

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

იოსებ ფოჩხუა

სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადი-ფერენცირებული
მწკრივების შეჯამებადობა და სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები

01.01.01 _ მათემატიკური ანალიზი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის
სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი სერგო თოფურია ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
კანდიდატი, დოცენტი ნოდარ მაჭარაშვილი

თბილისი _ 2006

შინაარსი

შესავალი.

I-თავი. ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები.

§1.1. განსაზღვრებები და აღნიშვნები.

§1.2. ვალე-პუსენის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება.

§1.3. ვალე-პუსენის გადიფერენცირებული ინტეგრალის კრებადობა.

II-თავი. განზოგადოებული სფერული ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა.

§ 1. განსაზღვრებები და აღნიშვნები.

§ 2. განზოგადოებული სფერული ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივის შეჯამებადობა.

ლიტერატურა.

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია ევკლიდეს $k \geq 3$ განზო-მილებიანი სივრცის S^{k-1} ჰიპერსფეროზე განსაზღვრული ფუნქციის ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები, ვალე-პუსენის გადიფერენ-ცირებული ინტეგრალის თვისებები და განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრი-ვის შეჯამებადობა აბელის მეთოდით.

ნაშრომი შედგება შესავალისა და ორი თავისაგან. P პირველი თავი შედგება სამი პარაგრაფისაგან. §1.1-ში მოყვანი-ლია ის განსაზღვრებები და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებუ-ლია პირველ თავში .

განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ $f \in L(S)$. ინტეგრალს

$$V_n(f; x) = \frac{n+1}{4\pi} \int_{S^2} \left[\frac{1+(x,y)}{2} \right]^n f(y) dS^2(y) \quad \text{ეწოდება}$$

ვალე-პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

განსაზღვრება 1.1.2. ვთქვათ, $f \in L(S^{k-1})$. $P \in S^{k-1}$ წერტილს ეწოდება $f(P)$ ფუნქციის D წერტილი, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{k-1}} \int_{D^{k-1}(P,h)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) = 0.$$

$f(P) \in C(S^{k-1})$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta) &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|} \int_{C_h^{k-2}(P)} f(Q) dS(Q) \right\|_{C(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \max_{P \in S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|} \int_{C_h^{k-2}(P)} f(Q) dS(Q) \right|. \end{aligned}$$

$f(P) \in C(S^{k-1})$ ფუნქციის სიგლუვის მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} \omega^*(f, \delta) &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q) dS(Q) \right\|_{C(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \max_{P \in S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q) dS^{k-1}(Q) \right|. \end{aligned}$$

$L_p(S^{k-1})$ ($1 \leq p < \infty$) სივრცის ფუნქციის უწყვეტობის ინტეგრალური მოდული განვსაზღვროთ ფორმულით:

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta)_{L_p(S^{k-1})} &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|} \int_{C^{k-2}(P,h)} f(Q) dS(Q) \right\|_{L_p(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P,h)|} \int_{C^{k-2}(P,h)} f(Q) dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

ინტეგრალური სიგლუვის მოდული კი ფორმულით:

$$\begin{aligned} \omega^*(f, \delta)_{L_p(S^{k-1})} &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q) dS(Q) \right\|_{L_p(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P,h)|} \int_{D^{k-1}(P,h)} f(Q) dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

შესაბამისად განვსაზღვროთ განზოგადოებული უწყვეტობის და სიგლუვის მოდულები, უწყვეტობის ინტეგრალური და ინტეგრალური სიგლუვის მოდულები:

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{c \geq 0} \frac{\omega(f; c\delta)}{(1+c)^2}; \quad \Omega^*(f; \delta) = \sup_{c \geq 0} \frac{\omega^*(f; c\delta)}{(1+c)^2};$$

$$\Omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{c \geq 0} \frac{\omega(f; c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}; \quad \Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} = \sup_{c \geq 0} \frac{\omega^*(f; c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}. \quad (1.1.6)$$

განსაზღვრება 1.1.3. თუ

$$\Omega(f; \delta) \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f; \delta) \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოებულ) პირობას C მეტრიკაში და ვწერთ $f \in \text{Lip } \alpha$, ($f \in \text{Lip}^* \alpha$).

განსაზღვრება 1.1.4. თუ

$$\Omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოებულ) პირობას L_p მეტრიკაში და ვწერთ $f \in \text{Lip}(\alpha; p)$ ($f \in \text{Lip}^*(\alpha; p)$).

f ფუნქციის $x \in S^{k-1}$ წერტილზე ლაპლასის განზოგადოებული $\bar{\Delta} f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\bar{\Delta} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|C^{k-2}(x; h)|_{C^{k-2}(x; h)}} \int f(y) dS^{k-2}(y) - f(x)}{\frac{2}{k-1} \sin^2 \frac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე რიგის $\bar{\Delta}^2 f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობიდან:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{|C^{k-2}| \sin^{k-2} h} \int_{C^{k-2}(x;h)} f(y) dS^{k-2}(y) = f(x) + \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)} + \frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+2\right)} \sin^2 \frac{h}{2} \right) \cdot \sin^2 \frac{h}{2} \bar{\Delta} f(x) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+2\right)} \sin^4 \frac{h}{2} \bar{\Delta}^2 f(x) + o(1 - \cosh)^2.$$

f ფუნქციის ლაპლასის უფრო განზოგადოებული ოპერატორი $\bar{\Delta} f(x)$ ოპერატორი $x \in S^{k-1}$ წერტილზე განისაზღვრება ტოლობით:

$$\bar{\Delta} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|D^{k-2}(x;h)|} \int_{D^{k-2}(x;h)} f(y) dS^{k-1}(y) - f(x)}{\frac{2}{k+1} \sin^2 \frac{h}{2}}, \quad \text{ხოლო}$$

მეორე რიგის უფრო განზოგადოებული ოპერატორი $\tilde{\Delta}^2 f(x)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\frac{1}{|D^{k-1}(x;h)|} \int_{D^{k-1}(x;h)} f(y) dS^{k-1}(y) = f(x) + \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+1\right)} + \frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)} \sin^2 \frac{h}{2} \right) \sin^2 \frac{h}{2} \tilde{\Delta} f(x) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}+2\right)} \sin^4 \frac{h}{2} \tilde{\Delta}^2 f(x) + o(1 - \cosh)^2.$$

§1.2-ში შესწავლია S^{k-1} სფეროზე ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები.

განსაზღვრება 1.2.1. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$. ინტეგრალს

$$V_n(f, P) = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_{S^{k-1}} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n f(Q) dS(Q). \quad (1.2.1)$$

ეწოდება ვალე-პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

დამტკიცებულია ამ ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება, კერძოდ დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.2.1. თუ $f(P) \in L(S^{k-1})$, მაშინ ამ ფუნქციის ყველა D წერტილზე ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(f, P) = f(P).$$

თეორემა 1.2.2. თუ $f(P) \in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq C_k \Omega^* \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

შედეგი. თუ $f \in \text{Lip}^* \alpha$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq \frac{C_k A}{\sqrt{n}^\alpha}. \quad (1.2.6)$$

თეორემა 1.2.3. თუ $f \in L_p(S^{k-1})$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{L_p(S^{k-1})} \leq B_k \Omega^* \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{L_p(S^{k-1})}.$$

შედეგი. თუ $f \in \text{Lip}^*(\alpha; p)$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{L_p(S^{k-1})} \leq \frac{B_k A}{\sqrt{n}^\alpha}. \quad (1.2.9)$$

თეორემა 1.2.4. (1.2.6) და (1.2.9) შეფასებები (რიგის თვალსაზრისით) საბოლოოა.

თეორემა 1.2.5. ვთქვათ $f(P) \in C(S^{k-1})$. თუ რაიმე P წერტილზე არსებობს ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი $\bar{\Delta} f(P)$, მაშინ

$$V_n(f, P) = f(P) + \frac{\bar{\Delta} f(P)}{n} + \frac{\rho_n}{n}, \quad \text{სადაც}$$

$\rho_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$.

თეორემა 1.2.5 გვიჩვენებს, რომ ვალე-პუსენის ინტეგრალი მიუხედავად მისი ზოგადობისა (ის თანაბრად უახლოვდება ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას), გვაძლევს შედარებით ცუდი სიზუსტის მიახლოებას. უფრო მეტიც, f ფუნქციის

სტრუქტურული თვისებების ნებისმიერი სახის გაუმჯობესება არ გვაძლევს $\frac{1}{n}$ -ზე უკეთესი რი-გის მიახლოებას.

§1.3-ში დამტკიცებულია თეორემები ვალე-პუსენის გადიფერენ-ცირებული ინტეგრალის კრებადობის შესახებ. კერძოდ:

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$. თუ $x \in S^{k-1}$ წერტილზე არსებობს $\tilde{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^2 V_n(f; x) = \tilde{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.6. თუ $\bar{\Delta}^2 f(x) \in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^2 V_n(f; x) = \bar{\Delta}^2 f(x)$$

თანაბრად x -ის მიმართ S^{k-1} .

მეორე თავი შედგება ორი პარაგრაფისაგან. §2.1-ში მოყვანილია ის განსაზღვრებები და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებულია ამ თავში.

დაუშვათ, ერთეულოვან ორგანზომილებიან S^2 სფეროზე მოცემულია ვექტორფუნქცია $v(\theta; \varphi)$. განვსაზღვროთ ამ ფუნქციის კომპონენტების კომბინაცია [17]

$$v_0 = v_r, \quad v_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi + iv_\theta), \quad v_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi - iv_\theta)$$

და დავშალოთ ისინი განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სის-ტემის მიმართ

$$v_m(\theta, \varphi) \sim \sum_{l=|m|}^{\infty} \sum_{n=-l}^l c_{mn}^l T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) \quad (m=0, \pm 1), \quad (2.1.1)$$

სადაც

$$T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) = e^{-in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} P_{mn}^l(\cos \theta) \quad \text{განზოგადოებული}$$

სფერული ფუნქციებია,

$$P_{mn}^l(\mu) = \frac{(-1)^{n-m} i^{n-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}} (1-\mu)^{\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{\frac{n+m}{2}} \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}],$$

ხოლო

$$C_{mn}^l = \frac{2l+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_m(\theta', \varphi') T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \theta', 0\right) \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

ფურიეს კოეფიციენტებია.

განვიხილოთ (3.1.1) მწკრივის აბელის საშუალოები

$$u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = \sum_{l=|m|}^{\infty} \rho^l \sum_{n=-l}^l C_{mn}^l T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_m(\theta', \varphi') Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

სადაც

$$Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) \rho^l \sum_{n=-l}^l T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \theta', 0\right). \quad (2.1.3)$$

განსაზღვრება 2.1.1. (2.1.1) მწკრივს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A მეთოდით შეჯამებადს $(1, \theta, \varphi)$ წერტილში, თუ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = S.$$

განსაზღვრება 2.1.2. (2.1.1) მწკრივს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A^* მეთოდით შეჯამებადს $(1, \theta, \varphi)$ წერტილში, თუ

$$\lim_{(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow \hat{(1, \theta_0, \varphi_0)}} u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = S,$$

სადაც $(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow \hat{(1, \theta_0, \varphi_0)}$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ (ρ, θ, φ) წერტილი მიისწრაფის $(1, \theta, \varphi)$ წერტილისკენ სფეროს არამხები მიმართუ- ლებით .

განსაზღვრება 2.1.3. თუ არსებობს რიცხვები a, a_1, \dots, a_r ისეთი , რომ x წერტილის რაიმე მიდამოში სრულდება ტოლობა

$$\frac{1}{|C(x; h)|} \int_{C(x; h)} f(t) dS(t) = \sum_{\nu=0}^r \frac{a_\nu}{(\nu!)^2 2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + o(1 - \cosh)^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.1.4)$$

მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია ლაპლასის-ის r რიგის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta}^r f(x)$ სიმბოლოთი.

(2.1.3) ტოლობით განსაზღვრული ლაპლასის განზოგადოებუ- ლი ოპერატორი a_ν რიცხვებთან დაკავშირებულია ტოლობებით

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta}^0 f(x) &= a_0, \\ \overline{\Delta}[\overline{\Delta} + 1 \cdot 2] \{ \overline{\Delta} + 2 \cdot 3 \} \cdots [\overline{\Delta} + (\nu - 1)\nu] f(x) &+ a_\nu, \\ \nu &= 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

სადაც $\overline{\Delta}^i \cdot \overline{\Delta}^\gamma = \overline{\Delta}^{i+\gamma}$, $i, \gamma \geq 0, i+\gamma \leq r$.

განსაზღვრება 2.1.4. ვიტყვით რომ $x \in \mathcal{S}$ წერტილის მიდამოში ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას ამ წერტილში გააჩნია ლაპლასის r რიგის განზოგადოებული ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$, თუ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\frac{1}{|D(x; h)|} \int_{D(x; h)} f(t) dS(t) = \sum_{\nu=0}^r \frac{b_\nu}{\nu!(\nu+1)!2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + o(1 - \cosh)^r, \quad \nu = \overline{1, r}.$$

ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$ დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.5. ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0 \in \mathcal{S}$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{r-1}(x)$ და რიცხვი a_r ისეთი, რომ $\lim_{x \rightarrow x_0} a_\gamma(x) = a_\gamma$ და

$$\frac{1}{|C(x_0; h)|} \int_{C(x_0; h)} f(t) dS(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{a_\nu(x)}{(\nu!)^2 2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + \frac{a_r}{(r!)^2 2^r} (1 - \cosh)^r + \varepsilon(x, h)(1 - \cosh)^r,$$

სადაც $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} \varepsilon(x, h) = 0$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია

ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი ძლიერი აზ-რით და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta}_x^r f(x_0)$ სიმბოლოთი.

$$\text{ცხადია, რომ თუ } x=x_0, \text{ მაშინ } \overline{\Delta}_x^r f(x_0) = \overline{\Delta}^r f(x_0).$$

ოპერატორი $\overline{\Delta}_x^r$ დაკავშირებულია $a_\nu (\nu=1, 2, \dots, r)$ რიცხვებთან (2.1.5.) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.6. ვთქვათ, $f(x)$ ინტეგრებადია $x_0 \in \mathcal{S}$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $b_\gamma(x), \gamma=0, 1, \dots, r-1$ და რიცხვი b_r ისეთი, რომ $\lim_{x \rightarrow x_0} b_\gamma(x) = b_\gamma$ და

$$\frac{1}{|D(x_0; h)|} \int_{D(x_0; h)} f(t) dS(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{b_\nu(x)}{\nu!(\nu+1)!2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + \frac{b_r}{r!(r+1)!2^r} (1 - \cosh)^r + \varepsilon(x, h)(1 - \cosh)^r,$$

სადაც $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} \varepsilon(x, h) = 0$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია

ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\widetilde{\Delta}_x^r f(x_0)$

სიმბოლოთი.

$$\text{ამასთან, თუ } x=x_0 \text{ მაშინ, } \widetilde{\Delta}_x^r f(x_0) = \widetilde{\Delta}^r f(x_0). \text{ ოპერატორი } \widetilde{\Delta}^\nu f(x), \nu=0, 1, \dots, r,$$

დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

§2.2.-ში შესწავლილია განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივის აბელის მეთოდით შეჯამებადობა. კერძოდ დამტკიცებულია:

თეორემა 2.2.1. $Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi')$ ფუნქცია ჰარმონიულია ანუ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') = 0. \quad (2.2.1)$$

თეორემა 2.2.3. ვთქვათ $v(\theta, \varphi) \in L(S^2)$. თუ $r \in \mathbb{N}$ სთვის არსე- ბობს

$\tilde{\Delta}^r v_v(\theta, \varphi)$, მაშინ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = \tilde{\Delta}^r v_v(\theta, \varphi).$$

თეორემა 2.2.5. ვთქვათ $v(\theta, \varphi) \in L(S^2)$ და $r \in \mathbb{N}$. თუ (θ_0, φ_0) წერტილზე

არსებობს $\tilde{\Delta}^r_{(\theta, \varphi)} v_m(\theta_0, \varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (1, \theta_0, \varphi_0)} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = \tilde{\Delta}^r_{(\theta, \varphi)} v_m(\theta_0, \varphi_0).$$

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [14], [23] და [24] შრომებში.

I-თავი

ვალე-პუსენის ინტეგრალის თვისებები

§1.1. განსაზღვრებები და აღნიშვნები

ვთქვათ R^3 ევკლიდეს სამ გამზომილებიანი სივრცეა, რომლის წერტილებს აღვნიშნავთ $x=(x_1, x_2, x_3)$, $y=(y_1, y_2, y_3)$, და ა. შ. , x და y ვექტორების სკალარული

ნამრავლი $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, x ვექტორის სიგრძე $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$.

ერთეულოვანი სფერო $\{x; x \in R^3, |x|=1\}$ აღვნიშნოთ \mathcal{S} -ით. \mathcal{S} -ზე ჯამებად ფუნქციათა სივრცე აღვნიშნოთ $L(\mathcal{S})$ -ით, ხოლო \mathcal{S} -ზე უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე $C(\mathcal{S})$ -ით.

x წერტილის x_1, x_2, x_3 კოორდინატები სფერულ ρ, θ, φ კოორდი-ნატებთან დაკავშირებულია ტოლობებით:

$$x_1 = \rho \cos \theta,$$

$$x_2 = \rho \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_3 = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

γ -ით აღვნიშნოთ კუთხე, კოორდინატთა სათავიდან $x=(\theta, \varphi) \in S^2$ და $y=(\theta', \varphi') \in S^2$ წერტილებამდე გატარებულ რადიუსებს შორის.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$(x,y)=\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi'+\sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi'. \quad (1.1.1)$$

თუ $\theta=0$, ე.ი. x ემთხვევა ჩრდილოეთ პოლუსს, მაშინ (1.1.1)-დან ვღებულობთ $\cos\gamma=\cos\theta'$, ამიტომ $\gamma=\theta'$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 1.1.1. ვთქვათ $f \in L(\mathcal{S})$. ინტეგრალს

$$V_n(f;x) = \frac{n+1}{4\pi} \int_{S^2} \left[\frac{1+(x,y)}{2} \right]^n f(y) dS^2(y) \quad (1.1.2)$$

ეწოდება ვალე-პუსენის სინგულარული ინტეგრალი R^3 -ში.

ცნობილია, რომ [5]

$$\int_{S^2} \left[\frac{1+(x,y)}{2} \right]^n dS^2(y) = \frac{4\pi}{n+1}. \quad (1.1.3)$$

D_3 -ით აღვნიშნოთ ლაპლასის ოპერატორი \mathcal{S} სფეროზე ანუ R^3 -ში ლაპლასის ოპერატორის კუთხური ნაწილი, რომელიც ჩაწე-რილია სფერულ კოორდინატებით [5]

$$D_3 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

f ფუნქციის $x \in \mathcal{S}$ წერტილზე ლაპლასის განზოგადოებული $\bar{\Delta} f(x)$ ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\bar{\Delta} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi \sinh} \int_{C(x;h)} f(y) dS(y) - f(x)}{\sin^2 \frac{h}{2}},$$

ხოლო ლაპლასის მეორე რიგის განზოგადოებული ოპერატორი $\bar{\Delta}^2 f(x)$ -ტოლობით:

$$\bar{\Delta}^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\pi \sinh} \int_{C(x;h)} f(y) dS(y) - f(x) - \bar{\Delta} f(x) \sin^2 \frac{h}{2}}{\frac{1}{4} \sin^2 \frac{h}{2}}.$$

ახლა განვსაზღვროთ ლაპლასის უფრო განზოგადოებული $\tilde{\Delta}$ ოპერატორი:

$$\tilde{\Delta} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|D(x;h)|} \int_{D(x;h)} f(y) dS^2(y) - f(x)}{\frac{1}{2} \sin^2 \frac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე

რიგის ოპერატორი $\tilde{\Delta}^2$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$\tilde{\Delta}^2 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4\pi \sin^2 \frac{h}{2}} \left\{ \int_{D(x;h)} f(y) dS^2(y) - f(x) - \tilde{\Delta} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \frac{h}{2} + \frac{1}{12} \sin^4 \frac{h}{2} \right) \right\} dS(y)}{\frac{1}{24} \sin^4 \frac{h}{2}}.$$

ვთქვათ R^k ($k \geq 3$) განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცეა. (x,y) -ით აღვნიშნოთ $x, y \in R^k$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

S^{k-1} -ით R^k -ში ერთეულოვანი სფეროს, რომლის ცენტრი ძვეს კოორდინატა სათავეში.

$$C^{k-2}(x,h) = \{t : t \in S^{k-1}, (x,t) = \cosh, 0 < h \leq \pi\},$$

$$D^{k-1}(x,h) = \{t : t \in S^{k-1}, (x,t) > \cosh, 0 < h \leq \pi\},$$

$C^{k-2}(x,h)$ და $D^{k-1}(x,h)$ -ის შესაბამისად $(k-2)$ და $(k-1)$ განზომილებიანი ფართობი აღვნიშნოთ $|C^{k-2}(x,h)|$ და $|D^{k-1}(x,h)|$ -ით.

ცნობილია, რომ ([16] გვ. 52)

$$|C^{k-2}(x,h)| = \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}} \sin^{k-2} h}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)},$$

$$|D^{k-1}(x,h)| = \int_0^h |C^{k-2}(x,\gamma)| d\gamma = \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^h \sin^{k-2} \gamma d\gamma.$$

S^{k-1} სფეროზე ლაპლასის ოპერატორი აღვნიშნოთ D_k -თი ანუ R^k -ში ლაპლასის ოპერატორის კუთხური ნაწილი, რომელიც ჩაწერილია სფერულ კოორდინატებით ([17] გვ. 54):

$$D_k = \frac{1}{\sin^{k-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^{k-2} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \sin^{k-3} \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin^{k-3} \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) +$$

.....

$$+ \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{k-3} \sin \theta_{k-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{k-2}} \left(\sin \theta_{k-2} \frac{\partial}{\partial \theta_{k-2}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{k-3} \sin^2 \theta_{k-2}} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

f ფუნქციისთვის ლაპლასის განზოგადოებული $\bar{\Delta} f(x)$ ოპერატორი $x \in S^{k-1}$

წერტილზე განისაზღვრება შემდგენაირად:

$$\bar{\Delta} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|C^{k-2}(x; h)|} \int_{C^{k-2}(x; h)} f(y) dS^{k-2}(y) - f(x)}{\frac{2}{k-1} \sin^2 \frac{h}{2}},$$

ხოლო მეორე რიგის $\bar{\Delta}^2 f(x)$ ოპერატორ განისაზღვრება ტოლობიდან:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{|S^{k-2}| \sin^{k-2} h} \int_{C^{k-2}(x; h)} f(y) dS^{k-2}(y) = f(x) + \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + 1\right)} + \frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + 2\right)} \sin^2 \frac{h}{2} \right) \cdot \sin^2 \frac{h}{2} \bar{\Delta} f(x) + \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + 2\right)} \sin^4 \frac{h}{2} \bar{\Delta}^2 f(x) + o(1 - \cosh)^2.$$

f ფუნქციის $x \in S^{k-1}$ წერტილზე ლაპლასის უფრო განზოგადოებული

ოპერატორი განისაზღვრება ტოლობით

$$\tilde{\Delta} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|D^{k-2}(x; h)|} \int_{D^{k-2}(x; h)} f(y) dS^{k-1}(y) - f(x)}{\frac{2}{k+1} \sin^2 \frac{h}{2}}, \quad \text{ხოლო}$$

მეორე რიგის $\tilde{\Delta}^2$ ოპერატორი კი ტოლობით:

$$\frac{1}{|D^{k-1}(x; h)|} \int_{D^{k-1}(x; h)} f(y) dS^{k-1}(y) = f(x) + \left(\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 1\right)} + \frac{(k-1)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 2\right)} \sin^2 \frac{h}{2} \right) \sin^2 \frac{h}{2} \tilde{\Delta} f(x) + \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 2\right)} \sin^4 \frac{h}{2} \tilde{\Delta}^2 f(x) + o(1 - \cosh)^2.$$

$L_p(S^{k-1})$ -ით აღვნიშნოთ p ხარისხით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე S^{k-1} -ზე; $C(S^{k-1})$ - უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე S^{k-1} -ზე. ამ სივრცეში ელემენტთა ნორმა განვსაზღვროთ ტოლობებით:

$$\|f\|_{L_p(S^{k-1})} = \left\{ \int_{S^{k-1}} |f(Q)|^p dS^{k-1}(Q) \right\}^{1/p}, \quad \|f\|_{C(S^{k-1})} = \max_{P \in S^{k-1}} |f(P)|.$$

[2]-დან გამომდინარე, შემოვიღოთ

განსაზღვრება 1.1.2. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$. $P \in S^{k-1}$ წერტილს ეწოდება $f(P)$ ფუნქციის D წერტილი, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{k-1}} \int_{D^{k-1}(P, h)} [f(Q) - f(P)] dS^{k-1}(Q) = 0.$$

შემოვიყვანოთ ჰიპერსფერზე განსაზღვრული ფუნქციისთვის უწყვეტობის მოდულის, სიგლუვის მოდულის, ინტეგრალური უწყვეტობის მოდულის და ინტეგრალური სიგლუვის მოდულის ცნებები:

$f(P) \in C(S^{k-1})$ ფუნქციის უწყვეტობის მოდული განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta) &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|} \int_{C_h^{k-2}(P)} f(Q) dS(Q) \right\|_{C(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \max_{P \in S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|C_h^{k-2}(P)|} \int_{C_h^{k-2}(P)} f(Q) dS(Q) \right|. \end{aligned}$$

$f(P) \in C(S^{k-1})$ ფუნქციის სიგლუვის მოდული განვსაზღვროთ

ტოლობით:

$$\begin{aligned} \omega^*(f, \delta) &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right\|_{C(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \max_{P \in S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right|. \end{aligned}$$

$L_p(S^{k-1})$ ($1 \leq p \leq \infty$) სივრცეში უწყვეტობის ინტეგრალური მოდული

განვსაზღვროთ ტოლობით:

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta)_{L_p(S^{k-1})} &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P, h)|} \int_{C^{k-2}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right\|_{L_p(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|C^{k-2}(P, h)|} \int_{C^{k-2}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p}, \end{aligned}$$

ინტეგრალური სიგლუვის მოდული, კი ტოლობით:

$$\begin{aligned} \omega^*(f, \delta)_{L_p(S^{k-1})} &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right\|_{L_p(S^{k-1})} = \\ &= \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \int_{S^{k-1}} \left| f(P) - \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right|^p dS(P) \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

შესაბამისად განვსაზღვროთ განზოგადოებული უწყვეტობის სიგლუვის,

უწყვეტობის ინტეგრალური და ინტეგრალური სიგლუვ-ის მოდულები:

$$\begin{aligned} \Omega(f; \delta) &= \sup_{c \geq 0} \frac{\omega(f; c\delta)}{(1+c)^2}; & \Omega^*(f; \delta) &= \sup_{c \geq 0} \frac{\omega^*(f; c\delta)}{(1+c)^2}; \\ \Omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} &= \sup_{c \geq 0} \frac{\omega(f; c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}; & \Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} &= \sup_{c \geq 0} \frac{\omega^*(f; c\delta)_{L_p(S^{k-1})}}{(1+c)^2}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

ცნობილია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრულ უწყვეტობის და სიგლუვის მოდულებს აქვთ თვისებები:

$$1. \quad \Omega(f; \delta), \Omega^*(f; \delta), \Omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}, \Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}, \omega(f; \delta), \omega^*(f; \delta), \omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}$$

და $\omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}$ არ არის კლებადი.

2. $\Omega(f; \delta) \leq 2\|f\|_{C(S^{k-1})}$, $\Omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq 2\|f\|_{L_p(S^{k-1})}$, $\Omega^*(f; \delta) \leq 2\|f\|_{C(S^{k-1})}$,
 $\Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq 2\|f\|_{L_p(S^{k-1})}$.
3. $\Omega(f_1+f_2; \delta) \leq \Omega(f_1; \delta) + \Omega(f_2; \delta)$; $\Omega^*(f_1+f_2; \delta)$
 $\leq \Omega^*(f_1; \delta) + \Omega^*(f_2; \delta)$; $\Omega(f_1+f_2; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq \Omega(f_1; \delta)_{L_p(S^{k-1})} + \Omega(f_2; \delta)_{L_p(S^{k-1})}$;
 $\Omega^*(f_1+f_2; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq \Omega^*(f_1; \delta)_{L_p(S^{k-1})} + \Omega^*(f_2; \delta)_{L_p(S^{k-1})}$.
4. $\omega^*(f; \delta) \leq W(f; \delta)$, $\omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq c_p \omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}$.
5. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})} = 0$.
6. თუ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(f; \delta)}{\delta^2} = 0$, მაშინ $f(P) = \text{const}$.
7. თუ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}}{\delta^2} = 0$, მაშინ $f(P) = \text{const}$ თითქმის ყველგან S^{k-1} -ზე.
8. $\Omega(f; \lambda \delta) \leq (1+\lambda)^2 \Omega(f; \delta)$, $\Omega^*(f; \lambda \delta) \leq (1+\lambda)^2 \Omega^*(f; \delta)$,
 $\Omega(f; \lambda \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq (1+\lambda)^2 \Omega_{L_p(S^{k-1})}(f; \delta)$, $\Omega^*(f; \lambda \delta)_{L_p(S^{k-1})} \leq (1+\lambda)^2 \Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-1})}$.

განსაზღვრება 1.1.3. თუ

$$\Omega(f; \delta) \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f; \delta) \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოე-ბულ) პირობას C მეტრიკაში და ვწერთ: $f \in \text{Lip } \alpha$, ($f \in \text{Lip }^* \alpha$).

განსაზღვრება 1.1.4. თუ

$$\Omega(f; \delta)_{L_p(S^{k-2})} \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 2)$$

$$\left(\Omega^*(f; \delta)_{L_p(S^{k-2})} \leq A \left(\sin \frac{\delta}{2} \right)^\alpha \right),$$

მაშინ ვიტყვით, რომ f აკმაყოფილებს ლიფშიცის (განზოგადოე-ბულ) პირობას L_p მეტრიკაში და ვწერთ $f \in \text{Lip}(\alpha; p)$ ($f \in \text{Lip}^*(\alpha; p)$).

§.1.2. ვალე_პუსენის ინტეგრალის ზოგიერთი თვისება

განსაზღვრება 1.2.1. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$. ინტეგრალს

$$V_n(f, P) = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_{S^{k-1}} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n f(Q) dS(Q). \quad (1.2.1)$$

ეწოდება ვალე_პუსენის სინგულარული ინტეგრალი.

ცნობილია, რომ ([2] გვ. 3)

$$\int_{S^{k-1}} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n dS(Q) = 2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \frac{\Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma(n+k-1)}. \quad (1.2.2)$$

[17]_ში დამტკიცებულა შემდეგი ლემა:

ლემა A. ვთქვათ $[0; \pi]$ სეგმენტზე მოცემულია ისეთი $f(t)$ ფუნქცია, რომ $f(t) \sin^{k-1} t \in L(0; \pi)$ ($k > 1$ ნატურალური რიცხვია) და

$$M = \sup_{0 < h \leq \pi} \left\{ \frac{1}{h^k} \left| \int_0^h f(t) \sin^{k-1} t dt \right| \right\} < \infty.$$

ყოველი არაუარყოფითი არაზრდადი $g(t) \in L(0; \pi)$ ფუნქციისთვის

$$\int_0^t f(t) g(t) \sin^{k-1} t dt \quad \text{ინტეგრალი}$$

არსებობს და სამართლიანია უტოლობა

$$\left| \int_0^\pi g(t) f(t) \sin^{k-1} t dt \right| \leq kM \int_0^\pi t^{k-1} g(t) dt.$$

ამ ლემის დახმარებით დავამტკიცოთ თეორემა S^{k-1} _ზე ვალე_პუსენის ინტეგრალის თითქმის ყველგან კრებადობაზე.

თეორემა 1.2.1. თუ $f(P) \in L(S^{k-1})$, მაშინ ამ ფუნქციის ყველა D წერტილზე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(f, P) = f(P).$$

დამტკიცება. (1.2.1) და (1.2.2)-დან გვაქვს

$$V_n(f, P) - f(P) = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1}} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n [f(Q) - f(P)] dS(Q).$$

ავიღოთ $\varepsilon > 0$ და ვიპოვოთ $\delta > 0$ ისეთი, რომ $0 < h \leq \delta$ სთვის ადგი-ლი ჰქონდეს უტოლობას

$$\frac{1}{h^{k-1}} \int_0^h \left\{ \int_{(P, \theta) = \cos \gamma} (f(Q) - f(P)) dS(Q) \right\} d\gamma < \varepsilon. \quad \text{განვიხილოთ}$$

გამოსახულება

$$\begin{aligned} V_n(f, P) - f(P) &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_{w^{k-1}(P, \delta)} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n [f(Q) - f(P)] dS(Q) + \\ &+ \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1} \setminus w^{k-1}(P, \delta)} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n [f(Q) - f(P)] dS(Q) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

ლემა A-ს ძალით I_1 -სათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_0^\delta \int_{(P, \theta) = \cos \gamma} \left[\frac{1+(P, Q)}{2} \right]^n [f(Q) - f(P)] dS(Q) d\gamma = \\ &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_0^\delta \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n} \int_{(P, \theta) = \cos \gamma} [f(Q) - f(P)] dS(Q) d\gamma \leq \\ &\leq \varepsilon k \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_0^\delta \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma d\gamma \leq \\ &\leq \varepsilon k \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma d\gamma = \\ &= \varepsilon k \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \frac{2^{k-3} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma(n+k-1)} \leq c_k \varepsilon. \end{aligned} \quad \text{ახლა}$$

ზემოდან შევაფასოთ I_2 .

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \int_{\delta}^{\pi} \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \int_{(P,\theta)=\cos \gamma} [f(Q) - f(P)] dS(Q) d\gamma \leq \\
&\leq \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \int_{\delta}^{\pi} \int_{(P,\theta)=\cos \gamma} [f(Q) - f(P)] dS(Q) d\gamma = \\
&= \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1}} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \leq \\
&\leq c_k \left(\cos \frac{\delta}{2}\right)^{2n} n^{\frac{k-1}{2}} = c_k q^{2n} n^{\frac{k-1}{2}},
\end{aligned}$$

სადაც

$$q = \cos \frac{\delta}{2} < 1.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა შევისწავლოთ S^{k-1} -ზე განსაზღვრული ფუნქციის ვალე-პუსენის ინტეგრალის მიახლოების საკითხი.

თეორემა 1.2.2. თუ $f(P) \in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq C_k \Omega^* \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

დამტკიცება. (1.2.1) და (1.2.2)-დან გვექნება

$$\begin{aligned}
V_n(f, P) - f(P) &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1}} \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} [f(Q) - f(P)] dS(Q) = \\
&= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n+\frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1}} \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \left\{ \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right\} d\gamma.
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

დავუშვათ

$$\begin{aligned}
v &= \left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n}, \\
du &= \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS^{k-1}(Q) d\gamma,
\end{aligned}$$

საიდანაც

$$dv = d\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} = \frac{d}{dh}\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} dh, \quad (1.1.6)$$

$$u = \int_0^h d\gamma \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS^{k-1}(Q) - \int_{D^{k-1}(P,h)} [f(Q) - f(P)] dS(Q).$$

ტოლობიდან ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left(\cos\frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \left\{ \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right\} d\gamma = \\ & = \left[\left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} \int_{D^{k-1}(P,h)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right]_0^\pi - \\ & - \int_0^\pi \left\{ \int_{D^{k-1}(P,h)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right\} \frac{d}{dh} \left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} dh = \\ & = \int_0^\pi |D^k(P,h)| \left[f(P) \frac{1}{|D^k(P,h)|} \int_{D^k(P,h)} f(P) dS(Q) \right] \frac{d}{dh} \left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} dh. \end{aligned}$$

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_0^\pi |D^{k-1}(P,h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} \right| \Omega^*(f; h) dh =$$

$$\begin{aligned} \text{შემდეგ} & = \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_0^\pi |D^{k-1}(P,h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} \right| \Omega^*\left(f; \sqrt{nh} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) dh \leq \\ & \leq \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \Omega^*\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_0^\pi |D^k(P,h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} \right| (1 + \sqrt{nh})^2 dh. \end{aligned}$$

(1.2.4)

ზემოდან შევაფასოთ

ინტეგრალი

$$\int_0^\pi |D^{k-1}(P,h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos\frac{h}{2}\right)^{2n} \right| (1 + \sqrt{nh})^2 dh.$$

წინა თეორემის დამტკიცებიდან გვაქვს

$$|D^{k-1}(P,h)| = \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^h \sin^{k-2} \gamma d\gamma \leq \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} h^{k-1}, \quad \text{ამიტომ}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi |D^{k-1}(P, h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| (1 + \sqrt{nh})^2 dh \leq \\
& \leq \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi h^{k-1} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n-1} \sin \frac{h}{2} (1 + 2\sqrt{nh} + nh^2) dh = \\
& = \frac{2^k \pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\frac{h}{2} \right)^{k-1} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n-1} \sin \frac{h}{2} (1 + 2\sqrt{nh} + nh^2) dh \leq \\
& \leq \frac{2^k \pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \left[\frac{\pi^{k-1}}{2^k} \int_0^h \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n-1} \left(\sin \frac{h}{2} \right)^k dh + \right. \\
& \left. + \frac{\pi^{k-1}}{2^k} \sqrt{n} \int_0^h \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n-1} \left(\sin \frac{h}{2} \right)^{k+1} dh + \frac{\pi^{k-1}}{2^k} n \int_0^h \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n-1} \left(\sin \frac{h}{2} \right)^{k+2} dh \right] = \\
& = \frac{2^k \pi^{\frac{k-1}{2}}}{(k-1)\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \left[\frac{\pi^{k-1}}{2^k} \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k+1}{2}\right)} + \frac{\pi^{k-1}}{2^k} \sqrt{n} \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k+2}{2}\right)} + \frac{\pi^{k-1}}{2^k} n \frac{\Gamma(n)\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k+3}{2}\right)} \right].
\end{aligned}$$

(1.2.5) (1.2.3) და

(1.2.4)-დან გვაქვს :

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq C_k \Omega^* \left(f; \frac{i}{\sqrt{n}} \right).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f \in \text{Lip}^* \alpha$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq \frac{C_k A}{\sqrt{n}^\alpha}. \quad (1.2.6)$$

თეორემა 1.2.3. თუ $f \in Lp(S^k)$, მაშინ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq B_k \Omega^* \left(f; \frac{i}{\sqrt{n}} \right)_{Lp(S^{k-1})}.$$

დამტკიცება. (1.2.1) და (1.2.2)-დან გვაქვს

$$\begin{aligned}
V_n(f, P) - f(P) &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1}} \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} [f(Q) - f(P)] dS(Q) = \\
&= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma(n + \frac{k-1}{2})} \int_{S^{k-1}} \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \left\{ \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right\} d\gamma.
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

დავუშვათ

$$\begin{aligned}
v &= \left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n}, \\
du &= \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS^{k-1}(Q) d\gamma,
\end{aligned}$$

საიდანაც

$$\begin{aligned}
dv &= \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n} dh, \\
u &= \int_{D^k(P, h)} [f(Q) - f(P)] dS^k(Q).
\end{aligned}$$

(1.2.7) ტოლობიდან ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \left\{ \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right\} d\gamma = \\
&= \left[\left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n} \int_{D^{k-1}(P, h)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right]_0^\pi - \\
&- \int_0^\pi \left\{ \int_{D^{k-1}(P, h)} [f(Q) - f(P)] dS(Q) \right\} \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n} dh = \\
&= \int_0^\pi \left\{ \int_{D^{k-1}(P, h)} [f(P) - f(Q)] dS(Q) \right\} \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n} dh \\
&= \int_0^\pi |D^{k-1}(P, h)| \left[f(P) \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right] \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2}\right)^{2n} dh.
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

(1.2.7) და (1.2.8)-დან გვაქვს

$$|V_n(f; P) - f(P)|^p \leq \left(\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \right)^p \left[\int_0^\pi |D^{k-1}(P, h)| |f(P) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^k(P, h)} f(Q) dS(Q) \right] \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| dh \right]^p.$$

ცნობილი უტოლობის ძალით [25, გვ179] აქედან ვღებულობთ

$$\|V_n(f; P) - f(P)\|_{L_p(S^{k-1})} = \left\{ \int_{S^{k-1}} |V_n(f; P) - f(P)|^p dS(P) \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \left[\int_{S^{k-1}} \left[\int_0^\pi |f(P) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|D^k(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(\theta) dS(\theta) \right] \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| |D^{k-1}(P, h)| dh \right]^p dS(P) \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi |D^{k-1}(P, h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| \left[\int_{S^{k-1}} |f(P) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{|D^{k-1}(P, h)|} \int_{D^{k-1}(P, h)} f(Q) dS(Q) \right]^p dS(P) dh \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi |D^{k-1}(P, h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| \left| \Omega^*(f; h) \right|_{L_p(S^{k-1})} dh =$$

$$= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi |D^{k-1}(P; h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| \left| \Omega^* \left(f; \sqrt{nh} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right|_{L_p(S^{k-1})} dh \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \Omega^* \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{L_p(S^{k-1})} \int_0^\pi |D^{k-1}(P, h)| \left| \frac{d}{dh} \left(\cos \frac{h}{2} \right)^{2n} \right| (1 + \sqrt{nh})^2 dh.$$

აქედან (1.2.5)-ს ძალით, გვაქვს

$$\|V_n(f;P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq B_k \Omega^* \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{L_p(S^{k-1})}. \quad \text{ამით}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f \in \text{Lip}^*(\alpha; p)$, მაშინ

$$\|V_n(f;P) - f(P)\|_{C(S^{k-1})} \leq \frac{B_k A}{\sqrt{n}^\alpha}. \quad (1.2.9)$$

თეორემა 1.2.4. (1.2.6) და (1.2.9) შეფასებები (რიგის თვალ-საზრისით) საბოლოოა.

დამტკიცება. $f(\theta, \varphi)$ ფუნქცია S^2 -ზე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$f(\theta, \varphi) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^\alpha.$$

ცხადია, რომ ის ეკუთვნის $\text{Lip}^* \alpha$ და $\text{Lip}^*(\alpha; p)$ კლასს. [15, გვ 259]-ის ანალოგიურად ვაჩვენოთ, რომ

$$V_n(f; 0, 0) > \frac{A}{\sqrt{n}^\alpha}.$$

მართლაც

$$\begin{aligned} V_n(f; 0, 0) &= \frac{n+1}{4\pi} \int_{S^2} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^\alpha \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n} \sin \gamma d\gamma = \\ &= \frac{n+1}{2} \int_{S^2} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^{\alpha+1} \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n+1} d\gamma = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n + 2 + \frac{\alpha}{2}\right)} > \frac{A}{\sqrt{n}^\alpha}. \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 1.2.5. თუ $f(P) \in C(S^{k-1})$ ფუნქციისთვის რაღაც P წერტილზე არსებობს ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი $\bar{\Delta}f(P)$, მაშინ

$$V_n(f, P) = f(P) + \frac{\bar{\Delta}f(P)}{n} + \frac{\rho_n}{n}. \quad (1.2.10)$$

სადაც $\rho_n \rightarrow 0$, როცა $n \rightarrow \infty$.

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით

$$\frac{1}{|S_\gamma^{k-1}(P)|_{S_\gamma^{k-1}(P)}} \int f(Q) dS^{k-1}(Q) = f(P) + \frac{2\bar{\Delta}f(P) \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{k-1} + o\left(\sin^2 \frac{\gamma}{2}\right). \quad \text{ამიტომ}$$

$$\begin{aligned}
V_n(f, P) &= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} f(Q) dS^{k-1}(Q) d\gamma = \\
&= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma \left\{ \frac{1}{|S_\gamma^{k-1}(P)|_{S_\gamma^{k-1}(P)}} \int_{S_\gamma^{k-1}(P)} f(Q) dS^{k-1} \right\} d\gamma = \\
&= \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-2} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma \left[f(P) + \frac{2\Delta f(P) \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{k-1} + o\left(\sin^2 \frac{\gamma}{2}\right) \right] d\gamma = \\
&= f(P) + \bar{\Delta} f(P) \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-3} (k-1) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} d\gamma + \\
&+ \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-2} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} o\left(\int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} d\gamma \right).
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

შემდეგ

$$\begin{aligned}
&\bar{\Delta} f(P) \frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-3} (k-1) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} d\gamma = \\
&= \bar{\Delta} f(P) \frac{4\Gamma(n+k-1)}{(k-1) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \int_0^\pi (\cos \gamma)^{2n+k-2} \sin^k \gamma d\gamma = \\
&= \bar{\Delta} f(P) \frac{4\Gamma(n+k-1)}{(k-1) \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)}{\Gamma(n+k)} = \frac{\bar{\Delta} f(P)}{n+k-1} = \frac{\bar{\Delta} f(P)}{n} - \frac{\bar{\Delta} f(P)}{n(n+k-1)}.
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

ანალოგიურად მიიღება, რომ

$$\frac{\Gamma(n+k-1)}{2^{k-2} \Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{k-1}{2}\right)} o\left(\int_0^\pi \left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^{2n} \sin^{k-2} \gamma \sin^2 \frac{\gamma}{2} d\gamma \right) = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1.2.13}$$

(1.2.11), (1.2.12) და (1.2.13)–დან ვღებულობთ (1.2.10)–ს.

თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემა გვიჩვენებს, რომ ვალე-ჰუსენის ინტეგრალი მიუხედავად მისი ზოგადობისა (უწყვეტი ფუნქციის ვალე-ჰუსენის ინტეგრალი თანაბრად უახლოვდება ამ ფუნქციას), გვაძლევს $\frac{1}{n}$ რიგის მიახლოებას და უფრო მეტიც, f ფუნქციის სტრუქტურული თვისებების ნებისმიერი სახის გაუმჯობესება არ გვაძლევს უკეთესი რიგის მიახლოებას.

§1.3. ვალე-ჰუსენის გადიფერენცირებული ინტეგრალის კრებადობა

დავუშვათ

$$\Phi_n(\gamma) = \frac{n+1}{4\pi} \left(\frac{1+\cos\gamma}{2} \right)^n.$$

[15] ნაშრომში დამტკიცებული არის ლემა .

ლემა B. სამართლიანია ტოლობა

$$\begin{aligned} D_3 \phi_n(\gamma) \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=0}} &= \frac{n(n+1)}{2^{(n+1)}\pi} [(n-1) - (n+1)\cos\gamma] (1+\cos\gamma)^{n-1} = \\ &= n(n+1)(\phi_{n-1}(\gamma) - \phi_n(\gamma)). \end{aligned}$$

ცხადია,

რომ

$$\begin{aligned} D_3^2 \phi_n(\gamma) \Big|_{\substack{\theta=0 \\ \varphi=0}} &= n(n+1)(D_3 \phi_{n-1}(\gamma) - D_3 \phi_n(\gamma)) = \\ &= \frac{n^2(n+1)}{4\pi} \left((n-1)^2 - 2n^2 \left(\frac{1+\cos\gamma}{2} \right) + (n+1)^2 \left(\frac{1+\cos\gamma}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{1+\cos\gamma}{2} \right)^{n-2} = \\ &= n^2(n+1) \{ (n-1)\phi_{n-2}(\gamma) - 2n\phi_{n-1}(\gamma) + (n+1)\phi_n(\gamma) \} \end{aligned}$$

ლემა 1.3.1. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1. $\int_0^{\pi} D_3^2 \phi_n(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 0;$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 < \delta \leq \gamma \leq \pi} |D_3^2 \phi_n(\gamma)| = 0;$
3. $\int_0^{\pi} D_3^2 \phi_n(\gamma) \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{5n+6}{n^2+5n+6} \right];$
4. $\int_0^{\pi} |D_3^2 \phi_n(\gamma)| \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma = O(1).$

დამტკიცება. 1. და 2. ტოლობა ცხადია. ვაჩვენოთ 3. ტოლობის სამართლიანობა.

მართლაც

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} D_3^2 \phi_n(\gamma) \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma &= n^2(n+1) \left\{ (n-1) \int_0^{\pi} \Phi_{n-2}(\gamma) \sin \frac{\gamma}{2} \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma - \right. \\
 &- 2n \int_0^{\pi} \Phi_{n-1}(\gamma) \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma + (n+1) \int_0^{\pi} \Phi_n(\gamma) \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma \left. \right\} = \\
 &= \frac{n^2(n+1)}{2\pi} \left[(n-1)^2 \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^5 \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n-3} d\gamma - 2n^2 \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^5 \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n-1} d\gamma + \right. \\
 &+ (n+1)^2 \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^5 \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^{2n+1} d\gamma \left. \right] = \\
 &= \frac{n^2(n+1)}{2\pi} \left[\frac{(n-1)^2 \Gamma(3) \Gamma(n-1)}{4\Gamma(n+2)} - 2n^2 \frac{\Gamma(3) \Gamma(n)}{4\Gamma(n+3)} + (n+1)^2 \frac{\Gamma(3) \Gamma(n+1)}{4\Gamma(n+4)} \right] = \\
 &= \frac{n^2}{2\pi(n^2+5n+6)} = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{5n+6}{n^2+5n+6} \right].
 \end{aligned}$$

ქ.ო.

$$\int_0^{\pi} D_3^2 \phi_n(\gamma) \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma = \frac{1}{2\pi} \left[1 - \frac{5n+6}{n^2+5n+6} \right]$$

ახლა ვაჩვენოთ 4 ტოლობის სამართლიანობა. ამისათვის განვიხილოთ

$$g_n(\gamma) = (n-1)^2 - 2n^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} + (n+1)^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2}$$

ფუნქცია $[0, \pi]$ შუალედში . ამ ფუნქციას $[0, \pi]$ შუალედში აქვს შემ- დეგო

კრიტიკული წერტილები $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\pi$ და $\gamma_3=2\arccos \frac{n}{n+1}$, ხოლო ამ წერტილებზე მისი

მნიშვნელობები იქნება

$$g_n(0)=2, g_n(\pi)=(n-1)^2 \text{ და } g_n(2\arccos \frac{n}{n+1})=-2+\frac{4n+3}{(n+1)^2}.$$

ვინაიდან

$$(n-1)^2 - 2n^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} + (n+1)^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2} = 0$$

განტოლების ამონახსნებია

$$\gamma_1 = 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - \sqrt{2n^2 - 1}}{(n+1)^2}},$$

$$\gamma_2 = 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 + \sqrt{2n^2 - 1}}{(n+1)^2}}.$$

ამიტომ $g_n(\gamma)$ დადებითია $E_{n1} = \left[0; 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - \sqrt{2n^2 - 1}}{(n+1)^2}} \right]$ და

$E_{n3} = \left[2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 + \sqrt{2n^2 - 1}}{(n+1)^2}}; \pi \right]$ შუალედში და უარყოფითია

$E_{n2} = \left[2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 - \sqrt{2n^2 - 1}}{(n+1)^2}}; 2 \arccos \sqrt{\frac{n^2 + \sqrt{2n^2 - 1}}{(n+1)^2}} \right]$ შუალედში. გარდა ამისა,

$$|g_n(\gamma)| \leq 2, \quad \forall \gamma \in E_{n1} \quad \text{და} \quad |g_n(\gamma)| \leq \frac{2n^2 - 1}{(n+1)^2}, \quad \forall \gamma \in E_{n2} \quad (1.3.1)$$

შესაბამისად, მე_4_ს დასამტკიცებლად საკმარისია განვიხი- ლოთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$I_{n2} = -\frac{n^2(n+1)}{4\pi} \int_{E_2} \left[(n-1)^2 - 2n^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} + (n+1)^2 \cos^4 \frac{\gamma}{2} \right] \left(\frac{1+\cos\gamma}{2} \right)^{n-2} \sin\gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma.$$

$$\begin{aligned}
I_{n2} &\leq \frac{n^2(n+1)}{4\pi} \frac{2n^2-1}{(n+1)^2} \int_{2\arccos\sqrt{\frac{n^2+\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}}^{2\arccos\sqrt{\frac{n^2-\sqrt{2n^2-1}}{(n+1)^2}}} (1+\cos\gamma)^{n-2} \sin\gamma \sin^4\frac{\gamma}{2} d\gamma \leq \\
&\leq \frac{n^2(n+1)}{4\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos\gamma}{2}\right)^{n-2} \sin\gamma \sin^4\frac{\gamma}{2} d\gamma = \text{მაგრამ} \\
&= \frac{n^2(2n^2-1)}{8\pi} \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{n(2n^2-1)}{4\pi(n^2-1)(n+1)}, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n^2-1)}{4\pi(n^2-1)(n+1)} &= \frac{1}{2\pi}. \tag{1.3.2}
\end{aligned}$$

(1.2.2)-ის გამოყენებით, უტოლობიდან

$$0 < I_n < \frac{n(2n^2-1)}{4\pi(n^2-1)(n+1)}$$

გვაქვს

$$0 < \overline{\lim} I_n < \frac{1}{2\pi} \tag{1.3.3}$$

$$I_n = O(1)$$

აქედან (1.3.3) ტოლობის გამოყენებით გამოდის 4-ის სამართლიანობა .

თეორემა 1.3.1. ვთქვათ $f \in L(\mathcal{S})$. თუ $x \in \mathcal{S}$ წერტილზე არსებობს სასრული $\overline{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_3^2 V_n(f; x) = \overline{\Delta}^2 f(x).$$

დამტკიცება. თუ $x(\theta, \varphi)$ -ს მივიღებთ კოორდინატთა სათავედ, მაშინ (1.3.3)

და ლემა 1.3.1-ის ძალით გვაქვს

$$\begin{aligned}
 D_3^2 V_n(f; x) &= \int_0^\pi \left[\int_{(x,y)=\cos \gamma} D_3^2 \Phi_n(\gamma) [f(y) - f(x) - \bar{\Delta} f(x) \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y) \right] d\gamma = \\
 &= 2\pi \int_0^\pi D^2 \Phi_n(\gamma) \sin \gamma \frac{1}{2\pi \sin \gamma} \left[\int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x) - \bar{\Delta} f(x) \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y) \right] d\gamma = \\
 &= 2\pi \int_0^\pi D_3^2 \Phi_n(\gamma) \sin \gamma \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x) - \bar{\Delta} f(x) \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y)}{\frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2}} \right] d\gamma = \\
 &= 2\pi \int_0^\pi D_3^2 \Phi_n(\gamma) \sin \gamma \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x) - \bar{\Delta} f(x) \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y)}{\frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{\Delta}^2 f(x) \right] d\gamma + \bar{\Delta}^2 f(x) - \frac{5n+6}{(n^2+5n+6)} \bar{\Delta}^2 f(x).
 \end{aligned}$$

ვთქვათ $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. ავიღოთ ისეთი $\delta > 0$, რომ

$$\left| \frac{\frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x) - \bar{\Delta} f(x) \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y)}{\frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2}} - \bar{\Delta}^2 f(x) \right| < \varepsilon, \quad (1.3.4)$$

როცა $0 < \gamma < \delta$.

შემდეგ

$$\begin{aligned}
& \left| D_3^2 V_n(f; x) - \overline{\Delta^2 f(x)} \right| \leq \\
& \leq 2\pi \int_0^\delta D_3^2 \Phi_n(\gamma) \sin \gamma \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\gamma}{2} \left[\frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x) - \overline{\Delta f(x)} \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y) \right. \\
& \quad \left. - \overline{\Delta^2 f(x)} \right] d\gamma + 2\pi \int_\delta^\pi |D_3^2 \Phi_n(\gamma)| d\gamma \int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x) - \overline{\Delta f(x)} \sin^2 \frac{\gamma}{2}] dS(y) + \\
& \quad + 2\pi \left| \overline{\Delta^2 f(x)} \right| \int_0^\pi \frac{1}{4} |D_3^2 \Phi_n(\gamma)| \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma + \left[\frac{5n+6}{4(n^2+5n+6)} \right] \left| \overline{\Delta^2 f(x)} \right| = \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

ლემა 1.3.1-ის და (1.3.3)-ის ძალით

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_4 = 0. \quad \text{შესაზამისად,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_3^2 V_n(f; x) = \overline{\Delta^2 f(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 1.3.2. თუ $\overline{\Delta^2 f(x)} \in C(\mathcal{S})$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_3^2 V_n(f; x) = \overline{\Delta^2 f(x)} \quad \text{თანაბრად } x\text{-ის მიმართ}$$

სწე.

ისევე, როგორც სამ გამზომილბიან სივრცეში, k გამზომილბიან სივრცეში სამართლიანია შემდეგი:

ლემა 1.3.2. მართებულია შემდეგი ტოლობები:

1. $\int_0^\pi D_k^2 \Phi_n(\gamma) \sin^{k-2} \gamma d\gamma = 0.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 < \delta \leq \gamma \leq \pi} |D_k^3 \phi_n(\gamma)| = 0.$
3. $\int_0^\pi D_k^2 \Phi_n(\gamma) \sin^{k-2} \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma = o(1).$

$$4. \int_0^{\pi} \left| D_k^2 \Phi_n(\gamma) \right| \sin^{k-2} \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} d\gamma = o(1).$$

ლემა 1.3.3. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$1. \int_0^{\pi} D_k^2 \Phi_n(\gamma) \sin^{k-2} \gamma d\gamma = 0.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 < \delta \leq \gamma \leq \pi} \frac{d}{d \cos \gamma} [D_k^2 \phi_n(\gamma)] = 0.$$

$$3. \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 2\right)} \int_0^{\pi} \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} \left| D^{k-1}(x; y) \right| \frac{d}{d \cos \gamma} [D_k^2 \phi_n(\gamma)] d\gamma = o(1).$$

$$4. \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} + 2\right)} \int_0^{\pi} \sin \gamma \sin^4 \frac{\gamma}{2} \left| D^{k-1}(x; y) \right| \left| \frac{d}{d \cos \gamma} [D_k^2 \phi_n(\gamma)] \right| d\gamma = o(1).$$

თეორემა 1.3.3. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$, თუ $x \in S^{k-1}$ წერტილზე არსებობს $\overline{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^2 V_n(f; x) = \overline{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.4. თუ $\overline{\Delta}^2 f(x) \in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^2 V_n(f; x) = \overline{\Delta}^2 f(x) \quad \text{თანაბრად}$$

x -ის მიმართ \mathcal{S} -ზე.

თეორემა 1.3.5. ვთქვათ $f \in L(S^{k-1})$. თუ $x \in S^{k-1}$ წერტილზე არსებობს $\tilde{\Delta}^2 f(x)$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^2 V_n(f; x) = \tilde{\Delta}^2 f(x).$$

თეორემა 1.3.4. თუ $\tilde{\Delta}^2 f(x) \in C(S^{k-1})$, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_k^2 V_n(f; x) = \tilde{\Delta}^2 f(x)$$

თანაბრად x -ის მიმართ \mathcal{S} ზე.

II-თავი

განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივის შეჯამებადობა

§ 1. განსაზღვრებები და აღნიშვნები

დაუშვათ ერთეულოვან სფეროს ზედაპირზე მოცემულია ვექტორ ფუნქცია $v(\theta, \varphi)$, რომლის კომპონენტებსაც სფერულ კოორდინატთა სისტემაში აქვს სახე:

$$v_\rho = v_x \sin\theta \cos\varphi + v_y \sin\theta \sin\varphi + v_z \cos\theta$$

$$v_\theta = v_x \cos\theta \cos\varphi + v_y \cos\theta \sin\varphi - v_z \sin\theta$$

$$v_\varphi = v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi$$

ლაპლასის განტოლების $\Delta U = 0$ ამონახსნებს აქვთ სახე (იხ. [2] ან [5], გვ. 200)

$$U_{lm} = \rho^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

სადაც θ და φ სფერული კოორდინატებია, ხოლო Y_{lm} არის l რიგის სფერული ფუნქცია, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta), \quad (-l \leq m \leq l), \quad \text{სადაც}$$

$P_l^m(\cos\theta)$ ლეჟანდრის მიკავშირებული ფუნქციაა.

$$P_l^m(\mu) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}} (1 - \mu^2)^l.$$

ფუნქციები U_{lm} არიან l რიგის ერთგვაროვანი ჰარმონიული მრავალწევრები დეკარტის x_1, x_2, x_3 კოორდინატების მიმართ.

კოორდინატთა სისტემის ბრუნვის შედეგად ერთგვაროვანი მრავალწევრი გადადის იგივე ხარისხის ერთგვაროვან მრავალწევრ-ში. მმეორეს მხრივ, ასეთი ბრუნვის დროს ლაპლასის ოპერატორი ინარჩუნებს სახეს, ე.ი. $\Delta_{x_1, x_2, x_3} = \Delta_{x'_1, x'_2, x'_3}$.

ამიტომ, ნებისმიერი ერთგვაროვანი ჰარმონიული მრავალწევრი ასეთი ბრუნვის შედეგად გადადის იგივე ხარისხის ერთგვაროვან ჰარმონიულ მრავალწევრ-ში.

ამიტომ,

$$U_{lm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_n T_{mn}^l U_{ln}(x'_1, x'_2, x'_3). \quad \text{ამრიგად}$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_n T_{mn}^l Y_{ln}(\theta', \varphi').$$

კოეფიციენტები T_{mn}^l , ცხადია დამოკიდებულია ეილერის კუთხეებზე, ე.ი.

$$T_{mn}^l = T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2), \quad \text{სადაც}$$

$$0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi_2 < 2\pi.$$

$T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ ფუნქციებს უწოდებენ განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციებს, ვინაიდან ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში ისინი ემთხვევიან ჩვეულებრივ სფერულ ფუნქციებს ([5], გვ.214). განზოგადოებული სფერული ფუნქციები ფართოდ გამოიყენება კვანტურ მექანიკაში და ატომურ ფიზიკაში [1], [2], [3], [4].

ფუნქციებს $T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ აქვთ შემდეგი სახე [2]

$$T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = l^{-i(m\varphi_1+n\varphi_2)} P_{mn}^l(\cos \theta), \quad \text{სადაც}$$

$$P_{mn}^l(\mu) = \frac{(-1)^{i-m} i^{m-n}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!}} (1-\mu)^{\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{\frac{n+m}{2}} \cdot \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}],$$

$$\mu = \cos \theta.$$

განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციებს და ჩვეულებრივ სფერულ ფუნქციებს შორის კავშირი მოიცემა ტოლობებით ([5], გვ.207).

$$T_{m0}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi_1),$$

$$T_{0n}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = (-1)^n \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi_2),$$

$$T_{00}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = P_l(\cos \theta),$$

სადაც Y_{lm} ჩვეულებრივი სფერული ფუნქციაა, ხოლო P_l ლეჟანდრის პოლინომია.

ცნობილია, რომ [2] განზოგადოებული სფერული ფუნქციები

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} \right)$$

ოპერატორის საკუთრივი ფუნქციებია საკუთრივი მნიშვნელობებით $-l(l+1)$

განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა ერთობლიობა $\sqrt{2l+1}T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ ადგენენ სრულ ორთონორმირებულ სისტემას $f(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ ფუნქციათა სივრცეში, სადაც სკალარული ნამრავლი განსაზღვრულია ტოლობით

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_1(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \overline{f_2(\varphi_1, \theta, \varphi_2)} \sin \theta d\varphi_1 d\theta d\varphi_2.$$

შრომებში [7], [8], [9] შესწავლილია განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ ფურიეს მწკრივის წერტილოვანი, აბსოლიტური და თანაბარი კრებადობა. ამ მწკრივების (C, α) მეთოდით შეჯამებადობის საკითხები შესწავლილი იყო ნ. მაჭარა-შვილის მიერ [9], [10], [11], ხოლო აბელის მეთოდით შეჯამებადობა განხილული იყო ს. თოფურიას მიერ [22].

განვსაზღვროთ $v(\theta, \varphi)$ ფუნქციის კომპონენტების კომბინა-ციები [2]

$$v_0 = v_r, \quad v_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi + i v_\theta), \quad v_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\varphi - i v_\theta) \quad \text{და}$$

დავშალოთ ისინი განზოგადოებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის მიმართ

$$v_m(\theta, \varphi) \sim \sum_{l=|m|}^{\infty} \sum_{n=-l}^l c_{mn}^l T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) \quad (m=0, \pm 1), \quad (2.1.1) \text{ სადაც}$$

$$T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) = e^{-in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} P_{mn}^l(\cos \theta)$$

განზოგადოებული სფერული ფუნქციებია,

$$P_{mn}^l(\mu) = \frac{(-1)^{n-m} i^{n-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l+m)!(l-n)!}} (1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}],$$

ხოლო

$$C_{mn}^l = \frac{2l+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v_m(\theta', \varphi') \overline{T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \theta', 0\right)} \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

ფურიეს კოეფიციენტება.

ვთქვათ Δ ლაპლასის ოპერატორია, ხოლო D_3 ლაპლასის ოპერატორი \mathcal{P} სფეროზე ([18], გვ 14)

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} D, \quad (2.1.2.)$$

$$D_3 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

ცნობილია, რომ [1]

$$D_3 T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) = -l(l+1) T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right), \quad \text{ე.ი. თუ } D$$

$D_3^r = D_3(D_3^r)$, მაშინ

$$D_3^r T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) = [-l(l+1)]^r T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right). \quad \text{განვიხილოთ}$$

(2.1.1) მწკრივის აბელის საშუალოები

$$\begin{aligned} u(v_m; \rho, \theta, \varphi) &= \sum_{l=|m|}^{\infty} \rho^l \sum_{n=-l}^l C_{mn}^l T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} v_m(\theta', \varphi') Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \end{aligned} \quad \text{სადაც}$$

$$Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sum_{l=|m|}^{\infty} (2l+1) \rho^l \sum_{n=-l}^l T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) \overline{T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \theta', 0 \right)}. \quad (2.1.3)$$

განსაზღვრება 2.1.1. (2.1.1) მწკრივებს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A მეთოდით შეჯამებადს (1, θ, φ) წერტილში, თუ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = S$$

განსაზღვრება 2.1.2. (2.1.1) მწკრივებს უწოდებენ S რიცხვის-კენ აბელის A* მეთოდით შეჯამებადს (1, θ, φ) წერტილში, თუ

$$\lim_{(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow \hat{(\theta_0, \varphi_0)}} u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = S,$$

სადაც $(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow \hat{(1, \theta_0, \varphi_0)}$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ (ρ, θ, φ) წერტილი მიისწრაფის (1, θ, φ) წერტილისკენ სფეროს არამხევი მიმართულებით.

$D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi)$ იყოს (2.1.1) მწკრივზე D_3^r ოპერატორის მოქმედებით მიღებული მწკრივის აბელის საშუალოები, ე.ი.

$$D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} v_m(\theta', \varphi') [D_3^r Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi']$$

განსაზღვრეთ ვალე-პუსენის წარმოებულის ანალოგი სფერო-ზე მოცემული ფუნქციისათვის ([20], გვ. 65-72).

განსაზღვრება 2.1.3. თუ არსებობს რიცხვები a_0, a_1, \dots, a_r ისეთი, რომ x წერტილის რაიმე მიდამოში სრულდება ტოლობა

$$\frac{1}{|C(x;h)|} \int_{C(x;h)} f(t)dS(t) = \sum_{\nu=0}^r \frac{a_\nu}{(\nu!)^2 2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + o(1 - \cosh)^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.1.4)$$

მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია r რიგის ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta}^r f(x)$ სიმბოლოთი.

(2.1.3) ტოლობით განსაზღვრული ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი a_ν რიცხვებთან დაკავშირებულია ტოლობებით

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta}^0 f(x) &= a_0, \\ \overline{\Delta}[\overline{\Delta} + 1 \cdot 2] \{ \overline{\Delta} + 2 \cdot 3 \} \cdots [\overline{\Delta} + (\nu - 1)\nu] f(x) &+ a_\nu, \\ \nu &= 1, 2, \dots, r \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5) \quad \text{სადაც}$$

$$\overline{\Delta}^i \cdot \overline{\Delta}^\gamma = \overline{\Delta}^{i+\gamma}, \quad i, \gamma \geq 0, \quad i + \gamma \leq r.$$

განსაზღვრება 2.1.4. ვიტყვით, რომ $x \in \mathcal{S}$ წერტილის მიდამოში ინტეგრებად $f(x)$ ფუნქციას ამ წერტილში გააჩნია r რიგის ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$, თუ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\frac{1}{|D(x;h)|} \int_{D(x;h)} f(t)dS(t) = \sum_{\nu=0}^r \frac{b_\nu}{\nu!(\nu+1)!2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + o(1 - \cosh)^r, \quad \nu = 1, 2$$

$\tilde{\Delta}^r f(x)$ ოპერატორი დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.5. ვთქვათ $f(b)$ ინტეგრებადია $b_0 \in \mathcal{S}$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $a_0(b), a_1(b), \dots, a_{r-1}(b)$ და რიცხვი a_r ისეთი, რომ $\lim_{x \rightarrow x_0} a_\nu(x) = a_\nu$ და

$$\frac{1}{|C(x_0;h)|} \int_{C(x_0;h)} f(t)dS(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{a_\nu(x)}{(\nu!)^2 2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + \frac{a_r}{(r!)^2 2^r} (1 - \cosh)^r + \varepsilon(x, h)(1 - \cosh)^r,$$

სადაც $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} \varepsilon(x, h) = 0$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია

ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი ძლიერი აზრით და მას აღვნიშნავთ $\overline{\Delta}_x^r f(x_0)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ თუ $x = x_0$ მაშინ $\overline{\Delta}_x^r f(x_0) = \overline{\Delta}^r f(x_0)$.

ოპერატორი $\overline{\Delta}_x^r f(x)$ დაკავშირებულია $a_\nu (\nu = 1, 2, \dots, r)$ რიცხვებთან (2.1.5) სახის ტოლობებით.

განსაზღვრება 2.1.6. ვთქვათ $f(x)$ ინტეგრებადია $x \in \mathcal{S}$ წერტილის რაიმე სფერულ მიდამოში. თუ არსებობს ფუნქციები $b_\gamma(x)$, $\gamma=0,1,\dots,r-1$ და რიცხვი b ისეთი, რომ $\lim_{x \rightarrow x_0} b_\gamma(x) = b_\gamma$ და

$$\frac{1}{|D(x_0; h)|} \int_{D(x_0; h)} f(t) dS(t) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{b_\nu(x)}{\nu!(\nu+1)!2^\nu} (1 - \cosh)^\nu + \frac{b_r}{r!(r+1)!2^r} (1 - \cosh)^r + \varepsilon(x, h)(1 - \cosh)^r$$

სადაც $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} \varepsilon(x, h) = 0$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილ-ში გააჩნია

ლაპლასის განზოგადოებული ოპერატორი და მას აღვნიშნავთ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0)$

სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ თუ $x=x_0$, მაშინ $\tilde{\Delta}_x^r f(x_0) = \tilde{\Delta}^r f(x_0)$. ოპერატორი $\tilde{\Delta}^r f(x)$, $\nu=0,1,\dots,r$ დაკავშირებულია b_ν რიცხვებთან (3.1.4) სახის ტოლობებით.

$(\rho, \theta, \varphi) \xrightarrow{\wedge} (1, \theta_0, \varphi_0)$ სიმბოლო ნიშნავს, რომ (ρ, θ, φ) წერტილი $(1, \theta, \varphi)$ წერტილისკენ მიისწრაფის სფეროს არა მხევი მიმართულებით. ე.ი. არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი C , რომ $\frac{\rho_0}{1-\rho} < C$, სადაც ρ არის (ρ, θ, φ) და $(1, \theta, \varphi)$ წერტილებს შორის მანძილი.

§ 2. განზოგადოებული სფერული ფუნქციათა სისტემის მიმართ

ფურიეს გადიფერენცირებული მწკრივის შეჯამებადობა

თეორემა 2.2.1. $Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi')$ ფუნქცია ჰარმონიულია ანუ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\Delta Q(\rho, \theta, \varphi, \theta', \varphi') = 0. \quad (2.2.1)$$

დამტკიცება. (2.1.3)-ის ძალით გვაქვს

$$D_3 Q(\rho; \theta, \varphi) = \sum_{\ell=|m|}^{\infty} [-e(e+1)](2e+1) \sum_{n=-e}^e T_{mn}^e \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0 \right) T_{mn}^\ell \left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \vartheta', 0 \right)$$

მეორე მხრივ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho, \vartheta, \varphi) \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \ell(2\ell+1) \rho^{\ell-1} \sum_{n=-e}^e T_{mn}^e \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0 \right) T_{mn}^\ell \left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \vartheta', 0 \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_{\ell=|m|}^{\infty} \ell(2\ell+1) \rho^{\ell+1} \sum_{n=-e}^e T_{mn}^e \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0 \right) T_{mn}^\ell \left(\frac{\pi}{2} - \varphi', \vartheta', 0 \right) = \end{aligned}$$

$$\sum_{\ell=|m|}^{\infty} \ell(\ell+1)(2\ell+1)\rho^\ell \sum_{n=-\ell}^{\ell} T_{mn}^e\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, 0\right) T_{mn}^\ell\left(\frac{\pi}{2}-\varphi', \vartheta', 0\right)$$

აქედან

(2.1.2.)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ (2.2.1).

განზოგადოებული სფერული ფუნქციების შეკრების ფორმულ-ის [2] და (2.1.3)-ის გამოყენებით

$$Q(\rho; \theta, \varphi) = (-1)^m e^{-\ell m(\varphi_1 + \varphi_2)} \sum_{\ell=|m|}^{\infty} (2\ell+1) P_{m,m}^\ell(\cos \gamma) P^\ell$$

სადაც

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi' - \varphi),$$

$$\operatorname{tg} \phi_1 = \frac{\sin \beta \sin \theta'}{\cos \theta \sin \theta' \cos \beta + \cos \theta' \sin \theta},$$

$$\operatorname{tg} \phi_2 = \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos \theta \sin \theta' \cos \beta + \cos \theta' \sin \theta}, \quad \beta = \pi + \varphi' - \varphi.$$

როცა $m=0$, განზოგადოებული სფერული ფუნქციათა სისტემა ემთხვევა სფერულ ფუნქციათა სისტემას [2], ხოლო (2.1.1) მწკრივი ფურიე-ლაპლასის მწკრივს. ამიტომ ჩვენ განვიხილავთ $m=+1$ შემთხვევას. ამ შემთხვევაში [13]-დან გვაქვს

$$P_{1,1}(\cos \gamma) = P_1(\cos \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} P_1(\cos t) \sin t dt, \quad (2.2.2)$$

სადაც $P_\ell(\mu)$ -ლეჟანდრის პოლინომია. (2.2.2)-დან ცხადია, რომ $P_{1,1}^0(\cos \gamma) = 0$.

ამიტომ $Q(\rho, \theta, \varphi)$ შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს

$$Q(\rho, \theta, \varphi) = (-1)^m e^{-\ell m(\varphi_1 + \varphi_2)} P^*(\rho, \gamma), \quad (2.2.3) \text{ სადაც}$$

$$\left. \begin{aligned} P^*(\rho, \gamma) &= P(\rho, \gamma) - P_1(\rho, \gamma) \\ P(\rho, \gamma) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) P_\ell(\cos \gamma) \rho^\ell = \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho \cos \gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\}, \quad (2.2.4)$$

ხოლო

$$P_1(\rho, \gamma) = \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} P(\rho; t) \sin t dt. \quad (2.2.5) \quad (2.2.1) \text{ და}$$

(2.2.3)-ის ძალით ცხადია, რომ

$$\begin{aligned}
D_3 Q(\rho, \theta, \varphi) &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} Q(\rho, \theta, \varphi) \right] = \\
&= (-1)^m e^{-im(\varphi^1 + \varphi^2)} \left[-\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\left[\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} P^*(\rho, \gamma) \right] \right) \right] = \\
&= (-1)^m e^{-im(\varphi^1 + \varphi^2)} \left[D_3 P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} D_3 P(\rho; t) \sin t dt \right].
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

[10]_დან ცნობილია:

თეორემა A. თუ $v(\theta, \varphi)$ ფუნქცია უწყვეტია $(1, \theta_0, \varphi_0)$ წერტილ-ზე, მაშინ

$$\lim_{(\rho; \theta; \varphi) \rightarrow (1; \theta_0; \varphi_0)} u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = v_m(\theta_0, \varphi_0)$$

თეორემა B. თუ $v(\theta; \varphi)$, მაშინ თითქმის ყველა $(1, \theta_0, \varphi_0) \in S^2$

წერტილისთვის

$$\lim_{(\rho; \theta; \varphi) \rightarrow (1; \theta_0; \varphi_0)} u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = v_m(\theta_0, \varphi_0).$$

განვიხილოთ (2.1.1) მწკრივის გადიფერენცირებული აბელის საშუალო

$$D_3^r u(v_m; \rho, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} v_m(\theta', \varphi') [D_3^r Q(\rho; \theta, \varphi, \theta', \varphi')] \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

(2.2.6)–ის ძალით

$$\begin{aligned}
D_3 Q(\rho, \theta, \varphi) &= \\
&= (-1)^m e^{-im(\varphi^1 + \varphi^2)} \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} D_3 P(\rho; t) \sin t dt \right].
\end{aligned}$$

ლემა C. $P(\rho, \gamma)$ _სთვის გვაქვს

$$D_3^r P(\rho; \gamma) = \frac{A_r(\rho; \gamma)}{\left[(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right]^{\frac{3}{2} + 2r}},$$

სადაც ყოველ $A_r(\rho; \gamma)$ წევრს $(1 - \rho)$ და $\sin \frac{\gamma}{2}$ _სთან მიმართებით აქვს $2r+1$ _ზე მეტი

ან ტოლი ხარისხი და $A_r(\rho; \gamma)$ იყოფა $(1 - \rho^2)$ _ზე.

ლემა D. თუ $\overline{\Delta}^r v_m(\theta; \varphi) = 0$ პირობიდან გამოდის, რომ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = 0, \quad \text{მაშინ } \overline{\Delta}^r v_m(\theta; \varphi) = S \text{ პირობიდან}$$

გამომდინარეობს

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = S.$$

ლემა E. ნებისმიერი $r \in \mathbb{N}$ -სთვის სამრთლიანია ტოლობა

$$1. \lim_{\rho \rightarrow 1} \max_{0 < \delta \leq \gamma \leq \pi} |D_3^r P(\rho; \gamma)| = 0,$$

$$2. \int_0^\pi |D_3^r P(\rho; \gamma)| \gamma^{2r+1} d\gamma = o(1).$$

ლემა 2.2.1. ნებისმიერი $r \in \mathbb{N}$ -სთვის გვაქვს:

$$1. \lim_{\rho \rightarrow 1} \max_{0 < \delta \leq \gamma \leq \pi} \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t dt = 0,$$

$$2. \int_0^\pi \left| \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t dt \right| \gamma^{2r+10} d\gamma = o(1).$$

დამტკიცება. 1. ტოლობა ცხადია. ვაჩვენოთ 2. . გვაქვს

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left| \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t dt \right| \gamma^{2r+1} d\gamma \leq \int_0^\pi \frac{\gamma^{2r+1}}{1 + \cos \gamma} \left| \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t dt \right| d\gamma = \\ & = \int_0^\pi \left\{ \int_0^t \frac{\gamma^{2r+1}}{1 + \cos \gamma} |D_3^r P(\rho; t)| \sin t d\gamma \right\} dt = \int_0^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t \left\{ \int_0^t \frac{\gamma^{2r+1}}{1 + \cos \gamma} \right\} dt \leq \\ & \leq \int_0^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t \cdot t^{2r+1} \operatorname{tg} \frac{t}{2} dt \leq \int_0^\pi |D_3^r P(\rho; t)| t^{2r+1} dt = o(1). \end{aligned}$$

თეორემა 2.2.2. ვთქვათ $v(\theta; \varphi) \in L(S^2)$, თუ რაიმე არაუარყოფითი r -სთვის არსებობს $\overline{\Delta}^r v_m(\theta_0; \varphi_0) = 0$, მაშინ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = \overline{\Delta}^r v_m(\theta_0, \varphi_0)$$

დამტკიცება. ზოგადობის დაურღვევად დავუშვათ, რომ S^2 სფეროს ჩრდილოეთ პოლუსია (θ_0, φ_0) . თუ $\overline{\Delta}^i v_m(\theta, \varphi) = 0$, $i=0,1,2,\dots, r$, მაშინ ლემა D. _ს ძალით უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = 0. \quad (2.2.8) \text{ გვაქვს}$$

$$D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = (-1)^m \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right] \int_0^\pi \left[D_3^r P(\rho; \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho; t)| \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma. \quad (2.2.9)$$

ლემა D_ს ძალით შეიძლება ვიგულისხმოდ, რომ $\bar{\Delta}^{-i} v_m(\theta, \varphi) = 0, i=0,1,2,\dots, r$.

ვთქვათ $\varepsilon > 0$, შევარჩიოთ $\delta > 0$ ისეთი, რომ

$$\left| \int_0^{2\pi} v_m(\gamma, \bar{\varphi}) \right| = 0, \quad \text{როცა } \gamma < \delta. \quad \text{აქედან ცხადია, რომ}$$

$$\left| \int_0^{2\pi} v_m(\gamma, \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right| < c\varepsilon\gamma^{2r}, \quad \text{როცა } \gamma < \delta. \quad \text{მაშინ (2.2.9)-დან}$$

გვაქვს

$$D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = (-1)^m \frac{1}{4\pi} \int_0^\delta \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right] \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma + (-1)^m \frac{1}{4\pi} \int_\delta^\pi \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma, \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right] \cdot \left[D_3^r P(\rho; \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma = I_1 + I_2 \quad (2.2.10)$$

(2.2.9)-ის, ლემა E და ლემა 2.2.1-ის ძალით ვღებულობთ:

$$|I_1| < C\varepsilon \left\{ \int_0^\pi |D_3^r P(\rho, t)| \gamma^{2r+1} d\gamma + \int_0^\pi \left| \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right| \gamma^{2r+1} d\gamma \right\} C\varepsilon. \quad (2.2.11)$$

ლემა E-ს მეორე ტოლობის და ლემა 3.2.1-ის ძალით ვღებულობთ თეორემა

2.2.1-ის სამართლიანობას.

ლემა 2.2.2. ნებისმიერი $r \in \mathbb{N}$ და $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ -სთვის გვაქვს

$$\left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma = o(1). \quad (2.2.12)$$

დამტკიცება. ცნობილია, რომ ([12], ლემა 3.4.5.)

$$\int_0^{\eta} \left| \frac{\partial D_3^r P(\rho, \gamma)}{\partial \gamma} \right| \sin^{2r+2} \gamma d\gamma = (1).$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} D_3^r P(\rho, t) \sin t dt \right) = \frac{\sin \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} \int_{\gamma}^{\pi} D_3^r P(\rho, t) \sin t dt -$$

$$- \frac{\sin \gamma}{1 + \cos \gamma} D_3^r P(\rho, t),$$

ამიტომ

$$\int_0^{\eta} \left| \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} D_3^r P(\rho, t) \sin t dt \right| \sin^{2r+2} \gamma d\gamma \leq$$

$$\leq \left| \int_0^{\eta} \frac{\sin^{2r+3} \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} \left\{ \int_{\gamma}^{\pi} D_3^r P(\rho, t) \sin t dt \right\} d\gamma \right| +$$

$$+ \int_0^{\eta} \frac{\sin^{2r+3} \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} |D_3^r P(\rho, t)| d\gamma =$$

$$= \int_0^{\eta} D_3^r P(\rho, t) \sin t \left\{ \int_0^t \frac{\sin^{2r+3} \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} d\gamma \right\} dt +$$

$$+ \int_{\eta}^{\pi} D_3^r P(\rho, t) \sin t \left\{ \int_0^{\eta} \frac{\sin^{2r+3} \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} d\gamma \right\} dt +$$

$$+ \int_0^{\eta} \frac{\sin^{2r+3} \gamma}{(1 + \cos \gamma)^2} |D_3^r P(\rho, t)| d\gamma \leq$$

$$\leq C \left(\int_0^{\eta} |D_3^r P(\rho, t)| \sin^{2r+1} t dt + \int_0^{\eta} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right).$$

აქედან ლემა E_ ს ძალით ვღებულობთ (2.2.12.)_ის სამართლი- ანობას.

ლ ე მ ა 2.2.3. თუ $\bar{\Delta}^v v_m(\theta, \varphi) = 0, v=1,2,\dots,r$ პირობიდან გამომდინა- რეობს

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = 0, \quad \text{მაშინ } \bar{\Delta}^r v_m(\theta, \varphi) = s$$

პირობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = s.$$

ეს ლემა მტკიცდება ლემა D_ ს ანალოგიურად.

თეორემა 2.2.3. ვთქვათ $v(\theta, \varphi) \in L(S^2)$. თუ $r \in \mathbb{N}$ -სთვის არსებობს

$\tilde{\Delta}^r v_\nu(\theta, \varphi)$, მაშინ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = \tilde{\Delta}^r v_\nu(\theta, \varphi).$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ (θ, φ) წერტილი S^2 სფეროს ჩრდილოეთ პოლუსია. თუ $\tilde{\Delta}^r v_\nu(\theta, \varphi) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, r$, მაშინ ლემა 3.2.3-ის ძალით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = 0.$$

რადგანაც $\tilde{\Delta}^r v_\nu(\theta, \varphi) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, r$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სთვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ

$$\int_0^\gamma \left\{ \int_0^{2\pi} v_m(\bar{\gamma}; \bar{\varphi}) d\bar{\varphi} \right\} \sin \bar{\gamma} d\bar{\gamma} < C\varepsilon \sin^{2r+2} \frac{\gamma}{2}, \quad \text{როცა } \gamma < \delta.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\int_0^\gamma \left\{ \int_0^{2\pi} v_m(\bar{\gamma}; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right\} \sin \bar{\gamma} d\bar{\gamma} < C\varepsilon \sin^{2r+2} \frac{\gamma}{2}, \quad \text{როცა } \gamma < \delta.$$

დავუშვათ, რომ $\eta = \min\left(\delta; \frac{\pi}{2}\right)$ გვაქვს

$$D_3^r u(v_m; \rho, \theta_0, \varphi_0) = (-1)^m \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma, \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right] \\ \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi D_3^r P(\rho, t) \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma = I_1 + I_2$$

სადაც

$$I_1 = (-1)^m \frac{1}{4\pi} \int_0^\eta \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma, \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right] \\ \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_\gamma^\pi D_3^r P(\rho, t) \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma,$$

$$I_1 = (-1)^m \frac{1}{4\pi} \int_{\eta}^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} v_m(\gamma; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} d\bar{\varphi} \right] \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] \sin \gamma d\gamma$$

ლემა C_ს ძალით ცხადია, რომ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} I_2 = 0.$$

I₁-ში ნაწილობითი ინტეგრებით, ვღებულობთ

$$I_1 = \frac{(-1)^m}{4\pi} \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] \int_0^{\eta} \int_0^{2\pi} v_m(\gamma; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} \sin \gamma d\bar{\varphi} d\gamma - \frac{(-1)^m}{4\pi} \int_0^{\eta} \left\{ \int_0^{\gamma} \int_0^{2\pi} v_m(\gamma; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} \sin \gamma d\bar{\varphi} d\bar{\gamma} \right\} \frac{d}{d\gamma} \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] d\gamma.$$

(2.2.7)-ის ძალით ცხადია, რომ

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] = 0.$$

(2.2.13.) და ლემა 2.2.2. -ის დახმარებით მივიღებთ

$$\frac{(-1)^m}{4\pi} \int_0^{\eta} \left\{ \int_0^{\gamma} \int_0^{2\pi} v_m(\gamma; \bar{\varphi}) e^{-im(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2)} \sin \gamma d\bar{\varphi} d\bar{\gamma} \right\} \frac{d}{d\gamma} \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] d\gamma < C\varepsilon \int_0^{\eta} \frac{d}{d\gamma} \left[D_3^r P(\rho, \gamma) - \frac{1}{1 + \cos \gamma} \int_{\gamma}^{\pi} |D_3^r P(\rho, t)| \sin t dt \right] \sin^{2r+2} \frac{\gamma}{2} d\gamma < C\varepsilon.$$

თეორემა 2.2.3. დამტკიცებულია.

[23]-ში დამტკიცებულია შემდეგი:

ლემა F. თუ მოცემულია $a_i(x)$ $i=0,1,\dots,r$ ფუნქცია, მაშინ არსებობს ფუნქცია

$$T(x; t) = \sum_{\nu=0}^r a_{\nu}(x) P_{\nu}(\cos \gamma),$$

ისეთი, რომ

$T(x; x) = a_0(x)$, $D_1^v T(x; x) = a_v(x)$ $v = 1, 2, \dots, r$, სადაც $\cos \gamma = (x; t)$.

ამ ლემის დახმარებით, ისევე როგორც თეორემა 2.2.2 და თეორემა 2.2.3 შეიძლება დამტკიცდეს.

თეორემა 2.2.4 ვთქვათ $v(\theta, \varphi) \in L(S^2)$ და $r \in \mathbb{N}$. თუ (θ_0, φ_0) წერტილზე არსებობს $\tilde{\Delta}_{(\theta; \varphi)}^r v_m(\theta_0, \varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho; \theta; \varphi) \rightarrow (1; \theta_0; \varphi_0)} D_3^r u(v_m; \rho, \theta, \varphi) = \tilde{\Delta}_{(\theta; \varphi)}^r v_m(\theta_0, \varphi_0)$$

თეორემა 2.2.5 ვთქვათ $v(\theta, \varphi) \in L(S^2)$ და $r \in \mathbb{N}$. თუ (θ_0, φ_0) წერტილზე არსებობს $\tilde{\Delta}_{(\theta; \varphi)}^r v_m(\theta_0, \varphi_0)$, მაშინ

$$\lim_{(\rho; \theta; \varphi) \rightarrow (1; \theta_0; \varphi_0)} D^r u(v_m; \rho; \theta; \varphi) = \tilde{\Delta}_{(\theta; \varphi)}^r v_m(\theta_0; \varphi_0)$$

ლიტერატურა

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория, ч. 1., М.: Наука, 1968 .
2. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я., Представление группы вращений трех мерного пространства и их применения УМН, 7:1, 1952, с. 3-117.
3. Давидов А.С., Квантовая механика. М.: Наука, 1973.
4. Давидов А.С., Теория атомного ядра. М.: Физматгиз, 1958.
5. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1978.
6. Кушниренко Г. Г., О приближений функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими суммами. Научн. докл. высшей школы, физ. мат. наук, 4(1958), Харьков, с. 47-53.
7. Литвинков С.С., О сходимости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Изв. Высш. учебн. заведений. Математика, 4, Москва, 1962, с. 92-103.
8. Литвинков С.С., О дифференцируемости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – ДАН, СССР 144:5, 1962, с. 977-980.

9. Литвинков С.С., Некоторые свойства рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Сиб. мат. журн., 9:2, 1968, с. 332-339.
10. Мачарашвили Н.Д., О линейных методах суммирования рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – сообщ. АН Груз. ССР, 1980, 98:3 с. 549-552.
11. Мачарашвили Н.Д., О (C, α) $(\frac{1}{2} < \alpha < 1)$ суммируемости рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Тр. Груз. политехн. ин-та, 5(237), 1981, с. 43-48.
12. Мачарашвили Н.Д., О константах Лебега рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям. – Тр. Груз. политехн. ин-та, 5(237), 1981, с. 49-56.
13. Мачарашвили Н. Д., Почхуа И. И., Циклаури З. И., Сходимостъ продифференцированного интеграла Вале-Пуссена – Тр. Груз. политехн. ин-та, 4(454). 2004, с. 9-15.
14. Macharashvili N., Pochkhua I., Summability of Differentiated Fourier, Series over the Generalized System of Spherical Functions by Abel's Method. Bull. Georg. Acad. Sci, 173(1), 2006, pp. 38-42.
15. Натансон И. П., Конструктивная теория функций. М. Изд. технико-теоретической литературы, 1949.
16. Топурия С. Б., Некоторые свойства интеграла Валле-Пуссена на сфере, Труды ГТУ, 3(260), Тб., 1983.
17. Топурия С. Б., Граничные свойства продифференцированного интеграла Пуассона для различных областей и их некоторые применения. Технический Университет, Тб., 2003.
18. Топурия С.Б., О представлении функций, определенных на поверхности единичной сферы, сингулярными интегралами и суммируемость рядов Лапласа. Труды ГПИ, 7(147), Тб., 1971, с. 25-58.
19. Топурия С. Б., Ряды Фурье-Лапласа на сфере. Тб., 1987.
20. Топурия С. Б., Суммирование методом Абеля продифференцированного ряда Фурье. Докл. АН СССР, 209, № 3, 1973, с. 569-572.
21. Топурия С. Б., Чикобава Н. Г., Суммирование линейными методами рядов Фурье по обобщенным сферическим функциям Тр. Груз. ГТУ, №2, (407), 1995.
22. Pochkhua I., Matcharashvili N., On Vallee-Poussin Integral on the S^{k-1} Bull. Georg. Acad. Sci, 172(3), 2005, pp. 376-378.

23. Pochkhua I., On the Second-Order Differential of the Vallee-Poussin Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. Sci, 174(1), 2006, pp. 33-35.

24. Pochkhua I., On Vallee-Poussin Differentiated Integral on the Sphere, Bull. Georg. Acad. 174 (2), 2006.

25. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полия Г. Неравенства. М. ИЛ., 1948 .