Грузинский технический университет

на правах рукописи

В а х т а н г Г о г и ч а и ш в и л и

Определение некоторых электрических параметров элементов интегральных микросхем методами математического моделирования.

Специальность 01.04.01 – техника физического эксперимента, физика приборов, авотматизация физических исследований.

А в т о р е ф е р а т

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Тбилиси 2006 г.

Работа выполнена в Грузинском Техническом Университете

Научные руководители: ***Мхедзе Тенгиз***

доктор технических наук, проффесор

Гогсадзе Роберт

кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные опоненты: ***Чоговадзе Мзевинар*** доктор физико-математических наук, проффесор

шифр: 05.27.01.

Абуладзе Леван

кандидат физико-математических наук

шифр: 01.04.07.

Защита диссертации состоится «-----» «----------» 2006 г. в «------» часов на заседании диссертационного совета Ph.m 01.27 №7 Грузинского Технического Университета

по адресу: 0175 Тбилиси, ул. М. Костава №77

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ТГУ.

Адрес: 0175 Тбилиси, ул. М. Костава №77

Автореферат разослан «-----» «-----------» 2006 г.

Ученый секретарь совета

кандидат технических наук, доцент Г. Годердзишвили

Общая характеристика работы.

Актуалность работы. В результате быстрого развития технологии интегральных микросхем (ИС) в последние два десятилетия, количество функциональных элементов на одном криссталле увеличилось до нескольких миллионов. Невысокой стоимости таких систем можно добиться только снижением удельной стоимости проектирования, позволяющей избегать дорогостоящих ошибок при их разработке. Достигнут тот уровень, при котором чисто эхпериментальный подход к оптимизаций элементов ИС, представляющий собой по сути дела метод проб и ошибок, стал совершенно неприемлем. Именно поэтому, а также потому, что экспериментальные исследования занимают слишком много времени и часто слишком дороги, а зачастую просто невыполнимы, стало абсолютно необходимым применение средств математического моделирования на всех этапах проектирования и изготовления ИС.

По мере уменьшения размеров активных элементов сверхбольших интегральных микросхем (СБИС) и в связи с появлением так називаемых субмикронных технологии изготовления СБИС возникла необходимость определения некоторих электрофизических параметров с использованием трехмерных математических моделей, ибо применяемое до настоящего времени одномерные и двумерные математические модели не способны с требуемой точностью описать электрические процессы, протекающие в элементах СБИС, в результате чего практически неизбежны серезные ошибки при проектирований и разработке элементов и технологических процессов СБИС.

Математический метод моделирования элементов ИС связывает между собой основные характерные электрические параметры элемента с помощю дифференциальных уравненый в частных производных, граничных, контактных и начальных условий.

Предложеные в разных научных литературных источниках и трудах по математическому моделированию в микроэлектронике, численные методы (конечно-разностный метод и метод конечных элементов) решения граничных задач в частных производных, дают желаемые результаты при реализации двух и одномерных задач. Что касается трехмерных граничных задач, то для их решения численными методами требуется слишком большие затраты машинных и материальных ресурсов. Из-за этого трехмерные граничные задачи физики, техники и особенно микроэлектроники, описывающие механические, тепловые и электрические процессы в реальных условиях, мало исследованы.

Исходя из высшесказанного, нам кажется, что предложенный в данной работе оригинальный метод решения граничных задач для уровнения Пуассона, определяющих трехмерную структуру стационорных электрических полей в функциональных элементах ИС, а также предложенная методика определения резистивных и емкостных характеристик трехмерных биполярных транзисторных структур на основе указанных решений, внесёт определённый вклад в дальнейшем развитий и совершенствований проектирования ИС, как с точки зрения исследования электрических процессов протекающих в элементах ИС, так и в смысле практического применения в расчете параметров элементов ИС.

Целью работы является разработка методов трёхмерного математического моделирования функциональных элементов интегральных микросхем для их применения на разных этапах проектирования и изготовления интегральных микросхем.

Это подразумывает следующее:

- Постановка граничных задач для уровнения Пуассона относительно потенциалов стационарных электрических полей, определённых в разных областьях биполярных транзисторных структур и удовлетворяющих смешанным граничным задачам, в зависимости от топологических данных, физических характеристик и режимов работи транзисторов.
- Разработка методов решения поставленных граничных задач.
- Разработка методик определения резистивных и емкостных характеристик трехмерных биполярных транзисторных структур.

Научная новизна работы состаит в следующем:

1. Разработан метод приближенного аналитического решения трехмерных граничных задач для уравнения Пуассона относительно потенциала стационарных электрических полей. Аналитическое выражение полученного решения содержит геометрические параметры исследуемых структур и физические характеристики используемых материалов – в явном виде. Это обстоятельство даёт возможность, в случае необходимости, осуществить варирование расчетных параметров в зависимости от исходной информаций.
2. Разработана методика определения активных сопротивлений эмиттера и базы биполярных транзисторов на основе трехмерной математической модели.
3. Разработана методика определения активного сопротивления коллекторной области, при наличий в ней скрытого слоя, на основе трехмерной модели биполярного транзистора.
4. Разработана методика определения емкостных характеристик трехмерных транзисторных структур исползуя значение полной энергии стационарного электрического поля в области транзистора.

Практическое значение работы. Разработанные и предложенные в диссертации методики определения резистивных и ёмкостных характеристик биполярных транзисторных структур основываются на использование методов решения определённого класса трехмерных граничных задач математической физики. Эти методы, также разработанные в данной диссертационной работе, в отличии от известных численных методов решения аналогичных задач, обеспечивают несравненно более высокую точность результатов расчета параметров элементов интегральных микросхем, также позволяют проводить вычислительные эксперименты при минимальных затратах времени, машинных и материальных рессурсов, что, в конечном счёте, способствует снижению стоймости проектирования и изготовления микроэлектронных устройств.

Область использования полученных в работе результатов не ограничивается задачами микроэлектроники. Их также можно использовать при решении ряда других задач физики и техники.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Исследование и разработка метода приближенного аналитического решения трехмерной граничной задачи для уравнения Пуассона относительно потенциала стационарного электрического поля со смешанными граничными условиями на поверхности транзисторной области.
2. Разработка методики определения активных сопротивлений эмиттера и базы на основе трехмерной модели биполярного транзистора.
3. Разработка методики определения октивного сопротивления колекторной области при наличий в ней т.н. скритого слоя, на основе трехмерной модели биполярного транзистора.
4. Разработка методики определения емкостных характеристик трехмерных транзисторных структур используя значение полной энергий электрического поля в области транзистора.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертационной работы представлены на объединённом семинаре научно-инжинерного центра микроэлектроники и кафедры полупроводниковой микроэлектроники и физического материаловедения, на IV республиканской конференции по вопросам микроэлектроники и физики полупроводниковых приборов (Тбилиси 1980 г.) , на юбилейной конференций проффесорско-преподовательского состава, посвящённой 80-летию ГТУ (Тбилиси, 2002 г).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 научных работ, в том числе одна монография. Перечень трудов приведён в конце автореферата.

Структура и обём работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, выводов, списка цитированной литературы и приложения.

Основное содержание диссертационной работы

Введение. В ступительной части дано общее описание проблемы, положение дел на сегодняшый день. Определена актуальность, цель работы и направление исследований.

Первая глава представляет собой обзор данных научной литературы.

В второй главе даётся постановка граничной задачи для уравнения Пуассона относительно потенциала стационарного электрического поля, определенного в некоторой трехмерной области $G \in R^3$, ограниченной достаточно гладкой замкнутой поверхностью S:

$$\Delta u = f(M), \quad M = \{x_1, x_2, x_3\} \in G \tag{1}$$

где $f(M) \in C^1(G)$, $u(M) \in C^2(G)$ ($C^1(G)$ и $C^2(G)$ классы непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых в области G функции, соответственною

Пусть поверхность S состоит из трех частей: S_1, S_2, S_3 (в общем случае, количество составляющих частей не ограничено), а искомая функция - $u(M)$ удовлетворяет на S следующим граничным условиям:

$$u(M) = \psi_1(M_{S_1}), \quad M \in S_1 \tag{2}$$

$$u(M) = \psi_2(M_{S_2}), \quad M \in S_2 \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \nu} = \varphi_3(M_{S_3}), \quad M \in S_3 \tag{4}$$

где $\psi_1, \psi_2 \in C^1(S)$, $\varphi \in C(S)$, а $\vec{\nu}$ - внешная нормаль повехности $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (рис.1).

В данной главе также приводится доказательство единственности решения граничной задачи (1)$\div$(4), предпологая, что решение существует (вопрос существования решения расматривается в следующей главе).

В третьей главе излагается метод решения граничной задачи (1)$\div$(4).

В области $R^3 \backslash G$ (в не области G, вклучая поверхность S рассматривается замкнутая поверхность S_0, целиком охвативащая поверхность S и не имеющая с ней общих точек. Пусть $\{M_0^k\}_{k=1}^{\infty} = \{z_1^k, z_2^k, z_3^k\}_{k=1}^{\infty} \in S_0$ всюду плотное множество точек, т.е. сколь угодно малый участок поверхности S_0 содержит, по крайной мере, одну точку данного множества.

Аналогичным образом введены множества точек

$$\{M_1^k\}_{k=1}^{\infty} \in S_1, \ \{M_2^k\}_{k=1}^{\infty} \in S_2 \ \text{ и } \{M_3^k\}_{k=1}^{\infty} \in S_3.$$

Также рассматривается система фундаметальных решении оператора Лапласа:

$$\omega_k(M) = \left[r\left(M, M_0^k\right)\right]^{-1}, \ (k = 1,2,\ldots) \tag{5}$$

которая является линейно независимой и полной системой в пространствах $L_2(S)$ - интегрируемых в квадрате функций на S, и $C(S)$ - непрерывных функции, ограниченных на S.

Далее из бесконечных множеств: $\{M_0^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_1^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{M_2^k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{M_3^k\}_{k=1}^{\infty}$ выделены конечные подмножества точек:

$$\{M_0^k\}_{k=1}^{N}, \{M_1^k\}_{k=1}^{n}, \ \{M_2^k\}_{k=1}^{m}, \{M_3^k\}_{k=1}^{e}, \text{ где } N = n + m + e.$$

Рассматривается следующая функция:

$$u_N(M)=\frac{1}{\delta}\begin{vmatrix}\omega_0(M), \ \omega_1(M), \ \omega_2(M), \ \ldots \ \omega_N(M) \\ \omega_0\left(M_{S_1}^1\right)-\psi_1\left(M_{S_1}^1\right), \ \omega_1\left(M_{S_1}^1\right), \ \omega_2\left(M_{S_1}^1\right), \ \ldots \ \omega_N\left(M_{S_1}^1\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_0\left(M_{S_1}^n\right)-\psi_1\left(M_{S_1}^n\right), \ \omega_1\left(M_{S_1}^n\right), \ \omega_2\left(M_{S_1}^n\right), \ \ldots \ \omega_N\left(M_{S_1}^n\right) \\ \omega_0\left(M_{S_2}^1\right)-\psi_2\left(M_{S_2}^1\right), \ \omega_1\left(M_{S_2}^1\right), \ \omega_2\left(M_{S_2}^1\right), \ \ldots \ \omega_N\left(M_{S_2}^1\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_0\left(M_{S_2}^m\right)-\psi_2\left(M_{S_2}^m\right), \ \omega_1\left(M_{S_2}^m\right), \ \omega_2\left(M_{S_2}^m\right), \ \ldots \ \omega_N\left(M_{S_2}^m\right) \\ \left.\frac{\partial\omega_0}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^1}-\phi\left(M_{S_3}^1\right), \ \left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^1}, \ \left.\frac{\partial\omega_2}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^1} \ \ldots . \ \left.\frac{\partial\omega_N}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\frac{\partial\omega_0}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^e}-\phi\left(M_{S_3}^e\right), \ \left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^e}, \ \left.\frac{\partial\omega_2}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^e} \ \ldots . \ \left.\frac{\partial\omega_N}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^e}\end{vmatrix}, \qquad (9)$$

где δ - алгебраическое дополнение первого элемента $\left(a_{11}=\omega_0(M)\right)$ детерминанта в правой стороне равенства (9),

$$\omega_0(M)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_G \frac{f\left(M_\xi\right)}{r\left(M_1 M_\xi\right)}d\upsilon_\xi, \qquad (10)$$

$$M_\xi=\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, \ r\left(M_1 M_\xi\right)=\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d\upsilon_\xi=d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Используя некоторые свойства детерминантов и фундаментальных решении оператора Лапласа, приводится доказательство справодливости следующих соотношений:

$$\Delta u_N(M)=\Delta\omega_0(M), \ \ M\in G \qquad (11)$$

$$\Delta\omega_0(M)=f(M), \ \ M\in G \qquad (12)$$

т.е.:

$$\Delta u_N(M)=f(M), \quad u_N(M)\in C^2G, \quad M\in G \qquad (13)$$

Это означает, что рассматриваеммая функция $u_N(M)$ удовлетворяет уравнению (1) в области G.

Далеепоказано, что функция $u_N(M)$ удовлетворяет граничным условям (2) и (3) в точках $\left\{M_1^k\right\}_{k=1}^n$ и $\left\{M_2^k\right\}_{k=1}^m$, соответственно, и граничному условия (3) –в точках $\left\{M_3^k\right\}_{k=1}^e$, т.е.:

$$u_N\left(M_{S_1}^k\right)=\psi_1\left(M_{S_1}^k\right), \qquad k=1,2,\ldots n \qquad (14)$$

$$u_N\left(M_{S_2}^k\right)=\psi_2\left(M_{S_2}^k\right), \qquad k=1,2,\ldots m \qquad (15)$$

$$\left.\frac{\partial u_N}{\partial\nu}\right|_{M_{S3}^k}=\varphi\left(M_{S_3}^k\right), \qquad k=1,2,\ldots e \qquad (16)$$

Это означает, что рассматриваемая функция – (9) является решением следующей граничнои задачи:

$$\Delta u_N(M) = f(M), \quad M \in G \tag{17}$$

$$u_N\Big|_{\{M_{S1}^k\}_{k=1}^n} = \psi_1\left(M_{S_1}\right), \qquad M_{S_1} \in S_1, \tag{18}$$

$$u_N\Big|_{\{M_{S2}^k\}_{k=1}^m} = \psi_2\left(M_{S_2}\right), \qquad M_{S_2} \in S_2, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial u_N}{\partial \nu}\right|_{\{M_{S3}^k\}_{k=1}^e} = \varphi\left(M_{S_3}\right), \qquad M_{S_3} \in S_3. \tag{20}$$

Так как последовательность функции $\{u_N(M)\}_{N=1}^{\infty}$ точно удовлетворяют уравнению (1) в точке $M \in G$ и система фундаментальных решении Лапласа $\{\omega_i(M)\}_{i=1}^{\infty}$ полна в пространстве $C^2(S)$, то очевидно, что $u_N(M) \to u(M)$ при $n \to \infty$, где $u(M)$ точное решение граничной задачи (1)$\div$(4). Это означает, что функция $u_N(M)$, определенная сотношением (9), есть приближённое решение граничной задачи (1)$\div$(4).

В четвёртой главе излагаются методы определения резистивных характеристик (электрические сопротивления разных частей) биролярных транзисторных структур на основе трехмерной матетатической модели.

Электрическое сопротивление некоторой токопроводящей области $G \in R^3$, ограниченной замкнутой поверхностью S , заполненой легированным полупроводниковым материалом, зависит от структуры электрического поля в нем и от стерени легирования кристалла атомами примеси.

При определений резистивных характеристик разных частей биполярного транзистора, под трехмерной областью G, исходя из физико-топологических и технологических соображений, обычно, подразумевается либо прямоугольный параллелепипед (для эмиттерной области), либо область, представляющая собой объединение конечного числа прямоугольных параллелепипедов (для базовой и колекторной областей), часть поверхности (S_1 и S_{10}) которых, покрита омическими контактами, а часть (S_2) соприкасается с изолятором внешней стороной (рис. 2).

На поверхностях S_1 и S_{10} приложены, соответственно, электрические потенциалы $\psi_1 = const$ и $\psi_{10} = const$ $(\psi_1 \neq \psi_{10})$. Очевидно, что при таких условиях в области G будет существовать стационарное электрическое поле и через неё проидет электрический ток, с некоторой плотностью $\vec{J}$. Равенство $J_\nu = 0$, которое имеет место на поверхности S_2 ($\vec{\nu}$ - внешняя нормаль этой поверхности), представляет собой закон сохранения электрического заряда на S_2.

Необходимо отметить, что эмиттерная и базовая области отличаются друг от друга лишь конфигурацией и расположением омических контактов. Так, что принцириальной разницы между методами определения искомых характеристик для этих двух областей – нет.

Что касается коллекторной области, то тут появляются некоторые осложнения при определений электрического сопротивления. Дело в том что при изготовлений области коллектора используются некоторые технологические особенности, в отличие от остальных областей. А именно, при изготовлений биполярного транзистора, под коллекторной областью создаётся низкоомный слой определённой толщины, т.н. «скытый слой», необходимость наличия которого, вызвана некоторыми требованиями к электрическим параметрам биполярного транзистора. Очевидно, что контакт низкоомного слоя с коллекторной областью (рис. 3) влияет на структуру электрического поля в G, а это влечёт за собой существенное измененние (в данном случае – уменьшение) электрического сопротивления коллектора. Указанную особенность обязательно нужно учесть при определений структуры электрического поля в коллекторной области и её сопротивления.

Согласно закону Ома, проводимостью области G при наличий на контактных поверхностьях S_1 и S_{10} электрических потенциалов ψ_1 и ψ_{10} $(\psi_1 \neq \psi_{10})$ называется величина:

$$\rho_G = \frac{1}{R_G} = \frac{I_{S_1}}{V_G}, \tag{21}$$

где R_G - сопротивление области G, $V_G = \psi_{10} - \psi_1$, а

$$I_{S_1} = \iint\limits_{S_1} \chi \frac{\partial u}{\partial v} ds \tag{22}$$

есть электрический ток, проходящий через поверхность S_1; χ - удельная проводимость полупроводникового материала, занимающего область (в дальнейщем мы будем подразумивать, что $\chi = const$ в G); $u = u(M)$ $\left(M = \{x_1, x_2, x_3\} \in \varphi\right)$ есть значение потенциала эл. поля в G; $\vec{v}$ - внешняя нормаль поверхности S_1.

Под сопротивлением отдельных частей (эмиттер, база, коллектор) транзистора подразумывается сопротивление нейтральных областей, соответствующих этим частям транзистора. По этому в G источников электрического поля нет и граничная задача для потенциала электрического поля $u(M)$ будет иметь следующий вид:

$$\Delta u(M) = 0, \qquad M \in G, \tag{23}$$

$$u = \psi_1, \quad \text{на} \quad S_1 \tag{24}$$

$$u = \psi_{10}, \quad \text{на} \quad S_{10} \tag{25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0, \quad \text{на} \quad S_2 \tag{26}$$

Представим $u(M)$ в виде линейной комбинаций функций $u_1(M)$ и $u_2(M)$:

$$u(M) = \psi_1 u_1(M) + \psi_{10} u_2(M), \quad M \in G \tag{27}$$

где $u_1(M)$ и $u_2(M)$ являются решениями следующих граничных задач, соответственно:

$$\Delta u_1(M) = 0, \quad \text{в} \quad G \tag{28}$$

$$u_1 = 1, \quad \text{на} \quad S_1 \tag{29}$$

$$u_1 = 0, \quad \text{на} \quad S_{10} \tag{30}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial v} = 0, \quad \text{на} \quad S_2 \tag{31}$$

и

$$\Delta u_2(M)=0, \quad \text{в} \quad G \tag{32}$$

$$u_2=0, \quad \text{на} \quad S_1 \tag{33}$$

$$u_2=1, \quad \text{на} \quad S_{10} \tag{34}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu}=0, \quad \text{на} \quad S_2 \tag{35}$$

Очевидно, что $u_1(M)$ + $u_2(M)\equiv 1$ в G. Также очевидно, что (27) удовлетваряет граничной задаче (23)$\div$(26). Преобразуем вырожение (27):

$$\begin{aligned} u(M)&=\psi_1 u_1(M)+\psi_{10}\left[1-u_1(M)\right] \\ u(M)&=(\psi_1-\psi_{10})u_1(M)+\psi_{10} \\ u(M)&=-V_G u_1(M)+\psi_{10} \end{aligned} \tag{36}$$

Продиференцировав (36), получим:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial \nu}=-V_G\frac{\partial u_1(M)}{\partial \nu} \tag{37}$$

Из (24) получаем:

$$I_{S_1}=-\chi V_G\iint\limits_{S_1}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}ds \tag{38}$$

Откуда следует,что

$$\frac{1}{R_G}=\left|\chi\iint\limits_{S_1}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}ds\right| \tag{39}$$

Проводимостью области G будем называть обсолутное значение силы тока, проходящего через поверхность S_1 при $\psi_1=1$ и $\psi_{10}=0$. Обратная величина этой проводимости есть сопротивление рассматриваемой области.

Это означает, что сопротивление разных областей транзистора мы будем определять по формуле (39), где $u_1(M)$ есть решение граничной задачи (28)$\div$(31).

Построим выражения для определения электрических сопротивлений эмитерного $(R_{GЭ})$ и базового $(R_{GБ})$ областей.

С этой целью мы должны решить граничную задачу (28)$\div$(31) в случае, когда G является эмиттерной (базовой) областью.

Очевидно, что граничная задача (28)$\div$(31) представляет собой частный случай задачи (1)$\div$(4).

Аналогично прежндым рассуждениям, зафиксируем на поверхностях S_1, S_{10} и S_2 множества точек $\left\{M_{S_1}^k\right\}_{k=1}^n$, $\left\{M_{S_{10}}^k\right\}_{k=1}^m$, и $\left\{M_{S_2}^k\right\}_{k=1}^e$, $(n+m+e=N)$ соответственно, а на поверхность $S_0\in\left(R^3\setminus G\right)$ - множество точек $\left\{M_0^k\right\}_{k=1}^N$. Очевидно, что для граничной задачи (23)$\div$(26) имеют место равенства:

$$\omega_0(M) = 0, \quad M \in G \tag{40}$$

$$\frac{\partial \omega_0(M)}{\partial \nu} = 0, \quad M \in G \tag{41}$$

$$\psi\left(M_{S_1}^k\right) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{42}$$

$$\psi\left(M_{S_{10}}^k\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots m \tag{43}$$

$$\psi\left(M_{S2}^k\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots e \tag{44}$$

Исходя из этого, приближенное решение граничной задачи ($28 \div 31$) будет иметь вид:

$$u_{1N}(M) = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 0, \ \omega_1(M), \ \omega_2(M), \ldots, \ \omega_N(M) \\ -1, \ \omega_1\left(M_{S_1}^1\right), \ \omega_2\left(M_{S_1}^1\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_1}^1\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -1, \ \omega_1\left(M_{S_1}^n\right), \ \omega_2\left(M_{S_1}^n\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_1}^n\right) \\ 0, \ \omega_1\left(M_{S_{10}}^1\right), \ \omega_2\left(M_{S_{10}}^1\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_{10}}^1\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ \omega_1\left(M_{S_{10}}^m\right), \ \omega_2\left(M_{S_{10}}^m\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_{10}}^m\right) \\ 0, \ \left.\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^1}, \ \left.\frac{\partial \omega_2}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^1}, \ldots, \ \left.\frac{\partial \omega_N}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ \left.\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^e}, \ \left.\frac{\partial \omega_2}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^e}, \ldots, \ \left.\frac{\partial \omega_N}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^e} \end{vmatrix} \tag{45}$$

Исходя из соотношения (39), для электрического сопротивления эмиттерной (базовой) области получим:

$$\frac{1}{R_{GЭ(б)}} \approx \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \ \alpha_N \\ -1, \ \omega_1\left(M_{S_1}^1\right), \ \omega_2\left(M_{S_1}^1\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_1}^1\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -1, \ \omega_1\left(M_{S_1}^n\right), \ \omega_2\left(M_{S_1}^n\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_1}^n\right) \\ 0, \ \omega_1\left(M_{S_{10}}^1\right), \ \omega_2\left(M_{S_{10}}^1\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_{10}}^1\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ \omega_1\left(M_{S_{10}}^m\right), \ \omega_2\left(M_{S_{10}}^m\right), \ldots, \ \omega_N\left(M_{S_{10}}^m\right) \\ 0, \ \left.\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^1}, \ \left.\frac{\partial \omega_2}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^1}, \ldots, \ \left.\frac{\partial \omega_N}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ \left.\frac{\partial \omega_1}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^e}, \ \left.\frac{\partial \omega_2}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^e}, \ldots, \ \left.\frac{\partial \omega_N}{\partial \nu}\right|_{M_{S2}^e} \end{vmatrix}, \tag{46}$$

где:

$$\alpha_i = -\iint_{S_1} \chi \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu} ds, \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{47}$$

Если прямоугольную систему координат раположить таким образом, что плоскоть $x_3 = 0$ совпала с контактной поверхностью S_1, то очевидны следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad ds = dx_1 dx_2$$

и для α_i будет иметь:

$$\alpha_i = -\iint_{S_1} \chi \frac{\partial \omega_i}{\partial x_3} dx_1 dx_2 . \tag{48}$$

Теперь приступим к определению элекрического сопротивления коллекторной области.

Область скрытого слоя с удельной проводимостью χ_0, обозначим через G_0, а основную часть коллектора, с удельной проводимостью χ_c, через G_c.

Рассмотрим область $G = G_c \cup G_0 \in R^3$, состоящий из двух электрически неитральных частей, с разными удельными проводимостями $(\chi_c \neq \chi_0)$ и ограниченный кусочно-гладкой, замкнутой поверхностью $S = S_1 \cup S_{10} \cup S_2$. Пусть границей раздела G_c и G_0 является плоскоть $x_3 = -H$ (рис. 3). Часть поверхности S, ограничивающая область G_c, обозначим через *Гс*, а ограничивающая G_0 - через Γ_0.

Поставим следующую граничную задачу:

$$\Delta u(M) = 0, \qquad M \in G, \tag{49}$$

$$u = 1, \quad \text{на} \quad S_1 \tag{50}$$

$$u = 0, \quad \text{на} \quad S_{10} \tag{51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{на} \quad S_2 \tag{52}$$

здесь:

$$u(M) = \begin{cases} u_1(M), & M \in G_c \\ u_2(M), & M \in G_0 \end{cases} \tag{53}$$

$$u_1 = u_2, \quad \text{при} \quad x_3 = -H \tag{54}$$

$$\chi_c \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \chi_0 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \text{при} \quad x_3 = -H \tag{55}$$

где $u_1(M)$ и $u_2(M)$ гармонические функций в G_c и G_0, соответственно, при том $u_1(M)$ - удовлетворяет (50)$\div$(52) на Γ_c, а $u_2(M)$ - удовлетворяет условию (52) на Γ_0.

Посмотрим следующую систему фундаментальных решений оператора Лапласа:

$$\gamma_k(M) = \begin{cases} \gamma_k^c(M), & M \in G_c \\ \gamma_k^0(M), & M \in G_0 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{56}$$

где:

$$\gamma_k^c(M)=\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\left(x_3-z_3^k\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\left(x_3+2H+z_3^k\right)^2}}+$$

$$+\frac{4P}{(P+1)}\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(-\frac{P-1}{P+1}\right)^i}{\sqrt{\rho^2+\left[x_3-2iH+(2i+1)H+z_3^k\right]^2}}\right\},\quad (k=1,2,\ldots,N), \tag{57}$$

$$\gamma_k^0(M)=\frac{2P}{P+1}\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{\left(-\frac{P-1}{P+1}\right)^i}{\sqrt{\rho^2+\left[x_3+2i(H-H_1)+z_3^k\right]^2}}+\frac{\left(-\frac{P-1}{P+1}\right)^i}{\sqrt{\rho^2+\left[x_3-2iH+2(i+1)H_1+z_3^k\right]^2}}\right\}, \tag{58}$$

$$(k=1,2,\ldots,N).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\rho^2=\left(x_1-z_1^k\right)^2+\left(x_2-z_2^k\right)^2,\quad P=\frac{\chi_c}{\chi_0},$$

$$\left\{z_1^k,\, z_2^k,\, z_2^k\right\}_{k=1}^N=\left\{M_0^k\right\}_{k=1}^N\in S_0.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\gamma_k^c(M)$ и $\gamma_k^0(M)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\gamma_k^c=\gamma_k^0,\quad \text{при}\quad x_3=-H \tag{59}$$

$$\chi_c\frac{\partial\gamma_k^c}{\partial x_3}=\chi_0\frac{\partial\gamma_k^0}{\partial x_3},\quad \text{при}\quad x_3=-H \tag{60}$$

$$\frac{\partial\gamma_k^0}{\partial x_3}=0,\quad \text{при}\quad x_3=-H_1\quad k=1,2,3,\ldots,N. \tag{61}$$

Исходя из равенств (59)$\div$(61) можно построить вырожения приближенных значений функций $u_1(M)$ и $u_2(M)$ в G_c и G_0, соответственно.

Приближенным решением граничной задачи (49)$\div$(55) является функция:

$$u_N(M)=\begin{cases}u_{1N}(M), & M\in G_c\\ u_{2N}(M), & M\in G_0\end{cases} \tag{62}$$

Исходя из того, что в правой части соотношения (39), определяющего значение сопротивления, интегрирование осуществляется на контактную поверхность S_1, которая является частью поверхности Γ_c, для определения сопротивления коллекторной области достаточно построить функцию $u_{1N}(M)$ и проинтегрировать вырожение $\left(\chi_c \dfrac{\partial u_N}{\partial \nu}\right)$ на S_1, в результате чего получим окончательное выражение для сопротивления коллектора с учетом наличия скрытого слоя:

$$\frac{1}{R_{GC}}=\frac{1}{\delta_C}\begin{vmatrix}
0,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_N \\
-1,\ \gamma_1^c\left(M_{S_1}^1\right),\ \gamma_2^c\left(M_{S_1}^1\right),\ \ldots,\ \gamma_N^c\left(M_{S_1}^1\right) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-1,\ \gamma_1^c\left(M_{S_1}^n\right),\ \gamma_2^c\left(M_{S_1}^n\right),\ \ldots,\ \gamma_N^c\left(M_{S_1}^n\right) \\
0,\ \gamma_1^c\left(M_{S_{10}}^1\right),\ \gamma_2^c\left(M_{S_{10}}^1\right),\ \ldots,\ \gamma_N^c\left(M_{S_{10}}^1\right) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0,\ \gamma_1^c\left(M_{S_{10}}^m\right),\ \gamma_2^c\left(M_{S_{10}}^m\right),\ \ldots,\ \gamma_N^c\left(M_{S_{10}}^m\right) \\
0,\ \left.\dfrac{\partial\gamma_1^c}{\partial\nu}\right|_{M_{S2}^1},\ \left.\dfrac{\partial\gamma_2^c}{\partial\nu}\right|_{M_{S2}^1},\ \ldots,\ \left.\dfrac{\partial\gamma_N^c}{\partial\nu}\right|_{M_{S2}^1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0,\ \left.\dfrac{\partial\gamma_1^c}{\partial\nu}\right|_{M_{S2}^e},\ \left.\dfrac{\partial\gamma_2^c}{\partial\nu}\right|_{M_{S2}^e},\ \ldots,\ \left.\dfrac{\partial\gamma_N^c}{\partial\nu}\right|_{M_{S2}^e}
\end{vmatrix}, \tag{63}$$

где:

$$\eta_i=-\iint\limits_{S_1}\chi\frac{\partial\gamma_i(M)}{\partial\nu}ds \tag{64}$$

Расположив систему координат таким образом, что плоскость $x_3=0$ совпала с плоскостью контактной поверхности S_1, будет иметь:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial x_3},\qquad ds=dx_1dx_2$$

и

$$\eta_i=-\iint\limits_{S_1}\chi\frac{\partial\gamma_i(M)}{\partial\nu}dx_1dx_2. \tag{65}$$

Пятая глава посвящается определению емкостных характеристик на основе исползования трехмерной модели биполярного транзистора.

Емкостная матрица представляет собой симметричную матрицу:

$$\|C\|=\begin{pmatrix} C_{ээ}, & C_{эк} \\ C_{кэ}, & C_{кк} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

Элементы которой являются собственными ($C_{ээ}$, $C_{кк}$) и взаимными ($C_{эк}$= $C_{кэ}$) емкостями эмиттерного и коллекторного p-n переходов.

Под трехмерной области G мы будем подразумывать область заниемая биполярным транзистором (рис. 4). Обозначим части поверхности области G, соответствующие омическим контактом эммитера, базы и коллектора через $S_э$, $S_б$ и $S_к$ - соответственно, а свободную от омических контактов часть поверхности S - через S_1.

Для определения компонентов емкостной матрицы мы используем полную энергию элекрического поля транзистора:

$$W=\frac{\varepsilon}{8\pi}\iiint_G\left|\vec{E}\right|^2 d\upsilon, \tag{67}$$

где ε - диэлектрическая постоянная полупроводникового материала, а $\vec{E}=-grad\,u$ - напряженность электрического поля в G.

Значения искомых емкостей определяются формулами:

$$C_{ээ}=\frac{\partial^2 W}{\partial u_э^2},\quad C_{кк}=\frac{\partial^2 W}{\partial u_к^2},\quad C_{эк}=C_{кэ}=\frac{\partial^2 W}{\partial u_э \partial u_к}. \tag{68}$$

Как известно, при изготовленийй биполярного транзистора, в области G, на стыке подобластей разного тира проводимости образуются локальные участки объемных зарядов (так называемые p-n переходы) и в G возникает стационарное электрическое поле с потенциалом $u(M)$ $(M\in G)$. При приложений к контактам $S_э$, $S_б$, $S_к$ определенных потенциалов $u_э$, $u_б$, $u_к$, функция $u(M)$ удовлетворяет следующей граничной задаче:

$$\Delta u=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \quad \text{в} \quad G \tag{69}$$

$$u=u_э, \quad \text{на} \quad S_э \tag{70}$$

$$u=u_б, \quad \text{на} \quad S_б \tag{71}$$

$$u=u_к, \quad \text{на} \quad S_к \tag{72}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=0, \quad \text{на} \quad S_1 \tag{73}$$

где $\rho(M)$ - плотност объемных зарядов в G, известная функция; $\vec{\nu}$ - внешняя нормаль поверхности S_1.

Применив по отношению равенства (67) известную теорему Гауса:

$$\iiint_G u\Delta u d\upsilon=\iint_S u\frac{\partial u}{\partial \nu}ds-\iiint_G\left|grad\,u\right|^2 d\upsilon,$$

с учетом граничных условии (70)$\div$(73), пологая, что отсчет приложенных потенциалов производится по отношению базы (т.е. $u_б=0$), вырожение для энергии электрического поля примет вид:

$$W(u_э,u_к)=\frac{1}{2}\iiint_G u\rho d\upsilon+\frac{1}{8\pi}\left[u_э\iint_{S_э}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds+u_к\iint_{S_к}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds\right]. \tag{74}$$

Решив граничную задачу (69)$\div$(73) методом, предложенным во второй главе, используя следующие обозначения:

$$\left\{M_{S_э}^k\right\}_{k=1}^n \in S_э,\ \left\{M_{S_б}^k\right\}_{k=1}^m \in S_б,\ \left\{M_{S_к}^k\right\}_{k=1}^e \in S_к,\ \left\{M_{S_1}^k\right\}_{k=1}^\alpha \in \left(S - S_э - S_б - S_к\right),$$

$$\omega_0(M) = \frac{1}{\varepsilon}\iiint\limits_G \frac{\rho(M_\xi)}{r(M_1 M_\xi)} dv_\xi,$$

$$M_\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \in G, \quad dv_\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

и использовав это решение в правой части соотношения (74), определяем значения емкостных характеристик $C_{ээ}$, $C_{кк}$, $C_{эк} = C_{кэ}$ по формулам (68) .

Выводы

1. Поставлены трехмерные граничные задачи для уравнения Пуассона относительно потенциалов стационарных электрических полей, определенных в неравномерно-легированных областях (эмиттер, база) биполярного транзистора, при наличий смешанных граничных условии.
2. Постановлена трехмерная граничная задача для уравнения Пуассона относително потенциала стационарного электрического поля, определенного в области, состаящей из двух различных, по физическим свойством, подобластей, в случае, когда контактная поверхность является плоскостью, а поверхность, огранивающая область, имеет пройзвольную форму, естественно – при достаточной гладкости (коллектор, при наличии скрытого слоя).
3. Разработаны методы приближенного аналитического решения поставленных граничных задач.
4. Разработана методика определния активных сопротивлений эмиттера и базы на основе трехмерной модели биполярного транзистора.
5. Разработана методика определения активного сопротивления коллекторной области при наличий в ней низкоомного слоя (т.н. скрытый слой) на основе трехмерной модели биполярного транзистора.
6. Разработана методика определения емкостных характеристик трехмерных транзисторных структур исползуя значение полной энергии стационарного электрического поля в области транзистора.
7. Разработанные в диссертационной работе методы решения определённого класса граничных задач можно использовать также при решений ряда других задач физики и техники.

Основные результаты работы опубликованы в следующих научных трудах

1. Р.Ш. Гогсадзе, В.К. Гогичаишвили. Определение резистивных характеристик трехмерных биполярных транзисторных структур. Сообщ. АН ГССР, 1987, 127, №2. (стр. 357-359).
2. Р.Ш. Гогсадзе, В.К. Гогичаишвили. Об одном приближенном методе определения трехмерной модели электрического поля и его применение в расчете емкостных характеристик транзистора, Сообщ. АН ГССР, 1988, 130, №1, (стр. 157-159).

3. რ. გოგსაძე, ვ. გოგიჩაიშვილი. მათემატიკური მოდელირება მიკროელექტრონიკაში, I ნაწილი (მონოგრაფია). თბილისი, სტუ, 2002 წ.
4. В.К. Гогичаишвили, Р.Ш. Гогсадзе, Т.Д. Мхеидзе. Некоторые задачи определения электрофизических параметров элементов интегральных микросхем. GEN, №3, стр. 68-70, 2005.