphi_n(x)\psi(x)dx = 0.$$

ამიტომ

$$\int_Q \left[f_k(x)\psi(x) - \psi_k(x)\right]\varphi_n(x)dx = 0.$$

რადგან $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ტოტალურია L_Q^1-ს მიმართ გამოდის, რომ

$$f_k(x) = \psi_k(x)[\psi(x)]^{-1}$$

და გვაქვს

$$\psi_n(x)[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^q(\psi(x)dx)$$

ანუ რაც იგივეა ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის

$$[\psi_n(x)]^p[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}.$$

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ,

$$[\psi_n(x)]^p[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}$$

ანუ

$$f_n(x) = \psi_n(x)[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^q(\psi(x)dx).$$

შევნიშნოთ, რომ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ არის $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის შეუღლებული და აქედან გამომდინარე $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ მინიმალურია $L_Q^p(\psi(x)dx)$-ში.

ვთქვათ, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ არ არის ჩაკეტილი $L_Q^p(\psi(x)dx)$-ში, მაშინ მოიძებნება $f(x) \in L_Q^p(\psi(x)dx)$, $f(x) \neq 0$ ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის

$$\int_Q f(x)\varphi_n(x)\psi(x)dx = 0$$

რადგან $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ტოტალურია L_Q^1-ს მიმართ გამოდის, რომ

$$f(x)\psi(x) \equiv 0,$$

რაც წინააღმდეგობაა და ის ამტკიცებს $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის ჩაკეტილობას $L_Q^p(\psi(x)dx)$ სივრცეში.

დაგვრჩა დამტკიცება იმისა, რომ $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ის შეუღლებული $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ტოტალურია $L_Q^p(\psi(x)dx)$-ის მიმართ.

ვთქვათ, $f(x) \in L_Q^p(\psi(x)dx)$ და ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის

$$\int_Q f(x)f_n(x)\psi(x)dx = 0$$

აქედან

$$\int_Q f(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad n = 1,2,\ldots$$

ეხლა რადგან $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ტოტალურია L_Q^1-ს მიმართ, ამიტომ გვაქვს

$$f(x) \equiv 0$$

რაც ცხადია გულისხმობს, რომ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა ტოტალურია $L_Q^p(\psi(x)dx)$-ის მიმართ.

თეორემა 2.2.1. დამტკიცებულია.

1978 წელს კაზარიანმა დაამტკიცა ორი ლემა. ჩვენ ისინი დაგვჭირდება ძირითადი თეორემის დასამტკიცებლად.

ლემა 2.2.1. ვთქვათ, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ჩაკეტილი და მინიმალურია $C[a,b]$-ში და $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ არის მისი ბიორთონორმირებული სისტემა. გარდა ამისა ვთქვათ Ω არის ნატურალურ რიცხვთა სასრული (ან ცარიელი) სიმრავლე და Ω^C აღნიშნავს Ω სიმრავლის დამატებას ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლემდე. თუ $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\Omega^C}$ სისტემა არის $L_{[a,b]}^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისი, რომელიღაც სასრული დადებითი ბორელის μ ზომისთვის, მაშინ μ აბსოლიტურად უწყვეტია.

ლემა 2.2.2. ვთქვათ, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ არის შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციათა სისტემა, რომელიც ტოტალურია $L_{[a,b]}^1$-ს მიმართ და არის $L_{[a,b]}^p$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისი. ვთქვათ, Ω-ს და Ω^C-ს აქვთ იგივე აზრი რაც ქონდათ ლემა 2.2.1.-ში. თუ $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\Omega^C}$ სისტემა მინიმალურია $L_{[a,b]}^p(\psi(x)dx)$ სივრცეში, რომელიღაც ლებეგის აზრით ინტეგრებადი არაუარყოფითი $\psi(x)$ ფუნქციისათვის, მაშინ $\psi(x)$ დადებითია თითქმის ყველგან $[a,b]$-ზე.

აქვე სევნიშნავ, რომ ეს ლემები ჩამოყალიბებული და დამტკიცებულია ერთგანზომილებიან შემთხვევაში, თუმცა მათი სამართლიანობა მრავალგანზომილებიან შემთხვევაში დამტკიცდება ანალოგიურად.

§ 2.3. ძირითადი თეორემები და შედეგები

თეორემა 2.3.1. შემდეგი პირობები (ა)-(დ) არიან აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ბაზისი:

(ა) არსებობს ლებეგის აზრით ინტეგრებადი $\psi(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $d\mu(x) = \psi(x)dx$;

(ბ) $\psi(x) > 0$ თითქმის ყველგან Q-ზე;

(გ) $[\psi(x)]^{-1} \in L_Q^{1/(p-1)}$;

(დ) არსებობს $M_p > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ ყოველი ჰაარის სიმრავლისათვის $Q_n^{(m)}$, $n = 1,2,\ldots$, $m = 1,\ldots,\delta^n$, გვაქვს

$$\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int_{Q_n^{(m)}}\psi(x)dx\right)\left(\frac{1}{\left|Q_n^{(m)}\right|}\int_{Q_n^{(m)}}[\psi(x)]^{-1/(p-1)}dx\right)^{p-1} \le M_p .$$

2.3.1. თეორემის დასამტკიცებლად ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ ფაქტს, რომელიც უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 2.2.1., ლემა 2.2.1. და ლემა 2.2.2.-დან.

თეორემა 2.3.2. იმისათვის, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემა იყოს $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისი აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს 2.3.1. თეორემის (ა), (ბ) და (გ) პირობები.

ეხლა ჩვენ დავამტკიცებთ ლემას, რომელიც არის 2.3.1 თეორემის დამტკიცების საფინალო საფეხური. ვთქვათ μ ზომა აკმაყოფილებს (ა), (ბ) და (გ) პირობებს. ეს გულისხმობს, რომ $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ არის $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, სივრცის ფართო აზრით ბაზისი. $S_n(f,x)$-ით აღვნიშნოთ $f \in L^p(d\mu)$ ფუნქციის კერძო ჯამების მიმდევრობა $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ. განვიხილოთ მაქსიმალური ზომის ჰაარის სიმრავლეები რომლებზედაც ყველა $\chi_n(x)$, $n = 1,\ldots,N$ $(N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta - 1)))$ არიან მუდმივები. ცხადია მოცემული $N \ge 1$ მთელი რიცხვისათვის ასეთი სიმრავლეების რაოდენობაა ზუსტად N. ეს სიმრავლეები აღვნიშნოთ $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$ სიმრავლეებით.

ლემა 2.3.1. ვთქვათ μ აკმაყოფილებს 2.3.1. თეორემის ა), (ბ) და (გ) პირობებს, მაშინ ყოველი $N \ge 1$-სთვის $(N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta - 1)))$ გვაქვს

$$S_N(f,x)=\frac{1}{|\Gamma_n|}\int_{\Gamma_n} f(t)dt\,,\ \text{როცა}\ \ x\in\Gamma_n\,,\ 1\le n\le N \tag{2.3.1}$$

დამტკიცება. ვინაიდან $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ არის $L^p(d\mu)$ სივრცის ფართო აზრით ბაზისი. ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ მისი შეუღლებული $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ სისტემა. ცხადია ის ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\psi_i(x)=\chi_i(x)[\psi(x)]^{-1} \tag{2.3.2}$$

ყოველი $N\ge 1$-სთვის $(N\equiv 1(\mathrm{mod}(\delta-1)))$ და $f\in L^p(d\mu)$-სთვის გვაქვს

$$S_N(f,x)=\sum_{i=1}^{N} c_i\chi_i(x),$$

სადაც

$$c_i=\int_Q f(x)\varphi_i\,(x)d\mu\,. \tag{2.3.3}$$

ლემა დავამტკიცოთ ინდუქციით. $N=1$-სთვის გვაქვს

$$c_1=\int_Q f(x)\chi_1\,(x)[\psi(x)]^{-1}\psi(x)dx=\int_Q f(x)dx$$

ანუ

$$S_1(f,x)=\int_Q f(x)dx\,.$$

ეხლა დავუშვათ, რომ $(2.3.1)$ ტოლობა სამართლიანია რომელიღაც $N\equiv 1(\mathrm{mod}(\delta-1))$-სთვის და გამოვთვალოთ $S_{N+\delta-1}(f,x)$:

$$S_{N+\delta-1}(f,x)=S_N(f,x)+\sum_{i=1}^{\delta-1} c_{N+i}\chi_{N+i}(x).$$

$P_1,\ldots,P_\delta$ სიმრავლეებით აღვნიშნოთ ის ჰაარის სიმრავლეები რომლებზედაც $\chi_{N+i}(x)$, $1\le i\le\delta-1$, ფუნქციები ღებულობენ შესაბამისად $\alpha_{i,1}|\Gamma_k|^{-1/2},\ldots,\alpha_{i,\delta}|\Gamma_k|^{-1/2}$ მნიშვნელობებს, სადაც $\left|\bigcup_{j=1}^{\delta}P_j\setminus\Gamma_k\right|=0$. $(2.3.2)$ და $(2.3.3)$ ტოლობებიდან გვაქვს

$$c_{N+i}=\int_Q f(x)\chi_{N+i}(x)[\psi(x)]^{-1}\psi(x)dx=\int_Q f(x)\chi_{N+i}(x)dx=$$

$$=\sum_{j=1}^{\delta}\alpha_{i,j}|\Gamma_k|^{-1/2}\int_{P_j} f(x)dx.$$

ეხლა, როცა $x\in P_n$, $1\le n\le\delta$,

$$\sum_{i=1}^{\delta-1}c_{N+i}\chi_{N+i}(x)=\sum_{i=1}^{\delta-1}\sum_{j=1}^{\delta}\alpha_{i,j}|\Gamma_k|^{-1/2}\int_{P_j} f(x)dx\,\alpha_{i,j}|\Gamma_k|^{-1/2}=$$

$$=|\Gamma_k|^{-1}\sum_{j=1}^{\delta}\sum_{i=1}^{\delta-1}\alpha_{i,j}\alpha_{i,n}\int_{P_j} f(x)dx=|\Gamma_k|^{-1}\sum_{j=1}^{\delta}\int_{P_j} f(x)dx\sum_{i=1}^{\delta-1}\alpha_{i,j}\alpha_{i,n}.$$

რადგან $\sum_{i=1}^{\delta-1}\alpha_{i,j}\alpha_{i,n}=\delta\delta_{j,n}-1$, ამიტომ გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{\delta-1}c_{N+i}\chi_{N+i}(x)=|\Gamma_k|^{-1}\sum_{j=1}^{\delta}\left(\delta\delta_{j,n}-1\right)\int_{P_j} f(x)dx=|\Gamma_k|^{-1}\sum_{j=1}^{\delta}\delta\delta_{j,n}\int_{P_j} f(x)dx-$$

$$-|\Gamma_k|^{-1}\sum_{j=1}^{\delta}\int_{P_j} f(x)dx=|\Gamma_k|^{-1}\delta\int_{P_n} f(x)dx-|\Gamma_k|^{-1}\int_{\Gamma_k} f(x)dx.$$

აქედან მარტივად ვღებულობთ

$$S_{N+\delta-1}(f,x)=\frac{1}{|P_n|}\int_{P_n} f(x)dx,\ \text{როცა}\ \ x\in P_n,\ 1\le n\le\delta. \qquad (2.3.4)$$

რადგან χ_{N+i}, $1\le i\le\delta-1$, ნულის ტოლია $\overline{\Gamma}_k$-ს გარეთ, ამიტომ $(2.3.1)$ და $(2.3.4)$ ტოლობებიდან გამომდინარეობს ინდუქციური ბიჯის სამართლიანობა. ლემა 2.3.1. დამტკიცებულია.

თეორემა 2.3.1.-ის დამტკიცება. კარგად არის ცნობილი, რომ აუცილებელი და საკმარისი პირობა $L_Q^p(d\mu)$ სივრცის ფართო აზრით ბაზისობისათვის, რომ იყოს ამავე სივრცის ბაზისი, საჭიროა ყოველი $f\in L_Q^p(d\mu)$ ფუნქციის კერძო ჯამების მიმდევრობა ამავე სისტემის მიმართ იყოს ერთობლივ შემოსაზღვრული. ამიტომ 2.3.2. თეორემის გათვალისწინებით, რომ დავადგინოთ (ა) – (დ) პირობების საკმარისობა საჭიროა მხოლოდ შევაფასოთ $S_n(f,x)$-ის ნორმა. ვთქვათ,

$N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta-1))$ და $0 \le k \le \delta-1$. ზემოთ განხილული ჰაარის სიმრავლეებისათვის $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$ ზოგადობის სეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ Γ_N აღნიშნავს იმ ჰაარის სიმრავლეს, რომლისათვისაც χ_{N+k}, $0 \le k \le \delta-1$ ფუნქციები ნულის ტოლია $\overline{\Gamma}_N$ სიმრავლის გარეთ. ლემა 2.3.1-დან გვაქვს

$$\int_Q |S_{N+k}(f,x)|^p \psi(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i} |S_{N+k}(f,x)|^p \psi(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} f(x)dx \right|^p \int_{\Gamma_i} \psi(x)dx +$$

$$+ \left| \frac{1}{|\Gamma_N|} \int_{\Gamma_N} f(x)dx + \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_N} f(x)\chi_{N+j}(x)dx\chi_{N+j}(x) \right|^p \int_{\Gamma_N} \psi(x)dx \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{|\Gamma_i|^p} \int_{\Gamma_i} |f(x)|^p \psi(x)dx \left(\int_{\Gamma_i} [\psi(x)]^{-1/p} dx \right)^{p/q} \int_{\Gamma_i} \psi(x)dx +$$

$$+ \frac{(1+Bk)^p}{|\Gamma_N|^p} \int_{\Gamma_N} |f(x)|^p \psi(x)dx \left(\int_{\Gamma_N} [\psi(x)]^{-1/p} dx \right)^{p/q} \int_{\Gamma_N} \psi(x)dx \le$$

$$\le (1+(1+B(\delta-2)))^p M_p \int_Q |f(x)|^p \psi(x)dx.$$

სადაც $B = \max\{|\alpha_{i,j}| : 0 \le i \le \delta-1, 1 \le j \le \delta\}$. საკმარისობა დამტკიცებულია. რომ დავამტკიცოთ აუცილებლობა ჩვენ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ თუ $\{\chi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ არის $L_Q^p(d\mu)$ სივრცის ბაზისი, მასინ S_N ოპერატორების ნორმები ერთობლივად შემოსაზღვრულია:

$$\|S_N\| \le M < +\infty. \tag{2.3.5}$$

მეორეს მხრივ თეორემა 2.3.2.-დან და S_N ოპერატორების შემოსაზღვრულობიდან, როცა $N \equiv 1(\mathrm{mod}(\delta-1))$, გვაქვს

$$\|S_N\| = \sup_{\|f\|_{L_Q^p(d\mu)} \le 1} \|S_N(f,x)\|_{L_Q^p(d\mu)} \ge \max_{1 \le i \le N} \sup \|S_N(f,x)\|_{L_Q^p(d\mu)} \tag{2.3.6}$$

ბოლო სუპრემუმი აღებულია ყველა ისეთი f ფუნქციებიდან, რომლისათვისაც $\|f\|_{L_Q^p(d\mu)} \leq 1$ და $f(x)=0$, როცა $x \in Q \setminus \overline{\Gamma}_i$. ტოლობა $(2.3.1)$ გვიჩვენებს, რომ როცა $i=1,\ldots,N$ ზემოთ მოყვანილი სუპრემუმი ტოლია

$$\sup_{\|f\|_{L_Q^p(d\mu)} \leq 1} \|S_N(f,x)\|_{L_{\Gamma_i}^p(d\mu)} = \left(\int_{\Gamma_i} \psi(x)dx \right)^{1/p} \sup_{\|f\|_{L_Q^p(d\mu)} \leq 1} \left| \frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} f(x)dx \right|. \qquad (2.3.7)$$

თუ ჩავწერთ

$$f(x) = f(x)[\psi(x)]^{-1}\psi(x)$$

გვექნება, რომ

$$\sup_{\|f\|_{L_Q^p(d\mu)} \leq 1} \left| \int_{\Gamma_i} f(x)dx \right| = \left\| [\psi(x)]^{-1} \right\|_{L_{\Gamma_i}^p(d\mu)} = \left(\int_{\Gamma_i} [\psi(x)]^{-1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p}$$

აქედან და $(2.3.5)$ - $(2.3.7)$ დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (დ) პირობის აუცილებლობა.

თეორემა 2.3.1. დამტკიცებულია.

თავი III
შემოსაზღვრულ ფუნქციათა ფურიე-ჰაარის ტიპის მწკრივების განშლადობის შესახებ ნული ზომის სიმრავლეებზე

§ 3.1. გამოყენებული აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ფურიე-ჰაარის ტიპის მწკრივების განშლადობის საკითხს ნული ზომის სიმრავლეებზე $|\det A| = 2$ შეზღუდვით. მოსახერხებელი იქნება ჰაარის სიმრავლეებისათვის შემდეგი აღნიშვნის შემოტანა:

$$\overline{Q}_n^{(m)} = T\left[\sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}k_1 + k_n^{(m)},\ \sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}k_2 + k_n^{(m)}\right]$$

გარდა ამისა

$$T\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}k_1 + k_n^{(m)},\ \sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}k_2 + k_n^{(m)}\right) =$$

$$= Q_n^{(m)} \setminus \left\{\sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}k_1 + k_n^{(m)},\ \sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}k_2 + k_n^{(m)}\right\}$$

ნატურალური n რიცხვს ვუწოდოთ $\overline{Q}_n^{(m)}$ ჰაარის სიმრავლის რანგი.

ლემა 3.1.1. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $M \in \overline{Q}$ წერტილისათვის არსებობს ჰაარის $\overline{Q}_k^{(i)}$ სიმრავლე ისეთი, რომ

$$M \in \overline{Q}_k^{(i)} \subset B(M, \varepsilon),$$

სადაც

$$B(M,\varepsilon) = \{x : \|M - x\|_{R^n} < \varepsilon\}.$$

დამტკიცება. რადგან $M \in \overline{Q}$ იგი წარმოდგება შემდეგი სახით

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} s_j\ ,$$

სადაც ყოველი s_j არის ფიქსირებული ვექტორი, ან k_1, ან k_2. განვიხილოთ ორობით სიმრავლეთა მიმდევრობა

$$Q_n^{(i_n)} = A^{-n}(Q) + \sum_{j=1}^{n} A^{-j} s_j \quad (n = 1,2,\ldots).$$

ცხადია ყოველი n-ისათვის $M \in \overline{Q}_n^{(i_n)}$. ვაჩვენოთ, რომ საკმარისად დიდი n-ისთვის $Q_n^{(i_n)} \subset B(M,\varepsilon)$, სადაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი წინასწარ ფიქსირებული რიცხვია. ამისათვის ვაჩვენოთ, რომ $\|M - x\|_{R^n} < \varepsilon$, სადაც $x \in \overline{Q}_n^{(i_n)}$ ნებისმიერი ვექტორია. რადგან $x \in \overline{Q}_n^{(i_n)}$, ამიტომ

$$x = \sum_{j=1}^{n} A^{-j} s_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j} r_j ,$$

სადაც ყოველი r_j არის ფიქსირებული ვექტორი, ან k_1, ან k_2. გვაქვს

$$\|M - x\|_{R^n} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} A^{-j} s_j - \sum_{j=1}^{n} A^{-j} s_j - \sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j} r_j \right\|_{R^n} =$$

$$= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} A^{-j}\left(s_j - r_j\right) \right\|_{R^n} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\| A^{-j}(k_1 - k_2) \right\|_{R^n} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} c\alpha^j \|k_1 - k_2\|_{R^n} ,$$

სადაც c რომელიღაც მუდმივია და $0 < \alpha < 1$. აქედან კი გასაგებია, რომ საკმაოდ დიდი n-ისათვის $\|M - x\|_{R^n} < \varepsilon$. ლემა 3.1.1. დამტკიცებულია.

ლემა 3.1.2. ნებისმიერი $H \subset \overline{Q}$ ღია სიმრავლისათვის არსებობს $\left\{ \overline{Q}_{m_n}^{(i_n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის სიმრავლეთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$Q_{m_r}^{(i_r)} \cap Q_{m_s}^{(i_s)} = \varnothing \quad (r \ne s) \text{ და } H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_{m_n}^{(i_n)} .$$

დამტკიცება. რადგან H ღიაა, ამიტომ იგი მის ნებისმიერ x წერტილთან ერთად შეიცავს მის მომცველ $B(x,\varepsilon)$ ბირთვს, სადაც $\varepsilon > 0$ საკმაოდ მცირე რიცხვია. მეორეს მხრივ ლემა 2-ის თანახმად არსებობს $\overline{Q}_n^{(i_n)}$ სიმრავლე ისეთი, რომ

$$x \in \overline{Q}_n^{(i_n)} \subset B(x,\varepsilon).$$

საიდანაც მარტივად ვასკვნით, რომ $\overline{Q}_n^{(i_n)} \subset H$. ეხლა, რადგან $\overline{Q}_n^{(i)}$ $(n = 1,2,\ldots;\ i = 1,\ldots,2^n)$ სიმრავლეები თვლადია და ნებისმიერი ორი $\overline{Q}_n^{(i)}$

და $\overline{Q}_m^{(j)}$ $(m \le n)$ სიმრავლისთვის ან $Q_n^{(i)} \cap Q_m^{(j)} = \varnothing$ ან $\overline{Q}_n^{(i)} \subset \overline{Q}_m^{(j)}$, ამიტომ ამოირჩევა ისეთი $\left\{\overline{Q}_{m_n}^{(i_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა რომელსაც გააჩნია ზემოთ აღნიშნული თვისებები. ლემა 3.1.2. დამტკიცებულია.

§ 3.2. ძირითადი თეორემა

თეორემა 3.2.1. ნებისმიერი $E \subset \overline{Q}$, $\mu(E) = 0$ სიმრავლისათვის, არსებობს შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ სისტემის მიმართ განშლადია E სიმრავლეზე.

დამტკიცება. ვთქვათ $E \subset \overline{Q}$, $\mu(E) = 0$ ნებისმიერი სიმრავლეა. ჯერ ინდუქციის მეთოდით ავაგოთ $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(ა) $G_{i+1} \subset G_i \subset G_1 = \overline{Q}$ $(i = 1,2,\ldots)$;

(ბ) ყოველი G_i $(i = 1,2,\ldots)$ სიმრავლე არის არაუმეტეს თვლადი გაერთიანება $T_k^{(i)} = T\left[\alpha_k^{(i)}, \beta_k^{(i)}\right]$ $(k = 1,2,\ldots)$ ჰაარის სიმრავლეებისა, რომელთაც წყვილწყვილად არ გააჩნიათ საერთო შიგა წერტილი;

(გ) ნებისმიერი $i \in N$-სთვის $(G_i \setminus G_{i+1}) \cap E$ სიმრავლის ყოველი წერტილი არის ერთ-ერთი $\alpha_k^{(i)}$, $\beta_k^{(i)}$ $(k = 1,2,\ldots)$ წერტილებიდან.

(დ) ნებისმიერი $i \in N$-სთვის ყოველი $T\left[\alpha_k^{(i+1)}, \beta_k^{(i+1)}\right]$ $(k = 1,2,\ldots)$ სიმრავლე შედის $T\left(\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}\right)$ $(j = 1,2,\ldots)$ სიმრავლეებიდან ერთ-ერთში.

(ე) ნებისმიერი $i,k \in N$-სთვის და $l \ge r_k^{(i)} + 1$, $l \in N$, სადაც $r_k^{(i)}$ არის $T\left[\alpha_k^{(i)}, \beta_k^{(i)}\right]$ სიმრავლის რანგი, სრულდება შემდეგი უტოლობები

$\mu\left(G_{i+1} \cap T\left[\alpha_k^{(i)}, \alpha_k^{(i)} + A^{-l}(k_2 - k_1)\right]\right) < 2^{-l-8}$ და

$\mu\left(G_{i+1} \cap T\left[\beta_k^{(i)} - A^{-l}(k_2 - k_1), \beta_k^{(i)}\right]\right) < 2^{-l-8}$.

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $r_k^{(i)} = \log_2\left[\mu\left(T_k^{(i)}\right)\right]^{-1}$ და ვუწოდებთ $T_k^{(i)}$ $i,k \in N$ ჰაარის სიმრავლის რანგს.

ვთქვათ გვაქვს $G_1, G_2, ..., G_m$, $m \geq 2$ სიმრავლეები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (ზ) პირობას, როცა $1 \leq i \leq m$ და (ა), (გ), (დ), (ე) პირობებს, როცა $1 \leq i \leq m-1$. ავაგოთ სიმრავლე G_{m+1}.

ვთქვათ $k \in N$. სიმრავლე $T\left(\alpha_k^{(m)}, \beta_k^{(m)}\right)$ წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$T\left(\alpha_k^{(m)}, \beta_k^{(m)}\right) = \bigcup_{j=r_k^{(m)}+1}^{\infty}\left(T\left[\alpha_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1), \alpha_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1)\right] \cup \right.$$

$$\left. \cup\, T\left[\beta_k^{(m)} - A^{-j}(k_2-k_1), \beta_k^{(m)} - A^{-j-1}(k_2-k_1)\right]\right)$$

რადგან $\mu(E)=0$, ამიტომ ყოველი $j \geq r_k^{(m)}+1$ არსებობენ ღია სიმრავლეები $E_{k,j}^{(m)}$ და $F_{k,j}^{(m)}$ ისეთი, რომ

$$\left(E \cap T\left[\alpha_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1), \alpha_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1)\right]\right) \subset E_{k,j}^{(m)};$$

$$\left(E \cap T\left[\beta_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1), \beta_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1)\right]\right) \subset F_{k,j}^{(m)};$$

$$\mu\left(E_{k,j}^{(m)}\right) < 2^{-j-10} \text{ და } \mu\left(F_{k,j}^{(m)}\right) < 2^{-j-10} \quad \left(j = r_k^{(m)}+1, r_k^{(m)}+2, ...\right).$$

რადგან $E_{k,j}^{(m)}$ და $F_{k,j}^{(m)}$ სიმრავლეები ღიაა, ამიტომ ლემა 3.1.2.-ის თანახმად ისინი შეიძლება წარმოვადგინოთ ჰაარის სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომელთაც არ გააჩნიათ საერთო შიგა წერტილი.

განვიხილოთ სიმრავლეები

$$\widetilde{E}_{k,j}^{(m)} = T\left[\alpha_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1), \alpha_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1)\right] \cap E_{k,j}^{(m)}.$$

რადგან $\mu\left(E_{k,j}^{(m)}\right) < 2^{-j-10}$, ამიტომ $E_{k,j}^{(m)}$ სიმრავლის ჰაარის სიმრავლეებით წარმოდგენაში თითოეული ჰაარის სიმრავლე ან მთლიანად შედის $T\left[\alpha_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1), \alpha_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1)\right]$ სიმრავლეში ან არ გააჩნია ამ სიმრავლესთან საერთო შიგა წერტილი, ამიტომ $\widetilde{E}_{k,j}^{(m)}$ წარმოდგება იმ ჰაარის სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომლებიც მთლიანად შედის როგორც $E_{k,j}^{(m)}$, ასევე $T\left[\alpha_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1), \alpha_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1)\right]$ სიმრავლეში.

ანალოგიური მსჯელობით

$$\widetilde{F}_{k,j}^{(m)} = T\left[\beta_k^{(m)} + A^{-j}(k_2-k_1), \beta_k^{(m)} + A^{-j-1}(k_2-k_1)\right] \cap F_{k,j}^{(m)}$$

სიმრავლეები შეიძლება წარმოვადგინოთ ჰაარის სიმრავლეების გაერთიანების სახით, რომელთაც არ გააჩნიათ საერთო შიგა წერტილი.

ვთქვათ,

$$G_{m+1}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=r_k^{(m)}+1}^{\infty}\left(\widetilde{E}_{k,j}^{(m)}\cup\widetilde{F}_{k,j}^{(m)}\right).$$

ცხადია ეს სიმრავლე წარმოდგება წყვილწყვილად საერთო შიგაწერტილების არმქონე ჰაარის სიმრავლეების გაერთიანების სახით. ვთქვათ, $G_{m+1}=\bigcup_{k=1}^{\infty}T\left[\alpha_k^{(m+1)},\beta_k^{(m+1)}\right]$ ერთ-ერთი ასეთი წარმოდგენაა. ცხადია G_{m+1} აკმაყოფილებს (ბ) პირობას, როცა $i=m+1$ და პირობებს (ა), (დ), როცა $i=m$. რადგან

$$E\bigcap\left(G_m\setminus G_{m+1}\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\left(T\left[\alpha_k^{(m)},\beta_k^{(m)}\right]\setminus G_{m+1}\right)\bigcap E\right),$$

$$E\bigcap T\left(\alpha_k^{(m)},\beta_k^{(m)}\right)\subset G_{m+1}$$

და $G_{m+1}\bigcap T\left[\alpha_k^{(m)},\beta_k^{(m)}\right]\subset T\left(\alpha_k^{(m)},\beta_k^{(m)}\right)$,

ამიტომ სრულდება პირობა (გ), როცა $i=m$. დაგვრჩა (ე) პირობის შემოწმება.

G_{m+1} სიმრავლის აგების თანახმად

$$G_{m+1}\bigcap T\left[\alpha_k^{(m)},\alpha_k^{(m)}+A^{-l}\left(k_2-k_1\right)\right]\subset\bigcup_{i=l-1}^{\infty}\widetilde{E}_{k,j}^{(m)},\ \text{როცა}\ \ l>r_k^{(m)}+1$$

და

$$G_{m+1}\bigcap T\left[\alpha_k^{(m)},\alpha_k^{(m)}+A^{-l}\left(k_2-k_1\right)\right]\subset\left(\bigcup_{i=l}^{\infty}\widetilde{E}_{k,j}^{(m)}\cup\widetilde{F}_{k,l}^{(m)}\right),\ \text{როცა}\ \ l=r_k^{(m)}+1,$$

ამიტომ გვექნება

$$\mu\left(G_{m+1}\bigcap T\left[\alpha_k^{(m)},\alpha_k^{(m)}+A^{-l}\left(k_2-k_1\right)\right]\right)<\sum_{j=l-1}^{\infty}2^{-j-10}=2^{-l-8},\ \text{როცა}\ \ l>r_k^{(m)}+1$$

და

$$\mu\left(G_{m+1}\cap T\left[\alpha_k^{(m)},\alpha_k^{(m)}+A^{-l}(k_2-k_1)\right]\right)<\sum_{j=l}^{\infty}2^{-j-10}+2^{-l-10}=2^{-l-8},\ \text{როცა}$$

$$l=r_k^{(m)}+1.$$

ანალოგიურად შემოწმდება, რომ

$$\mu\left(G_{m+1}\cap T\left[\beta_k^{(m)}-A^{-l}(k_2-k_1),\beta_k^{(m)}\right]\right)<2^{-l-8},\ \text{როცა}\ \ l\geq r_k^{(m)}+1.$$

ანუ სრულდება (ე) პირობა. ეს კი ნიშნავს, რომ გვაქვს $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ სიმრავლეთა მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს (ა) – (ე) პირობებს.

(ე) პირობიდან, როცა $l\geq r_k^{(i)}+1$ მარტივად ვღებულობთ, რომ

$$\mu\left(G_{i+1}\cap T\left[\alpha_k^{(i)},\beta_k^{(i)}\right]\right)<2^{-8}\mu\left(T\left[\alpha_k^{(i)},\beta_k^{(i)}\right]\right),\ (i=1,2,...)\tag{3.2.1}$$

განვმარტოთ f_i, $i=1,2,...$ ფუნქციები შემდეგნაირად:

$$f_i(t)=\begin{cases}1, & \text{როცა}\ \ t\in A_i\equiv\bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty}T\left[\alpha_k^{(i)}+A^{-r_k^{(i)}-2n}(k_2-k_1),\alpha_k^{(i)}+A^{-r_k^{(i)}-2n+1}(k_2-k_1)\right]\\ 1, & \text{როცა}\ \ t\in B_i\equiv\bigcup\limits_{k,n=1}^{\infty}T\left[\beta_k^{(i)}-A^{-r_k^{(i)}-2n+1},\beta_k^{(i)}-2^{-r_k^{(i)}-2n}\right]\\ 0, & \text{როცა}\ \ t\in Q\setminus(A_i\cup B_i)\end{cases}\tag{3.2.2}$$

და განვმარტოთ ფუნქცია f

$$f(t)=\begin{cases}f_i(t), & \text{როცა}\ \ t\in G_i\setminus G_{i+1}\\ 0, & \text{როცა}\ \ t\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i\end{cases},\quad(i=1,2,...)\tag{3.2.3}$$

(ა) და (ბ) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(t)$ ფუნქციის განმარტება კორექტულია.

შევნიშნოთ, რომ $\mu\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i\right)=0$, მარტივი დასანახია აგრეთვე, რომ f ფუნქცია არის $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left[(A_i\cup B_i)\setminus G_{i+1}\right]$ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

ვთქვათ, $x \in E$. (გ) პირობის თანახმად, ან 1) x არის ერთ-ერთი $\alpha_k^{(i)}$, $\beta_k^{(i)}$ $(i,k=1,2,...)$ წერტილებიდან ან 2) $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. ბოლო შემთხვევაში ყოველი $i \geq 1$-სთვის არსებობს ისეთი რიცხვი $m_i \in N$, რომ $x \in T\left(\alpha_{m_i}^{(i)}, \beta_{m_i}^{(i)}\right)$ $(i=1,2,...)$.

ჯერ განვიხილოთ 1) შემთხვევა. ვთქვათ, რომელიღაც i და k-სთვის წერტილი x არის $\alpha_k^{(i)}$. განვიხილოთ კოეფიციენტები

$$a_{p_n}^{(q_n)}(f) = 2^{p_n/2}\left(\int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)},\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt - \int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1),\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt\right), \quad (3.2.4)$$

სადაც $p_n = r_k^{(i)} + 2n$, $q_n = m$, m ნატურალური რიცხვი აღებულია ტოლობიდან $\alpha_k^{(i)} = \sum_{j=s+1}^{\infty} A^{-j}k_1 + k_s^{(m)}$.

$(3.2.1)$, $(3.2.2)$, $(3.2.3)$ და (ე) პირობების თანახმად პირველი ინტეგრალისთვის გვექნება

$$\int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)},\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt \geq \int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)},\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1)\right]} f_i(t)dt - \int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)},\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1)\right]} |f(t)-f_i(t)|dt \geq , \quad (n=1,2,...) \quad (3.2.5)$$

$$\geq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-p_n-2j-2} - 2\mu\left(G_{i+1} \cap T\left[\alpha_k^{(i)},\alpha_k^{(i)} + A^{-p_n-1}(k_2-k_1)\right]\right) \geq$$

$$\geq \frac{2^{-p_n}}{4} - 2^{-p_n-8}$$

f ფუნქციის განმარტების თანახმად ვღებულოვთ, რომ

$$\int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1),\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt = 0, \quad (n=1,2,\ldots)$$

(3.2.2), (3.2.3) და (ე) პირობიდან ვღებულობთ

$$\left|\int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1),\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n}(k_2-k_1)\right]} [f(t)-f_i(t)]dt\right| \le$$

$$\le 2\mu\left(G_{i+1}\cap T\left[\alpha_k^{(i)},\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n}(k_2-k_1)\right]\right)\le 2^{-p_n-1}, \ (n=1,2,\ldots)$$

და შესაბამისად

$$\left|\int\limits_{T\left[\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n-1}(k_2-k_1),\alpha_k^{(i)}+A^{-p_n}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt\right| \le 2^{-p_n-7}, \ (n=1,2,\ldots) \qquad (3.2.6)$$

ეხლა (3.2.4), (3.2.5)და (3.2.6)ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\left|a_{p_n}^{(q_n)}(f)\chi_{p_n}^{(q_n)}\left(\alpha_k^{(i)}\right)\right| \ge \frac{2^{p_n/2}}{2}\left|a_{p_n}^{(q_n)}(f)\right| > \frac{1}{16}, \ (n=1,2,\ldots).$$

თუ x არის რომელიმე $\beta_k^{(i)}$ წერტილი $k,i\in N$. ამ შემთხვევაშიც მსჯელობა ჩატარდება ანალოგიურად. ანუ

$$\left|a_{u_n}^{(v_n)}(f)\chi_{u_n}^{(v_n)}\left(\beta_k^{(i)}\right)\right| > \frac{1}{16}, \ (n=1,2,\ldots).$$

ეხლა განვიხილოთ 2) შემთხვევა

$$a_{l_i}^{(d_i)}(f) = 2^{l_i/2}\left(\int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)},\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt - \int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1),\beta_{m_i}^{(i)}\right]} f(t)dt\right),$$

სადაც $l_i = r_{m_i}^{(i)}$ და $d_i = m$, m ნატურალური რიცხვი აღებულია ტოლობიდან $\alpha_{n_i}^{(i)} = \sum_{j=s+1}^{\infty} A^{-j}k_1 + k_n^{(m)}$ $(i = 1,2,\ldots)$.

$(3.2.2)$, $(3.2.3)$ და (ე) პირობების ძალით გვექნება

$$\int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)},\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1)\right]} f(t)dt \geq \int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)},\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1)\right]} f_i(t)dt + \int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)},\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1)\right]} \left[f(t)-f_i(t)\right]dt \geq ,(i=1,2,\ldots)$$

$$\geq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-l_i-2} - 2\mu\left(G_{i+1}\cap T\left[\alpha_{m_i}^{(i)},\alpha_{m_i}^{(i)} + A^{-l_i-1}(k_2-k_1)\right]\right) \geq 2^{-l_i-2} - 2^{-l_i-7}$$

და

$$\left|\int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1),\beta_{m_i}^{(i)}\right]} f(t)dt\right| \leq \int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1),\beta_{m_i}^{(i)}\right]} \left|f_i(t)\right|dt + \int\limits_{T\left[\alpha_{m_i}^{(i)}+A^{-l_i-1}(k_2-k_1),\beta_{m_i}^{(i)}\right]} \left|f(t)-f_i(t)\right|dt \leq ,(i=1,2,\ldots)$$

$$\leq 2^{-l_i-10} - 2\mu\left(G_{i+1}\cap T\left[\alpha_{m_i}^{(i)} + A^{-l_i-1}(k_2-k_1),\beta_{m_i}^{(i)}\right]\right) \leq 2^{-l_i-10} + 2^{-l_i-7}$$

ასე, რომ

$$\left|a_{l_i}^{(d_i)}(f)\chi_{l_i}^{(d_i)}(x)\right| \geq C_i\left(2^{-l_i-2} - 2^{-l_i-6} - 2^{-l_i-10}\right),$$

სადაც C_i არის ან ნული ან $\frac{2^{l_i}}{n}$, n არის მაქსიმალური რაოდენობა ერთნაირ ზომიანი ჩაკეტილი ჰაარის სიმრავლეებისა, რომელთაც გააჩნიათ არაცარიელი თანაკვეთა და რადგან ეს რაოდენობა კონკრეტული A წრფივი გარდაქმნისთვის (იხ. გვ. 6) ფიქსირებული

შემოსაზღვრული რიცხვია, ამიტომ C_i მიმდევრობაში გვხვდება უსასრულო რაოდენობა $\frac{2^{l_i}}{n}$ რიცხვები და ზუსტად ამ i ინდექსებისთვის

$$\left|a_{l_i}^{(d_i)}(f)\chi_{l_i}^{(d_i)}(x)\right| \geq \frac{1}{8n}, \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

შესაბამისად მივიღეთ, რომ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ჰაარის ტიპის სისტემის მიმართ განშლადია E სიმრავლის ყოველ წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

1. Wojtaszczyk P., *A mathematical introduction to wavelets*, Cambrige University Press, 1977.
2. Казарян К. С., *О мультипликативном дополнении некоторых неролных ортонормированных систем до базисов в* L^p, $1 \le p < \infty$, Analysis Math., 4, No.1,1978, pp. 37-52.
3. Казарян К. С., *О мультипликативном дополнении некоторых систем,* Изв. А Н Арм. ССР, №4, 1978, С. 315-351.
4. Kazarian K. S., *On bases and unconditional bases in the spaces* $L^p(d\mu)$*,* $1 \le p < \infty$, Studia Math., 71, No.3, 1982, pp. 227-249.
5. Бугадзе В. М., *О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функции на множествах меры нуль,* Мат. Заметки, 51, 1992, С 20-26.
6. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 1, 2004, pp. 30-32.
7. Melikidze Z., *On the multiplicative complementation of some incomplete Haar type orthonormalized wavelet systems to bases in* L_Q^p, $1 \le p < \infty$, Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 172, No. 1, 2005, pp. 17-19.
8. Melikidze Z., *On bases of multidimentional Haar type wavelet systems in the spaces* $L_Q^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$, Proc. A. Razmadze Math. Inst., v. 139, 2005, pp. 61-70.
9. Melikidze Z., *On noncorvergence of Fourier-Haar type series of bounded functions on the sets with measure zero,* Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 170, No. 3, 2004, pp. 450-451.
10. Haar A., *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systeme*, Math. Ann., 69, 1910, pp. 331-371.

11. Кашин Б. С., Саакян А. А., *Ортогональные ряды*, М. :Наука, 1984.
12. Braun Ben-Ami, *On the multiplicative completion of certain basic sequences in* L^p, $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 499-508.
13. Бабенко К. Н., *О сопряженних функциях*, Докл. АН СССР, 12, №2, 1948, С 157-160.
14. Банах С., *Курс функціонального аналізу*, Київ, Радянська школа, 1948.
15. Кранцберг А. С., *О базисах системы Хаара в весовом пространстве,* Моск. Инст. Электр. Мат., 24, 1971.
16. Hunt R., Muckenhoupt B. and Wheeden R., *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform,* Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1973, pp. 227-251.