ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ი ო ს ე ბ   ფ ო ჩ ხ უ ა

სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივების შეჯამებადობა და სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები

01.01.01 _ მათემატიკური ანალიზი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის
სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი

2006

ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: ს ე რ გ ო თ ო ფ უ რ ი ა
ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი

ნ ო დ ა რ მ ა ჭ ა რ ა შ ვ ი ლ ი
ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა
კანდიდატი, დოცენტი

ოფიციალური ოპონენტები: ო მ ა რ ძ ა გ ნ ი ძ ე
ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი

გ ი ვ ი ნ ა დ ი ბ ა ი ძ ე
ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა კანდიდატი,
დოცენტი

დისერტაციის დაცვა შედგება 2006 წლის "___" "______________" "___" საათზე ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის Pჰ.M.01-06. №6 სადისერტაციო საბჭოს სხდომაზე.
მისამართი: თბილისი, 0143, უნივერსიტეტის ქუჩა, №2, აუდიტორია 202.

დისერტაციის გაცნობა შესაძლებელია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ცენტრალურ სამეცნიერო ბიბლიოთეკაში.

ავტორეფერატი დაიგზავნა 2006 წლის "__" "__________________"

სადისერტაციო საბჭოს
სწავლული მდივანი,
ფიზიკა-მატემატიკის
მეცნიერებათა კანდიდატი   გ. ბარელაძე

დისერტაციის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა. სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივების შეჯამებადობისა და სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთ აქტუალურ საკითხს. ამ თემატიკისადმი ინტერესი განპირობებულია როგორც შინაგანი მოთხოვნილობებით, ასევე გამოყენების ფართო სპექტით მათემატიკის ისეთ დარგებში, როგორიცაა ფურიეს ანალიზი, კერძო წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა და ანალიზურ ფუნქციათა სასაზღვრო ამოცანები და სხვა. ამდენად დისერტაციაში დადგენილი დებულებები აქტუალურ თემატიკას განეკუთვნება.

ნაშრომის მიზანი. სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის და მისი გადიფერენცირებული ინტეგრალის თვისებების დადგენა, განზოგადოებული სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივების აბელის მეთოდით შეჯამებადობის საკითხის შესწავლა.

კვლევის მეთოდი. ნაშრომში გამოყენებულია ფუნქციათა თეორიის მეთოდები.

მეცნიერული სიახლე. 1. დადგენილია შ$^{ვ-1}$ ჰიპერსფეროზე განსაზღვრული ფუნქციის ვალე-პუსენის ინტეგრალის სიმკვრივის ფუნქციისაგან გადახრის რიგი ჩ(შ$^{ვ-1}$) და L$_{ვ}$(შ$^{ვ-1}$) მეტრიკებით.

2. შესწავლილია ვალე-პუსენის გადიფერენცირებული ინტაგრალის კრებადობოს საკითხი.

3. დამტკიცებულია თეორემები განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივების აბელის მეთოდით შეჯამებადობასთან დაკავშირებით.

მეცნიერული და პრაქტიკული ღირებულება. ნაშრომი ატარებს თეორიულ ხასიათს. მასში წარმოდგენილი შედეგები და მეთოდები გამოყენებას ჰპოვებს ფუნქციათა თეორიაში.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის №63 კათედრასთან არსებული სამეცნიერო სემინარზე (კათედრის გამგე პროფესორი სერგო თოფურია) და ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის

კათედრასთან არსებული სამეცნიერო სემინარზე (კათედრის გამგე საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი ლევან ჟიჟიაშვილი).

პუბლიკაციები. დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია ოთხი ნაშრომი. მათი ნუსხა მოცემულია ავტორეფერატის ბოლო გვერდზე.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაცია შედგება შესავლის, ორი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურისაგან, რომელიც შეიცავს 25 დასახელებას. ნაშრომის საერთო მოცულობა კომპიუტერით დაკაბადონებული 55 გვერდია.

დისერტაციის შინაარსი

შესავალში მოკლედაა მიმოხილული ის თემები, რომლებიც უშუალოდაა დაკავშირებული დისერტაციაში განხილულ საკითხებთან. მოცემულია თემის აქტუალობა, მნიშვნელობა და ნაშრომის მოლე შინაარსი.

დისერტაციის პირველ თავში, რომელიც შედგება სამი პარაგრაფისაგან შესწავლილია $k \geq 3$ განზომილებიანი შ$^{კ-1}$ ჰიპერსფეროზე განსაზღვრული ფუნქციის ვალე-პუსენისა და მისი გადიფერენცირებული ინტეგრალის თვისებები.

§1.1.-ში მოყვანილია ის განსაზღვრებები და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებულია პირველ თავში.

განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ *ფ* ∈ *L*(*შ*), ინტეგრალს

$$V_n(f;x) = \frac{n+1}{4\pi}\int\limits_{S^2}\left[\frac{1+(x,y)}{2}\right]^n f(y)dS^2(y)$$

ეწოდება ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1.2. ვთქვათ *ფ* ∈L(შ$^{3-1}$). P ∈ შ$^{3-1}$ წერტილს ეწოდება *ფ*(*P*) ფუნქციის D წერტილი, თუ

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{k-1}}\int\limits_{D^{k-1}(P,h)}[f(Q)-f(P)]dS(Q) = 0.$$

ფ(*P*) ∈*ჩ*(*შ$^{3-1}$*) ფუნქციის უწყვეტობის მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\omega(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|}\int\limits_{C_h^{k-2}(P)} f(Q)dS(Q)\|_{C(S^{k-1})} =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta}\max_{P\in S^{k-1}}\left| f(P) - \frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|}\int\limits_{C_h^{k-2}(P)} f(Q)dS(Q)\right|.$$

ფ(*P*) ∈*ჩ*(*შ$^{3-1}$*) ფუნქციის სიგლუვის მოდული განვსაზვროთ ფორმულით:

$$\omega^*(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|}\int\limits_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q)\|_{C(S^{k-1})} =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta}\max_{P\in S^{k-1}}\left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|}\int\limits_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS^{k-1}(Q)\right|.$$

$L_P(S^{k-1})$ $(1 \le p \le \infty)$ სივრცეში უწყვეტობის ინტეგრალური მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\omega(f,\delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|} \int_{C^{k-2}(P,h)} f(Q)dS(Q) \|_{L_p(S^{k-1})} =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|} \int_{C^{k-2}(P,h)} f(Q)dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p},$$

ინტეგრალური სიგლუვის მოდული, კი ფორმულით:

$$\omega^*(f,\delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{0<h\le\delta} \| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q) \|_{L_p(S^{k-1})} =$$

$$= \sup_{0<h\le\delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q)dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p}.$$

შესაბამისად განვსაზღვროთ განზოგადოებული უწყვეტობის სგლუვის, უწყვეტობის ინტეგრალური და ინტეგრალური სიგლუვის მოდულები:

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{c\ge 0} \frac{\omega(f;c\delta)}{(1+c)^2};$$

$$\Omega^*(f;\delta)=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega^*(f;c\delta)}{(1+c)^2};$$

$$\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega(f;c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2};$$

$$\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}=\sup_{c\geq 0}\frac{\omega^*(f;c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}. \qquad (1.1.6.)$$

განსაზღვრება 1.1.3. თუ

$$\Omega(f;\delta)\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f;\delta)\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha}\right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოებულ) პირობას ჩ მეტრიკაში და ვწერთ

$$f\in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ \left(f\in \mathrm{Lip}*\alpha\right).$$

განსაზღვრება 1.1.4. თუ

$$\Omega(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha} \qquad (0<\alpha\leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f;\delta)_{L_p(S^{k-1})}\leq A\left(\sin\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha}\right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ ფ აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოებულ) პირობას L3 მეტრიკაში და ვწერთ $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; \mathrm{p}) \quad \left(f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha; \mathrm{p})\right)$.   G

ფ ფუნქციის $x \in$შ3-1 წერტილზე ლაპლასის განზოგადოებული $\overline{\Delta} f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\overline{\Delta} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{\left|C^{k-2}(x;h)\right|} \int\limits_{C^{k-2}(x;h)} f(y) dS^{k-2}(y) - f(x)}{\dfrac{2}{k-1} \sin^2 \dfrac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე რიგის ოპერატორს აქვს სახე:

$$\frac{\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}\right)}{\left|C^{k-2}\right| \sin^{k-2} h} \int\limits_{C^{k-2}(x;h)} f(y) dS^{k-2}(y) =$$

$$= f(x) + \left(\frac{\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}+1\right)} + \frac{(k-1)\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}+2\right)} \sin^2 \frac{h}{2} \right) \cdot \sin^2 \frac{h}{2} \overline{\Delta} f(x) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{k-1}{2}+2\right)} \sin^4 \frac{h}{2} \overline{\Delta}^2 f(x) + o(1-\cosh)^2.$$

ფ ფუნქციის $x \in$შ3-1 წერტილზე ლაპლასის უფრო ზოგადი განზოგადოებული ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\widetilde{\Delta} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\left|D^{k-2}(x;h)\right|} \displaystyle\int_{D^{k-2}(x;h)} f(y)dS^{k-1}(y) - f(x)}{\dfrac{2}{k+1}\sin^2\dfrac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე რიგის ოპერატორი $\overset{\sim}{\Delta}^2$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\frac{1}{\left|D^{k-1}(x;h)\right|} \int_{D^{k-1}(x;h)} f(y)dS^{k-1}(y) =$$

$$= f(x) + \left(\frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}+1\right)} + \frac{(k-1)\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}+2\right)} \sin^2\frac{h}{2} \right) \cdot \sin^2\frac{h}{2}\widetilde{\Delta} f(x) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}+2\right)} \sin^4\frac{h}{2}\widetilde{\Delta}^2 f(x) + o(1-\cos h)^2.$$

§1.2-ში შესწავლია შ$^{ვ-1}$ სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები.

განსაზღვრება 1.2.1. ვთქვათ *ფ* $\in$ L(შ$^{ვ-1}$). ინტეგრალს

$$V_n(f,P)=\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1}\pi^{\frac{k-1}{2}}\Gamma(n+\frac{k-1}{2})}\int\limits_{S^{k-1}}\left[\frac{1+(P,Q)}{2}\right]^n f(Q)dS(Q). \quad (1.2.1)$$

ეწოდება ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

დამტკიცებულია ამ ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.2.1. თუ ფ(P)∈L(შ$^{კ-1}$), მაშინ ამ ფუნქციის ყველა D წერტილზე

$$\lim_{n\to\infty} V_ნ(ფ,P)=ფ(P).$$

თეორემა 1.2.2. თუ ფ (P)∈ჩ(შ$^{კ-1}$), მაშინ

$$\left\|V_n\left(f;P\right)-f\left(P\right)\right\|_{C\left(S^{K-1}\right)}\le C_k\Omega*\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

შედეგი. თუ $f\in \mathrm{Lip}*\alpha$, მაშინ

$$\left\|V_n\left(f;P\right)-f\left(P\right)\right\|_{C\left(S^{k-1}\right)}\le\frac{C_kA}{\sqrt{n^{\alpha}}}. \qquad (1.2.6)$$

თეორემა 1.2.3. თუ $f\in \mathrm{L}p\left(S^k\right)$, მაშინ

$$\left\|V_n\left(f;P\right)-f\left(P\right)\right\|_{L_p\left(S^{k-1}\right)}\le B_k\Omega*\left(f;\frac{i}{\sqrt{n}}\right)_{Lp\left(S^{k-1}\right)}.$$

შედეგი. თუ $f\in \mathrm{Lip}*\left(\alpha;\mathrm{p}\right)$, მაშინ

$$\left\|V_n\left(f;P\right)-f\left(P\right)\right\|_{L_p\left(S^{k-1}\right)}\le\frac{B_kA}{\sqrt{n^{\alpha}}}. \qquad (1.2.9)$$

თეორემა 1.2.4. (1.2.6) და (1.2.9) შეფასებები (რიგის თვალსაზრისით) საბოლოოა.

თეორემა 1.2.5. ვთქვათ $\varphi(P)\in \mathcal{B}(\mathcal{S}^{3-1})$. თუ, რაიმე P წერტილზე არსებობს განზოგადოებული ლაპლასის ოპერატორი $\overline{\Delta} f(P)$, მაშინ

$$V_n(f,P)=f(P)+\frac{\overline{\Delta} f(P)}{n}+\frac{\rho_n}{n},$$

სადაც $\rho_n \to 0$, როცა $n\to\infty$.

თეორემა 1.2.5 გვიჩვენებს, რომ ვალე_პუსენის ინტეგრალი მიუხედავად მისი ზოგადობისა (ის თანაბრად უახლოვდება ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას), გვაძლევს შედარებით ცუდი სიზუსტის მიახლოებას. უფრო მეტიც, φ ფუნქციის სტრუქტურული თვისებების ნებისმიერი სახის გაუმჯობესება არ გვაძლევს $\frac{1}{n}$–ზე უკეთესი რიგის მიახლოებას.

§1.3-ში დამტკიცებულია თეორემები ვალე-პუსენის გადიფერენცირებული ინტეგრალის კრებადობის შესახებ. კერძოდ:

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ $\varphi \in L(Ш^{3-1})$. თუ $b\in Ш^{3-1}$ წერტილზე არსებობს $\widetilde{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} D_k^2 V_n\left(f;x\right)=\widetilde{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.6. თუ $\overline{\Delta}^2 f(x)\in C\left(S^{k-1}\right)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} D_k^2 V_n\left(f;x\right)=\widetilde{\Delta}^2 f(x)$$

თანაბრად b_ის მიმართ.

მეორე თავში, რომელიც შედგება ორი პარაგრაფისგან, განხილულია განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივების აბელის მეთოდით შეჯამებადობის საკითხი.

§2.1-ში მოყვანილია ის განსაზღვრებები და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებულია ამ თავში.

დაუშვათ, ერთეულოვან სფეროს ზედაპირზე მოცემულია ვექტორფუნქცია ვ(θ,φ). განვსაზღვროთ ამ ფუნქციის კომპონენტების კომბინაცია [17]

$$\text{ვ}_0=\text{ვ}_r,\ \text{ვ}_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\text{ვ}_\varphi+i\text{ვ}_\theta),\ \text{ვ}_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\text{ვ}_\varphi-i\text{ვ}_\theta)$$

და დავშალოთ ისინი განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ

$$v_m(\theta,\varphi)\sim\sum_{l=|m|}^{\infty}\sum_{n=-l}^{l}c_{mn}^{l}T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)\qquad(\partial\!=0,\ \pm1),$$

(2.1.1)

სადაც

$$T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)=e^{-in(\frac{\pi}{2}-\varphi)}P_{mn}^{l}(\cos\theta)$$

განზოგადოებული სფერული ფუნქციებია,

$$P_{mn}^{l}(\mu)=\frac{(-1)^{n-m}i^{n-m}}{2^{l}(l-m)!}\sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}}(1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}}(1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}}\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}\cdot$$

$$\cdot[(1-\mu)^{l-m}(1+\mu)^{l+m}],$$

ხოლო

$$C_{mn}^{l}=\frac{2l+1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}v_m(\theta',\varphi')\overline{T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi',\theta',0)}\sin\theta' d\theta' d\varphi'$$

არიან ფურიეს კოეფიციენტები.

განვიხილოთ (3.1.1) მწკრივის აბელის საშუალოები

$$u(v_m;\rho,\theta,\varphi)=\sum_{l=|m|}^{\infty}\rho^{l}\sum_{n=-l}^{l}C_{mn}^{l}T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)=$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}v_m(\theta',\varphi')Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi',$$

სადაც

$$Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')=$$

$$=\sum_{l=|m|}^{\infty}(2l+1)\rho^{l}\sum_{n=-l}^{l}T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi,\theta,0)\overline{T_{mn}^{l}(\frac{\pi}{2}-\varphi',\theta',0)}. \qquad (2.1.3)$$

განსაზღვრება 2.1.1. (2.1.1) მწკრივს უწოდებენ შ რიცხვისკენ აბელის A მეთოდით შეჯამებადს (1, θ_0,φ_0) წერტილში, თუ

$$\lim_{\rho\to 1-}u(v_{m;}\rho,\theta_0,\varphi_0)=S.$$

განსაზღვრება 2.1.2. (2.1.1) მწკრივს უწოდებენ შ რიცხვისკენ აბელის A* მეთოდით შეჯამებადს (1, θ_0 ,φ_0) წერტილში, თუ

$$\lim_{(\rho,\theta,\varphi)\overset{\wedge}{\to}(,\theta_0,\varphi_0)}u(v_{m;}\rho,\theta,\varphi)=S,$$

სადაც $(\rho,\theta,\varphi)\overset{\wedge}{\to}(1,\theta_0,\varphi_0)$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ (ρ,θ,φ) წერტილი მიისწრაფის (1, θ_0, φ_0) წერტილისკენ სფეროს არამხები მიმართულებით.

განსაზღვრება 2.1.3 თუ არსებობს რიცხვები a_0, a_1, ...,a_r ისეთი, რომ x წერტილის რაიმე მიდამოში სრულდება ტოლობა

$$\frac{1}{|C(x;h)|}\int_{C(x;h)} f(t)dS(t) = \sum_{\nu=0}^{r}\frac{a_\nu}{(\nu!)^2 2^\nu}(1-\cosh)^\nu + $$
$$+o(1-\cosh)^r, \qquad r=1,2,.$$
(2.1.4)

მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია r რიგის ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას ავღნიშნავთ $\overline{\Delta}^r f(x)$ სიმბოლოთი.

(2.1.3) ტოლობით განსაზღვრული ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი a_ν რიცხვებთან დაკავშირებულია ტოლობებით

$$\overline{\Delta}^0 f(x) = a_0 ,$$

$$\overline{\Delta}[\overline{\Delta}+1\cdot 2]\{\overline{\Delta}+2\cdot 3]\cdots[\overline{\Delta}+(\nu-1)\nu]f(x)+a_\nu, \quad \nu=1,2,...,r,$$
(2.1.5)

სადაც $\overline{\Delta}^i\cdot\overline{\Delta}^\gamma=\overline{\Delta}^{i+\gamma}$, $i,\gamma\geq 0$, $i+\gamma\leq r$.

განსაზღვრება 2.1.4. ვიტყვით, რომ $x\in E^2$ წერტილის მიდამოში ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას ამ წერტილში გააჩნია r რიგის განზოგადოებული ლაპლასის ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$, თუ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\frac{1}{|D(x;h)|}\int\limits_{D(x;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{b_\nu}{\nu!(\nu+1)!2^\nu}(1-\cosh)^\nu+0(1-\cosh)^r,$$

$$\nu=\overline{1,r}.$$

ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$ დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.5 ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0\in R^2$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $a_0(x)$, $a_1(x),\ldots,a_{r-1}(x)$ და რიცხვი a_r ისეთი, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} a_\gamma(x)=a_\gamma$ და

$$\frac{1}{|C(x;h)|}\int\limits_{C(x;h)} f(t)dS(t)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{a_\nu(x)}{(\nu!)^2 2^\nu}(1-\cosh)^\nu+$$
$$+\frac{a_\nu}{(r!)^2 2r}(1-\cosh)^r+\varepsilon(x,h)(1-\cosh)^r,$$

სადაც $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x\to x_0}}\varepsilon(x,h)=0,$ მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი ძლიერი აზრით და მას ავღნიშნავთ $\overline{\Delta_x^r} f(x_0)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ თუ $x=x_0$ მაშინ $\overline{\Delta}_x^r f(x_0)=\overline{\Delta}^r f(x_0)$.

ოპერატორი $\overline{\Delta}_x^r$ დაკავშირებულია $a_\nu(\nu=1,\ 2,\ldots,\ r)$ რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.6. ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0\in R^2$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს

ფუნქციები $b_\gamma(x)$, γ =0,1,...,r-1 და რიცხვი b_r ისეთი, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} b_\gamma(x) = b_\gamma$ და

$$\frac{1}{|D(x;h)|}\int\limits_{D(x;h)} f(t)dS(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{b_\nu(x)}{\nu!(\nu+1)!2^\nu}(1-\cosh)^\nu +$$

$$+\frac{b_r}{r!(r+1)!2^r}(1-\cosh)^r + \varepsilon(x,h)(1-\cosh)^r,$$

სადაც $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ x\to x_0}} \varepsilon(x,h) = 0,$ მაშინ ვიტყვით რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას ავღნიშნავთ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0)$ სიმბოლოთი.

ამასთან, თუ x=x_0 მაშინ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0) = \tilde{\Delta}^r f(x_0)$. ოპერატორი $\tilde{\Delta}^\nu f(x)$, ν=0,1,...,r დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

§2.2-ში შესწავლილია განზოგადოებულ სფერულ ფუქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივის აბელის მეთოდით შეჯამებადობა. კერძოდ დამტკიცებულია:

თეორემა 2.2.1 $Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi')$ ფუქცია ჰარმონიულია ანუ

$$\Delta Q(\rho,\theta,\varphi,\theta',\varphi') = 0. \tag{2.2.1}$$

თეორემა 2.2.3 ვთქვათ $v(\theta,\varphi)\in L(S^2)$. თუ $r\in N$_სთვის არსებობს $\tilde{\Delta}^r v_\nu(\theta,\varphi)$, მაშინ

$$\mathop{Lim}_{\rho\to 1-} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi) = \tilde{\Delta}^r v_\nu(\theta,\varphi).$$

თეორემა 2.2.5 ვთქვათ ვ(θ,φ) ∈ L(შ²) და r ∈ N. თუ (θ₀,φ₀) წერტილზე არსებობს $\overset{\sim r}{\Delta}_{(\theta,\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho,\theta,\varphi)\xrightarrow{\wedge}(1,\theta_0,\varphi_0)} D_3^r u(v_m;\rho,\theta,\varphi)=\overset{\sim r}{\Delta}_{(\theta,\varphi)} v_m(\theta_0,\varphi_0).$$

პუბლიკაციები დისერტაციის თემაზე:

1. Macharashvili N., Pochkhua I., Summability of Differentiated Fourier, Series over the Generalized System of Spherical Functions by Abel's Method. Bull. Georg. Acad. Sci, 173(1), 2006, pp. 38-42.

2. I. Pochkhua, N. Matcharashvili, On Vallee-Poussin Integral on the S^k. Bull. Georg. Acad. Sci, 172(3), 2005, pp. 376-378.

3. I. Pochkhua, On the Second-Order Differential of the Vallee-Poussin Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. Sci, 174(1), 2006, pp. 33-35.

4. I. Pochkua, On Vallee-Poussin Differentiated Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad., 174(2), 2006.

ციტირებული ლიტერატურა:

5. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.

6. Кушниренко Г. Г., О приближений функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими

суммами. Научн. докл. высшей школы, физ. мат. наук, 4(1958), Харьков, с. 47-53.

7. Литвинков С.С., О сходимости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Изв. Высш. учебн. заведений. Математика, 4, Москва, 1962, с. 92-103.

8. Литвинков С.С., О дифференцируемости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – ДАН, СССР 144:5, 1962, с. 977-980.

9. Литвинков С.С., Некоторые свойства рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Сиб. мат. журн., 9:2, 1968, с. 332-339.

10. Мачарашвили Н.Д., О линейных методах суммирования рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – собщ. АН Груз. ССР, 1980, 98:3 с. 549-552.

11. Мачарашвили Н.Д., О (ß,) $(\frac{1}{2}< \; <1)$ суммируемости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Тр. Груз. политехн. ин-та, 5(237), 1981, с. 43-48.

12. Мачарашвили Н.Д., О константах Лебега рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Тр. Груз. политехн. ин-та, 5(237), 1981, с. 49-56.

13. Мачарашвили Н. Д., Почхуа И. И., **Ц**иклаури З. И., Сходимость продифференцированного интеграла Вале-Пуссена – Тр. Груз. политехн. ин-та, 4(454). 2004, с. 9-15.

14. Macharashvili N., Pochkhua I., Summability of Differentiated Fourier, Series over the Generalized System of Spherical Functions by Abel's Method. Bull. Georg. Acad. Sci, 173(1), 2006, pp. 38-42.

15. Натансон И. П., Конструктивная теория функций. М. Изд. технико-теоретической литературы, 1949.

16. Топурия С. Б., Некоторые свойства интеграла Валле-Пуссена на сфере, Труды ГТУ, 3(260), Тб., 1983.

17. Топурия С. Б., Граничные свойства продифференцированного интеграла Пуассона для различных областей и их некоторые применения. Технический Университет, Тб., 2003.

18. Топурия С.Б., О представлении функций, определенных на поверхности единичной сферы, сингулярными интегралами и суммируемость рядов Лапласа. Труды ГПИ, 7(147), Тб., 1971, с. 25-58.

19. Топурия С. Б., Ряды Фурье-Лапласа на сфере. Тб., 1987.

20. Топурия С. Б., Суммирование методом Абеля продифференцированного ряда Фурье. Докл. АН СССР, 209, № 3, 1973, с. 569-572.

21. Топурия С. Б., Чикобава Н. Г., Суммирование линейными методами рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям Тр. Груз. ГТУ, №2, (407), 1995.

22. Pochkhua I., Matcharashvili N., On Vallee-Poussin Integral on the S^{k-1} Bull. Georg. Acad. Sci, 172(3), 2005, pp. 376-378.

23. Pochkhua I., On the Second-Order Differential of the Vallee-Poussin Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. Sci, 174(1), 2006, pp. 33-35.

24. Pochkua I., On Vallee-Poussin Differentiated Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. 174 (2), 2006.

25. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полия Г. Неравества. М. ИЛ., 1948.