

В.В. Мдзинаришвили

**НОВЫЕ АСПЕКТЫ
СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ
САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ И
ОРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМ**

**ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД
К МОДЕЛИРОВАНИЮ
САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ И
ОРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМ**

**Тбилиси
Национальная Академия Наук Грузии
2014**

Рецензенты:

**Отделение прикладной механики, машиностроения, энергетики
и процессов управления Национальной Академии Наук Грузии;**

**Академический доктор, главный научный сотрудник института
геофизики им. М. Ододия, профессор Тбилисского
государственного Университета им. И. Джавахишвили; Н.
Варамашвили.**

**Памяти незабвенных предков:
Тамаре Топурия (Канделаки),
Ирине Канделаки,
Георгию Канделаки,
Валентину Мдзинаришвили (старшему)
П О С В Я Щ А Ю**

Введение

В древности ученые знали, что холизм¹ является основой мироздания. Современная теория организующихся и самоорганизующихся систем² использует понятие холизма при рассмотрении системы как неделимого, целостного образования, неподдающегося декомпозиции. Процесс самоорганизации происходит либо под действием внешних воздействий на параметры системы, либо в результате внутреннего изменения параметров (обусловленного случайным поведением или их генетической запрограммированностью), либо под совместным действием обеих этих факторов. В любом случае самоорганизация имеет целевую направленность: она служит удовлетворению некоторого критерия качества функционирования системы в окружающей, часто изменяющейся, среде. Поскольку совокупность параметров и их взаимодействие друг с другом образуют структуру, то при изменении параметров, в определенных пределах, имеет место соответствующее изменение структуры системы. Это изменение структуры направлено на *оптимальное* (в некотором смысле) функционирование всей системы. Таким образом, самоорганизация означает либо создание оптимальной структуры (организации), либо восстановление утраченной структуры, если она была оптимальной (в некотором смысле) в данной окружающей среде.

Необходимость получения целого в процессе его развития в окружающей среде, имеющего определённые свойства, является вариационной, т.е. оптимизационной задачей. Использование оптимизационных методов природа (человек

¹ Холизм – теория целостности.

² Разница между организующимся и самоорганизующимся системами дана в главах 1,2,5.

относится к природе) осуществляет путем применения естественных и искусственных (рукотворных) организующихся, самоорганизующихся и организованных систем.

Рассмотрим три примера.

Лягушка ведет земноводное существование, т.е. она живет на суше и в воде. Икринки лягушка откладывает в воде. Из икринок вылупляются головастики, которые передвигаются по воде и под водой благодаря своему хвосту. По мере роста хвостик головастика утрачивает своё назначение и исчезает, а на теле вырастают (в определенных местах) ноги с пальцами, между которыми имеются перепонки: такие ноги выполняют роль ласт и маленькие лягушата с успехом передвигаются по воде, под водой и по суше, т.е. в трех средах. В данном случае *оптимальность* заключается в возможности передвижения лягушки в трех средах.

На заре создания первых самолетов шасси самолета висели на фюзеляже и тем самым испытывали сопротивление со стороны встречного воздуха; это, в определенной степени, мешало самолету развить соответствующую скорость. С целью уменьшения сопротивления встречному воздуху стали разрабатывать такие шасси, которые при взлёте самолета, втягивались в фюзеляж. Это изменение структуры самолета в полете позволило увеличить скорость самолета. В дальнейшем при разработке высокоскоростных самолетов военного назначения, геометрия крыла самолета стала оказывать существенно отрицательное влияние на его скорость. С целью уменьшения сопротивления встречного воздуха полёту самолета в бывшем Советском Союзе стали создавать самолеты с изменяемой геометрией крыльев. Такое изменение структуры самолета в полете служило единственной цели: *оптимизировать* (т.е. максимизировать) скорость самолета.

Рассмотрим еще один пример из живой природы. Жирафы стали обгладывать африканские растения – баобабы; последние, чтобы не погибнуть стали вырабатывать в листьях танин, который оказался смертоносным для жирафов. Так благодаря явления самоорганизации (или организующемуся процессу), баобадам удалось выжить в естественной среде. В данном случае *оптимальность* заключается в возможности выжить в агрессивной окружающей среде.

Из этих рассмотренных примеров видно, что как структура живых существ, так и структура рукотворных устройств, создаётся из условия их оптимального (в некотором смысле) функционирования в окружающей среде. Настоящая монография целиком посвящена исследованию и моделированию функционирования систем в живой и неживой материи, а также создаваемых людьми организующихся и самоорганизующихся устройств и систем, с точки зрения их *оптимального* поведения.

* * *

Таким образом, природа (человек принадлежит природе) использует вариационные принципы, решая соответствующие оптимизационные уравнения, чтобы обеспечить оптимальное (в некотором смысле) поведение объекта или системы; этот процесс может иметь место как в глобальном, так и в локальном плане.

Являясь частью природы, человечество не только обнаруживает и анализирует созданные природой организующиеся, самоорганизующиеся и организованные системы, но и сам синтезирует рукотворные системы, используя те же вариационные принципы, что и природа (см. главы 5 и 7); наглядным примером такого подражания может служить «бионика».

То, что максимум энтропии в классе непрерывных распределений случайной величины был обнаружен у гауссова распределения, природной был получен благодаря использованию так же вариационных (оптимизационных) принципов, которые позволили учёным удостовериться в этом факте. Поскольку учёный принадлежит природе, то доказательство этого факта является проявлением процесса самопознания природы.

В первой главе даются физические, статистические и информационные основы образования организующихся и самоорганизующихся систем. Обращено внимание на отсутствие выделения сферы существования самоорганизующихся систем. Поскольку не обозначена сфера существования самоорганизующихся систем, то нет также четкой формулировки предмета самоорганизации. В первой главе предлагается информационная классификация самоорганизующихся и организующихся систем. Рассмотрены вопросы оптимизации этих систем. В этой же главе отмечено, что информационные аспекты функционирования самоорганизующихся систем тесно связаны с вопросом минимальности энтропии; в свою очередь, энтропия линейной системы зависит от условной дисперсии этой системы, которая может быть найдена путем решения соответствующего уравнения Риккати, записанного для виртуальной системы измерения. Приводятся результаты М. Эйгена, предложившего вместо ценности информации использовать понятие селективной ценности; это понятие играет важную роль при исследовании поведения предбиологических макромолекул.

Вторая глава целиком посвящена тому математическому аппарату, который используется при исследовании и моделировании самоорганизующихся и организующихся систем. В этой главе отмечено, что цикличность процесса является подтверждением существования самоорганизации.

В третьей главе формулируются математические основы, используемые при исследовании и моделировании организующихся и самоорганизующихся систем. В этой главе отмечено, что основному оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа, удовлетворяет уравнение Риккати. Дается новый подход к получению уравнения Риккати. Показана связь уравнения Риккати с системой уравнений «хищник-жертва». В этой же главе приводятся примеры по использованию солитонных функций при решении самоорганизующихся задач морфогенеза и уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК).

Важное место в проблеме образования самоорганизующихся и организующихся систем занимает явление бифуркации. Задачам бифуркации посвящена четвертая глава. В этой главе даются различные сценарии возникновения этого явления.

В пятой главе рассмотрены три хорошо известные системы: реакция Белоусова–Жаботинского, функционирование лазера и образование структур в ячейке Бенара. Для этих систем показано, что они (согласно принятому критерию) относятся к организующимся системам.

Широкий класс самоорганизующихся и организующихся систем относится к марковским. Проблемам, моделирования возникающим при описании поведения, самоорганизующихся и организующихся систем, принадлежащих к классу марковских, посвящена шестая глава.

Применение вариационных (оптимизационных) методов к рукотворной самоорганизующимся системе, дается в седьмой главе на примере синтеза устройства управления скоростным самолетом военного назначения.

Некоторые аспекты моделирования самоорганизующихся и организующихся систем, возникающие на мегаскопическом уровне, рассмотрены в восьмой главе.

В девятой главе даются оптимизационные характеристики элементарных частиц, соответствующих газу Ферми – Дирака.

Десятая глава целиком посвящена моделированию экономической системы; эта система по своей природе является самоорганизующейся. Основой моделирования самоорганизующейся экономической системы является производственная функция Кобба – Дугласа.

Самоорганизующиеся процессы в максимальной степени представлены в биологических системах. Этим обстоятельством объясняется значительный объем, который занимают самоорганизующиеся процессы в одиннадцатой главе. В этой же главе показана целесообразность использования гиперболических функций при моделировании биологических процессов. Отмечено, что процесс создания новых полимеров является самоорганизующимся процессом.

Наконец, проблемам образования странных аттракторов посвящена двенадцатая глава. В этой главе отмечено, что расширение пространства состояний динамической системы до размерности 3 и больше, превращает грубую динамическую систему в негрубую; это вызывает хаотическое поведение.

ГЛАВА 1

Физические, статистические и информационные основы организующихся и самоорганизующихся систем

§1.1. Отсутствие выделения сферы предмета самоорганизации

В литературе по тематике настоящей книги дается разное толкование данного предмета.

Один из основоположников современной теории самоорганизации Г. Хакен предложил называть эту дисциплину *синергетикой*¹: «Я назвал новую дисциплину синергетикой. В ней исследуется совместное действие многих подсистем, в результате которого на макроскопическом уровне возникает структура и соответствующее функционирование. С другой стороны, для нахождения общих принципов, управляющих самоорганизующимися системами, необходимо кооперирование многих различных дисциплин» [1].

Другие ученые дают иную интерпретацию этой дисциплине (Б.В. Чириков) [2]: «Аналогичные коллективные процессы давно и широко изучаются в плазме. Сюда же относится и так называемая «химическая динамика». Недавно все это получило привлекательное название «*синергетика*». С точки зрения физики такие процессы естественно назвать *вторичной динамикой*. Одна из характерных особенностей вторичной динамики – ничтожное число ее степеней свободы по сравнению с первичной системой».

В других книгах дается следующая интерпретация дисциплины *синергетика*: «Область науки и соответствующая тео-

¹ Греческое слово «*synergetikos*» означает «совместный, согласованно действующий».

рия континуальной самоорганизации называется *синергетикой*» [3]; в этой же книге сказано: «Выяснением механизмов самоорганизации занимается научная дисциплина, называемая *синергетикой*».

В работах, опубликованных в США вместо термина «синергетика» используется термин «самоорганизация». Сам Г. Хакен [4] использует термины как «синергетика», так и «самоорганизация», подчеркивая тем самым, что эти слова являются синонимами; хотя в более поздних работах он отдает предпочтение термину «самоорганизация» [5].

Г. Николис и И. Пригожин используют термин «самоорганизация» [6]. Следует отметить, что в своей книге [7] Г. Николис и И. Пригожин пользуются словом «сложное», подразумевая под этим словом сложное поведение, а не сложность самой системы.

Парадоксальное высказывание приводится в статье [8] С.П. Курдюмова и Г.Г. Малинецкого «Синергетика – Теория самоорганизации». В этой статье сказано: «Ответ на вопрос, чем занимается синергетика, каков ее предмет и перспективы, *неоднозначен*». Из данного высказывания следует, что синергетика (теория самоорганизации) не имеет никакого предмета исследования, а исследует всё, что попадает в живой и неживой природе.

В настоящее время существует предмет, называемый «математическое моделирование». Этот предмет призван составлять и исследовать математические модели как в живой, так и в неживой природе. Однако, воздействия на математические модели, вызывающие в них процессы самоорганизации, этот предмет не исследует.

Второй предмет, имеющий широкую область применения – «Кибернетика». Эта наука анализирует и синтезирует не все

системы вообще, а только *управляемые и регулируемые* системы: экономические, биологические, технические и т.д. Поэтому, если самоорганизующуюся систему назвать самоуправляемой или саморегулируемой, то станет ясно, что теорию самоорганизации можно отнести к сфере предмета кибернетики. Н. Винер издал основополагающую книгу [9] по кибернетике; изданию этой книги предшествовала его статья по созданию математической модели фибрилляции динамической болезни [10]. Следовательно, Винер предполагает наличие самоорганизации в биологической системе (организме человека). Это означает, что методы анализа систем, используемые в кибернетике, могут быть также применены в новой науке – теории самоорганизации.

Для рукотворных (технических) самоорганизующихся систем есть четкое определение: «самоорганизующиеся системы это такие самоприспосабливающиеся (адаптивные) системы, в которых контролируемые изменения являются изменения структуры» [11].

Из высказывания авторов работы [8] следует, что «ни одно определение не кажется содержательным, пока не ясен смысл входящих в него понятий. Когда же смысл понят, определение становится просто ненужным». Эта цитата может быть понята как отсутствие обозначения контуров сферы предмета новой дисциплины – теории самоорганизации. Науке нужна такая дисциплина, которая имела бы четко обозначенные контуры своего существования. Таким образом, предмет теории самоорганизации существует, однако границы его приложения не обозначены. Такие фундаментальные науки, как биология, химия, биофизика, физика, математика и т.д. имеют четко обозначенные контуры своего существования. *Мы считаем, что критерием, согласно которому систему следует отнести к*

классу самоорганизующейся, является достижение минимальности информационной энтропии этой системой т.е. увеличение ее упорядоченности; хотя следует отметить, что упорядоченность, которая обусловлена возникновением диссипативных структур в неравновесных условиях, совсем не обязательно должна быть напрямую связана с убылью энтропии.

В настоящее время под понятием теории самоорганизации подразумевается как самоорганизующиеся, так и организующиеся системы. Такое состояние предмета не может считаться корректным.

До появления книги [7] теория самоорганизации исследовала объекты на микроскопическом, мезоскопическом и макроскопическом уровнях. Это значительно сужало ареал действия теории самоорганизации. Кроме этих объектов необходимо исследовать процессы самоорганизации, происходящие на ближайшем мегаскопическом уровне (планета Земля и ее спутник Луна), промежуточном мегаскопическом уровне (Солнце и планеты солнечной системы) и дальнем мегаскопическом уровне, включающем другие звездные системы нашей Галактики, а также процессы самоорганизации, происходящие в других Галактиках Вселенной.

§1.2. Физические и статистические предпосылки образования организующихся и самоорганизующихся систем

1.2.1. Физические предпосылки образования организующихся и самоорганизующихся систем

Современная физика признает существование материи в виде двух субстанций: вещества и поля.

В книге [3] приводится перечень 28 полей. Однако, этот перечень можно продолжить, добавляя к этим 28 полям следую-

щие: социально-политическое поле, спортивно-состязательное поле, поле экстремалей (математическое понятие), спортивно-финансовое поле, научно-познавательное поле, торгово-экономическое поле, национально-этническое поле, финансовое поле, информационное поле, селективное поле (место селективного отбора) и т.д. Любой процесс самоорганизации может быть объяснен путем рассмотрения взаимодействия вещества и поля, взаимодействия вещества с веществом или взаимодействия поля с полем.

Так, например, ячейка Бенара является результатом взаимодействия вещества (жидкости) с тепловым полем. Лазер является следствием взаимодействия вещества (например, рубина) с электромагнитным полем накачки; взаимодействие происходит на квантовомеханическом уровне. Реакция Белоусова–Жаботинского появляется благодаря взаимодействию двух веществ (химических растворов) т.е. вещества с веществом. Более сложный характер носит взаимодействие поля с полем. Например, А.Л. Чижевский [12] исследовал взаимодействие магнитного поля Солнца и биополя человека, точнее изменение иммунной системы человека благодаря воздействию на нее (через биополе) поля, вызванного магнитными бурями на Солнце; одиннадцатилетний цикл активности Солнца вызывает соответствующий цикл инфекционных и других заболеваний жителей планеты Земля.

1.2.2. Статистические предпосылки образования самоорганизующихся систем

Сравнение принципов механики и статистической физики позволяет не только выявить различие между этими дисциплинами, но и показать их противоречивость. Так, процессы проте-

кающие в механике, обратами во времени, в то время, как второе начало термодинамики постулирует необратимое возрастания энтропии.

При переходе от механики к статистике и термодинамике, можно выделить то место, в котором нарушаются принципы механики и возникает статистическое описание. Объекты и явления, находящиеся между механикой и термодинамикой, т.е. в промежуточной зоне, оставались вне поля зрения ученых. Решение данной проблемы впервые было получено в работе Н.С. Крылова [13]. Далее последовали работы А.Н. Колмогорова [14] и Я.Г. Синая [15]. В этих исследованиях рассматривается соответствие между вычисляемыми и наблюдаемыми (измеряемыми) величинами. В отличие от положений квантовой механики, в которой априори полагается, что некоторые из величин принципиально ненаблюдаемые, в механике предполагается, что любая из фигурирующих в теории величин является наблюдаемой. Однако, такой подход не всегда является корректным. В том случае, если решение какой-либо динамической задачи неустойчиво, то реальные наблюдения (измерения) приведут к результату, значительно отличающемуся от действительного состояния.

Причин, для такого положения дел, может быть несколько:

а. механический процесс может стать необратимым во времени если он сам или обратный ему процесс неустойчивы;

б. абсолютно изолированных (консервативных) систем в природе не встречается; поэтому, траекторию отдельной частицы можно и рассчитать и измерить, но результаты расчета никогда даже приближенно не будут совпадать с реальными;

в. в случае неустойчивых динамических систем разумно считать «причиной» не само возмущение, а неустойчивость

системы.

2. феномен неустойчивости это то свойство, благодаря которому в теории динамических систем появляется понятие вероятности; поэтому неустойчивые системы более адекватно описываются статистическими методами, чем детерминированными, поскольку они переходят из разряда динамических в класс статистических.

Следует отметить, что для эргодических систем процесс движения с макроскопической точки зрения будет обратимым, а с микроскопической точки зрения этот процесс будет необратимым. Для неэргодических систем процесс движения будет необратимым со всех точек зрения.

Изменения числа n шаров бильярда Синая во времени, траектории которых существенно отклонились от исходных, описывается уравнением Риккати¹:

$$\frac{dn}{dt} = m(n^* - n)n, \quad (1.1)$$

$$n_0 = n(0), \quad (1.2)$$

где $m = vd/V$, d – сечение шаров, v – их скорость, V – суммарный объем всех шаров, $n^* = const$ – полное число шаров.

Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$n = \frac{n^*}{1 + e^{-\lambda t}}, \quad (1.3)$$

где $\lambda = n^*m \equiv n^*vd/V$ – число соударений одного шара в единицу времени; в момент времени $t = 0$ имеем, $n_0 = 1$ т.е.

¹ Обычно, уравнение (1.1) упоминается как уравнение Бернулли; мы относим это уравнение к классу Риккати, поскольку структура решения уравнения (1.1) и уравнения Риккати идентична, она является *солитоном*. Уравнение Бернулли является частным видом уравнения Риккати, когда свободный член равен нулю, т.е. отсутствует.

время t отсчитывается от момента, когда существенно изменилась траектория одного из шаров.

Из решения (1.3) можно получить соотношение

$$\frac{n}{n^* - n} = \frac{1}{n^*} e^{\lambda t}. \quad (1.4)$$

При $n_0 \gg n$ будет иметь

$$n \sim e^{\lambda t}, \quad (1.5)$$

это означает, что доля существенно отклонившихся траекторий от исходных растет со временем экспоненциально, т.е. имеем инкремент неустойчивости механических решений. Время развития неустойчивости, т.е. декремента, имеет порядок λ^{-1} .

Второй предельный случай, когда $n \rightarrow n^*$ ($n \gg n^* - n$) дает

$$n^* - n \sim e^{-\lambda t}. \quad (1.6)$$

Это эквивалентно тому, что число шаров, имеющих траекторию, близкую к рассчитанной, экспоненциально стремится к нулю. Следовательно, в этом случае, система стремится к полному хаосу, т.е. она со временем равномерно перебирает все возможные состояния, пребывая в каждом из них одинаковое время. Согласно соотношению (1.6) можно утверждать, что такое состояние устойчиво. Поэтому средние решения по множеству (совокупности) характеристик системы также будут устойчивы. К этим характеристикам относятся: средняя кинетическая энергия (температура), давление и другие термодинамические величины.

Обратимся теперь к уравнению Риккати (1.1) с точки зрения системы измерений (см. Приложения А-Д). Из Приложения В следует, что линейной системе измерений (например В.1 и

В.2) всегда соответствует некоторое уравнение Риккати (например В.3), записанное для дисперсии заданной системы измерений. Нас интересует обратное соответствие, т.е. для произвольного уравнения Риккати записать уравнения системы измерений. Таким образом, для уравнения Риккати (1.1) может быть записана следующая система измерений

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, & (1.1a) \\ z = x + v, & (1.1б) \end{cases}$$

где $E[v(t)] = 0$, $E[v(t)v(t')] = m^{-1}\delta(t - t')$,

$E_z[x(0)] = 0$, $E_z[x^2(0)] = n_0$, $a = mn^*/2$, то есть $v(t)$ представляет белый гауссов шум, а E_z – условное математическое ожидание.

Следовательно, произвольному уравнению Риккати (1.1) всегда соответствует некоторая виртуальная система измерения (1.1a), (1.1б). Переменная n , для которой записано уравнение Риккати (1.1), в данном случае является дисперсией системы измерений (1.1a), (1.1б).

Согласно результатам Приложений Б и В может быть сформулирована следующая

Теорема

Для произвольного вида уравнения Риккати, записанного для условной дисперсии, всегда имеем оптимальную в среднеквадратическом смысле виртуальную систему измерений (1.1a), (1.1б).

Решение уравнения Риккати (1.1) удовлетворяет минимальной в среднеквадратическом смысле дисперсии системы измерения (1.1a), (1.1б), которая обуславливает *минимальность энтропии данной системы*. В дальнейшем (ГЛАВА 3) будет показано, что уравнение Риккати играет основную роль в процессе оптимизации организующихся и самоорганизующихся

систем, поскольку удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа.

§1.3. Информационная классификация и оптимизация самоорганизующихся и организующихся систем

1.3.1. Информационная классификация самоорганизующихся и организующихся систем

С понятием информации тесно связано понятие энтропии. Существует два определения энтропии: одно по Дж.У. Гиббсу, другое по Л. Больцману.

Гиббс определил энтропию как вероятность $P(m; s)$ найти систему в состоянии m в момент времени s . Определение энтропии по Гиббсу таково

$$H_G = \sum_m p(m; s) \log [P(m; s) 2^{-2R^*} / W(m)], \quad (1.7)$$

где $W(m) = \binom{2R^*}{m} 2^{2R^*}$, а $\sum_{m=0}^{2R^*} W(m) = 1$.

Больцман определил энтропию как логарифм числа микросостояний реализующих данное макросостояние

$$H = k \log \binom{2R^*}{m}. \quad (1.8)$$

В теории информации используется определение энтропии (1.8) предложенное Больцманом.

Следует отметить, что равновесие имеет совершенно разный смысл у Больцмана и у Гиббса. По Больцману, равновес-

ным называется состояние с наибольшей энтропией, т.е. при выполнении условия

$$m = R^*.$$

По Гиббсу, равновесным называется не состояние, а распределение в пространстве состояний. Равновесное состояние Гиббс получает усреднением относительно распределения вероятностей с наибольшей гиббсовской энтропией

$$H_{G,eq} = \max G;$$

можно показать [16], что максимум достигается при

$$P(m,s) = W(m)$$

и, следовательно,

$$H_{G,eq} = 2R^* \log 2.$$

В случае равновесия эти два определения энтропии совпадают; они различаются только поведением энтропии во времени. Эти два определения энтропии приводят к двух различным формулировкам второго закона термодинамики.

Важным свойством любой системы является большая или меньшая ее упорядоченность. Невозможно представить себе более беспорядочную систему, чем движение частиц броуновского движения или молекул, находящихся в термодинамическом равновесии. *За начало отсчета упорядоченности целесообразно принять состояние такой системы, энтропия¹ (Больцмана) которой максимальна $H=H_{max}$.*

В качестве меры упорядоченности системы принимается величина «избыточности» R , введенная Шенноном [17]:

$$R = 1 - \frac{H}{H_{max}}, \quad (1.9)$$

где H – текущее значение энтропии.

¹ Энтропия в теории информации эта мера неопределенности состояния случайной величины с конечным числом исходов.

Таким образом, степень упорядоченности оценивается величиной R . Эта величина принимает значение 0, когда система находится в полном беспорядке, и 1, для идеально организованного, упорядоченного случая.

Обратимся теперь к основной проблеме настоящего раздела – информационной классификации неорганизованной (беспорядочной), организующейся, самоорганизующейся и организованной систем, с точки зрения теории информации [18].

Согласно выражению (1.9), для беспорядочной системы имеем $H=H_{max}$ и «избыточность» $R = 0$.

Организуемая система состоит из объекта, на который кто-то, но не она сама, действует полем или веществом и в результате этого воздействия (в совокупности) вся система, т.е. объект и воздействие на него, становится организующейся. Следовательно, эта система сама не является самоорганизующейся, поскольку кто-то, а не она сама, создает действующее на нее воздействие, в результате которого вся система становится организующейся. Однако энтропия системы уменьшается, достигая некоторого минимального постоянного значения $H_{min}=const$; при этом, согласно выражению (1.9), «избыточность» становится максимальной $R=R_{max}$ ($0 < R_{max} < 1$). Примерами организующихся систем является: ячейка Бенара, Лазер, гидроцикл планеты Земля, реакция Белоусова–Жаботинского и т.д.

Самоорганизующаяся система это такая система, которая состоит из объекта и действующего на него воздействия, вызывающего в этой системе процесс самоорганизации; причем это воздействие создается в самой системе, в которой, зачастую, не удастся расчленить объект и действующее на него воздействие. Поскольку воздействие на систему создается в самой системе, а не генерируется снаружи, а также то обстоятельство, что в результате ее функционирования энтропия системы уменьшается,

она получила название самоорганизующейся. Известные самоорганизующейся системы состоят из живых существ, атомно-молекулярного материала, образующего эти существа, а также связанных с живыми существами, областями их функционирования: экономикой, социологией, политикой и т.д.

Все живые существа удобно представить в виде двух групп: существа с разумом и существа, не обладающие разумом.

Энтропия самоорганизующихся систем с разумными существами уменьшается во времени т.е.

$$H(t_1) > H(t_2) > H(t_3), \text{ если } t_1 < t_2 < t_3.$$

Энтропия $H(t)$ самоорганизующихся систем, состоящих из живых существ, не обладающих разумом, достигает постоянно-го минимального значения $H(t) = H_{min}^* = const$.

Согласно классификации систем с информационной точки зрения, существуют четыре вида систем.

1. Неорганизованная система (беспорядок): $H = H_{max}$, $R = 0$.

2. Организующаяся система: $H = H_{min}$ ($0 < R_{max} < 1$).

3. Самоорганизующаяся система: 1) случай – энтропия H постоянно уменьшается во времени, т.е. $H(t_1) > H(t_2) > H(t_3)$, если $t_3 > t_2 > t_1$; 2) случай – энтропия H уменьшается, достигая некоторого постоянного минимального значения $H(t) = H_{min}^* = const$, которое не изменяется.

4. Организованная система: $H = 0$, $R = 1$.

Отличительной особенностью самоорганизующихся систем от организующихся является также то, что самоорганизующиеся системы являются структурно замкнутыми, в то время как организующиеся системы структурно разомкнуты; структурная замкнутость и разомкнутость этих систем обсуждается во второй главе.

Конечно, в течении больших временных масштабов упорядоченность организованной планетной системы, а также минимальная энтропия в процессе ее эволюционного развития, будут изменяться. Однако, этот временной масштаб много больше времени существования человечества.

Отдельно (от приведенной классификации) следует отметить место, занимаемое моделями, описывающими функционирование организующихся и самоорганизующихся систем: модель регенерации Гирера–Мейнхардта, модель Брюсселятора, модель Хищник – Жертва, модель Мальтуса, модель Моно и т.д. Все модели предназначены для математической имитации реальных организующихся и самоорганизующихся систем. Поэтому, в вышеприведенной классификации они относятся ко второму и третьему пунктам.

В литературе по тематике пунктов 2 и 3, системы, принадлежащие к этим пунктам, рассматриваются *совместно* как самоорганизующиеся. Это приводит к неразберихе, путанице и дезорганизации при исследовании и моделировании, поскольку между организующимися и самоорганизующимися системами есть существенное различие. Такое положение дел сложилось по двум причинам: а. отсутствие использования критерия классификации систем, основанного на понятии информационной «избыточности», б. человеческая жадность: приобщить себя к рождению новой науки (теории самоорганизации) с тем, чтобы увековечить свое имя вместе с новой наукой.

В настоящей работе не используется понятие негэнтропии. Однако, в литературе по разному толкуется это понятие: так в монографии [19] негэнтропия означает энтропию со знаком минус, а в монографии. [3] говорится, что негэнтропия определяется как разность $H_{max} - H$. Разное толкование этого понятия может привести читателя к недоумению.

1.3.2. Оптимизация самоорганизующихся и организующихся систем

Под словом «оптимизация» в самоорганизующихся системах понимается оптимальное самоуправление, т.е. оптимальная самоорганизация; это означает выбор, среди всех возможных процессов самоорганизации, наилучшего в некотором смысле, процесса самоорганизации, т.е. выбор оптимальной (в некотором смысле) стратегии самоорганизации. Данный выбор оптимальной стратегии самоорганизации осуществляется без вмешательства на систему извне, т.е. самой системой.

Под словом «оптимизация» в организующихся системах понимается выбор оптимального управляющего воздействия на данную систему извне, вызывающего организующийся процесс в этой системе. Например, в случае ячейки Бенара – это определенное температурное поле, вызывающее организующийся процесс в ячейке. В случае лазера, это определенное поле частоты накачки, также действующее извне.

«Искусство управлять – это искусство выбирать» (Эмилия де Жиарден). Данная цитата адекватно отражает заглавие настоящего раздела.

Рассмотрим процессы, происходящее в организующихся и самоорганизующихся системах с точки зрения теории оптимального управления. В теории оптимального управления используется некоторый неотрицательный функционал от состояния системы $x(t) \in \Omega_x$ и управления $u(x, t) \in \Omega_u$, $\Omega_u \subseteq \Omega_x$. Здесь Ω_x – пространство состояний, Ω_u – множество всех допустимых управлений.

Используемый в теории оптимального управления функционал имеет вид

$$J(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, t, u(x, t)) dt^1, \quad (1.10)$$

где $L(x, t, u(x, t)) > 0$, при ограничениях, определяемых процессом

$$\dot{x} = f(x, t, u(x, t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) \in D_f, \quad (1.11)$$

D_f – некоторое многообразие в Ω_x . Траектория системы (1.11) выбирается для произвольного управления $u(x, t)$ принадлежащего к множеству допустимых управлений Ω_u .

Для того, чтобы представить рассматриваемую задачу управления в терминах функции энтропии, можно предположить, что функционал $J(x_0, t_0, u(x, t))$ распределён на Ω_u в соответствии с плотностью вероятностей $p(u(x, t))$ управлений $u(x, t) \in \Omega_u$. Энтропия

$$H(u) = \int_{\Omega_x} \ln\{p(u(x, t))\} p(u(x, t)) dx \quad (1.12)$$

представляет собой неопределенность выбора управления $u(x, t)$ среди всех возможных допустимых управлений из Ω_u . При этом оптимальное управление $u^*(x, t)$ системой (1.11) должно минимизировать энтропию $H(u)$ т.е. критерий (1.12). В том случае, когда удастся расчлнить объект управления и управляющее устройство, становится возможным использование результатов грузинского ученого М.Е. Салуквадзе, полученные им в Университете Беркли (США) в лаборатории известного ученого Л. Заде.

¹ В дальнейшем (ГЛАВЫ 3,5,9,11), благодаря оптимизируемому классу систем, создается возможность в место функционала (1.10) использовать функционал Лагранжа (3.25).

В работах [20-22] показано, что оптимальным является управление $u^*(x,t)$, которое минимизирует критерий (1.10), т.е. функционал $J(x,t,u(x,t))$, максимизирует плотность $p(u(x,t))$ и, следовательно, минимизирует энтропию $H(u)$:

$$H(u^*) = \min_u \int_{\Omega_x} J(x,t,u(x,t)p(u(x,t))) dx. \quad (1.13)$$

Данное утверждение устанавливает взаимосвязь между задачами теории информации и оптимального управления; это позволяет унифицировать подход к теории оптимального управления как к соответствующей задаче теории информации на основе некоторой общей меры поведения. Данный подход создает возможность использовать методы теории информации, основанные на понятии энтропии, в задачах управления (самоуправления) и, следовательно, при моделировании задач организуемых и самоорганизующихся систем.

Однако, следует отметить, что при моделировании самоорганизующихся систем допустимая стратегия u^* управления выбирается самой системой из множества Ω_u всех управлений с обратной связью, тогда как в организующейся системе допустимая стратегия u^* выбирается извне субъектом, не находящимся в самой системе, т.е. допустимая стратегия управления не является функцией обратной связи: организующаяся система разомкнута.

Информационный подход открывает исследователю новые возможности для понимания информационной сути картины мироздания, качественно отличающейся от классической *вещественно-энергетической* картины. Правильнее было бы назвать классическую концепцию «*вещественно-полевой*», поскольку энергия всегда выступает в виде энергетического поля, являющегося некоторой компонентой обобщенного понятия поля. Ин-

формационные процессы находятся в основе всех явлений в микромире, макромире и мегамире, в том числе принципов работы человеческого сознания и подсознания. Этим обусловлена целесообразность использования информационного подхода в проблемах исследования и моделирования организующихся и самоорганизующихся систем. Ученые различных областей науки признают информацию общенаучным, фундаментальным понятием. Информация считается центральным понятием теории управления, кибернетики, информатики, теории связи и многих других научных дисциплин.

Главная трудность познания феномена информации состоит в определении общего понятия информации [23, 24], обладающего свойством инвариантности, а также познания процесса возникновения и генерирования информации.

Представляет интерес рассмотреть процесс оптимального управления с точки зрения самоорганизации и критерия минимизации информационной энтропии линейной стохастической системы.

Важным свойством нормального и равномерного распределений является то, что они обладают максимальной энтропией в определенных классах распределений [25]. Равномерно распределенные случайные величины обладают наибольшей энтропией

$$H(t) = \ln(b - a) = 2v(t)\sqrt{3} \quad (1.14)$$

среди всех случайных величин, распределенных в ограниченной области $[a, b]$. Нормально распределенные величины имеют наибольшую энтропию

$$H(t) = \ln v(t)\sqrt{2\pi e} = H_0 + \ln v(t) \quad (1.15)$$

среди непрерывных случайных величин, имеющих одну и ту же дисперсию¹ $v(t)$. Связь энтропии равномерно и нормально распределенных величин дается в приложении E.

Пусть имеется линейная динамическая система, имеющая переменную состояния x , на которую действует белый шум $\zeta(t)$ и непрерывно производятся измерения y , содержащие ошибки измерения, которые образуют процесс типа белого гауссова шума $\zeta(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + \xi, \\ y = x + \zeta, \end{cases} \quad (1.16)$$

где a – постоянная, а также имеем следующие обозначения

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= 0, & E[\xi(t)\xi(t')] &= q\delta(t-t'), \\ E[\zeta(t)] &= 0, & E[\zeta(t)\zeta(t')] &= \lambda\delta(t-t'), \\ E[\xi(t)\zeta(t)] &= 0, & E[y(0)] &= 0, \\ E[y^2(0)] &= v_0 = v(0), \end{aligned}$$

E – оператор математического ожидания;

δ – функция Дирака;

все величины являются скалярами, а параметры q , λ , v_0 – постоянными.

Для систем (1.16) минимальная в среднеквадратическом смысле дисперсия т.е.

$$v(t) = E[(x - \hat{x})^2] = \min, \quad (1.17)$$

(где $\hat{x} = E_y(x/y)$, а E_y – оператор условного математического ожидания процессах x) удовлетворяет скалярному уравнению Риккати (см. Приложение B):

$$\dot{v} = -2av - \lambda^{-1}v^2 + q, \quad v(0) = v_0. \quad (1.18)$$

Скалярное уравнение Риккати (1.18) имеет решение

¹ дисперсия – латинское слово, означает «рассеяние».

$$v(t) = v_1 + \frac{v_1 + v_2}{\left(\frac{v_0 + v_2}{v_0 - v_1}\right) e^{2\beta t} - 1}, \quad (1.19)$$

где $\beta = \sqrt{a^2 + q/\lambda}$, $v_1 = \lambda(\beta - a)$, $v_2 = \lambda(\beta + a)$, а $v \rightarrow v_1$ при $t \rightarrow \infty$ следует из (1.19).

Если в формуле (1.19) выполняется неравенство, $v_1 > v_0$, то скорость изменения дисперсии v будет иметь вид солитона, т.е.

$$\dot{v}(t) = -A \operatorname{sech}^2(\beta t - \phi), \quad (1.20)$$

где $A = \frac{\beta(v_1 + v_2)}{2\sqrt{c}}$, $c = \frac{v_2 + v_0}{v_1 - v_0}$, $\phi = \ln(c^{-1/2})$.

Уравнение Риккати (1.18), а, следовательно, и солитон (1.20), удовлетворяют уравнению Эйлера–Лагранжа

$$L_v - \frac{d}{dt} L_{\dot{v}} = 0. \quad (1.21)$$

Интегральные кривые $v = v(t, C_1, C_2)$ уравнения (1.21) называются экстремалиями. Только на экстремалиях достигается экстремум (минимум или максимум) функционала, т.е.

$$J[v(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(v, \dot{v}, t) dt = \text{extremum}, \quad (1.22)$$

где L – функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергии системы.

Из сопоставления правых частей выражений (1.18) и (1.20) видно, что они равны, поскольку равны левые части этих выражений. Следовательно, солитон \dot{v} представляет экстремаль; критерий (1.22) запишется в виде

$$J = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} v(t) dt = \int_0^{\infty} dv(t) = v(t) \Big|_0^{\infty} = v_1 - v_0 = \min . \quad (1.23)$$

Исходя из выражения (1.23) и формулы (1.15), можно найти постоянное минимальное значение энтропии

$$H_{min}(t) = H_0 + \ln J = const. \quad (1.24)$$

Таким образом, в результате использования системы измерений (1.16) находим минимальное значение (в среднеквадратическом смысле) условной дисперсии $v(t)$, удовлетворяющей уравнению Эйлера–Лагранжа (1.21); в результате достигаем постоянного, минимального значения энтропии (1.24), что является свидетельством существования организующейся или самоорганизующейся системы.

Рассмотрим теперь процесс самоорганизации с позиций управления т.е. самоуправления. Для этого обратимся к линейной стохастической системе управления с точно известным состоянием x :

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + gu + \xi(t), \\ y = x, \end{cases} \quad (1.25)$$

где a и g – постоянные;

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= 0, & E[\xi(t)\xi(t')] &= q\delta(t-t'), \\ E[x(t_0)] &= 0, & E[x^2(t_0)] &= v(0) \equiv v_0. \end{aligned}$$

Пусть критерий качества управления имеет вид

$$J^* = E \left[\frac{1}{2} (s_f x^2)_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (nx^2 + mu^2) dt \right] = \min. \quad (1.26)$$

Тогда оптимальная в смысле критерия (1.26) стратегия управления системой (1.25) имеет вид [26]:

¹ символ \min берется из-за того, что вторая производная от $v(t)$ положительна, т.е. $\ddot{v}(t) > 0$.

$$u(t) = -c^*x(t), \quad (1.27)$$

$$c^* = m^{-1}gs(t), \quad (1.28)$$

$$\dot{s}(t) = -2as(t) + m^{-1}g^2s^2(t) - n \quad (1.29)$$

$$s(t_f) = v_f.$$

В уравнении Риккати (1.29) $s(t)$ движется в обратном направлении по отношению к дисперсии. Поведение оптимальной управляемой системы (1.25) в среднем получим, если учтем стратегию управления (1.27) в уравнении (1.25)

$$\dot{x} = -(a + gc^*)x + \xi. \quad (1.30)$$

Выражение для дисперсии $v(t) \equiv E_y[x^2(t)]$ может быть определено из уравнения

$$\dot{v} = -2(a + gc^*)v + q, \quad (1.31)$$

$$v(t_0) = v_0.$$

Уравнение (1.31) имеет решение

$$v(t) = v_0 e^{-2(a+gc^*)t} + \frac{q}{2(a+gc^*)} (1 - e^{-2(a+gc^*)t}). \quad (1.32)$$

Энтропию управляемой (самоуправляемой или самоорганизующейся) системы (1.25) находим согласно выражению (1.15):

$$H = H_0 + \ln \left| v_0 e^{-2(a+gc^*)t} + \frac{q}{2(a+gc^*)} (1 - e^{-2(a+gc^*)t}) \right|. \quad (1.33)$$

При $t \rightarrow \infty$ формула (1.33) принимает вид

$$H = H_0 + \ln \left| \frac{q}{2(a+gc^*)} \right|. \quad (1.34)$$

Фигурирующая в выражении (1.34) переменная величина c^* определяется согласно (1.28). Величина $s(t)$ из формулы

(1.29) имеет ту же структуру, что и дисперсия $v(t)$, однако она движется в обратном направлении:

$$s(t) = s_1 + \frac{s_1 + s_2}{\left(\frac{s_f + s_2}{s_f - s_1}\right) e^{2\beta} - 1}, \quad (1.35)$$

где $\beta = \sqrt{a^2 + \frac{n}{\lambda}}$, $s_1 = \lambda(\beta - a)$, $s_2 = \lambda(\beta + a)$,

$$\lambda^{-1} = (m^{-1}g^2)^{-1}, \quad \text{т.е. } \lambda = m^{-1}g^2.$$

В выражении (1.35) имеем $s \rightarrow s_f$ при $t \rightarrow 0$ т.е. $s(t)$ движется в направлении, обратном по отношению движения $v(t)$. Следовательно, при $s_1 > s_f$ имеем солитон \dot{S} , являющийся экстремалью; поэтому критерий (1.23) в данном случае можно записать так

$$J^* = \int_{\infty}^0 \frac{d}{dt} s(t) dt = \int_{\infty}^0 ds(t) = s(t)|_{\infty}^0 = s_f - s_1 = \min, \quad (1.36)$$

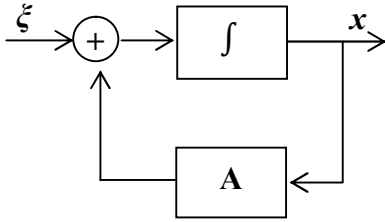
поскольку, согласно (1.35), при $t \rightarrow \infty$, $s \rightarrow s_1$.

В выражении (1.34) величина $c^*(t)$ изменяется периодически с периодом, равным $T = 2\pi k j$ ($k=0,1,2,\dots$), однако при $t = \infty$ имеем $s = s_1 \equiv \lambda(\beta - a)$, в этом случае $c^*(\infty) = \text{const}$.

При этом, энтропия H , определенная согласно (1.34), становится постоянной величиной $H_{min}^* = \text{const}$. Согласно вышеприведенной классификации, имеем пункт 3 случай 2): энтропия самоорганизующейся системы H уменьшается, достигая некоторого постоянного минимального значения $H = H_{min}^* = \text{const}$.

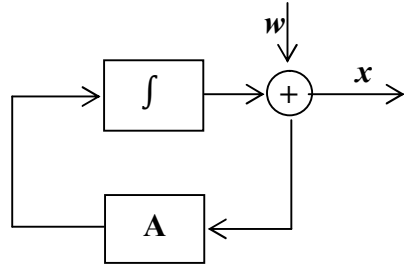
Основной отличительной особенностью самоорганизующейся системы от организующейся является то, что она замкнута т.е. представляет собой систему с обратной связью. Действи-

тельно, если ввести обозначение $A(t) \equiv -(a + gc^*(t))$, то согласно (1.30) получим функциональную блок-схему, показанную на Рис.1.1.



$$dx/dt = Ax + \xi$$

Рис.1.1



$$dx = Axdt + dw$$

Рис.1.2

Уравнение (1.30) записано в форме Ланжевена, ему соответствует блок-схема на Рис. 1.1.

В том случае, если уравнение (1.30) будет записано в форме стохастического дифференциального уравнения

$$dx = -(a + gc^*(t))xdt + dw, \quad (1.37)$$

где $dw = \xi(t)dt$, то этому уравнению будет соответствовать блок-схема, показанная на Рис. 1.2. Блок-схема на Рис.1.2 неприводима к разомкнутой; самоорганизующиеся системы характеризуются этим свойством. Решение уравнения (1.37) интерпретируется как интеграл от выборочных функций. Разница между уравнениями (1.30) и (1.37) подробно обсуждается в монографии [27]. Процессам самоорганизации, встречающимся на практике, обычно соответствует блок-схема на Рис. 1.2.

Самоорганизующаяся система, соответствующая пункту 3 случай 1), имеет энтропию H , которая постоянно уменьшается во времени, т.е. $H(t_1) > H(t_2) > H(t_3)$, если $t_3 > t_2 > t_1$; этот случай может быть получен из уравнения (1.25) (или из (1.31)), если принять, что обладающие разумом живые существа постоянно

воздействуют на коэффициент g с целью его увеличения (возрастания) во времени. В этом случае энтропия H , определенная согласно выражению (1.34), будет уменьшаться во времени. Таким образом, пункт 3 случая 2) является частным случаем пункта 3 случая 1), когда $g(t)$ является во времени постоянной величиной $g(t) = const$.

Рассмотрение линейной стохастической системы управления (1.25) для иллюстрации процесса самоорганизации было выбрано по нескольким причинам. Во-первых, прохождение нормального (гауссова) случайного процесса через линейную систему сохраняет нормальность процесса на выходе системы. Во-вторых, стратегия управления этой системой $u(t)$ может быть выражена в явном виде, как функция выходной переменной состояния x , согласно формуле (1.27), если в качестве критерия оптимальности выбрано выражение (1.36). В-третьих, дисперсия $\sigma(t)$ этой системы, от которой зависит энтропия H (1.33), легко находится путем решения дифференциального уравнения первого порядка (1.31). Хотя, как отмечалось выше, в организующихся и самоорганизующихся системах часто не удается четко расчленить объект управления и стратегию управления друг от друга. Следует также отметить, что реальные организующиеся и самоорганизующиеся системы могут быть нелинейными, в этом случае аппарат теории линейных систем (принцип суперпозиции и метод декомпозиции) неприменим; нарушается также нормальность процесса на выходе нелинейной системы, если на ее вход подается нормальный (гауссов) процесс. Все эти факты свидетельствуют о том, что при исследовании реальных организующихся и самоорганизующихся систем следует применять индивидуальные методы анализа.

Критерий информационной энтропии охватывает практически все системы, являющиеся организующимися и самоорга-

низирующимися. Концепция использования информации, как возможности устранения неопределенности, использует информацию для уменьшения информационной энтропии. **Поскольку нормальное (гауссово) распределения обладает максимальной информационной энтропией, то оно является отправным пунктом при минимизации этой энтропии с целью получения соответствующей информации.**

Таким образом, **организующиеся и самоорганизующиеся системы используют информацию для перестройки своей структуры (благодаря изменению параметров) с тем, чтобы обеспечить минимальность энтропии всей системы.**

Энтропия обладает свойством *аддитивности*: любая система, построенная с помощью комбинации отдельных подсистем, обладает суммарной энтропией, т.е. энтропией, равной сумме энтропий каждой из подсистем.

Энтропия также обладает свойством *субаддитивности*: энтропия составной системы XY равна энтропии подсистемы X плюс условной энтропии $H_x(Y)$ подсистемы Y при условии, что подсистема X находится в определенном состоянии:

$$H(XY) = H(X) + H_x(Y).$$

Свойство аддитивности энтропии как-бы заменяет отсутствие свойства декомпозиции в нелинейных системах. Из этого обстоятельства следует также целесообразность использования информационной энтропии в качестве критерия в организующихся и самоорганизующихся системах.

Следует отметить, что «забывание» начального состояния x_0 в выражении (1.33) связано со стремлением текущего времени к бесконечности $t \rightarrow \infty$.

В последующих главах настоящей книги этот факт будет встречаться неоднократно.

§1.4. Количество и ценность информации

Различают два аспекта в теории информации: количество информации и содержание информации. Ниже эти два аспекта будут рассмотрены в отдельности, хотя следует отметить, что в некоторых случаях эти два понятия дополняют друг друга.

1.4.1. Количество информации

Если мы хотим выбрать P_1 событий из P_0 равновероятных событий, то нам понадобится количество информации равно

$$I = K \log(P_0/P_1), \quad (1.38)$$

где K – постоянный коэффициент.

В случае, если производится отбор одного определенного события, т.е. $P_1=1$, необходимое количество информации будет равно

$$I = K \log P_0. \quad (1.39)$$

Определение информации (1.39) позволяет превратить совместные вероятности в *аддитивные* величины. Так, в результате бросания одной игральной кости (шестигранный кубик) получаем количество информации, равное $I_1 = K \log_2 6$; в результате бросания двух костей количество информации будет $I = I_1 + I_1 = 2K \log_2 6$.

Единицей информации служит один бит¹, отвечающий одному выбору из двух равновероятных возможностей. При бросании одной кости имеем количество информации равно $I = \log_2 6 = 2.585$ бит, если принято, что $K=1$.

Предположим, что имеется сообщение, содержащее G последовательных букв. В каждой из G ячеек может находиться

¹ бит означает binary digit, т.е. двоичный разряд.

одна из M букв (для русского языка $M=32$). В сообщении содержится следующее количество букв: N_1 букв A , N_2 букв B и т.д. Количество букв равно

$$G = \sum_{j=1}^M N_j.$$

Вероятность появления j -ой буквы

$$p_j = N_j/G, \quad \sum_{j=1}^M p_j = 1.$$

Общее число сообщений равно

$$P = \frac{G!}{\prod_{j=1}^M N_j!}.$$

Если использовать натуральный логарифм, то информация, содержащаяся в одном сообщении, будет

$$I = K \ln P = K \left[\ln(G!) - \sum_{j=1}^M \ln(N_j!) \right]. \quad (1.40)$$

Поскольку $N_j \gg 1$ и $G \gg 1$, то к выражению (1.40) применима формула Стирлинга¹ и переходя к двоичному определению информации (т.е. $K=1/\ln 2$), получим количество информации, приходящееся на одну букву

$$i = I/G = - \sum_{j=1}^M p_j \log_2 p_j.$$

В действительности настоящий языковой текст содержит меньшее количество информации, поскольку имеются добавочные ограничения: в русском языке появление гласной буквы вслед за гласной гораздо менее вероятно, чем после согласной;

¹ формула Стирлинга имеет вид: $N! \approx \sqrt{2\pi N} N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N}$

налицо имеем избыточность сообщения. Теория информации имеет прямое физическое содержание. Подобно количеству информации, энтропия Больцмана (1.8) выражается как логарифм числа микросостояний, реализующих данное макросостояние. Из сопоставления формул (1.8) и (1.39) приходим к заключению, что представление количества информации в виде

$$I = k^1 \ln P \quad (1.41)$$

позволяет выражать информацию в энтропийных единицах, т.е. имеем информационную энтропию.

Количество информации, содержащейся в источнике сообщений при неравновероятном появлении символов в сигнале, определяется выражением

$$I = -n \sum_{j=1}^m p_j \log_2 p_j \text{бит.} \quad (1.42)$$

Согласно выражению (1.42), количество информации пропорционально длительности сигнала (числу отсчетов n) и зависит от вероятностей появления символов в сигнале. Для частного случая равновероятного появления символов будем иметь

$$p_j = p = \frac{1}{m},$$

а формула (1.42) примет вид

$$I = -n \sum_{j=1}^m \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 N = \log_2 m^n = n \log_2 m \quad (1.43)$$

Здесь уместно привести высказывание Л. Бриллюэна [28]: «Энтропия обычно описывается как мера беспорядочности в физической системе. Более точно утверждение, что *энтропия есть*

¹ k -постоянная Больцмана равна: $k=1.38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град.

мера недостатка информации о действительной структуре системы».

Если в формуле (1.41) положить $P=2$, то можно выразить один бит информации через энтропию: $1\text{бит}\approx k\ln 2=10^{-16}$ эрг/град.

То, что информация определяется в энтропийных единицах, нет ничего удивительного. Так, например, благодаря формуле Эйнштейна $E=mc^2$, масса элементарных частиц определяется не в граммах, а в энергетических единицах: масса электрона $m_e=0.5\text{МэВ}^1$.

Дать оценку количеству информации, которое содержится в клетке или организме, является непростой задачей. Считается, что информация (т.е. степень упорядоченности), обеспечивающая биологическую функциональность, полностью определяется всей структурой биологического существа [29,30]. Данков и Каствлер [30] дали оценку количеству информации, требуемого для отбора одного атома из всего набора атомов в клетке и задания его положения с точностью, определяемой тепловыми колебаниями при температуре тела. Согласно их оценке, на один атом приходится 24,5 бит, на одну клетку *Escherichia coli* приходится 10^{10} бит, одна зигота млекопитающего содержит 10^{15} бит, а человеческий организм содержит 10^{25} бит или в энтропийной мере 10^9 эрг/град. ≈ 24 кал./град.

Для объяснения единства природы информации, энергии и массы используется формула Эйнштейна ($E=mc^2$), а также вышеприведенное соотношение ($1\text{бит}=10^6\text{эрг/град}$). Эти три величины образуют так называемое суперполе, в котором вещество, энергия и информация имеют единую природу. Для перевода любой системы из одной формы в другую пользуются

¹ МэВ – мегаэлектронвольт.

следующими приближенными соотношениями

$$1\text{г} \approx 10^{14} \text{ джоуль}^1 \approx 10^{37} \text{ бит.}$$

Теоретически можно любую из этих трех форм выразить в единицах другой формы. Например, в битах можно выразить как информацию, так и энергию, и массу вещества. Мозг человека в виде памяти содержит информацию около $5 \cdot 10^{10}$ бит, вместе с макроструктурами около 10^{17} бит, что соответствует массе около $1 \cdot 10^{-20}$ г., т.е. весьма малой величине.

Согласно принципу Данкова [30], оптимум посылаемой информации, достигаемый *естественным отбором*, вовсе не означает создания идеальной информационной системы без шумов. При передаче сообщений борьба с шумами ведется посредством избыточной информации. Так, терпящий катастрофу корабль многократно посылает сигнал SOS, чтобы увеличить вероятность его обнаружения. Охотник заряжает патроны своего ружья большим количеством дроби, чтобы также увеличить вероятность попадания выстрела в дичь.

Согласно принципу Данкова, оптимальное количество избыточной информации *в эволюции* вида равно не тому количеству, которое уничтожает все ошибки, а тому, которое минимизирует сумму стоимости ошибок и стоимости их исправления. При этом допускается столько ошибок, сколько совместимо с дальнейшим существованием вида.

1.4.2. Ценность информации

Теория информации позволяет оценить количество информации, а не ее *содержание* (ценность). Поэтому она ничего не говорит о том, в каких случаях стоит тратить значительные усилия, необходимые для того, чтобы повысить эффективность

¹ 1 джоуль = 10^7 эрг.

передачи данных. Следует отметить, что в некоторых случаях количество информации может заменить ценность информации: точные количественные данные могут пролить свет на качественные данные. Так, например, точные измерения масс изотопов позволили обнаружить дефект массы, положивший начало изучению внутриядерной энергии [31]. Содержание информации можно оценить лишь применительно к конкретным (организующимся и самоорганизующимся) системам.

М. Эйген предложил дать количественное физическое определение ценности информации, содержащейся в биологически функциональных макромолекулах в процессе их естественного отбора [32]. Информация в организме передается молекулами и ионами, она имеет химическую природу. Восприятие и преобразование информации сводится к узнаванию молекул молекулами; на практике этот процесс определяется взаимодействием молекул. В отличие от автоматических (кибернетических) устройств, в которых информация (сигналы) передается электрическим или магнитным путем, в организме сигналами служат молекулы. Основываясь на этих свойствах молекул, а также на экспериментальных результатах полученных им, Эйген считал возможным в добиологических системах вместо понятия «ценности информации» использовать понятие «*селективной ценности*». Определенная по Эйгену селективная ценность представляет собой безразмерный кинетический параметр, характеризующий автокаталитический синтез макромолекулярных цепей; синтез этих цепей происходит за счет других цепей с меньшей селективной ценностью, подвергающихся разрушению. Автокаталитический синтез молекулярных цепей происходит в стационарной, открытой (диссипативной) системе, далекой от равновесия. Результаты Эйгена созвучны с теорией происхождения диссипативных структур Гленсдорфа–Пригожина [33].

Поскольку в других дисциплинах отсутствуют понятия адекватные понятию ценности информации нами будут под-

робно рассмотрены результаты монографии Эйгена [32], касающиеся *селективной ценности*.

Подход к определению параметра, который выражает «селективное преимущество» через молекулярные свойства, является основным результатом, приводимым в следующем разделе.

1.4.3. О некоторых аспектах теории информации для предбиологических систем

В сложном процессе химических реакций, происходящих в системе с участием множества различных химических соединений, возникновение упорядоченности требует образования «самовоспроизводящегося кода». Это означает, что самоорганизация воспроизводимого функционирования должна начинаться на уровне самовоспроизводящегося молекулярного кода. Носителями такого кода являются нуклеиновые кислоты и белки.

Для лучшего понимания процесса создания такого кода обратимся к следующим аспектам теории информации.

Пусть имеем некоторое множество, состоящее из N_v носителей информации:

$$i_{vk}, \quad k=1,2,\dots,N_v \quad (1.44)$$

которые представляют собой последовательности из V единиц с базисом λ (например, $\lambda = 4$ для нуклеиновых кислот или $\lambda = 20$ для белков). В дальнейшем мы часто будем оперировать с таким однородным классом носителей информации, т.е. с последовательностями, имеющими одинаковую длину V единиц.

В теории информации количество информации (см. раздел 1.4.1) в определенной последовательности i_{vi} , определяется числом битов:

$$I_v = v \ln \lambda / \ln 2 \text{ бит.} \quad (1.45)$$

В этом случае N представляет собой «структурную емкость» класса V , т.е. число всех различных последовательностей с длиной V и с базисом λ :

$$N_v = \lambda^v 2^{I_v}. \quad (1.46)$$

В том случае, когда последовательности могут иметь любую длину, ограниченную верхним пределом V единиц, будет иметь место следующее выражение

$$\sum_v N_v = \frac{\lambda^V - 1}{1 - \lambda^{-1}} \quad (1.47)$$

для различных последовательностей. Эти последовательности представляют собой определенную информацию с различными селекционными ценностями.

Вообразим, что система носителей информации находится внутри виртуального объема V конечного размера, имеющего проницаемые стенки. Через эти стенки могут втекать и вытекать как высокоэнергетические, так и низкоэнергетические мономерные единицы. На единицу объёма может приходиться по x_{vi} экземпляров каждого вида носителей информации. При этом общая численность каждого класса носителей информации будет

$$n_v = \sum_{k=1}^{N_v} x_{vk}. \quad (1.48)$$

Для большинства возможных носителей информации i_{vk} из множества N_v концентрации x_{vk} будут равны нулю. Обозначим концентрации неорганизованных высокоэнергетических мономерных единиц (соответствующих базису $1, \dots, \lambda$) через m_1, \dots, m_λ ; потоки же этих концентраций через прозрачные стенки виртуального объема V обозначим через $\Phi_1, \dots, \Phi_\lambda$.

Общее число организованных и неорганизованных единиц

в объеме V будет

$$M_0 = \sum_{k=1}^{\lambda} m_k + \sum_v v n_v. \quad (1.49)$$

Степень организованности D_0 в виртуальном объеме V определяется отношением числа организованных единиц к сумме организованных и неорганизованных единиц:

$$D_0 = \frac{\sum_v v n_v}{M_0}.$$

Обычно (см. таблицу 3 в [32]) полная численность данного класса в объеме V практически во всех реальных случаях весьма мала по сравнению с информационной емкостью этого класса N_v :

$$n_v V \ll N_v. \quad (1.50)$$

Согласно соотношению (1.50) можно прийти к важному следствию: при равновероятном распределении в отсутствие самоинструктирования ожидаемое значение числа цепей с любой данной последовательностью практически равно нулю. Для тех же последовательностей, которые образовались случайно, вероятность найти еще один случайно образовавшийся экземпляр с той же последовательностью также практически равна нулю. Такая «ненасыщенность» информационной емкости очень важна для процедуры оптимизации в процессе эволюции.

В последующем изложении обосновываются определенные динамические свойства носителей информации и строится теория отбора.

Рассмотрим класс носителей информации i_{vi} , каждый из которых имеется в числе x_{vi} экземпляров на единицу объема

$$0 \leq x_{vi} < n_v \quad (n_v V \ll N_v) \quad (1.51)$$

При использовании феноменологической теории отбора появление мутантов, вызванное не ошибками копирования, а какими-либо другими процессами, описывается уравнением [32]

$$\dot{x}_i = k_0[A_i Q_i - D_i]x_i + \sum_{l \neq i} \varphi_{il} x_l - \varphi_{oi} x_i. \quad (1.52)$$

В уравнении (1.52) имеем следующие обозначения: k_0 – общая константа скорости первого порядка с размерностью 1/сек, A – усиление, Q – качество, D – разложение, член $\sum_{l=i} \varphi_{il} x_l$ соответствует «исправлению ошибок» или «обратному потоку информации» обычно оказывается весьма малым; член φ_{oi} , описывающий разбавление субстрата, умножается на x_i (пропорциональное разбавлению). Если опустить индекс i , то φ_o будет связан с общим потоком разбавления φ_o следующим соотношением

$$\varphi_o = \frac{\Phi_o}{\sum_{k=1}^N x_k}. \quad (1.53)$$

Поток разбавления Φ_o нужно регулировать таким образом, чтобы он компенсировал суммарную избыточную продукцию

$$\Phi_o = k_0 \sum_{k=1}^N [A_k - D_k] x_k. \quad (1.54)$$

Суммарная скорость синтеза и распада носителей информации должна быть постоянной:

$$\Phi_1, \dots, \Phi_\lambda = const.$$

Таким образом, если мономеры получают из одного и того же источника

$$\Phi_M = \sum_{k=1}^{\lambda} \Phi_k = const$$

и, следовательно,

$$k_0 = \sum_{k=1}^N A_k x_k = k_0 \sum_{k=1}^N D_k x_k = \Phi_M = const. \quad (1.55)$$

С учетом соотношения (1.55) в (1.54) получим, что поток разбавления $\Phi_0 = 0$. Принимая во внимание это обстоятельство в (1.53), получим $\varphi_0 = 0$. С учетом этого, феноменологическое уравнение (1.52) запишется так

$$\dot{x}_i = k_0[A_i Q_i - D_i]x_i + \sum_{l \neq i} \varphi_{il} x_l. \quad (1.56)$$

Уравнение (1.56) пока не описывает процесс отбора. Оно определяет некую сегрегацию, обусловленную пороговым свойством

$$A_i Q_i \geq D_i. \quad (1.57)$$

Те носители информации, которые находятся выше порога ($A_i Q_i > D_i$), будут увеличиваться в количестве, а те, которые находятся ниже порога ($A_i Q_i < D_i$), будут вымирать. Следует отметить, что в размерность параметров A_i , Q_i и D_i не входит время. К уравнению (1.56) применима теорема Тихонова (см. Приложение Ж). Членом, характеризующим быстрое течение процесса изменения концентрации $\sum_{l \neq i} \varphi_{il} x_l$ можно пренебречь тогда

уравнение (1.56) запишется в виде

$$\dot{x}_i = k_0[A_i Q_i - D_i]x_i \quad (1.58)$$

Для постоянных A_i , Q_i и D_i решение уравнения (1.58) представляет собой вещественную экспоненту:

$$x_i(t) = x_i^0 \exp\left\{k_0 \int_0^t (A_i Q_i - D_i) dt\right\}, \quad (1.59)$$

где x_i^0 — начальное состояние.

В зависимости от знака разности $A_i Q_i - D_i$ аргумент ре-

шения (1.59) будет иметь либо положительное, либо отрицательное значение. Если какая-либо из этих реакций приближается к равновесию, то соответствующее решение принимает вид экспоненты с отрицательным аргументом.

Следующие три условия являются необходимыми для отбора в популяции.

- а. Система должна быть открытой (диссипативной) и далекой от равновесия.
- б. Скорость синтеза должна превышать скорость распада. Виды с большей скоростью синтеза будут обладать преимуществом.
- в. Вследствие условия (1.50), т.е. выполнения неравенства $n_v \cdot V \ll N_v$, неинструментированным образованием какого-либо отдельного носителя информации можно полностью пренебречь.

Дифференциальное уравнение (1.58) для фиксированного момента времени $t = t_c = const$, т.е. для постоянных A_i , Q_i и D_i имеет вид

$$\dot{x}_i = (A_i Q_i - D_i) x_i,$$

где $A_i Q_i - D_i = a_i^* + b_i^* x_i$

Из этих выражений следует уравнение Риккати без свободного члена

$$\dot{x}_i = a_i^* x_i + b_i^* x_i^2 \quad (1.60)$$

Введем определения:

$$E_i = A_i - D_i - \text{избыточная продуктивность,} \quad (1.61)$$

$$\bar{E}_i = \frac{\sum_{k=1}^N E_k x_k}{\sum_{k=1}^N x_k} - \text{средняя продуктивность,} \quad (1.62)$$

$$W_i^0 = A_i Q_i - D_i - \text{селективная ценность.} \quad (1.63)$$

С учетом обозначений (1.61) – (1.63) уравнение (1.58) запишется в виде

$$\dot{x}_i = k_0[W_i^0 - \bar{E}]x_i \quad (1.64)$$

В дальнейшем индексом m будет обозначаться главный ансамбль. При постоянных информационных потоках эволюция соответствует последовательностям таких нестабильностей, когда доминирующий вид i_m вымирает, уступая место новому виду i_{m+1} , который имеет конечное (положительное) селекционное преимущество $W_{m+1}^0 - W_m^0 > 0$. Следовательно, термин «ценность» используется применительно к слову «селективный» и означает «ценность селективного отбора». С учетом вышеприведенных обозначений кинетическое уравнение (1.64) запишется в виде [32]:

$$\dot{x}_i = k_0 W_i^0 x_i - \frac{k_0}{n x_i^0} \left\{ \sum_{k=1}^N x_k^0 E_k \exp[k_0(W_k^0 - W_i^0)t] \right\} x_i^2, \quad (1.65)$$

где n – стационарное значение концентрации \bar{x}_m .

Выражение (1.65) представляет собой уравнение Риккати без свободного члена

$$\dot{x}_i(t) = R_{1i}(t)x_i(t) - R_{2i}(t)x_i^2, \quad (1.66)$$

где

$$R_{1i}(t) = k_0 W_i^0 = const, \quad (1.67)$$

$$R_{2i}(t) = \frac{k_0}{n x_i^0} \sum_{k=1}^N x_k^0 E_k \exp[k_0(W_k^0 - W_i^0)t], \quad (1.68)$$

Решение уравнения (1.66) описывает в явном виде процедуру отбора. При $t=0$ каждое x_i равно своему начальному значению x_i^0 . Как известно, при $t \rightarrow \infty$ сумма экспонент может быть представлена ее наибольшим членом, который принадлежит виду с наибольшей селективной ценностью W_m^0 . Этот вид отбирается. Его концентрация стремится к стационарному (уста-

новившемся) состоянию

$$\bar{x}_m = \frac{W_m^0}{E_m} n,$$

которое равно n , поскольку $Q_m=1$; что соответствует $W_m^0 = E_m$. Все другие виды должны в конце концов исчезнуть (при $W_i^0 - W_m^0 < 0$) согласно формуле

$$x_i(t) = n \frac{x_i^0}{x_m^0} \cdot \frac{W_m^0}{E_m} \exp[(W_i^0 - W_m^0)k_0 t].$$

Из последнего выражения видно, что прежде чем x_m достигнет своего доминантного уровня, некоторые $x_i(t)$ могут сначала увеличиться в числе и пройти через максимум и лишь после этого исчезнуть.

Таким образом, приведена количественная модель понятия «селективной ценности» вместо понятия «информационной ценности». Это понятие играет существенную роль при переходе от неживой материи к живой. Вопросы образования организующихся и самоорганизующихся биологических систем будут рассмотрены в главе 11.

Краткие комментарии к первой главе

Обращено внимание на отсутствие сферы деятельности «синергетики», или теории «самоорганизации». Отмечено также, что проблемам самоорганизации происходящим в Мегамире не уделяется внимания в соответствующей литературе.

Приводятся физические и статистические предпосылки образования организующихся и самоорганизующихся систем. Отмечено, что проблемам описания физических систем, находящихся в «нейтральной зоне» между динамическими и статисти-

ческими, не уделялось должного внимания. Этим обстоятельством вызвано неудовлетворительное положение дел в проблемах исследования организующихся и самоорганизующихся систем.

Дается информационная классификация неорганизованных, организующихся, самоорганизующихся и организованных систем. Эта классификация создает возможность в отдельности рассматривать проблемы, возникающие в организующихся и самоорганизующихся системах. Приводится иллюстрирующий пример самоорганизующейся системы, имеющей энтропийный критерий качества.

Различие между организующимися и самоорганизующимися системами существенно: организующиеся системы структурно разомкнуты, тогда как самоорганизующиеся системы структурно замкнуты.

Приводятся результаты по обоснованию замены понятия «ценности информации» понятием «селективной ценности», предложенные Эйгеном.

ГЛАВА 2

Существующий математический аппарат.

Циклическое поведение самоорганизующихся систем на примере модели «хищник–жертва»

§2.1. Существующий математический аппарат.

Модель «хищник –жертва»

подавляющее большинство организующихся и самоорганизующихся систем и, следовательно, описывающие их поведение модели, являются нелинейными. Поэтому широко используется математический аппарат исследования этих систем, основанный на разложении нелинейностей в ряд Тейлора. При разложении в ряд Тейлора функции одной переменной предполагается, что достаточно гладкая функция может быть очень хорошо аппроксимирована полиномом степени n ; причем полином наилучшего приближения в точке $x=a$ есть

$$f(a+x) = \sum_{j=0}^n \frac{f_x^{(j)}(a)}{j!} u^j, \quad (2.1)$$

где $f_x^{(j)}$ есть j -ая производная от f по x , а u – малое число. Для функций, имеющих количество аргументов больше одного, имеется аналогичная теорема об аппроксимации такой функции полиномом $u_i = x_i - a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в окрестности точки (a_1, a_2, \dots, a_n) . В дальнейшем нас будет интересовать только линейная аппроксимация, т.е. аппроксимация полиномом первой степени.

Таким образом, если f достаточно гладкая функция аргументов x и y в окрестности точки (a, b) , чтобы можно было утверждать, что она имеет непрерывные первые производные, то будем иметь следующее разложение

$$f(x, y) = f(a + u, b + v) \approx f(a, b) + uf_x(a, b) + vf_y(a, b), \quad (2.2)$$

где $x = a + u$, $y = b + v$, a и b малые величины.

Ошибка в формуле (2.2) ограничена в окрестности точки (a, b) величиной $Ru^2 + Suv + Qv^2$, где R , S , и Q – фиксированные числа. Следовательно, для достаточно малых u и v можно сделать ошибку меньше любого наперед заданного числа.

Уравнения модели, описывающей поведение самоорганизующихся систем имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y). \end{cases} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) представимы в замкнутой форме, изображенной на Рис.2.1.

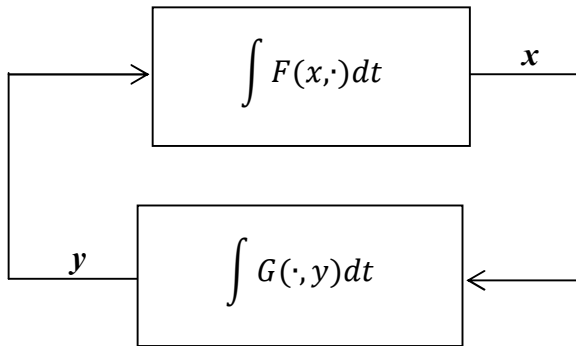


Рис.2.1

Из Рис. 2.1 видно, что система, изображенная на этом рисунке неприводима к разомкнутой; это свойство характерно для самоорганизующихся систем.

Уравнения (2.3) обладают тем свойством, что правые части явно не зависят от времени, т.е. являются автономными.

В замкнутой системе (см. Рис. 2.1a) рассогласование (ошибка) ε между реальным выходным процессом x и желаемым (требуемым) процессом y на выходе этой системы, т.е. $\varepsilon = x - y$, в системах автоматического управления, обычно, используется при формировании управляющего воздействия $\Psi(\varepsilon) = \psi\{\int [G(x, y) - H(x, y)]dt\} = \psi(x, y)$. Если это рассогласование ε сложить с желаемым процессом y , т.е. $\varepsilon + y$, то получим систему, окаймленную внешним пунктиром (см. Рис. 2.1a): эта система становится эквивалентной замкнутой системе, окаймленной внутренним пунктиром на Рис. 2.1a, т.е. эквивалентной структурно замкнутой системе, показанной на Рис. 2.1.

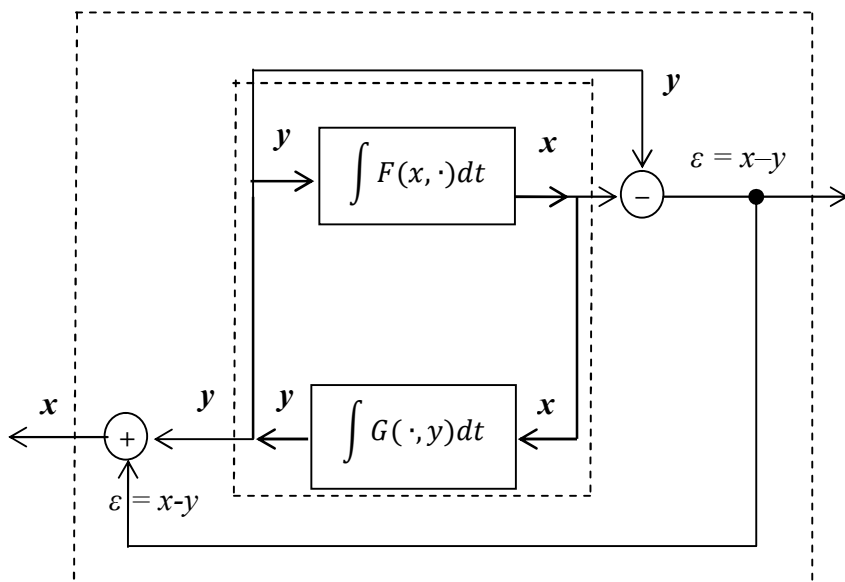


Рис. 2.1a

Разомкнутость системы означает, что вместо системы, заданной выражениями (2.3), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = G(y). \end{cases} \quad (2.3a)$$

Путем решения второго уравнения (2.3a), т.е. $y = \Phi(y)$, и подстановки этого решения в первое уравнение, система (2.3a) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \Phi(y)), \quad (2.3б)$$

причем y рассматривается как параметр. Уравнение (2.3б) моделирует организующуюся систему, которая не обладает свойством цикличности; эта система структурно разомкнута. Следовательно, цикличность функционирования самоорганизующейся системы обусловлена структурной замкнутостью этой динамической системы.

Для построения фазового портрета находят семейство интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \quad (2.4)$$

получающегося из (2.3) исключением времени t . После того, как получены интегральные кривые уравнения (2.4) на плоскости состояний, можно найти решения $x(t)$ и $y(t)$ уравнений (2.3). Таким образом, поведение замкнутой системы может быть представлено движением изображающей точки $x(t)$, $y(t)$ по интегральным кривым уравнения (2.4). Эти интегральные кривые называются *траекториями изображающей точки*.

Любая точка x , y , для которой функции $F(x, y)$ и $G(x, y)$ не обращаются в нуль одновременно, называется *обыкновенной точкой* уравнения (2.3). Точка x_0 , y_0 в которой $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ называется *особой точкой*. Физически особая точка

представляет собой точку равновесия, так как при этом условии переменные $x(t)$ и $y(t)$ становятся постоянными.

Проблемам существования и единственности решения уравнений (2.3) посвящено большое количество работ. Важной является следующая теорема существования и единственности решения уравнений (2.3) [34].

Теорема 1.

Если в окрестности точки плоскости (x_0, y_0) частные производные функций F и G непрерывны, то существует единственное решение, проходящее через точку (x_0, y_0) при $t = 0$. Решения либо не зависят от времени, либо описываются гладкой кривой. Кроме того, решения $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно зависят от начального положения (состояния).

По своей сути, утверждение этой теоремы совпадает с определением корректности по Адамару [35]. В дальнейшем, при исследовании рассматриваемых систем нам понадобятся результаты следующей теоремы.

Теорема 2.

Поведение траектории вблизи точки равновесия можно определить, рассматривая только линейные члены разложения функций F и G в ряды Тейлора в точке равновесия. Решения получаемых линейных уравнений в окрестности точки равновесия имеют то же поведение, что и точные решения [34].

Разложим правые части системы (2.3) по u и v ; где u и v – малые отклонения от стационарных значений x и y , т.е. $u = x - \bar{x}$ и $v = y - \bar{y}$:

$$\frac{du}{dt} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \cdot u + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \cdot v = a_{11}u + a_{12}v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \cdot u + \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} \cdot v = a_{21}u + a_{22}v.$$

В разложении (2.5) отброшены все члены, начиная с квадратичных по u и v .

Полагая

$$u = u_0 e^{\lambda t}, \quad v = v_0 e^{\lambda t} \quad (2.6)$$

и подставляя эти решения в уравнения (2.5), получим

$$(a_{11} - \lambda)u_0 + a_{12}v_0 = 0, \quad a_{21}u_0 + (a_{22} - \lambda)v_0 = 0. \quad (2.7)$$

Нетривиальные решения для u_0 и v_0 существуют только в том случае, когда λ является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Решение квадратного уравнения (2.8) имеет вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} - 8a_{11}a_{22}}}{2}. \quad (2.9)$$

Введем обозначение для дискриминанта

$$D \equiv (a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} - 8a_{11}a_{22}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим возможные комбинации значения D и λ и соответствующие типы особых точек.

1. Дискриминант $D \geq 0$.

Оба корня λ действительны. При этом могут быть следующие случаи:

- а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Решение системы (2.5) представляется в виде убывающих экспонент, т.е. система, выведенная из положения равновесия, снова стремится к нему. Особая точка в этом случае называется устойчивым узлом (см. Рис. 2.2б).
- б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. – неустойчивый узел: при любых начальных отклонениях система удаляется от положения равновесия (Рис. 2.2г).

- в) Корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки – особая точка неустойчива и носит название седла (Рис. 2.2в). Через нее проходят только две интегральные кривые – сепаратрисы, остальные фазовые траектории уходят в бесконечность, минуя особую точку.

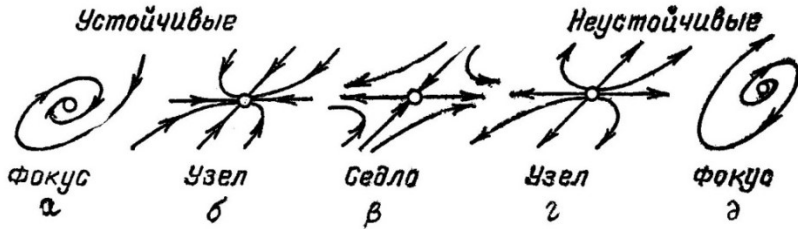


Рис. 2.2

- г) Случай, когда один из корней $\lambda_{1,2}$ равен нулю. В этом случае для линейной системы (2.5) имеется на фазовой плоскости (т.е. на плоскости состояний) прямая равновесных состояний, в которую упираются остальные интегральные прямые, направление движения по которым определяется знаком отличного от нуля корня. Исследование более высокого приближения показывает, что в нелинейной системе в этом случае могут существовать более сложные особые точки, такие, как седло – узел (см. Рис. 2.6г).

2. Дискриминант $D < 0$.

Корни комплексно-сопряженные, обозначим их $\lambda_{1,2} = \delta \pm j\omega$.

Возможны три случая:

- а) $\delta > 0$. В системе происходят затухающие колебания. На плоскости состояний это соответствует семейству спиралей, накручивающихся на особую точку. Это устойчи-

вый фокус (Рис. 2.2а).

- б) $\delta < 0$ – неустойчивый фокус, соответствующий нарастающим по амплитуде колебаниям (Рис. 2.2б).
- в) $\delta = 0$. В системе происходят незатухающие колебания; особая точка носит название центра. Фазовые траектории в этом случае – вложенные друг в друга окружности или эллипсы.

Значение параметра $\delta = 0$ является критическим, так как при переходе от положительных δ к отрицательным фазовый портрет качественно меняется (от устойчивого фокуса к неустойчивому). Это значение параметра δ называется бифуркационным.¹ Сама же система при $\delta = 0$ (так же как и в случае 1з) при обращении λ в нуль является по определению Андронова «негрубой» [36].

Считается, что математические модели только тогда хорошо описывают поведение реального физического, экономического, экологического и т.д. объекта, когда они «устойчивы» по отношению к малым изменениям вида дифференциальных уравнений, отражающим малые изменения параметров системы. Такие системы названы «грубыми» [36].

В организующихся и самоорганизующихся системах под влиянием внешних и внутренних (часто случайных) воздействий на параметры этих систем происходит изменение структуры; в результате этого на плоскости могут происходить бифуркации структур в одной и той же системе; некоторые возможные бифуркации приводятся ниже:

- 1) устойчивый узел – неустойчивый узел;
- 2) неустойчивый узел – устойчивый узел;

¹ bifurcus - латинское слово, означает «раздвоение», «разветвление», «разделение».

- 3) устойчивый узел – седло;
- 4) седло – устойчивый узел;
- 5) неустойчивый узел – седло;
- 6) седло – неустойчивый узел;
- 7) устойчивый фокус – устойчивый узел;
- 8) неустойчивый фокус – устойчивый узел;
- 9) устойчивый узел – устойчивый фокус;
- 10) неустойчивый узел – неустойчивый фокус;
- 11) устойчивый фокус – седло;
- 12) седло – устойчивый фокус;
- 13) неустойчивый фокус – седло;
- 14) седло – неустойчивый фокус;
- 15) центр – седло;
- 16) седло – центр;
- 17) центр – устойчивый узел;
- 18) устойчивый узел – центр;
- 19) неустойчивый фокус – центр;
- 20) центр – неустойчивый фокус.

Кроме приведенных 20 бифуркаций возможны и другие переходы, например бифуркация типа «вилки». В общем случае количество возможных бифуркаций также неограниченно, как неограниченно количество встречающихся динамических систем.

Для многомерных функций f вместо линеаризации (2.5) используется многомерная линеаризация применительно к функциональной матрице. Пусть функция $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ является непрерывной и дифференцируемой в точке $\Phi^*(x_1^*, \dots, x_n^*)$ по каждой из координат. Матрица размера $n \times m$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\Big|_{\Phi^*} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right\| \quad (2.1a)$$

называется функциональной матрицей функции f в точке Φ^* . В случае $m=n$ детерминант этой матрицы

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right) \quad (2.1б)$$

называется *функциональным детерминантом или якобианом* функции f в точке $\Phi^*(x_1^*, x_2^*)$.

Пример. Задана функция $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, где $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ и $f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$. Необходимо определить *якобиан*. Якобиан этого примера равен

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, x_2)}\Big|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} = 4((x_1^*)^2 + (x_2^*)^2).$$

Для иллюстрации использования вышеприведенного математического аппарата рассмотрим хорошо известную самоорганизующуюся модель антагонических популяций в экологии Вольтерра – Лотка «хищник – жертва».

Пример 2.1 Модель «хищник – жертва».

Пусть x – число кроликов (жертв), y – число лис (хищников) в момент времени t .

Тогда:

$$\text{если } y = 0, \text{ то } dx/dt = ax, \quad a > 0. \quad (2.11)$$

С другой стороны, не имея пищи, лисы будут вымирать:

$$\text{если } x = 0, \text{ то } dy/dt = -py, \quad p > 0. \quad (2.12)$$

Если же имеются и кролики, и лисы, то необходимо принять во внимание их взаимодействие. Предположим, что число съеденных кроликов пропорционально величине $xу$. Тогда необходимо добавить в (2.12) член пропорциональный $xу$, чтобы учесть увеличение числа лис при наличии пищи и вы-

чуть такой же член из (2.11), чтобы учесть съедаемых кроликов; в результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & a, b > 0, \\ \frac{dy}{dt} = cxy - py, & c, p > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Система уравнений (2.13), (2.14) не имеет точного решения. Эта система представляет собой конкретный вид обобщенной системы уравнений (2.3). Согласно вышеприведенной методике, разложим в ряд Тейлора правые части уравнений (2.13) и (2.14) вблизи точки равновесия $E=(p/c, a/b)$. Положим

$$u = x - \frac{p}{c} \quad \text{и} \quad v = y - \frac{a}{b}.$$

Тогда получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} = -\left(u + \frac{p}{c}\right)bv \quad (2.13a)$$

и

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} = cu\left(v + \frac{a}{b}\right). \quad (2.13b)$$

Запишем линейные части этих уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &\approx -\frac{bp}{c}v \\ \frac{dv}{dt} &\approx \frac{ac}{b}u. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Согласно теореме 2 рассмотрим эти уравнения как точные. Дифференцируя первое уравнение (2.15) и подставляя dv/dt из второго, получим

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -apu. \quad (2.16)$$

Согласно выражению (2.16) можно заключить, что во временной области явление самоорганизации характеризуется синусоидальными волнами.

Из уравнения (2.16) следует, что движение является пе-

риодическим, т.е. циклическим. Для периодического движения значение начального момента неважно, поэтому начнем с момента, когда $u=0$. Решение уравнения (2.16) имеет вид $u = A\sin(\sqrt{apt})$; из выражения (2.15) будем иметь $v = B\cos(\sqrt{apt})$. Таким образом, траектория есть эллипс

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} = 1. \quad (2.16a)$$

Следовательно, мы доказали, что вблизи точки равновесия E траектории суть периодические движения вокруг точки равновесия. В первом приближении эти траектории являются эллипсами с периодом обращения $2\pi/\sqrt{ap}$.

Для нахождения точных траекторий запишем для уравнений (2.13), (2.14) выражение (2.4):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(cx - p)}{x(a - by)}. \quad (2.17)$$

Из соотношения (2.17) следует

$$\frac{a - by}{y} \frac{dy}{dt} + \frac{p - cx}{x} = 0.$$

Интегрируя последнее соотношение по переменной x , будем иметь

$$alny - by + plnx - cx = lnk, \quad (2.18)$$

где lnk – постоянная интегрирования.

Потенцированием выражения (2.18) получим

$$k = \frac{x^p}{e^{cx}} \frac{y^a}{e^{by}}. \quad (2.19)$$

Поскольку значение начального момента времени неважно, т.е. k не зависит от времени, то

$$k = \frac{x_0^p}{e^{cx_0}} \frac{y_0^a}{e^{by_0}}. \quad (2.20)$$

Следовательно, мы нашли уравнения для траектории. Таким образом, если в выражении (2.19) мы зафиксируем

возможное значение x , то ему будет соответствовать два значения y , и, наоборот, всякому значению y соответствует два значения x . Следовательно, для модели самоорганизующейся системы мы получили замкнутую кривую (Рис.2.3).

Максимальное значение принимается переменной y при $x=p/c$ переменной x при $y=a/b$. Структура (фигура) на Рис.2.3 называется центром. Из выражений (2.13) и (2.14) можно определить направление движения. Из этих выражений следует, что $dx/dt > 0$, если и только если $y < a/b$. Поэтому на нижней половине траектории x увеличивается, а на верхней уменьшается. Таким образом, движение идет против часовой стрелки.

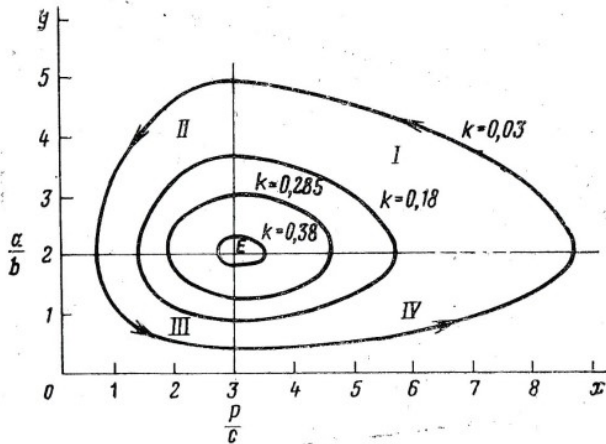


Рис.2.3

Траектории $\frac{x^p y^a}{e^{cx} e^{by}} = k$ при $a = 4, b = 2, c = 1, p = 3$

Обратимся теперь к модели «хищник–жертва», когда скорость изменения жертв (кроликов) положительна, т.е. $dx/dt > 0$, а скорость изменения хищников (лис) отрицательна, т.е. $dy/dt < 0$. В этом случае будем иметь следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & a, b > 0, \\ \frac{dy}{dt} = py - cxy, & p, c > 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\quad (2.22)$$

Точкой равновесия, как и прежде, будет $E(p/c, a/b)$. Следовательно, траектория начинающаяся с положительных значений x и y , будет всегда положительной. Главное отличие возникает при рассмотрении поведения в окрестности точки E . Если, вновь использовать аппроксимации (2.13а) и (2.13б) то получим

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{bp}{c}\right)v, \quad (2.23)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{ac}{b}\right)u. \quad (2.24)$$

Из уравнений (2.23), (2.24) следует

$$\frac{d^2u}{dt^2} = apu. \quad (2.25)$$

Решение уравнения (2.25) не является периодическим. наиболее общее решение этого уравнения запишется так $u = Ae^{st} + Be^{-st}$, где $s = \sqrt{ap}$. Продифференцировав это выражение и подставив результат в уравнения (2.23), (2.24), получим $v = -rAe^{st} + rBe^{-st}$, где $r = cs/bp$. Используя, полученные выражения u и v , будем иметь $u^2 - \left(\frac{v}{r}\right)^2 = 4AB$. Таким образом, траектории первого приближения являются гиперболы с центром в точке E .

Для получения более полной картины о траекториях используем соотношение (2.4) применительно к нашему случаю, т.е. к системе (2.21), (2.22)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(p - cx)}{x(a - by)}, \quad (2.26)$$

и, следовательно,

$$\frac{y^a}{e^{by}} = k \frac{x^p}{e^{cx}}, \quad k = \frac{y_0^a e^{cx_0}}{e^{by_0} x_0^p}. \quad (2.27)$$

Представляет интерес значение постоянной k в точке $E(p/c, a/b)$ т.е.

$$k = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^a e^{c\left(\frac{p}{c}\right)}}{e^{b\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{p}{c}\right)^p} \left(\frac{p}{c}\right)^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^a \left(\frac{c}{p}\right)^p e^{p-a}. \quad (2.28)$$

Траектории, проходящие через это значение k , показаны на Рис.2.4 жирными линиями.

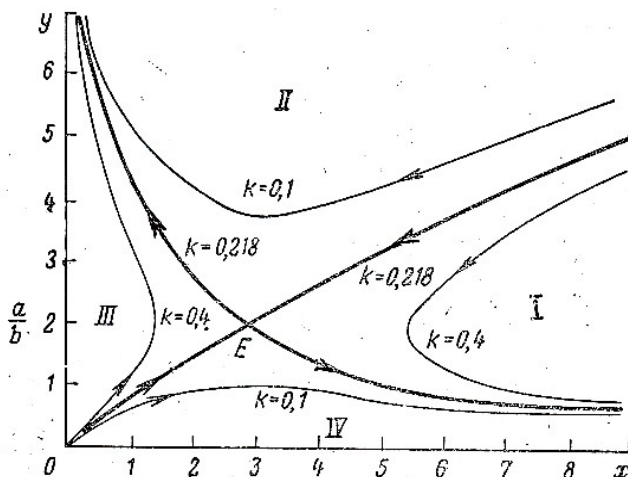


Рис. 2.4

Траектории $\frac{y^a}{e^{by}} = k \frac{x^p}{e^{cx}}$ для $a = 4, b = 2, c = 1, p = 3$

Поскольку эти траектории не могут пересекаться (E – есть точка-траектория), то остальные части кривых представляют четыре различных траектории. Рассматривая знак производной в выражениях (2.23), (2.24) мы обнаруживаем, что две из них асимптотически приближаются к E , а две другие асимпто-

чески удаляются от равновесия. Эти кривые делят положительный квадрант на четыре области. Если процесс начинается в одной из них, то он всегда в ней и остается. Форма траектории и направление движения определяются знаками при dy/dx и d^2y/dx^2 . Структура (фигура) на Рис.2.4 представляет собой «седло». Следовательно, нет никаких аналогий с Рис.2.3, поскольку в данном случае движение неперiodично, более того, «седло» является неустойчивой фигурой.

Интерпретация результатов модели (2.13), (2.14), приведена на Рис. 2.3. *Эта модель имеет циклическое поведение.* Цикл всегда начинается с положительного числа кроликов и лис и следует по замкнутой траектории. *Наблюдается циклический процесс, состоящий из четырех этапов:*

- 1) Кролики в избытке; число лис увеличивается, уменьшая число кроликов.
- 2) По мере того, как падает численность кроликов до $x=p/c$, лисы испытывают недостаток пищи и их число начинает уменьшаться. Кролики продолжают исчезать.
- 3) Когда число лис упадет до $y=a/b$, число кроликов начинает увеличиваться лисы продолжают вымирать.
- 4) Когда кролики достигнут численности $x=p/c$, лисы снова начинают размножаться до уровня $y=a/b$.

Затем снова наступает первая стадия. Тот факт, что траектории нигде не достигают осей координат, означает, что ни один из видов не может полностью исчезнуть. Таким образом, имеем **тип циклического равновесия для самоорганизующейся системы «хищник–жертва»**. В реальных, т.е. природных условиях существование антагонистической системы «хищник–жертва» представляет собой весьма нестабильное явление. Так, из вышесказанного следует, что изменение скорости одной из переменной может привести к вырождению этой системы. Сле-

довательно, реальные биогеоценозы, подверженные действию различного рода флуктуаций со стороны других биогеоценозов, влиянию климата, деятельности человека и т.д., являются хрупкими образованиями.

Независимо от первоначального количества лис и кроликов, среднее число кроликов составляет величину p/c , а среднее число лис составляет a/b . Следовательно, равновесие определяется механизмом обмена, заданным моделью (2.13), (2.14), а не начальными величинами. Начальные величины влияют только на пределы изменения численностей x и y . Чем дальше от равновесия начальное положение, тем шире размах.

На Рис. 2.3 изображены четыре замкнутые траектории для параметров: $a=4$, $b=2$, $c=1$, $p=3$. Точка равновесия есть $E(3,2)$. Для начальных состояний $(3;1,75)$, $(3;1,3)$, $(3,1)$ и $(3;0,5)$, отсчитываемых изнутри, изображены соответствующие кривые. Из вида этих кривых видно, что внутренняя траектория наиболее близка к эллипсу, тогда как остальные становятся все более «кривобокими». Для периода цикла T , решение уравнений в первом приближении дает следующее значение $T = 2\pi/\sqrt{ap} = 1,814$. Численные значения периодов цикла для остальных траекторий (с точностью до двух знаков после целого числа) равны: 1,84, 1,88, 2,04. Таким образом, хотя численности видов сильно меняются в зависимости от начальных количеств, длительность цикла не претерпевает существенных изменений.

Дадим интерпретацию результатов модели (2.21), (2.22), приведенных на Рис. 2.4. Эта модель не имеет циклический характер, т.е ее структура не относится к структуре типа «центр». Структурой модели (2.21) и (2.22) является «седло». В этой модели асимптотическое поведение аппроксимируется осями координат. Это означает, что хотя ни один вид не

вымирает за конечный промежуток времени, один из них исчезает асимптотически. Если учесть то обстоятельство, что на самом деле не может быть меньше одного животного, то практически это предсказывает возможность вымирания одного вида. Другой вид, наоборот, увеличивается до бесконечности. Хотя этот факт может быть принят за упрощение, поскольку в данной модели пренебрегают возможностью недостатка пищи.

На Рис. 2.4 также имеются четыре важные области, правда на сей раз они определяют результат на будущее.

Область I. Сначала имеется большое количество животных обоих видов. Это заставляет сокращаться оба вида (из-за большого числа убийств), пока численность хищника не дойдет до критического уровня $y=a/b$. Тогда первый вид начинает снова расти и имеет возможность полностью победить врага.

Область II. Подобна I, за исключением того, что критический уровень жертвы составляет величину $x=p/c$, в результате чего вымирает жертва.

Область III. Вначале имеется малое количество животных каждого вида и, значит, мало конфликтов. Поэтому численность каждого вида увеличивается, пока хищники не достигают критического уровня $y=a/b$. Тогда хищники начинают доминировать и в конечном счете уничтожают жертв.

Область IV. Подобна III, за исключением того, что критический уровень равен $x=p/c$ и вымирают хищники.

Такие поведения имеют исключения на границах областей, которые состоят из четырех конкретных траекторий, изображенных жирными линиями на рис. 2.4 и в самой точке E. Граница областей I и IV имеет ту общую для них особенность, что исчезают хищники, но увеличение жертв и уменьшение хищников происходит монотонно. Граница областей II и III

аналогична, только вымирают жертвы. Но если случится, что начальные численности обоих видов окажутся на границе областей I и II или III и IV, то их численности монотонно стремятся к равновесному положению E . В самой точке E изменений не происходит. Конечно, такая начальная комбинация обоих видов весьма маловероятна.

Из сопоставления результатов моделирования, произведенным согласно системам уравнений (1.13), (2.14) и (2.21), (2.22) следует, что устойчивой системе (1.13), (2.14) соответствует циклическое поведение популяции биогеоценозов. Следовательно, цикличность является прямым свидетельством существования явления самоорганизации в соответствующей системе.

Для иллюстрации некоторых задач, возникающих в самоорганизующихся системах, нами были рассмотрены математические модели с двумя неизвестными (2.3). Однако все рассмотрения с очевидными модификациями остаются справедливыми и в том случае, когда имеется n уравнений с n неизвестными

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.29)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Важное значение для исследования поведения динамических систем на плоскости состояний имеет понятие кривых, называемых *сепаратрисами*. Сепаратрисы проходят через неустойчивые точки, отделяя разные структуры (фигуры) друг от друга. Так, решение системы уравнений (1.13), (2.14) *сепаратриса* будет отделять от решения системы уравнений (2.21), (2.22). При решении системы уравнений (1.13), (2.14) предполагалось, что $dy/dt > 0$, а при решении системы уравнений (2.21), (2.22) было принято условие $dy/dt < 0$. Поэтому в данном случае,

уравнение сепаратрисы получим, если решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \frac{dy}{dt} \equiv 0 = cxy - py. \end{cases}$$

В общем случае, уравнение сепаратрисы, проведенной на плоскости состояний может иметь сложный вид. Для примера, иллюстрирующего расположение сепаратрисы на плоскости, приведен ее вид, показанный на Рис. 2.5

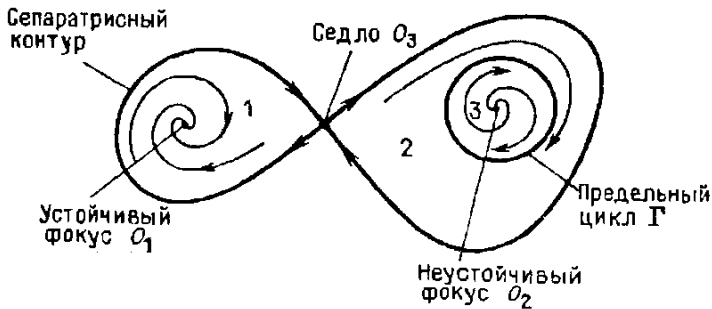


Рис.2.5

Предельные множества траекторий на фазовой плоскости: O_1 – фокус с областью притяжения 1, Γ – предельный цикл с областями притяжения 2 и 3.

На этом рисунке также показан *предельный цикл* Γ , на который изнутри и снаружи навиваются траектории движения динамической системы. Важными понятиями являются притягивающие предельные множества – *аттракторы*; предельный цикл Γ является аттрактором. Для конкретных видов функций $F(x,y)$ и $G(x,y)$ уравнения (2.3), могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + f(x) - y = 0, \\ \frac{dy}{dt} + g(y) + x = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Система (2.30) может быть преобразована в уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + g\left(\frac{dx}{dt} + f\right) + x = 0. \quad (2.31)$$

Для конкретных значений функций g и f , от уравнения (2.31) можно перейти к хорошо известным типам дифференциальных уравнений, а именно:

1. Если $f(x) = c$ и $g(y) = ky$ (c, k – постоянные), то мы получаем линейное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x + kc = 0. \quad (2.32)$$

2. Если $f(x) = -\mu x + (1/3)\mu x^3$ ($\mu = \text{constant}$) и $g(y) = 0$, то получаем уравнение Ван дер Поля

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2.33)$$

3. Если $f(x) = 0$ и $g(y) = -\alpha y + \beta y^3$ (α и β – постоянные), то получаем уравнение Рэлея

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left[\alpha - \beta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (2.34)$$

Уравнения (2.32) – (2.34) используются в различных задачах, возникающих в теории организующихся и самоорганизующихся систем, в качестве динамических моделей.

Если вместо системы (2.30) будем иметь систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y, \end{cases} \quad (2.30a)$$

то путем несложных преобразований системы получим линей-

ное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \frac{dx}{dt} + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})x = 0. \quad (2.32a)$$

Для различных значений $\alpha_{11} + \alpha_{22}$ и $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ решению уравнения (2.32a) будут соответствовать различные фигуры (Рис. 2.2) на плоскости состояния. В случае, если $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$ получим негрубую систему, называемую также структурно неустойчивой; если же $\alpha_{11} \neq -\alpha_{22}$ будем иметь грубую, т.е. структурно устойчивую систему.

Рассмотрим систему типа (2.3), состоящую из трех дифференциальных уравнений, т.е. в пространстве состояний

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z). \end{cases} \quad (2.35)$$

Рассмотрим разложение функций X , Y и Z в ряд Маклорена

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + X_2(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + Y_2(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + Z_2(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.36)$$

где X_2 , Y_2 и Z_2 — полиномы, содержащие члены порядка выше первого относительно x, y и z . Поскольку правые части уравнений (2.36) равны нулю для $x=y=z=0$, то начало координат является особой точкой. В окрестности этой особой точки мы можем рассматривать следующую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + a_2y + a_3z, \\ \frac{dy}{dt} = b_1x + b_2y + b_3z, \\ \frac{dz}{dt} = c_1x + c_2y + c_3z. \end{cases} \quad (2.37)$$

Решение системы (2.37) будем искать в виде

$$x = Ae^{\lambda t}, y = Be^{\lambda t}, z = Ce^{\lambda t}. \quad (2.38)$$

После подстановки решений (2.38) в (2.37), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)A + a_2B + a_3C = 0, \\ b_1A + (b_2 - \lambda)B + b_3C = 0, \\ c_1A + c_2B + (c_3 - \lambda)C = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Нетривиальное решение системы (2.39) для A , B и C существует только в том случае, когда λ является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - \lambda & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.40)$$

Для корней $\lambda_i (i=1,2,3)$ уравнения (2.40) общее решение системы (2.37) запишется в виде

$$\begin{cases} x = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} + A_3e^{\lambda_3 t}, \\ y = B_1e^{\lambda_1 t} + B_2e^{\lambda_2 t} + B_3e^{\lambda_3 t}, \\ z = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + C_3e^{\lambda_3 t}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Произвольные постоянные A , B и C находятся из начальных условий. Согласно Пуанкаре, типы особых точек уравнения (2.40) классифицируются в зависимости от вида корней λ характеристического уравнения (2.40).

1. Если все корни действительны и отрицательны, то особая точка является устойчивым узлом (Рис.2.6.а).
2. Если все корни действительны, но имеют разные знаки, то особая точка является седлом (Рис.2.6.б).

3. Если среди корней имеется один действительный, но отрицательный и два комплексно сопряженных корня, сумма которых имеет тот же знак, что и действительный (т.е. отрицательный) корень, то особая точка является устойчивым фокусом (2.6.в).
4. Если среди корней имеется один действительный и два комплексно сопряженных, сумма которых имеет знак, противоположный знаку действительного корня, то особая точка является седлом – фокусом (2.6.г).
5. Если два комплексно сопряженных корня чисто мнимые, то особая точка может быть центром (Рис.2.6.д), фокусом или седлом – фокусом.

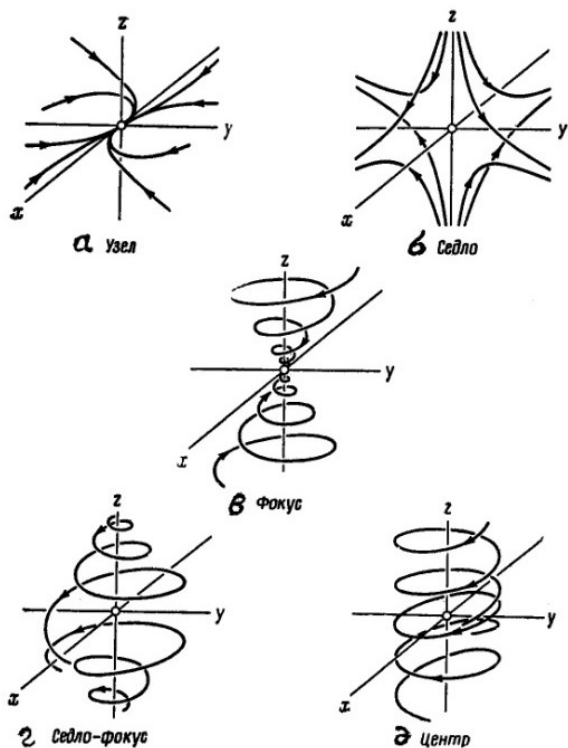


Рис. 2.6. Типы особых точек в пространстве состояний

Другие случаи возникновения особых точек в пространстве состояний показаны на рис. 2.7.

Следует отметить, что на плоскости состояний существующие аттракторы называют *регулярными*. Движение на них отвечает сложившимся представлениям об устойчивости детерминированных движений по Ляпунову.

Другой вид аттрактора, существующего только в пространстве размерности $N \geq 3$, был впервые обнаружен американским метеорологом Э. Лоренцем в 1963 году. Фазовые траектории этого аттрактора являются бесконечными нигде не пересекающимися линиями, причем при $t \rightarrow \infty$ траектории не покидают замкнутой области и не притягиваются к известным типам аттракторов. Эти аттракторы были названы *странными аттракторами*. Траектории странного аттрактора являются *устойчивыми по Пуассону*. Эти траектории со временем возвращаются в малую окрестность начального состояния. Таким образом, *регулярные аттракторы характеризуются асимптотической устойчивостью и по Ляпунову, и по Пуассону. Странные аттракторы устойчивы по Пуассону, но неустойчивы по Ляпунову*.

Странные аттракторы не являются многообразиями, а представляют собой прямое произведение многообразия на множества типа Кантора. Странный аттрактор индуцирует детерминированный хаос. Различные виды странных аттракторов рассмотрены в двенадцатой главе.

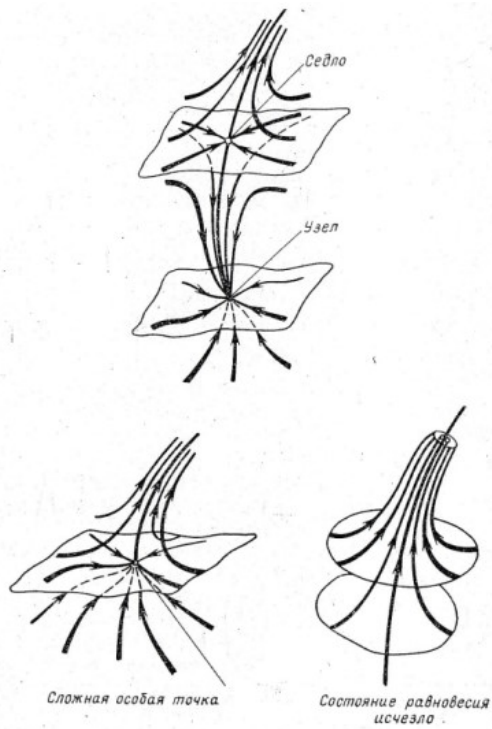
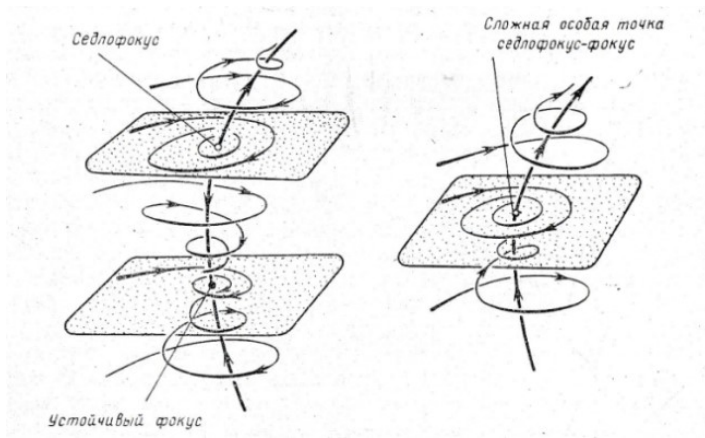


Рис. 2.7

Методы и приемы качественного исследования поведения динамических систем на плоскости получили существенное развитие [36]. В них имеются новые и обобщены уже известные подходы к проблемам математического описания динамических систем второго порядка. Однако, для динамических систем третьего порядка нет основополагающих исследований в пространстве состояний. Поэтому в настоящей главе приводятся известные результаты Пуанкаре, Бендиксона и Дюлака по поведению динамических систем на плоскости состояний.

Рассмотрим некоторые качественные методы исследования динамических моделей на плоскости. Пусть D – ограниченная область вместе со своей границей, лежащей на плоскости состояний и не содержащая особых точек системы (2.3). Тогда имеет место критерий Пуанкаре – Бендиксона: Если Γ траектория системы (2.3), которая в начальный момент времени $t=t_0$ выходит из точки, лежащей в области D , и остается в D при всех $t \geq t_0$, то траектория Γ либо сама является замкнутой траекторией, либо с течением времени она по спирали приближается к замкнутой траектории.

Сказанное можно проиллюстрировать с помощью Рис.2.8. Область D состоит из двух замкнутых кривых Γ_1 и Γ_2 и кольцевой области между ними. Поставим в соответствие каждой граничной точке области D вектор $V(x,y) = F(x,y)i + G(x,y)j$, где i, j – орты осей декартовых координат x и y соответственно. Тогда, если траектория Γ , выходящая в начальный момент времени $t=t_0$ из точки границы, входит в область D и остается там при всех $t \geq t_0$, то согласно критерию Пуанкаре–Бендиксона, траектория Γ будет по спирали приближаться к некоторой замкнутой траектории Γ_0 , лежащей в области D . При этом кривая Γ_0 должна окружать особую точку P , не лежащую в области D .

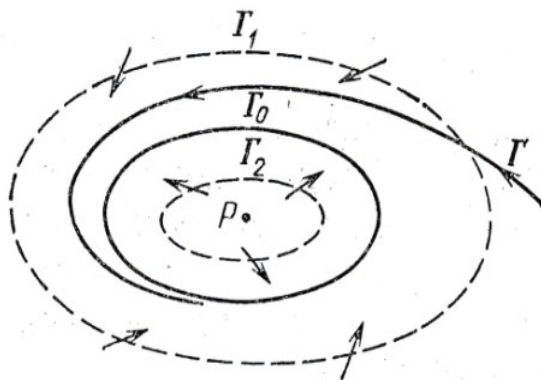


Рис. 2.8

Для систем вида (2.3) практическая реализация критерия Пуанкаре–Бендиксона встречает большие трудности, поскольку нет общих методов построения соответствующих областей. Поэтому успех зависит от вида системы, а также опыта исследователя. Однако необходимо иметь в виду, что отыскание признаков отсутствия предельных циклов не менее важная проблема, чем нахождение критериев (условий) их существования. *Признак Дюлака* в какой-то мере восполняет трудности критерия Пуанкаре–Бендиксона. Признак Дюлака: если существует непрерывная вместе с непрерывными частными производными функция $V(x,y)$ такая, что в некоторой односвязной области D фазовой плоскости функция

$$\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y}$$

является функцией знакоопределенной¹, то в области D нет предельных циклов динамической системы (2.3). При $V(x,y) \equiv 1$ признак Дюлака называют признаком Бендиксона.

Понятие *индекса особой точки* также может быть исполь-

¹ то есть определено положительной или определено отрицательной.

зовано при выяснении вопроса о существовании предельных циклов. Пусть Γ – простая замкнутая кривая (т.е. кривая без самопересечения), которая не обязательно является траекторией динамической системы (2.3), лежит в фазовой плоскости и не проходит через особые точки этой системы. Тогда если $P(x,y)$ – точка кривой Γ , то вектор

$$V(x,y) = F(x,y)i + G(x,y)j$$

будет ненулевым вектором и, следовательно, будет иметь определенное направление, заданное некоторым углом θ (Рис.2.9).

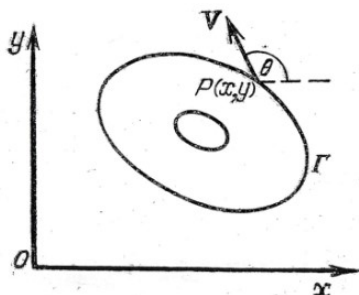


Рис.2.9

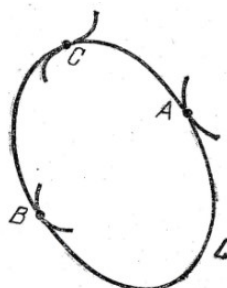


Рис.2.10

Если точка $P(x,y)$, двигаясь по кривой Γ , например, против хода часовой стрелки, совершит один оборот, то вектор V сделает при этом некоторое целое число оборотов, т.е. угол θ получит приращение $\Delta\theta = 2\pi n$ ($n = 0, 1, \pm 2, \dots$). Число n называют *индексом замкнутой кривой Γ (цикла Γ)*.

Если цикл Γ начать непрерывно стягивать так, чтобы он не проходил при деформации через особые точки заданного векторного поля, то индекс цикла должен, с одной стороны, меняться непрерывно, а с другой – всегда быть равным целому числу. Это означает, что при непрерывной деформации индекс цикла не меняется. Исходя из этого свойства, под *индексом*

особой точки понимают индекс простой замкнутой кривой, окружающей эту особую точку. *Индекс* имеет следующие свойства:

- а. индекс замкнутой траектории динамической системы (2.3) равен +1;
- б. индекс замкнутой кривой, окружающей несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек;
- в. Индекс замкнутой кривой, не окружающей ни одной особой точки, равен нулю.

Из сказанного следует, что поскольку индекс замкнутой траектории системы (2.3) всегда равен +1, то замкнутая траектория должна окружать либо одну особую точку с индексом +1, либо несколько таких точек, но обязательно с суммарным индексом, равным +1. Это обстоятельство часто используется при доказательстве отсутствия предельных циклов.

Индекс особой точки вычисляется согласно следующему выражению

$$n = 1 + \frac{e - h}{2}, \quad (2.42)$$

где e – число эллиптических секторов, а h – число гиперболических секторов. При практическом вычислении индекса особой точки можно использовать следующее простое правило. Пусть L – цикл, не проходящий через особые точки динамической системы (2.3) и такой, что любая из траекторий системы (2.3) имеет с кривой L не более конечного числа общих точек. При этом траектории могут пересекать кривую L или касаться ее. В случае касания учитываются (см. Рис.2.10) только внешние (типа A) и внутренние (типа B) точки касания. Касания же типа C , т.е. когда точка является точкой перегиба, во внимание не принимаются.

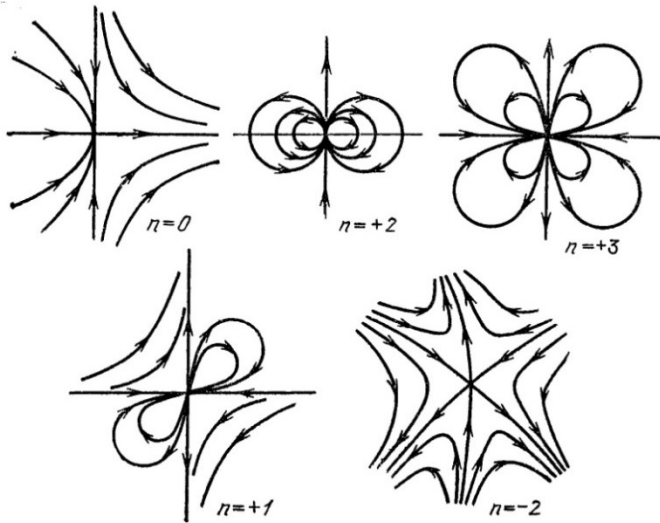


Рис. 2.11

Для вычисления индекса особой точки пользуются формулой (2.42), где уже e – число точек внутреннего касания, а h – число точек внешнего касания траектории системы (2.3) с циклом L .

На Рис 2.11 показаны особые точки с индексами, равными соответственно 0, +2, +3, +1, -2.

Следует отметить, что число и типы стационарных состояний ограничиваются геометрией плоскости состояний. Важный топологический результат, полученный Пуанкаре, накладывает ограничения на стационарные состояния в двумерных векторных полях. В практических ситуациях динамика системы ограничивается конечной связной областью плоскости состояний, и траектории на границе области направлены внутрь области. Если обозначить через N' , N'' и N''' число узлов, фокусов и седловых точек соответственно, то в двумерном случае, согласно теореме Пуанкаре об индексе, будем иметь выражение

$$N' + N'' + N''' = 1. \quad (2.43)$$

Выражение (2.43) возможно обобщить на пространства размерности больше двух.

Краткие комментарии ко второй главе

Приводится математический аппарат, существующий при исследовании и моделировании организующихся и самоорганизующихся систем.

Показано, что **цикличность модели динамической системы на плоскости состояний** (на примере системы хищник – жертва) является прямым свидетельством существования явления самоорганизации. Из приведенного материала следует, что *цикличность во временной области характеризуется синусоидальными волнами, имеющими определенный период, зависящий от параметров динамической модели.*

ГЛАВА 3

Математические основы образования организующихся и самоорганизующихся систем

Понятие оптимальности системы (физической, экологической, экономической, биологической и т.д.) возникает всякий раз, когда ее принцип функционирования формулируется как вариационный. И, наоборот, вариационный принцип непосредственно связан с понятием оптимальности. Оптимальность означает достижение некоторого результата (цели) ценою наименьшей затраты энергии, затраты минимального времени на достижение цели, наилучшим образом (в каком-то смысле) выполнение определенных функций и т.д. Так, для многих биологических систем оптимальность выражается в выполнении функции *устойчивого* развития. Общая формулировка закона движения механической системы дается принципом наименьшего *действия Гамильтона*, который утверждает, что *действительным движением реализующимся в природе, является то, для которого это действие принимает наименьшее значение*. Конкретными примерами вариационного принципа поведения системы являются: принцип Ферма в оптике, принцип Ле Шателье в термодинамике, правило Ленца в электродинамике и т.д.; число примеров действия вариационного принципа неограниченно. Исходя из этих соображений, автор полагает, что вариационный принцип позволит адекватно описать поведение организующихся и самоорганизующихся систем.

§3.1. Функция Лагранжа. Уравнения Гамильтона и Лиувилля

Рассмотрим различные эквивалентные формы уравнений движения динамической системы, которые можно получить друг из друга путем преобразования переменных. Одна из таких форм получается путем введения функции Лагранжа

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - U(q, t), \quad (3.1)$$

где q и $\dot{q} = p$ – векторы координат и скоростей по всем степеням свободы, T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия и все связи в потенциальной энергии предполагаются независимыми от времени. Уравнение движения Эйлера–Лагранжа¹ для каждой из координат имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.2)$$

Определим гамильтониан следующим образом

$$H^*(p, q, t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (3.3)$$

где H^* рассматривается как функция q и переменной p . Дифференциал выражения (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} dH^* &= \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &= \sum_i \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где уравнение Эйлера–Лагранжа (3.2) было учтено в третьей сумме выражения (3.4) справа. Уравнение (3.4) может быть удовлетворено только, если p_i определить из условия

¹ Уравнение Эйлера – Лагранжа (3.2) будет выведено ниже с позиции оптимизации

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} . \quad (3.5)$$

Таким образом, если (3.5) учесть в выражении (3.4), то приравнивая коэффициенты при дифференциалах, получаем уравнения движения динамической системы, содержащие только первые производные

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i} , \quad (3.6a)$$

$$\dot{q}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial p_i} , \quad (3.6б)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H^*}{\partial t} . \quad (3.7)$$

Переменные p и q называются обобщенными импульсами и координатами, а выражения (3.6) и (3.7) есть уравнение Гамильтона.

Важной характеристикой динамической системы являются скобки Пуассона

$$[u, v] = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right), \quad (3.8)$$

где u, v – произвольные функции канонических переменных. Если в качестве u выбрать координату q_i , а в качестве v гамильтониан H^* системы, то получим

$$[q_i, H^*] = \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H^*}{\partial p_k} - \frac{\partial H^*}{\partial q_k} \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial H^*}{\partial p_i} . \quad (3.9)$$

Сравнивая выражение (3.9) с уравнениями Гамильтона (3.6) получим

$$\dot{q}_i = [q_i, H^*], \quad (3.10)$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H^*]. \quad (3.11)$$

Используя уравнения Гамильтона, можно записать пол-

ную производную по времени от произвольной функции $\chi = \chi(q, p, t)$ в виде

$$\frac{d\chi}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \chi}{\partial q_i} \frac{\partial H^*}{\partial p_i} - \frac{\partial \chi}{\partial p_i} \frac{\partial H^*}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \chi}{\partial t} = [\chi, H^*] + \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (3.12)$$

При отсутствии явной зависимости χ от времени $\partial \chi / \partial t = 0$. Такие гамильтонианы называют автономными.

Пусть имеем некоторый ансамбль начальных условий, каждое из которых представляет возможное состояние системы. Представим вероятность ансамбля, или его плотность распределения в пространстве состояний в виде

$$\omega = \omega(p, q, t).$$

Если нормировать ω , то получим

$$\int \omega \prod_i dp_i dq_i = 1;$$

поскольку интегрирование распространяется на все пространство состояний, то согласно уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} (\omega \dot{p}_i) + \frac{\partial}{\partial q_i} (\omega \dot{q}_i) \right) = 0 \quad (3.13)$$

имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \omega}{\partial p_i} + \omega \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \omega}{\partial q_i} + \omega \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (3.14)$$

С учетом уравнений Гамильтона (3.6) второй и четвертый член в выражении (3.14) сокращаются, и мы получим уравнение Лиувилля

$$\sum_i \left(\dot{p}_i \frac{\partial \omega}{\partial p_i} + \dot{q}_i \frac{\partial \omega}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (3.15)$$

Теорема Лиувилля отражает тот факт, что фазовый объем начальной области обязательно сохраняется при движении динамической системы, хотя конфигурация этого объема может изменяться произвольно.

Во всех реальных системах происходит рассеяние энергии; изучение консервативных систем (для которых справедлива теорема Лиувилля) представляет интерес, во-первых из-за того, что является мощным инструментом анализа гамильтоновой динамики, и, во-вторых, как введение к последующему исследованию диссипативных систем, для которых, фазовый объем в пределе уменьшается до нуля.

Следует отметить, что из уравнений Гамильтона (3.6) вытекает уравнение Лиувилля (3.15), и, наоборот, из уравнения Лиувилля (3.15) могут быть получены уравнения Гамильтона (3.6). Такая взаимнооднозначная зависимость характерна для консервативных систем.

§3.2. Получение уравнения Эйлера–Лагранжа. Уравнение Якоби

Интервал $[a, b]$ изменения переменной x от $x=a$ до $x=b$ разделим на большое число малых равных интервалов, тогда мы получим некоторое множество значений абсцисс

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = b \quad (3.16)$$

и соответствующее множество ординат

$$y_0 = \alpha, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = \beta, \quad (3.17)$$

где

$$y_k = f(x_k). \quad (3.18)$$

Заменим проводную $f'(x_k)$ отношением приращений

$$z_k = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (3.19)$$

а интеграл $J = \int_a^b F(y, \dot{y}, x) dx$ заменим суммой

$$S = \sum_{k=0}^n F(y_k, z, x_k)(x_{k+1} - x_k). \quad (3.20)$$

Ошибка, возникающая в результате этих замен, стремится к нулю, когда все интервалы $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ стремятся к нулю.

Так как y_{k+1} и y_k различаются сколь угодно мало, то можно заменить $F(y_k, z_k, x_k)$ на $F(y_{k+1}, z_k, x_k)$. Тогда производная функции S будет иметь вид

$$S' = \sum_{j=0}^n F(y_{j+1}, z_j, x_j)(x_{j+1} - x_j). \quad (3.21)$$

При образовании частной производной S' по одной из переменных, например, y_{k+1} , следует иметь в виду, что y_{k+1} появляются в сумме S' в двух соседних членах при $j=k$ и $j=k+1$. Это видно из определения z_{k+1} в (3.19). Поэтому частная производная S' по y_{k+1} будет иметь вид

$$\frac{\partial S'}{\partial y_{k+1}} = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x=x_k} (x_{k+1} - x_k) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_k} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_{k+1}}. \quad (3.22)$$

После деления правой части выражения (3.22) на $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ соответствующее уравнение можно записать так:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x=x_k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (3.23)$$

Выражением (3.23) даются необходимые и достаточные условия стационарности суммы S' . Две крайние ординаты y_0 и y_{n+1} заданы и не варьируются. В том случае, если они были бы неизвестны, то нам бы потребовалось в дополнение к уравнениям (3.23) еще два граничных условия. При $\Delta x \rightarrow 0$ уравнение (3.23) переходит в дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (a \leq x \leq b), \quad (3.24)$$

полученное независимо друг от друга Эйлером и Лагранжем и носящее название уравнение Эйлера–Лагранжа.

Итак, решение уравнения (3.24) Эйлера–Лагранжа определяет функцию $y(x)$ для которой функционал

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} F(y, y', x) dx \quad (3.25)$$

экстремален, т.е. максимален или минимален, причем $F(y, y', x) \equiv L$ – функция Лагранжа. Следуя общей схеме преобразования Лежандра, произведем последовательно следующие три операции.

1. Введем «новые переменные», которые теперь называются импульсами и обозначаются через p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.26)$$

2. Введем новую функцию, назвав ее «полной энергией» и обозначив ее через H^*

$$H^* = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (3.27)$$

3. Выразим функцию H^* через новые переменные p_i решив уравнение (3.26) относительно \dot{q}_i и подставив их в (3.27). В результате получим

$$H^* = H^*(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t), \quad (3.28)$$

где H^* называется «функцией Гамильтона» (3.3). Общая схема преобразования выглядит таким образом [38]:

<i>Старая система</i>	<i>Новая система</i>
Функция Лагранжа L	Функция Гамильтона H^*
Переменные:	
Скорости	Импульсы
Пассивные Переменные:	
позиционные координаты	время
Дуальная природа преобразования отражается в следующих уравнениях	

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, & \dot{q}_i &= \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \\
L &= \sum p_i \dot{q}_i - H^*, & H^* &= \sum p_i \dot{q}_i - L, \\
L &= L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). & H^* &= H^*(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Следует отметить, что дифференциальное уравнение Эйлера–Лагранжа интегрируется для переменных в конечном виде лишь в исключительных случаях [39]. Этому уравнению удовлетворяет уравнение Риккати [40]. С помощью известной подстановки можно перейти от уравнения Риккати к некоторому линейному дифференциальному уравнению второго порядка. Уравнение Риккати запишем в виде

$$p + v' = \frac{(Q + v)^2}{R}. \tag{3.30}$$

Введем подстановку

$$\frac{Q + v}{R} = \frac{u'}{u}.$$

Определяя из последнего соотношения v , затем дифференцируя и подставляя v и v' в уравнение (3.30), получим для u уравнение

$$-(Ru')' + (P - Q')u = 0. \tag{3.31}$$

Выражение (3.31) носит название *уравнения Якоби*. Заметим, что уравнение Якоби (3.31) является уравнением Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dv} L_{u'} - L_u = 0 \tag{3.32}$$

для присоединенного функционала:

$$J^* = \int_a^b \{P\eta^2 + 2Q\eta' + R(\eta')^2\} dv, \tag{3.33}$$

т.е. некоторого квадратичного функционала от η . Следует также отметить, что уравнение Якоби (3.31) находится в тесной связи с уравнением Эйлера–Лагранжа (3.32) для исходного функционала

$$J(u) = \int_a^b L(u, u', v) dv. \quad (3.34)$$

Точнее, уравнение (3.31) представляет уравнение в вариациях по отношению к уравнению Эйлера – Лагранжа (3.32). Если в функционале (3.34) функция Лагранжа зависит от времени, то пределы интегрирования будут представлять соответствующие моменты времени t_1 и t_2 ; в случае, если вторая производная от $J(u)$ будет положительной, то мы получим знаменитый «принцип Гамильтона»

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Если учтем конкретные значения $R(v)$ и $P(v) - Q'(v)$ в уравнении Якоби (3.31), то получим различные динамические системы, используемые в качестве моделей в задачах организующихся и самоорганизующихся систем.

Так, если положим $R=1$ и $Q'-P \equiv c = const > 0$, то получим уравнение линейного осциллятора

$$u'' + cu = 0. \quad (3.35)$$

Решение уравнения (3.35) имеет вид

$$u = u_0 \sin(\sqrt{c}v),$$

где u_0 обозначает величину $u(v)$ при $v=0$. Если ввести обозначения

$$\frac{du'}{dv} = -cu \quad \text{и} \quad \frac{du}{dv} = u',$$

то уравнение фазовой траектории будет

$$\frac{du'}{du} = -c \frac{u}{u'}$$

Решение последнего дифференциального уравнения имеет вид

$$(u')^2 + cu^2 = \text{const.} \quad \text{или} \quad \frac{(u')^2}{c} + u^2 = \text{const.} \quad (3.36)$$

На плоскости (u, u') уравнению (3.36) соответствует семейство концентрических эллипсов, а на плоскости $(u, u'/c)$ – семейство концентрических окружностей. Особая точка называется центром.

В развернутом виде уравнение Якоби (3.31) запишется так:

$$R(v)u''(v) + R'(v)u'(v) + (Q'(v) - P(v))u(v) = 0. \quad (3.37)$$

Если в уравнении (3.37) положить $R'(v) \equiv -2v$, $Q' - P \equiv c(c+1)$, где $c = \text{const} > 0$, то в результате интегрирования $R'(v)$ получим $R(v) = -v^2 + v_0$; если постоянную интегрирования v_0 выберем равной единице, т.е. $v_0 = 1$, тогда получим дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра

$$(1 - v^2)u'' - 2vu' + c(c+1)u = 0. \quad (3.38)$$

С уравнением Якоби косвенно связано дифференциальное уравнение полиномов Чебышева

$$(1 - v^2)u'' - vu' + \sqrt{c}u = 0, \quad (3.39)$$

где $\sqrt{c} = \text{const}$.

Заменой $v = \cos(t)$ (при $|v| < 1$) уравнение (3.39) сводится к уравнению линейного осциллятора (3.35).

Таким образом, уравнение Якоби, вытекающее из уравнения Риккати, порождает ряд дифференциальных уравнений, играющих важную роль в теории оптимизации.

В ряде монографий [26,38] уравнение Эйлера–Лагранжа, записанное для диссипативной системы имеет вид

$$\frac{d}{dv} L_{u'} - L_u = M^T, \quad (3.40)$$

где $M(m)$ – вектор обобщенных сил. Вектор $M(m)$ находится из условия, что *работа*, производимая этими обобщенными силами, определяется криволинейным интегралом (зависящим от траектории движения, вдоль которой производится интегрирование)

$$W^* = \int_{m_0}^{m_f} M^T(m) dm. \quad (3.41)$$

Интеграл (3.41) не равен $\delta \int_{t_0}^{t_f} W^* dt$, т.е. не может быть выражен через вариацию интеграла от какой-либо скалярной функции. Поэтому формулировка вариационного принципа не сводится к обращению в нуль вариации какого-нибудь функционала, и, следовательно, не является вариационной.

Из дальнейшего изложения станет ясно, что *функция Лагранжа представляет собой солитон*, а солитон является диссипативной функцией. Поэтому вводить дополнительно обобщенные силы в уравнение (3.40), для обобщения уравнения Эйлера–Лагранжа на диссипативные системы, нет необходимости.

§3.3. Уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала, зависящего от параметра

Введем некоторый параметр α и произвольную функцию $\eta(x)$ такую, что

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (3.42)$$

где $\eta(x)$ имеет непрерывную вторую производную и равна нулю в конечных точках интервала (см. Рис.3.1), т.е.

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (3.43)$$

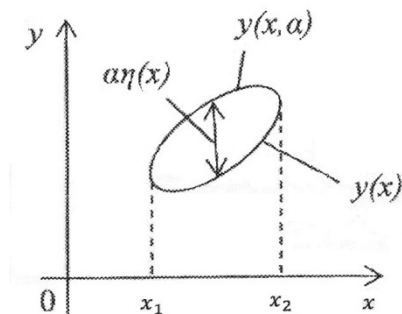


Рис. 3.1

Если в функционале (3.25) вместо $y(x)$ подставим $y(x, \alpha)$ то функционал J становится функцией параметра α :

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x, \alpha), y'(x, \alpha), x] dx. \quad (3.44)$$

Так как функция $y(x, \alpha)$ выбирается так, чтобы функционал $J(\alpha)$ был экстремален, то $J(\alpha)$ должен принимать экстремальное значение при $\alpha = 0$; поэтому условием экстремума будет

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (3.45)$$

Если функционал (3.44) разложим в ряд Тейлора в окрестности (y, y', x) , то будем иметь

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \left[F(y, y', x) + \frac{\partial f}{\partial y} \alpha \eta + \alpha \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \dots + \text{Члены с } \alpha^2, \alpha^3, \dots \right] dx. \quad (3.46)$$

Дифференцируя (3.46) по α и устремляя α к нулю, так чтобы члены более высоких степеней исчезли, получим

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (3.47)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (3.47) интегрируем по частям:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'(x) \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (3.48)$$

Первый член выражения (3.48) тождественно равен нулю, поскольку функция $\eta(x)$ в обеих предельных точках (см. Рис. 3.1) равна нулю. Решая совместно уравнения (3.47) и (3.48), получим

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0. \quad (3.49)$$

Поскольку $\eta(x)$ является произвольно выбранной функцией, то коэффициент при ней в правой части выражения (3.49) должен быть равен нулю

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Выражение (3.50), как было отмечено выше, называется уравнением Эйлера–Лагранжа. Решение уравнения (3.50) опре-

деляет функцию $y(x)$ для которой функционал (3.25) экстремален. Из условий оптимальности хорошо известно, что если

$$\left. \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} < 0.$$

то имеет место максимум, если же $\left. \frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} > 0$. то имеет место минимум функционала (3.44).

Если приравнять нулю вторую производную от функционала (3.46), то можно показать, что при $\alpha \rightarrow 0$ полученные выше условия будут достаточны если потребовать, чтобы

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \right) \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0. \quad (3.51)$$

Если функционал (3.25) явно зависит и от y'' т.е. $f=f(y, y', y'', x)$, то в уравнении Эйлера–Лагранжа появляется еще один член

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0. \quad (3.52)$$

Если f является явной функцией n независимых переменных y_k и их первых производных y_k' , то уравнение Эйлера–Лагранжа (3.50) можно записать в более общем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.53)$$

где $f = f(y_1, \dots, y, y_1', \dots, y', x)$.

Если функционал

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3', x) dx$$

должен иметь экстремальное значение при условии $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$, то можно показать [25], что уравнение, которое необходимо решить для этого случая, имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_k'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_k} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.54)$$

и

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

где λ – множитель Лагранжа.

Уравнение (3.54) должно быть решено относительно четырех переменных $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $\lambda(x)$.

Поскольку функционал

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$

должен иметь экстремальное значение при условии

$$H^* = \int_{x_1}^{x_2} g(y, y', x) dx = c = const, \quad (3.55)$$

то уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.56)$$

Решая уравнения (3.55) и (3.56), можно получить функцию $y(x)$ и произвольную постоянную λ .

Следует отметить, что уравнение Эйлера–Лагранжа вида (3.54) часто встречается при постановке и решении прикладных задач [26,41]; в этих монографиях член $\partial \varphi / \partial y_k$ соответствует компоненте вектора $M(m)$ обобщенных сил (см. выражение (3.40)).

§3.4. Уравнение Риккати.

Получение многомерного уравнения Риккати.

Примеры использования уравнения Риккати

3.4.1. Уравнение Риккати

Общее скалярное уравнение Риккати имеет вид

$$\frac{dR}{dt} = A(t)R + \Lambda(t)R^2 + Q(t), \quad (3.57)$$

где A , Λ , Q – непрерывные функции от t при изменении t в интервале $a < t < b$ ($a \geq -\infty$, $b \leq \infty$). При $Q(t) = 0$ мы называем выражение (3.57) уравнением Риккати.

Решение уравнения (3.57), вообще говоря, не может быть выражено в квадратурах. Сводка некоторых важных свойств уравнения Риккати рассмотрена в монографии [42]. В природе, обществе (живой и неживой материи) часто встречается скалярное уравнение Риккати с постоянными коэффициентами.

3.4.2. Получение многомерного уравнения Риккати

Обратимся к получению уравнения Риккати в многомерном случае. Смещение радиуса-вектора вдоль траектории уравнения Риккати в трехмерном пространстве, дает единичный вектор \mathbf{t} касательный к траектории

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} = \mathbf{t},$$

где $\mathbf{X}(s, t)$ радиус-вектор точки траектории, а s – длина, измеренная вдоль траектории. Таким образом, вид траектории, описываемой уравнением Риккати, дается выражением

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{a} \mathbf{a} \mathbf{b},$$

где \mathbf{a} – кривизна траектории.

Касательный вектор \mathbf{t} и ортогональные к нему векторы \mathbf{n} и \mathbf{b} ($\mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}$) удовлетворяют уравнениям Серре-Френе:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_s = \alpha \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}_s = \tau \mathbf{b} - \alpha \mathbf{t}, \\ \mathbf{b}_s = -\tau \mathbf{n}, \end{cases} \quad (3.57a)$$

где τ кручение траектории, а s - означает дифференцирование по длине траектории. Следовательно, если α и τ заданы в каждой точке траектории, то ее форма определяется единственным образом.

Рассмотрим траекторию уравнения Риккати в трехмерной прямоугольной системе координат, ориентированной так, чтобы невозмущенные части траектории совпадали с вертикальной осью z . Три единичных вектора представимы в виде

$$\begin{cases} \mathbf{t} = i\mathbf{t}_1 + j\mathbf{t}_2 + k\mathbf{t}_3, \\ \mathbf{n} = i\mathbf{n}_1 + j\mathbf{n}_2 + k\mathbf{n}_3, \\ \mathbf{b} = i\mathbf{b}_1 + j\mathbf{b}_2 + k\mathbf{b}_3. \end{cases} \quad (3.58a)$$

Поскольку $\mathbf{X}_s = \mathbf{t}$, имеем

$$x = \int^s t_1 ds, \quad y = \int^s t_2 ds, \quad z = \int^s t_3 ds. \quad (3.59a)$$

Начало координат можно выбрать произвольно. Компоненты касательного вектора определяются из решения системы уравнений Серре-Френе (3.57a) при условиях $t_i \rightarrow 1$ когда $s \rightarrow \pm\infty$. Векторные дифференциальные уравнения (3.57a) эквивалентны трем взаимнонезависимым скалярным уравнениям

$$\begin{cases} t_{is} = \alpha n_i, \\ n_{is} = \tau b_i - \alpha t_i, \\ b_{is} = -\tau n_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.57b)$$

Каждая из этих систем имеет первый интеграл $t_i^2 + n_i^2 + b_i^2 = 1$.

Для того, чтобы из уравнений Серре-Френе получить уравнение Риккати, первые интегралы запишем в виде

$$(t + jn)(t - jn) = (1 - b)(1 + b),^1 \quad (3.57\text{в})$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Если с учетом соотношения (3.57в) ввести функции φ и χ с помощью определений

$$\varphi = \frac{t + jn}{1 - b} = \frac{1 + b}{t - jn}, \quad (3.57\text{г})$$

$$-\frac{1}{\chi} \equiv \varphi^* = \frac{t - jn}{1 - b} = \frac{1 + b}{t + jn}, \quad (3.57\text{д})$$

то можно выразить t , n и b через φ и χ . Из соотношений (3.57 г) и (3.57д) имеем

$$\begin{aligned} t &= \frac{1 - \varphi\chi}{\varphi - \chi}, \quad n = j \frac{1 + \varphi\chi}{\varphi - \chi}, \quad b \\ &= \frac{\varphi + \chi}{\varphi - \chi}. \end{aligned} \quad (3.57\text{е})$$

Определим теперь дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции φ и χ . Они эквивалентны уравнениям Серре–Френе (3.57б). Дифференцирование соотношения (3.57з) по s с учетом уравнений (3.57б) дает

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \frac{t_s + jn_s}{1 - b} + \frac{t + jn}{(1 - b)^2} b_s = \frac{\varkappa n - j\varpi t + j\tau b}{1 - b} - \frac{\tau n}{1 - b} \varphi = \\ &= -j\varpi + \frac{\tau(jb - \varphi n)}{1 - b}. \end{aligned} \quad (3.57\text{ж})$$

Из (3.57з) также можно получить

$$\begin{aligned} n\varphi &= \frac{1}{2}j[1 + b - \varphi^2(1 \\ &\quad - b)]. \end{aligned} \quad (3.57\text{з})$$

Исключая n из (3.57 ж) находим, что b также исключается, и мы приходим к уравнению Риккати, записанному для одной компоненты траектории этого уравнения в трехмерном пространстве

¹индекс i в последующих преобразованиях излишен и будет опускаться.

$$\varphi_s + j\alpha + \frac{1}{2}j\tau(1 - \varphi^2) = 0.$$

Следует отметить, что χ также удовлетворяет скалярному уравнению Риккати.

3.4.3. Примеры использования уравнения Риккати

Случай 1. Система измерения.

Для системы измерения (1.16)

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + \xi, \\ y = x + \zeta, \end{cases} \quad (3.58)$$

скалярное уравнение Риккати

$$\dot{V} = -2aV - \lambda^{-1}V^2 + q, \quad V(0) = V_0 \quad (3.59)$$

определяет минимальную в среднеквадратическом смысле дисперсию (1.17).

Из сопоставления уравнения Риккати (1.18) с солитоном (1.20) следует, что правая часть уравнения (1.23) равна солитону (1.20), т.е.

$$-2aV - \lambda^{-1}V^2 + q = -A \operatorname{sech}^2(\beta t - \phi). \quad (3.60)$$

Поскольку разность между кинетической и потенциальной энергией системы есть функция Лагранжа (3.1), то правая часть уравнения Риккати (3.59) (при $a < 0$) является функцией Лагранжа, взятой с обратным знаком. Соотношение (3.60) же показывает, что функция Лагранжа представляет собой квадрат гиперболического секанса, т.е. является солитонной функцией.

Случай 2. Возникновение уравнения Риккати при выводе уравнения Шредингера.

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y_x + uy = nz, \\ z_x - uz = -ny. \end{cases} \quad (3.61)$$

Если первое и второе уравнение (3.61) умножим соответственно на z и y и вычтем одно из другого, то после деления на z^2 , получим уравнение Риккати

$$R_x + 2uR = n(1 + R^2), \quad (3.62)$$

где $R \equiv y/z$.

Если $u = \text{const}$ и $n = \text{const}$, то будем иметь скалярное уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$R_x + 2uR - nR^2 - n = 0, \quad (3.63)$$

Следует отметить, что система уравнений (3.61) эквивалентна уравнению Шредингера [42].

Случай 3. Расщепление белково-нуклеинового комплекса.

На Рис. 3.2 схематически изображен процесс расщепления. Точка O – место расщепления материнской биспирали 1; в процессе редупликации эта точка движется вправо;

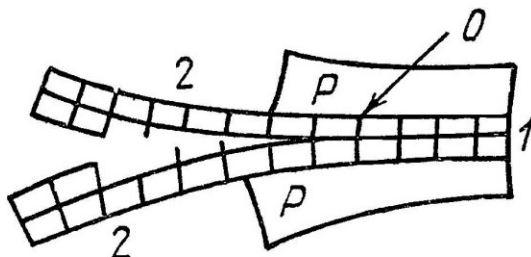


Рис. 3.2

P – белковая оболочка, принимающая участие в образовании дочерних полимеров 2, на которых происходит синтез комплементарных полимеров.

Математическая модель расщепления белково-нуклеинового комплекса т.е. первичного жизненного цикла, описывается уравнениями [43]

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \mu - aXY - bX, \\ \frac{dY}{dt} = aXY - \frac{cY}{K+Y}, \end{cases} \quad (3.64)$$

где X – субстрат реакции – свободные нуклеотиды вдали от места расщепления имеют постоянную концентрацию X_0 ; вблизи от точки (места) расщепления концентрация X свободных нуклеотидов удовлетворяет неравенству $X < X_0$; $\mu = bX_0$; – отток непрореагирующего субстрата равен $-bX$; Y – число (концентрация) нуклеотидов, присоединившихся к дочерним биспиралям; скорость присоединения (перехода) X к Y принимается пропорциональной концентрации субстрата X и предполагается, что эта скорость зависит от белковой оболочки; принимается, что скорость присоединения новых нуклеотидов растет с увеличением числа уже присоединившихся; принимается также, что эта скорость пропорциональна Y ; тогда прирост Y (или убыль X) можно описать членом aXY . Отток u из сферы реакции (на дочерних полимерах) будет постоянным, если все нуклеотиды насыщены и будет пропорционален Y , когда последний мал, т.е. описывается функцией $\frac{cY}{K+Y}$.

Определим теперь особые точки системы (3.64). Одна из них (тривиальная) соответствует случаю отсутствия синтеза

$$Y_1 = 0, \quad X_1 = \mu/b = X_0. \quad (3.65)$$

Координаты второй точки

$$Y_2 = \frac{\mu(Ka - cb)}{a(c - \mu)}, \quad X_2 = \frac{c - \mu}{aK - b}. \quad (3.65a)$$

Линеаризацию системы (3.64) производим в особой точке (3.65) путем разложения функций $\mu - aXY - bX$ и $aXY - \frac{cY}{K+Y}$ в ряды Тейлора с учетом теоремы 2 (Глава 2). В результате линеа-

ризации системы (3.64) в особой точке (3.65) получим характеристическое уравнение

$$(z + b)(z + q) = 0, \quad (3.66)$$

где $q = \frac{c}{K} - \frac{a\mu}{b}$.

Уравнение (3.66) записано для установившегося (стационарного) состояния; оно соответствует статическому поведению динамической системы (3.64).

Динамическое поведение системы получим, если от алгебраического характеристического уравнения (3.66) перейдем к соответствующему динамическому уравнению

$$\frac{dz}{dt} = (z + b)(z + q).$$

Последнее выражение в развернутом виде запишется как уравнение Риккати

$$\frac{dz}{dt} = \varphi z + z^2 + \psi, \quad z_0 = z(0), \quad (3.67)$$

где $\varphi = b + q$, $\psi = bq$.

Случай 4. Лазерное излучение.

Инверсия D определяется как разность между заселенностями верхнего N_2 и нижнего N_1 состояний атома

$$D = N_2 - N_1.$$

Согласно теории [5], скорость производства фотонов определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = W D n \\ - 2\alpha n, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где \dot{n} – скорость производства фотонов,

W – константа скорости производства фотонов,

$2\alpha n$ – учитывает вылет фотонов сквозь зеркала, уменьшающий эффективное производство фотонов,

n – число фотонов,

α – постоянная затухания излучения.

Скорость изменения заселенности определяется выражением

$$\frac{dD}{dt} = \frac{D_0 - D}{T} - 2WDn, \quad (3.69)$$

где D_0 – инверсия, порожденная процессом накачки и процессами релаксации, не приводящими к испусканию света лазером, T – время, за которое любое отклонение инверсии заселенности релаксирует к инверсии D_0 , $2WD$ – определяет член, связанный с лазерным процессом, в котором порождаются фотоны. В общем случае постоянная затухания α во много раз меньше константы скорости $1/T$. Это позволяет применить адиабатическое приближение к выражению (3.69):

$$\frac{dD}{dt} \approx 0. \quad (3.70)$$

С учетом (3.70) в (3.69) будем иметь

$$D = \frac{D_0}{1 + 2TWn}.$$

В том случае, когда лазер находится близко от порога режима генерации, можно разложить знаменатель в степенной ряд по числу фотонов n и, сохраняя только главные члены, получить приближенную формулу

$$D \approx d_0 - 2D_0TWn,$$

где d_0 – заданная инверсия, создаваемая интенсивностью накачки, с которой возбуждаются атомы и процессами некогерентной релаксации. Подставляя значение D из последнего выражения в формулу (3.68), получим результат, который может быть преобразован к виду

$$\frac{dn}{dt} = (WD_0 - 2\alpha)n - 2TW^2D_0n^2. \quad (3.71)$$

В уравнении (3.71) введем обозначения $WD_0 - 2\alpha \equiv 2a$ и $2TW^2D_0 \equiv \lambda^{-1}$, тогда выражению (3.71) можно придать хорошо известную форму уравнения Риккати

$$\frac{dn}{dt} = 2an - \lambda^{-1}n^2. \quad (3.71a)$$

Режим генерации лазером фотонов требует выполнения неравенства

$$WD_0 - 2\alpha > 0.$$

Случай 5. Скорость химической реакции.

Скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентрации веществ, участвующих в данный момент в реакции (закон действующих масс [44]). Два жидких химических вещества A и B объемом 10 и 20 литров соответственно; в процессе химической реакции образуется новое жидкое химическое вещество C . Считается, что температура в процессе реакции не меняется, а также то, что из каждых двух объемов вещества A и одного объема вещества B образуется три объема вещества C ; необходимо определить количество вещества C в произвольный момент времени t , если за 20 минут его образуется 6 литров. Обозначим через x объем (в литрах) вещества C , образовавшегося к моменту времени t (в часах). Тогда из условия задачи следует, что к этому моменту времени в химическую реакцию вступило $2x/3$ литров вещества A и $x/3$ литров вещества B . Последнее означает, что к указанному моменту осталось $10 - 2x/3$ литров вещества A и $20x/3$ литров вещества B . Следовательно, в соответствии с законом действующих масс приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = K \left(10 - \frac{2x}{3}\right) \left(20 - \frac{x}{3}\right),$$

которое можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = k(15 - x)(60 - x), \quad (3.72)$$

где $k = 2K/9 = const$.

Поскольку в начальный момент времени $t=0$ вещества C еще не было, то следует считать, что в этот момент времени $x=0$; в момент времени $t=1/3$ имеем $x=6$.

Выражению (3.72) соответствует уравнение Риккати

$$\frac{dx}{dt} = -75kx + kx^2 + 900k. \quad (3.73)$$

Случай 6. Распространение информации.

Пусть N – число получателей сообщения. При достаточной степени сенсационности сообщения и плотности коммуникаций информация распространяется среди населения в виде молвы («из уст в уста»). Процесс распространения подобен цепной реакции и описывается уравнением Риккати [45]:

$$\frac{dN}{dt} = r_m \left(1 - \frac{N}{K}\right) N, \quad N(t) = N_0, \quad \text{при } t = 0, \quad (3.74)$$

где $t=0$ соответствует моменту, «выброса» информации; K – общее число потенциальных получателей сообщения; N_0 – число свидетелей сенсационного сообщения. Оно зависит от финансовых возможностей источника сообщения.

Предполагается, что коэффициент в уравнении (3.74) определяется по формуле

$$r_m = \beta p(a - b),$$

где p – «коммуникационная плотность» (удельное наличие средств коммуникации на душу населения); a – доля объектов целевой аудитории, воспринимающих сообщение как сенсационное; b – доля объектов в целевой аудитории, не придающих ему значения; β – коэффициент согласия, определяемый путем социологических исследований. Тогда aN – число объектов в целевой аудитории, воспринимающих сообщение как сенсаци-

онное, bN – число объектов в целевой аудитории, непридающих ему (сообщению) значения. Если $a > b$, то сообщение считается сенсационным.

Случай 7. Эффективность рекламы [44].

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция B , о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей знает лишь x покупателей. С большой степенью достоверности можно считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции B пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще незнающих. Если условится, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало N/γ человек, то приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \quad (3.75)$$

с начальным условием

$$x_0 = N/\gamma \text{ при } t = 0, \quad (3.76)$$

где k – положительный коэффициент пропорциональности. Выражение (3.75) является уравнением Риккати.

Случай 8. Рост соперничающей популяции.

Пусть n – число индивидуумов в популяции бактерий определенного вида. Каждая особь может умереть с вероятностью α и образовать новую особь за счет деления с вероятностью β за единичное время; α и β полагают фиксированными и независимыми от возраста особи. Соперничество приводит к дополнительной смертности; вероятность гибели особи $\gamma(n-1)$ пропорциональна имеющемуся количеству других особей. В макроскопическом уравнении для скорости можно заменить $n-1$ на n :

$$\dot{n} = (\beta - \alpha)n - \gamma n^2. \quad (3.77)$$

Уравнение (3.77) Риккати носит название уравнения Мальтуса–Ферхюльста. Уравнение (3.77) также называют уравнением Пирла–Ферхюльста [46].

Случай 9. Дуализм между детерминированными и стохастическими дифференциальными уравнениями [47], порождающий уравнение Риккати.

Пусть дана система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -a^*x - bx^2y + \frac{c}{y}, \quad x_0 = x(0), \quad (3.78)$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky - mxy^2 + \frac{n}{x}, \quad y_0 = y(0), \quad (3.79)$$

где a^* , b , c , k , m , n – постоянные.

Введем обозначение

$$z = xy, \quad z_0 = x_0y_0 = z(0). \quad (3.80)$$

Согласно обозначению (3.80) имеем

$$\frac{dz}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}. \quad (3.81)$$

С учетом уравнений (3.78) и (3.79), а также обозначения (3.80) из соотношения (3.81) получим

$$\frac{dz}{dt} = -rz - sz^2 + q, \quad z_0 = z(0), \quad (3.82)$$

где $r = a^* + k$, $s = b + m$, $q = n + c$.

Выражение (3.82) является уравнением Риккати. Уравнению Риккати (3.82) соответствует виртуальная стохастическая система уравнений (1.16). Следовательно, в данном случае уравнение Риккати (3.82) выступает в качестве «посредника» между детерминированными уравнениями (3.78) и (3.79) и системой стохастических уравнений (1.16).

Случай 10. Моделирование уравнением Риккати эффекта «тесноты».

Эта модель учитывает взаимное влияние клеток друг на друга. Эффект «тесноты» выражается в том, что каждой клетке тем хуже, чем ближе к ней другие клетки, т.е. чем больше концентрация биомассы [43]. Поэтому член, описывающий убыль концентрации биомассы, должен быть пропорционален x^2 :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \gamma x^2, \quad (3.83)$$

где μ и γ постоянные.

Случай 11. Уравнение Риккати в качестве модели, описывающей число съеденных жертв антагонических популяций [48].

Хорошо известная модель биологической популяции хищник – жертва (см. вторую главу) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & a, b > 0, \\ \frac{dy}{dt} = cxy - py, & c, p > 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

$$\quad (3.85)$$

где x – число жертв, y – число хищников в момент времени t ; a , b , c , p – постоянные положительные коэффициенты. В начальный момент времени $t = 0$, число жертв будет $x = x_0 > 0$, а число хищников будет $y = y_0 > 0$. Динамическая модель (3.84), (3.85) устойчива. На плоскости xoy ей соответствует фигура типа эллипса. Предположим, что в этой модели скорость изменения количества хищников является отрицательной переменной, т.е. $dy/dt < 0$. Тогда вместо системы (3.84), (3.85) будем иметь систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy, & a, b > 0, \\ \frac{dy}{dt} = py - cxy, & p, c > 0 \end{cases} \quad (3.84')$$

$$\quad (3.86')$$

Уравнения (3.84) и (3.84') идентичны; однако (3.84) принадлежит устойчивой системе, а (3.84') – к неустойчивой системе.

Системе (3.84'), (3.86') на плоскости xoy соответствует также фигура второго порядка типа «седло». Следовательно, если скорость изменения количества хищников изменяется с положительной величины на отрицательную, система (3.84), (3.85) претерпевает бифуркацию и мы получаем новую систему (3.84'), (3.86'), которая неустойчива на плоскости xoy . Представляет интерес как будут вести себя антагонистические популяции. В известных моделях (3.84), (3.85) и (3.84'), (3.86') число съеденных жертв пропорционально величине $xу$. Обозначим эту величину через $z=xу$. Скорость изменения съеденных жертв z находится из соотношения [48]

$$\frac{dz}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}. \quad (3.87)$$

Если из (3.86') вместо dy/dt взять $py-cxy$, а из (3.84') взять вместо dx/dt переменную $ax-bxy$ и подставить их в соотношение (3.87), то получим

$$\frac{dz}{dt} = x(py - cxy) + y(ax - bxy). \quad (3.88)$$

Аналогично, если вместо dy/dt взять $cxy-py$ из (3.85), а вместо dx/dt взять $ax-bxy$ из (3.84) и подставить их в соотношение (3.87), то будем иметь

$$\frac{dz}{dt} = x(cxy - py) + y(ax - bxy). \quad (3.89)$$

Складывая (3.88) и (3.89) получим

$$\frac{dz}{dt} = az - bzy. \quad (3.90)$$

Решая уравнение (3.90), определим количество хищников

$$y = \frac{1}{b} [a - (\ln z)'_t]. \quad (3.91)$$

Раскрывая скобки в уравнении (3.89) будем иметь

$$\frac{dz}{dt} = cx^2y - pxy + axy - bxy^2. \quad (3.89a)$$

Подстановка в уравнение (3.89a) значения y , определенного формулой (3.91) с учетом соотношения

$$x = z/y, \quad (3.91a)$$

позволяет получить следующее уравнение

$$\frac{dz}{dt} = -pz + az + \frac{bc}{a - (\ln z)'_t} - [a - (\ln z)'_t]z.$$

Простые преобразования в последнем выражении приводят к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = -pz + \frac{bc}{a - (\ln z)'_t} + (\ln z)'_t z. \quad (3.92)$$

В дальнейшем предполагается, что темп \dot{z}/z изменения функции z (съеденных жертв) является постоянной величиной, т.е. $\dot{z}/z = q = \text{const}$.

Учитывая это обстоятельство в уравнении (3.92), получим скалярное уравнение Риккати для съеденных жертв

$$\frac{dz}{dt} = -pz + \lambda^* z^2 + qz, \quad (3.93)$$

где $\lambda^* = \frac{bc}{a - q}$, $z_0 = x_0 y_0 = z(0)$.

Необходимо отметить, что постоянство темпа \dot{z}/z связано с понятием показательной функции $z(t) = d^t$; только показательная функция может обеспечить постоянство темпа, т.е.

$$\dot{z}/z = \ln d = q = \text{const}. \quad (3.94)$$

Законы, связанные с показательной функцией, распространены в природе.

Если сгруппировать подобные члены в уравнении (3.93), то это уравнение запишется в следующем виде

$$\frac{dz}{dt} = -(p - q)z + \frac{bc}{a - q} z^2. \quad (3.95)$$

Выражение (3.95) представляет собой модифицированное уравнение Риккати. Решение этого уравнения ищется в классе обобщенных функций. В зависимости от знака разностей $p-q$ и $a-q$ возможны четыре варианта существования уравнений Риккати согласно выражению (3.95).

а. $p - q > 0$ и $a - q > 0$; в этом случае имеем уравнение Риккати вида

$$\frac{dz}{dt} = -(p - q)z + \frac{bc}{a - q}z^2.$$

Этому уравнению соответствует устойчивая виртуальная система измерений (см. Приложение В):

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -\frac{1}{2}gk, & g = p - q, \\ l = k + v^*, \end{cases} \quad (3.95a)$$

где v^* – белый шум является мнимым белым шумом, т.е. $v^* = jv$; дисперсия мнимого белого шума является отрицательной величиной: $E[v^*(t)v^*(t')] = -\lambda\delta(t - t')$, причем $j = \sqrt{-1}$,

$\lambda \equiv \frac{a - q}{bc}$, а v – обычный (немнимый) белый шум.

б. $p - q > 0$ и $a - q < 0$; в этом случае уравнение (3.95) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = -(p - q)z - \frac{bc}{q - a}z^2.$$

Этому уравнению соответствует устойчивая виртуальная система измерений

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = -\frac{1}{2}gk, \\ l = k + v, \end{cases} \quad (3.95б)$$

где v – обычный (немнимый) белый шум, имеющий дисперсию $E[v(t)v(t')] = \lambda\delta(t - t')$, причем $\lambda \equiv \frac{q - a}{bc}$.

в. $p - q^* < 0$ и $a - q^* > 0$; при этом уравнение (3.95) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = (q^* - p)z + \frac{bc}{a - q^*} z^2;$$

значение q^* определено ниже.

Последнему уравнению соответствует неустойчивая виртуальная система измерений

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} g^* k, & g^* = p - q^*, \\ l = k + v^*, \end{cases} \quad (3.95в)$$

где дисперсия мнимого белого шума v^* опять-таки равна

$$E[v^*(t)v^*(t')] = -\lambda\delta(t - t'), \text{ а } \lambda \equiv \frac{q^* - a}{bc}.$$

г. $p - q^* < 0$ и $a - q^* < 0$; в данном случае уравнение (3.95) примет вид

$$\frac{dz}{dt} = (q^* - p)z - \frac{bc}{q^* - a} z^2.$$

Этому уравнению Риккати соответствует неустойчивая система измерений

$$\begin{cases} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{2} g^* k, \\ l = k + v, \end{cases} \quad (3.95г)$$

где v – обычный (немнимый) белый шум, а $\lambda \equiv \frac{q^* - a}{bc}$. дисперсия белого шума $E[v^*(t)v^*(t')] = \lambda\delta(t - t')$.

Нетрудно показать, что параметр q представляет собой обобщенную функцию. Действительно, обратимся к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\psi}, \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\varphi}. \end{cases} \quad (3.94а)$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\varphi}. \end{cases} \quad (3.94б)$$

Из уравнений (3.94а) и (3.94б) следует

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{\varphi}{\psi} \Rightarrow \frac{1}{\psi} = \frac{\frac{d\varphi}{\varphi}}{\frac{d\psi}{\psi}} \Rightarrow \frac{1}{\psi} = (\ln \varphi)'_{\psi}.$$

(3.94в)

Если в формуле (3.94в) вместо φ подставить число съеденных жертв z , а вместо ψ подставить текущее время t , то для $z(t) = d^t$ будем иметь

$$\frac{1}{t} = \dot{z}/z = (\ln z)'_t = \ln d \equiv q. \quad (3.94г)$$

Выражение (3.94г) показывает, что параметр q принадлежит классу обобщенных функций.

Разделим обе части уравнения (3.95) на z , тогда с учетом обозначения (3.94) получим

$$q = -p + q + \frac{bc}{a - q} z.$$

из последнего выражения имеем

$$z = \frac{p(a - q)}{bc}. \quad (3.94д)$$

Согласно вышепринятому обозначению

$$z = d^t \quad (3.94е)$$

и соотношению (3.94д) можно записать

$$d^t = \frac{p(a - q)}{bc}.$$

Из этого выражения имеем

$$t \ln d = \ln \left| \frac{p(a - q)}{bc} \right| \Rightarrow e = \pm \left(\frac{p(a - q)}{bc} \right).$$

Из последнего равенства получим две формулы

$$q = a - \frac{bc}{p} e \quad (3.94ж)$$

и

$$q^* = a + \frac{bc}{p}e \quad (3.94ж^*)$$

где $e = 2,718281\dots$ – число Эйлера.

Принимая во внимание выражение (3.94), неравенство $0 < d < 1$ и формулу (3.94ж) для устойчивой системы будем иметь

$$d = e^{(a - \frac{bc}{p}e)t} = e^{-\theta t}, \quad \theta = a - \frac{bc}{p}e; \quad (3.94з)$$

без потери общности можно положить $\theta = 1$ и принять $t = 1$.

Из необходимости выполнения требования $d = e^{-1} < 1$

следует, что $a < \frac{bc}{p}e$, поскольку для устойчивой системы

имеем $z = d^t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Для неустойчивой системы q^* определяется согласно формуле (3.94ж^{*}), поэтому $d = e > 1$ и, следовательно, выполняется соотношение $z = d^t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Подстановка значения параметров q и q^* определенных согласно формулам (3.94ж) и (3.94ж^{*}) в (3.95), дает уравнение

$$\frac{dz}{dt} = -(p - a \pm \frac{bc}{p}e)z \pm \frac{p}{e}z^2. \quad (3.95н)$$

Перед третьим слагаемым уравнения (3.95н) знак «+» соответствует случаю $a - q > 0$, а знак «-» – случаю, когда $a -$

$q^* < 0$. Для случая, когда $p - q \equiv p - a + \frac{bc}{p}e > 0$ имеем

устойчивую систему «хищник–жертва»

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - bx^*y^*, \quad a, b > 0, \quad (3.84'')$$

$$\frac{dy^*}{dt} = cx^*y^* - gy^*, \quad g, c > 0. \quad (3.85'')$$

В том случае, если $p - q^* \equiv p - a - \frac{bc}{p}e < 0$, то от уравнения

(3.95н) перейдем к неустойчивой системе уравнений

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - bx^*y^*, \quad a, b > 0, \quad (3.84''')$$

$$\frac{dy^*}{dt} = g^*y^* - cx^*y^*, \quad g^*, c > 0. \quad (3.86''')$$

Переход от уравнения (3.95н) к устойчивой системе (3.84''), (3.85''), а также к неустойчивой системе (3.84'''), (3.86''') неоднозначен.

Решением уравнения (3.95н) является солитон, который удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа (3.24).

Следовательно, неустойчивость динамической системы (3.84'''), (3.86''') означает устойчивость стохастической системы измерений (3.95а), (3.95б), а устойчивость динамической системы (3.84''), (3.85'') означает неустойчивость стохастической системы измерений (3.95б), (3.95г). Обратное утверждение также верно.

Таким образом, знак производной dy/dt эквивалентен знаку разностей $p - q$ и $p - q^*$. В устойчивой системе (3.84''), (3.85'') $dy/dt > 0$ и, следовательно, $p - q > 0$; если же $dy/dt < 0$, то имеем неустойчивую систему (3.84'''), (3.86''') для которой $p - q^* < 0$.

После решения уравнения (3.95) для устойчивого и неустойчивого случая найдем соответствующие интегралы от солитонных функций, т.е. $S_c(t) \equiv z_c(t) = x_c(t)y_c(t)$ и $S_H(t) \equiv z_H(t) = x_H(t)y_H(t)$. Эти интегралы используются при составлении устойчивой системы уравнений (3.84''), (3.85'')

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - bS_c(t), \quad a, b > 0, \quad (3.84'')_c$$

$$\frac{dy^*}{dt} = cS_c(t) - gy^*, \quad g, c > 0. \quad (3.85''')_c$$

а также при составлении неустойчивой системы уравнений (3.84'''), (3.86''')

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - bS_H(t), \quad a, b > 0, \quad (3.84''')_H$$

$$\frac{dy^*}{dt} = g^*y^* - pS_H(t), \quad g^*, c > 0. \quad (3.86''')_H$$

Решение дифференциальных уравнений (3.84''')_c и (3.85''')_c позволяет с произвольной точностью определить координаты x^* и y^* для заданного начального условия функции $S_c(t)$, а решение дифференциальных уравнений (3.84''')_H, (3.86''')_H даст возможность с произвольной точностью найти координаты x^* и y^* для заданного начального условия функции $S_H(t)$.

Очень важно, что в данном случае устанавливается взаимное соответствие между системами уравнений (3.84), (3.85) и (3.84'), (3.86') антагонистических популяций и уравнением Риккати (3.93).

Ясно, что количество систем, которые описываются уравнением Риккати, не ограничено вышеописанными одиннадцатью случаями; число систем, моделируемых уравнением Риккати, несомненно больше. Для подтверждения этой мысли достаточно привести, высказывание из монографии [49] (страница 166): «Модель Ферхюльста первоначально предназначалась для описания роста биологической популяции, но со временем обнаружилось, что соответствующие модели феноменологического уравнения (3.83) встречаются во многих весьма различных областях».

Такая распространенность уравнения Риккати обусловлена тем, что это уравнение удовлетворяет вариационному (оп-

тимизационному) уравнению Эйлера–Лагранжа (3.24), которое в развернутом виде запишется так:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0; \quad (3.24a)$$

оно определяет функцию $y(x)$, для которой функционал (3.25) экстремален.

В настоящей монографии с моделями, записанными в виде уравнения Риккати, мы будем встречаться неоднократно.

§3.5. Использование уравнения Риккати для нового подхода к получению солитона [50]

Скалярное уравнение Риккати

$$\dot{v} = -2av - \lambda^{-1}v^2 + q, \quad v(0) = v_0 \quad (3.96)$$

имеет решение

$$v(t) = v_1 + \frac{v_1 + v_2}{\left(\frac{v_0 + v_2}{v_0 - v_1}\right) e^{2\beta t} - 1}, \quad (3.97)$$

где $\beta = \sqrt{a^2 + q/\lambda}$, $v_1 = \lambda(\beta - a)$, $v_2 = \lambda(\beta + a)$.

Если в формуле (3.97) выполняется неравенство $v_1 > v_0$, то скорость изменения переменной v будет иметь вид

$$\dot{v}(t) = -\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + ce^{2\beta t}}\right)'_t, \quad (3.98)$$

где $c = \frac{v_2 + v_0}{v_1 - v_0}$.

Выражение в знаменателе формулы (3.98) преобразуется так:

$$\sqrt{c}e^{\beta t}[\sqrt{c}e^{\beta t} + (\sqrt{c})^{-1}e^{-\beta t}] = \sqrt{c}e^{-\beta t} \cdot 2e^{\phi} \operatorname{ch}(\beta t - \phi),$$

где $\phi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(\sqrt{c})^{-1}}{\sqrt{c}} \right] = \frac{1}{2} \ln(c)^{-1} = -\ln(\sqrt{c})$.

С учетом последних преобразований формула (3.98) примет вид

$$\dot{v} = -D \left(\frac{e^{\beta t - \phi}}{ch(\beta t - \phi)} \right)'_t = -D\beta sech^2(\beta t - \phi), \quad (3.99)$$

где $D = \frac{v_1 + v_2}{2\sqrt{c}}$.

Если вместо t имеем переменную $z = x - \alpha t$, то выражение (3.99) запишется так:

$$(v(z))'_z = -B sech^2(\beta z - \phi) = -B sech^2[\beta(x - \alpha t) - \phi],$$

где $B = D\beta$.

Скорость изменения (движения) переменной v в этом случае примет вид

$$\dot{v}_t = v'_z \cdot z'_t = B a sech^2[\beta(x - \alpha t) - \phi]$$

или

$$\dot{v}_t = A sech^2[\beta(x - \alpha t) - \phi], \quad (3.100)$$

где $A = B\alpha$.

Выражение (3.100) представляет собой солитон, ранее полученный из обратной задачи рассеяния [42]. Солитон (3.100) удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$L_v - \frac{d}{dt} L_{v'} = 0 \quad (3.101)$$

или в развернутом виде

$$L_v - L_{tv'} - L_{vv'} v' - L_{v'v'} v'' = 0. \quad (3.101a)$$

Интегральные кривые $v = v(t, c_1, c_2)$ уравнения Эйлера–Лагранжа (3.101) называются экстремалими. Только на экстремалих может достигаться экстремум функционала, т.е.

$$J[v(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(v, \dot{v}, t) dt = \text{extremum}, \quad (3.102)$$

где L – функция Лагранжа, равная разности кинетической и потенциальной энергии системы.

Из сопоставления правых частей выражений (3.96) и (3.100) видно, что они равны, поскольку равны левые части этих выражений. Следовательно, солитон представляет собой экстремаль. В нашем случае критерий (3.102) запишется в виде

$$J_{\min} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} v(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} dv = v(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \min. \quad (3.103)$$

Символ \min берется ввиду того, что вторая производная положительна $\ddot{v} > 0$.

Пример 3.1. Пусть задано уравнение Риккати

$$\dot{v} = \lambda v(n - v), \quad v(0) = v_0. \quad (3.104)$$

Решение уравнения (3.104) имеет вид

$$v(t) = \frac{n}{1 + e^{-\lambda n(t-t_0)}}, \quad (3.105)$$

где $t_0 = (\lambda n)^{-1} \ln \left| \frac{n - v_0}{v_0} \right|$.

Для выражения (3.105) критерий (3.103) запишется так

$$J_{\min} = \frac{n}{1 + e^{-\lambda n(t_2-t_0)}} - \frac{n}{1 + e^{-\lambda n(t_1-t_0)}} = \min. \quad (3.106)$$

Минимальное значение критерия (3.106) оптимальности зависит от параметров n , λ , v_0 , а также моментов времени t_0 , t_1 и t_2 . Выражение (3.106) может быть записано с использованием солитонных функций

$$J_{\min} = \frac{1}{4} \lambda n^2 \times \left\{ \int_{t_0}^{t_2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda n(t - t_0) \right] dt - \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda n(t - t_0) \right] dt \right\} = \min. \quad (3.107)$$

§3.6. Цикличность солитонных функций

Как известно солитонные функции $sechx$ и thx удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \frac{dthx}{dx} = sech^2, \\ \frac{dsechx}{dx} = -sechxthx. \end{cases} \quad (3.108)$$

Соотношения (3.108) ниже используются для показа цикличности солитонных функций по x и по t .

Введем обозначения

$$p(x, t) = sech^2(\beta x - \gamma t), \quad q(x, t) = th(\beta x - \gamma t). \quad (3.109)$$

С учетом соотношений (3.108) и обозначений (3.109) будем иметь

$$\begin{cases} \frac{dq}{dx} = \beta p, \\ \frac{dp}{dx} = -\beta p q. \end{cases} \quad (3.110)$$

Аналогично, для времени t получим

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = -\gamma p, \\ \frac{dp}{dt} = 2\gamma p q. \end{cases} \quad (3.111)$$

Используя циклические соотношения (3.110) и (3.111) для солитонных функций, можно решить примеры, встречающиеся в организующихся и самоорганизующихся системах.

Пример 3.2. Плотность вероятностей $V(x, t)$ скалярной стохастической системы удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x, t)V(x, t)) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.112)$$

Плотность вероятностей $V(x, t)$ будем искать в виде

$$V(x, t) = -p(x, t, \beta, \gamma), \quad (3.113)$$

где

$$p(x, t, \beta, \gamma) = -\operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t). \quad (3.114)$$

Подстановка функции $V(x, t)$, определенной согласно (3.113), в уравнение (ФПК) (3.112) дает следующее алгебраическое уравнение

$$\sigma^2 \beta^2 q^2 + 2(f(x, t) + \sigma^2 \beta^2 - \gamma)q - (f'_x + \sigma^2 \beta^2) = 0. \quad (3.115)$$

Введем обозначения

$$A = \sigma^2 \beta^2,$$

$$B(x, t) = f(x, t) + \sigma^2 \beta^2 - \gamma,$$

$$C(x, t) = f'_x + \sigma^2 \beta^2,$$

где

$$f'_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, t).$$

Поскольку $\operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) \neq 0$, то из уравнения (3.15) получим решение

$$q(x, t, \beta, \gamma) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + AC}}{A}.$$

Корни этого уравнения

$$q_1(x, t, \beta, \gamma) = D_+(x, t, \beta, \gamma), \quad q_2(x, t, \beta, \gamma) = D_-(x, t, \beta, \gamma),$$

где приняты обозначения

$$D_+(x, t, \beta, \gamma) = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A},$$

$$D_-(x, t, \beta, \gamma) = -\frac{B + \sqrt{B^2 + AC}}{A}.$$

С учетом известного соотношения $\operatorname{sech}^2 z = 1 - th^2 z$ будем иметь

$$V_+(x, t) = 1 - D_+^2(x, t, \beta, \gamma),$$

$$V_-(x, t) = 1 - D_-^2(x, t, \beta, \gamma).$$

Поскольку плотность должна быть неотрицательной величиной, то имеем

$$D_+ \leq \pm 1 \text{ и } D_- \leq \pm 1 \quad \forall x, t.$$

Кроме этого, для того, чтобы плотность вероятностей была функцией действительных переменных, необходимо выполнение очевидного соотношения

$$B^2 + AC > 0, \quad \forall x, t.$$

Для того, чтобы функция $V(x, t) \equiv \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t)$ была плотностью вероятностей, необходимо, чтобы она удовлетворяла бы соотношению

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} V(x, t) dx = 1.$$

Из последнего выражения находим нормирующий коэффициент

$$\alpha = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) dx \right]^{-1} \quad (3.116)$$

С учетом нормирующего коэффициента (3.116) плотность вероятностей, удовлетворяющая уравнению ФПК (3.112), будет иметь вид

$$P(x, t) = a \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t).$$

Пример 3.3. Решение системы уравнений морфогенеза, предложенной А. Гирером и У. Мейнхардтом.

В настоящее время наиболее известная модель морфогенеза «реакция – диффузия» с кинетикой типа активатор – ингибитор, предложена А. Гирером и У. Мейнхардтом [51]. Эта модель описывает пространственную дифференциацию ткани в процессе эмбриогенеза.

Ряд животных обладают способностью не только к заживлению ран, но и к восстановлению утраченных органов. Регенерация утраченных органов обусловлена возобновлением морфогенетических процессов, которые прекращаются после завершения развития организма. Способность к регенерации имеется у

ящериц, тритонов, саламандр, а также у простейших многоклеточных животных-гидр.¹ С точки зрения самоорганизации воспроизведение органов является процессом упорядочения и, следовательно, снижения энтропии.

Процессы регенерации и морфогенеза связаны с выработкой организмом определенных химических веществ: ингибиторов и активаторов. Ингибиторы не позволяют возникнуть новой голове гидры вблизи старой, а активаторы стимулируют процесс образования новой головы гидры.

Обозначим концентрацию активатора гидры через X , а концентрацию ингибитора через Y . Пусть X и Y зависят от пространственной координаты x и времени t . Изменение концентрации активатора X в данной точке зависит от следующих факторов: генерации активатора (в области, где формируется голова гидры) с производительностью ρ , его распада, который описывается слагаемым $-\mu X$ и диффузии $D_X X''_{xx}$.

На основе экспериментальных исследований установлено, что воздействие ингибитора Y на активатор X можно описать членом kX^2/Y . На основании сказанного уравнение для скорости изменения активатора X примет вид

$$\dot{X}_t = \rho - \mu X + kX^2/Y + D_X X''_{xx}. \quad (3.117)$$

Следуя идее Гирера и Мейнхардта примем, что образование ингибитора обусловлено наличием активатора и описывается членом cX^2 . Концентрация ингибитора меняется из-за распада, описываемого членом $-\nu Y$, а также диффузией $D_Y Y''_{xx}$. Исходя из этих показателей, можно записать уравнение для скорости изменения ингибитора

$$\dot{Y}_t = cX^2 - \nu Y + D_Y Y''_{xx}. \quad (3.118)$$

¹ Размеры гидры небольшие: в длину гидра имеет несколько миллиметров.

Члены D_X и D_Y являются соответственно коэффициентами диффузии активатора и ингибитора; эти коэффициенты считаются постоянными величинами $D_X = const$ и $D_Y = const$. Следует отметить, что уравнения (3.117) и (3.118) моделируют взаимодействие распределенных систем, т.е. описывают процесс притока и оттока вещества с учетом градиентов концентраций активатора и ингибитора. Разность между притоком и оттоком пропорциональна вторым пространственным производным.

В настоящее время нам неизвестно точное решение системы уравнений (3.117), (3.118). Нами предлагается решение этих уравнений получить путем использования солитонных функций и их свойства цикличности (3.110) и (3.111). Мы будем искать решение системы уравнений (3.117), (3.118), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{cases} X(-\infty, t) = Y(\infty, t) = 0, \\ X(\infty, t) = Y(-\infty, t) = 1. \end{cases} \quad (3.118a)$$

Влияние внешних факторов (температура, атмосферное давление, облучение и т.д.) на процесс регенерации исключается, т.е. процесс регенерации происходит в консервативной системе. Исходя из этого, уравнения (3.117), (3.118) инвариантны относительно замены $x \rightarrow -x$; поэтому в выражениях (3.118a) 0 и 1 можно поменять местами.

Следует отметить, что гиперболический тангенс и квадрат гиперболического секанса удовлетворяют граничным условиям (3.118a). Поэтому эти функции нами будут взяты как решения системы уравнений (3.117), (3.118) т.е.

$$X(x, t) = th(\beta x - \gamma t), \quad (3.119)$$

$$Y(x, t) = sech^2(\beta x - \gamma t), \quad (3.120)$$

С учетом обозначений (3.119), (3.120) уравнения (3.117) и (3.118) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}
& -\gamma \operatorname{sech}^4(\beta x - \gamma t) = \rho \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) - \\
& -\operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) \operatorname{th}(\beta x - \gamma t) (\mu + 2\beta^2 D_X) + \\
& + k \operatorname{th}^2(\beta x - \gamma t), \tag{3.121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (v - 2\gamma \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t)) \operatorname{th}(\beta x - \gamma t) = c \operatorname{th}^2(\beta x - \gamma t) + \\
& + 2\beta^2 D_Y \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) (2 \operatorname{th}^2(\beta x - \gamma t) - \\
& - \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t)). \tag{3.122}
\end{aligned}$$

С учетом выражения

$$\operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) = 1 - \operatorname{th}^2(\beta x - \gamma t) \tag{3.123}$$

из уравнений (3.121) и (3.122) получим

$$\begin{aligned}
& 2\gamma^2 \operatorname{sech}^6(\beta x - \gamma t) + (ad - v\gamma + 2\gamma b) \operatorname{sech}^4(\beta x - \gamma t) + \\
& + (ac - vb + 2\gamma k) \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t) - vk = 0, \tag{3.124}
\end{aligned}$$

где $a \equiv \mu + 2\beta^2 D_X$, $b \equiv \rho - k$, $d \equiv 4\beta^2 D_Y - 6\beta^2 D_Y - c$.

Уравнение (3.124) может быть записано в следующем виде

$$\chi^3 + f^* \chi^2 + g^* \chi - n = 0, \tag{3.124a}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}
\chi & \equiv \operatorname{sech}^2(\beta x - \gamma t), & f^* & \equiv \frac{ad - v\gamma + 2\gamma b}{2\gamma^2}, \\
g^* & \equiv \frac{ac - vb + 2\gamma k}{2\gamma^2}, & n & \equiv \frac{vk}{2\gamma^2}.
\end{aligned}$$

С целью исключения колебательного процесса при ингибировании места образования головы гидры потребуем, чтобы имели место выражения $f^* = 0$ и $g^* = 0$; В результате для случая $f^* = 0$ получим биквадратное уравнение относительно параметра β

$$rz^2 + 2lz + s = 0, \tag{3.125}$$

где $z \equiv \beta^2$, $r \equiv 8kD_X D_Y$,

$$l \equiv 2k\mu D_Y - v c D_X + 2\rho D_X,$$

$$s \equiv v^2 \rho - v^2 k - v\mu c - 2v\rho^2 + 4\rho vk + 2\rho\mu c - 2k^2 v.$$

Решение уравнения (3.125) запишется так

$$\beta_{1,2}^2 \equiv z_{1,2} = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 - rs}}{r}. \quad (3.126)$$

Из условия $g^* = 0$ имеем

$$\gamma_{1,2} = \frac{v(\rho - k) - (\mu + 2\beta_{1,2}^2 D_Y)c}{2k}. \quad (3.127)$$

Из физических соображений, в формуле (3.126) выбирается действительный положительный корень, так, что имеем $\beta_0 = \text{const} > 0$; однако, при этом необходимо выполнение неравенства $\sqrt{l^2 - rs} > l$, т.е. $s < 0$.

Аналогично, если в выражении (3.127) учтем необходимость выполнения неравенства $v(\rho - k) > (\mu + 2\beta_0^2 D_Y)c$, то для параметра γ получим постоянное положительное значение $\gamma_0 = \text{const} > 0$.

Принимая во внимание равенства $f^* = 0$ и $g^* = 0$, уравнение (3.124a) примет вид

$$\text{sech}^6(\beta x - \gamma t) - n = 0. \quad (3.128)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа в развернутом виде запишется так

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0,^1 \quad (3.128a)$$

где в нашем случае имеем

$$F \equiv \text{sech}^6(\beta_0 x - \gamma_0 t) - n. \quad (3.128б)$$

Поскольку уравнение (3.128a) удовлетворяет уравнению Риккати, правая часть которого является солитонной функцией (см. текст после соотношения (3.60)), то выражение (3.128б) представляет собой разность степенных функций двух солитонов $F = [\text{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t)]^3 - n[\text{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t)]^0$, т.е. явля-

¹ В уравнении Эйлера–Лагранжа (3.128a) принято обозначение $y = \text{sech}(\beta_0 x - \gamma_0 t)$, а t рассматривается как параметр.

ется функцией Лагранжа. Поэтому выражение (3.128б) также будет удовлетворять уравнению Эйлера–Лагранжа (3.128а).

Для функции Лагранжа, заданной формулой (3.128б), члены F_y и $F_{xy'}$ равны между собой¹; поэтому уравнение (3.128а) примет вид

$$F_{yy'} \cdot y' + F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \quad (3.128в)$$

Необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что производная от функции Лагранжа, в выражении (3.128е), берется не по обычной переменной, а по циклической функцией гиперболического секанса y и ее производной y' ; равенство функций F_y и $F_{xy'}$ в уравнении (3.128а) имеет также место в главах 5,9,11.

Функции, входящие в уравнения (3.128е) имеют вид

$$F_{yy'} \cdot y' = 6 \operatorname{sech}^5(\beta_0 x - \gamma_0 t),$$

$$F_{y'y'} \cdot y'' = - \frac{\operatorname{sech}^5(\beta_0 x - \gamma_0 t)[2 \operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t) - 1]}{1 - \operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t)}.$$

Если ввести необходимость выполнения требования $1 - \operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t) \neq 0$, то с учетом последних двух выражений в уравнении (3.128е) приходим к соотношению

$$\operatorname{sech}^5(\beta_0 x - \gamma_0 t)[8 \operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t) - 7] = 0.$$

Поскольку $\operatorname{sech}^5(\beta_0 x - \gamma_0 t) \neq 0$, то последнее выражение примет вид

¹ В монографии Е.Т. Уиттекера «Аналитическая динамика», М-Л. Гостехиздат, 1937, стран. 68, показано, что для циклических координат уравнение Эйлера–Лагранжа (3.24) принимает вид $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$; т.к., в этом случае

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow F_y = F_{xy'}$. Из вышеприведенных результатов следует, что уравнение (3.128е) сохраняется в нашем случае, поскольку гиперболические функции $\operatorname{sech}^2(x)$ и $\operatorname{th}(x)$ обладают свойством цикличности.

$$\operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t) = \frac{7}{8}. \quad (3.128\text{г})$$

Гиперболический секанс является четной функцией, поэтому знак минус при решении уравнения (3.128г) можно не учитывать и мы получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}(\beta_0 x - \gamma_0 t) \\ = \sqrt{\frac{7}{8}}. \end{aligned} \quad (3.128\text{д})$$

Решение последнего уравнения имеет два корня:

$$\begin{aligned} \beta_0 x - \gamma_0 t &= \operatorname{Arsech}\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \\ &= \begin{cases} \ln\left(\sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{8}{7} - 1}\right), \\ -\ln\left(\sqrt{\frac{8}{7}} + \sqrt{\frac{8}{7} - 1}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{8}{7}} - \sqrt{\frac{8}{7} - 1}\right). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.128\text{е})$$

Для того, чтобы определить имеем ли в выражении (3.102) максимум или минимум, найдем вторую производную от функции F (3.128б); эта производная равна

$$F_x'' = -6\beta^2 \operatorname{sech}^6(\beta_0 x - \gamma_0 t) [6 - 7\operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t)] = 0. \quad (3.128\text{ж})$$

Из последнего выражения находим тот корень, который не противоречил бы равенству (3.128г); этот корень определяется из неравенства

$$6 - 7\operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t) < 0 \Rightarrow \operatorname{sech}^2(\beta_0 x - \gamma_0 t) > 6/7. \quad (3.128\text{з})$$

Неравенство (3.128з) означает, что вторая производная (3.128ж) положительна и, следовательно, экстремум (3.102) яв-

ляется минимумом. Нам необходимо найти этот минимум, который равен

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\beta_0 x - \gamma_0 t} \left[\left(\frac{7}{8} \right)^3 - n \right] d(\beta_0 x - \gamma_0 t) = \\
 &= \left[\left(\frac{7}{8} \right)^3 - n \right] \left[\ln \left(\sqrt{\frac{8}{7}} - \sqrt{\frac{8}{7} - 1} \right) \right], \quad (3.128и)
 \end{aligned}$$

где текущее время t принадлежит интервалу времени $[t_0, t_f]$ восстановления (регенерация) головы гидры, т.е. $t \in [t_0, t_f]$. Из двух корней (3.128е) выбираем меньший корень, поскольку имеем задачу минимизации.

Используя равенство (3.128д) можно определить координату головы гидры в текущем времени

$$x = \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{Arsech} \left(\frac{7}{8} \right) + \gamma_0 t \right], \quad (3.128к)$$

где Ar означает главное значение.

Регенерация утраченных органов является примером существования в природе самоорганизующейся системы: в генетической памяти этого существа хранятся размеры и место нахождения в организме головы гидры. В процессе регенерации этого органа происходит постоянное сравнение регенерируемого органа с эталоном, хранящимся в генетической памяти гидры; рассогласование (ошибка) между эталоном и реальными размерами головы гидры постоянно используется для коррекции регенерируемого органа.

Параметры ρ , μ , k , D_X активатора (3.117) и c , v , D_Y ингибитора (3.118) изменяются таким образом, чтобы обеспечить соответствующие значения, зависящих от них величин β_0 и γ_0 , ответственных за координату x головы гидры (см. формулу (3.128к)). Следовательно, ферменты активатора и ингибитора

гидры вырабатываются в таком количестве, чтобы обеспечить рост головы гидры на временном интервале $[t_0, t_f]$ согласно выражению (3.128к). В вышеописанной модели регенерации морфогенетические процессы заканчиваются после того как восстановлен утраченный орган; этот процесс не зависит от внешних факторов, таких как питание или условий обитания гидры.

Поскольку параметр $n = vk/2\gamma^2$, фигурирующий в функционале (3.128и), зависит от параметров, как активатора, так и ингибитора, то он должен обеспечить минимум этого выражения при заданных β_0 и γ_0 .

Регенерация утраченных органов организма у ряда животных и млекопитающих является наглядным примером использования природой вариационных (оптимизационных) принципов.

§3.7. Проблема обратимости и стохастическая природа необратимых процессов

Наиболее фундаментальным фактором имеющим место в природе, является временная направленность процессов, их необратимость. Необратимые процессы не противоречат первому закону термодинамики, но представляют собой типичные примеры процессов, запрещенных вторым законом.

Следовательно, необходимо различать *обратимые* и *необратимые процессы*. При обращении процесса вместо данного (необратимого) процесса мы получаем некоторый новый процесс. Если этот новый процесс физически допустим, мы говорим об обратимом процессе. Если такой процесс принципиально не реализуем и противоречит опыту, то мы имеем необратимый процесс.

Так, если в реверсивном двигателе направление магнитного поля и времени изменить на противоположное, то возникнет

движение обратное тому, которое наблюдалось до момента обращения. В этом случае наблюдатель как бы увидит кинокартину, прокручиваемую от конца к началу.

В статистической физике рассматривается не одна система, находящаяся в определенном *микросостоянии*, а ансамбль систем с заданным распределением вероятностей микросостояний. Этот ансамбль (*представляющий макросостояние*) описывается малым числом параметров по сравнению с реально существующим числом параметров необходимых для описания микроскопической системы; при этом происходит огрубление микроскопической систем. Рассматривать ансамбль вместо поведения одной системы удобно по целому ряду причин. Например, начальное состояние и взаимодействие с окружающей средой для многочастичной системы известны не вполне точно. При этом, поскольку начальное состояние всей системы неизвестно, возникает необходимость вероятностного описания с помощью ансамбля, тогда как временная эволюция отдельной микроскопической системы является строго детерминированным, а не случайным процессом.

Различают три уровня описания динамических систем:

1. Микроскопический или атомно-молекулярный уровень; при описании объема на этом уровне уравнения могут содержать такие микроскопические показатели как число Авогадро, масса молекулы, заряд электрона и другие.
2. Мезоскопический уровень, т.е. промежуточный уровень между микроскопическим и макроскопическим уровнем.
3. Макроскопический или холистический уровень.

Для иллюстрации существования трех уровней описания динамических систем можно привести неограниченное число примеров. Пример из биологии: на микроскопическом уровне имеем биомолекулы, на мезоскопическом уровне это клетки

биологической ткани, на макроскопическом уровне это сама биологическая ткань.

Один важный пример из использования мезоскопического уровня описания системы при создании математической модели случайного процесса является броуновское движение. Это движение стало основой для получения математической модели винеровского процесса. Винеровский процесс является основой теории стохастических (процессов) дифференциальных уравнений.

Причиной необратимости процессов является несколько. Одной из причин, конечно, является огрубление, которое производится дважды: первый раз при переходе от микроскопического описания к мезоскопическому описанию, второй раз при переходе от мезоскопического описания к макроскопическому описанию. Ясно, что в данном случае причиной необратимости является рандомизация, используемая для описания микроскопической и мезоскопической системы. Рандомизация это искусственная стохастизация, когда исследователь консервативную систему искусственно превращает в диссипативную, т.е. в стохастическую систему. Консервативная система обратима, диссипативная – необратима.

Некоторые существующие диссипативные системы сами по себе являются стохастическими, т.е. их не надо рандомизировать, они по своей природе необратимы. Типичным примером такой системы является модель (2.13), (2.14) системы хищник – жертва, рассмотренная в главе 2. В Главе 3 показано, что величина числа съеденных жертв в этой модели удовлетворяет уравнению Риккати (3.82). Уравнению (3.82) соответствует виртуальная стохастическая система измерений (1.16) из Главы 1. Это означает, что по своей природе исходная система уравнений (2.13), (2.14) (или, что тоже самое уравнений (3.84), (3.85))

является диссипативной, т.е. необратимой. Для того, чтобы убедиться в необратимости системы (3.84), (3.85) может быть использован соответствующий математический аппарат, он таков.

Пусть на i -ую материальную точку имеющую массу m_i и скорость v_i действует сила F_{ij} , зависящая от расстояния $r = r_i - r_j$ между двумя материальными точками. Тогда ускорение, вызванное действующей силой динамически связанной с этой силой определяется соотношением

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = \sum_j F_{ij}(r_i - r_j).$$

Последнее соотношение означает, что наблюдая обратное во времени ($t' = -t$) движение, можно убедиться в справедливости тех же свойств, которые установлены при обычной направленности времени, т.е. из соотношений $d^2 r/dt^2 = dv/dt$ и $v = dr/dt$ следует, что преобразование ($t' = -t$) вызывает преобразование $\dot{v} = -v$, оставляя ускорение неизменным. Таким образом, для обратимых процессов изменение направления течения времени не влияет на скорость движения системы, а для необратимых процессов вторая производная меняет знак на противоположный.

Используя последнее утверждение применительно к системе (3.84), (3.85), можно убедиться, что эта система действительно является необратимой, т.е. диссипативной.

К сожалению, в книге [52], посвященной синергетическим аспектам экономики, система «хищник–жертва» (3.84), (3.85) неоднократно упоминается как консервативная. После чтения этой книги осведомленный ученый придет в недоумение, а начинающий окончательно запутается в дебрях науки.

Выше были приведены два феномена необратимости: это рандомизация, т.е. искусственная стохастизация системы и существование диссипативных систем. Третий феномен необратимости заключается в нарушении целостности некоторых уравнений. Так, вывод уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК) приводится во многих работах. В начале выводится выражение

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^i [a_i(x)P(x, t)]. \quad (3.138)$$

Далее, в правой части этого выражения отбрасываются все члены, начиная с третьего. Таким образом получают уравнение ФПК. Из процедуры вывода уравнения ФПК видно, что оно получено в результате нарушения целостности уравнения (3.138); поэтому уравнение ФПК является необратимым.

Все обратимые уравнения, например Максвелла, не выводятся из других выражений путем нарушения их целостности. В этом заключается то, что они обратимы.

Еще в древности ученые считали, что реку нельзя дважды пересечь в одном и том же месте. Причиной этого является все обновляющееся течение воды. Аналогично, белый гауссов шум обладает этим свойством: он является обновляющимся процессом. Поэтому уравнение Ланжевена является необратимым.

Краткие комментарии к третьей главе

Показано, что уравнение Эйлера–Лагранжа может быть получено как из чисто вариационных принципов механики, так и из функционала, зависящего от параметра.

Приводятся одиннадцать известных примеров, в которых используется уравнение Риккати. Производная от решения урав-

нения Риккати доставляет экстремум уравнению Эйлера–Лагранжа т.е. является солитоном и, следовательно, удовлетворяет вариационным принципам механики, объектов, находящимся в природе и обществе.

Показано, что экологическая модель «хищник–жертва» является вероятностной, поскольку число съеденных жертв, описывается уравнением Риккати, решение которого, представляет собой дисперсию виртуальной стохастической системы измерений.

Показан переход от устойчивой и неустойчивой системы «хищник–жертва» к соответствующему модифицированному уравнению Риккати. Получено решение модифицировано уравнения Риккати в классе обобщенных функций.

На примере модельной системы Гирера–Мейнхардта дается новый подход к решению оптимизационного уравнения Эйлера–Лагранжа. Новизна заключается в использовании гиперболических функций при нахождении производных от функции Лагранжа вместо нахождения производных от этой функции по обычным переменным.

Приводятся три феномена необратимости процессов и уравнений. Первый феномен заключается в рандомизации (искусственной стохастизации) моделей микроскопических процессов. Второй феномен заключается в том, что многие макроскопические уравнения являются стохастическими *из-за нарушения симметрии*; это видно на примере модельных уравнений хищник–жертва, в которой вместо окружности имеем кривоугольную фигуру-траекторию, по которой движется изображающая точка (смотрите Главу 2). Следовательно, **нарушение симметрии вызывает стохастичность, а стохастичность является причиной необратимости**. Наконец, третий феномен заключается в

том, что происходит нарушение целостности при выводе уравнений.

Логическая последовательность суждений, приводящая к математическим основам образования и оптимизации организующихся и самоорганизующихся систем, следующая: уравнению Эйлера–Лагранжа удовлетворяет уравнение Риккати, которое является посредником между исходной антагонистической системой уравнений «хищник–жертва» и виртуальной стохастической системой измерений.

ГЛАВА 4

Бифуркация

Сама по себе бифуркация является сложным явлением. К сложности добавляется и то обстоятельство, что в разных дисциплинах это явление называют по-разному. То, что физики называют фазовыми переходами, математики называют бифуркацией [53]. Конечно, в том случае, когда говорится о переходе вещества (например, льда) под действием теплового поля из одной фазы (твердой) в другую фазу (например, жидкость) слова «фазовый переход» могут быть использованы, однако следует помнить, что такой переход является бифуркацией.

Во второй главе было отмечено, что бифуркация системы происходит при изменении структуры системы. Изменение структуры происходит в следствии изменения параметров системы. Вариация параметров происходит из-за внутренних флуктуаций и/или внешних случайных или детерминированных воздействий.

В случае, когда система вступает в зону бифуркации будущее системы становится непредсказуемым, поскольку флуктуации, вызывающие изменение параметров, носят случайный характер. Следовательно, бифуркация обычно представляет собой вероятностное явление. В точках бифуркации начинается ветвление возможных путей развития системы и поэтому невозможно осуществить прогноз того, по какому пути пойдет будущее развитие системы.

В настоящее время проблемам бифуркации посвящено все возрастающее число статей и несколько монографий [54,55,56]. Автор придерживается точки зрения современного английского физика-теоретика Джона Займана: «Для нормального человека нет ничего более отталкивающего, чем клиническая последова-

тельность определений, аксиом и теорем, порожаемая трудами чистых математиков». Поэтому в настоящей главе приводятся разнообразные сценарии явления бифуркации, появляющиеся при моделировании организующихся и самоорганизующихся систем, а не теоремы и их доказательства.

§4.1. Мягкая и жесткая бифуркация Хопфа

Возникновение циклических колебаний из стационарных состояний является основным предметом теории бифуркации Хопфа. Потеря устойчивости с возникновением периодических решений связана с переходом через мнимую ось комплексных корней линеаризованной задачи. Потеря устойчивости с возникновением периодических решений может происходить *мягко* или *жестко*. Периодические решения, моделируемые дифференциальными уравнениями, соответствуют самым разнообразным явлениям и процессам, происходящим в биологии и медицине, в автоматическом управлении и кибернетике, в экологии и экономике и т.д.

Мягкая бифуркация Хопфа представляет собой *структурно устойчивое* явление. Жесткая бифуркация Хопфа называется *структурно неустойчивой*.

Рассмотрим сначала математическую модель, соответствующую мягкой бифуркации Хопфа:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.1)$$

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (4.1) введем полярные координаты r и φ . Тогда будем иметь: $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$; из этих обозначений имеем $x^2+y^2=r^2$

и $\varphi = \arctg(y/x)$. Продифференцировав последние соотношения, получим уравнения

$$\begin{cases} x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt}, \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \end{cases} \quad (4.2)$$

Умножая первое уравнение системы (4.1) на x , а второе на y и складывая полученные выражения с учетом первого уравнения системы (4.2), находим, что

$$r \frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2) \quad (4.3)$$

Если умножить второе уравнение системы (4.1) на x , а первое умножить на y и вычесть с учетом второго уравнения системы (4.2), получим выражение

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = r^2. \quad (4.4)$$

Система (4.1) имеет единственную особую точку $O(0,0)$. Поскольку мы интересуемся только построением траектории, то можно считать $r > 0$. Тогда согласно уравнениям (4.3) и (4.4) система (4.1) приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Решение системы (4.5) запишется следующим образом

$$\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \\ \varphi = t + t_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

или в декартовых координатах

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \\ y = \frac{\sin(t + t_0)}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Если в первом уравнении системы (4.6) положить $c=0$, то получим $r=1$ и $\varphi = t + t_0$. Эти выражения определяют замкнутую траекторию, т.е. окружность $x^2 + y^2 = 1$. Если $c < 0$, то ясно, что при $r > 0$ будем иметь $r \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Если же $c > 0$, то $r < 1$ и опять $r \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что существует единственная замкнутая траектория с радиусом $r = 1$, к которой (согласно равенствам (4.7)) все остальные траектории с течением времени приближаются по спиральям (Рис.4.1).

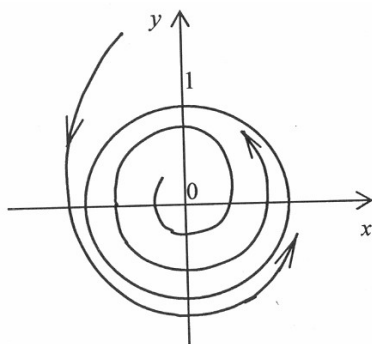


Рис. 4.1.

Замкнутая траектория, являющаяся окружностью, называется *устойчивым предельным циклом*.

В данном случае мы смогли в явном виде найти уравнение замкнутой траектории на плоскости состояний, однако в общем случае, конечно, этого сделать нельзя. Поэтому в теории обыкновенных дифференциальных уравнений играют существенную роль критерии, которые позволяют хотя бы выделить те области, где может содержаться предельный цикл. Следует отметить, что замкнутая траектория системы (2.3), если таковая сущест-

вует, обязательно содержит внутри себя по крайней мере одну особую точку этой системы. Отсюда следует, что если в некоторой области плоскости состояний нет особых точек системы (2.3), то в этой области нет и замкнутых траекторий. Если имеем ограниченную область вместе со своей границей, лежащей на плоскости состояний и не содержащей особых точек системы (2.3), то справедлив вышеприведенный критерий Пуанкаре–Бендиксона (см. Глава 2).

Рассмотрим теперь зависимость *мягкой бифуркации* от параметра γ . Пусть задана система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \gamma y - y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4.8)$$

При любых значениях параметра γ система нелинейных дифференциальных уравнений (4.8) имеет положение равновесия $(0,0)$. Исследуем это положение равновесия при различных действительных значениях параметра γ .

Матрица линеаризованной системы (4.8) в точке $(0,0)$ (см. Главу 2) запишется так

$$\begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Матрица (4.9) имеет комплексные собственные числа

$$\lambda_{1,2}(\gamma) = \gamma \pm j,$$

где $j = \sqrt{-1}$.

При $\gamma < 0$ состояние равновесия $(0,0)$ представляет собой устойчивый фокус, а при $\gamma > 0$ состояние равновесия представляет собой неустойчивый фокус. При $\gamma = 0$ собственные числа находятся на мнимой оси и об устойчивости состояния равновесия нельзя судить по линеаризованной системе.

Для исследования поведения системы (4.8) на плоскости

состояния удобно (как в предыдущем случае) перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{cases} \quad (4.10)$$

Подстановка уравнений (4.8) в систему (8.10) с последующими преобразованиями дает

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\gamma - r^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Из системы (4.11) следует, что в точке равновесия первое уравнение этой системы имеет вид

$$r(\gamma - r^2) = 0; \quad r \geq 0, \quad (4.12)$$

а второе уравнение системы (4.11) легко интегрируется

$$\varphi = t + t_0.$$

Следовательно, одно положение равновесия $r_1=0$ существует при любых значениях параметра γ . При $\gamma \leq 0$ других положений равновесия нет.

При $\gamma > 0$ первое уравнение системы (4.11) имеет еще одно состояние равновесия $r_2 = \sqrt{\gamma}$, которое является устойчивым.

Положение равновесия $r_2 = \sqrt{\gamma}$, соответствует устойчивой замкнутой траектории системы (4.8), тогда как положение равновесия $r_1 = 0$ первого уравнения системы (4.11) отвечает положению равновесия $(0,0)$ системы (4.8).

Таким образом, при переходе параметра γ через нуль слева направо (см. Рис. 4.2) устойчивый фокус становится неустойчивым и от него отделяется замкнутая траектория, диаметр которой растет пропорционально величине $\sqrt{\gamma}$.

В процессе проведения экспериментов при значениях параметра γ , близких к критическому, возникающее периодическое поведение мало отличается от стационарного решения, так как амплитуда циклического поведения очень мала и может теряться в экспериментальном шуме.

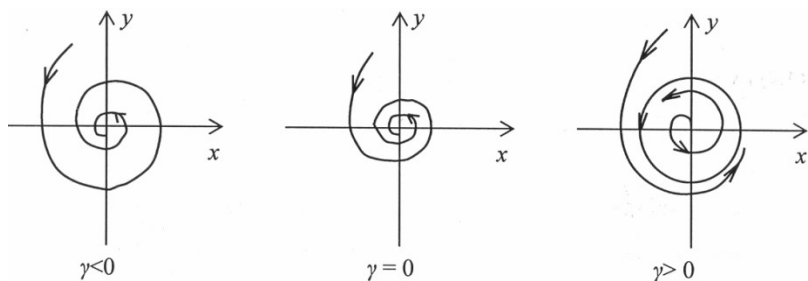


Рис. 4.2

Обратимся теперь к возникновению жесткой бифуркации Хопфа. Пусть задана система нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma x - y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \gamma y + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (4.13)$$

В системе (4.13) с возрастанием параметра γ область притяжения устойчивого фокуса (и амплитуда неустойчивого циклического решения) уменьшается, и при исчезновении периодической траектории положение равновесия становится неустойчивым (см. Рис. 4.3).

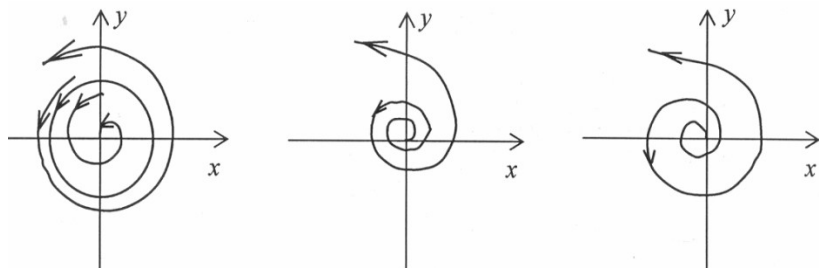


Рис. 4.3

Из неустойчивого состояния равновесия система под действием малого возмущения переходит в некоторый более отдаленный стационарный режим; следовательно, при малом изме-

нении параметра γ (в окрестности его бифуркационного значения) происходит сильное изменение состояния системы. Это изменение носит название *жесткой бифуркации* Хопфа.

Читателю предлагается установить, какой бифуркации Хопфа (мягкой или жесткой) соответствует уравнение Риккати (3.104) для бифуркационного параметра n ?

§4.2. Бифуркация образования первичного жизненного цикла

Уравнения первичного жизненного цикла (3.64) (Глава 3) были получены Хиггинсом [57]. В дальнейшем эти уравнения были обобщены путем введения дополнительного параметра m [43]; эти уравнения в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha[1 - (1 - m)xy - mx], \\ \frac{dy}{d\tau} = xy - \frac{q + 1}{q + y}y, \end{cases} \quad (4.14)$$

где имеем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &\equiv X/\bar{X}_2, & y &\equiv Y/\bar{Y}_2, & \tau &\equiv ta(c - \mu)/(Ka - b), \\ q &\equiv \frac{Ka(c - \mu)}{Kam - cb}, & m &\equiv \frac{b(c - \mu)}{\mu(Ka - b)}, & \alpha &\equiv \frac{\mu(Ka - b)^2}{a(c - \mu)}. \end{aligned}$$

Для построения портрета системы (4.14) на плоскости состояний необходимо найти ее главные изоклины. Уравнения горизонтальных изоклин, т.е. горизонтальных касательных ($dy/d\tau=0$), определяются выражениями

$$x_H = (q + 1)/(q + y) \quad \text{и} \quad y = 0;$$

изоклины вертикальных касательных будут:

$$x_v = 1/[(1 - m)y + m].$$

Гиперболы x_H и x_v пересекаются в особой точке $\bar{x} = \bar{y} = 1$. Линеаризация системы (4.14) вблизи этой точки позволяет

получить характеристическое уравнение для установившегося (стационарного) состояния

$$\lambda^2 + [\alpha - 1/(q + 1)]\lambda + \alpha[1 - m - 1/(q + 1)] = 0. \quad (4.15)$$

В результате анализа уравнения (4.15) приходим к заключению, что вид особой точки зависит от знака дискриминанта; особая точка может быть узлом или фокусом, а ее устойчивость определяется знаком выражения $\alpha - \frac{1}{q+1}$. На рис. 4.4 показан

портрет системы (4.15) на плоскости состояний для случая, когда выполняются соотношения $\left[\alpha + \frac{1}{q+1}\right]^2 < 4\alpha(m-1)$

$$\text{и } \alpha < \frac{1}{q+1};$$

в этом случае особая точка является неустойчивым фокусом. На Рис. 4.4 показаны фазовые траектории системы, а также изоклины, отмеченные штрихами. Условием бифуркации, т.е. обращение коэффициента при λ уравнения (4.15) в нуль, является равенство $\alpha = \frac{1}{q+1}$. На Рис. 4.4 предельный цикл отмечен жирной линией.

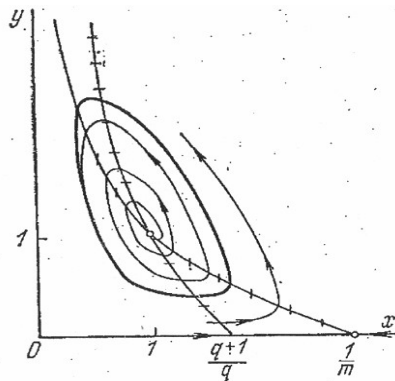


Рис. 4.4

Для системы (4.14) интерес представляет периодический режим, поскольку именно в случае автоколебаний репродукция является циклическим процессом: фаза синтеза полинуклеотидов Y сменяется фазой накопления свободных нуклеотидов X . Конечный продукт синтеза обладает *меньшей энтропией*, чем исходная смесь нуклеотидов. Это уменьшение энтропии с избытком возмещается за счет выделения тепла, поскольку процесс репродукции экзотермичен.

Количественно можно показать уменьшение энтропии, если перейти от статического уравнения (4.15) к соответствующему динамическому уравнению

$$\frac{d\lambda}{dt} = \lambda^2 + \gamma\lambda + \eta, \quad \lambda(0) = \lambda_0, \quad (4.16)$$

где

$$\gamma = \alpha - 1/(q + 1) \quad \text{и} \quad \eta = \alpha[1 - m - 1/(q + 1)].$$

Решение уравнения (4.16) имеет вид (1.19):

$$\lambda(t) = \lambda_1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\left[\frac{\lambda_0 + \lambda_2}{\lambda_0 - \lambda_1} \right] e^{2\beta t} - 1}, \quad (4.17)$$

где $\beta = \sqrt{\gamma^2 + \eta}$, $\lambda_1 = \beta - \gamma$, $\lambda_2 = \beta + \gamma$.

Из выражения (4.17) следует, что *при* $t \rightarrow \infty$, $\lambda(t) \rightarrow \lambda_1$. Это означает, что энтропия при $t \rightarrow \infty$, принимает минимальное значение, поскольку в этом случае дисперсия минимальна $\lambda(\infty) \rightarrow \lambda_{min}$.

Из Рис. 4.4 видно, что образование первичного жизненного цикла является циклическим процессом, причем *бифуркация*, которая имеет при этом место, *представляет собой мягкую бифуркацию Хопфа*.

§4.3. Бифуркация расщепления антагонистических уравнений

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \frac{b}{y}, & x(0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = cy - \frac{d}{x}, & y(0) = y_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Параметры a, b, c, d считаются положительными, а начальные состояния x_0 и y_0 – заданными. Система нелинейных дифференциальных уравнений (4.18) устроена так, что с увеличением переменной x (переменной y) ее влияние на второе (первое) из уравнений (4.18) уменьшается. В этом и заключается антагонизм этой системы уравнений.

Модель (4.18) используется при математическом моделировании сепаратистского движения и в проблеме землетрясений [58].

Одна из форм решения уравнений (4.18) имеет вид

$$\frac{y^a}{x^c} = K^{a+c} \left| 1 + \frac{\lambda}{W} \right|^{\frac{1}{\lambda} \frac{ad-b}{a+c}}, \quad (4.19)$$

где

$$K = \frac{|W + \lambda|^{D^{-1} + \frac{\beta}{\lambda}}}{W_0^{\frac{\beta}{\lambda}} x_0}, \quad W = xy, \quad W_0 = x_0 y_0,$$

$$\lambda = -\frac{b+d}{a+c}, \quad \beta = \frac{b}{a+c}, \quad D^{-1} = \frac{a}{a+c}.$$

Нас будет интересовать предельное решение, получаемое из (4.19), т.е. такое, при котором

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

где $y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{T}}$.

В пределе, когда выполняется (4.20), соотношение (4.19) должно превратиться в нулевое тождество, а для этого необходимо, чтобы имело место равенство

$$1 + \frac{\lambda}{W} = 0 \Rightarrow \frac{d}{x} = \frac{yd(a+c)}{b+d}. \quad (4.21)$$

Принимая во внимание соотношение (4.21) во втором уравнении системы (4.18), получим

$$\frac{dy}{dt} = -T^{-1}y, \quad (4.22)$$

где $T^{-1} = \frac{bc-ad}{b+d}$.

Поскольку мы должны были получить убывающую функцию (4.20), то постоянная времени T должна иметь положительный знак, что выполняется при $bc-ad > 0$. Если из соотношения $1 + \frac{\lambda}{W} = 0$ определить $\frac{b}{y}$ и подставить в первое уравнение системы (4.18), то получим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = T^{-1}x, \quad (4.23)$$

решение которого дает возрастающую функцию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow \infty, \quad (4.24)$$

где $x(t) = x_0 e^{\frac{t}{T}}$.

Антагонистические переменные x и y , полученные как предельные решения из соотношения (4.19), обладают тем свойством, что их произведение равно произведению их начальных состояний x_0 и y_0 , т.е. $W = xy = x_0 y_0 = const$.

Объединяя уравнения (4.22) и (4.23) в систему, получим два несвязанных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x, & x(0) = x_0, \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y, & y(0) = y_0, \quad x_0 < y_0, \end{cases} \quad (4.25)$$

если $bc - ad > 0$; $\alpha \equiv T^{-1} = \frac{bc - ad}{b + d}$.

Таким образом, связанные (сцепленные) между собой системой уравнений (4.18) переменные x и y в результате бифуркации расцепляются и удовлетворяют системе уравнений (4.25), в которой переменные x и y несвязаны между собой. Бифуркацию, в результате которой система (4.18) переходит в систему (4.25) будем называть «бифуркацией в бесконечности», поскольку эта бифуркация происходит при $t \rightarrow \infty$.

Если ввести обозначение

$$B = K^{a+c} \left| 1 + \frac{\lambda}{W} \right|^{\frac{1}{\lambda} \frac{\alpha d - bc}{\alpha + c}}, \quad (4.26)$$

то на плоскости состояний соотношение (4.19) может быть записано в виде

$$y = B^{\frac{1}{a}} x^{\frac{c}{a}}. \quad (4.27)$$

Выражение (4.27) представляет степенную функцию, характерную для процессов самоорганизованной критичности [59].

Следует отметить, что система нелинейных дифференциальных уравнений (4.18) имеет точное решение:

$$x = A \frac{e^{(\tau\alpha + \frac{\tau b}{F} - \frac{b}{F})t}}{\left| F e^{-\frac{t}{\tau}} - F_0 \right|^{\frac{b\tau}{F}}}, \quad y = G \frac{e^{(\tau c + \frac{\tau d}{F} - \frac{d}{F})t}}{\left| F e^{-\frac{t}{\tau}} - F_0 \right|^{\frac{d\tau}{F}}}. \quad (4.28)$$

где

$$A \equiv x_0 \frac{\left| F - F_0 e^{\frac{t_0}{\tau}} \right|^{\frac{b\tau}{F}}}{e^{(\alpha + \frac{d}{F})\tau t_0}} = const,$$

$$G \equiv y_0 \frac{\left| F - F_0 e^{\frac{t_0}{\tau} F} \right|^{\frac{d\tau}{F}}}{e^{(c+\frac{d}{F})\tau t_0}} = const ,$$

$$\tau = (\alpha + c)^{-1}, \quad F = \frac{b + d}{\alpha + c}, \quad F_0 = F + x_0 y_0.$$

Если в функции $W=xy$ учесть переменные x и y , определенные согласно (4.28), то B в формуле (4.27) будет зависеть от текущего времени, т.е. решение будет нестационарным

$$y = B(t) \frac{1}{\alpha} x^{\frac{c}{\alpha}}.$$

§4.4. Бифуркация системы уравнений, вызванная изменением скорости одной из переменной

Рассмотрим математическую модель биологических популяций «хищник–жертва»:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad a, b > 0, \quad (4.29)$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - py, \quad c, p > 0, \quad (4.30)$$

где x – число жертв, y – число хищников в момент времени t ; a , b , c , p – постоянные положительные параметры.

В начальный момент времени $t=0$ число жертв будет $x(0)=x_0>0$, а число хищников $y(0)=y_0>0$. Динамическая модель (4.29), (4.30) устойчива. На плоскости xoy ей соответствует фигура типа «Эллипса» (Рис. 2.3) (ГЛАВА 2).

Предположим теперь, что в модели (4.29), (4.30) скорость изменения количества хищников является отрицательной переменной, т.е. $dy/dt<0$. В этом случае вместо системы (4.29), (4.30) будем иметь систему

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad a, b > 0, \quad (4.29')$$

$$\frac{dy}{dt} = py - cxy, \quad p, c > 0, \quad (4.30')$$

Системе (4.29'), (4.30') на плоскости xoy соответствует фигура второго порядка типа «седло» (Рис.2.4) (ГЛАВА 2). Следовательно, перемена скорости изменения количества хищников от положительной до отрицательной переменной, т.е. от $dy/dt > 0$ до $dy/dt < 0$, вызывает бифуркацию от устойчивой фигуры типа «эллипса» (3.84), (3.85) до неустойчивой фигуры типа «седло» (3.84'), (3.86').

§4.5. Бифуркация в линейных системах первого порядка с запаздыванием

Выше было отмечено, что при функционировании самоорганизующихся систем, характерным является их циклическое поведение. Циклы могут возникать в системах порядка выше первого. Однако, в системах первого порядка также могут возникать циклическое поведение в том случае, если системы первого порядка содержат запаздывание. Ниже будут рассмотрены две системы первого порядка, содержащие запаздывание. Эти системы относятся к разным областям: к биологии и к экономике. Их объединяет то, что они описываются структурно-эквивалентными дифференциальными уравнениями. Рассмотрим модели этих систем в отдельности.

Пример из биологии касается моделирования гемопоза (кроветворения) [54]. В костном мозге (например, человека) имеются недифференцированные зародышные клетки, которые под воздействием управляющих систем превращаются в клетки-компоненты крови, например, эритроциты (красные кровяные тельца). Когда содержание кислорода в крови опускается ниже некоторого критического уровня, специальное вещество (эрит-

ропозэтин) стимулирует интенсивное превращение зародышевых клеток в эритроциты.

Мэки и Гласс [60] создали модель этого процесса

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) + \frac{\beta_0 \Theta^n x(t - \tau)}{\Theta^n + x^n(t - \tau)}, \quad (4.34)$$

где $x(t)$ – число клеток в момент времени t , α – постоянная смертности клеток, положительные постоянные β_0 , Θ^n , n , подбираются так, чтобы удовлетворить экспериментальным данным. Уравнение (4.34) имеет единственное стационарное решение $x^* = \Theta [H\beta_0/\alpha]^{1/n}$ ($H = (\beta_0 - \alpha)/\beta_0$). Линеаризованная в этом стационарном решении система имеет вид

$$\frac{du}{dt} = Au + Bu_\tau \quad (4.35)$$

или

$$\dot{u}(t) = Au(t) + Bu(t - \tau). \quad (4.35a)$$

где

$$u = x - x^*, \quad A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*}, \quad B = \left. \frac{\partial F}{\partial x_\tau} \right|_{x^*},$$

$$F = -\alpha x(t) + \frac{\beta_0 \Theta^n x(t - \tau)}{\Theta^n + x^n(t - \tau)}, \quad x_\tau \equiv x(t - \tau).$$

Исследование локальной устойчивости уравнения (4.34) в окрестности стационарного состояния x^* эквивалентно проверке решений уравнения (4.35) на локальную устойчивость в точке $u=0$. Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциально-разностному уравнению (4.35), получим, если в уравнении (4.35) сделаем подстановку $u = e^{\lambda\tau}$:

$$\lambda = A + B e^{-\lambda\tau}. \quad (4.36)$$

Решение уравнения (4.36) равносильно нахождению значения бифуркационного параметра τ . В общем случае число λ является комплексным, т.е. $\lambda \equiv \mu \pm j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$) и для того, чтобы точка $z=0$ была локально устойчива, необходимо, чтобы

$\mu \equiv \text{Re}(\lambda) < 0$. В работе [61] проделан полный анализ условий, при которых выполняется неравенство $\mu < 0$; эти условия могут быть записаны следующим образом:

$$|A| > |B|$$

или

$$|A| < |B| \text{ и } \tau < \frac{\text{Arccos}\left(-\frac{A}{B}\right)}{(B^2 - A^2)^{1/2}}; \quad (4.37)$$

в выражении (4.37) берется главное значение в числителе, т.е.: $0 \leq \text{Arccos}(-A/B) \leq \pi$. При выполнении условия (4.37) стационарное состояние x^* будет локально устойчивым, когда имеем

$$\tau < \tau^* = \frac{\text{Arccos}\left(-\frac{A}{B}\right)}{(B^2 - A^2)^{1/2}}$$

и будет терять устойчивость при переходе τ через τ^* .

Рассмотрим случай чисто мнимого значения λ , т.е. $\lambda = j\omega$, что эквивалентно $\mu = 0$. Подстановка $\lambda = j\omega$ в уравнение (4.36) дает

$$j\omega = A + B e^{-j\omega\tau} \quad (4.38)$$

или, что тоже самое

$$j\omega = (A + B \cos \omega\tau) - jB \sin \omega\tau. \quad (4.39)$$

Если уравнение (4.39) отдельно представим для действительной и мнимой частей, то получим два уравнения

$$A = B \cos \omega\tau \quad (4.40a)$$

и

$$\omega = B \sin \omega\tau, \quad (4.40b)$$

которые необходимо решить относительно ω и τ .

Из уравнений (4.40a) и (4.40b) имеем

$$\omega = (B^2 - A^2)^{1/2} \quad (4.41)$$

и

$$\tau^* = \frac{\text{Arccos}\left(-\frac{A}{B}\right)}{(B^2 - A^2)^{1/2}}. \quad (4.42)$$

Выражение (4.42) дает точное значение параметра бифуркации τ^* , при выполнении условия $\mu=0$. В результате изменения текущего значения параметра τ , приводящего к потере устойчивости стационарного состояния x^* , имеет место мягкая бифуркация Хопфа, при которой пара комплексно-сопряженных собственных чисел (корней) переходит из левой в правую полуплоскость комплексной плоскости.

Уравнения (4.41) и (4.42) позволяют оценить период колебания при потере устойчивости. Для значений параметров A , B , τ^* , определяемых выражением (4.42), уравнение (4.35) имеет решение $u(t) = e^{j\omega t}$, в котором угловая частота ω определяется согласно выражению (4.41). Поскольку частота ω и период T связаны соотношением $\omega=2\pi/T$, то с учетом выражения (4.42), получим

$$T = \frac{2\pi\tau^*}{\text{Arccos}\left(\frac{A}{B}\right)}. \quad (4.43)$$

Из соотношения (4.43) следует, что если A и B имеют один и тот же знак, то

$$2\tau^* \leq T \leq 4\tau^*, \quad (4.44)$$

а при разных знаках имеем

$$2\tau^* \leq T. \quad (4.45)$$

Из неравенств (4.44) и (4.45) следует, что в уравнении, с запаздывающим аргументом (4.43), можно наложить ограничения на период колебаний T в точке неустойчивости.

Рассмотрим теперь раннюю модель конъюнктурного цикла Калецкого [62].

Связь между производством и потреблением в динамических моделях, описывается следующими показателями, зависящими от времени: $\Phi(t)$ – наличный запас основных производственных фондов; $\tilde{G}(t)$ – интенсивность чистого выпуска капитальных ресурсов;¹ $C(t)$ – фонд потребления; $G(t)$ – фонд чистого накопления; $\tilde{N}(t)$ – национальный доход. Дополнительно вводится показатель $G^*(t)$ – намечаемая интенсивность капитальных вложений. Этот показатель определяется путем решения полученного линейного уравнения первого порядка с запаздыванием τ между моментом принятия решения и его реализацией.

Модель конъюнктурного цикла М. Калецкого описывается следующими соотношениями:

- 1) $\frac{d\Phi(t)}{dt} = \tilde{G}(t);$
- 2) $G(t + \tau) = G^*(t);$
- 3) $G^*(t) = \alpha[\tilde{N}(t) - C(t)] - \beta\Phi(t); \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0;$
- 4) $\tilde{N}(t) = C(t) + G(t);$
- 5) $C(t) = \rho_c \tilde{N}(t);$
- 6) $G(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t G^*(t) dt,$

где ρ_c – норма потребления, определяющая долю дохода, расходующую на потребление.

Соотношение 3) строится в предположении, что решение об интенсивности дополнительных вложений учитывает сбереженную часть национального дохода и наличный запас производственных фондов. Соотношение 6) строится в предположении, что общая сумма инвестиций в момент t равна среднему значению всех инвестиционных решений, принятых на интерва-

¹ Это выпуск фондообразующих продуктов сверх их расхода на возмещение износа фондов.

ле $(t-\tau, t)$.

Совместное решение соотношений 1) – 6) позволяет получить модель конъюнктурного цикла:

$$\dot{G}^*(t) = A_1 G^*(t) - B_1 G^*(t - \tau), \quad (4.46)$$

где

$$A_1 = \frac{\alpha}{\tau} - \beta, \quad B_1 = \frac{\alpha}{\tau}. \quad (4.47)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (4.46) имеет вид

$$\lambda = A_1 - B_1 e^{-\lambda\tau}. \quad (4.48)$$

Представим член $e^{-\lambda\tau}$, разложенный в ряд Маклорена, ограничиваясь первыми тремя членами

$$e^{-\lambda\tau} \simeq 1 - \frac{\lambda\tau}{1!} + \frac{\lambda^2\tau^2}{2!}. \quad (4.49)$$

С учетом разложения (4.49), а также коэффициентов (4.47), уравнение (4.48) примет вид

$$\frac{\alpha\tau}{2}\lambda^2 + (1 - \alpha)\lambda + \beta = 0. \quad (4.50)$$

Условие бифуркации, т.е. обращение коэффициента при λ в нуль есть

$$\alpha = 1. \quad (4.51)$$

При выполнении условия бифуркации (4.51) характеристическое уравнение (4.50) запишется в виде

$$\frac{\tau}{2}\lambda^2 + \beta = 0.$$

Делением последнего выражения на $\tau/2$ получим уравнение

$$\lambda^2 + \frac{2\beta}{\tau} = 0. \quad (4.52)$$

Выражение (4.52) показывает, что инвестиции капитальных вложений $G^*(t)$ должны осуществляться с частотой, определяемой соотношением $\left(\frac{2\beta}{t-\tau}\right)^{1/2} - \left(\frac{2\beta}{t}\right)^{1/2}$.

С увеличением запаздывания τ между моментом принятия решения и его реализацией, частота инвестиций ω_0 будет возрастать

$$\omega_0 = \left(\frac{2\beta}{t-\tau}\right)^{1/2} - \left(\frac{2\beta}{t}\right)^{1/2}.$$

* * *

Явление бифуркации весьма распространено в микромире, макромире и мегамире. Оно, обычно, распределено во времени и в пространстве. Ярким примером явления бифуркации может служить отделение человекообразных обезьян, в процессе эволюционного развития, от остальных приматов. Этот процесс длился многие тысячи лет, возможно имел место в различных регионах нашей планеты и привел к образованию *Homo sapiens*'а.

Изменение социально-политического строя на территории бывшего Советского Союза также является примером явления бифуркации.

Краткие комментарии к четвертой главе

На конкретных примерах приводятся понятия мягкой и жесткой бифуркаций Хопфа. Даются обобщенные уравнения первичного жизненного цикла, для которого показано условие бифуркации. Для антагонистических уравнений приводится условие расщепления связанных нелинейных дифференциальных уравнений. Исследуется система «хищник – жертва», для которой приводится условие бифуркации из устойчивого состояния в неустойчивое состояние. Рассмотрено условие возникновения бифуркации в двух линейных системах первого порядка с запаздыванием: биологической и экономической.

ГЛАВА 5

Оптимизационные характеристики при образовании организующихся систем

В живой природе, неживой природе, а также среди рукотворных систем весьма распространены организующиеся системы. Основной характеристикой этих систем является их структурная реализация, которая заключается в том, что данные системы структурно разомкнуты: реальный выходной процесс не сравнивается с желаемым и рассогласование (ошибка) между ними не используется для воздействия на входной процесс этой системы. На Рис. 5.1 приводится блок-схема организующейся системы.

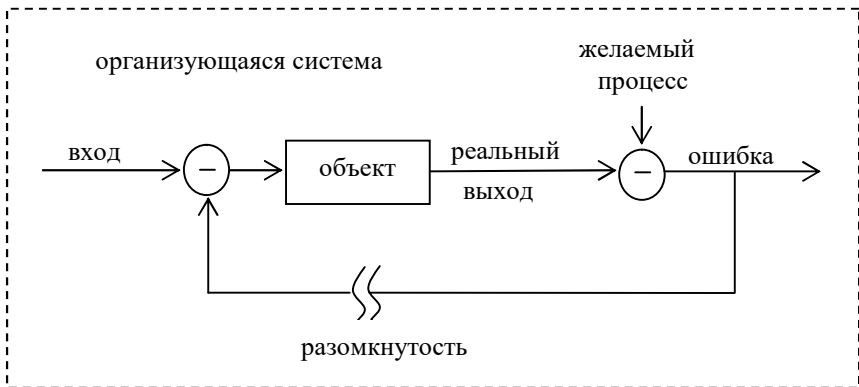


Рис. 5.1

Пример организующейся системы в живой природе: утром, при восходе Солнца, стебли некоторых растений вместе с цветком, открывающим лепестки, ориентируются так, что солнечные лучи (тепловое поле Солнца) оказываются перпендикулярно направленными (падающими) на цветок этих растений. Примером организующейся системы может служить процесс

обглаживания жирафом листьев баобаба (приведенный во введении), при котором последний начинает в листьях вырабатывать танин, оказывающийся смертоносным для жирафов. Эти объекты являются примерами естественных организующихся систем.

В настоящей главе рассмотрены три известные искусственные (рукотворные) организующиеся системы: реакция Белоусова–Жаботинского, лазер¹ и ячейка Бенара. Основы создания этих организующихся систем будут изложены с единой точки зрения: с оптимизационной позиции.

§5.1. Реакция Белоусова–Жаботинского (БЖ)

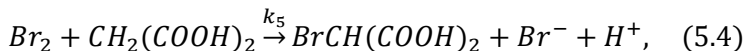
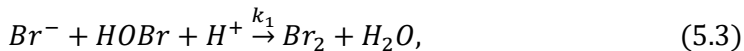
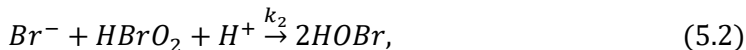
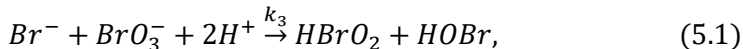
5.1.1. Химические предпосылки образования реакции БЖ

Реакция Белоусова–Жаботинского была открыта в бывшем Советском Союзе химиком Б.П. Белоусовым в середине пятидесятых годов XX века. Однако, из-за невежественного отношения руководителей некоторых журналов к работе Б.П. Белоусова, она была опубликована лишь в 1958 году [63]. Более десяти лет сообщение об этом открытии не появлялось на страницах научных публикаций, пока, наконец, работы А.М. Жаботинского не привлекли к этой реакции внимание широкой научной общественности. В настоящее время за этой реакцией закрепилось название реакции Белоусова–Жаботинского.

В работе [63] Б.П. Белоусов наблюдал продолжительные временные колебания при окислении лимонной кислоты броматом в присутствии иона церия в качестве катализатора. В настоящее время с точки зрения модели Филда–Кереса–Нойеса (ФКН) [64], основными реагентами этой реакции являются ион бромида Br^- , бромистая кислота $HBrO_2$ и окисленный ион

¹ light amplification by stimulated emission of radiation (laser) – происхождение аббревиатуры слова «лазер».

четырёхвалентного церия $CeIV$. Согласно этой модели основными реакциями являются следующие:

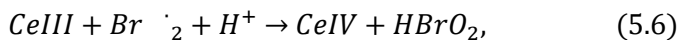
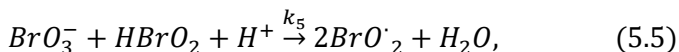


где k_i – константы скоростей реакций; эти константы согласно ФКН [64] имеют следующие численные значения:

$$k_1 = 8 \cdot 10^9 \text{ моль}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad k_2 = 2 \cdot 10^9 \text{ моль}^{-2} \cdot \text{с}^{-1},$$

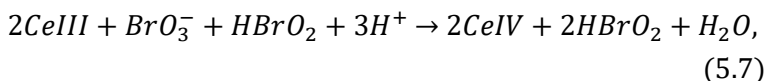
$$k_3 = 2,1 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}, \quad k_4^1 = 4 \cdot 10^7 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}, \quad k_5 = 10^{-4} \text{ моль}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Процесс превращения трехвалентного церия $CeIII$ в четырехвалентный церий $CeIV$ обеспечивается реакциями:

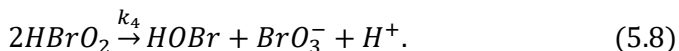


где BrO_2^\cdot – свободный радикал.

После сложения удвоенного выражения (5.6) с (5.5) получим

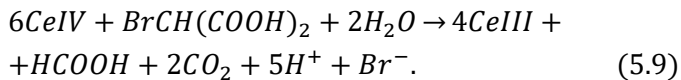


Скорость этой реакции контролируется скоростью реакции (5.6) с константой k_5 ; выражение (5.6) является быстрой реакцией. Следует заметить, что здесь $HBrO_2$ регенерируется автокаталически. В реакции (5.7) $HBrO_2$ представимо следующим образом



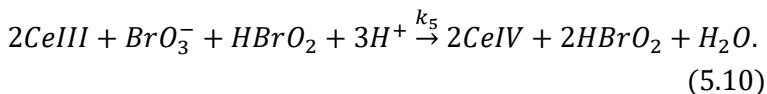
Четырёхвалентный церий $CeIV$ реагирует в соответствии со схемой

¹ Константа k_4 используется в уравнении (5.8)

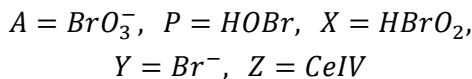


В реакции (5.9) Br^- производится в достаточном количестве, так что реакция (5.2) вновь становится доминирующей в потреблении $HBrO_2$, концентрация которой быстро падает, а концентрация Br^- возрастает. Весь цикл теперь начинается снова, когда концентрация $CeIV$ существенно уменьшается.

В данном цикле к четырем наиболее важным реакциям (5.1), (5.2), (5.7), (5.9) добавляется следующая



Введем обозначения



и промоделируем (5.10) в рассмотренном порядке последовательностью из пяти необратимых реакций



где $K_1 = k_1[H^+]^2 \approx 2.1 \text{ моль}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$,
 $K_2 = k_2[H^+] \approx 2 \cdot 10^9 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$,
 $K_3 = k_3[H^+] \approx 10^4 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$,
 $K_4 = k_4 \approx 4 \cdot 10^7 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$,
 $K_5 = k_5 \approx 0,4 [BrCH(COOH)_2] \text{ моль}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
 $[BrCH(COOH)_2] \ll 2 \cdot 10^{-1} \text{ моль}$,

f – стехиометрический коэффициент.

Применение закона действующих масс (см. раздел 3.4.3 случай 5) к соотношениям (5.11) – (5.15) дает только скорости изменения трех промежуточных компонентов X , Y и Z , поскольку продукт P не влияет на реакции. Система кинетических уравнений, в которой концентрации веществ обозначены теми же буквами, что и сами вещества, имеет вид [65]

$$\frac{dX}{dt} = K_1AY - K_2XY + K_3AX - 2K_4X^2, \quad (5.16)$$

$$\frac{dY}{dt} = -K_1AY - K_2XY + fK_5Z, \quad (5.17)$$

$$\frac{dZ}{dt} = 2K_3AX - K_5Z. \quad (5.18)$$

Для приведения системы (5.11) – (5.15) к безразмерному виду необходимо ввести переменные

$$x(\tau) = \frac{K_2}{K_1A}X \approx 1,6 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л}}\right)^{-1} [HBrO_2], \quad (5.19)$$

$$y(\tau) = \frac{K_2}{K_3A}Y \approx 3,3 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л}}\right)^{-1} [Br^-], \quad (5.20)$$

$$z(\tau) = \frac{K_2K_5}{2K_1K_3A}Z \approx 5,3 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{МОЛЬ}}{\text{Л}}\right)^{-1} [CeIV], \quad (5.21)$$

где

$$\tau = K_1At \approx 1,3 \cdot 10^{-1}(c^{-1})t, \quad \varepsilon = \frac{K_1}{K_3} \approx 2 \cdot 10^{-1},$$

$$\varkappa = \frac{K_1A}{K_5} \approx 3,1 \cdot 10^2, \quad \mu = \frac{2K_1K_4}{K_2K_3} \approx 8,4 \cdot 10^{-6}.$$

С учетом обозначений (5.19) – (5.21) дифференциальные уравнения (5.16) – (5.28) примут вид

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = x + y - xy - \mu x^2, \quad (5.22)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = 2fz - y - xy, \quad (5.23)$$

$$\frac{dz}{dt} = x - z. \quad (5.24)$$

Обратимся теперь к возможности перехода в реакции БЖ от объемного протекания к описанию движения волнового фронта в этой реакции. Волновой фронт зависит от концентрации бромистой кислоты ($HBrO_2$), которую мы обозначим через X и от концентрации иона бромид (Br^-), обозначенной Y . Предполагается, что компоненты X и Y диффундируют с постоянными коэффициентами диффузии D_X и D_Y ; функции X и Y считаются зависимыми только от переменных x и t . Предположение о постоянных (и даже равных) коэффициентах диффузии приемлемо, поскольку в экспериментах X и Y малы. Считается, что на фронте волны имеет место такая последовательность реакций, в результате которых концентрация иона бромида понижается до малой величины, а концентрация бромистой кислоты повышается от малой концентрации до максимальной; при этом ион церия находится в состоянии $CeIII$. Это состояние церия означает, что $Z=0$, причем Z обозначает концентрацию $CeIV$.

Следовательно, при $Z=0$ вместо системы уравнений (5.11) – (5.15) будем иметь следующую систему уравнений:



где $X(x, t) = [HBrO_2]$, $Y(x, t) = [Br^-]$.

Закон действующих масс, примененный к (5.25) с учетом диффузии реагентов X и Y , приводит к следующим уравнениям [65]

$$\frac{dx}{dt} = K_1AY - K_2XY + K_3AX - 2K_4X^2 + D \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}, \quad (5.26)$$

$$\frac{dY}{dt} = -K_1AY - K_2XY + D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad (5.27)$$

где положено $D_X = D_Y = D$. Для того, чтобы привести выражения (5.26) и (5.27) к безразмерному виду, введем обозначения

$$\begin{aligned} u &= \frac{2K_4X}{K_3A}, & v &= \frac{2K_2Y}{K_3Ar}, \\ x' &= (K_3A/D)^{1/2}x, & t' &= K_3At, \\ L &= \frac{2K_4K_1}{K_2K_3}, & M &= \frac{K_1}{K_3}, & b &= \frac{2K_2}{K_4}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

где r – параметр, который можно менять.

Форма замены переменных (5.28) дает возможность рассматривать в качестве практически интересных те решения, для которых

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (5.29)$$

Введение параметра r отражает тот факт, что концентрация иона бромидов далеко впереди волнового фронта может меняться.

С учетом обозначений (5.28) система уравнений (5.26), (5.27) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t'} = Lrv + u(1 - u - rv) + \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}, \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t'} = -Mv - buv + \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2}. \quad (5.31)$$

На Рис. 5.2 показаны волны реакции БЖ. Слева видны концентрические волны, распространяющиеся от точечного источника. Справа видны спиральные волны, вращающиеся по часовой и против часовой стрелки.

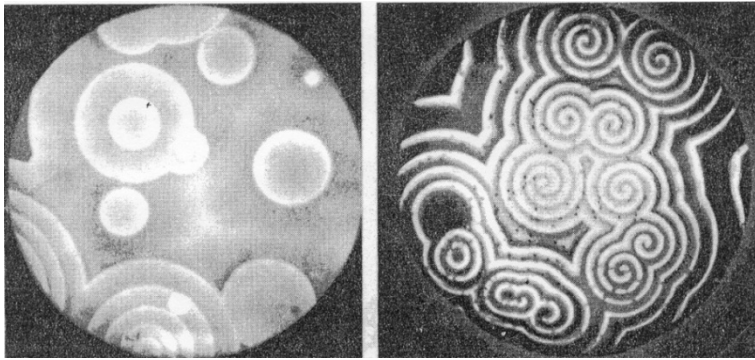


Рис. 5.2

5.1.2. Детерминированный хаос (странный аттрактор) и оптимизационные характеристики реакции Белоусова–Жаботинского

Если в системе уравнений (5.22) – (5.24) положить согласно [65], что коэффициент f равен двум, т.е. $f=2$, то эта система при $\tau=t$ запишется в виде

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} (x + y - xy - \mu x^2), \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = z - y - xy, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} (x - z). \quad (5.34)$$

Для данного странного аттрактора фазовый объем определяется согласно выражению

$$W = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} (1 - y) - \left(\frac{2\mu}{\varepsilon} + 1 \right) x - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (5.35)$$

Существование странного аттрактора требует выполнения условия, при котором фазовый объем (5.35) будет сокращаться. Это означает выполнение неравенства

$$\frac{1}{\varepsilon}(1 - y) - \left(\frac{2\mu}{\varepsilon} + 1\right)x - \left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right) < 0.$$

Следовательно, согласно последнему неравенству, фазовый объем системы (5.32) – (5.34) должен сжиматься, если выполняется соотношение

$$\frac{1}{\varepsilon} - \left(1 + \frac{1}{\varkappa}\right) < \frac{1}{\varepsilon}y + \left(\frac{2\mu}{\varepsilon} + 1\right)x. \quad (5.36)$$

Из приведенных в разделе 5.1.2 результатов следует, что переменные величины x и y изменяются в таких пределах, что при положительных значениях параметров ($\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\varkappa > 0$), неравенство (5.36) всегда выполняется. Таким образом, система уравнений (5.32) – (5.34) является странным аттрактором, т.е. индуцирует детерминированный хаос.

Обратимся теперь к оптимизации уравнений БЖ согласно уравнению (3.24a) Эйлера–Лагранжа.

Заметим, что величины L и M в уравнениях (5.30) и (5.31) настолько малы ($L \approx 8.4 \cdot 10^{-6}$; $M \approx 2.1 \cdot 10^{-4}$), что ими можно пренебречь. Тогда модельная система уравнений реакции БЖ (если опустить штрих « $\dot{}$ » у t), примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u - rv) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -buv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (5.37)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -buv + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (5.38)$$

где r и $b=25$ – положительные параметры.

Мы будем искать решение системы (5.37), (5.38), удовлетворяющее граничным условиям [65] в виде

$$\begin{cases} u(-\infty, t) = v(\infty, t) = 0, \\ u(\infty, t) = v(-\infty, t) = 1. \end{cases} \quad (5.39)$$

Влияние на реакцию БЖ внешних факторов, таких как температура, давление, облучение и т.д. исключается, т.е. эта реакция считается консервативной. Поэтому уравнения (5.37) и

(5.38) инвариантны относительно замены $x \rightarrow -x$; исходя из этого, в выражениях (5.39) 1 и 0 можно поменять местами.

Заметим, что гиперболический тангенс и гиперболический секанс удовлетворяют граничным условиям (5.39). Поэтому нами будут взяты эти функции как решения системы уравнений (5.37), (5.38), т.е.

$$u = th(ax - \eta t), \quad (5.40)$$

$$v = sech(ax - \eta t). \quad (5.41)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0. \quad (5.42)$$

В уравнении (5.42) функцию Лагранжа F получим, если в систему уравнений (5.37), (5.38), подставим значения u и v , взятые согласно выражениям (5.40) и (5.41); в результате этой подстановки получим (см. текст после формулы (3.128б)):

$$F = 2\alpha^4 sech^4(ax - \eta t) + \alpha^2 r sech^3(ax - \eta t) - \chi sech^2(ax - \eta t) - \alpha^2 r sech(ax - \eta t) + m, \quad (5.43)$$

где

$$\chi = 2\alpha^4 + \alpha^2 + \eta^2 + \eta b + \eta + b, \quad m = \alpha^2 + \eta + b.$$

Если изменяемый параметр r выбрать равным α^2 т.е. $r = \alpha^2$, то функция Лагранжа (5.43) примет вид

$$F = 2\alpha^4 sech^4(ax - \eta t) + \alpha^4 sech^3(ax - \eta t) - \chi sech^2(ax - \eta t) - \alpha^4 sech(ax - \eta t) + m. \quad (5.44)$$

В уравнении Эйлера–Лагранжа (5.42) функция u имеет вид $sech(ax - \eta t)$, т.е. $y = sech(ax - \eta t)$, а t рассматривается как параметр. Если члены уравнения (5.42) F_y и $F_{xy'}$ вычислим, то они окажутся равными, т.е. $F_y = F_{xy'}$ и уравнение (5.42) запишется так

$$F_{yy'} \cdot y' + F_{y'y'} \cdot y'' = 0. \quad (5.45)$$

Вычисление $F_{yy'} \cdot y'$ и $F_{y'y'} \cdot y''$ дает

$$F_{yy'} \cdot y' = 24\alpha^4 \operatorname{sech}^3(ax - \eta t) + 6\alpha^4 \operatorname{sech}^2(ax - \eta t) - 2\chi \operatorname{sech}(ax - \eta t),$$

$$F_{y'y'} \cdot y'' = 24\alpha^4 \frac{\operatorname{sech}^3(ax - \eta t)}{\operatorname{th}^2(ax - \eta t)} [1 - 2\operatorname{sech}^2(ax - \eta t)] + 6\alpha^4 \frac{\operatorname{sech}^2(ax - \eta t)}{\operatorname{th}^2(ax - \eta t)} [1 - 2\operatorname{sech}^2(ax - \eta t)] - 2\chi \frac{\operatorname{sech}(ax - \eta t)}{\operatorname{th}^2(ax - \eta t)} [1 - 2\operatorname{sech}^2(ax - \eta t)].$$

Подставляя значения $F_{yy'} \cdot y'$ и $F_{y'y'} \cdot y''$ в уравнение (5.45), получим

$$-24\alpha^4 \operatorname{sech}^5(ax - \eta t) - 3\alpha^4 \operatorname{sech}^4(ax - \eta t) + (12\alpha^4 + \chi) \operatorname{sech}^3(ax - \eta t) + 3\alpha^4 \operatorname{sech}^2(ax - \eta t) - \chi \operatorname{sech}(ax - \eta t) = 0. \quad (5.46)$$

Простое преобразование последнего выражения при $\chi=0$, дает

$$3\alpha^4 \operatorname{sech}^2(ax - \eta t) [8\operatorname{sech}^3(ax - \eta t) + \operatorname{sech}^2(ax - \eta t) - 4\operatorname{sech}(ax - \eta t) - 1] = 0. \quad (5.47)$$

Так как $\operatorname{sech}(ax - \eta t) = y$, то вместо (5.47) будем иметь

$$3\alpha^4 y^2 (8y^3 + y^2 - 4y - 1) = 0. \quad (5.47a)$$

Поскольку $y^2 \neq 0$, то имеем кубическое уравнение

$$8y^3 + y^2 - 4y - 1 = 0. \quad (5.48)$$

Выполнение условия $\chi=0$ означает наличие предельного цикла для параметра α . Скорость протекания реакции БЖ определяется коэффициентом η ; этот коэффициент примем равным 1. Условие $\chi=0$ означает существование биквадратного уравнения для параметра α :

$$2\alpha^4 + \alpha^2 + 2(1 + b) = 0.$$

Введем обозначение $z = \alpha^2$, тогда получим квадратное уравнение

$$2z^2 + z + 2(1 + b) = 0. \quad (5.49)$$

Решение уравнения (5.49) дает корни ($b=25$):

$$z_1 = -\frac{1}{4} + j5,042 = \varphi + j\psi, \quad (5.50)$$

$$z_2 = -\frac{1}{4} - j5,042 = \varphi - j\psi. \quad (5.51)$$

Согласно обозначению $z = \alpha^2$ имеем

$$\alpha_{1,2} = \pm R e^{j(\Theta + 2\pi k)}, \quad (5.52)$$

где $R = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$, $\cos \Theta = \frac{\varphi}{R}$, $\sin \Theta = \frac{\psi}{R}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

С учетом формулы (5.52) для знака «+» получим

$$\alpha_1 = \sqrt{\varphi + j\psi} = \pm \sqrt{R} e^{j\frac{1}{2}\Theta} = \pm \sqrt{R} \left(\cos \frac{\Theta}{2} + j \sin \frac{\Theta}{2} \right).$$

Из последнего выражения следует

$$|\alpha| = |\alpha_1| = |\alpha_2| = |\pm \sqrt{R}| e^{j\frac{1}{2}\Theta}. \quad (5.53)$$

Согласно формуле (5.53) получим, что радиус предельного цикла равен

$$\lim_{\Theta \rightarrow 0} |\alpha| = \sqrt{R} = \sqrt{25,5} \approx 5,05.$$

Таким образом, в реакции БЖ существует мягкая бифуркация Хопфа с радиусом предельного цикла равным $R \approx 5,05$, т.е. этот предельный цикл является устойчивым.

С целью показа в реакции БЖ существования мультистабильных состояний, обратимся к уравнению (5.48). Это алгебраическое кубическое уравнение. Решение кубического уравнения имеет либо один действительный и два комплексных корня, либо три действительных корня. Для параметров уравнения (5.48) имеем три действительных корня:

$$y_1 = \beta \equiv 0,7580; \quad y_2 = \gamma \equiv -0,6143; \quad y_3 = \rho \equiv -0,2688.$$

С учетом этих корней уравнение (5.48) запишется так

$$8[(y - \beta)(y - \gamma)(y - \rho)] = 0. \quad (5.54)$$

Поскольку $8 \neq 0$, то последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & [sech(ax - \eta t)_1 - \beta][sech(ax - \eta t)_2 - \gamma] \times \\ & \times [sech(ax - \eta t)_3 - \rho] = 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Приравнивая нулю каждый сомножитель уравнения (5.55), получим

$$\begin{cases} (ax - \eta t)_1 = Arsech(\beta) \equiv A = const, \\ (ax - \eta t)_2 = Arsech(\gamma) \equiv B = const, \\ (ax - \eta t)_3 = Arsech(\rho) \equiv C = const. \end{cases} \quad (5.56)$$

Состояния реакции БЖ, в которой выполняются выражения (5.56), называются мультистабильными состояниями. Следовательно, в реакции БЖ возможно существование трех мультистабильных состояний.

Обратимся теперь к установлению существования в реакции БЖ уединенных волн (солитонов), имеющих химическую природу. С этой целью рассмотрим уравнение (5.47). В этом уравнении есть четыре уединенные волны; эти волны обозначим буквой $\omega_1 (i = 1, 2, 3, 4)$. Первая уединенная волна есть

$$\omega_1 = sech^2(ax - \eta t). \quad (5.57)$$

Остальные три уединенные волны могут быть получены путем умножения двух сомножителей уравнения (5.54), находящихся в квадратных скобках, и их приравниванием нулю:

$$\omega_2 \equiv sech^2(ax - \eta t)_2 = (\beta + \gamma)v_2 - \beta\gamma, \quad (5.58)$$

$$\omega_3 \equiv sech^2(ax - \eta t)_3 = (\beta + \rho)v_3 - \beta\rho, \quad (5.59)$$

$$\omega_4 \equiv sech^2(ax - \eta t)_4 = (\gamma + \rho)v_4 - \gamma\rho, \quad (5.60)$$

где $v_i = sech(ax - \eta t)_i$, $i = 2, 3, 4$.

Таким образом, в реакции БЖ обнаружены: странный аттрактор, предельный цикл, мультистабильные состояния и уединенные волны (солитоны).

Следует отметить, что в случае поверхностного катализа в книге [7] приводится семь компонентов и столько же катализаторов, которые обеспечивают существование такого поведения, которое наблюдается в реакции БЖ. Этот факт свидетельствует о широком распространении в природе химических осцилляторов.

§ 5.2. Лазер

В литературе лазеры часто называют *оптическими квантовыми генераторами* (ОКГ).

В 1960г. американским физиком Т. Мейманом был создан лазер, работающий в оптическом диапазоне – *рубиновый лазер*.

В 1960г. группой А. Джавана (США) был создан первый *газовый лазер*, работающий на смеси атомов нейтральных газов гелия и неона, помещенных в стеклянную трубу.

В 1962–1963 годах были созданы первые полупроводниковые лазеры на сложных органических соединениях, называемых *красителями*.

В 1964–1969 годах появились сообщения об *ионных лазерах*, работающих на парах металлов. В настоящее время список лазерных материалов практически неограничен и насчитывает много десятков твердых, жидких и газообразных веществ. С точки зрения подхода, излагаемого в настоящей монографии, лазеры относятся к рукотворным организуемым системам.

5.2.1. Физические, технические и математические характеристики лазера

Предположим для простоты, что атом может находиться в двух состояниях: n и m (соответствующие значения энергии E_n и E_m , причем $E_n > E_m$). Обозначим через N_n и N_m числа атомов в системе соответственно в верхнем n и нижнем m состояниях (ниже мы будем пользоваться термином населенности состояний). В дальнейшем предполагается, что вещество находится в поле равновесного излучения со спектральной объемной плотностью u_ω , которая дается формулой Планка

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / (kT)} - 1}, \quad (5.61)$$

c – скорость света.

При взаимодействии излучения с веществом мы будем рассматривать три вида радиационных переходов атомов из одного энергетического состояния в другое.

1) Атом, первоначально находившийся в верхнем состоянии n , может оказаться в нижнем m за счет *спонтанного* (*самопроизвольного*) перехода с излучением фотона с частотой

$$\omega = (E_n - E_m) / \hbar, \quad (5.62)$$

где \hbar – постоянная Планка.

Физической причиной спонтанных переходов принято считать флуктуации в квантовых системах. Поведение атома при спонтанном переходе не зависит от интенсивности поля излучения, а определяется только внутренними свойствами соответствующих состояний.

2) Атом, находящийся в верхнем состоянии n может перейти в нижнее m с излучением фотона частоты ω (даваемого формулой (5.62)) под воздействием внешнего поля этой же частоты. Такой переход называют *индуцированным* (или *вынужденным*).

Излучение, возникающее в результате такого перехода, называют *индуцированным* (или *вынужденным*). Вследствие этого при вынужденных переходах частота, направление распространения и поляризация индуцированного излучения в точности совпадают с частотой, направлением и поляризацией электромагнитного (или электрического) поля, вызывающего это излучение. Фазы стимулирующих и индуцированных фотонов также жестко связаны между собой. Следовательно, индуцированное излучение всегда когерентно с внешней электромагнитной волной.

3) Атом, находящийся в нижнем состоянии m , может перейти в верхнее n поглощением энергии внешнего поля. Как и в случае 2), этот переход носит резонансный характер, поскольку атом поглощает фотон с частотой ω , определяемой формулой (5.62).

Рассмотрим принцип действия *лазера Меймана*, в котором в качестве активной среды используют кристалл рубина. Лазерный рубин имеет бледно-розовый цвет и содержит по массе около 0,05% Cr_2O_3 в матрице Al_2O_3 . Схема этого лазера представлена на Рис. 5.3.

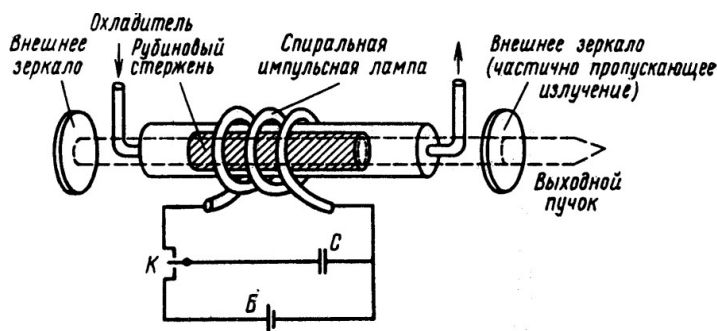


Рис. 5.3

На этом рисунке имеем следующие обозначения:

С – конденсатор,

Б – батарея,

К – ключ.

Процесс передачи рабочему телу ОКГ энергии для создания инверсной населенности уровней называют *накачкой*.

Ниже будет рассмотрена модель лазера, основанная на диффузии фазы комплексной амплитуды для «волн вращающейся поляризации» осцилятора Ван-дер-Поля. Для лучшего понимания наличия в модели Ван-дер-Поля осцилирующих колебаний, рассмотрим уравнения этого осцилятора

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{v} \left(y - \frac{x^3}{3} + x \right), \\ \frac{dy}{dt} = -vx, \quad v > 0. \end{cases} \quad (5.63)$$

Необходимо описать появление циклического поведения системы (5.63) в результате бифуркации, как функции параметра v для случая $0 < v \ll 1$.

При $x=y=0$ имеем единственное стационарное состояние, для которого характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \frac{1}{v}\lambda - 1 = 0 \quad (5.64)$$

определяется из выражения

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{v} - \lambda & \frac{1}{v} \\ -v & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корнями характеристического уравнения (5.64) являются

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2v} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v^2} - 4 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, при $v > 1/2$ существует неустойчивый фокус, а при $0 < v < 1/2$ имеем неустойчивый узел. Для случая $0 < v \ll 1$ существует предельный цикл, показанный на Рис. 5.4. Из этого рисунка видно, что устанавливается устойчивый предельный

цикл. Переход с одной ветви кубической параболы на другую ветвь происходит в результате скачка.

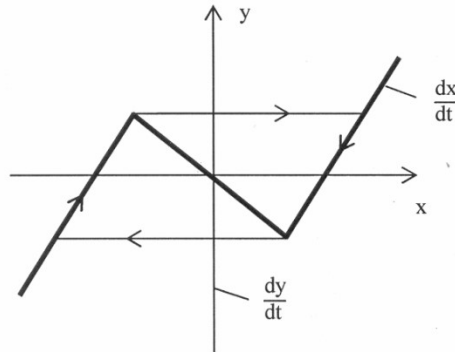


Рис. 5.4

Реальная модель лазерного излучения была предложена Глаубером [66], а также Клаудером и Сударшаном [67]. Эта модель основана на предположении о диффузии фазы комплексной амплитуды. Рискен [68], использовал нелинейную теорию лазера, а также приближение «волн вращающейся поляризации» для осцилятора Ван-дер-Поля, записал уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова для плотности вероятности распределения $P(r)$ лазерного излучения

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(\omega - r^2)r^2 P(r)] = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P(r)}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

В уравнении (5.65) приняты следующие обозначения: r – безразмерный модуль комплексной амплитуды поля, φ – фаза комплексной амплитуды поля, а ω – параметр накачки.

Следует отметить, что при работе лазера в режиме ниже порога генерации $\omega < 0$, выше порога генерации $\omega > 0$, а на пороге генерации, называемым «пиковым режимом» $\omega = 0$. Стационарное решение уравнения (5.65) имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(r) &= \frac{\alpha}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^4}{4} + \omega \frac{r^2}{2}\right) = \\
 &= \frac{\alpha}{2\pi} \exp\left(\frac{\omega^2}{4}\right) \exp\left[-\frac{1}{4}(r^2 - \omega^2)\right], \quad (5.66)
 \end{aligned}$$

где нормирующий коэффициент α определяется согласно выражению

$$\alpha = \left[\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{r^4}{4} + \omega \frac{r^2}{2}\right) r dr \right]^{-1}$$

Безразмерный модуль r зависит от интенсивности излучения I следующим образом

$$r = I/I_0 \sqrt{\pi}, \quad (5.67)$$

где I_0 – средняя интенсивность на пороге генерации.

С учетом обозначения (5.67) формула (5.66) примет вид

$$\begin{aligned}
 P(I) &= \frac{2}{\pi I_0} \frac{\exp(-\omega^2)}{1 + \operatorname{erf} \omega} \exp\left(-\frac{I^2}{\pi I_0^2} + 2 \frac{\omega I}{\sqrt{\pi} I_0}\right) = \\
 &= \frac{2}{\pi I_0} \frac{1}{1 + \operatorname{erf} \omega} \exp\left[-\frac{I}{\pi I_0} (I - \sqrt{\pi} \omega I_0^2)\right], \quad (5.68)
 \end{aligned}$$

где $I \geq 0$, $P(I) = 0$ при $I < 0$;

В выражении (5.68) принято известное обозначение

$$\operatorname{erf} \omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-x^2) dx.$$

Плотность распределения вероятности лазерного излучения (5.68) другими методами получили Флек [68], Скалли и Лэмб [69], Вейдлик, Рискен и Хакен [70], а также Лэкс [71].

Лазер имеет три характерных режима работы. Рассмотрим в отдельности эти режимы работы лазера.

Ниже порога генерации $\omega < 0$ и, если $|\omega|$ достаточно велико, то

$$P(I) \approx \text{const} \exp\left(-\frac{2|\omega|I}{\sqrt{\pi}I_0}\right),$$

т.е. мы получаем экспоненциальное распределение плотности лазерного излучения. Таким образом, плотность вероятности излучения лазера при работе в режиме ниже порога генерации является гауссовой.

Вблизи порога и на пороге генерации распределение $P(I)$ дается формулой (5.68).

При работе лазера выше порога генерации, т.е. когда $\omega > 0$, применима теория линеаризации, согласно которой можно написать

$$\sqrt{I} = \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\omega I_0} (1 + \varepsilon),$$

где ε – малый параметр. Поскольку функция (5.68) имеет при этом острый пик, то согласно (5.68) будем иметь

$$\begin{aligned} P(I) &= \frac{1}{\pi I_0} \frac{1}{1 + \operatorname{erf} \omega} \exp[-\omega^2 ((1 + \varepsilon)^2 - I)^2] \approx \\ &\approx \text{const} \cdot \exp\left[-4\omega^2 \frac{[\sqrt{I} - \sqrt[4]{\pi} \sqrt{\omega I_0}]^2}{\sqrt{\pi} \omega I_0}\right] = \\ &= \text{const} \cdot \exp\left[-\frac{4\omega}{\sqrt{\pi} I_0} [\sqrt{I} - \sqrt{\sqrt{\pi} \omega I_0}]^2\right]. \end{aligned}$$

Следовательно, распределение амплитуды $P(\sqrt{I})$ представляет собой гауссову функцию с максимумом при $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{\pi} \omega I_0}$, которая в пределе $\omega \rightarrow \infty$ переходит в распределение $\delta(I - \langle I \rangle)$. В этом случае выражение (5.68) можно рассматривать как «сглаженное» в виде гаусова распределения δ – распределение $\delta(I - \sqrt{\pi} \omega I_0)$.

Классическая модель Лоренца [72] предназначалась для математического моделирования процессов происходящих в атмосфере. Эта же модель, описывающая также конвекцию жид-

кости, при больших числах Прандтля ($\sigma \gg 1+b$) уже не соответствует реальной конвекции, однако представляет интерес для физиков, работающих в области математического моделирования работы лазера, и, с точки зрения математики, как система с негрубым гиперболическим аттрактором.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих работу лазера [5]:

$$\begin{cases} \dot{E} = -\alpha E + gP + E, \\ \dot{P} = -\gamma P + gED + \Gamma, \\ \dot{D} = \gamma_{II}(D_0 - D) - g(EP^* + E^*P) + \Gamma_D, \end{cases} \quad (5.69)$$

где

$E(x,t)$ – электрическое поле накачки лазера,

$P(x,t)$ – поляризация,

$D(x,t)$ – медленно изменяющаяся инверсия,

D_0 – инверсия, порожденная процессом накачки и процессами релаксации, не приводящими к испусканию света лазером,

α – коэффициент затухания полевой моды лазера,

g – константа связи между полевой модой и атомным дипольным моментом γ ,

γ_{II} – постоянная релаксации инверсной населенности атома,

Γ и Γ_D – флуктуирующие силы, имеющие гауссово распределение,

P^* и E^* – статистически сопряженные величины, например

$$\overline{|P(x,t)|^2} = 2P^*(t)P(t).$$

В пиковом режиме работы лазера, т.е. когда имеем $\omega = 0$, модель лазера (5.69) переходит в модель Лоренца

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (5.70)$$

где приняты следующие обозначения: $X \triangleq E$, $Y \triangleq P$, $Z \triangleq D$, $\sigma = \nu/\alpha$ – число Прандтля, $r = R_a/R_c$ – приведенное число Рейля, $b = 4(1 + a^2)^{-1}$, a – постоянное число, а точка означает производную по безразмерному времени $\tau = \pi^2 h^{-2}(1 + a^2)\alpha t$.

В модели (5.70) переменные X , Y , Z означают:

X – амплитуда конвективного движения;

Y – разность температур для течений вверх и вниз;

Z – отклонение вертикального температурного профиля от линейного.

Поскольку σ , r и b числа, то они являются безразмерными параметрами; значения параметров σ и b обычно берутся фиксированными ($\sigma=10$, $b=8/3$), а поведение системы (5.70) исследуется в зависимости от параметра r .

Основными свойствами аттрактора Лоренца являются.

1) Уравнения системы (5.70) инвариантны относительно преобразования:

$$X \rightarrow -X, \quad Y \rightarrow -Y, \quad Z \rightarrow Z.$$

2) Фазовый объем сжимается (сокращается) с постоянной скоростью

$$\Lambda = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1), \quad (5.70a)$$

которая существенна для обычно используемых параметров ($\sigma=10$, $b=8/3$) и составляет сокращение фазового объема в 10^6 раз ($e^{-\Lambda} = e^{13,7} \approx 10^6$) за единицу времени.

Таким образом, в отличие от гамильтоновых систем с их фундаментальным законом сохранения фазового объема, для диссипативных систем, к которым относится лазер, характерно постоянное уменьшение фазового объема со временем. Это приводит к тому, что все траектории движения системы (5.70) притягиваются к некоторой поверхности (аттрактору), размерность которой меньше, чем у исходного фазового пространства.

5.2.2. Оптимизационные характеристики лазера

Как уже отмечалось в третьей главе, уравнению Эйлера–Лагранжа

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0 \quad (5.71)$$

удовлетворяет уравнение Риккати. Уравнение Риккати для лазера также приведено в третьей главе (см. выражение (3.71)):

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = & (WD_0 - 2\alpha)n \\ & - 2TW^2D_0n^2. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Преобразуем уравнение (5.72) к виду

$$\frac{dn}{dt} = \lambda n(m - n), \quad (5.73)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda = 2TW^2D_0, \quad m \\ = \frac{WD_0 - 2\alpha}{2TW^2D_0}. \end{aligned} \quad (5.73a)$$

Решение уравнения Риккати (5.73) имеет вид

$$n = \frac{m}{1 + e^{-\lambda m(t-t_0)}}. \quad (5.74)$$

Производная от обеих частей уравнения (5.74) по времени t дает солитон:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{4} \lambda m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda m(t - t_0) \right], \quad (5.75)$$

где начальный момент t_0 совпадает с моментом максимальной скорости движения солитона.

Введем обозначения:

$$x = t - t_0, \quad \alpha = \frac{1}{4} \lambda m^2, \quad \beta = \frac{1}{2} \lambda m. \quad (5.76)$$

С учетом обозначений (5.76), функция Лагранжа, которая удовлетворяет уравнению (5.71), может быть выбрана в виде

$$F = \frac{1}{4} \lambda m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda m (t - t_0) \right] = a \operatorname{sech}^2(\beta x). \quad (5.77)$$

Нетрудно показать, что для уравнения (5.71) имеет место равенство $F_y = F_{xy}$, где

$$y = \operatorname{sech}(\beta x). \quad (5.78)$$

С учетом этого факта, вместо уравнения (5.71) получим уравнение

$$F_{yy} \cdot y' + F_{y'y} \cdot y'' = 0. \quad (5.79)$$

Вычисление выражений $F_{yy} \cdot y'$ и $F_{y'y} \cdot y''$ дает

$$F_{yy} \cdot y' = 2a \operatorname{sech}(\beta x), \quad (5.80)$$

$$F_{y'y} \cdot y'' = \frac{a \operatorname{sech}(\beta x)}{th^2(\beta x)} [1 - 2 \operatorname{sech}^2(\beta x)]. \quad (5.81)$$

Подстановка выражений (5.80) и (5.81) в уравнение (5.79), с учетом выполнения требования $th^2(\beta x) \neq 0$, приводит к уравнению

$$\alpha [2th^2(\beta x) + 1 - 2 \operatorname{sech}^2(\beta x)] = 0. \quad (5.82)$$

Решение уравнения (5.82) дает

$$\operatorname{sech}^2(\beta x) = \frac{3}{4}. \quad (5.83)$$

Необходимо выяснить, при работе лазера происходит минимизация или максимализация функционала (3.25). Для этого надо найти вторую производную от функции Лагранжа (5.77); эта производная равна:

$$F_x'' = -2a \operatorname{sech}^2(\beta x) [3 \operatorname{sech}^2(\beta x) - 2].$$

Из последнего выражения находим такое значение $\operatorname{sech}^2(\beta x)$, которое не противоречит равенству (5.83); это значение находим из условия $3 \operatorname{sech}^2(\beta x) - 2 > 0$; оно равно

$$\operatorname{sech}^2(\beta x) > \frac{2}{3}.$$

Из этого неравенства следует, что вторая производная от функции F отрицательна, поэтому функционал (3.25) должен иметь максимум

$$J = \alpha \int_0^x \operatorname{sech}^2(\beta x) dx = \alpha \int_0^x \frac{3}{4} dx = \max. \quad (5.84)$$

Подстановка значений α и x , определенных согласно (5.76), в выражение (5.84) позволяет найти численное значение критерия (5.84) (при $t_0=0$):

$$J = \frac{3}{16} \lambda m^2 t = \max. \quad (5.84a)$$

Значение времени t находится из формулы (3.128e), оно равно

$$t = \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{4}{3} - 1} \right) = \ln \left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Поэтому последнее выражение окончательно примет вид

$$J = \frac{3}{16} \lambda m^2 \ln(\sqrt{3}) = \frac{3}{32} \lambda m^2 \ln 3 = \max.$$

Таким образом, лазер, как рукотворная организующаяся система обладает оптимизационным свойством.

Уравнение Риккати (5.72) соответствовало случаю, когда имеем положительную скорость производства фотонов, т.е. $dn/dt > 0$. Если скорость производства фотонов отрицательна, т.е. $dn/dt < 0$, то вместо уравнения (5.72) получим следующее уравнение Риккати:

$$\frac{dn}{dt} = -pn + \frac{bc}{a} n^2, \quad a, b, c, p > 0, \quad (5.73б)$$

где приняты обозначения:

$$p \triangleq WD_0 - 2\alpha\alpha, \quad \frac{bc}{a} \triangleq 2TW^2D_0.$$

Как следует из результатов третьей главы (Случай 11) уравнению Риккати (3.95) могут соответствовать две модельные системы антагонистических уравнений: устойчивая система (3.84''), (3.85''), и неустойчивая система (3.84'''), (3.86'''). Устойчивой модельной системе (3.84''), (3.85'') «хищник – жертва» на плоскости xoy соответствует замкнутая фигура типа «Эллипса», а неустойчивой модельной системе (3.84'''), (3.86''') «хищник–жертва» на плоскости xoy соответствует фигура типа «седло». Конечно, эти утверждения справедливы, если мы отождествляем число фотонов n с числом съеденных жертв z .

Уравнению Риккати (5.72) соответствует неустойчивый режим работы лазера, описываемый системой уравнений (3.84''), (3.86'''), а уравнению Риккати (5.73б) соответствует устойчивый режим работы лазера, моделируемый антагонистической системой уравнений (3.84''), (3.85'').

По-видимому, это обстоятельство имел ввиду Г. Хакен, когда писал: «Нельзя не отметить сильную аналогию, существующую между конкуренцией лазерных мод и межвидовой борьбой» [4] (страница 35).

§ 5.3. Ячейка Бенара

В некоторых монографиях [37] ячейка Бенара упоминается как ячейка Релея–Бенара. Это название отражает тот существенный вклад, который внес лорд Релей в исследование ячейки Бенара. Автор придерживается названия ячейки Бенара, поскольку в литературе по самоорганизующимся системам эта ячейка именуется как ячейка Бенара [4,7]. Хотя, используя это название, автор никоим образом не старается умалить роль лорда Релея, в исследовании процессов, происходящих в этой ячейке.

5.3.1. Устройство и математические характеристики ячейки Бенара

Рассмотрим устройство ячейки Бенара и задачу о тепловой конвекции, которую создает эта ячейка, показанная на Рис. 5.5. Слой жидкости толщиной h (Рис.5.5а) в поле тяжести подогревается снизу при постоянной разности температур $\Delta T = T_1 - T_0$. Движение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса. Ограничившись случаем двумерного движения ($\partial/\partial z = 0$) введем функцию потока $\psi(x,y,t)$, которая связана со скоростью движения жидкости $\mathbf{v}(x,y,t)$ посредством формулы

$$\mathbf{v} = \nabla \times (\hat{z}\psi)^1.$$

Введем также функцию $\Theta(x,y,t)$, описывающую отклонение температуры $T(x,y,t)$ от линейной зависимости по оси oy :

$$\Theta = T - T_1 + \frac{\Delta T}{h} y.$$

В отсутствие конвекции $\Theta=0$. Для выбранных переменных задача Бенара сводится к двум уравнениям в частных производных [37]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi) = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial x} \right) + \nu \Delta^2 \psi - g\alpha \frac{\partial\Theta}{\partial x}, \quad (5.85a)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\Theta}{\partial x} \right) - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \alpha \Delta \Theta. \quad (5.85b)$$

В формуле (5.85) приняты следующие обозначения: ν – вязкость жидкости, g – ускорение силы тяжести, α – коэффициент

¹ Величина $\omega = -\Delta\psi$ характеризует вращение элемента жидкости вокруг оси z и называется завихренностью ($\hat{z}\omega = \nabla \times \mathbf{v}$), причем \hat{z} означает соответствующий орт.

ент теплового расширения жидкости, α – коэффициент теплопроводности жидкости. Граничные условия следующие:

$$\Theta = \psi = \Delta\psi = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = h.$$

Эти граничные условия соответствуют фиксированным T_0 и T_1 и свободной поверхности жидкости.

При малых ΔT имеется устойчивое равновесное состояние $\psi = \Theta = 0$, соответствующее покоящейся жидкости и молекулярной теплопередаче. Рейлей исследовал линейную устойчивость этого состояния и показал, что выше некоторого критического значения ΔT_c оно становится неустойчивым, и в жидкости возникают циркулирующие потоки (Рис.5.5б):

$$\psi = \psi_0 \sin\left(\frac{\pi ax}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right),$$

$$\Theta = \Theta_0 \cos\left(\frac{\pi ax}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right),$$

где параметр a характеризует периодичность движения циркулирующих потоков по оси ox .

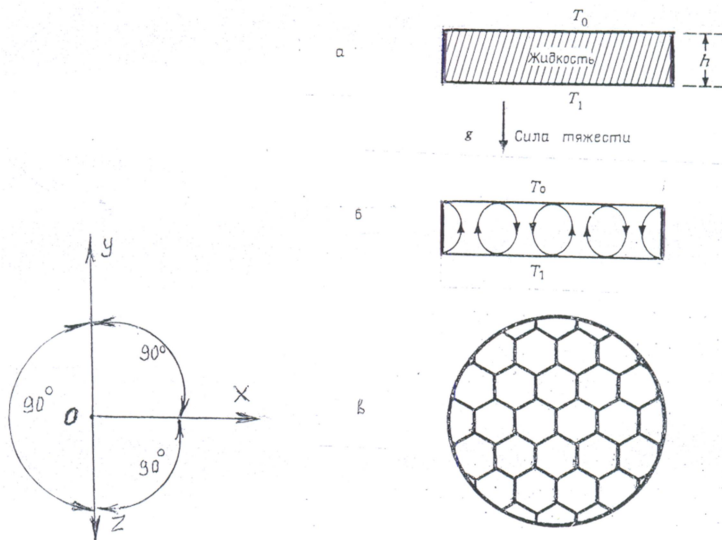


Рис. 5.5

Число Релея R_a является безразмерной величиной и характеризует разность температур:

$$R_a = \frac{gah^3\Delta T}{\nu\alpha}$$

Критическое значение числа Релея, определяющее возникновение устойчивой конвекции, равно

$$R_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$$

и принимает минимальное значение $R_{cmin} = \frac{27a^4}{4\alpha}$ для $a = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

При дальнейшем увеличении R_a выше R_c регулярная конвекция становится нестационарной и нерегулярной. Для этого случая ψ и Θ разлагаются в двойной ряд Фурье по x и y , так что коэффициенты разложения будут зависеть только от t . Оставляя конечное число членов разложения, Э. Лоренц получил представление движения в конечномерном фазовом пространстве, в котором оставлены только три фурье-амплитуды

$$\frac{a}{\alpha(1+\alpha^2)}\psi = \sqrt{2}X(t)\sin\left(\frac{\pi ax}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right), \quad (5.86a)$$

$$\frac{\pi R_a}{R_c(\Delta T)}\Theta = \sqrt{2}Y(t)\cos\left(\frac{\pi ax}{h}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) - Z\sin\left(\frac{2\pi y}{h}\right). \quad (5.86b)$$

В уравнении (5.86) имеем следующие обозначения: $X(t)$ – амплитуда конвективного движения, $Y(t)$ – разность температур между восходящими и нисходящими потоками, $Z(t)$ – отклонение вертикального профиля температуры от линейного. Подставляя (5.86) в уравнение (5.85), приходим к модели Лоренца (5.70).

С физической точки зрения явление конвекции можно пояснить очень просто. При большой разнице температур более теплая жидкость снизу расширяется и стремится поменяться местами с более холодными (имеющими большую плотность) слоями, расположенными сверху. Состояние, когда внизу находится легкая, а сверху тяжелая жидкость, неустойчиво. При малой разности температур жидкость неподвижна из-за наличия

вязкости.

Выше было отмечено, что аттрактор Лоренца является странным, т.е. он индуцирует детерминированный хаос. Хорошо известно (смотрите, например, [37] страница 495), что хаос является следствием диффузии. Поэтому имеет смысл посмотреть, как в ячейке Бенара возникает хаос. С этой целью обратимся к уравнению, описывающему распределение температуры T жидкости. Это уравнение имеет вид

$$T_t + u_1 T_x + u_2 T_y + u_3 T_z = \alpha(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}), \quad (5.87)$$

где u_1, u_2, u_3 – проекции вектора скорости на оси координат. Ось y направлена по вертикали, вдоль нее и действует сила тяжести.

В нашем случае можно считать

$$|T_y| \gg |T_x|, |T_y| \gg |T_z|, |T_{yy}| > |T_{xx}|, |T_{yy}| > |T_{zz}|.$$

Если пренебречь малыми членами, то уравнение (5.87) упростится

$$\frac{\partial T(y)}{\partial t} = -u_2 \frac{\partial T(y)}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^2 T(y)}{\partial y^2}. \quad (5.88)$$

Выражение (5.88) представляет собой уравнение диффузии (ФПК). Таким образом, описание тепловых процессов в ячейке Бенара с помощью уравнения (5.88) подтверждает наличие хаоса в этой ячейке. Член T_t уравнения (5.88) и член αT_{yy} описывают процесс теплопроводности. Когда жидкость неподвижна, все тепло передается к поверхности благодаря теплопроводности. Такой процесс соответствует стационарному решению уравнения (5.88). Член $-u_2 T_y$ описывает механизм теплопередачи, при котором тепло переносится благодаря движению самой жидкости; этот процесс называют «конвективным теплообменом». С ростом температуры $\Delta T > \Delta T_c$ доля теплового потока, переносимого конвекцией, возрастает, и поэтому о формировании ячеек Бенара часто говорят как о конвективной неустойчивости.

5.3.2. Оптимизационные характеристики ячейки Бенара

На поверхности ячейки Бенара, т.е. на плоскости xoz , Рис. 5.5*в*, возникают геометрические фигуры, представляющие собой правильные шестиугольники. Почему возникают правильные шестиугольники, а не правильные треугольники, правильные четырехугольники (т.е. квадраты), правильные пятиугольники, правильные семиугольники и т.д.? Ответ на этот вопрос связан с наличием у правильного шестиугольника оптимизационных свойств. С целью показа этих оптимизационных свойств, обратимся к Рис. 5.6.

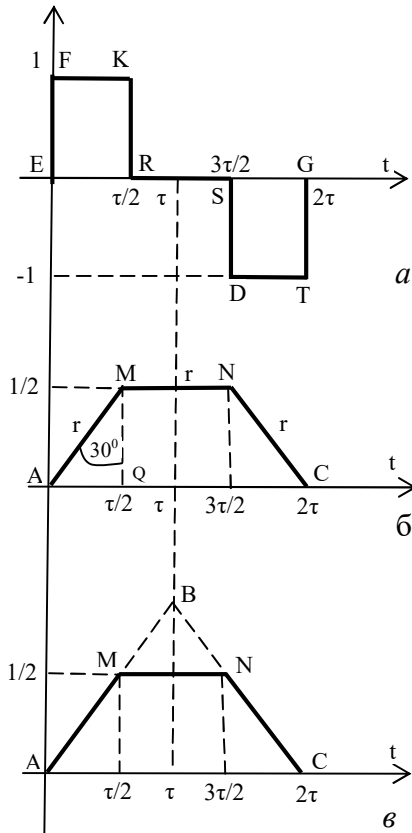


Рис. 5.6.

Рассмотрим функцию, показанную на Рис. 5.6а. Эта функция имеет разрывы первого рода, поэтому ее описание удобно осуществить с использованием преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа от функции, показанной на Рис. 5.6а имеет вид

$$P(s) = \frac{1}{\tau S} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{2}s}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{2}\tau s}\right). \quad (5.89)$$

Интеграл от функции (5.80) имеет вид

$$I(s) = \frac{1}{s} P(s) = \frac{1}{\tau S^2} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{2}s}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{2}\tau s}\right). \quad (5.90)$$

и равен площади фигуры АМNC (Рис. 5.6б).

Преобразованную по Лапласу площадь $Q_{AMNC}(s)$ представим в виде разности преобразованных по Лапласу площадей треугольника ABC и треугольника MBN (Рис.5.6в), т.е. $Q_{AMNC}(s) = Q_{\Delta ABC}(s) - Q_{\Delta MBN}(s)$.

Площадь $Q_{\Delta ABC}(s)$ равна

$$Q_{\Delta ABC}(s) = \frac{1}{\tau S^2} (1 - e^{-\tau s})^2, \quad (5.91)$$

а площадь $Q_{\Delta MBN}(s)$ имеет вид

$$Q_{AMNC}(s) = \frac{1}{\tau S^2} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{2}s}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{2}\tau s}\right). \quad (5.92)$$

Разность преобразованных по Лапласу площадей (5.91) и (5.92) будет

$$\begin{aligned} Q_{AMNC}(s) &= Q_{\Delta ABC}(s) - Q_{\Delta MBN}(s) = \\ &= \frac{1}{\tau S^2} \left[(1 - e^{-\tau s})^2 - e^{-\frac{\tau}{2}s} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{2}s}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Согласно формуле (5.93) площадь Q_{AMNC} дана для одного периода 2τ . Нас же интересует значения этой разности на всей полубесконечной временной оси $[0, \infty)$. Поэтому выражения в формуле (5.93) надо разделить на соответствующие периоды повторения $1 - e^{-2\tau s}$ и $1 - e^{-\tau s}$, тогда получим

$$Q_{[0,\infty)}(s) = \frac{1}{\tau s^2} \left[th\left(\frac{\tau s}{2}\right) - e^{-\frac{\tau}{2}s} th\left(\frac{\tau s}{4}\right) \right]. \quad (5.94)$$

Для полубесконечного промежутка времени запаздывание $e^{-\frac{\tau}{2}s}$ функции $th\left(\frac{\tau s}{4}\right)$ «забывается» [73]. Поэтому на полубесконечном интервале времени, т.е. когда $t \rightarrow \infty$, имеет место тождество $th\left(\frac{\tau s}{4}\right) \equiv e^{-\frac{\tau}{2}s} th\left(\frac{\tau s}{4}\right)$. С учетом этого тождества выражение (5.94) примет вид

$$Q_{[0,\infty)}(s) = \frac{1}{\tau s^2} \left[th\left(\frac{\tau s}{2}\right) - th\left(\frac{\tau s}{4}\right) \right]. \quad (5.95)$$

Наша цель заключается в том, чтобы получить выражение оптимальности (максимального покрытия поверхности ячейки Бенара) для преобразования Лапласа от дискретной функции EFKRSDTG (Рис. 5.6а) т.е. удвоенной площади трапеции AMNC (Рис. 5.6б). С этой целью введем обозначение

$$\Gamma(\tau s) = \frac{1}{s} th\left(\frac{\tau s}{2}\right). \quad (5.96)$$

Функция $\Gamma(\tau s)$ удовлетворяет квантовому уравнению Риккати [74]:

$$\frac{d\Gamma(\tau s)}{d\tau} = \lambda \Gamma(\tau s) - \lambda \Gamma^2(\tau s). \quad (5.97)$$

Правая часть уравнения (5.97) в дискретных точках $\tau = k\tau_0$ ($k = 1, 2, \dots$) является экстремалью, поэтому как и непрерывном случае, она удовлетворяет функционалу

$$J = 2 \int_D L(\tau s) d\tau = 2 \int_D d\Gamma(\tau s) = \text{extremum}, \quad (5.98)$$

где $\dot{\Gamma}(\tau s) = L(\tau s) \equiv \lambda \Gamma(\tau s) - \lambda \Gamma^2(\tau s)$ – функция Лагранжа.

Число 2 перед критерием (5.98) находится ввиду того, что на Рис. 5.6б показана лишь половина правильного шестиугольника, а нас интересует преобразованная по Лапласу площадь всего шестиугольника.

Для выяснения того, является ли экстремум в выражении (5.98) минимумом или максимумом, необходимо определить знак второй производной от функции $\Gamma(\tau s)$. Нетрудно убедиться, что знак $\ddot{\Gamma}(\tau s)$ будет отрицательным. Поэтому экстремум функционала (5.98) будет максимумом. Следует, однако учесть, что максимуму в изображении Лапласа соответствует минимум оригинала, т.е. минимум функционала (5.98). В нашем случае функция $\dot{\Gamma}(\tau s)$ имеет вид (5.95), т.е. $\dot{\Gamma}(\tau s) = Q_{[0,\infty)}(s)$. Исходя из сказанного, критерий (5.98) при $\lambda=1$ запишется так

$$J = 2 \int_0^{\tau} \frac{1}{s} th\left(\frac{\tau s}{2}\right) d\tau - 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{s} th\left(\frac{\tau s}{4}\right) d\tau = \min. \quad (5.99)$$

Первому интегралу в функционале (5.99) соответствует площадь

$$J_1 = 2 \left(\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \tau \right) = 2\tau. \quad (5.100)$$

Второму интегралу в критерии (5.99) соответствует площадь

$$J_2 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{2} \right) = \tau. \quad (5.101)$$

С учетом значений J_1 и J_2 , определенных согласно (5.100) и (5.101), критерий (5.99) примет вид

$$J = 2\tau - \tau = \tau \equiv r = \min. \quad (5.102)$$

Выражение (5.102) показывает, что удвоенная площадь фигуры AMNC (Рис. 5.6б) минимальна и поэтому этот шестиугольник (в этом смысле) является оптимальным. Отсюда следует, что ячейка Бенара обязательно будет состоять из правильных шестиугольников (Рис. 5.5в).

Следовательно, ячейка Бенара состоит из правильных шестиугольников потому, что шестиугольник удовлетворяет критерию (5.99) минимальности. Из ΔAMQ (Рис. 5.6б) легко

определить численное значение его стороны r ; оно равно $r = 1/\sqrt{3}$. С учетом этого минимальное значение критерия (5.102) будет $J = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$ единиц площади.

Таким образом, важной оптимизационной характеристикой ячейки Бенара является минимальность площади геометрических фигур (правильных шестиугольников) среди всех других многоугольников, которые могли бы максимально покрыть поверхность (Рис. 5.5в) ячейки Бенара.

* * *

Рассмотренные в настоящей главе системы хорошо известны специалистам, работающим в области самоорганизации. Однако, согласно вышеприведенной классификации, эти системы относятся нами к организующимся, поскольку они структурно разомкнуты. У этих систем имеются управляющие параметры: для реакции БЖ управляющим параметром является коэффициент r , изменяющий концентрацию веществ, участвующих в этой реакции; для лазера управляющим параметром является параметр накачки ω ; для ячейки Бенара управляющим параметром является прирост температуры ΔT , вызывающий конвекцию в этой ячейке.

Современная физика признает две формы существования материи: *вещество и поле*. С точки зрения этой концепции, в настоящей главе рассмотренные системы представляют собой: взаимодействие вещества с веществом (реакция БЖ), взаимодействие вещества с квантовомеханическим полем (лазер), взаимодействие теплового поля с веществом (ячейка Бенара). Хотя эти системы разомкнуты, их созданию и математическому моделированию их функционирования предшествовали важные теоретические исследования и практические (экспериментальные) работы.

Краткие комментарии к пятой главе

На основе использования оптимизационного уравнения Эйлера–Лагранжа для функции Лагранжа, получено кубическое алгебраическое уравнение. Решение этого уравнения позволило определить оптимизационные характеристики реакции БЖ.

Выражение, описывающее генерацию фотонов в лазере, представляет собой уравнение Риккати. Для солитонной функции, удовлетворяющей этому уравнению, записано уравнение Эйлера–Лагранжа. Решение этого уравнения позволило определить функцию, которая максимизирует генерацию фотонов в лазере.

Для ячейки Бенара, поверхность которой покрыта правильными шестиугольниками, показано, что эти геометрические фигуры оптимальны, среди всех возможных других геометрических фигур. Этот показ достигается путем использования квантового уравнения Риккати, записанного для правильного шестиугольника.

ГЛАВА 6

Марковские модели организующихся и самоорганизующихся систем

В настоящую главу попали организующиеся и самоорганизующиеся системы не по их принадлежности к разомкнутым или замкнутым, а по их принадлежности к широкому математическому классу систем, именуемому марковские системы или марковские процессы.

По общей классификации марковские процессы являются частным видом случайных процессов. Однако они занимают важное место среди других видов случайных процессов. Это объясняется двумя обстоятельствами: во-первых для марковских процессов хорошо разработан математический аппарат, позволяющий решать многие физические, экономические, экологические и другие задачи, и во-вторых, при помощи аппарата марковских процессов можно моделировать поведение ряда реальных организующихся и самоорганизующихся систем.

Количество организующихся и самоорганизующихся объектов (систем) в живой и неживой природе бесчисленно. Поэтому автор не преследовал цель охватить все существующие организующиеся и самоорганизующиеся объекты, а также методы и модели, которые могут быть использованы при идентификаций, анализе и моделировании этих объектов.

В настоящей главе кратко излагается необходимый аппарат марковских процессов, приводимый ниже.

§ 6.1. Определение и классификация марковских процессов

Главной характерной чертой марковских процессов является то, что будущее поведение марковского процесса не

зависит от прошлого, если известно его состояние в настоящий момент времени. Поэтому марковские процессы также называют процессами без последствия. Короче говоря, *марковское свойство означает, что знание настоящего отделяет прошлое от будущего.*

Если имеется процесс произвольной природы (физический, экономический, экологический и т.д.), не являющийся марковским, то бывает возможным представить его как многомерный марковский процесс, введя дополнительные компоненты.

В зависимости от того, непрерывное или дискретное множество значений принимает случайная величина $X(t)$ и ее аргумент t , различают следующие виды случайных процессов (см. Таблицу 1).

1. Дискретная случайная последовательность (дискретный процесс с дискретным временем).

В данном случае время t пробегает дискретный ряд значений $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ или $\{t_n\}$ ($n=0, 1, \dots, N$) и случайная величина $X(t_n)=X_n$ может принимать лишь дискретное множество значений x_1, x_2, \dots, x_k или $\{x_k\}$ ($k=0, 1, \dots, K$). Множества значений $\{t_k\}$ и $\{x_k\}$ могут быть конечными или бесконечными; в последнем случае $N \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$. Процессы такого вида могут быть получены путем квантования по уровню и по времени непрерывных процессов с непрерывным временем. Такое квантование применяется при машинной обработке информации. Данные процессы часто называют *цепями Маркова*.

2. Непрерывнозначная случайная последовательность т.е. непрерывный процесс с дискретным временем.

Этот процесс отличается от процесса первого вида тем, что случайная величина $X(t_n)$ ($n=0, 1, \dots, N$) может принимать континуум значений. В качестве примера можно привести временные выборки из непрерывного случайного процесса. Та-

кие процессы часто называют марковской последовательностью.

3. Дискретный (разрывной) случайный процесс, т.е. дискретный процесс с непрерывным временем.

Для этого процесса случайная величина $X(t)$ принимает дискретные значения $\{x_k\}$ ($k=0,1,\dots,K$), а время t принимает континуум значений $t \in [0, T]$, где T – длина интервалов на котором задан процесс $X(t)$. Примером может служить показания счетчика числа случайно появляющихся частиц.

4. Непрерывнозначный случайный процесс.

В данном случае $X(t)$ принимает значения из непрерывного пространства и аргумент t изменяется также непрерывно, причем траектория процесса не имеет больших вертикальных скачков.

5. Дискретно – непрерывный процесс.

В этом случае при непрерывном изменении времени t случайный процесс $X(t)$ в некоторые моменты времени имеет скачки (дискретные или непрерывные), а на интервалах времени между скачками ведет себя как непрерывнозначный случайный процесс.

Таблица 1

		Пространство состояний	
		Дискретное	Непрерывное
Значения аргумента	Дискретные	 <p>Цепь Маркова</p>	 <p>Марковская последовательность</p>
	Непрерывные	 <p>Дискретный марковский процесс</p>	 <p>Непрерывный марковский процесс</p>

6. Кроме перечисленных пяти видов случайных процессов возможны более сложные смешанные виды случайных процессов.

Если, например, случайный процесс $X(t)$ зависит от двух случайных параметров, т.е. от процессов $\lambda(t)$ и $\Theta(t)$:

$$X(t) = X[\lambda(t), \Theta(t)],$$

то один из них, допустим $\lambda(t)$, может быть непрерывным, а другой $\Theta(t)$ – дискретным и т.д.

Наряду со скалярным (одномерным) процессом $X(t)$ на практике приходится рассматривать векторный процесс $X(t)$, состоящий из компонент $X_1(t), \dots, X_i(t), \dots, X_M(t)$. В этом случае процесс $X(t)$ называют M -мерным и обозначают $X(t) = \{X_i(t)\}$ ($i = 1, \dots, M$). В общем случае компоненты $X_i(t)$ могут относиться к разным видам случайных процессов, перечисленных выше.

Приведем общее определение марковского процесса. Случайный процесс $X(t)$ называется марковским, если для любых n моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из отрезка $[0, T]$ условная функция распределения «последнего» значения $X(t_n)$ при фиксированных значениях $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})$ (т.е. при заданных значениях x_1, x_2, \dots, x_n), зависит только от $X(t_{n-1})$:

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = \\ = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где P означает вероятность события, указанного в фигурных скобках.

Для определения марковского процесса также справедливо следующее соотношение

$$\begin{aligned} P\{X(t_i) \leq x_i, X(t_k) \leq x_k | X(t_j) = x_j\} = \\ = P\{X(t_i) \leq x_i | X(t_j) = x_j\} P\{X(t_k) \leq x_k | X(t_j) = x_j\}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

имеющее симметричный вид относительно времени. Определения (6.1) и (6.2) эквивалентны.

Важное свойство всех марковских процессов заключается в том, что эволюция вероятности перехода $P = P\{X(t) \leq x | X(t_0) = x_0\}$ описывается уравнением первого порядка

$$\frac{d}{dt}P = \tilde{A}P, \quad (6.3)$$

где \tilde{A} – некоторый линейный оператор, представляющий собой либо матрицу, либо дифференциальный оператор, либо интегро-дифференциальный оператор, либо разностный оператор.

Уравнение (6.3) носит общий характер, оно справедливо для переходных вероятностей всех марковских процессов, приведенных в Таблице 1. Однако использование уравнения (6.3) удобно проиллюстрировать в виде решения для стационарного случая, соответствующего разностного уравнения.

Пример 6.1. Матрица вероятностей перехода имеет вид

$$\begin{vmatrix} P_1(t+1) \\ P_2(t+1) \\ P_3(t+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,0 & 0,3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{vmatrix}. \quad (6.4a)$$

Уравнение (6.4a) должно решаться совместно с условием

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1. \quad (6.4б)$$

Требуется найти стационарное (при $t \rightarrow \infty$) распределение вероятностей P_1, P_2, P_3 . Можно показать, что при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$P_1(t+1) \cong P_1(t), \quad P_2(t+1) \cong P_2(t), \quad P_3(t+1) \cong P_3(t).$$

Поэтому система уравнений (6.4a) примет вид

$$P_1 = 0,6 P_1 + 0,3 P_2 + 0,2 P_3$$

$$P_2 = 0,3 P_1 + 0,7 P_2 + 0,5 P_3$$

$$P_3 = 0,1 P_1 + 0,0 P_2 + 0,3 P_3$$

Решение этой системы при выполнении условия (6.4б) дает следующие значения распределения вероятностей $P_1=0,42$, $P_2=0,52$, $P_3=0,06$, которые не зависят от начального распределения вероятностей.

§ 6.2. Цепи Маркова

Характерной особенностью цепи Маркова является то, что для вычисления совместных вероятностей $P(\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n)$ нужно задать начальное состояние системы и указать механизм осуществления смены состояний, позволяющий вычислить вероятности перехода $\{\pi_\mu\}$. Можно указать следующие частные случаи цепей Маркова.

1. Смена всех состояний происходит независимо, т.е. вероятность какого-либо состояния на μ -ом шаге не зависит от того в каком состоянии находилась система в предыдущие моменты времени. В этом случае

$$\pi_n(\Theta_n | \Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{n-1}) = P_n(\Theta)$$

и формула (6.1) существенно упрощается

$$P(\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n) = \prod_{\mu=0}^n P_\mu(\Theta_\mu). \quad (6.5)$$

Формулой (6.5) можно описать последовательность независимых испытаний. Она представляет вырожденный случай цепи Маркова.

2. Если вероятность фазового состояния параметра Θ_n в момент времени t_n зависит лишь от того, в каком состоянии находилась система в предыдущий момент времени t_{n-1} и не зависит от того, в каких состояниях находилась система в более ранние моменты времени t_0, t_1, \dots, t_{n-2} то говорят, что имеем общую простую цепь Маркова. Следовательно, последовательность состояний (совокупность дискретных случайных величин) образуют простую цепь Маркова, если для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ и всех возможных значений случайных величин Θ имеет место соотношение

$$\pi_n(\Theta_n | \Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{n-1}) = \pi_n(\Theta | \Theta_{n-1}). \quad (6.6)$$

Условные вероятности $\pi_n(\Theta|\Theta_{n-1})$ называют вероятностями перехода.

Для простой цепи Маркова формула (6.1) принимает вид

$$P(\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n) = P_0(\Theta_0) \prod_{\mu=0}^n \pi_{\mu}(\Theta_{\mu}|\Theta_{\mu-1}). \quad (6.7)$$

3. Цепью Маркова порядка $m(m \geq 1)$ называется такая цепь, для которой вероятность нового состояния зависит только от m состояний системы, непосредственно ему (состоянию) предшествующих:

$$\pi_n(\Theta_n|\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{n-1}) = \pi_n(\Theta_n|\Theta_{n-m}, \dots, \Theta_{n-1}) \quad n > m. \quad (6.8)$$

Значение $m=1$ соответствует простой цепи Маркова, а при $m>1$ имеем сложную цепь Маркова порядка m .

Если вероятность перехода $\pi_n(\Theta_n|\Theta_{n-1})$ положить равной

$$\begin{aligned} \pi_n(\Theta_n|\Theta_{n-1}) &= \\ &= \pi_n(\Theta_{m,n}|\Theta_{1,n-1}, \dots, \Theta_{m,n-1}) \prod_{i=1}^{m-1} \delta_{\mu,\nu}(\Theta_{i,n}, \Theta_{i+1,n-1}), \end{aligned} \quad (6.9)$$

(где $\delta_{\mu,\nu}$ – символ Кронекера), то сложную цепь Маркова порядка m можно представить в виде простой m -мерной цепи Маркова. Если использовать теорему полной вероятности

$$P_k(n) = \sum_{i=1}^k P_i(\mu) \pi_{ik}(\mu, n), \quad (k = 1, 2, \dots, k), 0 \leq \mu < n, \quad (6.10)$$

и определение цепи Маркова (6.3), то можно убедиться, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \pi_{jk}(\mu, n) &= \sum_{i=1}^k \pi_{ji}(\mu, m) \pi_{ik}(m, n), \\ (j, k &= 1, 2, \dots, k), 0 \leq \mu < m < n, \end{aligned} \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) носит название уравнения Маркова [75]. Оно является частным случаем общего уравнения Колмогорова – Чепмена, которое справедливо и для цепей с бесконечным числом состояний.

Уравнение (6.11) может быть записано в виде

$$\pi_{jk}^{(\mu+n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_{ji}^{(\mu)} \pi_{ik}^{(n)}. \quad (6.11a)$$

Если теперь обозначить через π^n матрицу вероятностей переходов за n шагов, т.е. $\pi^n = \pi_{jk}^n$, то уравнение (6.11a) примет вид

$$\pi^{\mu+n} = \pi^{\mu} \pi^n. \quad (6.11б)$$

Уравнение (6.11б) показывает, что уравнение Маркова (6.11) и вообще функциональное уравнение Колмогорова–Чепмена подчиняется теории полугрупп операторов.

Если ввести квадратную матрицу $\pi(\mu, n) = \{\pi_{jk}(\mu, n)\}$, элементами которой являются вероятности перехода $\pi_{jk}(\mu, n)$ и матрицу – строку $P^T(n) = \{p_k(n)\}$ с элементами $p_k(n)$, то формулы (6.10) и (6.11) запишутся следующим образом

$$P^T(n) = P^T(\mu) \pi(\mu, n), \quad (6.12)$$

$$\pi(\mu, n) = \pi(\mu, t) \pi(t, n), \quad N > t > \mu > 0. \quad (6.13)$$

Квадратная матрица $\pi(\mu, n)$, элементы которой неотрицательны и сумма элементов стоящих в каждой строке (или/и столбце) равна единице, называется стохастической матрицей. Уравнение (6.12) может быть записано так

$$P(n) = \pi^T(\mu, n) P(\mu). \quad (6.13)$$

Простые цепи Маркова могут быть однородные и неоднородные. Однородная цепь характеризуется тем, что вероятности перехода $\pi_{jk}(\mu, n)$ зависят только от разности аргументов, т.е.

$$\pi_{jk}(\mu, n) = \pi_{jk}(n - \mu), \quad n > \mu \geq 0. \quad (6.14)$$

При этом получаем следующую матричную форму записи уравнения Маркова (6.13):

$$\boldsymbol{\pi}(n - \mu) = \boldsymbol{\pi}(t - \mu)\boldsymbol{\pi}(n - t), \quad 0 \leq \mu < t < n. \quad (6.15)$$

Для однородной цепи Маркова введем обозначение матрицы перехода за один шаг $\boldsymbol{\pi}(1)=\boldsymbol{\pi}$ и обозначим одношаговые вероятности перехода этой матрицы через $\pi_{jk} = \pi_{jk}(1)$, т.е. $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(1)$ или в развернутом виде

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1n} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{k1} & \pi_{k2} & \dots & \pi_{kk} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Матрица (6.16) является квадратной стохастической матрицей вероятностей перехода, причем все элементы этой матрицы неотрицательны и сумма элементов в каждой строке равна единице.

Однородная цепь Маркова, для которой вероятности $\{p_k(n)\}$ всех случайных величин Θ_n одинаковы, т.е. не зависят от n , называется стационарной. В противном случае цепь называется нестационарной. Для однородной стационарной цепи имеет место формула

$$\boldsymbol{P}^T = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\pi}. \quad (6.17)$$

Матричное уравнение (6.17) эквивалентно следующей системе k линейных алгебраических уравнений

$$p_k = \sum_{j=1}^k p_j \pi_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.18)$$

Важной задачей цепей Маркова является установление факта, существуют ли предельные, стационарные вероятности случайных величин Θ_n при $n \rightarrow \infty$ и если существуют, то как их найти.

Оказывается, что для цепей Маркова с конечным числом состояний при выполнении условия

$$\pi_{jk}(n) > 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.19)$$

начиная с некоторого n , существуют предельные (финальные) вероятности

$$p_k = \lim_{m \rightarrow \infty} p_k(m), \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.20)$$

Эти финальные вероятности p_k не зависят от начального распределения $\{p_k^0\}$. Марковские цепи, для которых существуют финальные вероятности (6.20) называются эргодическими. Финальные вероятности $\{p_k\}$ ($k=1, 2, \dots, k$) являются решением системы линейных алгебраических уравнений (6.18) (см. Пример 6.1), удовлетворяющими также дополнительному требованию

$$\sum_{k=1}^k p_k = 1, \quad p_k \geq 0. \quad (6.21)$$

Эти финальные вероятности образуют стационарное распределение $\{p_k\}$.

§ 6.3. Марковский прогноз мест, занимаемых командами бейсбольной национальной лиги США в турнирной таблице чемпионата. Косвенное суждение о самоорганизации

В каждой отдельной команде бейсбольной национальной лиги (БНЛ) США имеет место процесс самоорганизации. В результате самоорганизации команд, эти команды (от года к году) перемещаются или остаются в турнирной таблице на одном месте. Ниже будет показано, что этот процесс можно моделировать путем использования марковской цепи.

Совокупность команд БНЛ совместно с правилами игры образуют спортивно-состязательное поле.

Задача прогноза возникает, если игру конкретной команды БНЛ рассматривать «снаружи», т.е. с позиции болельщика за

эту команду. В течении бейсбольного сезона каждая команда борется за достижение первого места. Однако, лишь одна команда может прийти к финишу первой; в этой команде самоорганизация находится на высоком уровне. Остальные команды вынуждены довольствоваться занимаемыми ими местами, в соответствии с их потенциальными возможностями.

Такой подход к положению команд приводит к матрице переходов из исходных состояний. При составлении этой матрицы в качестве исходного состояния принимается положение команды в любом данном году, а в качестве перехода берется положение этой команды в следующем году. Для иллюстрации рассмотрим матрицу БНЛ, полученную на основании изменения положения команд в 1957 году по сравнению с 1956 годом (см. Таблицу 2).

Таблица 2

		к концу сезона 1956 г.								
		Команды	1	2	3	4	5	6	7	8
к концу сезона 1957 г.	1		×							
	2				×					
	3	×								
	4			×						
	5						×			
	6							×		
	7								×	
	8									×

Изменение положения команды происходит от столбца к строке; крестик обозначает, что команда передвинулась с $j=m$ -

ого места в 1956 году на $i=n$ -ое место в 1957 году. Например, команда, занимавшая 1956 году второе место перешла в 1957 году на первое место, а команда занимавшая в 1956 году первое место перешла в 1957 году на третье место и т.д. до конца матрицы.

В данном случае, марковская цепь есть последовательность состояний (в течение различных длительных промежутков времени) для которой *вероятность каждого перехода остается неизменной*. Выделенные курсивом слова указывают на ту сторону вопроса, которую нужно затронуть прежде всего. Обнаружат ли имеющиеся данные тенденцию к постоянству вероятностей, достаточную для того, чтобы можно было предположить наличие марковской цепи? Это основной вопрос, ответ на который нужно найти в процессе анализа данных за прошлое время.

Следующим шагом после выбора временного интервала является составление матрицы переходов за период с 1917 по 1957 год. Эти данные приведены в таблицах 3–6.

Чтобы избежать перегрузки текста большим количеством (40) таблиц, нами приводятся лишь 4 таблицы. Данные таблицы охватывают лишь начало и конец сорокалетнего периода. Эти таблицы дают исчерпывающую картину переходов команд и подтверждают целесообразность использования аппарата марковских цепей для анализа поведения команд БНЛ.

Согласно 40 таблицам, которые нами были заменены четырьмя (4) таблицами 3–6, охватывающими период времени равный 10 годам.

Таблица 3

	Места	1	2	3	4	5	6	7	8
Места	1917	Нью-Йорк	Филадельфия	Сент-Луис	Цинцинати	Чикаго	Бостон	Бруклин	Питтсбург
	1918								
1	Чикаго					×			
2	Нью-Йорк	×							
3	Цинцинати				×				
4	Питтсбург								×
5	Бруклин							×	
6	Филадельфия		×						
7	Бостон						×		
8	Сент-Луис			×					

Таблица 4

	Места	1	2	3	4	5	6	7	8
Места	1918	Чикаго	Нью-Йорк	Цинцинати	Питтсбург	Бруклин	Филадельфия	Бостон	Сент-Луис
	1919								
1	Цинцинати			×					
2	Нью-Йорк		×						
3	Чикаго	×							
4	Питтсбург				×				
5	Бруклин					×			
6	Бостон							×	
7	Сент-Луис								×
8	Филадельфия						×		

Таблица 5

	Места	1	2	3	4	5	6	7	8
Места	1955	Бруклин	Милуоки	Нью-Йорк	Филадельфия	Цинцинати	Чикаго	Сент-Луис	Питтсбург
	1956								
1	Бруклин	×							
2	Милуоки		×						
3	Цинцинати					×			
4	Сент-Луис							×	
5	Филадельфия				×				
6	Нью-Йорк			×					
7	Питтсбург								×
8	Чикаго						×		

Таблица 6

	Места	1	2	3	4	5	6	7	8
Места	1956	Бруклин	Милуоки	Цинцинати	Сент-Луис	Филадельфия	Нью-Йорк	Питтсбург	Чикаго
	1957								
1	Милуоки		×						
2	Сент-Луис				×				
3	Бруклин	×							
4	Цинцинати			×					
5	Филадельфия					×			
6	Нью-Йорк						×		
7	Питтсбург							×	
8	Чикаго								×

Таблица 7

Положение команд за период 1917-1926	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	3	1	2	0	0	0
2	3	3	1	1	0	2	0	0
3	3	0	2	3	1	1	0	0
4	0	2	0	3	1	1	1	2
5	1	2	2	1	1	0	2	1
6	0	2	1	0	2	3	2	0
7	0	0	0	0	2	2	2	4
8	0	0	1	1	1	1	3	3

Таблица 8

Положение команд за период 1927-1936	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	4	1	1	0	1	0
2	3	2	3	1	1	0	0	0
3	2	3	2	3	0	0	0	0
4	2	1	0	3	2	2	0	0
5	0	2	0	0	2	4	1	1
6	1	0	1	0	0	3	1	4
7	0	1	0	1	2	1	4	1
8	0	0	0	1	2	0	3	4

Результаты обработки этих таблиц сгруппированы в приводимых четырех таблицах 7 – 10. После этого было проведено сравнение этих четырех групп с целью выявления тенденции к проявлению постоянных вероятностей. В результате получены следующие характеристики (данные). Вероятность того, что команда, занявшая предпоследнее место переходит на последнее место составляет соответственно 3/10, 3/10, 3/10, 2/10. Вероятность того, что команда, занявшая последнее место останется на этом месте, составляет соответственно 3/10, 4/10, 5/10, 5/10. Вероятность того, что команда, занявшая первое место останется на этом месте, составляет соответственно 3/10, 2/10, 3/10, 2/10. Вероятность того, что команда, занявшая второе место переходит на первое место составляет соответственно 1/10, 1/10, 5/10, 3/10. Аналогичная тенденция может быть установлена для всех матриц. Могут быть обнаружены некоторые отклонения. Однако, число этих отклонений значительно меньше числа случаев проявления устойчивой тенденции и они имеют относительно небольшую величину.

Таблица 9

Положение команд за период 1937-1946	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	5	0	2	0	0	0	0
2	3	0	4	2	0	1	0	0
3	3	3	0	1	1	0	2	0
4	1	1	1	1	2	2	0	2
5	0	0	1	2	2	3	0	2
6	0	1	1	1	2	3	2	0
7	0	0	2	1	2	1	3	1
8	0	0	1	0	1	0	3	5

Таблица 10

Положение команд за период 1947-1956	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	0	1	0	0	0
2	3	4	1	1	0	0	1	0
3	3	1	1	1	3	1	0	0
4	1	0	3	3	1	0	1	1
5	1	2	0	2	3	1	0	1
6	0	0	1	2	0	4	3	0
7	0	0	0	1	2	1	3	3
8	0	0	0	0	0	3	2	5

Проявление этих отклонений в значительной степени определяется малым объемом выборки. Возможно, что при большом объеме выборки это расхождение будет меньше. Это предположение легко подтвердить, если полученные данные сгруппировать в матрицы, охватывающие 20 летний период проведения соревнований. Результаты этого периода сгруппированы в таблицах 11 – 12. Эти таблицы показывают группировку данных за 20 лет.

В таблице 11 данные за период 10 лет рассмотрены совместно с данными за следующие 10 лет.

В таблице 12 данные за второе десятилетие рассмотрены совместно с данными за третье десятилетие. Все эти данные были взяты из таблиц 7 – 10.

Вероятность перехода с 1-ого места на 2-ое место для таблицы 11 равна $5/20$. Вероятность перехода с 1-ого места на 2-ое место для таблицы 12 равна также $5/20$.

Таблица 11

Положение команд за период 1927-1946	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	6	4	3	1	0	1	0
2	6	2	7	3	1	1	0	0
3	5	6	2	4	1	0	2	0
4	3	2	1	4	4	4	0	2
5	0	2	1	2	4	7	1	3
6	1	1	2	1	2	6	3	4
7	0	1	2	2	4	3	7	2
8	0	0	1	1	3	0	6	0

Таблица 12

Положение за период 1917-1926	1	2	3	4	5	6	7	8
Положение за период 1947-1956								
1	5	4	7	1	3	0	0	0
2	6	7	2	2	0	2	1	0
3	6	1	3	4	4	2	0	0
4	1	2	3	6	2	1	2	3
5	2	4	2	3	4	1	2	2
6	0	2	2	2	2	7	5	0
7	0	0	0	1	4	3	5	7
8	0	0	1	1	1	4	5	8

Эти значения указывают на приближение к постоянному значению. Если бы в распоряжении имелась выборка данных за 40 лет, то результаты по-видимому оказались бы еще более убедительными.

В таблице 13 приведена матрица, показывающая общее число переходов команд за 40 лет. Следует отметить, что наименьшее разнообразие переходов наблюдается в первом и последнем столбцах этой матрицы, где встречаются наибольшие и наименьшие значения вероятностей.

В практических приложениях, при определении прогноза, вместо выражения (6.12) используется рекуррентное соотношение

$$P^*(t_i) = P^*(t_{i-1})\pi(\tau), \quad (6.22)$$

где $P^* \equiv P^T$.

В литературе по математической статистике соотношение (6.22) записывается в виде следующего выражения

$$P^*(t + \Delta t) = P^*(t)\pi(\Delta t), \quad (6.23)$$

где Δt – прирост времени, а $\pi(\Delta t)$ – матрица перехода, соответствующая приросту Δt .

Таблица 13

Положение команд за период 1917-1956	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	10	11	4	4	0	1	0
2	12	9	9	5	1	3	1	0
3	11	7	5	8	5	2	2	0
4	4	4	4	10	6	5	2	5
5	2	6	3	5	8	8	3	5
6	1	3	4	3	4	13	8	4
7	0	1	2	3	8	5	12	9
8	0	0	2	2	4	4	11	17

Согласно выражению (6.22) найдем прогноз команд БНЛ для того, чтобы определить какое место эти команды займут в 1927 году. С этой целью запишем рекуррентное соотношение (6.22) для поставленной задачи, с учетом таблицы 7:

$$P^*(1927) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

В результате перемножения вектор-строки $P^*(1926) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ записанный в абсолютных единицах, на матрицу $\pi(\tau)$ получим марковский прогноз положения команд БНЛ на 1927 год, который в относительных частотах равен $P^*(1927) = \begin{pmatrix} 0,28 & 0,14 & 0,20 & 0,16 & 0,10 & 0,09 & 0,02 & 0,01 \end{pmatrix}$. Сопоставление прогнозируемых и истинных значений относительных частот положения команд на 1927 год дано в таблице 14.

Таблица 14

№	Прогнозируемое значение $P(1927)$	Истинное значение $P(1927)$
1	0,28	0,20
2	0,14	0,10
3	0,20	0,40
4	0,16	0,10
5	0,10	0,10
6	0,09	0,00
7	0,02	0,10
8	0,01	0,00

Анализируя таблицы 5-13 можно прийти к заключению, что положение всех команд, находящихся в спортивно-состяза-

тельном поле БНЛ, можно рассматривать как совершенно изолированную консервативную систему.

Анализ таблиц 7-13 показывает, что не было случая, когда команда перешла бы с первого места на последнее или с последнего на первое место.

Обнаруживается также тенденция сохранения за командой того же или ближайшего к нему места, которое команда занимала в предыдущем году; более высокие значения вероятностей находятся вблизи главной диагонали каждой матрицы. Поэтому, этот анализ свидетельствует в пользу использования аппарата марковского прогноза.

Любой прогноз, в том числе и марковский, косвенно (по положению команд в турнирной таблице) показывает как в будущем будет обстоять дело с самоорганизацией в той или иной команде.

Если, согласно прогнозу, команда будет занимать верхние позиции в турнирной таблице, то считается, что самоорганизация в этой команде находится на высоком уровне. Если команда будет находиться в средней части турнирной таблицы, то считается, что самоорганизация в этой команде является посредственной. Если же команда будет находиться на последних позициях в турнирной таблице, то самоорганизация в этой команде будет плохой. Таким образом, *турнирная таблица является естественной шкалой самоорганизации команд БНЛ.*

§ 6.4. Самоорганизация в спортивно-состязательных полях

В параграфе 6.3. мы рассмотрели поведения команд БНЛ «снаружи», т.е. с позиции болельщика. *В этом случае поведение каждой команды представляло собой поведение консервативной системы.*

Рассмотрим теперь как устроена каждая команда спортивно-состязательного поля «изнутри», т.е. с позиции члена этой команды. Под членом команды подразумевается личность, которая либо входит в руководство команды, либо является игроком команды, либо тренером, либо врачом и т.д. Каждая команда представляет собой замкнутую систему (см. Рис. 6.1), т.е. является самоорганизующейся.

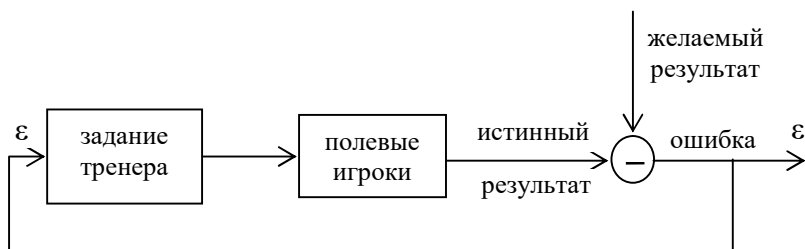


Рис. 6.1

До начала игры тренер команды дает задание полевым игрокам для достижения «желаемого результата», т.е. удовлетворения поставленного перед командой критерия. Во время отдыха (между периодами игры) тренер сверяет «желаемый результат» с истинным результатом матча и дает полевым игрокам указания каким образом улучшить игру, чтобы достичь удовлетворения поставленного перед командой критерия. Вся эта процедура реализуется с помощью замкнутой системы (рис. 6.1).

Количественную оценку игры двух команд спортивно-состязательного поля можно получить с помощью математического моделирования встречи. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие двух антагонистических объектов (команд) [58]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \frac{b}{y}, & x(0) = x_0, \\ \frac{dy}{dt} = cy - \frac{d}{x}, & y(0) = y_0. \end{cases} \quad (6.24)$$

Переменная x представляет собой число очков, приносящих i -ой командой; переменная y является целой величиной, т.е. $x \triangleq [x]$ ¹. Аналогично $y \triangleq [y]$ представляет собой число очков приносящих себе j -ой командой. Положительные постоянные a и c представляют собой игровые потенциалы соответственно i -ой и j -ой команды. Положительная постоянная b представляет собой величину спортивного давления полевых игроков j -ой команды на полевых игроков i -ой команды, а положительная постоянная d представляет собой величину спортивного давления полевых игроков i -ой команды на полевых игроков j -ой команды.

Назначение руководства команды заключается в укомплектовании команды высококлассными игроками путем их перевода из других команд страны, а также из зарубежья. Этим достигается высокий игровой потенциал a (или c). Руководство команды также обязано обеспечить команду высококлассным тренером. Тренер обязан из спортивного потенциала команды a (или c) отобрать и подготовить к игре таких игроков, которые обеспечат желаемый результат встречи.

Система (6.24) устроена так, что с увеличением переменной x (переменной y) ее влияние на второе (первое) из уравнений (6.24) уменьшается. В этом заключается антагонизм системы (6.24). Поскольку игра двух команд представляет собой встречу соперников – антагонистов, то использование системы (6.24) для адекватного моделирования поведения этих команд,

¹ $[x]$ означает целую часть величины x .

вполне оправдано.

В результате вышеописанной самоорганизации, мы можем получить следующие значения для исхода встречи L состязания двух команд за время T_e .

1. Выигрыш с максимальным количеством очков:

$$L_{max} = \max([x] - [y]) > 0; \quad (6.25)$$

2. Главное выигрыш, количество очков не имеет значения

$$L = [x] - [y] > 0; \quad (6.26)$$

3. Возможная ничья

$$L = [x] - [y] = 0; \quad (6.27)$$

4. Проигрыш с минимальным количеством очков

$$L_{min} = \min([x] - [y]) < 0; \quad (6.28)$$

5. Проигрыш

$$L = [x] - [y] < 0. \quad (6.29)$$

Численные значения очков i -ой и j -ой команд находим из решения системы уравнений (6.24).

Для i -ой команды количество очков определяется из формулы

$$[x] = \left[A \frac{e^{(Ta \frac{Tb-b}{K} - \frac{b}{K})t}}{\left| Ke^{-\frac{t}{T}} - K_0 \right|^{\frac{bT}{K}}} \right], \quad (6.30)$$

где

$$A = x_0 \frac{\left| K - K_0 e^{\frac{t_0}{T}} \right|^{\frac{bT}{K}}}{e^{(a+\frac{b}{K})Tt_0}}, \quad T = (a+c)^{-1},$$

$$K = \frac{b+d}{a+c}, \quad K_0 = K + x_0 y_0.$$

Для j -ой команды количество очков находится из выражения

$$[y] = \left[B \frac{e^{(Tc \frac{Td-d}{K})t}}{\left| K e^{-\frac{t}{T}} - K_0 \right|^{\frac{dT}{K}}} \right], \quad (6.31)$$

где

$$B = y_0 \frac{\left| K - K_0 e^{\frac{t_0}{T}} \right|^{\frac{dT}{K}}}{e^{(c+\frac{d}{K})Tt_0}}.$$

Для нахождения очков, полученных i -ой и j -ой командами необходимо учесть, что текущее время t принадлежит интервалу $[0, t_e]$, т.е. $t \in [0, t_e]$.

Для возрастания и убывания функции x , определенной согласно выражению (6.30) необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{b}{K} < \frac{Ta}{1-T}, \\ 0, & \text{если } \frac{b}{K} > \frac{Ta}{1-T}. \end{cases} \quad (6.32)$$

Аналогично, для возрастания и убывания функции y , определенной согласно выражению (6.31) необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & \text{если } \frac{d}{K} < \frac{Tc}{1-T}, \\ 0, & \text{если } \frac{d}{K} > \frac{Tc}{1-T}. \end{cases} \quad (6.33)$$

Система (6.24) устроена так, что с возрастанием функции x , также будет возрастать y , а с убыванием x , также будет убывать y при выполнении условий (6.32), (6.33), т.е. эти условия не должны противоречить друг другу.

Из неравенств (6.32) и (6.33) могут быть получены следующие соотношения

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d} \Rightarrow ad > bc \Rightarrow ad - bc > 0, \quad (6.34)$$

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad - bc < 0. \quad (6.35)$$

Сопоставляя неравенства (6.34) и (6.35) приходим к выводу, что условие равновесия в системе (6.24) наступает, когда выполняется соотношение

$$ad - bc = 0 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Поскольку, количество очков x одной команды всегда возрастает, а количество очков y , получаемых другой командой также будет возрастать (или быть равной постоянной величине), то мы будем рассматривать только случай возрастания x и y . Выполнение i -ой командой одного из критериев (6.25) – (6.29) является завершающим этапом процесса самоорганизации, происходящем в i -ой команде при проведении матча с j -ой командой.

Чтобы рассмотреть тактику поведения каждой команды (например i -ой) при встрече с другой (например j -ой) обратимся к решению системы дифференциальных уравнений (6.24) на плоскости состояний. Это решение имеет вид [58]:

$$y = V^{\frac{a+c}{a}} \left| 1 - \frac{K}{xy} \right|^{\frac{T}{Ka}(ad-b)} \cdot x^{\frac{c}{a}}, \quad (6.36)$$

где

$$V = \frac{\left| x_0 y_0 - \frac{b+d}{a+c} \right|^{\frac{ad-b}{(a+c)(b+d)}}}{(x_0 y_0)^{-\frac{b}{b+d}} \cdot x_0} = const.$$

За начальный момент времени t_b берется ни момент начала игры, а момент времени, когда обе команды будут иметь первые очки, т.е. $x_0 \equiv x(t_b) \neq 0$ и $y_0 \equiv y(t_b) \neq 0$ конечно, это не про-

изойдет одновременно, а будет иметь место, когда неимеющая очков команда получит первое очко.

Введем обозначение

$$W = \left| 1 - \frac{\frac{b+d}{ka}(ad-b)}{\frac{a+c}{xy}} \right|. \quad (6.37)$$

Согласно выражениям (6.30) и (6.31) произведение xy будет зависеть от текущего времени t , а следовательно W также будет зависеть от параметра t . С учетом (6.37) формула (6.36) запишется следующим образом

$$y = V^{\frac{a+c}{a}} W x^{\frac{c}{a}}. \quad (6.36a)$$

Поскольку величина спортивного давления полевых игроков d (или b) принадлежит спортивному потенциалу a (или c) соответствующей команды, т.е. $d \in a$ (и $b \in c$), то величина $\frac{b+d}{a+c}$ всегда будет меньше единицы, т.е. $\frac{b+d}{a+c} < 1$. Если также учесть, что с момента времени t_b произведение очков xy , заработанных командами все возрастает, то величина $\frac{b+d}{xy(a+c)}$ будет намного меньше единицы, т.е. $\frac{b+d}{xy(a+c)} \ll 1$. Если это усиленное неравенство учтем в формуле (6.37), то получим $W \approx 1$. Это приближенное равенство также имеет место, когда встречаются две команды, находящиеся в турнирной таблице рядом друг с другом; в этом случае спортивные потенциалы a и c этих команд примерно равны, т.е. $a \approx c$. Примерно будут равны также величины спортивного давления d и b полевых игроков этих команд, т.е. $d \approx b$. Исходя из этого получим $ad - bc \approx 0$. Если в формуле (6.37) принять во внимание это приближенное равенство, то будем иметь $W(t) \cong 1$. С учетом этих двух случаев, формула

(6.36a) запишется в виде

$$y = V^{\frac{a+c}{a}} x^{\frac{c}{a}}. \quad (6.38)$$

На Рис. 6.2 показан график функции (6.38) для различных значений параметров a, b, c, d . Рассмотрим подробно каким значениям параметров a, b, c, d соответствуют кривые, приведенные на Рис. 6.2.

Выигрышу i -ой команды с максимальным количеством очков (критерий (6.25)) соответствует парабола (кривая 1 на Рис. 6.2), записанная согласно формуле

$$x = V^{-\frac{a+c}{c}} y^{\frac{a}{c}},$$

причем $a > c, d > b$.

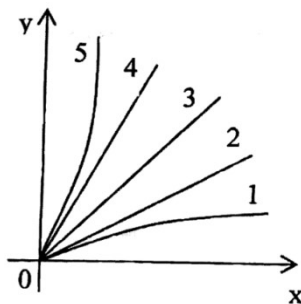


Рис. 6.2

Главное выигрыш для i -ой команды, количество очков не имеет значение (критерий (6.26)); этому случаю соответствует прямая 2 на Рис. 6.2

$$x = V^{-\frac{a+c}{c}} \cdot y = V^{-2}y,$$

при $a=c$ и $d > b$.

Возможная ничья (критерий (6.27)); этому случаю соответствует биссектриса начала координат, т.е. угла $хоу$:

$$x = y;$$

прямая 3 на Рис. 6.2. В этом случае $a=c$ и $V=1$. Выполнение требования $V=1$ при $d=b$ приводит к равенству начальных состояний $x_0 = y_0$.

Проигрышу i -ой команды с минимальным количеством очков (критерий (6.28)) соответствует прямая 4 на Рис. 6.2, наиболее близко лежащая к биссектрисе угла $хоу$ т.е.

$$y = V^{\frac{a+c}{c}} \cdot x = V^2 x,$$

при условии $a = c$ и $b > d$.

Проигрышу i -ой команды (критерий (6.29)) соответствует парабола 5 на Рис. 6.2

$$y = V^{\frac{a+c}{c}} \cdot x^{\frac{c}{a}}$$

при условии $c > a, b > d$.

Следует отметить, что в процессе одной игры команда может использовать различные тактические приемы ведения игры, что эквивалентно выбору различных критериев согласно кривым на Рис. 6.2

Численные значения спортивного потенциала a (или c) команды, а также численные значения спортивной формы отдельных игроков команды присваиваются экспертами на основе рейтинговых данных, получаемых в течении многолетних наблюдений за их игрой.

Исходя из системы дифференциальных уравнений (6.24), может быть представлена функциональная блок-схема встречи двух команд – соперников

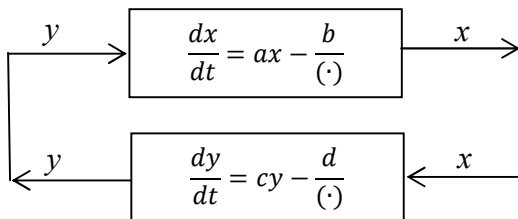


Рис. 6.3

Из Рис. 6.3 видно, что при игре двух команд имеет место циклический процесс их взаимодействия. Однако, *является ли спортивно-состязательное поле замкнутым образованием или диссипативной структурой, зависит от того, с каких позиций мы рассматриваем эту систему.*

Изнутри, т.е. с позиции члена команды, каждая команда является диссипативной структурой. Диссипативность обусловлена двумя причинами.

Во-первых из любой команды в другую команду может происходить переход игроков, тренера, врача и т.д., а иногда меняется и руководство команды. Во-вторых самочувствие и, следовательно, игра каждого игрока зависит от фазы его физиологических циклов. Имеются следующие физиологические циклы человека: эмоциональный (23 дня), физический (28 дней) и интеллектуальный (33 дня). Для каждого человека физиологические циклы отсчитываются со дня его рождения. Соотношения фаз физиологических циклов игроков команды сказывается на результате игры. Таким образом, с позиции члена команды, каждая команда является диссипативной структурой. Степень диссипативности команды, обычно, сказывается на ее месте в турнирной таблице, т.е. на самоорганизации команды.

Из результатов §6.3, §6.4 можно сделать следующие выводы.

При взгляде на турнирную таблицу команд с позиции болельщика т.е. снаружи, положение каждой команды пропорционально степени ее самоорганизации; влияние диссипативности на процесс самоорганизации не учитывается.

При взгляде на команду с позиции ее члена, т.е. изнутри, каждая команда является диссипативной системой. Диссипативность влияет на ее положение в турнирной таблице.

Следовательно, в спортивно – состязательных полях определение того, является ли команда диссипативной или консерва-

тивной структурой зависит от той позиции, с которой мы рассматриваем положение команды.

§ 6.5. Дискретные по состоянию и непрерывные во времени марковские процессы

Выше были рассмотрены цепи Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем. В настоящем параграфе будут рассмотрены марковские процессы с бесконечным числом состояний и непрерывным временем. Эти состояния являются неотрицательными целыми числами. Теория таких процессов более сложна чем в конечном случае. Многие результаты теории конечных цепей не имеют места для бесконечных процессов.

К марковским процессам с бесконечным числом состояний относятся ветвящиеся процессы: например, процессы рождения, а также процессы рождения и смерти. В монографии [34] показано, что ветвящиеся процессы и системы массового обслуживания описываются одними и теми же уравнениями. Исходя из вышесказанного становится ясным, насколько широк круг проблем, относящихся к этому классу марковских процессов.

Для описания плотности вероятностей $P_{ij}(\tau, t)$ этого класса процессов Колмогоровым были получены следующие системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau, t)}{\partial t} = -q_j(t)P_{ij}(\tau, t) + \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) Q_{kj}(t)P_{ij}(\tau, t), \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial P_{ij}(\tau, t)}{\partial t} = q_i(\tau) \left\{ P_{ij}(\tau, t) - \sum_{k=0}^{\infty} Q_{ik}(\tau) P_{kj}(\tau, t) \right\}, \quad (6.40)$$

где $i, j = 0, 1, 2, \dots$

Система (6.39) называется прямой системой дифференциальных уравнений, а система (6.40) – обратной системой дифференциальных уравнений. Значения параметров $q(t)$ и $Q(t)$ приводятся ниже.

Для марковских процессов с бесконечным числом состояний имеют место следующие соотношения:

$$0 \leq P_{ij}(\tau, t) \leq 1 \quad \forall i, j, \tau, t,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(\tau, t) \leq 1 \quad \forall i, \tau, t.$$

Уравнение Колмогорова–Чепмена для переходных вероятностей $P_{ij}(\tau, t)$ имеет вид

$$P_{ij}(\tau, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ij}(\tau, s) P_{kj}(s, t) \quad \forall t \leq \tau, \quad s \in (\tau, t) \quad (6.41)$$

которое представляет собой обобщение уравнения Маркова (6.11) на цепи с бесконечным числом состояний.

Начальные условия для систем (6.39) и (6.40) дифференциальных уравнений таковы:

$$P_{ij}(t, t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Уравнения (6.39) и (6.40) не являются однородными по времени, поскольку они явно зависят как от τ , так и от t . Ниже мы ограничим наши рассмотрения однородными по времени, или *стационарным* марковским процессом, т.е. мы будем полагать, что

$$P_{ij}(t, t) = P_{ij}(t - \tau).$$

Следовательно, можно принять, что $\tau=0$ и рассматривать только переходные вероятности $P_{ij}(t)$.

При выводе уравнений Колмогорова (6.39), (6.40) предполагается, что существует непрерывная функция $q_i(t)$ такая, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t, t + \Delta t)}{\Delta t} = q_i(t)Q_{ij}(t), \quad (6.42)$$

и для любого фиксированного t и начального состояния i имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} Q_{ij}(t) = 1,$$

причем $Q_{ii}(t) = 0$.

Рассмотрим теперь уравнения Колмогорова в матричной форме. Положим

$$\begin{cases} q_i(t) = -a_{ii}(t), \\ q_i(t)Q_{ij}(t) = a_{ij}(t), \quad i \neq j \end{cases} \quad (6.43)$$

и пусть $A(t) = (a_{ij}(t))$. Элементы $a_{ij}(t)$ являются непрерывными функциями времени и обладают следующими свойствами

$$a_{ij}(t) \geq 0,$$

$$a_{ii} \leq 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}(t) \leq 0 \quad \forall i.$$

Для плотности марковского процесса $X(t)$ введем обозначение $P(t) = (P_{ij}(t))$. Тогда уравнения (6.39) и (6.40) можно записать в векторно-матричной форме

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A(t), \quad (6.44)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t), \quad (6.45)$$

с начальным условием $P(0) = I$, где I – единичная матрица.

Если элементы $a_{ij}(t)$ не зависят от времени, тогда $A(t) = A = const$. В этом случае вместо систем (6.44) и (6.45) будем иметь

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)A, \quad (6.46)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP(t). \quad (6.47)$$

Решение обратного уравнения (6.47) имеет вид

$$P(t) = P(0)e^{At} = e^{At}.$$

Если использовать матричный ряд

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}, \quad A^0 = I,$$

то

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}. \quad (6.48)$$

В случае, если A – конечная матрица (т.е. марковская цепь имеет конечное число состояний), выражение (6.48) действительно является решением уравнения (6.47). Однако для бесконечных систем ряд (6.48) может не сходиться, в особенности, когда матричные элементы a_{ij} не ограничены. Несмотря на это, как известно из теории полугрупп в обоих случаях матрица $P(t)$ допускает экспоненциальное представление. В этом случае уравнение Колмогорова–Чепмена (6.41), записанное в матричной форме имеет вид

$$P(\tau + t) = P(\tau)P(t),$$

т.е. обладает полугрупповым свойством.

6.5.1. Ветвящиеся марковские процессы независящие от возраста

Марковские процессы характеризуются тем, что интервал времени τ между переходами или изменениями состояния, является случайной величиной с отрицательным показательным распределением. Отрицательность показательного распределе-

ния обусловлена решением общего для всех марковских процессов уравнения (6.3).

Для процесса рождения (размножения) параметры уравнений Колмогорова определяются согласно выражениям

$$q_i = \lambda i \text{ при } i = 1, 2, \dots$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i + 1, \quad i = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{при } j \neq i + 1. \end{cases}$$

Матрица переходных вероятностей A запишется так

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

А уравнения Колмогорова для процесса рождения имеют вид

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -\lambda_j P_{ij}(t) + \lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t),$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = -\lambda_j P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t).$$

Интервал времени между переходами состояния является известной функцией с плотностью распределения $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, а производящая функция вероятностей $\{q_n\}$ равна

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n = s^2.$$

С учетом $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, и $h(s) = s^2$ производящая функция процесса рождения удовлетворяет интегральному уравнению [76]

$$F(s, t) = \int_0^t F^2(s, t - \tau) \lambda e^{-\lambda t} d\tau + s e^{-\lambda t}. \quad (6.49)$$

Для марковского процесса интегральное уравнение для производящей функции может быть преобразовано в дифферен-

циальное уравнение. Если умножить (6.49) на $e^{\lambda t}$ и ввести новую переменную $\xi = t - \tau$, то получим

$$F(s, t)e^{\lambda t} = \int_0^t F^2(s, \xi)\lambda e^{\lambda t} d\xi + s.$$

Дифференцируя последнее выражение по t приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda F(F - 1). \quad (6.50)$$

Выражение (6.50) представляет собой параметрическое уравнение Риккати для производящей функции процесса рождения.

Обратимся теперь к процессу рождения и смерти, который сочетает в себе черты процесса рождения и процесса смерти. Для этого процесса случайная величина $X(t)$ может претерпевать как положительные, так и отрицательные скачки. Этот процесс представляет значительный теоретический интерес, поскольку процессы рождения и смерти встречаются во многих приложениях.

Для того, чтобы получить переходные вероятности для процесса рождения и смерти, необходимо сначала определить выражения для параметров q_i и Q_{ij} :

$$q_i = (\lambda + \mu)i \text{ при } i = 1, 2, \dots$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \text{ при } j = i + 1, & i = 1, 2, \dots \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \text{ при } j = i - 1, & i = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{при } |i - j| > 1. \end{cases} \quad (6.51)$$

С учетом обозначений (6.51), матрица переходных вероятностей запишется так

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2\mu & 2(\lambda + \mu) & 2\lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda + \mu) & 3\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Уравнения Колмогорова для процесса рождения и смерти таковы

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + (\lambda_j + \mu_j)P_{ij}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t),$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \lambda_iP_{i+1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \mu_iP_{i-1,j}(t).$$

Для процесса рождения и смерти имеем

$$G(t) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad q_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad q_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

С учетом этих выражений, производящая функция этого процесса будет удовлетворять интегральному уравнению [76]

$$F(s, t) = \int_0^t \{\mu + \lambda F^2(s, t - \tau)\} e^{-(\lambda+\mu)\tau} d\tau + se^{-(\lambda+\mu)t}. \quad (6.52)$$

Поступая также, как в случае уравнения (6.49), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda F^2 - (\lambda + \mu)F + \mu. \quad (6.53)$$

Выражение (6.53) представляет собой параметрическое уравнение Риккати для производящей функции процесса рождения и смерти.

6.5.2. Ветвящиеся марковские процессы зависящие от возраста

Кроме марковских процессов, независящих от возраста, существуют так называемые полумарковские процессы, также

называемые вложенными марковскими процессами. Характерным для этого класса марковских процессов является то, что интервал времени τ между переходами может иметь произвольное распределение $G(\tau)$. Марковские процессы, зависящие от возраста, относятся к классу вероятностных процессов, известных как процессы *регенерации*. Для этих процессов соотношение $\frac{dG}{1-G}$ означает вероятность того, что индивидуум возраста τ трансформируется на интервале времени $(\tau, \tau+d\tau)$; такой процесс называется также процессом Беллмана–Харриса. Необходимо отметить, что при $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ соотношение $\frac{dG(\tau)}{1-G(\tau)} = \lambda d\tau$ не зависит от возраста τ .

Для получения математических моделей некоторых дискретных (по состоянию) марковских процессов, необходимо дать определение процесса, зависящего от возраста.

Пусть $X(t)$ – целочисленная случайная величина, представляющая число индивидуумов в популяции в момент t и $P_x(t) = Pr\{X(t) = x\}$, $x = 0, 1, 2, \dots$

Производящая функция вероятностей $\{P_x(t)\}$ определяется, как обычно

$$F(s, t) = \sum_{x=0}^{\infty} P_x(t) s^x, \quad |s| \leq 1. \quad (6.54)$$

Как отмечалось, время одного поколения (generation time) τ от рождения индивидуума до его трансформации является случайной величиной с распределением $G(\tau)$ ($0 < \tau < \infty$). Принимается положение, согласно которому индивидуум с вероятностью $q_n (n \geq 0)$ трансформируется в n индивидуумов, причем каждый новый индивидуум обладает таким же распределением $G(\tau)$, что и его родители.

В [76] показано, что если $G(t)$ имеет функцию плотности $g(t)$, такую, что

$$G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau, \quad \int_0^{\infty} |g(\tau)| < \infty, \quad (6.55)$$

а вероятность трансформации q_n имеет производящую функцию

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n, \quad (6.56)$$

то производящая функция $F(s, t)$ вероятностей $\{P_x(t)\}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(s, t) = \int_0^t \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n F^n(s, t - \tau) \right] g(\tau) d\tau + s[1 - G(t)]. \quad (6.57)$$

Следует отметить, что уравнение (6.57) вытекает из обозначений (6.54) – (6.56) и интегрального уравнения

$$F(s, t) = \int_0^t h[F(s, t - \tau)] dG(\tau) + s[1 - G(t)]. \quad (6.58)$$

Из выражений (6.57) и (6.58) видно, что процесс Беллмана–Хариса полностью определяется функцией распределения $G(\tau)$ и производящей функцией $h(s)$. Кендаллу [77] удалось сконструировать общий вид бинарного процесса рождения, зависящего от возраста, т.е. полумарковский (вложенный) процесс рождения; этот процесс можно назвать многофазным процессом рождения и охарактеризовать следующим образом.

Когда индивидуум родился, он проходит через ряд различных стадий, число которых k , и только после завершения k -ой стадии происходит его трансформация в два индивидуума. Времена пребывания в стадиях является независимыми случайными величинами, каждая из которых имеет функцию распре-

ления $1 - e^{-k\lambda t}$. Следовательно, функция распределения времени одного поколения τ является k -ой сверткой функции распределения времени пребывания в каждой стадии, т.е.

$$dG(\tau) = \frac{k^k \lambda^k}{\Gamma(k)} e^{-k\lambda t} \tau^{k-1} d\tau, \quad 0 < \tau < \infty. \quad (6.59)$$

Следует отметить, что при $k=1$ многофазный процесс превращается в простой процесс рождения, независящий от возраста. В случае, если k стремится к бесконечности, многофазный процесс превращается в детерминированный процесс Гальтона–Ватсона, характеризуемый фиксированным временем $\tau = 1/\lambda$.

Рассмотрим ветвящийся процесс с состоянием, зависящим от возраста, предложенный Уо [78]. Эта модель рождения и смерти основана на следующих предположениях:

$$\begin{cases} G(\tau) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \\ q_0(\tau) = 1 - \beta e^{-\alpha \tau}, \quad \alpha > 0, \quad 0 \leq \beta \leq 1, \\ q_1(\tau) = 1 - [q_0(\tau) + q_2(\tau)] = (\beta - \gamma)e^{-\alpha \tau}, \\ q_2(\tau) = \gamma e^{-\alpha \tau}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \end{cases} \quad (6.60)$$

Для того, чтобы $q_1(\tau)$ была неотрицательной, нужно потребовать, чтобы $\beta \geq \gamma$. Дифференциальное уравнение для производящей функции процесса Уо, при выполнении предположений (6.60), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} &= \lambda \gamma^2(s, t) - \{\alpha + \lambda[1 - (\beta - \gamma)]\}F(s, t) + \\ &+ \alpha + \lambda(1 - \beta) + \alpha(s - 1)e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Выражение (6.61) представляет собой неоднородное параметрическое уравнение Риккати.

**§6.6. Марковские модели организующихся и самоорганизующихся ветвящихся процессов.
Оптимизационные характеристики этих процессов**

В настоящем параграфе показано, что для ветвящихся процессов модели организующихся и самоорганизующихся систем имеют место для производящих функций этих процессов.

Если вместо целостной производящей функции $F(s, t)$ (см. уравнение (6.50)), определить производящую функцию $F(s, t)$ как отношение производящих функций числителя $u(s, t)$ и знаменателя $v(s, t)$, т.е. $F(s, t) = u(s, t)/v(s, t)$, то в этом случае может быть записана система из двух линейных дифференциальных уравнений для производящих функций

$$\begin{cases} u_t(s, t) + \frac{1}{2}\xi u(s, t) = 0v(s, t), \\ v_t(s, t) - \frac{1}{2}\zeta v(s, t) = -\zeta u(s, t). \end{cases} \quad (6.62)$$

Если умножить первое и второе уравнения системы (6.62) соответственно на $v(s, t)$ и $u(s, t)$ и вычесть одно из другого, а результат вычитания разделить на $v^2(s, t)$, то получим параметрическое уравнение Риккати

$$R_t + \xi R - \zeta R^2 = 0,$$

где $R = u/v$.

Последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \lambda R(R - 1), \quad (6.63)$$

где принято $\xi = \zeta \equiv \lambda$.

Следовательно, если граничные условия для функций $F(s, t)$ и $R(s, t)$ одинаковы, то $F(s, t)$ равно $R(s, t)$. В этом случае дифференциальные уравнения (6.50) и (6.63) эквивалентны. Таким образом, параметрическому уравнению Риккати (6.50) соответствует виртуальная система уравнений (6.62). На Рис. 6.4

приведена блок-схема функционирования организующейся системы для производящей функции $F(s,t)=u(s,t)/v(s,t)$ ветвящегося процесса рождения.

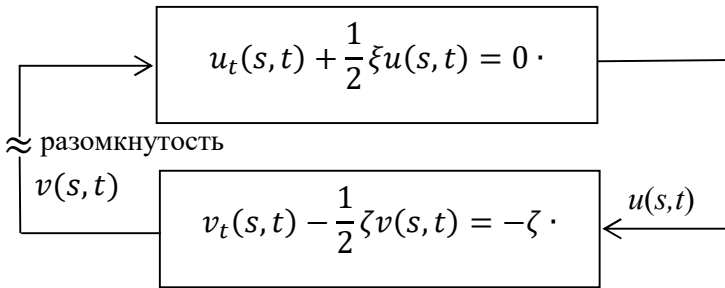


Рис. 6.4

Эта блок-схема соответствует системе дифференциальных уравнений (6.62). Данная система является организующейся, поскольку влияние второго уравнения (6.62) на первое не имеет места $0v(s,t)=0$, т.е. эта система разомкнута.

Обратимся теперь к параметрическому уравнению Риккати (6.53). Этому уравнению соответствует виртуальная система из двух линейных дифференциальных уравнений для производящих функций числителя $u(s,t)$ и знаменателя $v(s,t)$:

$$\begin{cases} u_t(s,t) + \frac{1}{2}\xi u(s,t) = \xi v(s,t), \\ v_t(s,t) - \frac{1}{2}\zeta v(s,t) = -\zeta u(s,t). \end{cases} \quad (6.64)$$

Повторяя ту же процедуру преобразований, что была проведена для системы (6.62), получим параметрическое уравнение Риккати

$$R_t = -\xi R + \zeta R^2 + \zeta, \quad (6.65)$$

где $R(s,t) = u(s,t)/v(s,t)$.

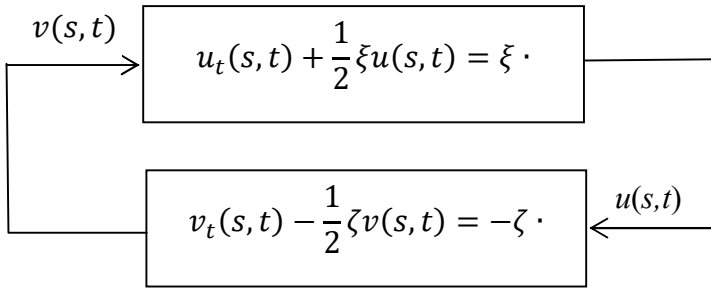


Рис. 6.5

Таким образом, если граничные условия для функций $F(s, t)$ и $R(s, t)$ одинаковы, то $F(s, t)$ равно $R(s, t)$. Следовательно, параметрическому уравнению Риккати (6.53) соответствует виртуальная система уравнений (6.64). На Рис. 6.5 приведена блок-схема функционирования самоорганизующейся системы для производящей функции ветвящегося процесса рождения и смерти. Эта блок-схема соответствует системе дифференциальных уравнений (6.64); она замкнута.

Для неоднородного параметрического уравнения Риккати (6.61) соответствующего процессу U_0 , зависящему от возраста, виртуальная система взаимосвязанных дифференциальных уравнений, записанных относительно производящих функций $u(s, t)$ и $v(s, t)$, имеет вид

$$\begin{cases} u_t(s, t) + \frac{1}{2} \{ \alpha + \lambda [1 - (\beta - \gamma)] \} u(s, t) = \lambda \gamma v(s, t), \\ v_t(s, t) - \frac{1}{2} \{ \alpha + \lambda [1 - (\beta - \gamma)] \} v(s, t) = \\ = - [\lambda (1 - \beta) + \alpha (1 - s) e^{-\lambda t}] u(s, t). \end{cases} \quad (6.66)$$

Существование системы (6.66) свидетельствует о наличии самоорганизации в процессе U_0 . Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2} \{ \alpha + \lambda [1 - (\beta - \gamma)] \}, \quad \zeta_1 = \lambda \gamma, \quad \zeta_2 = \\ = \lambda (1 - \beta) + \alpha (1 - s) e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

то система уравнений (6.66) может быть представлена в виде функциональной блок-схемы на рис. 6.6.

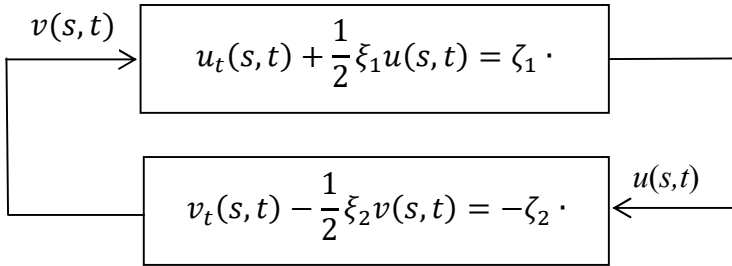


Рис. 6.6

Эта блок-схема показывает, что для производящих функций $u(s, t)$ и $v(s, t)$ виртуальной системы (6.66) существует самоорганизация процесса U_0 , поскольку система замкнута.

Рассмотрим теперь производящую функцию процесса рождения с точки зрения ее целостного представления. С этой целью решим уравнение (6.50) с начальным условием $F(s, 0) = s$; это решение имеет вид

$$F(s, t) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}t}}{ch\left(\frac{\lambda}{2}t - \phi_1\right)}, \quad (6.67)$$

где

$$\phi_1 = \ln \left| \frac{s}{1-s} \right|^{1/2}.$$

Производная от выражения (6.67) по t дает

$$\dot{F}(s, t) = -\Lambda(s) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda}{2}t - \phi_1\right), \quad (6.68)$$

где

$$\Lambda(s) = \frac{\lambda}{4} e^{-2\phi_1}.$$

Используя известные дифференциальные соотношения (3.108) между гиперболическими функциями $th(s, t)$ и $sech(s, t)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} = -\Lambda(s) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\lambda}{2}t - \phi_1\right), \\ \frac{\partial \operatorname{sech}\left(\frac{\lambda}{2}t - \phi_1\right)}{\partial t} = -\frac{\lambda}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\lambda}{2}t - \phi_1\right) F(s, t). \end{cases} \quad (6.69)$$

Таким образом, система уравнений (6.69) является циклической. Поскольку наличие цикличности является прямым свидетельством существования самоорганизации (см. главу 2), то можно заключить, что для производящей функции процесса рождения самоорганизация существует на уровне целостной производящей функции.

Обратимся теперь к вопросу установления самоорганизации для производящей функции ветвящегося процесса рождения и смерти. Этому процессу соответствует целостная производящая функция $F(s, t)$, которая согласно выражению (6.65), удовлетворяет параметрическому уравнению Риккати

$$\frac{\partial F(s, t)}{\partial t} = -(\lambda + \mu)F(s, t) + \lambda F^2(s, t) + \mu, \quad (6.70)$$

с начальным условием $F_0(s, 0) = s$.

Уравнение (6.70) имеет решение

$$F(s, t) = F_1 + \frac{F_1 + F_2}{[(F_0 + F_2)/(F_0 - F_1)]e^{2\beta t} - 1}, \quad (6.71)$$

где

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2 - \lambda\mu},$$

$$F_1 = -\frac{1}{\lambda}\left(\beta - \frac{\lambda + \mu}{2}\right),$$

$$F_2 = -\frac{1}{\lambda}\left(\beta + \frac{\lambda + \mu}{2}\right).$$

Производная от выражения (6.71), при условии $F_1 > F_0$, дает

$$\dot{F}(s, t) = -K(s) \operatorname{sech}^2(\beta t - \phi_2), \quad (6.72)$$

где

$$K(s) = \frac{\beta}{\mu} e^{-2\phi_2}, \quad \phi_2 = (1/2) \ln \left(\frac{F_1 - s}{F_2 + s} \right).$$

На основе известных дифференциальных соотношений (3.108) между гиперболическими функциями $th(s,t)$ и $sech(s,t)$, может быть записана следующая система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} = -K(s)sech^2(\beta t - \phi_2), \\ \frac{\partial sech(\beta t - \phi_2)}{\partial t} = -\beta sech(\beta t - \phi_2)F(s, t). \end{cases} \quad (6.73)$$

Цикличность системы уравнений (6.73) (см. главу 2) свидетельствует о существовании самоорганизации для производящей функции ветвящегося процесса рождения и смерти. Самоорганизация имеет место на уровне целостной производящей функции.

Оптимизационные характеристики рассмотренных ветвящихся процессов могут быть определены из вариационного уравнения Эйлера–Лагранжа, записанного для производящей функции

$$F_y(s, t) - F_{ty'}(s, t) - F_{yy'}(s, t) \cdot y' - F_{yy''}(s, t) \cdot y'' = 0, \quad (6.74)$$

где

$$y = \Lambda(s)sech\left(\frac{\lambda}{2}t - \phi_1\right) \text{ или } y = K(s)sech(\beta t - \phi_2).$$

Решение уравнения (6.74) для значений y , процессов рождения и рождения и смерти, позволит определить оптимизационные характеристики этих процессов. Читателю предлагается решить уравнение (6.74) и найти соответствующие оптимизационные характеристики.

§ 6.7. Марковский процесс Гальтона–Ватсона. Самоорганизация в этом процессе

Процесс Гальтона–Ватсона является бинарным процессом рождения с интенсивностью рождения $\lambda > 0$, в котором размер популяции удваивается через интервалы времени, равные $1/\lambda$. Поскольку процесс бинарный, то $h(s) = s^2$ и $q_2 = 1$, а остальные вероятности трансформации равны 0. Для этого процесса функция $G(t)$ является ступенчатой

$$G(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau \geq 1/\lambda, \\ 0 & \text{при } \tau < 1/\lambda. \end{cases}$$

Уравнение для производящей функции запишется так

$$F\left(s, \frac{k+1}{\lambda}\right) = F^2\left(s, \frac{k}{\lambda}\right),$$

где $F(s, 0) = s$, $X(0) = 1$.

С этого процесса началась теория ветвящихся процессов. Общеизвестно, что фамилия в семье сохраняется по мужской линии. Основное положение, т.е. суть, проблемы заключается в том, что априори известны вероятности p_0, p_1, p_2, \dots с которыми отец имеет соответственно 0, 1, 2 ... сыновей. Пусть с этими же вероятностями каждый из них имеет своих сыновей и т.д. Какова вероятность того, что мужская линия выродится к r -ому поколению. Эта задача впервые была поставлена Френсисом Гальтоном в 1873 году. Задачу Гальтона с математической точки зрения можно сформулировать также следующим образом. Если каждый мужской представитель фамилии имеет в семье x сыновей, где *случайная величина x имеет распределение с производящей функцией $F(s)$* и эта же ситуация имеет место в последующих поколениях, то какова вероятность того, что фамилия выродится.

Первое решение этой задачи дали Гальтон и Ватсон в 1874

году; по поводу этой задачи они писали: «Исчезновение фамилий лиц, которые занимали видное положение в истории – это факт неоднократно отмечавшийся в прошлом; по этому поводу строились различные догадки... Слишком многочисленны были примеры фамилий, которые будучи распространенными, становились редкими или даже совсем исчезли».

Настоящую задачу необходимо рассматривать как цепь Маркова с бесконечным числом состояний. Состояние на m -ом шаге задает общее количество индивидуумов m -ого поколения. Поскольку мы предполагаем, что процесс начинается с одного индивидуума, то начальное состояние есть 1. Состояние 0 является поглощающим. Когда процесс достигает этого состояния, фамилия вырождается, т.е. вымирает, так что это состояние остается навсегда. Основной вопрос задачи Гальтона состоит в том, можно ли гарантировать вымирание фамилии.

Пусть d означает вероятность вымирания фамилии, а d_m – вероятность вымирания на m -ом шаге. Тогда будем иметь $d = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m$. В дальнейшем будем рассматривать вероятность s того, что всего появится ровно n индивидуумов до того, как фамилия вымрет. Если фамилия вымирает, то в ней насчитывается только конечное число индивидуумов; в противном случае их бесконечно много, следовательно $d = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$.

В дальнейшем мы будем также рассматривать среднее количество индивидов данной фамилии $M = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ и среднее количество индивидов в роду $N = \sum_{n=0}^{\infty} ns_n$.

Задачу Гальтона–Ватсона *невозможно иллюстрировать в общем случае т.е. для распределения случайной величины x с производящей функцией $F(s)$ произвольного вида*. Поэтому результаты будем излагать в терминах конкретного распределения, а именно *геометрического распределения*, так распростра-

ненного в природе.

Большая распространенность этого распределения связана с тем, что это распределение зависит от показательной функции (см. Главу 3), тесно связанной с геометрическим распределением. Покажем, что постоянство темпа изменения функции y имеет место в том случае, если эта функция является показательной. Действительно, пусть имеем логарифмическую функцию

$$z_k(x) = \ln(y_k(x)).$$

Производная от этой функции будет

$$z'_k(x) = \frac{y'_k}{y_k}.$$

Если $y_k = b_k^x$, то из последнего соотношения имеем

$$z'_k = \ln b_k = \text{const.}$$

Наконец, если в последнем выражении положить $b_k = e^{a^k}$, то получим

$$z_k = a^k, \quad 0 < a < 1,$$

т.е. k -ый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Этот факт означает, что k -ый член зависит от постоянства темпа изменения показательной функции b_k^x .

Для некоторого $a(0 < a < 1)$ плотность вероятности геометрического распределения запишется так

$$p_k = (1 - a)a^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.75)$$

Поскольку p_k плотность, то имеет место соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1;$$

среднее количество индивидов данной фамилии будет

$$M = (1 - a) \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{1 - a}. \quad (6.76)$$

Формулы для переходных вероятностей p_{ij} в данном параграфе не используются. Однако величины d , d_m , s_n и M вычис-

ляются другими методами. При этом главная формула на которую дается ссылка, это выражение для производящей функции

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k. \quad (6.77)$$

В дальнейшем изложении, вместо производящей функции (6.77) мы будем пользоваться производящей функцией, обозначаемой следующим образом

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k. \quad (6.78)$$

Эта функция вполне определена на интервале $t \in [0, 1]$, причем

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, \quad \text{а} \quad f'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M.$$

Нам также известно, что f' и f'' неотрицательны на этом интервале. График функции

$$y = f(t) \quad (6.79)$$

будет иметь вид, изображенный на Рис. 6.7.

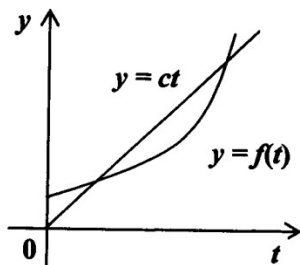


Рис. 6.7

Нас интересуют точки пересечения кривой (6.79) с прямой вида $y = ct$. Это означает, что мы хотим решить уравнение

$$f(t) = ct, \quad (6.80)$$

где $c \geq 0$, $t \in [0, 1]$.

Поскольку $y=f(t)$ выпукла (т.е. $f''(t) \geq 0$), то должно быть не более двух пересечений. Так как $f(0) = p_0 \geq 0 = c0$ и $f(1) = 1 \leq c1$, то по крайней мере одно решение обязательно существует. Если решений два, то нас будет интересовать меньшее из них. Из Рис. 6.7 видно, что меньший корень характеризуется тем, что наклон кривой меньше наклона прямой. Следовательно, для получения меньшего корня уравнения (6.80) необходимо выполнение неравенства

$$f'(t) \leq c. \quad (6.81)$$

Равенство имеет место в случае касания.

Рассмотрим случай геометрического распределения функции $f(t)$.

Пример 6.2.¹ Для этого распределения имеем

$$f(t) = (1-a) \sum_{k=0}^{\infty} (at)^k = \frac{1-a}{1-at}, \quad (6.82)$$

$$f'(t) = \frac{a(1-a)}{(1-at)^2} \quad \text{и} \quad M = f'(1) = \frac{a}{1-a}.$$

После подстановки функции $f(t)$, определенной согласно (6.82), в выражение (6.80), получим квадратное уравнение

$$act^2 - ct + 1 - a = 0. \quad (6.83)$$

Если $c > 1$, то имеется два вещественных корня, один из которых лежит между 0 и 1, а второй больше 1. Если $c = 1$, то корни равны соответственно $(1-a)/a$ и 1.

Введем теперь обозначение d_m для величины вероятности вырождения (вымирания) фамилии в m -ом поколении. Будем определять эту величину рекуррентно, т.е. зная d_m будем определять d_{m+1} .

¹ Излагаемый в § 6.7 материал справедлив для случая, когда индивидуум размножается почкованием; хотя приведенные результаты непосредственно могут быть обобщены на случай, когда размножение происходит путем близости двух индивидуумов различного пола.

Для одного индивидуума $d_0=0$. Следовательно, фамилия вымирает в первом поколении, если первый индивидуум не имеет потомства, т.е. $d_1 = p_0$.

Предположим, что для некоторого m известно d_m и мы вычисляем d_{m+1} . В первом поколении было k индивидуумов. Каждый из них можно рассматривать как главу нового рода. Если род первого индивидуума вымирает на $(m+1)$ -ом шаге, то это означает, что род каждого его индивидуума вымирает на m -ом шаге. Поскольку вероятность вымирания рода в m -ом поколении равна d_m и k родов размножаются независимо друг от друга, то вероятность того, что они все вымрут, равна d_m^k . Хотя мы не знаем точного значения k , но мы знаем, что его вероятность равна p_k . Поэтому вероятность вымирания $(m+1)$ -ого поколения равна

$$d_{m+1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k d_m^k = f(d_m). \quad (6.84)$$

Итеративная процедура определения вероятности вымирания $(m+1)$ -го поколения показана на Рис. 6.8.

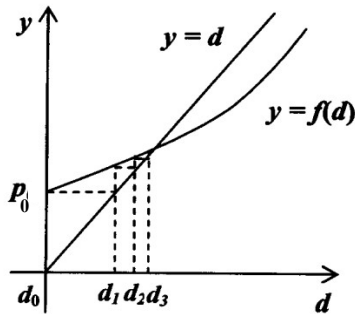


Рис. 6.8

Если в выражении (6.84) перейти к пределу, то получим

$$d = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = f(d). \quad (6.84a)$$

Следовательно, нужно вычислить минимальный корень уравнения (6.83) при $c=1$. Для нашего случая уравнение (6.83) примет вид

$$ad^2 - d + 1 - a = 0. \quad (6.85)$$

Поскольку $f(1)=1$, то $t=1$ есть корень. Является ли он минимальным? Необходимо проверить равенство (6.81); корень $t=1$ является минимальным тогда и только тогда, когда $M=f'(1) \leq 1$. В этом случае $d=1$, в противном случае $d < 1$. Следовательно, если среднее количество индивидуумов не превышает единицы, то род обязательно вымрет. Но если M больше единицы, то имеется возможность выживания так что $d < 1$. Найти величину d можно вычислив минимальный корень уравнения (6.84а), т.е.

$$d = f(d). \quad (6.84a)$$

Продолжение примера 6.2.

Таким образом, для геометрического распределения (6.82) уравнение (6.84а) примет вид (6.85). Двумя корнями этого уравнения являются: $d_1 = 1$ и $d_2 = \frac{1-a}{a} \equiv \frac{1}{M}$. Значит если $M \leq 1$, то минимальным корнем является $d_1 = 1$. Но если $M > 1$, то минимальным корнем будет $d_2 = \frac{1}{M}$; в этом случае вероятность вымирания обратно пропорциональна среднему количеству индивидуумов.

Вычислим теперь среднее количество индивидуумов в роду

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} s_n n. \quad (6.86)$$

Общее количество индивидуумов можно вычислить как сумму одного (первого) индивидуума и общего количества индивидуумов в родах потомков первого поколения. Поскольку

каждый потомок подобен первому индивидууму, то их среднее количество должно быть равно N . Таким образом, если число потомков первого поколения равно k , то общее среднее количество индивидуумов (не считая родоначальника) равно kN . Таким образом, для конечного N имеем

$$N = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} p_k kN = 1 + MN.$$

Из последнего выражения следует

$$N = \frac{1}{1 - M}. \quad (6.87)$$

Формула (6.87) показывает, что N конечно, только если $M < 1$. Таким образом, имеем следующие случаи:

а. $M < 1$, $d = 1$, $N = 1/(1 - M)$;

б. $M = 1$, $d = 1$, N бесконечно;

с. $M > 1$, $d < 1$ – минимальный корень уравнения (6.84а), N бесконечно.

Продолжение примера 6.2.

Для случая, когда $c = 1/u$, уравнение (6.83) примет вид

$$at^2 - t + u(1 - a) = 0. \quad (6.88)$$

Корень уравнения (6.83), имеющий минимальное значение есть

$$t_{\min}(u) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4au(1 - a)}}{2a}. \quad (6.89)$$

Для нахождения s_n , фигурирующего в выражении (6.86), разложим (6.89) в ряд Тейлора, тогда найдем коэффициенты s_n [34] (см. приложение Д):

$$s_n = \frac{1}{an} [a(1 - a)]^n \binom{2n - 2}{n - 1}. \quad (6.90)$$

Следовательно, s_n фигурирующие в случае (6.86), определяем по формуле (6.90).

Так как $M=a/(1-a)$, то для геометрического распределения имеют место следующие случаи:

$$a. \quad a < \frac{1}{2}, \quad d = 1, \quad N = \frac{1-a}{1-2a};$$

$$b. \quad a = \frac{1}{2}, \quad d = 1, \quad N \text{ бесконечно};$$

$$c. \quad a > \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1-a}{a} \equiv M^{-1}, \quad N \text{ бесконечно}.$$

6.7.1. Самоорганизация в процессе Гальтона–Ватсона

Варианты a и b исключаются, поскольку в этом случае $d \neq 1$ и, следовательно, имеем детерминированный процесс. Случай c создает возможность путем изменения параметра a менять вероятность вырождения (вымирания) того или иного рода известной фамилии. Представим параметр a в виде произведения варьируемого (изменяемого) коэффициента K и неизменяемого (постоянного) известного параметра a_0 , т.е. $a=Ka_0$. Тогда, среднее количество индивидуумов будет равно

$$M = \frac{Ka_0}{1 - Ka_0}. \quad (6.91)$$

Из выражения (6.91) видно, что среднее количество индивидуумов зависит от коэффициента K .

Функциональная блок-схема, соответствующая выражению (6.91) показана на Рис. 6.9. Из этого рисунка видно, что процесс Гальтона–Ватсона является циклическим и, следовательно, обладает свойством самоорганизации.

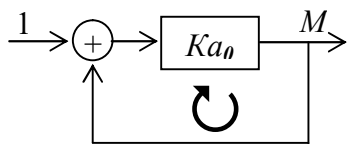


Рис. 6.9

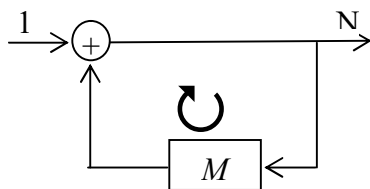


Рис. 6.10

Среднее количество индивидуумов в роду (см. формулу 6.87) N также обладает самоорганизационным свойством, поскольку согласно Рис. 6.10, является циклическим процессом.

Если известной фамилии не угрожает вырождение в вероятностном смысле, то вероятность вырождения должна находиться в пределах: $0 < d < 0,5$. Поэтому, с учетом выражения (6.91), для фамилий которым не угрожает вымирание будем иметь неравенство

$$\frac{2}{3a_0} < K < \frac{1}{a_0}. \quad (6.92)$$

Таким образом, если параметр геометрического распределения $a = Ka_0$ определить из условия выполнения неравенства (6.92), то вероятность вырождения фамилии будет находиться в пределах $0 < d < 0,5$. Это означает, что данной фамилии не угрожает исчезновение в вероятностном смысле.

Как же в реальных условиях регулировать изменение коэффициента K ? Поскольку христианство не допускает многоженства, то остаются две возможности. 1. Производить усыновление детей мужского пола. 2. Создать незаконных детей и отбирать из них для вымирающей фамилии детей мужского пола [79].

Полное решение задачи Гальтона дал в 1930 году Стеффенсен. Однако до настоящего времени не было работ, посвященных проблеме перевода вероятности вырождения d из области $d > 0,5$ в область $d < 0,5$. Самоорганизация процесса Гальто-

на заключается в переводе вероятностей вымирания фамилии d из области риска вырождения в область отсутствия этого риска.

§ 6.8. Марковские последовательности

Это непрерывный по координатам (уровню) марковский процесс с дискретным временем. Такие марковские процессы называют марковскими последовательностями. Марковские последовательности широко используются в автоматическом управлении, радиотехнике, а также в некоторых областях информатики и математики, примыкающих к технической кибернетике (последовательностные машины).

Большая распространенность марковских последовательностей обусловлена следующим обстоятельством.

Пусть имеем скалярное разностное уравнение второго порядка

$$x_1(k+1) = c_1(k)x_1(k) + c_2(k)x_1(k-1) + w(k), \quad (6.93)$$

где $w(k)$ – чисто случайная марковская последовательность, а $c_1(k)$ и $c_2(k)$ – известные последовательности чисел. Ясно, что последовательность $x_1(k)$ не является марковской. Однако ее можно рассматривать как компоненту векторной марковской последовательности с вектором состояния

$$x = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}, \text{ где } x_2(k+1) = x_1(k), \quad \text{так, что}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(k) & c_2(k) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} w(k). \quad (6.94)$$

Таким образом, двухкомпонентный вектор $\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix}$ зависит только от знания предшествующего элемента $\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$

последовательности (6.94) и от чисто случайной последовательности $w(t)$. Следовательно, марковские последовательности могут быть использованы для описания широкого класса явлений.

Марковские последовательности обладают следующими четырьмя свойствами.

1. Если известно состояние марковской последовательности $\lambda_m \equiv x_m$ в настоящий момент времени, то ее будущее состояние $\lambda_n \equiv x_n$ (при $n > m > \mu$) не зависит от прошлого состояния, т.е.

$$P(x_n, x_\mu | x_m) = P_{nm}(x_n | x_m) P(x_\mu | x_m).$$

2. Любая последовательность, взятая из Марковской последовательности является также марковской, т.е. если при заданном t_n рассматривать моменты времени $t_{n_1} < t_{n_2} < \dots < t_{n_m}$, то будет иметь место выражение

$$P(x_{n_m} | x_{n_1}, \dots, x_{n_{m-1}}) = P_{n_m}(x_{n_m} | x_{n_{m-1}}).$$

3. Марковская последовательность остается марковской и в обратном направлении т.е.

$$P(x_n | x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = P_n(x_n | x_{n+1}).$$

4. Плотность вероятности перехода удовлетворяет уравнению Колмогорова – Чепмена

$$P(x_n | x_\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_n | x_m) P(x_m | x_\mu) dx_m, \quad n > m > \mu.$$

В данном параграфе показано использование марковских последовательностей при определении динамических характеристик (идентификации), которые применяются в адаптивных (рукотворных самоорганизующихся) системах автоматического управления.

Рассмотрим функциональную блок-схему рукотворной самоорганизующейся системы автоматического управления, показанную на Рис. 6.11.

Из Рис. 6.11 видно, что блок определения динамических характеристик системы управления (БОДХСУ) является существенным звеном всей замкнутой рукотворной самоорганизующейся системы управления. Поскольку система автоматического управления может быть рассмотрена как реализация идей самоорганизации в рукотворных системах, то в настоящем параграфе марковские последовательности используются только с целью иллюстрации синтеза БОДХСУ.

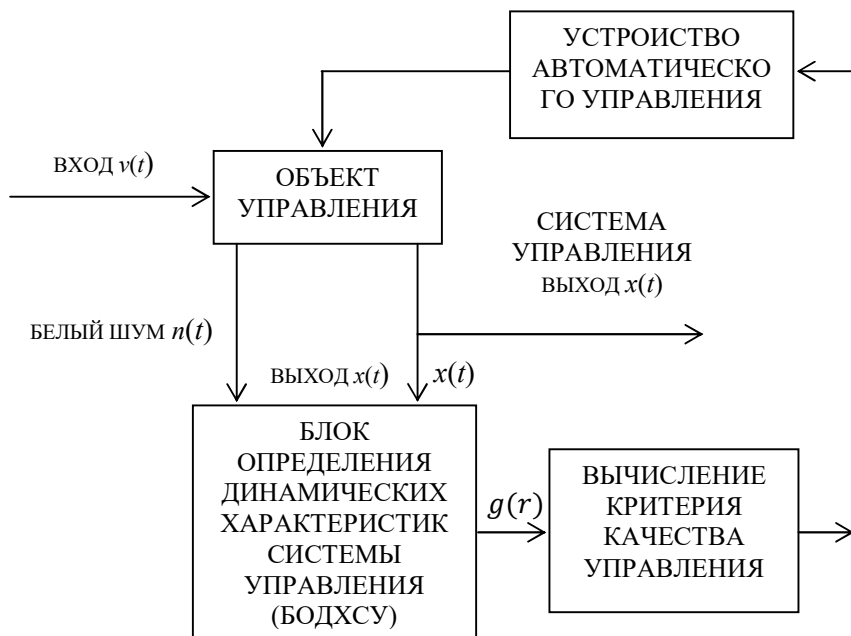


Рис. 6.11

6.8.1. Предварительные соображения

Хорошо известно, что входная $m(t)$ и выходная $x(t)$ величины динамической системы связаны интегралом свертки

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)m(\tau)d\tau, \quad (6.95)$$

где $g(t)$ – импульсная (переходная) функция.

В уравнение (6.95) входят три переменные $m(t)$, $g(t)$ и $x(t)$. Выражение (6.95) можно представить в виде блок-схемы, показанной на Рис. 6.12.

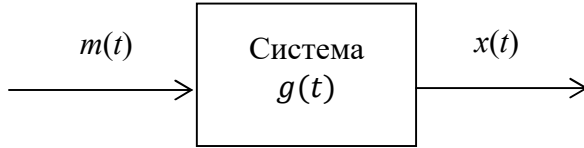


Рис. 6.12

Уравнение (6.95) может быть решено относительно любой из этих трех переменных, если задать две другие переменные. Простой заменой переменных выражение (6.95) может быть записано в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)m(t - y)dy, \quad (6.96)$$

где верхний предел интегрирования заменен на бесконечность в следствии того, что в любой физической системе $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Взаимно-корреляционная функция между $m(t)$ и $x(t)$ равна

$$r_{mx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} m(t - \tau)x(t)dt. \quad (6.97)$$

Подстановка (6.96) в уравнение (6.97) дает

$$r_{mx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} m(t - \tau)dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y)m(t - y)dy,$$

а при перемене порядка интегрирования, получим

$$r_{mx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} m(t - \tau)m(t - y)dt \right]. \quad (6.98)$$

Выражение в квадратных скобках формулы (6.98) представляет собой автокорреляционную функцию входа $m(t)$ при аргументе $(\tau-y)$ т.е.

$$r_{mm}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} m(t - \tau)m(t - y)dt. \quad (6.98a)$$

Поэтому $r_{mx}(\tau)$ может быть записано следующим образом

$$r_{mx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)r_{mm}(\tau - y) dy. \quad (6.99)$$

Из сопоставления (6.96) с (6.99) видно, что выражение (6.99) имеет вид интеграла свертки, т.е. если на систему подано входное воздействие $r_{mm}(\tau)$, то ее реакцией будет $r_{mx}(\tau)$. В том случае, если на вход системы подается белый шум $m(t)$ (автокорреляционная функция которого равна δ – функции Дирака) на выходе (см. Рис. 6.12) этой системы (благодаря фильтрующему свойству δ – функции) получим импульсную переходную функцию $x(t) = g(t)$:

$$r_{mx}(\tau) = M_0 g(\tau), \quad (6.97a)$$

где M_0 – интенсивность белого шума.

6.8.2. Белый шум с непрерывным и дискретным временем

Рассматривая белый шум, необходимо иметь в виду его специфические свойства. Белый шум есть удобная математическая идеализация; он не дифференцируем и имеет бесконечную

дисперсию. Исходя из этих особенностей, уравнения в которые входят белые шумы, выделены в особый класс и называются *стохастическими дифференциальными уравнениями*.

С помощью стохастического дифференциального уравнения винеровский процесс или процесс броуновского движения можно определить через белый шум $m(t)$:

$$\frac{dw(t)}{dt} = m(t), \quad w(0) = 0. \quad (6.100)$$

Под белым шумом $m(t)$ понимается гауссов (нормальный) стационарный процесс с нулевым средним значением и дельтообразной корреляционной функцией

$$\langle m(t) \rangle = 0, \quad r_{mm}(\tau, s) = \langle m(t)m(s) \rangle M_0 \delta(t - s). \quad (6.101)$$

Согласно выражению (6.100) может быть дано определение винеровского процесса

$$w(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau \quad \text{или} \quad dw(t) = m(t) dt. \quad (6.102)$$

Согласно (6.102) среднее значение и дисперсия процесса $w(t)$ будут

$$\langle m(t) \rangle = 0, \\ D(w(t)) \equiv \sigma^2(t) = \iint_0^t m(t_1) m(t_2) dt_1 dt_2 = M_0 t. \quad (6.103)$$

Поскольку белый шум является нормальным процессом, а при линейном преобразовании свойство нормальности сохраняется, то процесс $w(t)$ будет также нормальным и иметь плотность вероятности

$$P(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi M_0 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2M_0 t}\right), \quad t > 0. \quad (6.104)$$

Используя выражение (6.102) можно найти автокорреляционную функцию винеровского процесса

$$w(s, t) = \int_0^s \int_0^t \langle m(t_1)m(t_2) \rangle dt_1 dt_2 = M_0 \min(s, t). \quad (6.105)$$

Винеровский процесс может быть рассмотрен как марковский случайный процесс с переходной функцией

$$P(t, m, w) = \int_w P(t, m, y) dy, \quad (6.106)$$

где переходная плотность $P(t, m, y)$ определяется согласно выражению

$$P(t, m, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2t}}, \quad (6.107)$$

в котором $M_0 = 1$.

Выражение автокорреляционной функции через спектральную плотность $\varphi(\omega)$ имеет вид

$$r_{mm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \varphi(\omega) d\omega, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (6.108)$$

где $\varphi(\omega) = M_0 = const$, для белого шума.

Из формулы (6.105) видим, что белый шум с непрерывным временем не имеет конечной дисперсии. Поэтому можно попытаться получить другие процессы, которые имеют постоянную спектральную плотность $\varphi(\omega)$, но конечную дисперсию. Это можно выполнить, например, ограничением по частоте белого шума

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} M_0, & |\omega| < \Omega, \\ 0, & |\omega| \geq \Omega. \end{cases}$$

Такой процесс имеет автокорреляционную функцию

$$r(\tau) = \int_{-\Omega}^{\Omega} M_0 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{2M_0}{\tau} \sin\Omega\tau. \quad (6.109)$$

Для определения поведения автокорреляционной функции при $\Omega \rightarrow \infty$ предпочтительнее рассматривать интеграл от r :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} r(s) ds = 2M_0 \int_{-\infty}^t \frac{\sin \Omega s}{s} ds = 2M_0 \int_{-\infty}^{\Omega \tau} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Из этого выражения находим, что интеграл от автокорреляционной функции есть ступенчатая функция

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} R(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ \pi M_0, & \tau = 0, \\ 2\pi M_0, & \tau > 0, \end{cases} \quad (6.110)$$

поскольку

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \pi.$$

Формула (6.110) показывает, что в пределе автокорреляционная функция становится δ – функцией Дирака: поскольку $r(\tau) \rightarrow 2\pi M_0 \delta(\tau)$, т.е.

$$r(\tau) = 2\pi M_0 \delta(\tau). \quad (6.111)$$

Из выражения (6.101) следует, что белый шум с непрерывным временем обладает свойством некоррелированности $x(t)$ и $x(s)$ для $t \neq s$, что является полной аналогией дискретного случая. Действительно, для дискретного случая имеем

$$r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\omega} M_0 d\omega = \frac{2M_0}{n} \sin(n\pi). \quad (6.112)$$

Следовательно, для белого шума с дискретным временем автокорреляционная функция равна

$$r(n) = \begin{cases} 2\pi M_0, & n = 0, \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (6.113)$$

Из определения белого шума с дискретным временем (6.113) следует, что значения этого процесса в различные моменты времени некоррелированы, а для нормального белого

шума также независимы. Таким образом, белый шум с дискретным временем есть процесс, который состоит из последовательности некоррелированных (в нормальном случае также независимых) случайных переменных. Поэтому белый шум с дискретным временем называют полностью некоррелированным (чисто случайным) процессом или *чисто случайной марковской последовательностью*.

6.8.3. Блок-схема технической реализации устройства определения динамических характеристик (импульсной переходной функции) системы автоматического управления

В системах автоматического управления пробный сигнал в виде белого шума $n(t)$ смешивается с нормальным входным воздействием $v(t)$. Входная величина $m(t)$ системы автоматического управления в таком случае равна (см. Рис. 6.13)

$$m(t) = v(t) + n(t), \quad (6.114)$$

а выходная величина запишется так

$$x(t) = x_v(t) + x_n(t), \quad (6.115)$$

где

$$x_v(t) = \int_{-\infty}^t v(y)g(t-y)dy, \quad (6.116)$$

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^t n(y)g(t-y)dy, \quad (6.117)$$

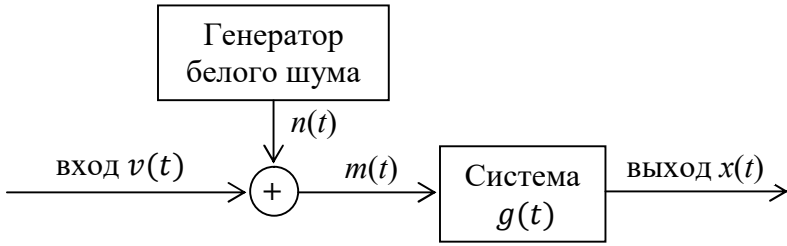


Рис. 6.13

Взаимно-корреляционная функция между $n(t)$ и $x(t)$ имеет вид

$$r_{nx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} n(t - \tau)x(t)dt. \quad (6.118)$$

Подстановка выражения (6.115) в (6.118) дает

$$r_{nx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} n(t - \tau)x_v(t)dt + \\ + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} n(t - \tau)x_n(t)dt. \quad (6.119)$$

Аналогично тому, как из выражения (6.97) получили выражение (6.99), можно определить формулу для $r_{nx}(\tau)$:

$$r_{nx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)n_{nv}(\tau - y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} g(y)n_{nn}(\tau - y)dy. \quad (6.120)$$

Поскольку сигналы $v(t)$ и $n(t)$ некоррелированы, т.е. $r_{nv}(\tau) = 0$, то уравнение (6.120) примет вид

$$r_{nx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)n_{nn}(\tau - y)dy = M_0g(\tau), \quad (6.121)$$

поскольку $r_{nn}(\tau) = M_0u_0(\tau)$, а $u_0(\tau)$, есть единичный импульс

при $y=0$.

Техническое воспроизведение определения импульсной переходной функции, согласно уравнению (6.121), показано на Рис. 6.14.

Из Рис. 6.14 видно, что если входом системы является белый шум $n(t)$, то взаимнокорреляционная функция между входной и выходной величинами системы равна $g(t)$ в момент $t=\tau$, умноженной на постоянный коэффициент. Изменяя величину запаздывания τ можно получить величину $g(t)$ для произвольного момента времени. Поэтому значения величины $g(t)$ для значений запаздывания $\tau, 2\tau, 3\tau$, и т.д. представляет собой марковскую последовательность.

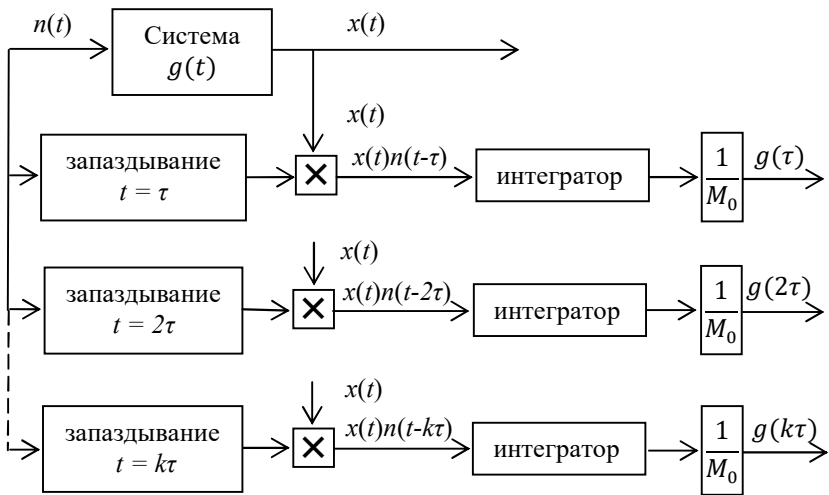


Рис. 6.14

Время интегрирования в выражении (6.97) равно бесконечности, однако практически оно должно быть конечным. Оно выбирается достаточно большим, чтобы удовлетворить требованиям точности и вместе с тем, чтобы параметры системы замет-

но не изменились в течении одного интервала измерения. Поскольку сигналы $v(t)$ и $n(t)$ некоррелированы, т.е. $r_{vn}(\tau) = 0$, то обобщенная блок-схема устройства определения динамических характеристик (импульсной переходной функции) системы управления, будет выглядеть как показано на Рис. 6.15. Блок определения динамических характеристик системы управления (БОДХСУ) обведен пунктирной линией. Этот блок также показан на рис. 6.11 в замкнутой системе автоматического управления.

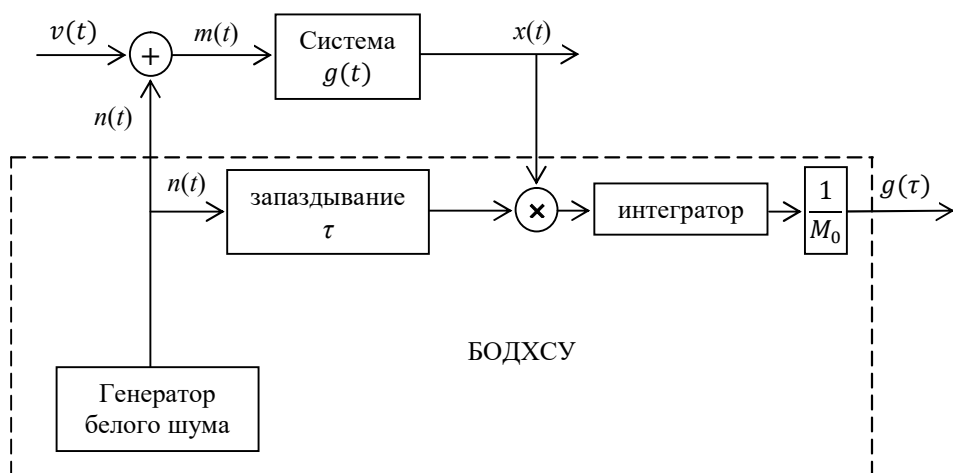


Рис. 6.15

Описанный метод обладает тем преимуществом, что начальное состояние системы не влияет на результат измерения. Недостатком этого метода является то, что в систему необходимо подавать внешний пробный сигнал.

6.8.4. Алгоритмическая реализация блока определения динамических характеристик системы управления (БОДХСУ)

В современных системах автоматического управления, в которых параметры, а следовательно, и импульсная переходная функция $g(t)$ изменяются в широких масштабах, вычисление взаимнокорреляционной функции должно выполняться за сравнительно малый интервал времени, в течении которого $g(t)$ может считаться неизменной. Для этого на вход системы подается периодический меняющийся шум. Если период изменения шума $n(t)$ равен $2\pi/\omega_0$, то его автокорреляционная функция имеет вид

$$r_{nn}(\tau - y) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} n(t - \tau)n(t - y)dt, \quad (6.122)$$

а взаимно-корреляционная функция между $n(t)$ и выходной величиной системы $x(t)$ равна

$$r_{nx}(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} n(t - \tau)n(t - y)dt \right] dy. \quad (6.123)$$

Если изменить порядок интегрирования в выражении (6.123), то согласно (6.118), получим

$$r_{nx}(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} n(t - \tau)x(t)dt. \quad (6.124)$$

Из выражения (6.124) следует, что взаимно-корреляционная функция может быть получена при интегрировании шума в течений только одного периода. Формула (6.121) показывает, что при подаче белого шума на вход системы взаимно-корреля-

ционная функция между входом и выходом этой системы пропорциональна импульсной характеристике данной системы. Сохраняется ли подобная зависимость при периодическом шуме? Предположим, что можно воспроизвести шум, автокорреляционная функция которого подобна изображенной на Рис. 6.16. Тогда согласно формуле (6.111) будем иметь:

$$r_{nx}(\tau) = g(\tau) + g\left(\tau + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + g\left(\tau + \frac{4\pi}{\omega_0}\right) + \dots \quad (6.125)$$

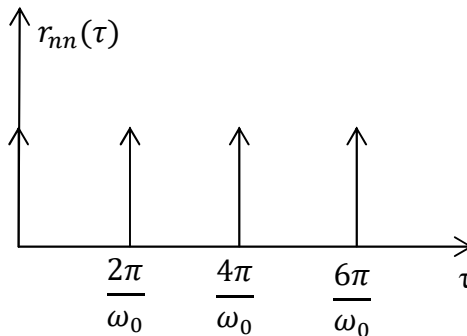


Рис. 6.16

В практических системах обычно импульсная характеристика уменьшается с течением времени до нуля, поэтому можно считать, что

$$r_{nx}(\tau) \approx g(\tau), \quad (6.126)$$

если задаться условием, что период шума больше существенной части импульсной характеристики системы. Поэтому можно заключить, что периодичность шума подаваемого на вход системы, существенно не влияет на вычисление взаимно-корреляционной функции. Наконец, важно получить ответ на следующий вопрос: можно ли воспроизвести такой участок периодического шума, автокорреляционная функция которого была бы подобна

показанной на Рис. 6.16? Этому условию удовлетворяет дискретный двоичный шум [41]. Такой шум показан на Рис. 6.17

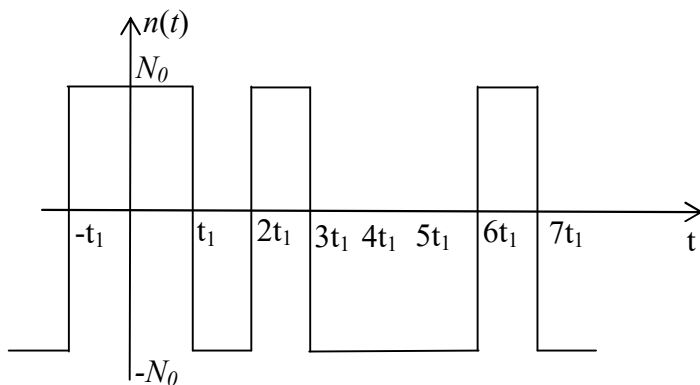


Рис. 6.17

Этот шум может быть получен путем квантования широкополостного шума каждые t_1 секунд. Если в момент квантования сигнал шума положителен, то $n(t)$ становится равным N_0 , а для случая, когда имеем отрицательное значение сигнала $n(t)$ становится равным $-N_0$. Для периодического дискретного двоичного шума автокорреляционная функция показана на Рис. 6.18.

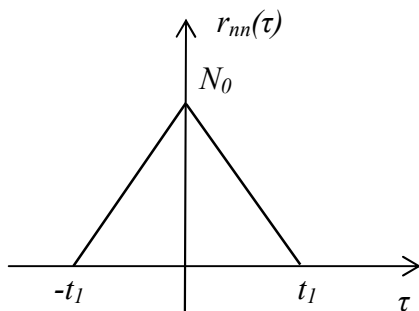


Рис. 6.18

Автокорреляционная функция периодического двоичного шума с дискретными интервалами квантования показана на рис. 6.19.

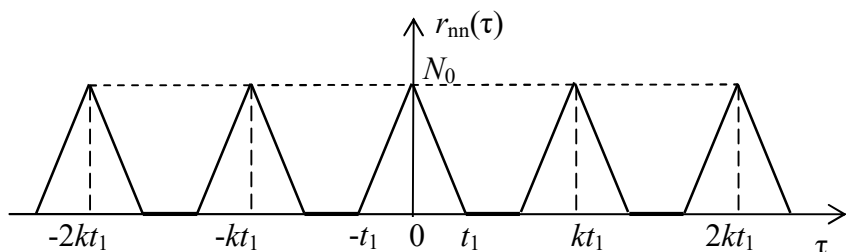


Рис. 6.19

Если из двоичного шума с дискретными интервалами квантования выделить характерный участок длительностью kt_1 секунд, то автокорреляционная функция такого сигнала будет иметь вид, показанный на рис. 6.19, и представлять собой такую же характеристику, какая показана на рис. 6.16, если изменение стационарной импульсной характеристики системы на любом из интервалов $2t_1$ мало. Этого можно достичь соответствующим выбором интервала t_1 .

Следует отметить, что в реальных системах автоматического управления автокорреляционная функция шума вычисляется не по формуле (6.113), а по иному выражению, приводимому ниже.

Для этой цели используется сдвиговый регистр [80], на выходе которого образуется псевдослучайная переменная прямоугольной формы $n(t)$ (см. Рис. 6.17), изменяющаяся между уровнями $-N_0$ и N_0 . Если сдвиговые импульсы поступают в сдвиговый регистр через каждые t_1 секунд, то $n(t)$ представляет собой периодическую функцию времени с периодом повторения $(2^n - 1)t_1$. На основании сформулированных свойств [80] псевдослучайных величин, можно показать, что псевдослучайная переменная $n(t)$ характеризуется средним по времени

$$\langle n \rangle = \frac{N_0}{2^n - 1} \quad (6.127)$$

и автокорреляционной функцией

$$r_{nn} = \langle n(t)n(t + \tau) \rangle = \begin{cases} N_0^2 \left[1 - \frac{|\tau - k(2^n - 1)\Delta t|}{\Delta t} \right], & \text{для } \Delta t \geq |\tau - k(2^n - 1)\Delta t|, \\ \frac{N_0^2}{2^n - 1} & \text{в остальных случаях; } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (6.128)$$

Автокорреляционная функция (6.128) является периодической с периодом $(2^n - 1)t_1$. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что величины $N_0/(2^n - 1)$ (см. (6.127)) и $N_0^2/(2^n - 1)$ (см. (6.128)) становятся весьма малыми при больших n т.е.

$$\langle n \rangle = \frac{N_0}{2^n - 1} \approx 0 \quad \text{и} \quad \frac{N_0^2}{2^n - 1} \approx 0.$$

Кроме описанного в настоящем параграфе метода определения динамических характеристик систем автоматического управления существуют другие методы для решения этой проблемы. Однако для интерпретации применения марковской последовательности в задачах самоорганизации, рассмотренный метод является наиболее подходящим. Действительно, если рассмотреть место блока определения динамических характеристик в рукотворной системе (см. Рис. 6.11), то станет ясным, что этот блок является важным звеном во всей замкнутой рукотворной самоорганизующейся или адаптивной системе автоматического управления.

§ 6.9. Непрерывный марковский процесс

Мы будем оперировать с непрерывными во времени и уровню стохастическими дифференциальными уравнениями. Однако следует заметить, что обыкновенные стохастические дифференциальные уравнения можно получить с помощью предельного перехода в соответствующем разностном уравнении

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &= \\ &= f(x, t)\Delta t + v(x, t + \Delta t) - v(x, t) + 0(\Delta t), \end{aligned} \quad (6.129)$$

где $\{v(x, t), t \in T\}$ – случайный процесс с независимыми приращениями.

Предположим, что $v(x, t + \Delta t) - v(x, t)$ при заданном $x(t)$ имеет нормальное (гауссово) распределение. Поэтому будем иметь

$$v(x, t + \Delta t) - v(x, t) = \sigma(x, t)[w(x, t + \Delta t) - w(t)], \quad (6.130)$$

где $\{w(t), t \in T\}$ – стандартный винеровский процесс.

С учетом (6.130) в разностном уравнении (6.129) получим следующую стохастическую модель состояния

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t) - x(t) &= f(x, t)\Delta t + \\ &+ \sigma(x, t)[w(x, t + \Delta t) - w(t)] + 0(\Delta t). \end{aligned} \quad (6.131)$$

Математическое ожидание и дисперсия процесса

$x(t + \Delta t) - x(t)$ будут:

$$M[x(t + \Delta t) - x(t)] = f(x, t)\Delta t + 0(\Delta t), \quad (6.132)$$

$$\begin{aligned} D[x(t + \Delta t) - x(t)] &\equiv \sigma^2(x, t)M[w(t + \Delta t) - w(t)]^2 + \\ &+ 0(\Delta t) = \sigma^2(x, t)\Delta t + 0(\Delta t). \end{aligned} \quad (6.133)$$

Поскольку дисперсия приращения пропорциональна Δt , а не $(\Delta t)^2$, то мы не можем разделить уравнение (6.131) на Δt ,

допустив $\Delta t \rightarrow 0$, так как производная от винеровского процесса не существует. Однако формально в уравнении (6.131) можно допустить, что $\Delta t \rightarrow 0$ и тогда получим следующее выражение

$$dx = f(x, t)dt + \sigma(x, t)dw, \quad (6.134)$$

называемое *стохастическим дифференциальным уравнением*.

Следует отметить, что в уравнении (6.134) $M(dw)=dt$; это означает: dw имеет размерность \sqrt{dt} в среднеквадратической метрике. Исходя из этого, следует соблюдать осторожность при формальных преобразованиях уравнения (6.134), содержащего дифференциал от винеровского процесса.

Предположим, что при каждом t случайный процесс $\{x, t\}$ имеет плотность вероятности $p(x, t)$, причем производные $\frac{\partial}{\partial t} p(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t)p(x, t)]$, и $\frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)p(x, t)]$ существуют и непрерывны (первая – по x и t , остальные – по x). Тогда функция $p(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x, t)p(x, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)p(x, t)] \quad (6.135)$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow s} p(x, t) = p(x).$$

Если существует переходная плотность $P(x, t, y, s)$, имеющая непрерывные по t и y производные $\frac{\partial}{\partial t} P(x, t, y, s)$, и $\frac{\partial}{\partial y} [f(y, t)P(x, t, y, s)]$, и $\frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(y, t)P(x, t, ys)]$ такие, что эти функции являются непрерывными по y , то $P(x, t, y, s)$ будет фундаментальным решением для переходной плотности уравнения ФПК

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, t, y, s) &= -\frac{\partial}{\partial y} [f(y, t)P(x, t, y, s)] + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sigma^2(y, t)P(x, t, y, s)]. \end{aligned} \quad (6.136)$$

Уравнениям (6.135) и (6.136) соответствуют сопряженные уравнения, записанные для конечного момента времени s :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p(x, s)}{\partial s} &= f(x, t) \frac{\partial p(x, s)}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 p(x, s)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (6.137)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P(x, t, y, s)}{\partial s} &= f(y, t) \frac{\partial P(x, t, y, s)}{\partial y} + \\ &+ \frac{1}{2} \sigma^2(y, t) \frac{\partial^2 P(x, t, y, s)}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (6.138)$$

уравнения (6.137) и (6.138) называются обратными уравнениями Колмогорова.

При δ -образном начальном распределении плотность вероятности $p(x, t)$ совпадает с плотностью вероятности перехода $P(x, t, y, s)$ и уравнения (6.135) и (6.136), а также (6.137) и (6.138) становятся идентичными.

Если значение марковского процесса $x(t)$ в начальный момент времени t_0 не фиксировано, а является случайным и имеет плотность вероятности $p_0(x)$, то в качестве начального условия указывается эта плотность

$$p(x, t_0) = p_0(x).$$

При этом одномерную плотность вероятности $p(x, t)$ в произвольный момент времени $t > t_0$ можно вычислить двумя способами.

1. С помощью интегрального соотношения

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_0, t_0) P(x, t, x_0, t_0) dx_0. \quad (6.139)$$

Из выражения (6.139) видно, что при заданном начальном распределении $p_0(x)$ для определения $p(x, t)$ нужно найти фундаментальное решение уравнения (6.136), определяющее плотность вероятности перехода $P(x, t, x_0, t_0)$.

2. Можно сразу искать решение уравнения ФПК для плотности вероятности $p(x, t)$ с заданным начальным условием.

Действительно, умножив (6.136) на $p(x_0, t_0)$ и проинтегрировав по t_0 с учетом (6.139) получим уравнение (6.135).

При решении научно-прикладных задач, в зависимости от конкретной формулировки задачи, применяют либо уравнение ФПК, либо обратное уравнение Колмогорова. Если нас интересует плотность вероятности непрерывного марковского процесса $x(t)$ при заданной плотности вероятности начального состояния $x(t_0)=x_0$, то естественно использовать уравнение ФПК. Если же нужно вычислить распределение первого времени достижения фиксированного уровня c как функцию начального состояния x_0 , то целесообразно использовать обратное уравнение Колмогорова (6.137).

Феллер дал классификацию границ для однородного диффузионного (марковского) процесса. Процесс $x(t)$ называется регулярным, если с положительной вероятностью его траектория покидает любое множество вида $(c, a]$ или $[\beta, d)$, выходя через внутренние точки a или β интервала (c, d) . Если это происходит с вероятностью единица, процесс $x(t)$ называется возвратным. Диффузионный процесс будет регулярным, если коэффициент диффузии $\sigma^2(x)$ не обращается на интервале (c, d) в нуль. После филлеровской классификации границ марковского процесса появились работы, в которых даны новые типы гра-

ниц: периодические и стохастические границы.

Марковские процессы обладают одним неординарным свойством: если переход от стохастического дифференциального уравнения (6.134) к соответствующему уравнению ФПК или обратному уравнению Колмогорова однозначен, то обратный переход не является однозначным.

Пример 6.3. Пусть марковский процесс x удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \sqrt{2 \ln|xt|} \xi(t),$$

где $\xi(t) = \dot{w}(t)$ – процесс типа белого шума.

Плотность вероятности этого процесса удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 p) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln|xt| p).$$

Однако этому уравнению также удовлетворяет плотность вероятности для процессов, заданного уравнением

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \sqrt{2 \ln|xt| - c^2} \xi_1(t) + c \xi_2(t),$$

где c – произвольная постоянная, а ξ_1 и ξ_2 – некоррелированные между собой случайные процессы типа белого шума.

Линейное уравнение ФПК относится к параболическому классу и для отыскания его решения можно применять обычные методы решения уравнений этого типа. Решение должно удовлетворять условиям, полагаемым на функцию плотности, т.е. оно должно быть неотрицательным, нормированным к единице и должно удовлетворять начальным условиям.

При использовании феллеровской классификации границ граничные условия нужно ставить лишь на отталкивающей и регулярной границах, а естественные и притягивающие границы являются недостижимыми.

При правильно сформулированной задаче начальные и граничные условия однозначно определяют плотность вероятности $p(x,t)$ как решение уравнения ФПК.

До настоящего времени существовало шесть общих методов решения уравнения ФПК: 1) метод разделения переменных, 2) метод преобразования Лапласа. 3) метод характеристической функции. 4) метод замены независимых переменных, 5) метод гауссова приближения и 6) численные методы. К этим методам следует добавить метод, предложенный автором и изложенный в третьей главе настоящей книги.

Кроме перечисленных общих методов решения уравнения ФПК существуют специальные методы решения этого уравнения, предназначенные для отыскания решения конкретного вида этого уравнения.

Из перечисленных шести методов решения уравнения ФПК рассмотрим метод замены независимых переменных, точнее метод преобразования фазового пространства марковского процесса.

Взаимнооднозначным преобразованием

$$u = \psi(x) \tag{6.140}$$

фазового пространства марковский процесс $x(t)$ с плотностью вероятности $p(x,t)$ может быть преобразован в случайный процесс $u(t)$, который также будет марковским процессом.

В однородном случае, т. е. когда $f(x,t) = f(x)$ и $\sigma^2(x,t) = \sigma^2(x)$, при помощи такого преобразования можно перейти от марковского процесса $x(t)$ с произвольными коэффициентами $f(x)$ и $\sigma^2(x)$ к марковскому процессу $u(t)$ с коэффициентами сноса $\tilde{f}(u)$ и диффузии $\tilde{\sigma}^2(u)$.

В результате замены (6.140) получим новые коэффициенты сноса и диффузии

$$\tilde{f}(x) = f(x)\psi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\psi''(x), \quad (6.141)$$

$$\tilde{\sigma}^2(x) = \sigma^2(x)[\psi'(x)]^2. \quad (6.142)$$

Из соотношения (6.141) следует, что если мы хотим получить процесс с нулевым коэффициентом сноса $\tilde{f}(x) = 0$, то преобразование (6.140) должно быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$\psi'(x) = \psi'_2(x) = \exp\left\{-2 \int_{x_0}^x \frac{f(x^*)}{\sigma^2(x^*)} dx^*\right\}. \quad (6.143)$$

Выбирая также коэффициент диффузии (6.142) из условия

$$\psi'(x) = \psi'_2(x) = [\sigma^2(x)]^{-1/2} \quad (6.144)$$

получим процесс $u(t)$ с единичным коэффициентом диффузии $\sigma^2(x) = 1$.

В результате преобразования (6.140) вместо уравнения ФПК (6.135) получим уравнение для процесса $u(t)$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 p^*}{\partial u^2}. \quad (6.145)$$

В случае, если $\sigma^2 \neq 1$, т.е. имеем $\sigma^2 = \Xi$, то уравнение диффузии примет вид

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \Xi \frac{\partial^2 p^*}{\partial u^2}. \quad (6.145a)$$

Поскольку обратное уравнение Колмогорова является сопряженным к уравнению ФПК, то и преобразованные уравнения также будут сопряженными: переходная плотность

$$p(x, t, y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-(y-x)^2/2(t-s)}$$

удовлетворяет уравнению ФПК

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \text{при } t > s, \quad (6.146)$$

и обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \text{ при } s > t. \quad (6.147)$$

Уравнение ФПК представляет собой обобщение уравнения Лиувилля на стохастические системы. Это означает, что происходит обобщение уравнения, описывающего консервативные системы на уравнение, описывающее в вероятностном смысле поведение диссипативных систем. Поэтому не вызывает удивления тот факт, что один из основоположников теории самоорганизации И. Пригожин, использовал уравнение типа (6.147) для исследования диссипативных систем.

6.9.1. Организующийся объект (каучук), находящийся под действием теплового поля

В теории теплопроводности решение уравнения диффузии (6.145а) определяет тепловое поле. Нами будет рассмотрен процесс действия этого поля на полимерную цепь каучука. Важнейшим специфическим свойством полимерной цепи является ее конформационная лабильность, т.е. способность цепи фигурировать во множестве различных конформаций. Это свойство находит свое отражение в особенностях макроскопического поведения каучука.

Упругая сила g , при воздействии на каучук теплового поля T , определяется его энтропией

$$g = -T \left(\frac{\partial H}{\partial L} \right)_T, \quad (6.148)$$

где L – длина растянутого каучука,
 H – энтропия каучука.

Каучук состоит из большого числа независимо перемещающихся элементов и растяжение каучука означает переход от

более вероятного их расположения к менее вероятному, т.е. происходит уменьшение его энтропии.

Предположим, что макромолекулярная цепь каучука свободно сочленена, т.е. в ней нет фиксированных валентных углов и повороты происходят свободно. Поэтому набор конформаций, возникающих при повороте вокруг данного атома цепи, непрерывен в интервале углов от 0 до 4π и энергия при поворотах не меняется. Цепь можно охарактеризовать вектором \mathbf{h} , проведенным от первого атома к последнему [19] (Рис. 6.20). Очевидно, что среднее по всем конформациям значение вектора \mathbf{h} равно нулю, поскольку при тепловом движении его (вектора) направления равновероятны. Как при этом распределены вероятности осуществления тех или иных значений $h = |\mathbf{h}|$? Эти значения могут меняться от нуля до максимальной длины цепи, равной Zb (Z – число звеньев, b – длина звена)

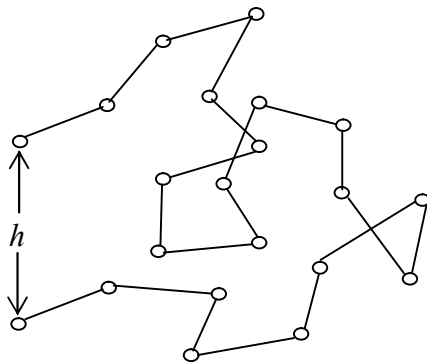


Рис. 6.20

Решение этой задачи аналогично решению задач теории диффузии, т.е. нахождению вероятности перемещения броуновской частицы на путь h в результате Z шагов, каждый из которых (шаг) имеет длину b . Распределение является гаус-

совым, т.е. плотность вероятности того, что расстояние между концами цепи лежит в интервале от h до $h + dh$ определяется выражением

$$p(h)dh = \left(\frac{3}{2\pi Z^2}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi b^2 \exp\left(-\frac{3h^2}{2Zb^2}\right) dh. \quad (6.149)$$

Исходя из гауссовой природы распределения плотности имеет

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \int_0^{\infty} p(h)h dh = 0, \\ \overline{h^2} &= \int_0^{\infty} p(h)h^2 dh = Zb^2. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Выражения (6.149) и (6.150) справедливы при $Z \gg 1$.

Следовательно, тепловое поле T свертывает макромолекулу в клубок. Это состояние наиболее вероятно либо полностью вытянутая конформация цепи может осуществиться одним способом, а свернутая – множеством способов.

В нерастянутом состоянии макромолекулярные цепи свернуты в статистические клубки; этому состоянию соответствует максимальная энтропия. При растяжении клубка энтропия уменьшается. Энтропия цепи определяется выражением

$$H = k \ln p(h) = C - 3kh^2/2Zb^2, \quad (6.151)$$

где C – постоянная величина не зависящая от h . Используя выражение (6.148) определим упругую силу, действующую на каучук

$$g = -T \left(\frac{\partial H}{\partial h}\right)_T = \frac{3kT}{Zb^2} h. \quad (6.152)$$

Из формулы (6.152) видно, что упругая сила пропорциональна тепловому полю T , действующему на каучук.

Тепловое поле T удовлетворяет уравнению (диффузии) теплопроводности (6.145a)

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \Xi \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (6.153)$$

т.е. уравнению ФПК.

Будем искать решение уравнения (6.153) удовлетворяющее начальному условию

$$T(x, 0) = \delta(x)$$

(δ – функция Дирака)

и граничным условиям

$$T(\infty, t) = T(-\infty, t) = 0.$$

Это решение имеет вид

$$T(x, t) = \frac{1}{\Xi(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Xi t}\right). \quad (6.154)$$

Подставляя значение теплового поля $T(x, t)$, (определенного) согласно выражению (6.154), в формулу (6.152), найдем упругую силу, действующую на каучук, вызванную действием теплового поля $T(x, t)$:

$$g = \frac{3kh}{Zb^2\Xi(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\Xi t}\right).$$

Поскольку система тепловое поле $T(x, t)$ – упругая сила g разомкнута, то имеем организующуюся систему. Налицо система, в которой на вещество (каучук) действует (температурное) поле, т.е. имеем систему взаимодействия вещества и поля.

6.9.2. Организующаяся система упорядочения атомов бинарного сплава, находящегося под действием теплового поля

Рассмотрим бифуркацию (фазовые переходы) типа упорядочения, когда бифуркация представляет собой переход «порядок – беспорядок». При этом рост энтропии кристалла обуслов-

лен главным образом конфигурационной энергией, непосредственно связанной с механизмом упорядочения. При этом будем считать, что вкладом энергии колебаний атомов можно пренебречь. Для конкретности рассмотрим механизм упорядочения в бинарном сплаве, хотя приведенный материал может быть обобщен на другие случаи бифуркации типа «порядок – беспорядок».

Пусть бинарный сплав состоит из двух сортов атомов – А и В, расположенных упорядоченно с определенной степенью вероятности в узлах a и b ; количество узлов решетки a и b одинаково и равно N . Введем параметр упорядочения

$$\eta = p_a(A) - p_a(B), \quad (6.155)$$

где $p_a(A)$ означает вероятность того, что атом А займет в решетке свой узел, а $p_a(B)$ означает вероятность того, что этот узел займет атом В. Тогда, например, для такого бинарного сплава как латунь $CuZn$ (β – латунь) вводится параметр упорядочения η , определенный согласно выражению (6.155). Поскольку $p_a(A)$ и $p_a(B)$ вероятности, то имеем $p_a(A) + p_a(B) = 1$. С учетом этого выражения в формуле (6.155), получим

$$\eta = 2p_a(A) - 1 = 2p - 1, \quad (6.156)$$

где имеем обозначение $p = P_a(A)$.

Определим энтропию упорядоченной фазы как конфигурационную энергию, связанную со смещением атомов А и В. Примем во внимание, что N_p атомов типа А могут быть распределены среди N узлов типа a следующим числом независимых способов

$$m = \frac{N!}{(N - N_p)! N_p!}.$$

Легко заметить, что оставшиеся $(N - N_p)$ атомов типа А могут быть распределены среди N узлов типа b (среди «чужих» узлов) таким же числом независимых способов m . Поэтому

полное число независимых способов распределения атома А равно m^2 ; в таком случае энтропия упорядоченного состояния (фазы) равна [81]:

$$H = C - 3Nk \left[(1-p) \ln(1-p) + p \ln p - \frac{1}{2} \ln 2 \right], \quad (6.157)$$

где постоянная C не зависит от p . Энергия неупорядоченного состояния (фазы) по отношению к упорядоченному состоянию равна

$$E = UN(1-p), \quad (6.158)$$

где $N(1-p)$ – число атомов перешедших из своих узлов в «чужие» узлы, а через U обозначена энергия, связанная с переходом атома А в узел b или атома В в узел a .

Используем выражения (6.157) и (6.158) для определения свободной энергии F :

$$F = E - TH.$$

Из условия минимума свободной энергии $\partial F/\partial p = 0$ найдем уравнение связывающее U , p и T [19,81]:

$$p = th(U/kT). \quad (6.159)$$

В уравнении (6.159), согласно выражению (6.156), параметр p должен быть заменен на параметр упорядочения η . В теории неупорядоченных размещений атомов полагают зависимость между U и η линейной, т.е. $U = U_0\eta$. С учетом этих соображений, уравнение (6.159) примет вид

$$\eta = th(U_0/kT). \quad (6.160)$$

Из уравнения (6.160) следует, что для температурного поля T при котором происходит бифуркация (фазовый переход), параметр η меняется непрерывно и, следовательно, решение уравнения (6.160) описывает бифуркацию (фазовый переход) второго рода.

Взяв производную от обеих частей уравнения (6.160) по η , получим

$$U_0/kT \operatorname{sech}^2(U_0\eta/kT) = 1.$$

Из последнего выражения находим параметр упорядочения

$$\eta = \alpha T \operatorname{Arsech}\{\pm[(\alpha T)^{1/2}]\}, \quad (6.161)$$

где $\alpha = k/U_0 = \text{const}$.

Формула (6.161) показывает, что с увеличением теплового поля $T(x,t)$, под которым находится бинарный сплав, параметр упорядоченности η возрастает, т.е. возрастает упорядоченность атомов сплава. Значение теплового поля $T(x,t)$ в формуле (6.161), определено согласно выражению (6.154).

Система бинарный сплав – тепловое поле является разомкнутой. Это означает, что, хотя под действием теплового поля упорядоченность атомов возрастает, т.е. энтропия уменьшается, величина теплового поля $T(x,t)$ независит от упорядоченности η атомов сплава. Поэтому данная система является организующейся, а не самоорганизующейся.

* * *

В разделе 1.3.2. (ГЛАВА 1) сказано (жирный шрифт) «что оптимальным является управление $u^*(x,t)$, которое минимизирует критерий (1.10) т.е функционал $J(x,t,u(x,t))$, максимизирует плотность $p(u(x,t))$ и, следовательно, минимизирует энтропию $H(u)$ ». Как было отмечено в разделе 1.3.1 (ГЛАВА 1) организующиеся и самоорганизующиеся системы характеризуются тем свойством, что управление осуществляемое ими минимизирует энтропию этой системы $H(u)$. Это означает, что все марковские системы рассмотренные в шестой главе являются либо организующимися, либо самоорганизующимися. Хотя для систем приведенных в §6.6 видно, что эти системы обладают организу-

ющимся и самоорганизующимся свойством, согласно классификации данной в первой, второй и пятой главах.

Краткие комментарии к шестой главе

Для марковских цепей рассмотрено спортивно-состязательное поле бейсбольной национальной лиги (США). Отмечено, что с позиций болельщика турнирная таблица этой лиги дает возможность косвенного суждения о процессе самоорганизации в каждой отдельной команде.

Для марковских процессов непрерывных во времени, но дискретных по координатам, показано существование процесса самоорганизации (для производящей функции) в моделях рождения, рождения и смерти, а также в процессе Гальтона–Ватсона.

Для марковской последовательности показано, что в замкнутой самоорганизующейся рукотворной системе блок (идентификации) определения импульсной переходной функции объекта управления, является тем звеном, в котором имеет место марковская последовательность.

Наконец, для непрерывного во времени и по координатам марковского процесса, рассмотрены две организующиеся системы. Первая – растяжение каучука под действием теплового поля. Вторая – действие теплового поля на процесс упорядочения в бинарном сплаве. Процесс растяжения каучука представляет собой взаимодействие вещества (каучука) с тепловым полем. Процесс упорядочения атомов в бинарном сплаве также представляет собой взаимодействие вещества(сплава) с тепловым полем. В обоих случаях имеем разомкнутые, т.е. организующиеся системы.

ГЛАВА 7

Самоорганизующаяся рукотворная система, синтезированная на основе вариационных методов

Согласно одному из определений [11], рукотворная самоорганизующаяся система это такая система, которая изменяет свою структуру таким образом, чтобы удовлетворить критерию качества функционирования, поставленного перед этой системой. В настоящей главе приводится самоорганизующаяся рукотворная система, интегральный критерий качества функционирования которой, минимизируется путем использования методов вариационного исчисления [82]. При помощи этого критерия находятся уравнения, необходимые для синтеза управляющего устройства системы.

Лагранжу принадлежит идея ввести для вариации специальный символ δ , чтобы подчеркнуть ее виртуальный характер. Сходство с обозначением дифференциала d напоминает, что оба символа означают *бесконечно малое изменение*. Однако d относится к действительным, а δ – к виртуальным изменениям. В литературе по вариационному исчислению используется символ δ , однако мы будем пользоваться символом d , подчеркивая тем самым действительность тех изменений, с которыми мы оперируем.

Существенной особенностью, описанного в данной главе алгоритма синтеза самоорганизующейся рукотворной системы является то, что для определения динамических характеристик объекта не используется специальный пробный сигнал; в этой системе в качестве пробного сигнала используется само управляющее воздействие. Объектом управления является скоростной самолет (Рис. 7.1).

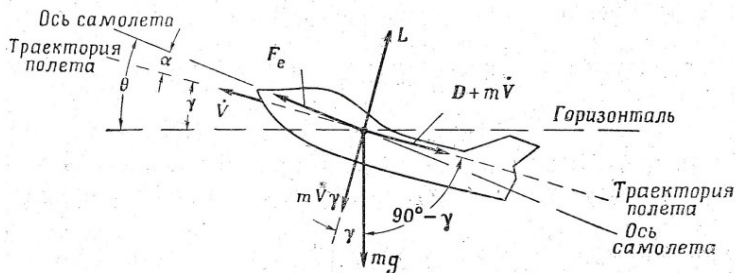


Рис. 7.1

Движение в вертикальной плоскости описывают следующие уравнения [83]:

уравнение проекций сил на касательную к траектории полета

$$F_e \cos \alpha - D - m\dot{V} - mg \sin \gamma = 0; \quad (7.1)$$

уравнение проекций сил на нормаль к траектории полета

$$F_e \sin \alpha + L - m\dot{V}\gamma - mg \cos \gamma = 0; \quad (7.2)$$

уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр массы самолета имеет вид

$$M_s + M_D + M_c - \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = 0, \quad (7.3)$$

где V – скорость полета, направленная по касательной к траектории; в уравнениях (7.1) – (7.3) имеем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_e - \text{эффективная сила тяги двигателя;} \\ D = qS(C_{De} + KC_L^2) - \text{лобовое сопротивление;} \\ L = qS L - \text{подъемная сила;} \\ M_s = qScaC_{m\alpha} - \text{статический момент устойчивости;} \\ M_D = qSc(\dot{\alpha}C_{m\dot{\alpha}} + \dot{\theta}C_{m\dot{\theta}}) - \text{демпфирующий момент;} \\ M_c = qSc(\delta C_{m\delta} + \dot{\delta}C_{m\dot{\delta}}) - \text{управляющий момент;} \\ J - \text{полярный момент инерции в вертикальной плоскости;} \end{array} \right. \quad (7.4)$$

параметры δ и α именуются так:

δ – отклонение горизонтальных рулей;

α – угол атаки.

Кроме коэффициентов (7.4) имеем следующие обозначения:

S – площадь крыла;

q – скоростной напор;

c – среднее значение аэродинамической хорды;

K – коэффициент лобового сопротивления.

Коэффициенты $C_L, C_{De}, C_{m\alpha}, C_{m\dot{\alpha}}, C_{m\dot{\theta}}, C_{m\delta}, C_{m\dot{\delta}}$ зависят от скорости, угла атаки, высоты и т.п.

С учетом уравнения (7.3), а также выражений для коэффициентов (7.4), можно получить следующее уравнение:

$$\ddot{\theta} = \frac{qSc}{J} \left[\alpha C_{m\alpha} + \alpha \dot{C}_{m\alpha} + \theta \left(C_{m\dot{\theta}} - \frac{J}{qSc} \right) + \delta C_{m\delta} + \dot{\delta} C_{m\dot{\delta}} \right]. \quad (7.5)$$

Поскольку из формул (7.1) и (7.2) следует, что эти уравнения явно не выражают зависимость между θ и δ или $\dot{\theta}$ и δ , то будем иметь

$$\frac{\partial \theta}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta} = 0. \quad (7.6)$$

С учетом выражений (7.6) из уравнения (7.5) может быть записано соотношение

$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \delta} = \frac{qSc}{J} C_{m\delta} \equiv \beta. \quad (7.7)$$

Для удобства в дальнейшем полагается, что отклонение горизонтальных релей $\delta = u$; мы будем искать функцию $y(t)$, для которой определенный интегральный критерий будет иметь минимальное значение.

Пусть выходной величиной системы будет скорость самолета $\dot{\theta}$ в вертикальной плоскости, а выходную величину модели обозначим $\dot{\theta}_m$. Тогда ошибка системы будет

$$e = \dot{\theta}_m - \dot{\theta}. \quad (7.8)$$

Суть вариационной задачи состоит в том, чтобы определить функцию $y(t)$ для которой интеграл

$$I = \int_0^t f dt \quad (7.9)$$

имел бы минимальное значение при условии, что другой интеграл

$$H = \int_0^t g dt \quad (7.10)$$

был равен некоторой заданной постоянной величине c ; функция f должна удовлетворять уравнению Эйлера–Лагранжа, а функция g является подынтегральной функцией критерия качества управления.

Предположим, что функция f в выражении (7.9) выбрана так, что является функцией ошибки e . Из выражений (7.6) и (7.8) будем иметь

$$\frac{\partial e}{\partial y} = \frac{-\partial \dot{\Theta}}{\partial y} = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что при изменении y требуется некоторое время, чтобы изменить e , т.е. изменение y не может вызвать мгновенного изменения $\dot{\Theta}$. Однако, поскольку $d\dot{e}/dy = -d\ddot{\Theta}/dy = -\beta$, то y может заставить $\ddot{\Theta}$ изменяться по заданному закону. Эти соображения приводят к тому, что функция f , удовлетворяющая уравнению Эйлера–Лагранжа, должна иметь вид

$$f = \frac{1}{(\partial \dot{\Theta} / \partial y) \Delta y} = \frac{1}{\beta \Delta t} = \frac{1}{\mu z},$$

а подынтегральная функция критерия качества должна быть функцией от ошибки e и ее производной \dot{e} , т.е.

$$g = g(e, \dot{e}),$$

где $\Delta y = \Delta \delta = z$ – желаемое скачкообразное отклонение горизонтальных рулей в момент времени t .

Поскольку функция g выбрана равной $g(e, \dot{e})$, то условием

$$\int_0^t g(e, \dot{e}) dt = c = const$$

накладывается ограничение на ошибку системы.

Согласно выражению (3.56), уравнение Эйлера–Лагранжа при этих обозначениях имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.56a)$$

и

$$\int_0^t g(e, \dot{e}) dt = c = const,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \left(\frac{1}{\beta z} \right) = 0, \quad (7.11)$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{\beta z^2}, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial g}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial g}{\partial \dot{e}} \frac{\partial \dot{e}}{\partial \dot{z}} = -\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \dot{z}} \frac{\partial g}{\partial e} - \frac{\partial \ddot{\Theta}}{\partial \dot{z}} \frac{\partial g}{\partial \dot{e}}. \quad (7.13)$$

Из уравнения (7.5) следует, что при малом $C_{m\delta}$ имеем соотношения

$$\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \dot{z}} = -\frac{C_{m\delta}}{C_{m\Theta}} \approx 0, \quad (7.14)$$

и

$$\frac{\partial \ddot{\Theta}}{\partial \dot{z}} = C_{m\delta} \approx 0. \quad (7.15)$$

Поэтому можно записать

$$\frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \approx 0. \quad (7.16)$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial e} - \frac{\partial \ddot{\Theta}}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial \dot{e}} = -\beta \frac{\partial g}{\partial \dot{e}}. \quad (7.17)$$

Подставляя уравнения (7.11) – (7.17) в уравнение Эйлера–Лагранжа (3.56a) окончательно получим

$$\frac{1}{\beta z^2} + \lambda \beta \frac{\partial g}{\partial \dot{e}} = 0. \quad (7.18)$$

Уравнение (7.18) должно быть решено относительно функции $z(t)$, поскольку g задано. Это решение имеет вид

$$z(t) = \frac{\pm 1}{\beta \sqrt{-\lambda \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{e}} \right)}} = \Delta y = \Delta \delta, \quad (7.19)$$

где

$\beta = qScC_{m\delta}/J$ – «эффективность управления», которая может меняться во времени. Чтобы исключить необходимость измерения β в полете примем во внимание соотношение $\beta \Delta \delta = \Delta \ddot{\Theta}$, тогда получим

$$\Delta \ddot{\Theta} = \pm \frac{1}{\sqrt{-\lambda \left(\frac{\partial g}{\partial \dot{e}} \right)}}, \quad (7.20)$$

где λ определяется из совместного решения уравнений (7.10) и (3.56a) по известным значениям g и c . Величина $\Delta \ddot{\Theta}$ добавляется к реальному текущему угловому ускорению $\ddot{\Theta}_r$, т.е.

$$\ddot{\Theta}_d = \ddot{\Theta}_r + \Delta \ddot{\Theta}, \quad (7.21)$$

где $\ddot{\Theta}_d$ – требуемое (желаемое) угловое ускорение, получаемое от вычислительного управляющего устройства. Знак $\Delta \ddot{\Theta}$ в выражении (7.20) выбирается из условия уменьшения ошибки e . Следовательно, если $e = \Theta_m - \Theta > 0$ то приложенная к системе положительная величина $\Delta \ddot{\Theta}$ стремится увеличить $\dot{\Theta}$ и уменьшить e . Если необходимо учесть скорость изменения e , то в формулу (7.20) с целью определения знака $\Delta \ddot{\Theta}$ вводится произ-

водная от ошибки со знаком, определенным из выражения $sign(\Delta\ddot{\Theta}) = sign(e + k\dot{e})$.

Для конкретности примем, что подынтегральная функция равна

$$g = \frac{1}{e/(\dot{e})^2 + K_1\dot{e}/e^2 + A_1e + A_2\dot{e}}. \quad (7.22)$$

Член $e/(\dot{e})^2$ ограничивает статическую ошибку, если установившаяся величина \dot{e} мала, то $e/(\dot{e})^2$ велико и действие управляющего устройства (УУ) для сохранения заданных условий направлено к уменьшению e . Член $K_1\dot{e}/e^2$ ограничивает перерегулирование; третий и четвертый члены знаменателя непосредственно ограничивают ошибку и ее производную. Взяв частную производную от (7.22) по \dot{e} и подставив найденное значение $\partial g/\partial \dot{e}$ в уравнение (7.20), получим

$$\Delta\ddot{\Theta} = \frac{\pm[e/(\dot{e})^2 + K_1(\dot{e}/e^2) + A_1e + A_2\dot{e}]}{\sqrt{\lambda[A_2 + K_1/e^2 - 2e/(\dot{e})^2]}} \quad (7.23)$$

Числитель выражения (7.23) представляет величину обратную подынтегральной функции $[1/g(\dot{e}/e^2)]$. Если знаменатель обозначить через $1/\sigma$, то выражение (7.23) можно записать в следующем виде

$$\Delta\ddot{\Theta} = \frac{\sigma}{g(e, \dot{e})},$$

где σ играет роль переменного коэффициента усиления, величина которого зависит от e и \dot{e} . Соотношение (7.23) определяет оптимальное изменение управляющей величины $\Delta\ddot{\Theta}$ в каждый момент времени, необходимое (изменение) для того, чтобы критерий ошибки (т.е. интеграл (7.10) при g , определяемом соотношением (7.22)), оставался в заданных пределах. УУ построено на дискретном принципе, так как коэффициент усиления σ необходимо менять быстро и в широких пределах.

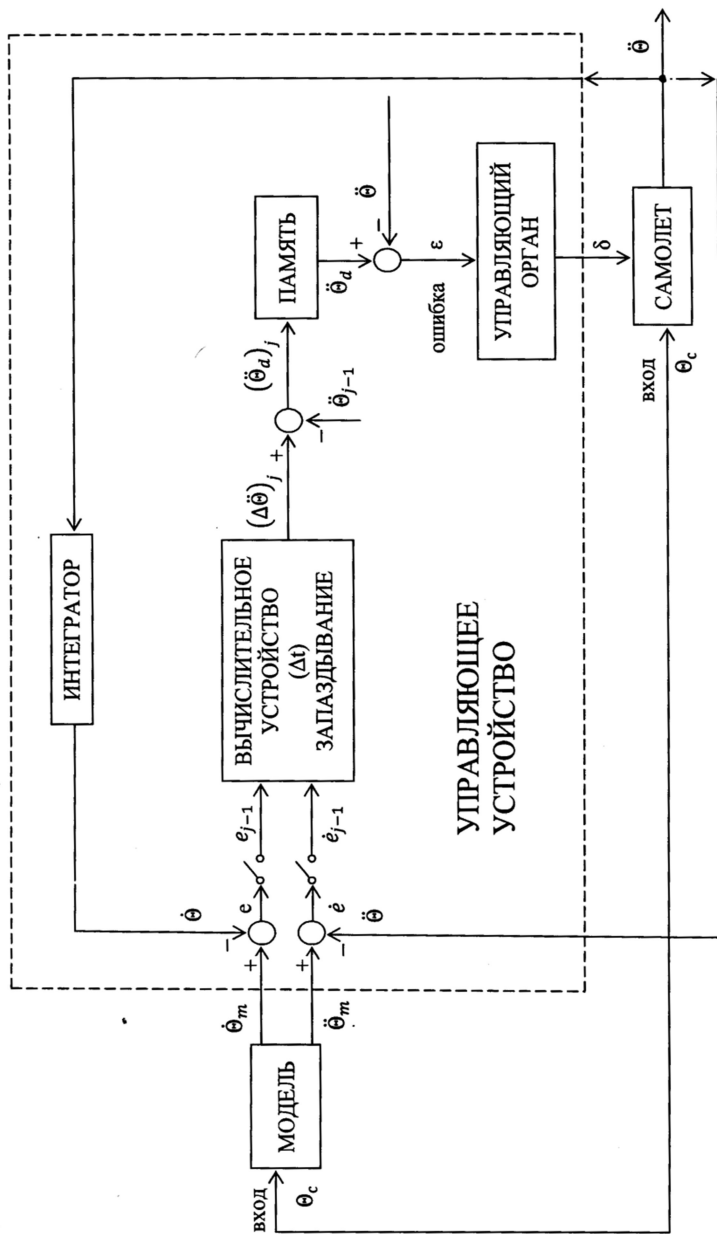


Рис. 7.2.

Пусть $(\Delta\ddot{\theta})_j$ – управляющий сигнал, воспроизводимый вычислительным устройством в момент времени j на основе дискретных значений e и \dot{e} в предыдущий $(j-1)$ -ый дискретный момент времени. Тогда имеем: $(\ddot{\theta}_d)_j = \ddot{\theta}_{j-1} + (\Delta\ddot{\theta})_j$

Эта требуемая (желаемая) величина $\ddot{\theta}_d$ с помощью устройства памяти поддерживается постоянной в интервале j и $j-1$; разность между величиной $\ddot{\theta}_d$ и действительной выходной величиной $\ddot{\theta}$, равной $e = \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta}$, используется в качестве управляющего сигнала.

Блок-схема самоорганизующейся рукотворной системы, синтезированной на основе вариационного метода Эйлера–Лагранжа, показана на Рис. 7.2.

Таким образом, структура этой самоорганизующейся системы изменяется благодаря осуществлению переключений в соответствии с законом

$$\text{sign}(\Delta\ddot{\theta}) = \frac{\Delta\ddot{\theta}}{|\Delta\ddot{\theta}|} = \begin{cases} 1 & \text{если } \Delta\ddot{\theta} > 0, \\ -1 & \text{если } \Delta\ddot{\theta} < 0. \end{cases}$$

Из результатов настоящей главы следует, что использование прямых вариационных методов (уравнения Эйлера–Лагранжа) при оптимизации рукотворного объекта (самолета) приводят к синтезу самоорганизующейся системы, основанной на применении управляющего устройства, имеющего **переменную структуру**.

Краткий комментарий к седьмой главе

Для подтверждения возможности существования самоорганизации в рукотворных системах, приводится синтезированная на основе вариационных методов самоорганизующаяся система управлением скоростным самолетом.

ГЛАВА 8

Самоорганизующиеся и организующиеся модели на мегаскопическом уровне

Количество самоорганизующихся и организующихся мегаскопических объектов неограниченно. Для земель наиболее близким организующимся мегаскопическим объектом является гидроцикл планеты Земля. В данном случае вещество представляет собой воду на которое действует тепловое поле Солнца. В результате этого взаимодействия образуется организующийся гидроцикл планеты Земля.

В данной главе рассмотрены две самоорганизующиеся модели: модель самоорганизации процесса научного поиска и модель самоорганизации населения Земли с целью предотвращения влияния солнечной активности (в период пятнообразования) на здоровье организма. Показано также, что при отсутствии мер населения, направленных на предотвращение влияния солнечной активности на здоровье организма, самоорганизующаяся система превращается в организующуюся систему.

§8.1. Самоорганизующаяся модель научного поиска

Подавляющее число ученых не только обладает *системным мышлением*, но и использует его для решения научных проблем, опираясь при этом на существующие теоретические модели и *целостное интуитивное видение исследуемого объекта*. В том случае, когда для новых объектов и имеющихся моделей не хватает теоретического обоснования, тогда системное мышление способствует разработке новых или усовершенствованию существующих теорий. Существенное место в системном мышлении занимает интуиция. В настоящее время системный

подход и системное мышление достигли такого уровня развития, что способны справиться с анализом сложных производственных, экономических, экологических, технических, социальных, и т.д. проблем.

Природа научного поиска является циклическим процессом (см. Рис. 8.1), посредством которого, полученные человечеством знания сопоставляются с опытом. Цикличность процесса (см. вторую главу) всегда связана с процессом самоорганизации. По мере накопления фактов формируются теории, постепенно приближающие знания к действительному функционированию природы.

Самоорганизующийся цикл научного поиска можно представить в виде трех составных частей (см. Рис. 8.1): индукция¹, дедукция, проверка (т.е. сопоставление теории с практикой).

Индукция – часть цикла, которая приводит ученого или коллектив ученых от наблюдений к образованию теории. Индукция всегда является творчеством, хотя и не всегда приводит к успеху.

После точной формулировки теории, становится необходимым использование аппарата логики с целью получения следствий, вытекающих из теории. Формирование стройной теории является важной частью цикла научного поиска, ввиду перехода к дедуктивной части этого цикла.

В процессе дедукции ученый (или коллектив ученых) открывает следствия теории до сих пор неизвестные. Может оказаться, что в процессе дедукции исследователю понадобится

¹ Индуктивное мышление – это обобщение от частного к общему; дедуктивное мышление – это получение выводов т.е. переход от общего к частному. Индукция – это нахождение закономерностей, а дедукция – ее применение к частному случаю.

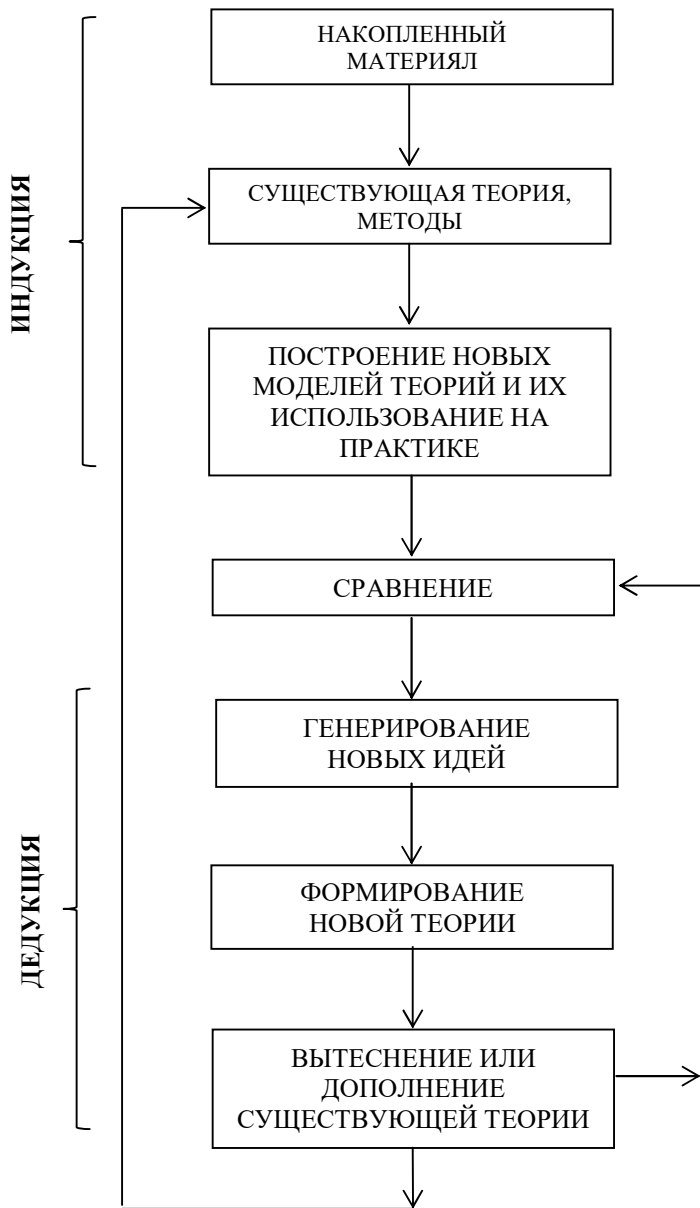


Рис. 8.1

многолетний труд, в следствии которого могут быть получены неожиданные результаты.

После того, как в теории будет выведен ряд значимых следствий их следует проверить путем сопоставления с экспериментом, т.е. с практикой. В некоторых исследованиях установленные факты могут соответствовать уже известным результатам. В этом случае говорят о теории, служащей для объяснения известных фактов. В других случаях для удостоверения в проверке предсказаний могут потребоваться новые наблюдения и эксперименты. В этих случаях говорят о теории предсказывающей новые явления.

Часто отказ от одной теории стимулирует образование другой, усовершенствованной теории, объясняющей как старые факты (на которых основывалась отвергнутая теория), так и те новые, которые привели к ее опровержению.

8.1.1. Описание объекта для которого поиск алгоритма оценки состояния эквивалентен процессу самоорганизации

Назначением любого устройства оценки является получение данных о текущем состоянии системы на основании искаженных шумом измерений предшествующих состояний, информации о начальном состоянии системы, ее динамики и входных возмущениях. Наиболее полное статистическое описание системы дает условная плотность распределения вероятности состояния, обусловленная начальным состоянием, всеми предыдущими измерениями и знанием динамики объекта. Устройство оценки (фильтр), которое вырабатывает точное описание этой плотности вероятности, является оптимальным.

Для линейной системы с гауссовыми (нормальными) входами и линейным каналом измерений, на выходе будем иметь гауссову плотность вероятности состояния, обусловленную всей имеющейся информацией. Такая плотность точно описывается конечным набором параметров т.е. условным средним и условной ковариацией состояния. Для линейных систем фильтр Калмана [84], вычисляющий эти величины, является устройством оптимальной оценки.

Поскольку нелинейные системы измерения не сохраняют форму функции распределения, то условная плотность вероятности, содержащая всю имеющуюся информации о системе, уже не будет гауссовой даже при гауссовых входах. В общем случае эта плотность не может быть представлена конечным набором статистических параметров, т.е. достаточных статистик.

Часто для определения оценки состояния нелинейных систем применяют хорошо развитую теорию систем второго порядка (см. Приложение Д) [85], вычисляющую статистики только второго порядка. В таких устройствах производится аппроксимация произвольной функции распределения гауссовой функцией, математическое ожидание (т.е. условное среднее) которой и ковариация совпадают с соответствующими величинами аппроксимируемой функции.

При повышенных требованиях к точности фильтра возникает необходимость обеспечить более близкую подгонку аппроксимирующей функции к фактической функции распределения плотности [86].

Подобный подход к повышению требований к точности фильтра представляет собой ту часть научного поиска, которая называется индуктивным методом.

Объект (искусственный спутник Луны) и схема периодически проводимых измерений его места нахождения, дана на

рис. 8.2, где приняты следующие обозначения: 1 – Луна; 2 – лунная орбита с удалением от поверхности Луны на расстоянии 500 миль; 3 – ориентиры на поверхности Луны; 4 – точки измерения положения спутника, разнесенные на 120 градусов; 5 – начальная точка моделирования.

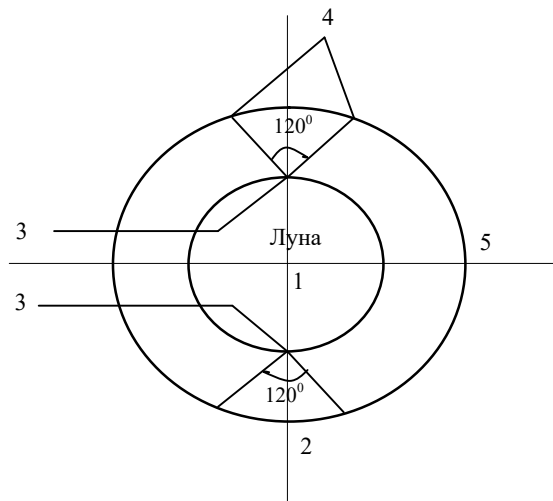


Рис. 8.2

8.1.2. Получение нелинейного фильтра

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, t) + G_{in}(t)v_n(t) \quad (8.1)$$

и уравнения непрерывных измерений

$$y_r = h_r(x, t) + R_{rs}(t)b_s(t), \quad (8.2)$$

где $v_s(t)$ и $b_s(t)$ есть векторы «белого» шума единичной интенсивности. На протяжении всего параграфа повторяющиеся индексы используются для обозначения суммирования:

$$R_{rs}(t)b_s(t) \equiv \sum_{s=1}^N R_{rs}(t)b_s(t).$$

Матрицы спектральной плотности шума, действующего на объект V_{ij} и на канал наблюдений Γ_{rs} определяются согласно формулам

$$\begin{aligned} V_{ij}(t) &= G_{in}(t)G_{jn}(t), \\ \Gamma_{rs}(t) &= R_{rp}(t)R_{sp}(t). \end{aligned}$$

Для системы измерений, заданной уравнениями (8.1) и (8.2) Р. Стратоновичем [87] и Г. Кушнером [88] было получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение во времени, условной плотности вероятности:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial(f_i p)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(V_{ij} p)}{\partial x_i \partial x_j} + p(h_r - \hat{h}_r)\Gamma_{rs}^{-1}(y_s - \hat{h}_s), \quad (8.3)$$

где $p = p(\mathbf{x}(t)/\mathbf{y}[0, t])$, $\hat{h} = E(h_r)$, а оператором E усреднение производится относительно условной плотности p .

Введем обозначения

$$\begin{aligned} m_i &= \hat{x}_i, \hat{f}_i = f_i(\mathbf{m}) \\ e_i &= x_i - m_i, \quad F_{ie} = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_e} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}}, \\ \mu_{ij}^2 &= \widehat{e_i e_j}, \quad A_{ief} = \left. \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_e \partial x_f} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}}, \\ \mu_{ijk}^3 &= \widehat{e_i e_j e_k}, \quad H_{rp} = \left. \frac{\partial h_r(\mathbf{x}, t)}{\partial x_r} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}}, \\ M_{rpq} &= \left. \frac{\partial^2 h_r(\mathbf{x}, t)}{\partial x_p \partial q} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{m}}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

С учетом обозначений (8.4) из уравнения апостериорной плотности (8.3) получим систему уравнений, составленную относительно центральных моментов

$$\begin{aligned} \frac{dm_i}{dt} = & f_i + A_{ief}\mu 2_{ef} + \\ & + (M_{rp}\mu 2_{ip} + M_{rpq}\mu 3_{ipq})\Gamma_{rs}^{-1}(y_s - h_s - M_{rpq}\mu 2_{pq}), \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu 2_{ij}}{dt} = & 2\{F_{ie}\mu 2_{je} + A_{ief}\mu 3_{jef}\}_s + V_{ij} - \\ & (H_{rp}\mu 2_{ip} + M_{rpq}\mu 3_{ipq})\Gamma_{rs}^{-1}(H_{sa}\mu 2_{ja} + M_{sab}\mu 3_{jab}) + \\ & + (H_{rp}\mu 3_{ijp} + M_{rpq}(\mu 4_{ijpq} - \mu 2_{ij}\mu 2_{pq})) \\ & \Gamma_{rs}^{-1}(y_s - h_s - M_{sab}\mu 2_{ab}), \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu 3_{ijk}}{dt} = & \\ = & 3\{F_{ie}\mu 3_{jke} + A_{ief}(\mu 4_{jkef} - \mu 2_{jk}\mu 2_{ef}) \\ & - (H_{rp}\mu 2_{ip} + M_{rpq}\mu 3_{ipq})\Gamma_{rs}^{-1}(H_{sa}\mu 3_{ajk} \\ & + M_{sab}(\mu 4_{abjk} - \mu 2_{ab}\mu 2_{jk}))\}_s \\ & \Gamma_{rs}^{-1}(y_s - h_s - M_{sab}\mu 2_{ab}) \end{aligned} \quad (8.7)$$

и т.д.

В этих уравнениях символ $\{ \}_s$ обозначает операцию симметризации. Например

$$3\{A_{ij}B_k\}_s = A_{ij}B_k + A_{ik}B_j + A_{jk}B_i .$$

Каждое из уравнений бесконечной системы (8.5) – (8.7) – ... содержит центральные моменты более высокого порядка, чем номер рассматриваемого уравнения. Поэтому для обрывания последовательности уравнений необходимо воспользоваться дополнительными соотношениями между оставшимися и отбрасываемыми моментами. Эти выражения можно получить в результате аппроксимации функции распределения полиномами Эрмита и использовании известных соотношений между центральными моментами и коэффициентами этих полиномов. Если в разложении (8.5) – (8.7) ограничится только вторыми момента-

ми, то в предположении линейности системы уравнений (8.1), (8.2), получим уравнения фильтра Калмана. Если в разложении (8.5) – (8.7) ограничимся только вторыми моментами без предположения о линейности уравнений (8.1), (8.2), получим нелинейный фильтр [85], вычисляющий статистики до второго порядка включительно, т.е. условное среднее и условную дисперсию; это так называемый нелинейный фильтр второго порядка. Наконец, если оборвать последовательность дифференциальных уравнений (8.5) – (8.7) после третьего момента, то оставшиеся уравнения необходимо будет дополнить следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\mu_{4ijkl} &= 3\{\mu_{2ij}\mu_{2kl}\}_s, \\ \mu_{5ijklm} &= 10\{\mu_{2ij}\mu_{3klm}\}_s.\end{aligned}$$

Полученный в результате этого обрывания фильтр носит название фильтра третьего порядка.

Аналогичным образом можно учесть более отдаленные члены последовательности (8.5), (8.6), (8.7), ... , приближаясь к теоретически оптимальному бесконечномерному фильтру. Однако следует отметить, что аппроксимируемые уравнения в этом случае резко усложняются. Так, k -ый центральный момент N -мерного вектора есть симметричный тензор состоящий из $\binom{N+k-1}{k}$ компонент.

Данный метод может быть также использован для получения оптимального фильтра четвертого порядка. Поскольку полиномы Эрмита взаимно ортогональны, то члены второго и третьего порядка останутся без изменения. Добавится лишь уравнение для четвертого момента μ_{4ijkl} .

Подобным образом вычисляются моменты пятого и более высокого порядка. Оптимальный нелинейный фильтр будет иметь бесконечную размерность. Однако вычисление каждого

последующего члена разложения становится все более трудоемким. В большинстве практических задач модули членов разложения достаточно быстро убывают с возрастанием их номера. По этой причине оказывается возможным ограничиться синтезом фильтра третьего порядка. Существенным преимуществом фильтра третьего порядка по сравнению с фильтром второго порядка является учет асимметрии апостериорной функции распределения вероятности.

8.1.3. Самоорганизация процесса научного поиска на примере синтеза нелинейного фильтра третьего порядка

Теория непрерывной фильтрации в пространстве состояний началась со статьи Калмана и Бьюси [84] (1961г.). Сосредоточив внимание на гауссовских и марковских процессах (см. Приложение Б) они получили уравнения фильтра, определяющего условное среднее (условную оценку) по измеряемой (наблюдаемой) величине. Этот фильтр позволяет в реальном масштабе времени, рекуррентно определить условную оценку состояния линейной динамической системы.

Как уже выше было отмечено, уравнения фильтра Калмана могло бы быть получено из уравнения апостериорной плотности (АП) (см. Приложение Г). Однако к этому времени уравнение АП еще не было открыто Кушнером (он получил его лишь в 1964 году), а статья Стратановича, в которой оно было выведено только-только вышла (в 1960г.) в бывшем Советском Союзе. В дальнейшем мы будем полагать, что уравнение фильтра Калмана было получено (хотя на самом деле это было не так) из уравнения АП, поскольку все остальные фильтры выводятся также из уравнения АП.

Обозначим через ϕ_1 фильтр Калмана производящий (вы-

числяющий) оценку состояния \widehat{x}_1^* линейной динамической системы; фильтр второго порядка, определяющий оценку \widehat{x}_2^* обозначим через ϕ_2 ; фильтр третьего порядка, вычисляющий оценку \widehat{x}_3^* обозначим через ϕ_3 и т.д. Из сказанного в разделе 8.1.2 вытекает, что

$$\phi_1 \subset \phi_2 \subset \phi_3 \subset \dots \subset \phi_n \subset \dots \quad (8.8)$$

Из выражения (8.8.) следует, что каждый последующий фильтр (при выполнении определенных условий) содержит в себе предыдущий фильтр. Это обстоятельство представляет собой индуктивную часть (см. Рис. 8.3) самоорганизации процесса научного поиска. Переход от общего к частному, т.е. от уравнения АП к фильтру ϕ_n размерности n представляет дедуктивную часть самоорганизации процесса научного поиска. В результате дедукции имеем точную оценку условного среднего для n -го фильтра ϕ_n :

$$\widehat{x}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t/y(t))dx.$$

В процессе сравнения участвуют два цикла (Рис. 8.3): левый и правый циклы единого процесса самоорганизации научного поиска, возникающие при синтезе оптимального (в среднеквадратическом смысле) фильтра.

На Рис. 8.4 – Рис. 8.6 приводятся графики изменения ошибки по высоте для спутника Луны. соответствующее фильтру Калмана (Рис. 8.4), фильтру второго порядка (Рис. 8.5) и фильтру третьего порядка (Рис. 8.6). На этих рисунках по оси абсцисс отложено время в тысячах секунд, а по оси ординат – ошибки по высоте в тысячах футов.

Из Рис. 8.4 видно, что линеаризованный фильтр Калмана неустойчив и расходится уже через несколько витков. При этом производимые им оценки ковариации асимптотически стремят-

ся к нулю, в то время как фактическая ошибка быстро нарастает. Фильтр второго порядка (Рис. 8.5) также расходится, хотя и не так быстро. И только фильтр третьего порядка достигает установившихся колебаний ошибки относительно устойчивого состояния равновесия (Рис. 8.6).

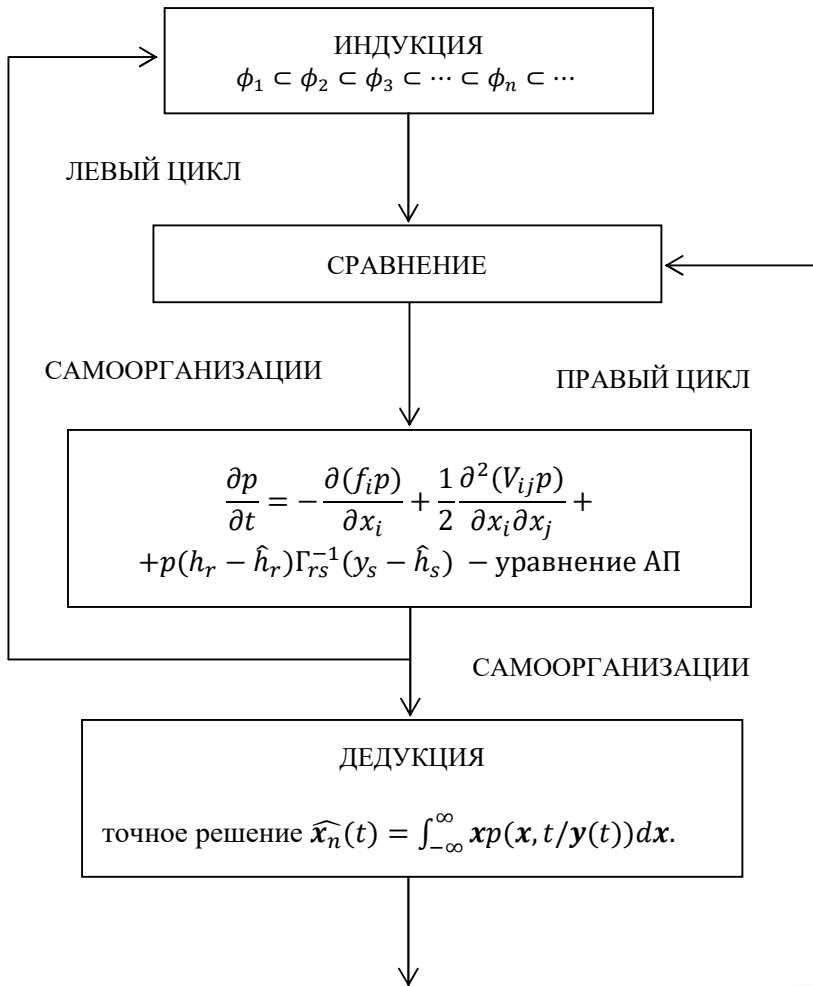


Рис. 8.3

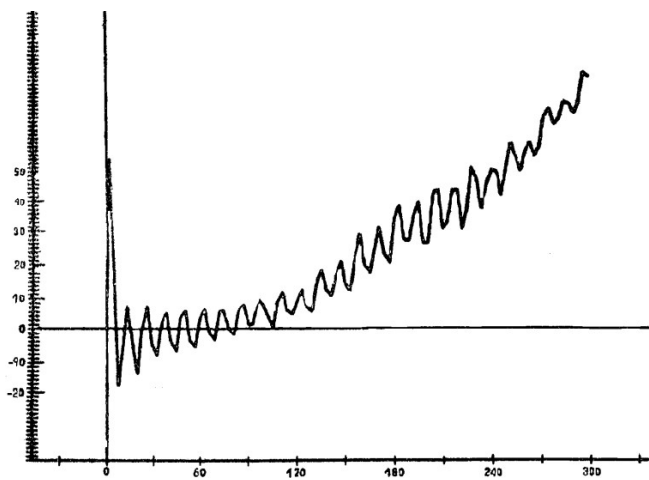


Рис. 8.4

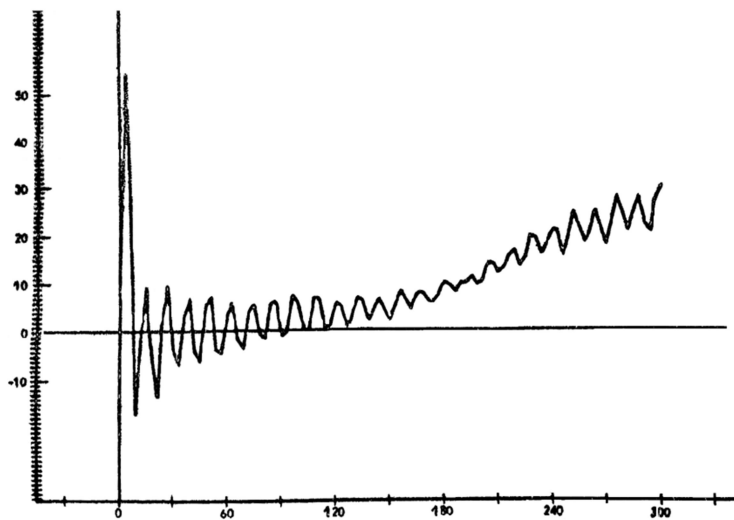


Рис. 8.5

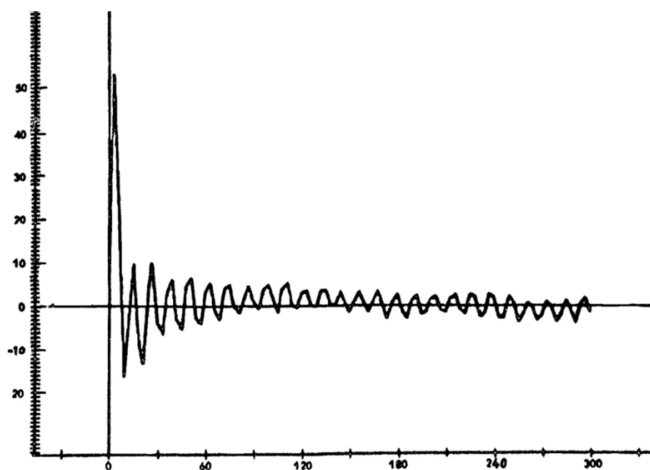


Рис. 8.6

Следует отметить, что между фильтром Калмана ([84], 1961г) и фильтром второго порядка Снайдера ([85], 1965г) шаг составляет 4 года, а между фильтром второго порядка и фильтром третьего и последующих порядков Калвера ([86], 1969г) тоже составляет 4 года. Этот факт свидетельствует о том, что в процессе научного поиска имеет место определенная закономерность.

Самоорганизация научного поиска, в данном случае, заключается в поиске такого фильтра, для которого существует сходящийся процесс оценки состояния объекта (спутника Луны).

§8.2. Организующаяся и самоорганизующаяся модели влияния солнечной активности на заболеваемость населения Земли

Ученные пришли к выводу, что такие процессы как рост, развитие и урожайность растений, темп размножения и токсические свойства насекомых, размножения и миграция у живот-

ных, рыб и насекомых и, наконец, заболеваемость и изменение самочувствия человека, очевидно тесно связаны с *периодическими колебаниями солнечной активности*. Об активности процессов на Солнце можно судить по появлению, развитию и исчезновению солнечных пятен.

В бывшем Советском Союзе влияние процесса пятнообразования, происходящего на Солнце, на заболеваемость населения, исследовал профессор А. Л. Чижевский [12]. Вот что он пишет: «Пятнообразование представляет собой явление очень сложное. Только в среднем один период равняется 11 годам. В действительности продолжительность его достигает иногда 17 лет, а иногда 7». В период научной деятельности А. Л. Чижевского такого научного направления как теория самоорганизации не существовало. Поэтому визуальные наблюдения за процессом пятнообразования на Солнце использовались для прогноза возможной вспышки эпидемии. Такой прогноз давал возможность населению заблаговременно подготовиться к этому грозному явлению.

В настоящем параграфе процесс пятнообразования на Солнце рассматривается с позиций теории самоорганизации населения, т.е. возможных противодействий со стороны населения. Конечно, под словом «противодействие» не подразумевается влияние человечества на процесс пятнообразования на Солнце, а имеется ввиду своевременное приобретение медикаментозных средств, отказ от выхода населения в дневное время на улицу и т.д.

План действия автора в настоящем параграфе таков. Для осциллирующих временных рядов, которые состоят не из простых невозмущенных гармонических колебаний, а имеют затухающую коррелограмму, используется метод Юла [89]. Этот метод основан на применении линейной модели авторегрессии

для анализа этих рядов. Вот что пишет по поводу метода Юла М. С. Бартлетт: «Это довольно общая модель для недетермированных рядов, если ряды авторегрессии неограничены и остатки некоррелированы» [90]. Согласно этому методу автором синтезируется линейное стохастическое дифференциальное уравнения. От левой части этого уравнения осуществляется переход к соответствующему уравнению Риккати. Наконец, на основе использования результатов Главы 3 (уравнений (3.84), (3.85), (3.84'), (3.86') и (3.93) настоящей монографии) производится переход от уравнения Риккати к соответствующей модели антагонистических уравнений типа «хищник – жертва».

Рассмотрим ряд из n наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n (соответствующий моментам $t = 1, 2, \dots, n$), который имеет затухающую коррелограмму. Простейшая дискретная модель, приводящая к квазипериодическим осциллирующим рядам, имеет вид:

$$X(t) = aX(t-1) + bX(t-2) + Y(t), \quad (8.1)$$

где $Y(t)$ – случайный процесс с независимыми приращениями.

Следует отметить, что модели авторегрессии дискретного типа вообще непригодны и могут быть использованы только в качестве приближения. Поэтому в разностном уравнении (8.1) время t будем считать непрерывным; с учетом этого, уравнение (8.1) запишется в следующем виде

$$d\dot{X}(t) + \alpha\dot{X}(t)dt + \beta X(t)dt = dY(t). \quad (8.2)$$

Для оценки неизвестных коэффициентов α и β минимизируем сумму квадратов

$$\int_0^T [d\dot{X}(t) + \alpha\dot{X}(t)dt + \beta X(t)dt]^2 = \int_0^T [dY(t)]^2$$

в результате находим решения

$$\int_0^T \dot{X}(t)[d\dot{X}(t) + \alpha\dot{X}(t)dt + \beta X(t)dt] = 0, \quad (8.3)$$

$$\int_0^T X(t)[d\dot{X}(t) + \alpha\dot{X}(t)dt + \beta X(t)dt] = 0. \quad (8.4)$$

Поскольку имеем

$$\int_0^T X(t)\dot{X}(t)dt = \left[\frac{1}{2}X^2(t) \right]_0^T,$$

$$\int_0^T X(t)d\dot{X}(t) = [X(t)d\dot{X}(t)]_0^T - \int_0^T \dot{X}^2(t) dt,$$

то решения уравнений (8.3) и (8.4) относительно неизвестных коэффициентов α и β будут асимптотически эквивалентны оценкам

$$\hat{\alpha} = - \frac{\int_0^T \dot{X}(t)d\dot{X}(t)}{\int_0^T (X(t))^2 dt}, \quad (8.5)$$

$$\hat{\beta} = - \frac{\int_0^T X(t)d\dot{X}(t)}{\int_0^T (\dot{X}(t))^2 dt}. \quad (8.6)$$

После обработки статистических данных образования солнечных пятен по Вольферу (проведенных Юлом за период от 1749 г. по 1924 г.) были получены следующие асимптотические оценки неизвестных параметров: $\hat{\alpha} = 0,3186$, $\hat{\beta} = 0,3631$.

Зная эти оценки, формальным делением обеих частей уравнения (8.2) на $dt \rightarrow 0$ с последующим его осреднением, получим

$$\ddot{X}(t) + \hat{\alpha}\dot{X}(t) + \hat{\beta}X(t) = 0. \quad (8.7)$$

Выражение (8.7) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. От уравне-

ния (8.7) необходимо осуществить переход к соответствующему уравнению Риккати.

Обычно, в литературе производится переход от уравнения Риккати к уравнению Бернулли для того, чтобы получить решение этого уравнения в явном виде. Однако, при таком переходе теряется структура решения уравнения Риккати, которая представляет собой солитон. Для предлагаемого в настоящей монографии метода оптимизации организующихся и самоорганизующихся систем, очень важно получить решение уравнения Риккати в виде солитона. Поэтому наша цель заключается в переходе от уравнения (8.7) к соответствующему уравнению Риккати. С этой целью введем обозначение

$$\dot{X}/X = b^*z \Rightarrow \dot{X}(t) = Xb^*z(t), \quad (8.8)$$

где $b^* = \hat{\beta}/q^*$, а q^* – произвольное число. Тогда после подстановки (8.8) в (8.7) и деления обеих частей полученного результата на b^* будем иметь

$$X(\dot{z} + b^*z^2 + \hat{\alpha}z + q^*) = 0.$$

Поскольку $X \neq 0$, то последнее выражение представляет собой уравнение Риккати

$$\dot{z} = -\hat{\alpha}z - b^*z^2 - q^*, \quad (8.9)$$

где $q^* = \hat{\beta}/b^*$.

Постоянный параметр b^* может принимать произвольное значение; поэтому переход от уравнения (8.7) к уравнению Риккати (8.9) не является однозначным. При весьма большом значении b^* , свободный член $q^* \approx 0$, а уравнение (8.9) примет вид

$$\dot{z} = -\hat{\alpha}z - b^*z^2. \quad (8.10)$$

Параметры $\hat{\alpha}$ и b^* заменим теми параметрами, которые имеем в уравнении (3.95), т.е. $\hat{\alpha} \equiv p - q$ и $b^* \equiv \frac{bc}{a - q}$.

Введем обозначения:

x^* – численность населения при отсутствии пятнообразования,

y^* – интенсивность излучения Солнца, обусловленная пятнообразованием,

$z = x^* y^*$ – смертность населения при пятнообразовании,

a – параметр представляет собой темп рождаемости населения,

b – параметр учитывает влияние темпа солнечной активности (пятнообразования) на отрицательный прирост населения, т.е. убыль населения,

c – параметр учитывает влияние темпа смертности населения на увеличение мер предосторожности,

p – темп интенсивности солнечного излучения, вызванный пятнообразованием,

q – темп смертности населения, вызванный пятнообразованием.

После подстановки значений \hat{a} и b^* в уравнение (8.10), будем иметь

$$\dot{z} = -(p - q)z - \frac{bc}{a - q}z^2. \quad (8.11)$$

Уравнению (8.11) будут соответствовать две системы уравнений типа Вольтерра–Лотка (см. раздел 3.4.3, случай 11, ГЛАВА 3). При $g \equiv p - q > 0$ будем иметь устойчивую систему

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - bx^*y^*, \quad a, b > 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{dy^*}{dt} = cx^*y^* - gy^*, \quad c, g > 0, \quad (8.13)$$

где $q = a - \frac{bc}{p}e$, а в случае, когда $q^* - p > 0$ ($g^* \equiv q^* - p$) бу-

дем иметь неустойчивую систему

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - bx^*y^*, \quad a, b > 0, \quad (8.14)$$

$$\frac{dy^*}{dt} = g^*y^* - cx^*y^*, \quad g^*, c > 0, \quad (8.15)$$

где $q^* = a + \frac{bc}{p}e$.

Для дальнейшего изложения необходимо выбрать либо устойчивую модель (8.12), (8.13), либо неустойчивую модель (8.14), (8.15).

Поскольку при пятнообразовании смертность населения должна возрастать, то приемлемой моделью является неустойчивая модель (8.14), (8.15), которую необходимо предварительно модифицировать следующим образом.

Во-первых следует учесть, что смертность населения x^* не оказывает влияние на пятнообразование, т.е. вместо члена cx^*y^* в уравнении (8.15) будем иметь член cy^* :

$$cx^*y^* \equiv cy^*. \quad (8.15a)$$

Во-вторых предполагается, что между параметром b , учитывающим влияние темпа солнечной активности на убыль населения и параметром c , учитывающим влияние темпа смертности населения на увеличение мер предосторожности населения, существует зависимость

$$b = b_0/(1 + c), \quad (8.14a)$$

где $b_0 = \text{const}$ – максимальная убыль населения при пятнообразовании, когда $c = 0$.

С учетом выражений (8.15a) и (8.14a) неустойчивая система (8.14), (8.15) примет вид

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - \frac{b_0}{1 + c}x^*y^*, \quad (8.14'')$$

$$\frac{dy^*}{dt} = (g^* - c)y^*, \quad (8.15'')$$

где $g^* = q^* - p$, а $q^* = a + \frac{bc}{p}e$. (см. раздел 3.4.3).

Таким образом, модифицированная система уравнений (8.14), (8.15) имеет вид (8.14''), (8.15''). Система уравнений (8.14''), (8.15'') включает в себе как организующуюся систему, так и самоорганизующуюся систему.

Благодаря принятию мер предосторожности населением, направленных на увеличение параметра c , происходит соответствующее уменьшение параметра b , согласно соотношению (8.14a), т.е. уменьшение влияния темпа солнечной активности на убыль населения; система (8.14''), (8.15'') будет самоорганизующейся.

Поскольку параметр c непосредственно не влияет на солнечную активность, то вместо уравнения (8.15'') должно рассматриваться уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dy^*}{dt} &= (q^* - p)y^*, \quad q^* - p > 0, \quad c \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8.15''a)$$

В этом случае совместное рассмотрение уравнения (8.14'') и (8.15''a) означает существование организующейся системы, т.е. разомкнутой системы.

В случае рассмотрения системы уравнений (8.14''), (8.15''), при $c \neq 0$, самоорганизация населения заключается в том, что человечество стремится уменьшить смертность населения благодаря защитным действиям, направленным на ослабление влияния пятнообразования на здоровье организма.

Меры предосторожности могут быть самыми разнообразными, поскольку в период солнечной активности резко возрастают сердечнососудистые, инфекционные, злокачественные и другие заболевания.

Рассмотрим подробно уравнение (8.15''):

$$\frac{dy^*}{dt} = [q^* - (p + c)]y^*.$$

В этом уравнении защитные действия населения или меры предосторожности выбираются исходя из условия определения параметра c согласно равенству

$$q^* - p - c = 0 \Rightarrow a + \frac{bc}{p}e - p - c = 0. \text{ Из этого равенства с учетом}$$

формулы (8.14а) получим квадратное алгебраическое уравнение относительно c

$$pc^2 - rc - s = 0, \text{ где } r = ap + b_0e - p^2 - p, \quad s = (a - p)p.$$

Решая последнее уравнение, находим c :

$$c = \frac{\sqrt{r^2 + 4ps} + r}{2p} = f(p, a, b_0, e). \quad (8.16)$$

Подстановка параметра c , определенного согласно (8.16), в (8.15) преобразует это уравнение к виду

$$\frac{dy^*}{dt} = 0. \quad (8.17)$$

Решением уравнения (8.17) является

$$y^* = y_0 = \text{const}, \quad (8.18)$$

где y_0 – интенсивность солнечного излучения до начала пятнообразования.

Подстановка значений c и y_0 , определенных согласно (8.16) и (8.18), в уравнение (8.14) дает

$$\frac{dx^*}{dt} = ax^* - Ax^*, \quad (8.19)$$

где

$$A = \frac{b_0y_0}{1 + f(p, a, b_0, e)}.$$

Уравнение (8.19) можно представить в виде

$$(\ln x^*)'_t = a - A. \quad (8.20)$$

Решение уравнения (8.20) на интервале пятнообразования $[t_0, t_f]$ запишется так

$$\ln x^* = (a - A)T,$$

где $T = t_f - t_0$, а t_f – время окончания пятнообразования, t_0 – время начала пятнообразования.

Из последнего выражения окончательно имеем

$$x^* = e^{(a-A)T}. \quad (8.21)$$

Поскольку численность населения x^* при пятнообразовании не убывает, а возрастает от года к году, то в соотношении (8.21), должны иметь $a - A > 0$.

Краткие комментарии к восьмой главе

Показано, что благодаря замкнутости процесса научного поиска, система научного поиска является самоорганизующейся. Две составляющие научного поиска индукция и дедукция сверяются между собой. Сопоставление этих составляющих является критерием истинности выбранной модели. Процесс научного поиска показан на примере синтеза фильтра для оценки состояния спутника Луны.

Другой мегаскопический процесс для которого существуют организующаяся и самоорганизующаяся модели, является влияние солнечной активности на здоровье населения планеты Земля.

Исходя из результатов третьей главы, строится *модель поведения населения планеты Земля и модель процесса пятнообразования на Солнце, оказывающего негативное воздействие на здоровье населения.*

ГЛАВА 9

Организующиеся процессы элементарных частиц на микроскопическом уровне

Название «элементарные частицы» нельзя считать удачным, поскольку, во-первых, все эти частицы взаимно превращаются и, во-вторых, по-видимому, часть из них можно рассматривать как различные состояния одних и тех же частиц. Благодаря большому числу экспериментальных работ удалось искусственно получить ряд новых частиц и изучить их свойства. По этой причине сведения об элементарных частицах пополняются очень быстро; интенсивно разрабатывается их теория. В следующем параграфе кратко приводятся те свойства элементарных частиц, которые уже утвердились в современной физике.

§9.1. Некоторые аспекты элементарных частиц

Пусть мы имеем простейшую систему, состоящую из двух одинаковых частиц. Известно, что полное описание одночастичного состояния требует учета спина¹ частицы и связанной с ним спиновой координаты σ .

Обозначим через ζ_1 и ζ_2 совокупности пространственных координат и спиновую координату, условно относимые к каждой из частиц. Пусть состояние этой системы в некоторый момент времени описывается функцией $\Psi(\zeta_1, \zeta_2)$.

При перестановке частиц функция Ψ , состоящая из совокупности двух частиц, либо не изменяется, либо изменяет свой знак, т.е.

$$\Psi(\zeta_1, \zeta_2) = \pm \Psi(\zeta_2, \zeta_1).$$

¹ спин есть собственный механический момент частицы, измеряемый в единицах постоянной Планка $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ дж·с = $0,659 \cdot 10^{-15}$ эв·с.

Функцию, не изменяющую свой знак при перестановке пары частиц, называют *симметричной*, а функцию, знак которой изменяется на противоположный – *антисимметричной*.

Все существующие в природе частицы таковы, что волновая функция Ψ , описывающая любое состояние системы из N тождественных частиц, должна быть либо симметричной, либо антисимметричной. В квантовой теории имеет место *принцип тождественности одинаковых частиц, образующих данную квантово-механическую систему; согласно этому принципу, все одинаковые частицы являются совершенно тождественными*. Эти частицы не взаимодействуют друг с другом, поэтому полная энергия системы равна сумме энергий отдельных состояний, занятых частицами:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^N E_i.$$

Симметричная функция не зависит ни от взаимодействия между частицами, ни от наличия внешних полей, а определяется физической природой самих частиц.

Одни элементарные частицы (например фотон) характеризуются тем, что системы этих частиц описываются симметричными функциями, другие же (например электроны) описываются антисимметричными функциями. Частицы первого типа получили название *частиц Бозе (бозоны)*, а частицы второго типа – *частиц Ферми (фермионы)*. Критерием, согласно которому различаются элементарные частицы, являются их спин. Все простейшие элементарные частицы обладают спином $0, \frac{1}{2}\hbar$ или \hbar .

Одной из важнейших особенностей фермионов является

то, что они обладают полуцелым спином, т.е. равным $\frac{1}{2}\hbar$ и описываются антисимметричными функциями. Фермионы подчиняются **принципу Паули** (или принципу запрета), который утверждает, что *в любой квантово-механической системе тождественных фермионов в одном и том же определенном одночастичном состоянии не может находиться более одного фермиона.*

Введем понятие населенности N_n одночастичного состояния; в соответствии с термодинамическим равновесием населенность является функцией только энергии E_n этого состояния: $N_n = N_n(E_n)$. В этом выражении индекс n представляет собой концентрацию частиц, т.е. $n = N/V$, где V – объем в котором находятся частицы.

Введем обозначение: $f(E_n) = N_n / (1 \pm N_n)$. Тогда для частиц, находящихся в состояниях n и m , имеет место равенство

$$f(E_n)f(E_m) = \varphi(E_n + E_m),$$

где φ – некоторая величина, которая может зависеть только от суммарной энергии начального состояния $E_n + E_m$ или от равной ей энергии конечного состояния $E_{n'} + E_{m'}$.

Если продифференцируем последнее равенство сначала по E_n , а потом по E_m и приравняем левые части, то получим [91]:

$$f'(E_n)f(E_m) = f'(E_m)f(E_n) = -1/\Theta,$$

где Θ – некоторая постоянная, уже не зависящая от энергий состояний. Интегрирование последнего выражения, например, по E_n , дает

$$f(E_n) = e^{-E_n/\Theta + \alpha},$$

где α – постоянная интегрирования.

Из этого выражения, для среднего числа частиц, находящихся в состоянии с энергией E_n , будем иметь формулу

$$\langle N_n \rangle \equiv \langle N(E_n) \rangle = \frac{1}{e^{E_n/\Theta - \alpha} \pm 1}, \quad (9.1)$$

в которой знак «-» соответствует бозонам, а знак «+» – фермионам.

При большой энергии частиц ($E \rightarrow \infty$) квантовость в поведении частиц становится несущественной и статистический закон распределения (9.1) совпадает с **классическим законом Больцмана–Максвелла**

$$\langle N(E) \rangle_{(cl)} = A e^{-E/(kT)}, \quad (9.2)$$

где k – постоянная Больцмана, а T – равновесная температура системы. Перейдя в (9.1) к пределу $E \rightarrow \infty$ и сравнивая получаемый при этом результат с (9.2), найдем, что $\Theta = kT$. Следовательно, окончательно получим

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(kT)} \pm 1}, \quad (9.3)$$

где $\mu = \alpha/(kT)$ – химический потенциал системы.

Поскольку формула (9.3) применима к газу с дискретным одночастичным состоянием, то для многочастичного состояния имеет место соотношение

$$\sum_i \langle N(E_i) \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} \pm 1} = N, \quad (9.4)$$

где суммирование производится по всем разрешенным значениям энергии E_i частицы. Формула (9.4) в неявном виде определяет химический потенциал μ как функцию N и T .

На основании выражения (9.3) можно в отдельности записать статистические распределения для бозе и ферми частиц.

Закон распределения

$$\langle N(E_n) \rangle_{(BOS)} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(kT)} - 1} \quad (9.5)$$

называют **распределением Бозе – Эйнштейна**, а совокупность частиц, подчиняющихся этому закону – *газом Бозе – Эйнштейна*.

Закон распределения

$$\langle N(E_n) \rangle_{(Fer)} = \frac{1}{e^{(E-\mu)/(kT)} + 1} \quad (9.6)$$

называют **распределением Ферми – Дирака**, а совокупность частиц, описываемую этим законом – *газом Ферми – Дирака*.

Фермионы – частицы физической материи, а бозоны – частицы переносчики взаимодействия; бозоны, передавая взаимодействие, как бы «обслуживают» фермионы.

Относительно химического потенциала μ , фигурирующего в различных распределениях, имеют место следующие общие соображения.

Для распределения Больцмана – Максвелля химический потенциал μ имеет отрицательное значение $\mu < 0$, поскольку выполнение условия $\langle N(E) \rangle_{(cl)} \leq 1$, имеющего место, при любых энергиях (начиная с $E = 0$), возможно только при $\mu < 0$.

В распределении Бозе – Эйнштейна значение μ также не может быть положительным, поскольку при $E < \mu$ среднее число бозонов $\langle N(E) \rangle_{(Bos)}$ в состоянии с такой энергией ($E < \mu$) оказалось бы отрицательным, что лишено физического смысла; поэтому $\mu \leq 0$.

Химический потенциал μ для фермионов может быть как положительной так и отрицательной величиной в зависимости от свойств и состояния системы, т.е. $\mu \leq 0$. Значение химического потенциала $\mu(T = 0)$ есть максимальная энергия частицы в газе Ферми – Дирака при $T = 0$.

Для дальнейшего изложения введем понятие некоторых квантовых законов статистического распределения для газа, помещенного в конечный, но очень большой объем V . Одночастичный энергетический спектр такого газа имеет квазинепрерывный характер. Определим по формуле

$$dv(E) = Vg(E)dE \quad (9.7)$$

число состояний с энергией от E до $E+dE$; где $g(E)$ – энергетическая плотность состояний, отнесенная к единице объема. Выражение (9.3) дает населенность отдельного (парциального) состояния. Поэтому, суммируя (9.3) по всем состояниям (в указанном интервале энергий), получим среднее число частиц $dN(E)$ в газе с энергией от E до $E + dE$:

$$dN(E) = \langle N(E) \rangle dv(E) = \frac{Vg(E)dE}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1}. \quad (9.8)$$

Разделив обе части выражения (9.8) на V , получим закон распределения по энергии для единичного объема газа:

$$dn(E) = \frac{dN(E)}{V} = \frac{g(E)dE}{e^{(E-\mu)/(kT)} \pm 1}. \quad (9.9)$$

В данном случае, вместо суммы (9.4), условием нормировки формулы (9.9) является выражение

$$\int_0^{\infty} \frac{g(E)dE}{e^{(E-\mu)/(kT)} \pm 1} = n, \quad (9.10)$$

где $n = N/V$ – концентрация частиц в газе.

Энергетическая плотность состояний, отнесенная к единице объема, определяется из выражения (9.7)

$$g(E) = \frac{1}{V} \frac{dv(E)}{dE} = 4\pi \frac{(2m_e)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi\hbar)^3} E^{\frac{1}{2}}, \quad (9.11)$$

где m_e – масса электрона, \hbar – постоянная Планка.

Закон распределения свободных электронов кристалла по энергии дается соотношением (9.9)

$$dn = g(E)f(E) = 4\pi \frac{(2m_e)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1} dE. \quad (9.12)$$

Условие нормировки для формулы (9.12) имеет вид

$$4\pi \frac{(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} \frac{E^{1/2}}{e^{(E-\mu)/(kT)} \pm 1} dE = n, \quad (9.13)$$

где $n = N/V$ – концентрация валентных электронов в образце.

Рассмотрим основные свойства электронного газа Ферми при достаточно низких температурах. Термин «достаточно низкие температуры», имеет довольно условный характер, поскольку температуры о которых пойдет речь, с других точек зрения, могут быть достаточно высокими.

При абсолютном нуле температуры электроны распределены по различным одночастичным состояниям таким образом, что полная энергия газа минимальна и равна E_0 , поскольку (согласно принципу Паули, в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы) электроны заполняют попарно все уровни с энергией от наименьшей (равной нулю) до наибольшей E_{max} , значение которой определяется концентрацией свободных электронов в металле.

Значение энергии верхнего, заполненного электронами уровня при $T=0$ называют уровнем Ферми или энергией Ферми: $\mu(0) = E_F$.

Значение энергии Ферми находится из формулы (9.13), если в ней положим $T = 0$, при $\mu > E$:

$$4\pi \frac{(2m_e)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = n.$$

После интегрирования из последней формулы находим значение энергии Ферми

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{2/3}. \quad (9.14)$$

§9.2. Плотность функции Лагранжа (лагранжиан) газа Ферми – Дирака

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial E} X = \lambda X(1 - X) \quad (9.15)$$

с начальным условием $E_0 = \max(X'_E)$ [90].

Решение уравнения (9.15) имеет вид

$$X = \frac{1}{1 + e^{-\lambda(E-E_0)}}. \quad (9.16)$$

В формуле (9.16) введем обозначения $\lambda = 1/kT$ и $E_0 = -\mu$. В результате этих обозначений выражение (9.16) совпадает с формулой (9.6), если $E < 0$. Найдем теперь плотность Лагранжиана

$$X(E) = \frac{1}{1 + e^{\lambda(E-\mu)}}. \quad (9.17)$$

С этой целью возьмем производную от преобразованного выражения (9.17) по E ; в результате получим

$$X'_E = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{e^{-\lambda(E-\mu)/2}}{ch \left[\frac{1}{2} \lambda(E-\mu) \right]} \right)'_E.$$

Вследствии нахождения производной в последнем выражении, определим плотность лагранжиана

$$D(E) \equiv X'(E) = -C \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2kT} (E - \mu) \right], \quad (9.18)$$

где $C = 1/2kT = \text{const}$.

Выражение (9.18) показывает, что плотность лагранжиана газа Ферми – Дирака представляет собой солитонную функцию. Как уже отмечалось, солитон является решением уравнения Риккати (9.15). Ясно, что если правая часть уравнения (9.15) является солитоном, то левая часть этого уравнения должна быть производной от гиперболического тангенса. Действительно, вычислим интеграл от плотности Лагранжиана

$$\begin{aligned}
\int_{E=E_0}^E D(E)dE &= \int_{E=E_0}^E \left(\frac{1}{1 + e^{\lambda(E+E_0)}} \right)'_E dE = \frac{1}{1 + e^{\lambda(E+E_0)}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1 - e^{\lambda(E+E_0)}}{2(1 + e^{\lambda(E+E_0)})} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\lambda(E+E_0)/2} - e^{-\lambda(E+E_0)/2}}{e^{\lambda(E+E_0)/2} + e^{-\lambda(E+E_0)/2}} = \\
&= -\frac{1}{2} th \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right]. \tag{9.19}
\end{aligned}$$

Поскольку левые части уравнений (9.15) и (9.18) равны, то должны быть равны их правые части, т.е.

$$-Csech^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right] = \lambda X(X - 1). \tag{9.20}$$

Выражение (9.20) показывает, что переменная X инвариантна относительно аргумента, т.е. энергии E .

Плотность газа Бозе – Эйнштейна можно получить, если к выражению (9.5) применить ту же процедуру, которая была использована при выводе формулы (9.18). В данном случае формула для плотности газа Бозе – Эйнштейна имеет вид

$$D^*(E) = -Ccsch^2 \left[\frac{1}{2kT} (E - \mu) \right]. \tag{9.19a}$$

Плотность $D^*(E)$ газа Бозе – Эйнштейна (9.5) является периодической функцией, но не является солитонной функцией.

Между квадратом гиперболического косеканса и квадратом гиперболического секанса имеется следующая зависимость

$$csch^2 z = \frac{sech^2 z}{1 - sech^2 z}. \tag{9.20б}$$

Поскольку $sech^2 z < 1$, то правая часть выражения (9.20 б) является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии умноженной на $sech^2 z$. Формула (9.20б) показывает, что плотность газа Бозе – Эйнштейна можно выразить через плотность лагранжиана газа Ферми – Дирака.

§9.3. Оптимизационные характеристики плотности лагранжиана газа Ферми – Дирака

Введем обозначение

$$D(E) = D[y(E)], \quad (9.21)$$

где

$$D[y(E)] = L_0 L(E), \quad (9.22)$$

$$L_0 = -C, \quad y = \operatorname{sech} \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right],$$

$$L(E) = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right]. \quad (9.23)$$

Под переменной $y(E)$ подразумевается совокупность всех квантовых полевых величин.¹ В дальнейшем предполагается, что $D(E)$ может иметь непрерывные производные по функции y и по энергии поля E .

В обобщенном виде уравнение Эйлера–Лагранжа для плотности лагранжиана частиц поля газа Ферми – Дирака может быть записано следующим образом

$$L_0 \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial E} \frac{\partial L}{\partial (\partial y / \partial E)} \right] = 0. \quad (9.24)$$

В развернутом виде уравнение Эйлера–Лагранжа (9.24) (при $L_0 \neq 0$) имеет вид

$$L_y - L_{Ey'} - L_{yy'} \cdot y' - L_{y'y'} \cdot y'' = 0. \quad (9.24a)$$

В уравнении (9.24a) имеем следующие значения, входящих в него слагаемых

$$L_y \equiv L_{Ey'} = 2 \operatorname{sech} \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right], \quad (9.25)$$

$$L_{yy'} \cdot y' = 2 \operatorname{sech} \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right], \quad (9.26)$$

¹ Квантовым полем называется такое поле, которое образовано совокупностью квантовых полей отдельных элементарных частиц.

$$L_{y'y'} \cdot y'' = \frac{\operatorname{sech} \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right]}{th^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right]} \left\{ 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right] \right\} \quad (9.27)$$

Подстановка значений (9.25) – (9.27) в уравнение (9.24) (с учетом неравенства $\operatorname{sech} \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right] \neq 0$) дает уравнение

$$2th^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right] + 1 - 2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right] = 0.$$

Из этого уравнения имеем

$$\operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E + E_0) \right] = \frac{3}{4}. \quad (9.28)$$

Из выражения (9.28) и обозначения (9.22) видно, что плотность D лагранжиана газа Ферми – Дирака (на интервале от E до E_0) является постоянной величиной

$$D(E) = -\frac{3}{4} C = -\frac{3}{4} 1/2kT = \text{const}. \quad (9.29)$$

Чтобы избавиться от трудностей, связанных с отрицательным значением энергетического поля (9.29) Дирак предположил, что в нормальном состоянии, т.е. в вакууме, все положительные энергетические электронные уровни свободны, а все отрицательные энергетические уровни заняты. Такое состояние электронно-позитронного поля является равновесным, поскольку в силу принципа Паули переходы в состояния с отрицательной энергией осуществляться не могут. Из предположения Дирака следует, что электрон (имеющий отрицательный заряд), на положительном энергетическом уровне, ведет себя как частица с отрицательным зарядом; при этом отсутствие электрона на отрицательном энергетическом уровне проявляется как наличие электрона с положительным зарядом, имеющем положительную энергию. Дирак предположил, что электроны, находящиеся на отрицательных энергетических уровнях ненаблюдаемые; наблю-

даемыми являются отклонения от состояния вакуума. Следовательно, «дырка» в вакууме не может быть интерпретирована как положительно заряженный электрон, т.е. как позитрон. Из теории Дирака вытекает, что наблюдаемое энергетическое поле, (плотность лагранжиана газа Ферми – Дирака) положительно и равно сумме энергетических полей, создаваемых электронами и позитронами.

§9.4. Организующиеся процессы в элементарных частицах

Организуемые процессы в элементарных частицах следуют из тенденции распада частицы на более легкие с выделением энергии; эта тенденция отражает всеобщий закон природы: *система стремится прийти в состояние с минимумом энергии, выделив при этом избыток имеющейся энергии.*

Обратимся теперь к результату предыдущего параграфа. Решение уравнения Эйлера–Лагранжа (9.24a) позволяет определить функцию $D(E)$, удовлетворяющую функционалу Лагранжа

$$J = \int_{|E_0|}^E D(E) dE = \min, \quad |E_0| > E. \quad (9.30)$$

Символ \min в выражении (9.30) стоит не из эвристических соображений, а имеет строгое математическое обоснование. Действительно, плотность лагранжиана (формула (9.17)), т.е. первая производная от $X(E)$ по энергии имеет вид

$$X'_E(E) = -C \operatorname{sech}^2[\alpha(E - \mu)], \quad (9.18a)$$

где $\alpha = 1/2kT$.

Вторая производная от $X(E)$ по энергии равна

$$X''_E(E) = 2C \alpha \operatorname{sech}^2[\alpha(E - \mu)] \{3 \operatorname{sech}^2 \alpha[(E - \mu)] - 2\}.$$

Если из последнего выражения определим функцию

$\operatorname{sech}^2[\alpha(E - \mu)]$ так, чтобы она не противоречила равенству (9.28), то получим

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(E - \mu)] > \frac{2}{3};$$

это означает, что $X_E''(E) > 0$. Поскольку вторая производная от функции Лагранжа $X(E)$ положительна, то функционал J должен быть минимизирован, т.е. выражение (9.30) справедливо. Функция $D(E)$ найдена согласно формуле (9.29). Ее подстановка в выражение (9.30) дает

$$-D_0 \int_{|E_0|}^E dE = \min, \quad (9.31)$$

где

$$-D_0 = \frac{3}{4} 1/2kT = \text{const.}$$

Вычисление левой части функционала (9.31) приводит к соотношению

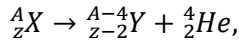
$$D_0(|E_0| - E) = \min. \quad (9.31a)$$

Таким образом, у системы обладающей запасом энергии (как говорят физики «возбужденной системы») всегда есть «желание» от нее избавиться, прийти в наинизшее энергетическое состояние (9.31a). По выражению физиков ей (системе) это энергетически выгодно. В этом заключается *существование организующегося процесса в элементарных частицах*.

Различают альфа-распад и бета-распад. Явление α -распада заключается в том, что тяжелое ядро самопроизвольно (спонтанно) испускает α -частицу и превращается в другое ядро с массовым числом на четыре единицы меньше и с зарядовым числом¹

¹ Зарядовое число Z , совпадающее с количеством протонов в ядре определяет заряд ядра, равный $+Ze$; заряд определяет место элемента в таблице Менделеева. Массовое число A определяет суммарное количество нуклонов в ядре, а разность чисел $N = A - Z$ дает количество нейтронов.

меньшим на две единицы, чем у исходного ядра. Распад протекает по схеме



где X и Y – химические символы исходного (материнского) и образующегося (дочернего) ядер.

Бета-распад называют процесс спонтанного превращения радиоактивного ядра в другое ядро с тем же массовым числом A , но с зарядовым числом, отличающимся от исходного на $\Delta z = \pm 1$. Этот распад сопровождается испусканием электрона (позитрона) и антинейтрино (нейтрино).

Если α -распад наблюдается почти исключительно у тяжелых ядер, то β -распад свойствен ядрам практически во всей области значений массового числа A , начиная от единицы (свободный нейтрон) и кончая числами самых тяжелых ядер.

Энергия, выделяющаяся при β -распаде, лежит в довольно широком интервале значений от 0,02 МэВ (мегаэлектронвольт) для распада трития 3_1H до 13,4 МэВ для распада изотопа бора ${}^{12}_5B$.

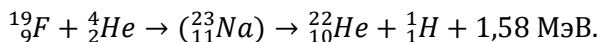
При β -распаде освобождается энергия, равная разности масс исходного ядра и суммарной массы конечного ядра и электрона:

$$\Delta E = ({}^A_ZM - {}^{A}_{z\pm 1}M - m_e)c^2, \quad (9.32)$$

где m_e – масса электрона, а c – скорость света в вакууме.

Согласно формуле Эйнштейна энергии всегда соответствуют масса: $\Delta E = \Delta mc^2$. Это означает, что возбужденное состояние всегда более массивно, чем невозбужденное. Таким образом, если элементарная частица (в принципе) может распасться на более легкие частицы, сумма масс которых меньше массы исходной частицы, то это означает, что при распаде должна выделиться энергия согласно выражению (9.32); такой распад энергетически выгоден.

Можно привести конкретный пример ядерной реакции, происходящей с выделением энергии:



Следовательно, организующиеся процессы, происходящие в элементарных частицах подчиняются тенденции всеобщего закона природы, т.е. вариационному принципу: система стремится прийти в состояние с минимумом энергии (9.31а) и избавиться при этом от избытка имеющейся энергии.

Следует отметить, что цепная ядерная реакция также осуществляется с участием элементарных частиц. Оптимальное автоматическое управление цепной реакцией представляет собой самоорганизующуюся систему т.е. замкнутую рукотворную систему. Для этой системы разработаны эффективные алгоритмы управления ядерным реактором, используемые на атомных электростанциях.

Краткие комментарии к девятой главе

Для плотности лагранжиана газа Ферми – Дирака получено уравнение Эйлера–Лагранжа. Благодаря решению этого уравнения определена функция Лагранжа, которая удовлетворяет критерию минимизации соответствующего функционала. Критерий минимизации этого функционала для элементарных частиц заключается в том, что элементарные частицы стремятся прийти в состояние с минимумом имеющейся энергии. Это стремление заключается в избавлении от «лишней» энергии при распаде частиц, т.е. в существовании организующегося процесса в элементарных частицах.

ГЛАВА 10

Самоорганизующиеся процессы в экономике

Экономика является сопутствующим фактором развития человечества. Созданная человеком, она постоянно испытывает воздействие со стороны человека и одновременно сама оказывает существенное влияние на ход развития человечества. Поскольку, по своей природе, человек является самоорганизующимся существом, то и созданная им экономика также представляет собой самоорганизующуюся систему. Человек не может существовать без экономики, также как экономикой невозможно представить без участия в ней человеческого общества. Экономика зависит от политической системы той страны в которой она существует. С другой стороны существование конкретного политического строя (системы) зависит от состояния экономики. Так, например, в первые годы Советской власти в России (20 годы XX века) экономика Советской России была в плачевном состоянии; это вызвало тотальную смертность населения от голода. Тогдашнее руководство этой страны было вынуждено ввести «новую экономическую политику» (НЭП), чтобы спасти страну от физического самоуничтожения. Следовательно, начальное состояние экономики обуславливает существование той или иной политической системы в конкретной стране.

С экономикой неразрывно связана финансовая система, которая является атрибутом экономики и которая оказывает существенное влияние на состояние и развитие экономики.

§10.1. Общие вопросы экономических моделей

По нашему мнению создать экономическую теорию, описывающую функционирование экономики на протяжении су-

ществования человечества, невозможно. Любая теория может объяснить лишь некоторые аспекты экономики. Так, экономическая теория, которая стремится объяснить долговременную экономическую эволюцию, оказывается бессильной для объяснения кратковременных экономических явлений. Так теория протекания быстрых экономических процессов Дж.М. Кейнса непригодна для объяснения долговременных экономических процессов Н.Д. Кондратьева [92] и Дж.А. Шумпетера.

Дж.М. Кейнс и его последователи осознали, что эволюция капиталистической системы является потенциально нестабильной. Дж.М. Кейнс предполагал, что правительство может стабилизировать экономику путем принятия верных политических и экономических решений. *На языке теории самоорганизации это означает, что правительство может вмешаться в экономику, если процесс самоорганизации в экономике нарушается.* Следовательно, одной из основных проблем кейнсианской теории является вопрос о том, как стабилизировать экономическую систему, которая теряет свойство самоорганизации.

В книге Дж.А. Шумпетера «Теория экономического развития» (1934г.) существенная роль при формировании теории уделяется концепции инноваций. Понятие инновации относится к различным аспектам: появление новых потребностей и изменение ориентаций, разработка новых товаров (удовлетворяющих нужды потребителей), использование новых товаров и оборудования для усиления конкурентноспособности, предложение новых организационных методов и открытие новых рынков. В силу осуществления инноваций, конкурентная капиталистическая экономика не может быть устойчивой. По Дж.А. Шумпетеру такая неустойчивая эволюция экономики не означает разрушения существующей экономической системы. В восьмидесятые годы XX века появилась монография [93] последователей Шум-

петера в которой разработана «эволюционная экономика». В этой книге термин «эволюция» зачастую используется к долговременным процессам и прогрессивным переменам. Существующий в этой книге термин «вне равновесия» представляет собой ключевое слово, нежели термин «равновесие».

Подход, к исследованию поведения экономики, предлагаемый в монографии [93] созвучен с теорией самоорганизованной критичности [59]. Согласно этой теории большие, состоящие из взаимодействующих элементов системы (к которым относится экономическая система), постоянно самоорганизуются. В результате самоорганизации они стремятся достичь некоторого критического состояния, в котором даже малое событие может вызвать цепную реакцию, иногда приводящую к катастрофе. Согласно этой теории состояние системы никогда не достигает равновесия, а эволюционирует от одного метастабильного состояния к другому. Эта теория подразумевает, что глобальные характеристики (такие как относительное число больших и малых событий), не зависят от микроскопических механизмов. Именно поэтому глобальные характеристики больших интерактивных систем нельзя понять, анализируя ее части по отдельности. *Согласно этой концепции фрактальные структуры и шум мерцания являются, соответственно, пространственными и временными «отпечатками» самоорганизованной критичности.*

Шум мерцания чрезвычайно широко распространен в природе: он наблюдается в колебаниях цены акций на фондовых биржах, в активности Солнца, излучении галактик, потоке воды в реке, потоке автомобилей на шоссе и т.д. В книге [94] дана модель потока автомобилей при условии, что интенсивность

насыщенного¹ потока постоянна в рассматриваемом промежутке времени. Модель потока автомобилей в этом случае дается соотношением

$$d = \frac{c(1 - \lambda)^2}{2(1 - \lambda x)} + \frac{x^2}{2q(1 - x)} - 0,65 \left[\frac{c}{q^2} \right]^{1/3} x^{2+5\lambda},$$

где d – средняя длительность задержки автомобиля на определенной ветви перекрестка;

c – длительность цикла;

λ – эффективная длительность зеленого периода, выраженная как доля цикла;

q – интенсивность потока;

s – интенсивность насыщенного потока;

x – степень насыщения, т.е. отношение фактической интенсивности потока q к максимально возможной интенсивности при данном режиме работы, равной λs ; таким образом

$$x = q/\lambda s.$$

Из последнего выражения видно, что шум мерцания, возникающий при потоке автомобилей, является совокупностью степенных функций. Движение автомобилей с попеременным троганием можно рассматривать как критические лавины, распространяющиеся по потоку автомобилей.

Шум мерцания указывает на то, что на динамику системы влияют прошлые события; а «белый» гауссов шум, как известно, означает отсутствие корреляции между текущей динамикой и прошлыми событиями. Вездесущность шума мерцания до сих пор является одной из нерешенных загадок физики.

Понятие фрактальной структуры тесно связано с определением суммы безгранично возрастающего числа безгранично

¹ Интенсивностью насыщенного потока называется интенсивность потока за линией «стоп» в период зеленого света, когда движется непрерывный поток автомобилей. Обычно интенсивность насыщенного потока измеряется числом автомобилей, проходящих за 1 час зеленый цвет светофора.

убывающих слагаемых. Как известно, предел суммы безгранично возрастающего числа безгранично убывающих слагаемых эквивалентен использованию интегрального исчисления. Процедура нахождения этого «предела» была известна еще математикам древней Греции (главным образом Архимеду). Они знали объем шара, конуса, пирамиды и т.д.

Найдем, например, объем пирамиды, используя понятие «фрактальной структуры». Разобьем объем пирамиды высотой h на n -ое количество объемов соответствующих призм

$$V_1 = \frac{h}{n} Q_1, \quad V_2 = \frac{h}{n} Q_2, \quad \dots \quad V_n = \frac{h}{n} Q_n.$$

Фрактальный объем пирамиды при этом будет

$$V^* = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{h}{n} \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (10.1)$$

Площади основания отдельных призм этой пирамиды определяются путем использования соответствующих пропорций, т.е.

$$\frac{Q_i}{Q} = \frac{\left(h - \frac{h}{n}\right)^2}{h^2}.$$

Из последнего соотношения находим эти площади

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 Q, \\ Q_2 = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 Q, \\ \dots \dots \dots \\ Q_i = \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^2 Q. \end{array} \right. \quad (10.2)$$

Подставляя значения площадей, найденных согласно выражениям (10.2) в формулу (10.1) получим фрактальный объем пирамиды

$$V^* = \frac{h}{n} Q \left[\frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right] =$$

$$= \frac{h}{n^3} Q [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] = \frac{Qh}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Если в последнем выражении положить $n \rightarrow \infty$, то получим, что фрактальный объем пирамиды V^* будет стремиться к реальному объему V пирамиды: $V^* \rightarrow V$.

Фрактальные структуры позволяют описать любые ландшафты: реки, горы, озера, равнины, облака и т.д. Поэтому нет ничего удивительного в том, что язык фракталов адекватно может описать соответствующие экономические модели.

Исследование ученых [59] показывает, что эволюция может автоматически привести простую, более или менее случайную интерактивную динамическую экономическую систему к критическому состоянию, когда имеет место самоорганизованная критичность. В случае, если данный подход к описанию экономических систем будет признан адекватным сценарием поведения экономической модели, то это будет означать, что эволюция действует на грани хаоса; в этом случае ученые смогут улучшить прогнозирование катастрофических событий.

Классические модели экономики предполагают существование очень устойчивого равновесного положения для экономики; при этом большие агрегативные флуктуации могут возникнуть только от внешних ударов, которые одновременно влияют на много разных секторов экономики одинаковым образом. Если использовать эти классические модели экономики, то будет невозможно отыскать причины таких крупномасштабных флуктуаций, как, например, депрессия США 1930 годов. В случае, если принять теорию самоорганизованной критичности как адекватную модель экономики, то более или менее перио-

дических крупномасштабных флуктуаций (в виде соответствующих лавин) можно ожидать даже в отсутствии каких-либо общих для разных секторов экономики «ударов».

Таким образом, подход ДЖ.А. Шумпетера к анализу экономических систем получил дальнейшее развитие в работах ученых, создавших новое направление – теорию самоорганизованной критичности.

В настоящее время экономические модели условно делят на два класса: иерархические или структурированные и неиерархические или слабоструктурированные. Структурированные экономические модели обычно являются циклическими моделями. Это прежде всего экономические циклы Самуэльсона – Хикса, Гудвина, Калецкого, Филлипса, Клейна и т.д. [95]. Эти экономические циклы представляют собой самоорганизующиеся системы.

Слабоструктурированные системы не расчленяются на отдельные подсистемы из которых путем их объединения можно было бы синтезировать целостную первоначальную экономическую систему. Для анализа поведения таких систем в 1928 году американские ученые математик Дж. Кобб и экономист Р. Дуглас предложили новую (к тому времени) экономическую модель. Опубликованная ими статья называлась «Теория производства» [96]. Модель производства, предложенная этими учеными была названа «неоклассической». В то время не было теории самоорганизации и поэтому никому не пришла в голову мысль, что эта модель производства представляет собой двумерную модель самоорганизующейся системы. В этой статье была предпринята попытка эмпирическим путем определить влияние величины затрачиваемого капитала и труда на объем выпускаемой продукции в обрабатывающей промышленности США. Были использованы статистические данные за период от 1899 по

1922 годы и сформулированы следующие задачи, подлежащие решению.

1. Определить класс параметрических функций, наиболее точно приближающий количественные соотношения между тремя выбранными характеристиками производственной деятельности.
2. Найти числовые параметры, задающие конкретную функцию этого класса.
3. Сравнить результаты, получаемые как значения функций с фактическими данными.

Дж. Коббом была предложена функция вида $Y = AK^\alpha L^\beta$, где Y – объем выпущенной продукции, K – объем основного капитала, L – затраты труда, A, α, β – постоянные параметры. Ранее накладывались ограничения $A > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$.

На основании численных данных была составлена система алгебраических уравнений

$$\ln Y_t = \ln A + \alpha \ln K_t + \beta \ln L_t, \quad 1899 \leq t \leq 1922,$$

где Y_t, K_t, L_t – фактические значения соответствующих величин в год t .

Методом наименьших квадратов отыскивались значения A, α, β , минимизирующие выражение

$$\sum_{t=189}^{1922} (\ln Y_t - \ln A - \alpha \ln K_t - \beta \ln L_t)^2.$$

В результате решения этой системы уравнений были получены следующие значения искомых параметров: $A = 1,01, \alpha = 0,25, \beta = 0,75$.

Сравнение величин $Y(A, K_t, L_t)$ с фактическими значениями Y_t показало, что полученная зависимость дает хорошее приближение к действительности.

Нетрудно обобщить производственную функцию Кобба – Дугласа на функцию вида

$$Y = A(t)K^\alpha L^\beta E^\gamma M^\eta,$$

где E – энергия, M – материалы, а γ и η соответствующие параметры, подлежащие нахождению.

Содержательная интерпретация производства любого продукта требует участия четырех факторов: труда, основных фондов, энергии, материалов.

§10.2. Производственная функция Кобба–Дугласа (ПФКД) и ее свойства

При построении производственных функций следует иметь в виду, что затраты факторов производства на выпуск продукции всегда неотрицательны. Следует учесть, что при моделировании производственных функций отсутствие одного из факторов производства приводит к нулевому выпуску продукции. Полагают также, что факторы производства изменяются непрерывно, а выпуск продукции изменяется достаточно гладко при изменении факторов производства. Следует также отметить, что производственная функция Кобба – Дугласа используется при моделировании экономики как на макроуровне, так и на микроуровне.

С экономической точки зрения целесообразно, чтобы при увеличении количества используемого ресурса выпуск продукции рос, что для дифференцируемой производственной функции означает выполнение следующих неравенств:

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0,$$

где

$$Y = F(K, L) = AK^\alpha L^\beta. \quad (10.3)$$

Производственная функция Кобба–Дугласа дает возможность отразить эффект масштаба производства, который существует только при одновременном изменении факторов K и L . Пусть эти факторы изменяются в λ раз. Тогда

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\alpha+\beta} F(K, L), \quad (10.4)$$

что эквивалентно

$$Y(\lambda) = \lambda^{\alpha+\beta} Y. \quad (10.4a)$$

В этом случае имеем:

- 1) если $\alpha + \beta > 1$, то имеет место интенсивный способ развития производства, т.е. с ростом масштаба производства в λ раз выпуск продукции возрастает более чем в λ раз;
- 2) если $\alpha + \beta < 1$, то рост масштаба производства отрицательно сказывается на выпуске продукции, т.е. при росте затрат в λ раз выпуск продукции растет менее чем в λ раз;
- 3) если $\alpha + \beta = 1$, то происходит экстенсивный рост экономики только за счет факторов производства.

Длительные наблюдения показывают, что в условиях чисто экстенсивного производства увеличение затрат только одного из факторов производства приводит к снижению эффективности его использования, т.е.

$$\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0,$$

Это означает, что каждая последующая единица возрастающего фактора соединяется с меньшим количеством другого фактора и его рост дает уменьшающийся прирост продукции.

Для экстенсивного способа развития производства характерно выполнение следующих соотношений

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \infty, \quad \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty,$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = 0, \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0.$$

Производственная функция Кобба–Дугласа является моделью экстенсивного способа функционирования экономики, т.е. для этой модели выполняется выражение

$$\alpha + \beta = 1, \quad (10.5)$$

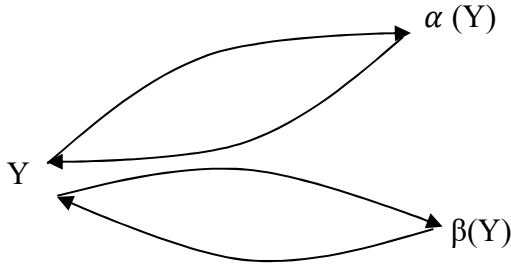
где α – коэффициент эластичности выпуска продукции по производственным фондам, а β – коэффициент эластичности выпуска продукции по труду. Под эластичностью производственной функции по фактору (фонду, труду и т.д.) понимается отношение относительного прироста функции к относительному приросту фактора. Эластичность численно равна числу процентов, на которое изменится выпуск продукции при изменении фактора на 1%. Коэффициенты эластичности можно определить как отношение предельной эффективности функции по фактору к средней эффективности:

$$\alpha = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} / \frac{F(K, L)}{K} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} / \frac{F(K, L)}{L}.$$

Последние выражения могут быть представлены как производные от логарифмических функций умноженные на значения основных фондов K и трудовых ресурсов L , т.е.

$$\alpha = K(\ln F)'_K, \quad \beta = L(\ln F)'_L. \quad (10.3a)$$

Эти выражения показывают, что ПФКД обладает самоорганизующимся свойством; схематически производственную функцию (10.3) можно представить в виде двух циклов, зависящих от параметров α и β , которые в свою очередь зависят от производственной функции Y (10.3):



Цикличность является прямым свидетельством самоорганизации.

Важной характеристикой производственной функции является эластичность замены ресурсов σ , поскольку она является постоянной величиной во многих экономических моделях. Эластичность замены ресурсов показывает, насколько процентов изменится капиталовооруженность $k = K/L$ при изменении предельной нормы замещения $s^* = \frac{dK}{dL}$ (предельной капиталовооруженности) на 1% при неизменном выпуске продукции:

$$\sigma = \left. \frac{d \ln k}{d \ln s^*} \right|_{F = \text{const}}$$

Предельная норма замещения s^* определяется из уравнения изокванты (линия равного выпуска продукции):

$$dY = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} dK + \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} dL \equiv 0.$$

Из этого выражения следует соотношение

$$s^* = \frac{dK}{dL} = - \frac{\frac{\partial F(K, L)}{\partial L}}{\frac{\partial F(K, L)}{\partial K}}$$

где $\partial F(K, L)/\partial L$ – предельная эластичность по труду, а $\partial F(K, L)/\partial K$ – предельная эластичность по основным производственным фондам. Эластичность замены ресурсов σ для функции Кобба – Дугласа равна

$$\sigma = \frac{d \ln k}{d \ln s} = 1,$$

поскольку для нее предельная норма замещения

$$s^* = \frac{1 - \alpha k}{\alpha},$$

где $k = K/L$.

§10.3. Самоорганизующаяся экономическая система: производство – предложение – выручка – производство

В §10.1 было отмечено, что экономические системы по своей природе являются самоорганизующимися. В подтверждение этой мысли достаточно привести высказывания редакторов перевода [97] книги Занга [52]: «Не боясь ошибиться, можно утверждать, что любой раздел экономической науки может быть отнесен к области приложения синергетики (т.е. к теории самоорганизации; *автор*), поскольку при рассмотрении любого динамического экономического процесса всегда присутствует в качестве действующего фактора некоторый активный, т.е. осуществляющий обратную связь, элемент».

В настоящем параграфе приводятся математические модели функционирования самоорганизующейся экономической системы: производство – предложение – выручка – производство. Блок-схема функционирования этой замкнутой системы показана на Рис. 10.1.

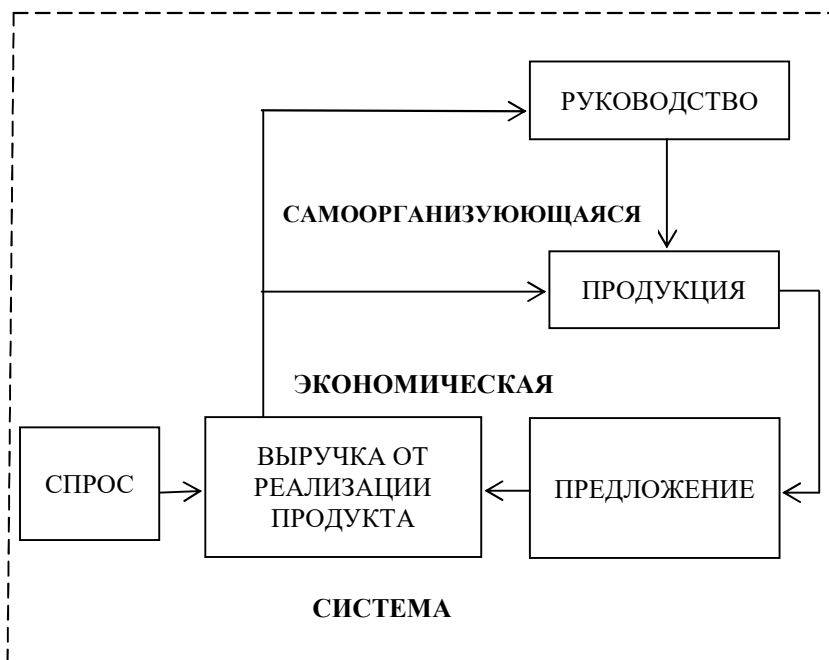


Рис. 10.1

10.3.1. Математическая модель выпуска продукции, построенная с учетом статистических характеристик экономического объекта

Полученные экономические данные представляют собой количественные характеристики каких-либо экономических объектов. Они формируются под действием множества факторов, не все из которых поддаются внешнему контролю. Неконтролируемые факторы обычно принимают случайные значения и тем самым обуславливают случайность полученных данных. Стохастичность экономических данных требует применения адекватных им стохастических методов анализа и идентификации

(определения параметров). В настоящее время считается предпочтительным обрабатывать экономические данные, являющиеся априори отфильтрованными от случайных показателей. Подтверждающим примером служит производственная функция Кобба – Дугласа (ПФКД):

$$Y = AK^\alpha L^\beta. \quad (10.6)$$

После логарифмирования ПФКД (10.6) получим

$$V \equiv \ln Y = \ln Y + \alpha \ln K + \beta \ln L. \quad (10.7)$$

При оценивании ПФКД статистические ряды переменных Y_t, K_t, L_t , считаются известными. ПФКД может быть оценена с помощью линейной или нелинейной регрессии. Нас будет интересовать оценка прологарифмированной ПФКД (10.6) получаемая с помощью множественной линейной регрессии:

$$V^* = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2. \quad (10.8)$$

Среднеквадратическая оценка выражения (10.7) с помощью полинома (10.8) при критерии оптимальности

$$J_{min} = \sum [V - V^*]^2 = \min \quad (10.9)$$

запишется так

$$\sum [V - (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2)]^2 = \min \quad (10.10)$$

Дифференцируя критерий (10.10) по параметрам a_0, a_1 , и a_2 и приравнявая каждое из полученных выражений нулю, получим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 \sum_j x_{1j}^2 + a_2 \sum_j x_{1j} x_{2j} + a_0 \sum_j x_{1j} = \sum_j x_{1j} V_j, \\ a_1 \sum_j x_{1j} x_{2j} + a_2 \sum_j x_{2j}^2 + a_0 \sum_j x_{2j} = \sum_j x_{2j} V_j, \\ a_1 \sum_j x_{1j} + a_2 \sum_j x_{2j} + m a_0 = \sum_j V_j, \end{cases} \quad (10.11)$$

Рассмотрим конкретный пример, на котором покажем возможность учета случайной величины ξ при синтезе ПФКД.

Пример 10.1. Необходимо оценить параметры a_0 , a_1 и a_2 экономической модели (10.12) для которой статистические данные приведены в таблице 10.1.

Таблица 10.1

Номер измерений j	V_j^*	x_{1j}	x_{2j}
1	-1	1	2
2	3	1	0
3	-1	2	2
4	2	0	-2
5	3	0	-3
6	-3	-1	2
7	0	1	0
8	1	1	0
9	2	-2	2
$m = 10$	0	-3	-2

В этом примере положено $x_1 \equiv K$, $x_2 \equiv L$.

Поскольку мы принимаем $E(\xi)=0$, то система нормальных уравнений (10.11) остается прежней. С учетом того, что

$$\begin{aligned} \sum_j x_{1j} &= 0, & \sum_j x_{2j} &= 1, & \sum_j V_j^* &= 2, & \sum_j x_{1j}^2 &= 22, \\ \sum_j x_{1j}^2 &= 33, & \sum_j x_{1j}x_{2j} &= 6, & \sum_j x_{1j}V_j^* &= 8, \\ \sum_j x_{2j}V_j^* &= -27, \end{aligned}$$

получим следующую систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} 22a_1 + 6a_2 = 8, \\ 6a_1 + 33a_2 + a_0 = -27, \\ a_2 + 10a_0 = 2. \end{cases}$$

Решением данной системы находим:

$$a_0 = \frac{1926}{6878} \approx 0,280; \quad a_1 = \frac{1000}{6878} \approx 0,145;$$

$$a_2 = \frac{-6464}{6878} \approx -0,940.$$

Для нахождения дисперсии коэффициентов a_0^* , a_1^* и a_2^* нам понадобится следующая теорема из математической статистики.

Теорема. Пусть M матрица коэффициентов при неизвестных параметрах a_0, a_1, \dots, a_n системы нормальных линейных уравнений, а M^{-1} – обратная относительно M матрица этих коэффициентов. Дисперсия $\sigma^2(a_i^*)$ оценки $a_i^* (i = 1, 2, \dots, n)$ полученной методом наименьших квадратов, равна элементу, находящемуся на пересечении r -ой строки и s -ого столбца матрицы M^{-1} умноженному на σ^2 , т.е. на дисперсию случайной составляющей ζ . Дисперсия оценки a_0^* равна элементу, находящемуся на пересечении последней строки и последнего столбца матрицы M^{-1} , умноженному на σ^2 .

Следует отметить, что дисперсия σ^2 случайной составляющей ζ находится из выражения

$$\sigma^2 = \frac{1}{m - n - 1} \sum_{j=1}^m \left(V_j^* - \sum_{i=1}^n a_i x_{ij} - a_0 \right)^2, \quad (10.16)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n – корни системы нормальных уравнений (10.11) при ее обобщении на случай n уравнений. В нашем случае имеем ($i = 0, 1, 2$):

$$a_0 \approx 0,280, \quad a_1 \approx 0,145, \quad a_2 \approx -0,940.$$

Для данного примера модель (10.12) запишется в виде

$$V^* = 0,280 + 0,145x_1 - 0,940x_2 + \zeta. \quad (10.17)$$

С учетом полученных значений, обратная матрица M^{-1} примет вид

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{329}{6878} & -\frac{60}{6878} & -\frac{6}{6878} \\ -\frac{60}{6878} & \frac{220}{6878} & -\frac{22}{6878} \\ -\frac{6}{6878} & -\frac{22}{6878} & \frac{690}{6878} \end{vmatrix}.$$

На основании вышесказанного имеем следующие оценки для найденных параметров.

$$\sigma_0^2(a_0^*) = \frac{690}{6878} \sigma^2, \quad \sigma_1^2(a_1^*) = \frac{329}{6878} \sigma^2, \\ \sigma_2^2(a_2^*) = \frac{220}{6878} \sigma^2.$$

Несмешанную оценку дисперсии σ^2 случайной составляющей ζ , фигурирующей в модели (10.17) определим по формуле (10.16); она равна $\sigma^2 = 1,0191$. Поэтому, дисперсии отдельных параметров равны: $\sigma_0^2(a_0^*) \approx 0,1022$; $\sigma_1^2(a_1^*) \approx 0,0487$; $\sigma_2^2(a_2^*) = 0,0325$.

Выражение для дисперсии каждого из параметров a_0^* , a_1^* и a_2^* имеет вид:

$$\sigma_i^2(a_i) = [a_i(j) - a_i^*(j)]^2, \quad i = 0,1,2.$$

Из этого выражения нетрудно определить текущее значение $a_i^*(j)$ параметра:

$$a_i^*(j) = a_i(j) \pm \sigma_i(a_i).$$

Для нашего примера получим следующие значения областей изменения параметров:

$$\begin{cases} A = e^{a_0^*(j)}, & a_0^*(j) = 280 \pm 0,1022, \\ \alpha = a_1^*(j) = 0,145 \pm 0,0487, \\ \beta = a_2^*(j) = -0,940 \pm 0,0325. \end{cases} \quad (10.18)$$

Зная область изменения параметров (10.18) легко восстановить теоретическую линию функциональный регрессии ПФКД путем потенцирования (10.7):

$$Y(A, \alpha, \beta) = \left(1,3231 \pm \begin{matrix} 0,1592 \\ 0,1259 \end{matrix}\right) \cdot K^{0,145 \pm 0,0487} \cdot L^{-0,940 \pm 0,0325} .$$

(10.19)

Следовательно, ПФКД (10.19), записанная с учетом статистических характеристик (дисперсий) параметров, зависит от областей изменения этих параметров (A, α, β) , вызванных их случайным разбросом, обусловленным статистической природой экономических данных.

Таким образом, вышеприведенный подход к определению ПФКД позволяет учитывать область *нечувствительности* при нахождении объема выпускаемой продукции. Следовательно, функция блока «Продукция» на Рис. 10.1, полностью идентифицирована на основе материала настоящего раздела.

10.3.2. Модель «спрос – предложение»

Обратимся теперь к определению функции блока «спрос – предложение», приведенного на Рис. 10.1, согласно подходу, изложенному в [100].

Хорошо известны разностные паутинообразные модели «спрос – предложение» [95]. Ниже предлагается моделирование системы «спрос – предложение» осуществить путем использования системы дифференциальных уравнений.

Введем следующие обозначения:

$x(p) \equiv S(p)$ – предложение,

$y(p) \equiv D(p)$ – спрос,

p – цена товара.

Для этих обозначений запишем следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dp} = ax - \frac{b}{y}, & x(p_0) = x_0, \\ \frac{dy}{dp} = cy - \frac{d}{x}, & y(p_0) = y_0, \\ p_0 > 0, & y_0 > x_0 \end{cases} \quad (10.20)$$

Постоянные, (т.е. независящие от цены товара p) параметры a , b , c , d положительны, а начальные условия x_0 и y_0 заданы. Эти параметры определяются следующим образом.

a – относительное количество единиц предлагаемой продукции, находится путем использования ПФКД как отношение общего количества продукции Y к числу занятых на производстве рабочих L :

$$a = Y/L = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = Ak^\alpha,$$

k – капиталовооруженность производства $k = \frac{K}{L}$. Параметр a зависит от момента реализации продукции t , а также от коэффициента A , учитывающего технический прогресс; в этом случае коэффициент A зависит от текущего времени t и мы имеем $A \equiv A(t)$. С учетом коэффициента $A(t)$, зависящего от момента реализации продукции, определение капиталовооруженности k и, следовательно, параметра a , дано в следующем разделе 10.3.3.

b – учитывает следующие факторы: давление потребителя товара на производителя путем приобретения покупателем аналогичных товаров у других производителей с соответствующей рекламой A , имеющих высокое качество Q , высокую надежность R , хорошие дизайнерские показатели E , более низкую цену F . Таким образом, коэффициент b представляет собой относительную совокупность перечисленных факторов, взятых с соответствующими весами γ_i , присваиваемыми экспертами:

$$b = \frac{\gamma_1 \Lambda + \gamma_2 Q + \gamma_3 R + \gamma_4 \Xi + \gamma_5 F}{\Lambda + Q + R + \Xi + F},$$

где $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 = 1$.

Из сказанного следует, что коэффициент b находится в следующих пределах $0 < b < 1$.

c – относительный спрос на товар, определяемый как отношение потребности N в данной продукции, проведенного маркетингового опроса, ко всему опрошенному населению

$$H : c = \frac{N}{H}.$$

d – учитывает следующие факторы: давление производителя товара на его потребителя путем создания эффективной рекламы Λ^* , улучшением качества Q^* и надежности R^* , улучшением дизайнерских показателей Ξ^* , снижением цены товара F^* . Следовательно, коэффициент d представляет собой относительную совокупность перечисленных факторов, взятых с соответствующими весами η_i , присваиваемыми экспертами:

$$d = \frac{\eta_1 \Lambda^* + \eta_2 Q^* + \eta_3 R^* + \eta_4 \Xi^* + \eta_5 F^*}{\Lambda^* + Q^* + R^* + \Xi^* + F^*},$$

где $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 = 1$;

поэтому из вышеприведенного материала следует, что коэффициент d находится в пределах $0 < d < 1$.

В дальнейшем нас будет интересовать следующее решение уравнения (10.20) [58]:

$$\frac{y^a}{x^c} = W^{a+c} \left| 1 + \frac{M}{xy} \right|^{\frac{1}{M} \frac{ad-b}{a+c}}, \quad (10.21)$$

где $M = \frac{b+d}{a+c}$, а коэффициент W зависит от параметров a, b, c, d

и начальных состояний x_0 и y_0 .

Для дальнейшего изложения представляет интерес предельное решение системы (10.20), т.е. такое, при котором

$$\lim_{p \rightarrow \infty} y(p) \rightarrow 0, \quad (10.22)$$

где $y(p) = y_0 e^{-\frac{p}{T}}$.

В пределе, когда выполняется условие (10.22), соотношение (10.21) должно превратиться в нулевое тождество, а для этого необходимо, чтобы имело место равенство

$$1 + \frac{M}{xy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{x} = \frac{yd(a+c)}{b+d}. \quad (10.23)$$

Если во втором уравнении системы (10.20) принять во внимание соотношение (10.23), то получим

$$\frac{dy}{dp} = -T^{-1}y, \quad (10.24)$$

где $T^{-1} = \frac{bc-ad}{b+d}$.

Если из соотношения $1 + \frac{M}{xy} = 0$ определить $\frac{b}{y}$ и подста-

вить в первое уравнение системы (10.20), то получим

$$\frac{dx}{dp} = T^{-1}x, \quad (10.25)$$

Решение уравнения (10.24) дает убывающую функцию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} y(p) = y_0 \lim_{p \rightarrow \infty} e^{-\frac{p}{T}} \rightarrow 0, \quad (10.26)$$

а решение уравнения (10.25) дает возрастающую функцию

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x(p) = x_0 \lim_{p \rightarrow \infty} e^{\frac{p}{T}} \rightarrow \infty, \quad (10.27)$$

Для того, чтобы функция (10.26) убывала, а функция (10.27) возрастала, необходимо, чтобы постоянный параметр цены T имел бы положительный знак, т.е. $bc-ad > 0$. Таким образом, в случае рассмотренного решения системы (10.20) мы получим совокупность двух линейных уравнений (10.24) и (10.25), несвязанных друг с другом переменными, но связанных между собой параметром T . В этой системе переменная $y(p)$

описывает спрос, а переменная $x(p)$ – предложение. Графически общий вид этих кривых показан на Рис. 10.2.

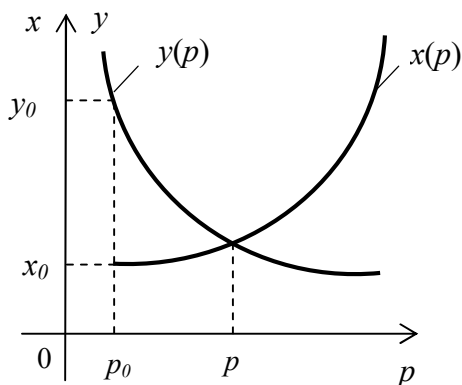


Рис. 10.2

Приемлемая для покупателя и продавца цена p товара находится из условия равновесия

$$y_0 e^{-\frac{p}{T}} = x_0 e^{\frac{p}{T}}.$$

Из последнего выражения находим приемлемую цену

$$p = \frac{T}{2} \ln \left(\frac{y_0}{x_0} \right).$$

Выручка, полученная от реализации продукции расходуется на: прирост основных производственных фондов, производственное потребление, т.е. на восстановление рабочей силы, амортизационные отчисления, содержание управляющего аппарата и т.д.

Следовательно, благодаря расходу выручки, полученной от реализации продукции, происходит замыкание цикла: производство – предложение – выручка – производство; в результате имеем самоорганизующуюся, т.е. замкнутую экономическую систему, показанную на Рис. 10.1.

Пусть Φ объем однотипной продукции выпускаемой производством. Тогда общий доход Ψ от продукции, цена которой p будет

$$\Psi(p) = \Phi p.$$

Если, согласно выбранному критерию, выпуск продукции, имеющей доход $\Psi(p)$, выгоден, то производство продолжает функционировать, если же выпуск продукции невыгоден, то производство либо прекращает функционирование, либо переключается на выпуск другой, выгодной для производства, продукции; переключение на выпуск другой продукции (на языке самоорганизации) означает бифуркацию производства.

10.3.3. Определение магистрали экономики при использовании модели ПФКД

Экономика в каждый момент времени t характеризуется набором следующих переменных: Y, X, C, K, L, I , где Y – выпуск продукции, X – выпуск конечного продукта, C – непроемственное потребление, I – валовые капитальные вложения, K – объем основных производственных фондов, L – трудовые ресурсы.

Эти переменные взаимосвязаны. В каждый момент времени имеет место условие баланса

$$Y = \alpha Y + X, \tag{10.28}$$

где $0 < \alpha < 1$.

Конечный продукт X распределяется на валовые капитальные вложения I и непроемственное потребление C :

$$X = I + C, \tag{10.29}$$

причем валовые капитальные вложения расходуются на прирост основных производственных фондов и их восстановление за счет амортизационных отчислений:

$$I = \dot{K} + \mu K, \quad (10.30)$$

где μ – коэффициент амортизации.

С учетом (10.28) и (10.29) уравнение (10.30) примет вид

$$\dot{K} = (1 - \varepsilon)(1 - u)Y - \mu K, \quad (10.31)$$

где $u = C/X$ – доля непродуцированного потребления

$$0 \leq u \leq 1. \quad (10.32)$$

Перейдем теперь к относительным величинам: $k=K/L$ – капиталовооруженность, $c=C/L$ – среднедушевое потребление, $y=Y/L$ – производительность труда.

Поскольку $K = kL$, $Y = yL$, то уравнение (10.31) примет вид

$$(kL)'_t = (1 - \varepsilon)(1 - u)yL - \mu kL. \quad (10.32)$$

Если учесть, что $\dot{K} = (kL)'_t = \dot{k}L + k\dot{L}$, а также то, что прирост трудовых ресурсов осуществляется с постоянным темпом $\dot{L} = nL$, будем иметь

$$(kL)'_t = (\dot{k} + kn)L. \quad (10.33)$$

С учетом (10.33), уравнение (10.32) запишется в виде

$$\dot{k}(t) = (1 - \varepsilon)(1 - u)y - (\mu + n)k(t). \quad (10.34)$$

Ограничение на производительность труда y имеет вид

$$0 < y = f(k, t), \quad (10.35)$$

где

$$f(k, t) = \frac{1}{L}F(K, L, t).$$

Решая (10.34) относительно y получим

$$y = f(k, t) = Y(k, t) = \frac{\dot{k}(t) + (\mu + n)k(t)}{(1 - \varepsilon)(1 - u)}. \quad (10.36)$$

Будем искать решение уравнения (10.34) для случая функции Кобба–Дугласа вида

$$y = f(k, t) = A_0 e^{\rho t} k^\alpha. \quad (10.36a)$$

С учетом выражения (10.36) в уравнении (10.34) получим

$$\dot{k} = (1 - \varepsilon)(1 - u)A_0 e^{\rho t} k^\alpha - (\mu + n)k. \quad (10.37)$$

Введем обозначение $\lambda = \mu + n$, тогда уравнение (10.37) запишется в виде

$$\dot{k} + \lambda k = A_0(1 - \varkappa)(1 - u)e^{\rho t} k^\alpha. \quad (10.38)$$

Выражение (10.38) является уравнением Бернулли. Для его решения вводится обозначение

$$z = k^\beta,$$

где $\beta = 1 - \alpha$.

Из этого обозначения следует

$$\dot{k} = \frac{k^\alpha}{1 - \alpha} \dot{z}. \quad (10.39)$$

С учетом (10.39) в (10.38) получим

$$(1 - \alpha)^{-1} k^\alpha \dot{z} + \lambda k = A_0(1 - \varkappa)(1 - u)e^{\rho t} k^\alpha.$$

Делением обеих частей последнего уравнения на k^α будем иметь линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(1 - \alpha)^{-1} \dot{z} + \lambda z = A_0(1 - \varkappa)(1 - u)e^{\rho t}. \quad (10.40)$$

Решение уравнения (10.40) равно сумме общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения z_{gs} и частного решения неоднородного уравнения z_{pn} :

$$z = z_{gs} + z_{pn}. \quad (10.41)$$

Для отыскания решения линейного однородного уравнения

$$(1 - \alpha)^{-1} \dot{z} + \lambda z = 0 \quad (10.42)$$

найдем корень q характеристического уравнения

$$(1 - \alpha)^{-1} q + \lambda = 0.$$

Тогда общее решение линейного однородного уравнения (10.42) примет вид

$$z_{gs} = C_j^* e^{-\lambda \beta t}, \quad j = 0, 1. \quad (10.43)$$

Постоянная C_j^* зависит от граничных условий.

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения

авнения ищем в виде правой части (10.4):

$$z_{pn} = B e^{\rho t}, \quad (10.44)$$

где B – неопределенный коэффициент, подлежащий определению.

Найдем производную от выражения (10.44) по времени t

$$\dot{z}_{pn}(t) = B \rho e^{\rho t}.$$

Подстановка $\dot{z}_{pn}(t)$ и $z_{pn}(t)$ в уравнение (10.40) позволяет найти неопределенный коэффициент

$$B = \frac{A_0(1 - \alpha)(1 - u)}{\rho/\beta + \lambda}. \quad (10.45)$$

Учет коэффициента (10.45) в выражении (10.44) дает возможность окончательно определить решение неоднородного дифференциального уравнения (10.40), согласно выражению (10.41)

$$z(t) = C_j^* e^{-\lambda \beta t} + \frac{A_0(1 - \alpha)(1 - u)}{\rho/\beta + \lambda} e^{\rho t}. \quad (10.46)$$

Поскольку $z = \frac{1}{k^{\alpha-1}} k^\beta$, т.е. $k = z^{1/\beta}$, то общее решение

уравнения (10.38) будет иметь вид

$$k(t) = \left[C_j^* e^{-\lambda \beta t} + \frac{A_0(1 - \alpha)(1 - u)}{\frac{\rho}{\beta} + \lambda} e^{\rho t} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad j = 0, 1. \quad (10.47)$$

Зная коэффициент $k(t)$, согласно формуле (10.36), можно определить производительность труда. Найденное решение $k(t)$ называется магистралью данной динамической модели экономики [101].

Как уже отмечалось в разделе 10.3.2, коэффициент $a(t)$ в модели «спрос – предложение» (10.20) определяется следующим образом

$$a(t) = A(t)k^\alpha, \quad (10.48)$$

где $A(t) = A_0 e^{\rho t}$.

С учетом формулы (10.47) коэффициент a , определяемый согласно (10.48), будет равен

$$a(t) = A_0 e^{\rho t} \left[C_j^* e^{-\lambda \beta t} + \frac{A_0(1-\varkappa)(1-u)}{\rho/\beta + \lambda} e^{\rho t} \right]^{\alpha/\beta}, \quad (10.49)$$

$$j = 0, 1.$$

Введем функцию $\psi_{ij}(i = 1, 2; j = 0, 1)$, которая представляет границы некоторой допустимой области G , а ее значения получаются как частные решения дифференциального уравнения (10.38) при замене u на граничные значения $u_i (i = 0, 1)$ и выборе $C_j^* (j = 1, 2)$, в зависимости от граничного условия. Поэтому будем иметь

$$\psi_{ij}(C_j^*, u_i, t) = \left[C_j^* e^{-\lambda \beta t} + \frac{A_0(1-\varkappa)(1-u_i)}{\frac{\rho}{\beta} + \lambda} e^{\rho t} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad (10.50)$$

$$i = 1, 2; j = 0, 1.$$

Найдем интегральные константы $C_j^* (j = 0, 1)$, в зависимости от граничных условий.

Поскольку

$$k_0 = k(0) = \psi_{i0}(C_j^*, u_i, 0) = \left[C_0^* + \frac{A_0(1-\varkappa)(1-u_i)}{\rho/\beta + \lambda} \right]^{1/\beta},$$

то

$$C_0^* = k_0^\beta - \frac{A_0(1-\varkappa)(1-u_i)}{\rho/\beta + \lambda}. \quad (10.51)$$

Аналогично определим C_1^* из граничного условия

$$\begin{aligned} k_1 = k(T^*) &= \psi_{i1}(C_1^*, u_i, T^*) = \\ &= \left[C_1^* e^{-\lambda \beta T^*} + \frac{A_0(1-\varkappa)(1-u_i)}{\rho/\beta + \lambda} e^{\rho T^*} \right]^{1/\beta} \end{aligned}$$

Из последнего выражения имеем

$$C_1^* = \left[k_1^\beta - \frac{A_0(1-\alpha)(1-u_i)}{\rho/\beta + \lambda} e^{\rho T} \right] e^{\lambda \beta} \cdot \quad (10.52)$$

Используя (10.51) и (10.52) можно найти точки переключения.

Обозначим через t_{ij} ($i = 1, 2; j = 0, 1$) точки пересечения границ ψ_{ij} с магистралью $k(t)$. Моменты переключения $t_{ij} = \tau_{ij}$ получим из равенства

$$k(t_{ij}) = \psi_{ij}(C_j^*, u_i, t).$$

Наконец, зная $k(t)$, согласно формуле (10.47) можно определить производительность труда по выражению (10.36a).

Из выражения (10.49) видно, что коэффициент a модели (10.20) «спрос – предложение» зависит от текущего времени t . Поскольку цена товара p зависит от постоянной T и, следовательно, от $a(t)$, то эта цена также будет зависеть от текущего времени. Из приведенной модели экономики следует, что микроэкономика также будет нестационарной.

Поскольку вся интерактивная экономическая система состоит из совокупности взаимодействующих микроэкономических систем, то она также будет нестационарной, эволюционирующей от одного метастабильного состояния к другому и никогда не достигающая равновесного состояния.

Краткие комментарии к десятой главе

Определено место экономической теорий, предложенной Дж.А Шумпетером, как одной из проблем теории самоорганизованной критичности.

Для самоорганизующейся экономической системы, имеющей замкнутый цикл: производство – предложение – выручка – производство, предлагается математическая модель выпуска продукции, учитывающая статистические характеристики экономического объекта.

Предлагается новая модель «спрос – предложение», связанная с функционированием производства. Показано, что параметр $a(t)$ модели «спрос – предложение» зависит от магистрали экономической системы, построенной на основе использования производственной функции Кобба – Дугласа.

ГЛАВА 11

Организующиеся и самоорганизующиеся процессы в добиологических и биологических системах

Возникновение биологических существ на Земле отражает процесс эволюции нашей планеты. Считается, что после Большого Взрыва прошло, примерно, шесть миллиардов лет, пока на Земле появился «первичный бульон». Длительность «первичного бульона» составляет, примерно, около одного миллиарда лет. В начальной стадии «первичный бульон» не считается местом появления биологических существ. В начале, по-видимому, имелся молекулярный хаос, и в гигантском многообразии химических соединений не было никакой функциональной организации между составляющими веществами «первичного бульона». Следовательно, *самоорганизация живой материи*, которую связывают с возникновением жизни [29], *должна была начаться со случайных событий*, т.е. с отсутствия функциональной организации, а не с отсутствия физических (т.е. атомных, молекулярных или надмолекулярных) структур. В работе [102] дается качественная модель добиологической эволюции; эта работа созвучна в идейном смысле с монографией [32] Эйгена. В работе [102] обосновывается, что случайное возникновение небольших макромолекул РНК, могло привести к возникновению жизни в обозримые сроки.

В эволюционном процессе возникновения жизни выделяют следующие стадии.

1. Образование «первичного бульона».
2. Образование белково-нуклеотидных комплексов, способных к самовоспроизведению.
3. Образование единого кода в результате отбора.

4. Образование различных видов живых существ на основе единого кода.

Следует отметить, что начальная стадия первичного бульона еще никак не может считаться живой материей. Вторая стадия является промежуточной при переходе от неживой материи к живой. В монографии Эйгена [32] синтезируются самовоспроизводящиеся макромолекулы, имеющие место при переходе от «неживого» к «живому». Общеизвестно, как трудно определить понятие «живого», поскольку переход между живым и неживым *не резкий*. Примером могут служить вирусы, которые принадлежат как к живой, так и к неживой материи.

С термодинамической позиции первичный бульон являлся существенно неравновесной системой: в нем имелись богатые свободной энергией химические соединения, градиенты температур и концентраций; в нем происходило периодическое изменение внешних и внутренних условий. Внешними условиями являлись: изменение солнечной активности, падение крупных метеоритов, астероидов и крупных комет; внутренними условиями могли быть: извержения вулканов и частые землетрясения. Автоколебательные процессы вызывались циркадными и годовыми ритмами.

В первичном бульоне находились образованные химическим путем все основные элементы, содержащиеся в современной биосфере планеты: нуклеотиды, аминокислоты, липиды и сахара. Следовательно, уже в первичном бульоне имелись полинуклеотиды, потенциально способные к комплементарному самовоспроизведению, а также нуклеотиды, аминокислоты и случайно образованные полипептиды. Таким образом, в первичном бульоне присутствовали все необходимые ингредиенты, образующие живую материю.

§11.1. Организующиеся процессы в белково-нуклеотидном комплексе

Обратимся к уравнению (1.66) (Глава 1). В этом уравнении $x_i(t)$ означает концентрацию i -ого экземпляра (вида). Эта концентрация зависит от текущего времени. Мы будем рассматривать уравнение (1.66) в дискретные (мгновенные) значения времени $t=t_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$). В этом случае уравнение (1.66) будет иметь постоянный коэффициент R_{2i} в соответствующие мгновенные моменты времени t_{α_i} ($\alpha_i = 1, 2, \dots$); при этом уравнение (1.66) запишется в следующем виде

$$\dot{x}_i = R_{1i}x_i - R_{2i}(t_{\alpha_i})x_i^2. \quad (11.1)$$

Перепишем уравнение (11.1) в виде

$$\dot{x}_i = R_{2i}(t_{\alpha_i})x_i[r_i - x_i], \quad (11.2)$$

где $r_i = R_{1i}/R_{2i}(t_{\alpha_i})$.

Решение уравнения (11.2) в мгновенные моменты времени t_{α_i} ($\alpha_i = 1, 2, \dots$) имеет вид

$$x_i = \frac{r_i}{1 + e^{-R_{2i}r_i(t-t_0)}}, \quad (11.3)$$

где t_0 совпадает с моментом максимальной скорости изменения концентрации [90].

Из выражения (11.3) можно найти скорость изменения концентрации

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{4}r_i^2R_{2i}sech^2\left[\frac{1}{2}r_iR_{2i}(t-t_0)\right].$$

Если в последнем выражении учесть очевидное равенство $R_{1i} = rR_{2i}$, то получим

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{4}r_i^2R_{1i}sech^2\left[\frac{1}{2}R_{1i}(t-t_0)\right]. \quad (11.4)$$

Уравнение (11.4) может быть также записано в виде

$$S(t_{\alpha_i}) \equiv \frac{dx_i}{dt} = G(t_{\alpha_i}) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} R_{1i} (t - t_0) \right], \quad (11.5)$$

где

$$G(t_{\alpha_i}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{R_{1i}}{R_{2i}(t_{\alpha_i})}. \quad (11.5a)$$

Если в обозначении (1.68) учесть, что при $t \rightarrow \infty$ сумма экспонент может быть представлена ее наибольшим членом, то выражение (11.5a) (при $W_k^0 - W_i^0 > 0$) примет вид

$$G(t_{\alpha_i}) = R_{1i} \frac{nx_i^0 \exp[-(W_k^0 - W_i^0)k_0 t_{\alpha_i}]}{4k_0 \sum_{k=1}^N x_k^0 E_k}. \quad (11.5б)$$

Правая часть уравнения (11.5) представляет собой солитон, с угасающей во времени (т.е., при $t_{\alpha_i} \rightarrow \infty$) амплитудой $G(t_{\alpha_i}) \rightarrow 0$; это означает, что i -ый вид исчезает.

Для вида $i=m$ с максимальной селективной ценностью в выражении (11.5б) имеем $W_k^0 - W_m^0 < 0$ и обозначение (11.5б) примет вид

$$G(t_{\alpha_i}) = R_{1i} \frac{nx_i^0 \exp[(W_m^0 - W_k^0)k_0 t_{\alpha_i}]}{4k_0 \sum_{k=1}^N x_k^0 E_k}. \quad (11.5в)$$

Если учесть обозначение (11.5в) в уравнении (11.5), то правая часть (11.5) будет представлять солитон с амплитудой $G(t_{\alpha_i}) \rightarrow \infty$ при $t_{\alpha_i} \rightarrow \infty$. Это означает, что вид, с максимальной селективной ценностью, становится доминантным.

Учет мгновенных значений времени t_{α_i} ($\alpha_i = 1, 2, \dots$) в уравнении (11.5) позволяет получить совокупность солитонов $\{S(t_{\alpha_i})\}$, соответствующих концентрациям i -ого вида. Следовательно, для каждой концентрации i -ого вида уравнение Риккати (11.1) в мгновенные моменты времени t_{α_i} будет удовлетворять оптимизационному уравнению Эйлера – Лагранжа

$$L_{x_i}(i) - L_{tx_i}(i) - L_{x_i x'_i}(i) \cdot x'_i - L_{x'_i x'_i}(i) \cdot x''_i = 0; \quad (11.6)$$

причем, функция Лагранжа $L(i)$ должна удовлетворять функционалу

$$J_i = \int_0^{t-t_0} L(i, x_i, x'_i, t) d(t - t_0) = \text{extremum} \quad (11.6a)$$

для i -ого вида в мгновенные моменты времени t_{α_i} .

Введем обозначения:

$$\begin{cases} L(i) = G(t_{\alpha_i}) \operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)], \\ x = \operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)], \\ x' = -2\alpha \operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] \operatorname{th}[\alpha(t - t_0)], \\ x'' = -2\alpha^2 \operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] \{3\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] - 2\}, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}R_1$, $G > 0$.

При учете этих обозначений в (11.6) получим следующее уравнение

$$L_{x_i x'_i}(i) x'_i + L_{x'_i x'_i}(i) x''_i = 0. \quad (11.6б)$$

В уравнении (11.6б) имеем $L_{x_i x'_i}(i) = 0$,

$$\begin{aligned} L_{x'_i x'_i}(i) x''_i &= \\ &= G(t_{\alpha_i}) \frac{2\alpha^2 \operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] \{3\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] - 2\}}{4\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] \operatorname{th}^2[\alpha(t - t_0)]}. \end{aligned}$$

С учетом этого значения в уравнении (11.6б), при выполнении условия $\operatorname{th}^2[\alpha(t - t_0)] \neq 0$, будем иметь

$$3\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] - 2 = 0.$$

Из этого выражения следует

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] = \frac{2}{3}. \quad (11.6в)$$

При принятых обозначениях функционал (11.6a) для i -ого вида запишется, так

$$J_i = G(t_{\omega_i}) \int_0^{t-t_0} \operatorname{sech}^2[\alpha(t-t_0)] d(t-t_0) = \text{extremum}, \quad (11.6г)$$

где

$$t-t_0 = \alpha^{-1} \operatorname{Ar} \operatorname{sech} h\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha^{-1} \begin{cases} \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}-1}\right), \\ \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}-1}\right); \end{cases}$$

(см. формулу (3.128e)).

Если вторая производная от функционала (11.6з) по t будет отрицательной величиной, то экстремум (11.6г) будет максимумом; это произойдет, когда $x'' < 0$, т.е.

$$3\operatorname{sech}^2[\alpha(t-t_0)] - 2 > 0$$

или

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(t-t_0)] > \frac{2}{3}. \quad (11.6д)$$

Таким образом, при выполнении условия (11.6.д), i -ый вид будет обладать максимальной селективной ценностью

$$J_i = \frac{2}{3} G(t_{\omega_i}) \alpha^{-1} \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) = \text{max}. \quad (11.6.е)$$

Если же, вторая производная от функционала (11.6з) по t будет положительной величиной, то экстремум будет минимумом; это достигается, если имеем $x'' > 0$, т.е. $3\operatorname{sech}^2[\alpha(t-t_0)] - 2 < 0$ или

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(t-t_0)] < \frac{2}{3}. \quad (11.6ж)$$

При выполнении условия (11.6.ж) i -ый вид будет обладать минимальной селективной ценностью

$$J_i = \frac{2}{3} G(t_{\omega_i}) \alpha^{-1} \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right) = \text{min}. \quad (11.6.з)$$

Таким образом, выполнение условия (11.6д) влечет за собой выполнение неравенства $W_k^0 - W_m^0 < 0$, а это означает, что макромолекулы с максимальной селективной ценностью, согласно выражению (11.5в), будет увеличиваться в количестве.

Аналогично, при выполнении условия (11.6ж), согласно выражению (11.5б), будет иметь место неравенство $W_k^0 - W_i^0 > 0$, которое означает, что i -ый вид, имеющий минимальную селективную ценность (11.6з), будет исчезать.

Неравенства (11.6д) и (11.6ж) противоречат равенству (11.6в). Поэтому точку $2/3$ будем называть точкой *сегрегации*. В этой точке выполняется пороговое неравенство (1.57), которое в нашем случае приобретает конкретный вид

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] \leq 2/3.$$

Следовательно, если ввести некоторую положительную малую величину ε , то вместо неравенств (11.6д) и (11.6ж), будем соответственно иметь

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] = \frac{3}{2} - \varepsilon,$$

и

$$\operatorname{sech}^2[\alpha(t - t_0)] = \frac{3}{2} + \varepsilon.$$

Из этих двух противоречивых выражений следует равенство (11.6в). Это является свидетельством того, что при моделировании поведения макромолекул, согласно результатам Эйгена, необходимо вводить поток Φ (см. раздел 1.4.3, ГЛАВА 1) разбавления суммарной скорости синтеза и распада соответствующих концентраций субстрата; поток Φ выполняет те же функции, что и параметр ε .

Селективная ценность определенного вида (допустим m -ого) находится как максимум от совокупности функционалов (11.6г) от отдельных селективных ценностей каждого вида

$$\max_{J_i, \dots, J_k} \{J_i, J_j, \dots, J_m, \dots, J_k\} = J_m \quad (11.7)$$

в мгновенные моменты времени $t_{\infty i}$.

Из выражений (11.6a) и (11.7) видно, что селективная ценность вида меняется для различных мгновенных моментов времени. Однако в конце концов будет выявлен некоторый вид m с максимальной селективной ценностью; этот вид будет доминантным.

Рассмотрим процедуру селективного отбора с позиций антагонистической системы «хищник–жертва». Для этого обратимся к результатам Главы 3 (раздел 3.4.3, случай 11). Уравнению (11.1) соответствует неустойчивая антагонистическая система (3.84'''), (3.86'''):

$$\frac{dy_i^*}{dt} = a_i y_i^* - b_i y_i^* z_i^*, \quad a_i, b_i > 0, \quad (11.8)$$

$$\frac{dz_i^*}{dt} = g_i^* z_i^* - c_i y_i^* z_i^*, \quad g_i^* c_i > 0, \quad (11.9)$$

для i -ого вида в мгновенный моменты времени $t_{\infty i}$.

Пусть вид y_i имеет большую селективную ценность чем вид z_i . Обозначим через $x_i = y_i z_i$ число распавшихся макромолекул i -ого вида; тогда вместо выражения (3.87) будем иметь

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i \frac{dz_i}{dt} + z_i \frac{dy_i}{dt}. \quad (11.10)$$

С учетом уравнений (11.8) и (11.9) в выражении (11.10) для i -ого вида получим

$$\frac{dx_i}{dt} = (p_i + a_i)x_i - c_i x_i y_i - b_i x_i z_i. \quad (11.10a)$$

Поскольку, согласно (3.91), в нашем случае имеем формулу

$$z_i = \frac{1}{b_i} [a_i - (\ln x_i)'_t], \quad (11.11)$$

а также соотношение

$$y_i = x_i/z_i, \quad (11.11a)$$

то с учетом (11.11) и (11.11a) в уравнении (11.10a) (при $(\ln x_i)'_t = q_i^*$) получим уравнение Риккати (11.1) (см. ГЛАВА 3, раздел 3.4.3, случай 11):

$$\frac{dx_i^*}{dt} = (q_i^* - p_i)x_i^* - \frac{b_i c_i}{q_i^* - a_i} x_i^{*2}, \quad q_i^* \equiv q_i^* - p_i > 0, \quad (11.12)$$

где

$$R_{1i} = q_i^* - p_i, \quad R_{2i}(t_{\text{э}i}) \equiv \frac{b_i c_i}{q_i^* - a_i}, \quad \forall t_{\text{э}i}, \quad a_i - q_i^* < 0,$$

причем $q_i^* = a_i + \frac{b_i c_i}{p_i} e$.

Из рассмотрения антагонистических уравнений неустойчивой системы (11.8) и (11.9) заключаем, что под самоорганизацией (по Эйгену) понимается такой селективный отбор макромолекул, когда макромолекулы с большей селективной ценностью y_i (i -ого вида) «объедают» макромолекулы z_i с меньшей селективной ценностью. В результате этой борьбы в первичном бульоне происходит отбор макромолекул с наивысшей селективной ценностью, т.е наиболее эффективным катализом.

§11.2. Схематическая модель гиперцикла

Следует отметить, что биспирали ДНК, присутствующие в первичном бульоне, способны к комплементарному самовоспроизведению. Однако без участия белков этот процесс идет весьма медленно. Сами белки, способные катализировать самовоспроизведение ДНК (репликазы), не способны воспроизводить самих себя. В монографиях Эйгена [32,103] предложен простейший гипотетический механизм образования самовоспроизводящего белково-нуклеотидного комплекса, согласующий-

ся с физико-химическими представлениями и неопирающийся на аппарат кодирования, поскольку он в рассматриваемый момент эволюции отсутствовал. В монографии [32] была предложена модель гиперцикла, показанная на Рис. 11.1.

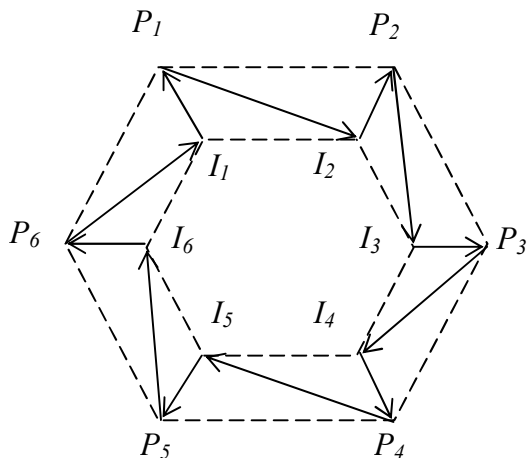


Рис. 11.1.

Согласно этой модели в первичном бульоне случайно образуется ряд белков, обозначенных на рисунке символами P_i . Каждый из этих белков катализирует синтез последующего белка. Предполагается, что ряд полинуклеотидов (обозначенных на рисунке буквой I_i) способен кодировать синтез белков P_i . В свою очередь белки способны ускорить самовоспроизведение полинуклеотидов (служить репликасами). На Рис. 11.1 гиперцикл представлен шестиугольником. Однако он может быть представлен только одной парой белка и нуклеотида или правильным многоугольником: треугольником, четырехугольником (т.е. квадратом), пятиугольником и т.д.

В монографии [104] относительно гиперцикла сказано: «*Полные аналитические решения, за исключением специальных случаев, обычно получить невозможно, так как соответствующие дифференциальные уравнения существенно нелинейные*».

Из данного высказывания следует, что построение гиперцикла путем решения соответствующих уравнений сопряжено с определенными трудностями. Поэтому ниже для построения гиперцикла предлагается использовать схематическую интерпретацию.

При схематическом изображении важна длина пути по которому происходит взаимодействие полинуклеотидов I_n с белками P_n и белков P_n с соответствующими полинуклеотидами I_{n+1} , а не тот зигзаг $I_n \rightarrow P_n \rightarrow I_{n+1}$ по которому происходит это взаимодействие (Рис. 11.2).

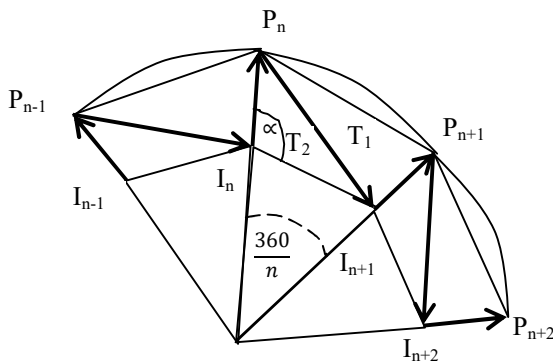


Рис. 11.2

Исходя из этого соображения длина пути $\rho = |I_n P_n| + |P_n I_{n+1}|$, изображенная на Рис. 11.2 зигзагом $I_n \rightarrow P_n \rightarrow I_{n+1}$, заменяется эквивалентной длиной пути $I_n P_n I_{n+1}$, изображенной на Рис. 11.3 стороной T правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R .

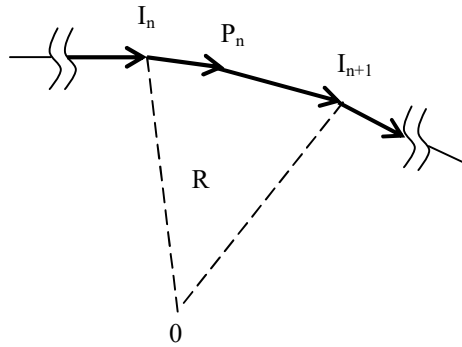


Рис. 11.3

Согласно теореме отсчетов [31] радиус полностью определен, если известна сторона T многоугольника. Таким образом, сторона T правильного n -угольника (Рис.11.3) равна

$$T \equiv \rho = |I_n P_n| + |P_n I_{n+1}|. \quad (11.13)$$

Для определения длин $|I_n P_n|$ и $|P_n I_{n+1}|$ обратимся к Рис. 11.2. Длина $|I_n P_n|$ определяется из $\Delta P_n O P_{n+1}$ и $\Delta I_n O I_{n+1}$:

$$|I_n P_n| = \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \frac{1}{\sin(180/n)}. \quad (11.14)$$

Длина $|P_n I_{n+1}|$ определяется из $\Delta I_n P_n I_{n+1}$ (Рис.11.2) на основе использования теоремы косинусов:

$$|P_n I_{n+1}|^2 = |I_n P_n|^2 + |I_n I_{n+1}|^2 - 2|I_n P_n| \cdot |I_n I_{n+1}| \cos \alpha. \quad (11.15)$$

В формуле (11.15) длина отрезка $|I_n I_{n+1}|$ равна T_2 , угол $\alpha = 90 + \frac{180}{n}$. Подставляя эти значения в выражение (11.15), получим квадрат длины отрезка $|P_n I_{n+1}|$:

$$|P_n I_{n+1}|^2 = \frac{(T_1 - T_2)^2}{4 \sin^2(180/n)} + T_2^2 - 2 \frac{(T_1 - T_2)T_2}{2 \sin(180/n)} \cos(90 + 180/n).$$

При заданных параметрах T_1, T_2 и n из последнего выражения легко находится длина отрезка $|P_n I_{n+1}|$:

$$|P_n I_{n+1}| = f(T_1, T_2, n). \quad (11.16)$$

Подстановкой значений длин $|I_n P_n|$ и $|P_n I_{n+1}|$, определенных согласно (11.14) и (11.16), в формулу (11.13), находим сторону T правильного n – угольника, вписанного в окружность радиуса R (Рис. 11.3).

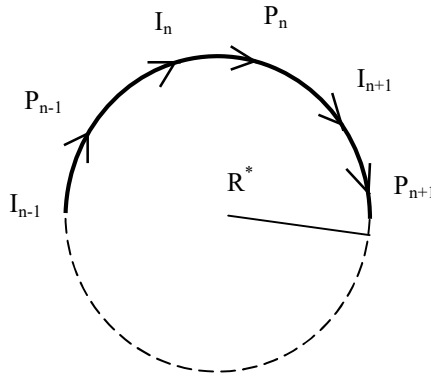


Рис. 11.4

Если в качестве примера, примем $T_1=2$, $T_2=1$ и $n=6$, то сторона T правильного шестиугольника, найденная согласно выражению (11.13) будет $1 + \sqrt{3/2}$. Представляет интерес отобразить отрезок $T \equiv \rho$ на некоторую окружность радиуса R^* . В результате отображения отрезок $I_n P_n I_{n+1}$ (Рис.11.3) изогнется в дугу $I_n P_n I_{n+1}$ (Рис. 11.4). Весь цикл представляется отображенным на некоторую окружность радиуса R^* . Таким

образом, периметр правильного n -угольника nT окажется равным длине окружности $2\pi R^*$, т.е.

$$nT = 2\pi R^*.$$

Из этого равенства можно определить радиус окружности $R^* = nT/2\pi$ на которую отображается сторона T правильного n -угольника (Рис. 11.4).

Если по какой-то причине нежелательно переходить к схематическому изображению гиперцикла, приведенного на Рис. 11.3 и Рис. 11.4, то целесообразно использовать метод поворота координатных осей (для построения оставшихся переходов), заключающийся в следующем. Система координат xOy задана таким образом, что точка O пересечения координатных осей Ox и Oy совпадает с центром O описанной окружности (Рис. 11.2). Мы хотим перейти к другой системе координат XOY у которой точка O пересечения координатных осей OX и OY также совпадает с центром O описанной окружности (Рис. 11.2). При повороте системы координат xOy на угол Θ по часовой стрелке, некоторая точка M , имеющая в системе координат xOy координаты x и y , будет иметь в системе координат XOY координаты X и Y , определяемые формулами

$$X = x \cos \Theta - y \sin \Theta, \quad Y = x \sin \Theta + y \cos \Theta, \quad \Theta = \frac{360}{n} \cdot l, \quad l = 1, \dots, n.$$

Таким образом, можно построить произвольный переход гиперцикла, например $I_{n+1} \rightarrow P_{n+1} \rightarrow I_{n+2}$, зная три начальные точки, например I_{n-1}, P_{n-1}, I_n , и число n .

§11.3. Связь «самоорганизации» макромолекул и гиперцикла с процессом рождения (размножения)

Процесс рождения с позиции уравнения Колмогорова был рассмотрен в разделе 6.5.1 (глава 6). От этих уравнений можно перейти к следующей системе уравнений, записанной также для вероятностей

$$\begin{aligned} \dot{P}_\eta(t) &= -\lambda_\eta P_\eta(t) + \lambda_{\eta-1} P_{\eta-1}(t), \quad \eta \geq 1 \\ \dot{P}_0(t) &= -\lambda_0 P_0(t), \end{aligned} \quad (11.17)$$

где $P_\eta(t)$ – вероятность того, что в момент t система находится в состоянии Ξ_η . Зная Ξ_η мы можем вычислить последовательно все $P_\eta(t)$. В том случае, если состояние системы представляет собой число изменений за время $(0, t)$, то начальным состоянием является Ξ_0 , так что $P_0(0)=1$ и, следовательно, имеем $P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}$. Однако не обязательно, чтобы система исходила из состояния Ξ_0 . Если в момент 0 система находится в состоянии Ξ_j , то $P_j(t)=1$, $P_\eta(t)=0 \quad \forall \eta \neq j$. $P_j(t)$ – вероятность того, что объем (количество) x_i концентрации i -ого вида равен ровно η , удовлетворяет уравнению (11.17) при $\lambda_\eta = \eta\lambda$, $\eta \geq 1$; исходя из этих обозначений имеем

$$\begin{aligned} \dot{P}_\eta(t) &= -\eta\lambda P_\eta(t) + (\eta - 1)\lambda P_{\eta-1}(t),^1 \\ \eta &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.17a)$$

Решение уравнения (11.17a) представляет собой распределение Юла–Фарри:

$$P_\eta(t) = \binom{\eta-1}{\eta-j} e^{-j\lambda t} (1 - e^{-j\lambda t})^{\eta-j}, \quad (\eta \geq j), \quad (11.18)$$

когда $\eta < j$ имеем $P_\eta(t) = 0$.

¹ В §6 раздел 6.5.1 (Глава 6) дано решение уравнения (11.17a) с использованием производящей функции; производная от этого решения (6.68) имеет вид солитона, зависящего от параметра. Уравнение Риккати (6.68) удовлетворяет соответствующему оптимизационному параметрическому уравнению Эйлера–Лагранжа (6.74).

Распределение Юла–Фарри (11.18) представляет собой обобщение геометрического распределения (6.75) на нестационарный случай.

Если размножение не подвержено случайным колебаниям и скорость размножения пропорциональна объему концентрации, то закон изменения концентрации $x_i(t)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \lambda x_i(t), \quad x_i(0) = x_i^0. \quad (11.19)$$

Решение уравнения (11.19) имеет вид

$$x_i(t) = x_i(0)e^{\lambda t}. \quad (11.20)$$

Существует непосредственная связь между уравнением (11.17a) и уравнением (11.19): легко видеть, что (11.20) получается из математического ожидания распределения (11.18); следовательно, уравнение (11.19) описывает средний объем концентрации x_i , в то время, как уравнение (11.17) отражает влияние случайных колебаний (флуктуаций).

Необходимо отметить, что уравнение (11.19) соответствует тому случаю уравнения Риккати (11.1), когда $R_1 \gg R_2(t_{\infty}) \forall t_{\infty}$ и $R_1 \equiv \lambda > 0$. Если мы примем в уравнении (11.1), что $R_2(t_{\infty}) \equiv \gamma \gg R_1 \forall t_{\infty}$, то уравнение Риккати (11.1) запишется в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \gamma x_i^2(t). \quad (11.21)$$

Решение уравнения (11.21) имеет вид

$$x_i(t) = \frac{x_i^0}{1 - \gamma x_i^0(t)}. \quad (11.22)$$

На практике можно контролировать суммарную концентрацию $c = \sum x_i$; поэтому имеем [104]:

$$\dot{c} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \Gamma_i(x) = \sum_{i=1}^n k_i x_i x_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^n k_i^{-1}} c^2 = \bar{k} c^2 = \Gamma(c),$$

$$(11.21a)$$

где Γ_i – функция чистого роста; $j = i + 1 - n\delta_{in}$, δ_{in} – символ Кронекера.

Решая уравнение (11.21a) можно определить значение суммарной концентрации

$$c(t) = \frac{c(0)}{1 - \bar{k}c(0)t}. \quad (11.22a)$$

Выражение (11.22a) имеет ту же структуру, что решение (11.22). В том случае, когда $t \rightarrow 1/\bar{k}c(0)$, суммарная концентрация $c(t) \rightarrow \infty$; этот случай на практике не встречается. Если $1 \gg \bar{k}c(0)$, то при конечном времени t , суммарная концентрация имеет значение близкое к начальному, т.е.

$$c(t) \approx c(0).$$

Если снять селекционные ограничения, то дифференциальное уравнение для концентрации i -ого вида можно записать так

$$\dot{x}_i = \Gamma_i(x). \quad (11.23)$$

В этом случае суммарная концентрация, удовлетворяет дифференциальному уравнению [104]

$$\dot{c} = \sum_{j=1}^n \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(x) - \Phi, \quad (11.24)$$

где Φ – поток, определяемый из соотношения

$$\Phi = \frac{\Phi_i}{x_i} c, \quad (11.25)$$

а Φ_i – это поток, который может либо разбавлять i -ю компоненту концентрации, либо поддерживать эту концентрацию на постоянном уровне, в зависимости от внешних ограничений, наложенных на систему.

Дифференциальное уравнение (11.24) удовлетворяет условию стационарности $\dot{c} = 0$, когда поток Φ регулируется так, что-

бы компенсировать результирующую избыточную продукцию, т.е.

$$\Phi = \Phi_0 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(x). \quad (11.26)$$

С учетом выражений (11.24) – (11.26) дифференциальное уравнение (11.23) примет вид

$$\dot{x}_i = \Gamma_i(x) - \frac{x_i}{c_0} \sum_{j=1}^n \Gamma_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11.27)$$

где c_0 – стационарное значение суммарной концентрации, которое сохраняется постоянным, поддерживая поток на уровне Φ_0 . Таким образом, внешний поток Φ , действующий на систему, позволяет поддерживать суммарную концентрацию (11.22а) на соответствующем уровне.

Хотя термин «самоорганизация макромолекул» не является отражением самоорганизующегося процесса, происходящего в живой материи, этот процесс удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа (11.6), господствующего в природе; *это свидетельствует об универсальности уравнения (11.6), имеющего место как в живой, так и в неживой материи.*

§11.4. Математическая модель первичного жизненного цикла

Процесс расщепления (редупликации) белково-нуклеотидного комплекса, т.е. образования первичного жизненного цикла показан на Рис. 11.5. При осуществлении процесса расщепления возможны два варианта. При осуществлении первого варианта синтез новой биспирали не начинается пока не закончен синтез предыдущей. Во втором варианте синтез (расщепление) новых биспиралей начинается до окончания построения предыдущих;

таким образом, одновременно происходит несколько расщеплений. В природе реализуется первый вариант, поскольку он более «выгоден» с точки зрения эффективности, надежности и безошибочности комплементарной репродукции.

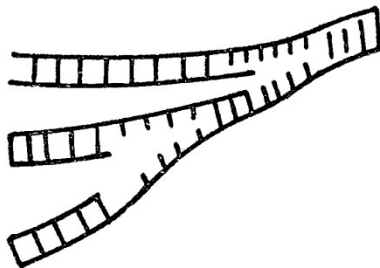


Рис. 11.5

Первый вариант модели первичного жизненного цикла был предложен в работе Хиггинса [57].¹ Модель Хиггинса имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha(1 - xy), \\ \frac{dy}{dt} &= xy - \frac{r + 1}{r + y}y, \end{aligned} \quad (11.28)$$

где α и r постоянные положительные коэффициенты. Переменная x (означающая концентрацию в уравнениях (11.28)) пропорциональна числу свободных нуклеотидов, а переменная y пропорциональна числу присоединенных к ДНК нуклеотидов. Система (11.28) имеет в положительном квадранте одну особую точку $x=y=1$. Линеаризация системы (11.28) вблизи особой точки, позволяет получить следующее характеристическое уравнение

$$k^2 + k \left(\alpha - \frac{1}{r + 1} \right) + \alpha \frac{r}{r + 1} = 0. \quad (11.29)$$

¹ В этой работе Хиггинсом была предложена модель гликолитических автоколебаний; используемая нами модель совпадает с моделью Хиггинса.

Для устойчивой системы измерения необходимо $\frac{1}{r+1} > a$.

Если от статического уравнения (11.29) перейти к соответствующему динамическому уравнению, то будем иметь уравнение Риккати

$$\frac{dk}{dt} = k^2 - Bk + C, \quad (11.30)$$

где $B = \frac{1}{r+1} - \alpha$, $C = \frac{r}{r+1}$.

Правая часть уравнения (11.30) является солитоном, который опять-таки удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа (3.24).

Если использовать результаты приложений Б и В применительно к уравнению Риккати (11.30), то от этого уравнения можно перейти к соответствующей системе измерений; этим будет показана стохастическая природа первичного жизненного цикла. Читателю предлагается осуществить этот переход. Можно показать [43], что модель Хиггинса (11.28), описывающая функционирование первичного жизненного цикла, отражает процесс гармонических колебаний с безразмерной частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{kr}{1+r}}$$

и соответствующим периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{1+r}{kr}},$$

где k – корень характеристического уравнения (11.29).

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в случае автоколебаний репродукция является циклическим процессом. При этом фаза синтеза присоединенных нуклеотидов у сменяется фазой накопления свободных нуклеотидов x . Этот

режим первичного жизненного цикла является, по-видимому, наиболее выгодным с точки зрения эффективности разделения продуктов. В описанной модели репликации бесконечного биополимера в случае релаксационных автоколебаний величина u периодически падает практически до нуля. В это время синтез дочерних полимеров не происходит; он начинается только после того, как концентрация свободных нуклеотидов x достигает значительной величины. Этот процесс и является простейшей моделью первичного жизненного цикла.

Ограниченность длины последовательности ДНК в первичном жизненном цикле и антагонистичность взаимодействия x и u означает, что в результате отбора остается очень небольшое число различных видов; в итоге выживает лишь один вид.

§11.5. Модель генетического триггера

Жакобом и Моно была предложена биохимическая схема регуляции белкового синтеза [105]. В этой же работе была предложена триггерная схема перекрестной регуляции двух генов; принцип функционирования этой схемы показан на Рис. 11.6.

На Рис. 11.6 приняты следующие обозначения: *Reg* – ген-регулятор, *O* – ген-оператор (оперон), *G* – структурный ген, *r* – репрессор, *r_a* – активная форма репрессора, *E* – синтезируемый фермент, катализирующий образование продукта *P* из субстрата *S*, *in* – индуктор, *cor* – корепрессор.

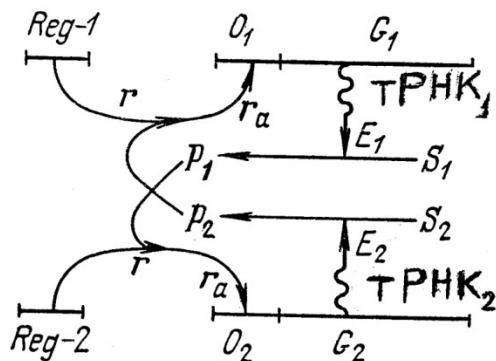


Рис. 11.6

Модель синтеза фермента E и катализируемого им продукта P представлена следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = \tau_E^{-1}I - \tau_2^{-1}E, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{k_2S}{k_s + S}E - qP, \\ \frac{dI}{dt} = Q(r) - \tau_1^{-1}I, \end{cases} \quad (11.31)$$

где I – усредненная по объему клетки концентрация тРНК (транспортной РНК); τ_I – время жизни тРНК ($\tau_I \approx 10$ мин.); τ_E – время синтеза молекулы фермента E ; член $\tau_2 E$ описывает распад фермента за счет протеолиза; член $Ek_2S/(K_s+S)$ описывает синтез продукта P из субстрата S с участием фермента E ; член qP – отток продукта P . Последнее уравнение системы (11.31) описывает синтез тРНК. Скорость синтеза РНК равна

$$Q(r) = \frac{a_2 a_3}{\tau_0 a_2 a_3 + a_3 + k_0 R^m}, \quad (11.32)$$

где R – корепрессор; m – число молекул корепрессора, входящих в комплекс; τ_0 – время синтеза тРНК; k_0 – постоянный положительный коэффициент; a_2 и a_3 – постоянные положительные параметры.

В стационарном режиме имеем соотношения

$$\bar{E} = \tau_2 I / \tau_E, \quad \bar{P} = k_2 \bar{E} S / (k_s + S) q, \quad \bar{I} = Q \tau_1.$$

Введем обозначения

$$x = E / \bar{E}, \quad y = P / \bar{P}, \quad z = I / \bar{I}, \quad t' = qt$$

и с их учетом запишем систему (11.31) в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt'} = \frac{1}{\tau_2 q} (z - x), \\ \frac{dy}{dt'} = x - y, \\ \frac{dz}{dt'} = \frac{1}{\tau_1 q} (1 - z). \end{cases} \quad (11.33)$$

Не представляется возможным дать непосредственные оценки величинам τ_1 , τ_2 и q ; но можно воспользоваться косвенными соображениями. Отношение стационарных концентраций фермента \bar{E} и продукта \bar{P} имеет порядок $\bar{E} / \bar{P} \approx q / k_2$. Известно также, что это отношение очень мало: $\bar{E} / \bar{P} \approx 10^{-4}$ (характерные концентрации ферментов порядка 10^{-6} моль/литр, а продуктов – порядка 10^{-2} моль/литр). Поэтому имеем $q / k_2 \approx 10^{-4} \ll 1$. Аналогично $\bar{I} / \bar{E} \approx \tau_E / \tau_2 \approx 10^{-2}$, поскольку молярные концентрации тРНК порядка 10^{-8} . Порядок величин k_2 и τ_E можно считать известными: k_2 (число оборотов фермента) порядка $1 \div 10^{-2}$ сек. $^{-1}$ и τ_E (время синтеза молекулы белка на рибосоме) порядка нескольких секунд. Поэтому

$$\tau_2 q \approx 10^{-1} \div 10^{-3} \ll 1.$$

Величина $(\tau_2 q)^{-1}$ меньше, чем время жизни тРНК.

Таким образом, величины $(\tau_2 q)^{-1}$ и $(\tau_1 q)^{-1}$ можно считать достаточно большими, а первое и третье уравнения системы (11.33) – присоединенными (см. Приложение Ж). Следовательно, легко убедиться в том, что необходимые условия теоремы Тихонова выполняются и мы приходим к простейшей модели, состоящей всего из одного уравнения

$$\frac{dy}{dt'} = 1 - y,$$

или возвращаясь к первоначальным обозначениям будем иметь

$$\frac{dP}{dt} = \frac{k_2 S}{k_s + S} \cdot \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_E} \cdot \frac{a_2 a_3}{\tau_0 a_2 a_3 + a_3 + k_0 R^m} - qP. \quad (11.34)$$

Рассмотрим сначала математическую модель в случае, когда концентрации субстратов S_1 и S_2 постоянны. При этом модель состоит из уравнений, описывающих синтез продуктов P_1 и P_2 . Согласно схеме на Рис. 11.6 следует принять $R_1 \equiv P_2$ и $R_2 \equiv P_1$. С учетом того, что синтез продуктов описывается уравнением (11.34), модель можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \frac{N_1}{M_1 + P_2^m} - q_1 P_1, \\ \frac{dP_2}{dt} = \frac{N_2}{M_2 + P_1^m} - q_2 P_2, \end{cases} \quad (11.35)$$

где

$$N = \frac{k_2 a_2 a_3 \tau_1 \tau_2 S}{(K_s + S) k_0 \tau_E}, \quad M = \frac{\tau_0 a_2 a_3 + a_3}{k_0}.$$

Индексы 1 и 2 в уравнениях (11.35) относятся к системам синтеза продуктов P_1 и P_2 соответственно.

Обратимся к функционированию схемы регуляции белкового синтеза (Рис. 11.6) с позиций биохимического анализа. Перед структурным геном G находится участок ДНК, именуемый опероном O ; он ответственен за начало процесса транскрипции.¹ Оперон также может взаимодействовать с другими молекулами – репрессорами, которые затрудняют деятельность РНК – полимеразы и таким образом, блокируют транскрипцию. Как сам репрессор, так и участок оперона (ответственный за связывание с ним (репрессором)), должны нести информацию об опероне, управляющим структурным геном ДНК. В противном случае

¹ Транскрипция – синтез РНК на матрице ДНК.

один и тот же репрессор блокировал бы весь белковый синтез и не мог бы служить регулятором. Молекулы репрессора r , по-видимому, имеют белковую природу и синтезируются геном-регулятором Reg (Рис. 11.6). Активность их, т.е. способность связываться с опероном, зависит от наличия в плазме клетки других молекул небелковой природы, т.е. низкомолекулярных соединений.

Соединения, способные активизировать репрессор и тем самым блокировать синтез белка, называются корепрессорами. Соединения, понижающие активность репрессора и тем самым способствующие синтезу белка, называются индукторами. Индукторы и корепрессоры являются истинными регуляторами синтеза белка. Следует отметить, что процессы синтеза тРНК, за исключением взаимодействия репрессора с корепрессором (или индуктором) могут протекать в непосредственной близости от участков ДНК. Взаимодействие репрессора с корепрессором (или индуктором) представляет собой процесс собирания информации о целесообразности синтеза данного белка и, следовательно, отражает ситуацию в плазме.

Обратимся теперь к математической стороне генетического триггера т.е. к уравнениям (11.35). Рассмотрим симметричный случай, когда параметры уравнений системы (11.35) одинаковы: $N_1=N_2=N$, $q_1=q_2=q$ и $M_1=M_2=M$. Примем также, что $N/q=M=\Theta^m$. При этих обозначения система уравнений (11.35) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt''} = \frac{\Theta^m}{\Theta^m + y^m} - x, \\ \frac{dy}{dt''} = \frac{\Theta^m}{\Theta^m + x^m} - y, \end{cases} \quad (11.35a)$$

где $t'' = qt$, $x = P_1$, $y = P_2$.

Если опустить штрихи «'» в обозначении времени t'' , то система (11.35а) генетического триггера, примет вид [60]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\Theta^m}{\Theta^m + y^m} - x, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\Theta^m}{\Theta^m + x^m} - y, \end{cases} \quad (11.36)$$

Для случая, когда $\Theta=1/2$, стационарному состоянию системы (11.36) соответствует решение $\bar{x} = \bar{y} = 1/2$. В стационарном состоянии вектор \bar{z} с компонентами \bar{x} и \bar{y} удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = f(\bar{z}) = 0.$$

В окрестности стационарного состояния движение системы (11.36) описывается уравнением

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = J(z - \bar{z}), \quad (11.37)$$

где элемент матрицы J (Якоби) находится из выражения (см. ГЛАВА 2):

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right|_{z=\bar{z}}.$$

Поэтому для стационарного состояния характеристическое уравнение непосредственно следует из уравнения (11.37):

$$\begin{vmatrix} -1 - k & -\frac{m}{2} \\ -\frac{m}{2} & -1 - k \end{vmatrix} = 0 \quad (11.37a)$$

Собственные значения этого характеристического уравнения равны $k_{1,2} = -1 \pm m/2$. Стационарное состояние представляет собой устойчивый узел для $m < 2$ и седло для $m > 2$. Для двух разных значений m траектории различных точек на плоскости состояний могут быть схематически изображены как показано на Рис. 11.7а и Рис. 11.7б.

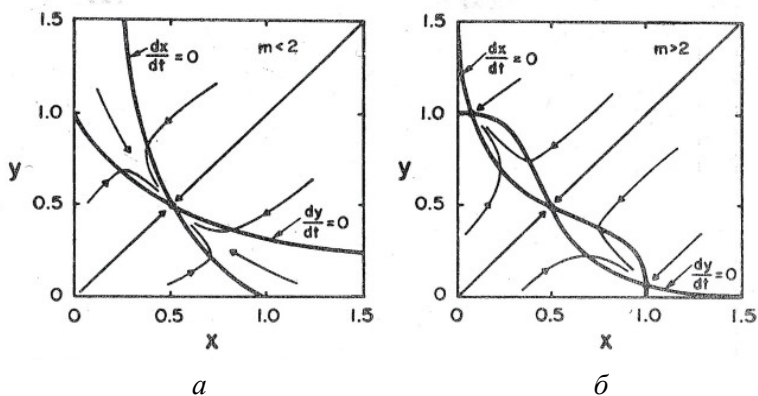


Рис. 11.7

При $m > 2$ имеется три стационарных состояния: седло и два устойчивых узла. В зависимости от начальных условий при $t \rightarrow \infty$ достигается тот или иной узел. При $m = 2$ происходит бифуркация, при которой единственное стационарное состояние (Рис. 11.7а) расщепляется на седло и два устойчивых узла (Рис. 11.7б). Таким образом, при $m > 2$ система (11.36) обладает триггерным свойством. В монографии [60] система уравнений (11.36) используется в качестве модели взаимного ингибирования.

11.5.1. Трудности, возникающие при использовании триггерных свойств

в проблеме моделирования биологических процессов

Введем обозначения: для пассивной формы репрессора – r_p ; через r_0 обозначим суммарное число субъединиц репрессора, а через n – число субъединиц в активной форме репрессора r_a ; K_r – концентрация репрессора r . С учетом этих обозначений будем иметь следующие выражения [43]:

$$K_r r_a = (r_0 - r_a n)^n R^m, \quad (11.38)$$

где

$$r_0 - r_a n = r_p. \quad (11.39)$$

Согласно выражениям (11.38) и (11.39) легко построить график зависимости r_a от R , т.е.:

$$r_a = F(R). \quad (11.40)$$

Этот график имеет вид (кривая 1), показанный на Рис. 11.8. При $R \rightarrow \infty$ имеет место насыщение $r_a \rightarrow r_0/n$; если R мало т.е. выполняется усиленное неравенство $K_r \gg n^2 R^m r_0^{n-1}$, тогда активный репрессор r_a становится малой величиной $r_a \approx r_0^n R^m / K_r \approx 0$.

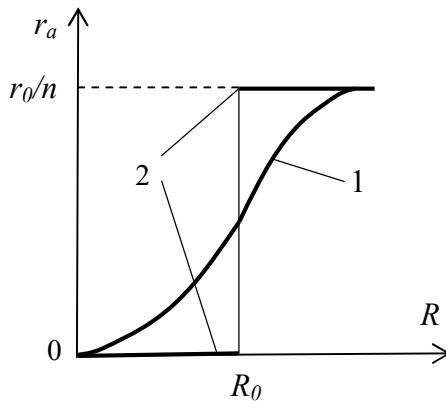


Рис. 11.8

Из Рис. 11.8 видно, что при изменении корепрессора R (это происходит при изменении концентрации K_r) величина активного репрессора r_a не изменяется мгновенно, как это происходило бы при использовании триггерной модели. Поэтому в уравнении (11.40) функция $F(\cdot)$ не может иметь вид функции Буля, т.е. вид

F	R
0	0
1	1

Причем, функция r_a нормирована: $F_{max} = \max(r_a) = 1$.

Таким образом, замена функции типа «насыщения» 1 (Рис. 11.8) триггерной функцией 2 не может считаться оправданной с точки зрения аппроксимации.

11.5.2. Использование функции гиперболического тангенса при аппроксимации функции типа «насыщения»

В общем случае функция гиперболического тангенса имеет вид

$$y = Ath(ax), \quad (11.41)$$

где A и α являются заданными постоянными параметрами. Общий вид функции (11.41) при $A=1$ и $\alpha = 1$ показан на Рис. 11.9.

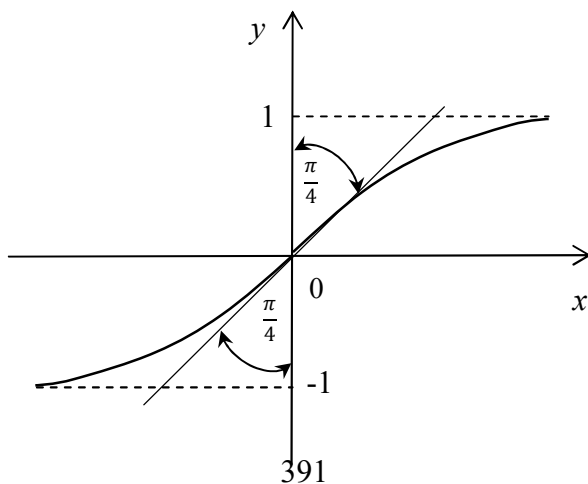


Рис. 11.9

Из этого рисунка видно, что касательная в точке 0 имеет наклон к обеим осям один и тот же $\pi/4$. Аргумент гиперболического тангенса x может принимать как положительные, так и отрицательные значения. На практике чаще встречаются случаи, когда функция y принимает только положительные значения. В этом случае нормированный к единице график функции (11.41) имеет вид, показанный на Рис. 11.10.

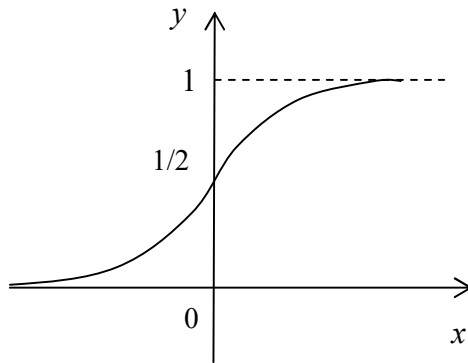


Рис. 11.10

Этому графику соответствует выражение

$$y = \frac{1}{2}[1 + th(\alpha x)], \quad (11.42)$$

где $\alpha = 1$.

Изменение коэффициента α , позволяет менять наклон функции y по отношению к координатным осям. С уменьшением α уменьшается наклон касательной функции y к оси oy .

Для различных значений параметра α , вид функции y , определенной согласно выражению (11.42), показан на Рис. 11.11.

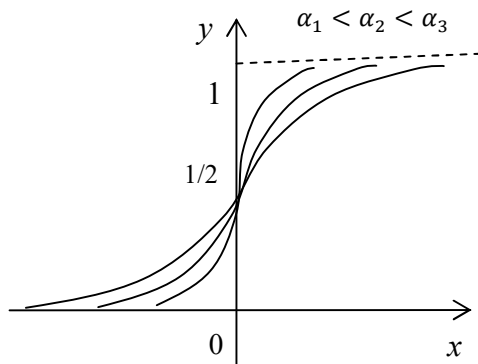


Рис. 11.11

В том случае, когда функция y расположена в первом квадранте необходимо сдвинуть аргумент на постоянную величину x_0 вправо. При этом функция (11.42) запишется следующим образом

$$y = \frac{1}{2} [1 + th(\alpha x - x_0)]. \quad (11.43)$$

График, соответствующий выражению (11.43), для конкретного значения параметра α , показан на Рис.11.12.

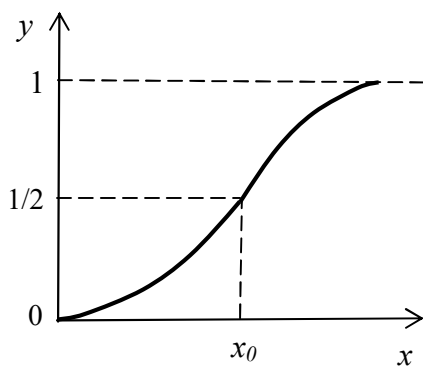


Рис.11.12

Следовательно, изменением параметров A , α и x_0 можно достичь произвольного расположения функции y на плотности состояний. Исходя из этого мы считаем целесообразным проводить аппроксимацию путем применения функции гиперболического тангенса. В третьей главе было показано, что функция гиперболического тангенса связана с солитонной функцией; солитонная же функция (как это было показано в третьей главе) удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа (3.24).

11.5.3. Аппроксимация функцией гиперболического тангенса в одной проблеме математической генетики

Для двух сцепленных локусов¹ вероятность рекомбинации между ними зависит от одного параметра. Обозначив через y^* эту вероятность, будем иметь

$$y^* = p_1^* + p_3^* + p_5^* + \dots,$$

где p_i^* - вероятность i -ого кроссинговера на отрезке хромосомы² между локусами. Пусть x – длина этого отрезка, измеренная ожидаемым числом кроссинговеров.³ В этом случае имеем

$$x = p_1^* + 2p_2^* + 3p_3^* + \dots$$

Представляет значительный интерес соотношение между y^* и x . Для этой зависимости лучшая формула была предложена Косамби [106]

¹ Локус место расположения того или иного гена в хромосоме.

² Хромосома – находящийся в клеточном ядре сложно организованный комплекс ДНК с белками в котором хранится генетическая информация.

³ Кроссинговер – взаимный обмен частями между парными хромосомами, определяющий образование новых комбинаций генов – их рекомбинацию.

$$y^* = \frac{1}{2}th(2x), \quad (11.44)$$

которая хорошо согласуется с наблюдаемыми данными.

Таким образом, аппроксимация с использованием гиперболического тангенса позволяет получить приемлемую аппроксимацию в этой задаче математической генетики.

В простейшей модели с n локусами вероятности рекомбинаций определяются $n-1$ параметрами, в качестве которых можно взять последовательные расстояния между локусами.

В общем случае для n локусов требуется $2^{n-1}-1$ параметров, поскольку если выбран один аллель¹ в некотором локусе, то другие могут ассоциироваться с ним 2^{n-1} способами, вероятности которых должны составить в сумме единицу. Это означает, что для трех локусов требуется три параметра, а для четырех – семь.

Как известно, функция гиперболического тангенса связана с солитонной функцией интегральной зависимостью

$$y = th(2x) = 2 \int sech^2(2x)dx + C, \quad (11.45)$$

где C – постоянная интегрирования.

Солитон же удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа. Кроме этого, от солитона можно перейти к соответствующему уравнению Риккати, а от этого уравнения перейти к системе антагонистических уравнений типа Вольтерра–Лотка; система уравнений Вольтерра–Лотка описывает процесс самоорганизации в некоторой, может быть даже, виртуальной системе.

С целью подтверждения сказанного обратимся к уравнению Риккати

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y(n - y), \quad (11.46)$$

¹ Аллель – один из пары (или нескольких) генов, определяющих развитие того или иного признака.

$$y_0 = y(0).$$

Решение уравнения (11.46) имеет вид

$$y = \frac{n}{1 + e^{-\lambda(x-x_0)}}. \quad (11.47)$$

Из соотношения (11.47) можно определить скорость изменения переменной y :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \lambda n^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \lambda n (x - x_0) \right], \quad (11.48)$$

$$x_0 = \frac{1}{\lambda n} \ln \left| \frac{y_0}{y_0 + n} \right|.$$

Из сопоставления уравнений (11.46) и (11.48) видно, что эти уравнения эквивалентны и левая часть уравнения (11.46) является солитоном. Исходя из этого, зная параметры λ и n солитонной функции (правая часть уравнения (11.48)), можно синтезировать уравнение Риккати (11.46); обратное утверждение также справедливо.

Неустойчивой системе уравнений типа Вольтерра–Лотка (3.84'''), (3.86''') может соответствовать либо уравнение Риккати вида (см. раздел 3.4.3, ГЛАВА 3):

$$\frac{dz}{dt} = (q^* - p)z + \frac{bc}{a - q^*} z^2, \quad \text{когда } a - q^* > 0, \quad (11.46a)$$

либо уравнение Риккати вида

$$\frac{dz}{dt} = (q^* - p)z - \frac{bc}{q^* - a} z^2, \quad \text{если } a - q^* < 0, \quad (11.46b)$$

Пусть имеем неустойчивую систему

$$\begin{aligned} \frac{du^*}{dt} &= au^* - bu^*v^*, \quad a, b > 0, \\ \frac{dv^*}{dt} &= g^*v^* - cu^*v^*, \quad g^*, c > 0, \quad g^* \equiv q^* - p > 0. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Для того, чтобы неустойчивой системе (11.49) соответствовало уравнение (11.46) необходимо принять $a - q^* < 0$, где $q^* = a + \frac{bc}{p}e$ (см. раздел 3.4.3, ГЛАВА 3).

Если для параметров λ и n уравнения Риккати (11.46) введем обозначения $\lambda n \equiv g^*$ (где $g^* = q^* - p > 0$) и $\lambda \equiv \frac{bc}{q^* - a}$, то уравнение (11.46) станет эквивалентным уравнению (11.46 б):

$$\frac{dz}{dt} = g^*z - \lambda z^2. \quad (11.50)$$

Далее следует осуществить переход от уравнения Риккати (11.50) к системе уравнения типа Вольтерра–Лотка (11.49); переход не является однозначным: конкретным значениям параметров q^* и λ ставится в соответствие бесконечное множество различных значений параметров a , b , c , p и q^* , хотя следует отметить, что параметр q^* зависит от a , b , c и p .

Таким образом, аппроксимация Косамби (11.44) является приемлемой не только потому, что согласуется с наблюдаемыми данными, а еще и потому, что с ее использованием можно построить антагонистическую модель процесса, описываемую неустойчивой системой уравнений типа Вольтерра–Лотка (11.49), поскольку согласно (11.48) переменная y отождествляется с гиперболическим тангенсом.

§11.6. Примеры использования солитонов в различных моделях биологии

Рассматриваемые в настоящем параграфе модели биологических процессов прямо или косвенно отражают процессы самоорганизации, происходящие в этих объектах. Поэтому мы сочли

целесообразным отдельно остановиться на каждой такой проблеме и рассмотреть ее с единой точки зрения.

11.6.1. Денатурация и ренатурация белков

Как известно [107], сравнительно мягкие воздействия на белок, не разрывающие пептидных связей, могут привести к утрате биологической функциональности т.е. приводят к *денатурации белка*. Денатурация может быть вызвана воздействием теплового поля, действием химических агентов, механическим воздействием и т.д. Денатурация состоит в разрушении пространственной структуры белковых молекул при сохранении первичной структуры цепей. Денатурированная молекула белка оказывается в состоянии статистического клубка. Для глобулярных белков процесс денатурации сводится к переходу глобула – клубок.

Свободная энергия денатурации ΔF должна быть суммой многих составляющих [107]:

$$\Delta F = \Delta F_a + \Delta F_H + \Delta F_{np} + \Delta F_e + \Delta F_u + \Delta F_x + \dots, \quad (11.51)$$

где ΔF_a определяется раскручиванием α – спиралей, ΔF_H – разрывами водородных связей между белковыми цепями соседних макромолекул, ΔF_{np} – изменением гидрофобных взаимодействий, ΔF_e – изменением электрических взаимодействий, ΔF_u – набуханием образовавшегося клубка, ΔF_x – разрывом поперечных связей между спиральями, существующими в кристаллической фазе. Составляющие ΔF_a и ΔF_x не зависят от pH ; остальные члены, связанные с присутствием ионизируемых групп, зависят от pH .

Доля денатурированного материала равна

$$x(\Delta F) = \frac{\exp(-\Delta F/kT)}{1 + \exp(-\Delta F/kT)}, \quad (11.52)$$

где k – постоянная Больцмана, а T – абсолютная температура.

Представляет интерес определить скорость изменения денатурированного материала x относительно свободной энергии ΔF , т.е. нахождение производной $dx/d(\Delta F)$. С этой целью преобразуем выражение (11.52):

$$x(\Delta F) = \frac{e^{-\Delta F/2k}}{e^{\Delta F/2kT} + e^{-\Delta F/2kT}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-\Delta F/2kT}}{ch(\Delta F/2kT)}.$$

Найдем производную от $x(\Delta F)$ по ΔF . Эта производная равна:

$$\frac{dx}{d(\Delta F)} = -\frac{1}{4kT} \operatorname{sech}^2(\Delta F/2kT). \quad (11.53)$$

Выражение в правой части уравнения (11.53) представляет собой солитон, аргументом которого является свободная энергия денатурации ΔF . Следовательно, долю денатурированного материала можно выразить интегралом от солитона, т.е.

$$x = -\frac{1}{4kT} \int_{\Delta F_1}^{\Delta F_2} \operatorname{sech}^2(\Delta F/2kT) d(\Delta F). \quad (11.54)$$

Таким образом, соотношение в правой части выражения (11.52) эквивалентно определенному интегралу (11.54) от солитона, аргументом которого является свободная энергия денатурации.

Очень важно установить взаимнооднозначное соответствие между параметрами правой части уравнения Риккати (11.46) и параметрами от интеграла этого уравнения (11.47). Как явствует из вышеприведенного материала, интеграл от правой части этого уравнения является интегралом от солитонной функции (см. (11.54)). Следовательно, нам необходимо восстановить уравнение Риккати (11.46), зная параметры интеграла от правой части этого уравнения, т.е. зная параметры выражения (11.47). С этой целью запишем выражение (11.52) в эквивалентной форме

$$x(\Delta F) = \frac{1}{1 + \exp(\Delta F/kT)}. \quad (11.52a)$$

Из сопоставления (11.52a) с (11.47) видно, что $n=1$ и $\lambda=1/kT$. С учетом этих значений параметров соответствующее уравнение Риккати запишется в виде

$$\frac{dx}{d(\Delta F)} = \frac{x}{kT}(1-x) \quad (11.53)$$

или

$$\frac{dx}{d(\Delta F)} = \lambda x - \lambda x^2. \quad (11.53a)$$

Следовательно, неустойчивой системе типа Вольтерра–Лотка (3.84'''), (3.86''') (с заменой t на ΔF) будет соответствовать уравнение Риккати

$$\frac{dx}{d(\Delta F)} = (q^* - p)x - \frac{bc}{q^* - a}x^2, \quad q^* - p > 0, \quad a - q^* < 0, \quad (11.54)$$

в котором имеет место тождество

$$q^* - p = \frac{bc}{q^* - a} \equiv \lambda. \quad (11.55)$$

Параметры a , b , c и p выбираются из условия задачи, а параметр q^* определяется согласно выражению $q^* = a + \frac{bc}{p}e$.

Ясно, что переход от уравнения (11.54) к неустойчивой системе типа Вольтерра–Лотка (3.84'''), (3.86'''), неоднозначен.

Таким образом, денатурация белка означает разрушение «машины» белковой глобулы; моделирование этого разрушения предлагается производить путем использования неустойчивой системы (11.49).

Поскольку самоорганизация в биологической системе наблюдается как процесс ренатурации, то естественно, что модель

процесса ренатурации должна иметь вид устойчивой системы Вольтерра–Лотка:

$$\begin{cases} \frac{du^*}{d(\Delta F)} = au^* - bu^*v^*, & a, b > 0, \\ \frac{dv^*}{d(\Delta F)} = au^*v^* - gv^*, & g, c > 0, \quad g = p - q, \end{cases} \quad (11.56)$$

где $q = a - \frac{bc}{p}e$.

Для ряда белков наблюдается ренатурация т. е. процесс обратный процессу денатурации; в этом случае может быть использована устойчивая модельная система (11.56), описывающая самоорганизацию процесса ренатурации.

11.6.2. Редупликация ДНК

Хорошо известно, что использование функций Бесселя [108] при рентгенографическом анализе биополимеров, привело к открытию двуспирального строения ДНК.

Элементарная математическая модель для исследования кинетики редупликации ДНК представляет собой одномерную матрицу,¹ на которой сорбируются НТФ,² причем с одного конца идет процесс необратимой поликонденсации.

Подробно рассмотрим процедуру редупликации ДНК с кинетической точки зрения [19]. Рассмотрим одномерную матрицу, состоящую из m ячеек. Центр роста (полимераза) входит в первую ячейку и выходит из m -ой ячейки. Синтез роста необратим, т.е. процесс перемещения центра от $i-1$ -ой к i -ой ячейке происходит вдали от равновесия. Константа скорости роста k_r ,

¹ Матрица – полимерная молекула, последовательность которой используется для задания последовательности другой полимерной молекулы.

² НТФ – нуклеозидтрифосфат.

для любой ячейки одинакова, а константа скорости инициирования k_0 много меньше k_r . Уход центра роста из m -ой ячейки происходит быстро и не лимитирует этот процесс. Задача сводится к рассмотрению необратимого блуждания в одномерной решетке. Кинетические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = k_0 - k_r N_1, \\ \dot{N}_i = k_r N_{i-1} - k_r N_i, \\ \dot{N}_m = k_r N_{m-1}, \end{cases} \quad (11.57)$$

где $i = 2, 3, \dots, m-1$, а N_i – вероятность того, что фермент находится в i -ой ячейки матрицы.

Решение системы уравнений (11.57) с помощью двустороннего преобразования Лапласа (при начальных условиях $N_i(0) = \dots = N_m(0) = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} N_i(t) &= \frac{k_0}{k_r} \sum_{l=i}^{\infty} f(l), \quad i = 1, \dots, m-1, \\ N_m(t) &= k_0 t \sum_{l=m-2}^{\infty} f(l) - (m-1) \frac{k_0}{k_r} \sum_{l=m-1}^{\infty} f(l), \end{aligned} \quad (11.58)$$

где

$$f(l) = (k_r t)^l \frac{\exp(-k_r t)}{l!}.$$

Константа скорости роста равна $k_r = w k_t$; причем $w(E)$ – вероятность того, что ячейка, находящаяся перед центром роста, содержит адсорбированный мономер,¹ а k_t – константа скорости его включения в растущую цепь. Вероятность $w(E)$ определяется из соотношения

$$w(E) = \frac{Ka}{1 + Ka}, \quad (11.59)$$

¹ мономер – повторяющийся элемент полимерной цепи. Например, в белке – аминокислотный остаток, в ДНК – нуклеотид.

где $K = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$, $a = \exp(\mu/kT)$, E – энергия сорбции, a – абсолютная активность НТФ в растворе, μ – химический потенциал НТФ.

Найдем производную от обеих частей формулы (11.59) по энергии сорбции (сравните с (9.18)):

$$\frac{dw(E)}{dE} = -A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2kT} (E - \mu) \right], \quad (11.60)$$

где

$$A = e^{-2\mu/kT} / 2kT.$$

Интегрирование обеих частей выражения (11.60) дает

$$w(E) = -A \int_{E_1}^{E_2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2kT} (E - \mu) \right] dE, \quad (11.61)$$

где E_1 – энергия сорбции в начале расплетения ДНК, E_2 – энергия сорбции при окончании расплетения ДНК.

Выражение (11.60) показывает вероятность того, что ячейка, находящаяся перед центром роста, содержащая адсорбированный мономер, имеет вероятность $w(E)$ пропорциональную гиперболическому тангенсу, т.е. $w(E^*) \sim th(E^*)$. Поскольку $k_r = wk_t$, то формулы (11.58) зависят от гиперболического котангенса; это значит, что вероятность N_i того, что фермент находящийся в i -ой ячейке, является функцией гиперболического котангенса. Поэтому каждый виток, при расплетении ДНК, будет совпадать с периодом гиперболического котангенса, равного $\tau^* = 2\pi j\nu$, где $j = \sqrt{-1}$, $\nu = 1, 2, \dots, m$. Модель расплетения двойной спирали ДНК при редупликации показана на Рис. 11.13.

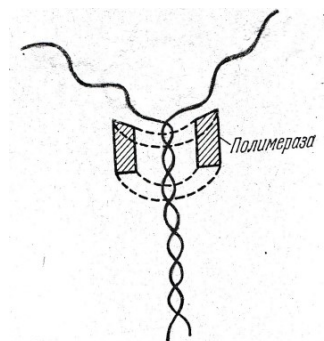


Рис. 11.3

Солитонная функция $-A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2kT} (E - \mu) \right]$ удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа (3.24); при этом необходимо помнить, что энергия сорбции E до расплетения больше чем эта же энергия после расплетения, т.е. $E_1 > E_2$. При выполнении этого неравенства функционал (3.25) будет иметь положительный знак. В результате расплетения двойной спирали получим две идентичные спирали, каждая из которых должна рассматриваться в трехмерном пространстве и удовлетворять уравнениям Серре–Френе (3.57a) (Глава 3).

Как отмечено в книге [109] в отношении ДНК спиралью принято называть винтовую линию. На Рис. 11.14 показан вид винтовой линии.

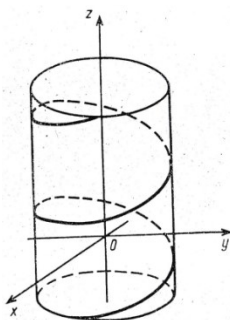


Рис. 11.14

Параметрические уравнения винтовой линии имеют вид
$$x = acost, \quad y = asint, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11.62)$$

Основными характеристиками винтовой линии является кривизна и кручения, которые постоянны и определяются следующими соотношениями

$$\text{кривизна: } \kappa = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\text{кручение: } \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, уравнение Серре–Френе (3.57а) можно заменить параметрическими уравнениями (11.62) винтовой линии.

Процесс редупликации ДНК не является ни организующимся, ни самоорганизующимся процессом. Обратный же процесс, т.е. сплетение двух линий в одну двуспиральную молекулу ДНК, является организующимся процессом, если он управляется снаружи [110] и является самоорганизующимся процессом если он управляется изнутри; это обычно происходит на основе генетической программы.

Таким образом, молекула ДНК имеет двуспиральное строение (см. Рис. 11.15); эти спирали состоят из следующих нуклеотидов: дезоксиаденилатов (А), дезоксигуанилатов (G), дезокситимидилатов (Т) и дезоксицитидимилатов (С). Последовательность нуклеотидов одной спирали (цепи) комплементарна последовательности другой: А находится всегда против Т, а G находится против С. Концы цепей ДНК химически различны: один конец обозначается как 3', а другой – 5'. В двойной спирали ДНК комплементарные цепи антипараллельны, следовательно, 3' конец одной цепи связан с 5' концом другой и наоборот. В ходе репарации¹ и репликации² двойной спирали ДНК каждая цепь

¹ Репарация – залечивание повреждений в ДНК.

² Репликация – удвоение генетического материала. Синтез ДНК на ДНК.

служит матрицей для синтеза другой цепи. Синтез является организуемым процессом, если управляется снаружи.

Согласно работе Сингха [111] рибосомы присоединяются к 5' концу мРНК.¹ Рибосома защищает конечный участок от дегградации. При перемещении рибосомы конечный участок 5' либо деградирует, либо присоединяет к себе новую рибосому; ранее присоединенные рибосомы, находящиеся впереди, продолжают двигаться, синтезируя белок.

Следовательно, при сплетении двух спиралей в одну, необходимо соблюдение вышеприведенного соответствия нуклеотидов, расположенных на этих спиральных.

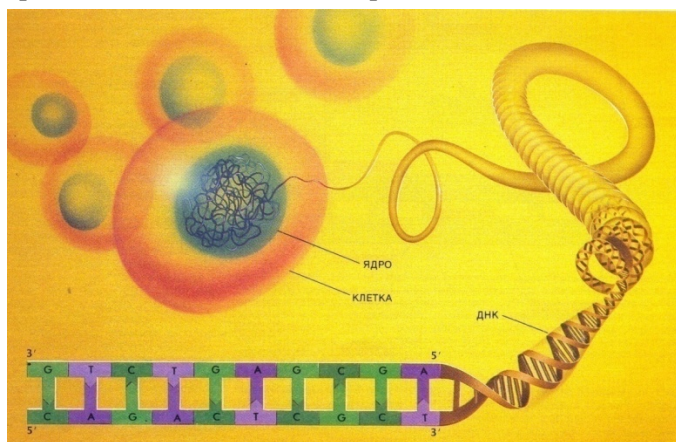


Рис. 11.15

§11.7. Дискретные поляроны, дискретные солитоны и дискретные пентароны в полимерах и их оптимизационные свойства

В обобщенном плане любая наука делится на фундаментальную и прикладную. По своему содержанию вопросы, излагаемые в настоящем параграфе, носят прикладной характер.

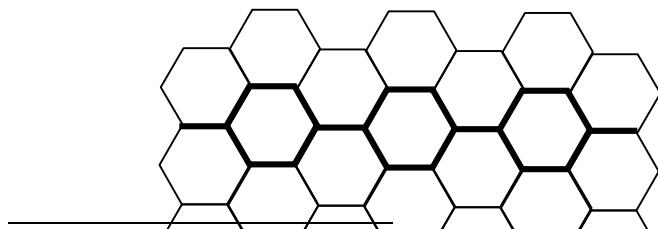
¹ мРНК – матричная РНК.

Ученые исследуют биологические системы с целью создания искусственных материалов, имеющих желаемые функции – физические, химические, биологические; наиболее характерным параметром этих материалов является структура их молекулы. Изменение структуры, при получении материалов с желаемыми функциями, обычно происходит дискретно (скачкообразно); влияние даже минимальных структурных изменений в той или иной мере сказывается на свойствах синтезируемого материала.

Процесс создания новых материалов с желаемыми свойствами, а, следовательно, с определенной структурой, представляет собой самоорганизующийся процесс (см. Рис. 11.20). Это означает, что создается новый, искусственный материал, полимер, имеющий наперед заданную структуру и, следовательно, соответствующие свойства. Ниже будет показано, что эти полимеры, обладают оптимизационными свойствами.

11.7.1. Оптимизационные свойства дискретного полярона¹

На атомно-молекулярном уровне материя дискретна. На Рис. 11.15 показана гексагональная структура полимера поли-*n*-фенилена. На этом рисунке жирным шрифтом выделен полярон; он вынесен отдельно на Рис. 11.15а.



¹ Название «полярон» и «солитон» приведенное в работе [112] в отношении структур, изображенных на Рис. 11.15а и Рис. 11.16а, не соответствуют установленным в литературе терминам.

Чтобы избежать терминологической путаницы, там где это возможно, мы будем пользоваться терминами «полярон» и «солитон».

Рис. 11.15

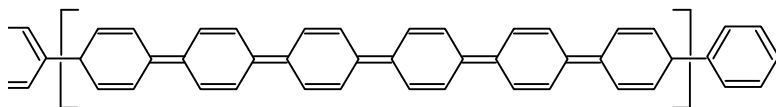


Рис. 11.15а

Этот полимер проводит электричество. Исходя из этого факта, исследователи считают, что электропроводимость поли-*p*-фенилена вызвана наличием в них поляронов. Из Рис. 11.15 видно, что совокупность поляронов образуют гексагональную структуру. Эта же структура характерна для ячейки Бенара (Рис.5.5в, Глава 5). В разделе 5.3.2 (Глава 5) подробно рассмотрены оптимизационные характеристики ячейки Бенара, вызванные наличием гексагональной структуры, в основе которой лежит полярон. Результаты раздела 5.3.2 т.е. Рис. 5.6а – Рис. 5.6в и формулы (5.80) – (5.93) остаются в силе в настоящем разделе. Основной результат раздела 5.3.2, который гласит, что площадь правильного шестиугольника (Рис. 5.6б) оптимальна, также остается в силе; сторона правильного шестиугольника AM определяется из ΔAMQ (Рис. 5.6б) и равна $AM = r = 1/\sqrt{3}$. Таким образом, полярон обладает оптимизационным свойством, согласно которому его сторона, образующая гексогональную структуру, оптимальна в смысле критерия (5.93).

11.7.2. Оптимизационные свойства дискретного солитона

На Рис. 11.16 показана гексагональная структура полимера транс-полиацетилена. На этом рисунке жирным шрифтом выделен солитон; он вынесен отдельно на рис. 11.16а.

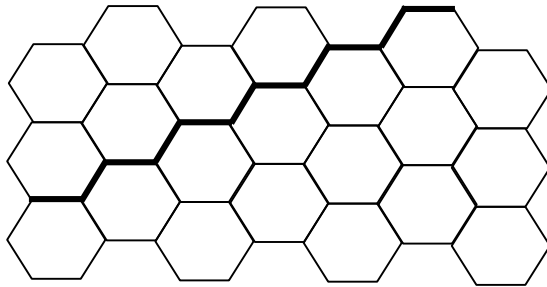


Рис. 11.16



Рис. 11.16а

Этот полимер также как и полярон проводит электричество. Ученые считают, что электропроводимость трансполиацетилена вызвана наличием в этом полимере солитонов. Из Рис. 11.15 видно, что совокупность солитонов образует гексагональную структуру. Для лучшего понимания структуры солитонов обратимся к фигуре, показанной На рис. 11.17а.

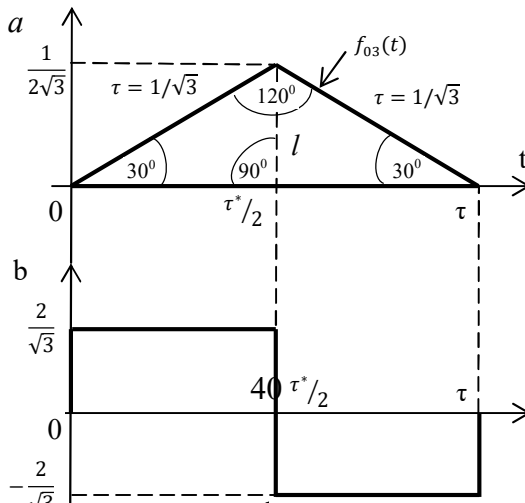


Рис. 11.17

Равнобедренный треугольник изображенный на этой фигуре имеет следующие параметры: длины равных ребер $\tau = 1/\sqrt{3}$, угол при вершине равен 120^0 , а углы при основании равны 30^0 , длина основания равна $\tau^* = 1$, высота равна $l = 1/2\sqrt{3}$.

Преобразование Лапласа от функции $f_{03}(t)$, показанной на Рис. 11.17а имеет вид

$$F_{03}(\tau^*, s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau^*}{2}s}\right)^2}{s^2}. \quad (11.63)$$

На Рис. 11.17б показан дискретный солитон $f_{01}^*(t)$ [113], интеграл от которого равен площади фигуры $f_{03}(t)$, показанной на Рис. 11.17а. Действительно, если найдем преобразование Лапласа от интеграла функции $f_{01}^*(t)$, то получим

$$L \left\{ \int_0^t f^*(t') dt' \right\} = \frac{1}{s} F_{03}^*(\tau^*, s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau^*}{2}s}\right)^2}{s^2} = F_{03}(\tau^*, s). \quad (11.64)$$

Выражения (11.63) и (11.64) означают, что изображения функций $f_{03}(t)$ и $\int_0^t f^*(t') dt'$ равны; поэтому будут равны также их оригиналы, т.е.

$$f_{03}(t) = \int_0^t f^*(t') dt'. \quad (11.65)$$

Формула (11.65) показывает, что не фигура $f_{03}(t)$ является солитоном, а она представляет собой интеграл от дискретного солитона $f_{01}^*(t)$, введенного в монографии [58].

В настоящее время принято положение, согласно которому интеграл от электрического солитона зависит от характера изменения химических связей вдоль цепи. У интеграла от солитона отсутствует магнитный момент, однако он может обладать зарядом, который составляет всего только долю элементарного заряда электрона [114].

11.7.3. Оптимизационные свойства дискретного пентарона

Пентарон – структура химического соединения, имеющего пять валентных связей (Рис. 11.18). Пентарон весьма часто встречается в биологической синтезе [115]. Согласно результатам предыдущего раздела 11.7.2 площадь пентарона представляет собой интеграл от совокупности соответствующих дискретных функций, изображенных на Рис. 5.6а и Рис. 11.17b. В точках А,В,С,Н,М (Рис. 11.18) пентарон терпит разрывы первого рода, поэтому описать эту фигуру удобно с использованием преобразования Лапласа. На Рис. 11.19а и Рис. 11.19b показаны треугольник АВС и трапеция АМНС, вместе образующие пентарон АВСNM (Рис. 11.18). Обратимся сначала к треугольнику АВС. Преобразование Лапласа от площади треугольника АВС описывается выражением

$$Q_{\Delta ABC}(s) = \frac{h}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2,$$

где $h = BE$.

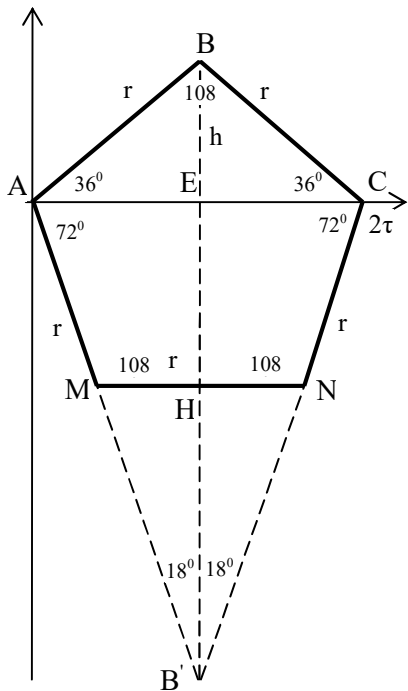


Рис. 11.18

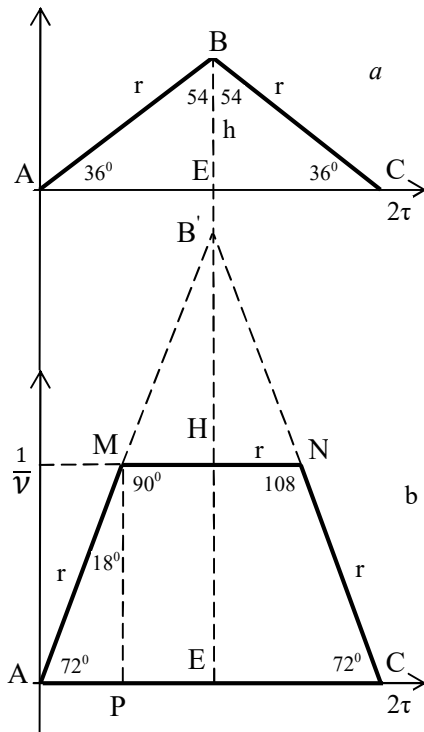


Рис. 11.19

На полубесконечном промежутке времени $[0, \infty)$ эта площадь запишется так

$$S_{\Delta ABC}(s) = \frac{h}{\tau s^2} \cdot \frac{(1 - e^{-\tau s})^2}{1 - e^{-\tau}} = \frac{h}{\tau s^2} \cdot \frac{1 - e^{-\tau s}}{1 + e^{-\tau s}} = \frac{h}{\tau s^2} th\left(\frac{\tau s}{2}\right). \quad (11.66)$$

Обратимся теперь к трапеции AMNC. Преобразование Лапласа от этой площади $Q_{AMNC}(s)$ определяется согласно выражению [115]:

$$Q_{AMNC}(s) = Q_{AB'C}(s) - Q_{MB'N}(s). \quad (11.67)$$

$$Q_{AB'C}(s) = \frac{H}{\tau s^2} (1 - e^{-\tau s})^2, \quad (11.68)$$

где $H = B'E$.

Преобразование Лапласа от площади $Q_{MB'N}(s)$ находится из выражения

$$\begin{aligned} Q_{MB'N}(s) &= Q_{AB'C}(s) - Q_{AMNC}(s) = \\ &= \frac{H}{\tau s^2} [(1 - e^{-\tau s})^2 - (1 - e^{-\tau / v})(1 - e^{-(2-1/v)\tau s})] = \\ &= \frac{H}{\tau s^2} e^{-\tau s/v} (1 - e^{-(1-1/v)\tau s})^2, \end{aligned} \quad (11.69)$$

где $1/v = MP$.

Подставим $Q_{AB'C}(s)$ и $Q_{MB'N}(s)$, определенные согласно формулам (11.68) и (11.69), в выражение (11.67), тогда получим

$$Q_{AMNC}(s) = \frac{H}{\tau s^2} \left[\left(1 - e^{-\frac{\tau s}{v}}\right) - e^{-\frac{\tau s}{v}} \left(1 - e^{-(1-\frac{1}{v})\tau s}\right)^2 \right]. \quad (11.70)$$

Поскольку запаздывание $e^{-\frac{\tau s}{v}}$, согласно [73], «забывается» при переходе к бесконечному интервалу $[0, \infty)$, то преобразование Лапласа от площади $Q_{AMNC}(s)$ на этом интервале определяется выражением

$$S_{Q_{AMNC}}(s) = \frac{H}{\tau s^2} \left\{ th\left(\frac{\tau s}{2}\right) - th\left[\frac{\left(1 - \frac{1}{v}\right)\tau s}{2}\right] \right\}. \quad (11.71)$$

Наша цель заключается в том, чтобы получить выражение оптимальности (минимальности занимаемой площади) пентароном ABCNM (Рис. 11.18) на полубесконечном интервале времени $[0, \infty)$. С этой целью введем обозначение

$$\Gamma(\tau, s) = \frac{1}{s} th\left(\frac{\tau s}{2}\right). \quad (11.72)$$

Функция $\Gamma(\tau, s)$ удовлетворяет квантовому уравнению Риккати [74]

$$\frac{d\Gamma(\tau, s)}{d\tau} = \lambda\Gamma(\tau, s) - \lambda\Gamma^2(\tau, s). \quad (11.73)$$

Правая часть уравнения (11.73) в дискретных точках $\tau = k\tau_0 (k = 0, 1, 2, \dots)$ является экстремалью в этих точках, поэ-

тому, как и в непрерывном случае, правая часть (11.73) удовлетворит функционалу оптимальности Лагранжа (см. раздел 5.3.2, ГЛАВА 5):

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau} L(\tau, s) d\tau = \min, \quad (11.74)$$

где $L(\tau, s)$ – функция Лагранжа.

Следует отметить, что в данном случае $L(\tau, s)$ состоит из суммы двух функций. Первая функция относится к треугольнику ABC, а второй – к трапеции AMNC, т.е.

$$L(\tau, s) = L_1(\tau, s) + L_2(\tau, s). \quad (11.75)$$

Поскольку правая часть уравнения (11.73) удовлетворяет критерию (11.74), то левая часть уравнения (11.73) также будет удовлетворять этому критерию

$$J = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{s} \Gamma(\tau, s) d\tau = \min. \quad (11.74a)$$

В нашем случае функция $\Gamma(\tau, s)$ состоит из суммы

$$\Gamma(\tau, s) = \Gamma_1(\tau, s) + \Gamma_2(\tau, s) \quad (11.76)$$

где

$$\Gamma_1(\tau, s) = hth\left(\frac{\tau s}{2}\right), \Gamma_2(\tau, s) = H \left\{ th\left(\frac{\tau s}{2}\right) - th\left[\frac{\left(1 - \frac{1}{v}\right)\tau s}{2}\right] \right\}. \quad (11.77)$$

Исходя из выражения (11.76), критерий минимальности площади, занимаемой дискретным пентароном на всей полубесконечной временной оси, примет вид

$$J = J_1 + J_2 = \min \quad (11.78)$$

Определим каждый член выражения (11.78):

$$J_1 = \int_0^{\tau} \Gamma_1(\tau, s) d\tau = h \left(\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \tau \right) = h\tau, \quad (11.79)$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= H \int_0^{\tau} th\left(\frac{\tau S}{2}\right) d\tau - H \int_0^{(1-1/\nu)\tau} th\left[\frac{(1-1/\nu)\tau S}{2}\right] d\tau = \\
 &= H\tau - H\tau\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{\nu}H\tau
 \end{aligned} \tag{11.80}$$

Подстановка значений (11.79) и (11.80) в (11.78) дает

$$J = \left(h + \frac{1}{\nu}H\right)\tau = \min. \tag{11.81}$$

Параметрами пентарона являются

$$\begin{cases}
 h = r \cos 54^\circ = r \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \\
 \tau = r \sin 54^\circ = r \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \\
 \frac{1}{\nu} = r \sin 72^\circ = r \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \\
 H = r \frac{(\sqrt{5} + 1)\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)}.
 \end{cases} \tag{11.82}$$

Подстановка параметров (11.82) в критерий (11.81) дает

$$J(r) = \alpha r^2 - \nu r^3 = \min, \tag{11.83}$$

где параметры α , ν имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{(\sqrt{5} + 1)\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{8\sqrt{2}} \approx 0,475, \\
 \nu &= \frac{(\sqrt{5} + 1)^2 (\sqrt{5 + \sqrt{5}})^2}{32(\sqrt{5} - 1)} \approx 1,914.
 \end{aligned}$$

Из выражения $J'(r)_r = 0$ находим минимальное значение стороны r пентарона

$$r_{\min} = \frac{2\alpha}{3\nu} \approx 0,1654.$$

При этом значение r_{\min} критерий (11.83) достигает минимального значения

$$J(r_{min}) = 0.0043.$$

Как отмечалось в настоящем параграфе процесс создания новых материалов является самоорганизующимся процессом. В этом процессе, составной частью самоорганизующейся системы являются ученые-исследователи, синтезирующие новый материал с заданной структурой. Обобщенная блок-схема, самоорганизующегося процесса создания нового материала с заданной структурой, показана на Рис. 11.20.

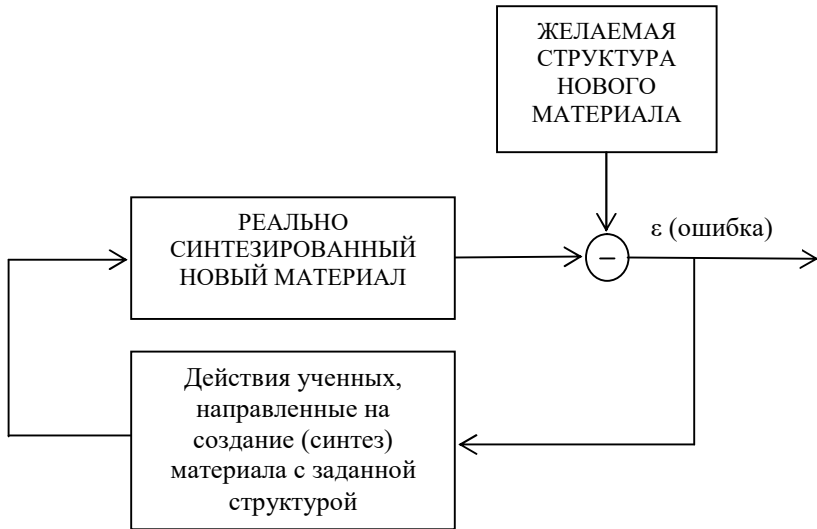


Рис. 11.20

* * *

Важным результатом настоящей главы можно считать установление параллелизма между информационной классификацией организующихся, самоорганизующихся и организованных систем (смотрите раздел 1.3.1. ГЛАВА 1), предложенной в настоящей монографии, и процессом зарождения и развития жизни на нашей планете. Действительно, в таблице приведены две блок-схемы, из сопоставления которых видно существование параллелизма, т.е. совпадение фаз между предложенной инфор-

мационной классификацией систем и явлением зарождения и развития жизни на Земле.

Таблица

Неорганизованная система. Беспорядок		Организующаяся система	
Первичный бульон		Естественные организующиеся процессы	Искусственные организующиеся системы (рукотворные)
Начальная стадия. Хаос	Предбиологическая стадия. Стихийные организующиеся процессы по Эйгену		

Самоорганизующаяся система		Организованная система
Естественные самоорганизующиеся процессы	Искусственные самоорганизующиеся системы (рукотворные)	Безлюдные производства. Работают роботы-манипуляторы

Подобно тому как нет резкой разницы между «живым» и «неживым», нет также резкой разницы между живыми существами обладающими разумом и живыми существами необладающими разумом. Поэтому, в таблице живые существа помещены в один блок, соответствующий самоорганизующимся системам.

Краткие комментарии к одиннадцатой главе

Показано, что самоорганизация в белково-нуклеотидном комплексе в мгновенные моменты времени удовлетворяет уравнению Риккати; это уравнение в свою очередь удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера–Лагранжа. Отмечено, что самоорганизация макромолекул эквивалентна модели процесса рождения (размножения). Приводится математическая модель первичного жизненного цикла.

Обращено внимание на модель генетического триггера. Показаны трудности при использовании триггерных свойств в проблеме моделирования биологических процессов. Отмечена целесообразность использования функции гиперболического тангенса, в проблеме аппроксимации, поскольку эта функция тесно связан с солитоном. Приводятся различные примеры использования солитонов в биологии. Даны математические модели и оптимизационные характеристики искусственно полученных материалов – полимеров. Показана самоорганизующаяся природа получения этих полимеров.

На основании использования соответствующей блок-схемы, приводится важный результат настоящего параграфа, заключающийся в установлении параллелизма между информационной классификацией самоорганизующихся, организующихся и организованных систем и процессом зарождения и развития жизни на нашей планете.

ГЛАВА 12

Детерминированный хаос в расширенных самоорганизующихся и организующихся системах размерности «три» и «четыре»

В самоорганизующихся и организующихся системах обычно действуют как внутренние, так и внешние чисто случайные шумы, которые невозможно воспроизвести. Существование

этих шумов обусловлено различной природой их происхождения; среди этих шумов встречаются: тепловой шум, фликерный шум, дробовой шум и т.д. Действие внешних и внутренних шумов на систему могут вызвать в ней бифуркации. Бифуркации, индуцированные шумом, могут оказать существенное влияние на движение системы. Если действуют несколько шумов разной природы, то бифуркационные явления определяются всей совокупностью действующих шумов. При этом флуктуации, возникающие в системе, приобретают принципиальный характер вблизи точек бифуркации. Неустойчивость системы вызывает ее повышенную чувствительность к флуктуациям. Следовательно, учет влияния флуктуаций имеет существенное значение, поскольку флуктуации могут вызвать бифуркацию системы; в результате возможной бифуркации невозможно заранее (априори) определить по какому пути пойдет движение системы. В настоящей главе не будут рассмотрены случайные шумы, действующие в странных аттракторах, индуцирующие хаос в соответствующих системах.

Для странных аттракторов характерна устойчивость по Пуассону и неустойчивость по Ляпунову. Структура странных аттракторов такова, что они могут существовать в фазовом пространстве размерности $n \geq 3$. Согласно теореме Лиувилля при движении гамильтоновой (консервативной) системы ее фазовый объем сохраняется. В противоположность этому в диссипативных системах фазовый объем сжимается. Этим свойством характеризуются все странные аттракторы. Странные аттракторы являются удачной математической моделью нерегулярного детерминированного движения. Поэтому их функционирование обычно ассоциируется с детерминированным хаосом, хотя для динамической системы со странным аттрактором, всегда имеет-ся строгая предсказуемость ее траектории.

История обнаружения первого странного аттрактора начинается со статьи Эдварда Н. Лоренца [72] по моделированию конвективных процессов в атмосфере. После этой статьи последовало большое число работ посвященных странным аттракторам. Модель Лоренца и соответствующий ей странный аттрактор уже рассматривались в Главе 5. В книге [37] высказывается мысль, что модель Лоренца конвективных процессов в атмосфере может также описать поведение жидкости в задаче Бенара, если учесть только три фурье-амплитуды. Хотя по физическому содержанию обе модели очень далеки друг от друга; модель Лоренца считается чрезвычайно упрощенной с ее всего лишь тремя модами для двух функций состояния жидкости в модели Бенара.

После статьи Лоренца последовали публикации, в которых существование странных аттракторов было обнаружено в лазерах [116], в химических реакторах, в радиотехнических системах и т.д. Моделирование образования странного аттрактора Лоренца дано во многих монографиях. Подробный вывод модели Лоренца дается в монографии [117].

В настоящей главе приводится несколько моделей странных аттракторов рассмотренных автором [118]. Все нижеописанные аттракторы существуют в пространствах, имеющих размерность «три» и «четыре».

§12.1. Общая характеристика странных аттракторов

К настоящему времени странные аттракторы обнаружены в физических, химических, биологических и других системах [117]. Следует отметить, что все обнаруженные к настоящему времени странные аттракторы имеют дробную хаусдорфову размерность.

Странные аттракторы имеют следующие характеристики.

- a.* Траектория странного аттрактора чувствительна к изменению начальных условий.
- b.* Траектория странного аттрактора хаотична.
- c.* Траектория странного аттрактора притягивается к ограниченной области пространства состояний.
- d.* Объем этой области сжимается до нуля; это означает, что траектория странного аттрактора порождает множество точек, размерность которых меньше размерности странного аттрактора.
- e.* Странные аттракторы обладают свойством масштабной инвариантности, заключающееся в повторяемости их структуры на все более мелких масштабах.

Процесс уменьшения до нуля начального объема системы обычно называют свойством перемешивания. Перемешивающие системы эргодичны, но не наоборот. Перемешивание является более сильным свойством чем эргодичность.

Существенным различием между стохастическим и детерминированным движением является то, что хаотическая траектория непрерывно генерирует энтропию. Странный аттрактор представляет новый тип детерминированного движения системы: предсказуемый, но не периодический; в чем сходство и различие таких движений с истинно случайными? На данный вопрос пока нет определенного ответа.

По отношению к теории самоорганизации для диссипативных системах возникает вопрос: может ли энтропия системы, содержащей странный аттрактор, служить мерой упорядоченности системы, т.е. служить количественной характеристикой степени порядка? Ведь энтропия упорядоченных движений в системе будет меньше энтропии хаотических движений. Данный вопрос принципиален, поскольку от величины информационной

энтропии зависит процесс самоорганизации в динамической системе.

§12.2. Переход от грубой динамической системы к негрубой на примерах странных аттракторов Ресслера и Лоренца

Обратимся к грубой (согласно классификации данной в [36]) динамической системе, заданной уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - (1 + b + z)x + (a + c)z, \\ \dot{z} = (x - c)z + bx. \end{cases} \quad (12.1)$$

Система (12.1) является грубой замкнутой нелинейной динамической системой второго порядка с функцией $z = \varphi(x, b, c)$ в обратной связи. Если мы введем обозначение $\dot{y} = x + ay$ и проинтегрируем первое из уравнений системы (12.1) в пределах от 0 до x , то получим странный аттрактор Ресслера [119]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = (x - c)z + bx. \end{cases} \quad (12.2)$$

Странный аттрактор Ресслера, как и все известные до настоящего времени странные аттракторы, представляет собой негрубую динамическую систему, согласно классификации динамических систем, приведенных в [36]. Таким образом, увеличение размерности пространства состояний (фазового пространства) грубой системы (12.1) на одно измерение, переводит грубую динамическую систему в класс негрубых динамических систем (12.2).

Общий вид аттрактора Ресслера в трехмерном пространстве показан на Рис. 12.1.

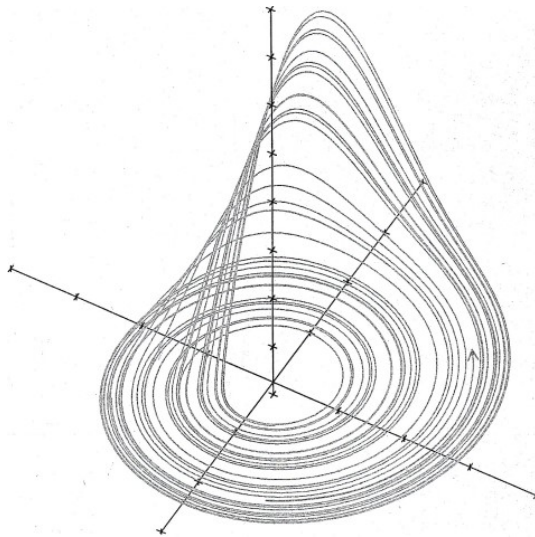


Рис. 12.1

Для странного аттрактора (12.2) фазовый объем будет сжиматься согласно выражению

$$W_1 = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = a - c + x < 0. \quad (12.3)$$

Из неравенства (12.3) следует, что оно будет выполняться, если имеет место следующее неравенство

$$c - a > x. \quad (12.4)$$

Неравенство (12.4) показывает, что сжатие фазового объема странного аттрактора (12.2) не происходит с постоянной скоростью (как это имеет место в случае аттрактора Лоренца (5.70a)), а зависит от текущего значения координаты (компоненты) x состояния этого странного аттрактора. Странный аттрактор Ресслера вначале имел только математическое толкование, однако в последствии он был обнаружен в химических реакторах.

Все вышесказанное по отношению к аттрактору Ресслера имеет также место для аттрактора Лоренца (5.70). Действительно, обратимся к грубой двумерной нелинейной динамической системе

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 + \sigma)\dot{x} - \sigma(1 - r + z)x, \\ \dot{z} = -bz + x^2 + x\dot{x}/\sigma. \end{aligned} \quad (12.5)$$

с функцией $z = f_0(x, b, \sigma)$ в обратной связи. Если проинтегрируем первое уравнение системы (12.5) в интервале от 0 до x и введем обозначение $\dot{y} = rx - y - xz$, то получим странный аттрактор Лоренца (5.70). И в этом случае, увеличение размерности фазового пространства грубой системы на одно измерение, переводит грубую систему (12.5) в класс негрубых динамических систем (5.70). То, что переход от двумерного пространства в трехмерное пространство приводит к хаотическому поведению, хорошо видно из результатов раздела 5.1.2 (Глава 5). Переход от организующейся системы уравнений (5.37), (5.38) к системе уравнений странного аттрактора (5.32) – (5.34), означает переход от грубой системы к негрубой, что и является причиной появления хаотического поведения. Как и все странные аттракторы, аттрактор Лоренца (5.70) имеет дробную хаусдорфову размерность D_L :

$$D_L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln M(\epsilon) / \ln(1/\epsilon)] = 2,06,$$

где $M(\epsilon)$ – минимальное число N -мерных кубиков со стороной ϵ (в N -мерном фазовом пространстве), необходимых для покрытия всех элементов произвольного предельного множества G .

§12.3. Условие, при выполнении которого модифицированные уравнения Ван дер Поля в пространстве размерности

«три» генерируют детерминированный хаос

Странный аттрактор Ван дер Поля в фазовом пространстве размерности три имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \delta y - \delta zy, \\ \dot{z} = -vz + vx^2. \end{cases} \quad (12.6)$$

Определим значение координаты z при котором система уравнений (12.6) генерирует хаотическое движение, т.е. представляет собой странный аттрактор. С этой целью определим условие, при котором фазовый объем этой системы сжимается:

$$W_2 = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = \delta - v - \delta z < 0. \quad (12.7)$$

Из выражения (12.7) следует, что уравнение Ван дер Поля (12.6) в пространстве размерности «три» будет странным аттрактором, если для координаты z будет выполняться неравенство

$$z > 1 - v/\delta.$$

§12.4. Условие, при выполнении которого уравнения «орегонатора» генерируют детерминированный хаос

Филд и Нойес предложили модель химической реакции названной ими «орегонатором» [120]. Тайсон модифицировал «орегонатор» путем более точного учета некоторых экспериментальных данных о промежуточных реакциях [121]. В безразмерной форме уравнения модифицированного «орегонатора» имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ny - \rho xy + \rho(1 - z) - fx^2, \\ \frac{dy}{dt} = -my - kxy + gz, \\ \frac{dz}{dt} = x(1 - z) - z. \end{cases} \quad (12.8)$$

Найдем соотношение между координатами системы (12.8) при которых эта система является странным аттрактором. Для этого определим условие, при выполнении которого, фазовый объем системы (12.8) сжимается:

$$W_3 = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\rho y - 2fx - m - kx - x - 1 < 0. \quad (12.9)$$

Выражение (12.9) показывает, что система (12.8) представляет собой странный аттрактор, если имеет место неравенство

$$y > -(s/\rho)x - \frac{1 + m}{\rho},$$

где $s = 2f + k + 1$.

Это означает, что фазовый объем сжимается со скоростью, зависящей от координат x и y .

§12.5. Условие, при выполнении которого система уравнений Лэнгфорда является странным аттрактором

Система уравнений Лэнгфорда имеет вид [54]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (v - 1)x - y + xz, \\ \frac{dy}{dt} = x + (v - 1)y + yz, \\ \frac{dz}{dt} = vz - (x^2 + y^2 + z^2). \end{cases} \quad (12.10)$$

Определим значение параметра v при котором система (12.10) представляет собой странный аттрактор. С этой целью

найдем соотношение, при выполнении которого, фазовый объем системы (12.10) будет сжиматься:

$$W_4 = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = 3\nu - 2 < 0. \quad (12.11)$$

Из выражения (12.11) следует, что фазовый объем будет сжиматься, если будет иметь место неравенство

$$\nu < \frac{2}{3}. \quad (12.12)$$

Следовательно, для множества значений параметра ν , удовлетворяющих неравенству (12.12), система Лэнгфорда (12.11) будет странным аттрактором. Система (12.10) получена обрезанием бесконечной системы дифференциальных уравнений, первоначально введенной Хопфом [122] в качестве возможной модели турбулентности жидкости.

§12.6. Условия образования странного аттрактора в расширенной системе Вольтерра–Лотка

Интерес представляют условия существования странного аттрактора в знаменитой самоорганизующейся системе «хищник–жертва». С целью нахождения этих условий запишем уравнения Вольтерра–Лотка с учетом пищи (травы), потребляемой кроликами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx \left[1 - \int_{-\infty}^0 x(t+\tau)g(-\tau)d\tau \right] - \alpha xy, \\ \dot{y} &= \beta xy - by, \end{aligned} \quad (12.13)$$

где x описывает численность кроликов, а y – численность лисиц; α, β, r, b – положительные параметры и

$$g(t) = (t/T^2)e^{-t/T}, \quad T > 0. \quad (12.14)$$

Функция $g(t)$ описывает вызревание травы, а параметр T

означает среднее время естественного восстановления пищи после выедания.

С целью получения условий существования странного аттрактора введем обозначения:

$$\begin{cases} z = \int_{-\infty}^0 x(t + \tau)g(-\tau)d\tau, \\ u(t) = \dot{z}(t). \end{cases} \quad (12.15)$$

Поскольку странный аттрактор может существовать в фазовом пространстве размерности $n \geq 3$, то введением обозначений (12.15) мы расширили фазовое пространство до $n=4$. Если воспользоваться наличием дифференциального уравнения [54]

$$\ddot{g} + (2/T)\dot{g} \pm g/T = 0,$$

то согласно выражениям (11.13) и (12.15) будем иметь

$$\begin{cases} \dot{x} = r(1 - z)x - \alpha xy, \\ \dot{y} = \beta xy - by, \\ \dot{z} = u, \\ \dot{u} = T^{-2}x - 2T^{-1}u - T^{-2}z. \end{cases} \quad (12.16)$$

Для системы уравнений (12.16), условие существования странного аттрактора в виде требования сжатия фазового пространства таково

$$W_4 = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} = r - rz - \alpha y + \beta x - b - 2T^{-2} < 0. \quad (12.17)$$

Условие (12.17) показывает, что странный аттрактор в расширенной самоорганизующейся системе Вольтерра–Лотка образуется, если выполняется неравенство

$$\beta x - \alpha y - rz < b + 2T^{-2} - r. \quad (12.18)$$

Выражение (12.18) свидетельствует, что объем фазового пространства странного аттрактора сокращается неравномерно. Неравенство (12.18) должно выполняться постоянно, накладывая ограничения на компоненты (координаты) x , y и z странно-

го аттрактора.

§12.7. Условия образования странного аттрактора в математической модели оптимальной периодической политики занятости

Рассмотрим математическую модель оптимальной периодической политики занятости, с учетом использования принципа максимума Л.С. Понтрягина, которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = m(L - A), \\ \frac{dL}{dt} = \beta - qL, \\ \frac{d\alpha}{dt} = f' + \alpha(m - R), \\ \frac{d\beta}{dt} = -pF' + \omega - f' - \alpha m + \beta(q - R). \end{cases} \quad (12.19)$$

В системе уравнений (12.19) имеют место следующие обозначения:

$A(t) = m \int_{-\infty}^t L(\tau) \exp[-(t - \tau)] d\tau$ – норма занятости, определяемая правительством, а m – положительное число, L – общие трудовые ресурсы;

поведение правительства описывается функцией

$$\begin{cases} f(L - A) > 0, & \text{если } A < L, \\ f(L - A) < 0, & \text{если } A > L, \end{cases} \quad f(0) = 0,$$

причем функция f дифференцируема достаточное число раз;

F – производственная функция,

α, β – затратные переменные,

R – темп инфляции (обесценивания),

q – темп увольнения служащих по собственному желанию,

m – цена продукции,

ω – величина арендной платы.

Для системы (12.19) фазовый объем сжимается согласно выражению

$$W_5 = \frac{\partial \dot{A}}{\partial A} + \frac{\partial \dot{L}}{\partial L} + \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} = -2R < 0. \quad (12.20)$$

Поскольку, темп инфляции R не бывает отрицательной величиной, то система уравнений (12.19) представляет собой странный аттрактор. Если на определенном интервале времени темп инфляции R становится постоянным, то фазовый объем странного аттрактора сжимается с постоянной скоростью в этом промежутке времени. В общем случае темп инфляции R изменяется непрерывно, оставаясь положительным; поэтому, согласно выражению (12.20), фазовый объем аттрактора (12.19) сжимается равномерно. Положительный темп инфляции стимулирует в обществе существование детерминированного хаоса.

* * *

С математической точки зрения странные аттракторы негрубые системы. Это значит, что при сколь угодно малых изменениях сепаратрисы, входящие в него (аттрактора) «седла» меняют свое расположение – они то включаются в сепаратрисные поверхности одного из седловых циклов, входящих в аттрактор, то отделяются от нее (сепаратрисы). Странному аттрактору принадлежит и счетное всюду плотное множество «седловых» предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом и всюду плотное множество устойчивых по Пуассону траекторий.

Краткие комментарии к двенадцатой главе

Показано, что увеличение размерности пространства состояний на одно измерение переводит грубую систему в класс негрубых систем, к которым относится странный аттрактор.

Получены условия, при выполнении которых, образуются странные аттракторы: в трехмерной модели Ван дер Поля, модели «орегонатора», модели уравнений Лэнгфорда, в расширенной модели Вольтерра–Лотка, а также при использовании модели оптимальной периодической политики занятости.

Заключение

В разделе 3.4.3. (ГЛАВА 3) приводились некоторые встречающиеся уравнения Риккати, возникающие при количественном описании самых различных явлений. С целью возможного обобщения приводимых уравнений Риккати на процесс самоорганизации, происходящий в человеческих сообществах, рассмотрим важный пример, приведенный в [7], иллюстрирующий модель процесса самоорганизации в человеческих сообществах. Согласно этому примеру желательность принятия i -ого решения из K альтернативных возможностей, приходящаяся на единицу времени, пропорциональна относительной привлекательности i -ого варианта. По мере того как происходит принятие решения относительно выбранного варианта, выигрыш изменяется так, что среди предпочтительных вариантов (на уровне популяции) это отразится в виде увеличения или уменьшения привлекательности соответствующих выборов. Сказанное, в частном случае двух возможных выборов α и β , можно схематически представить в виде взаимодействия двух групп людей X_α и X_β (Рис. 1):

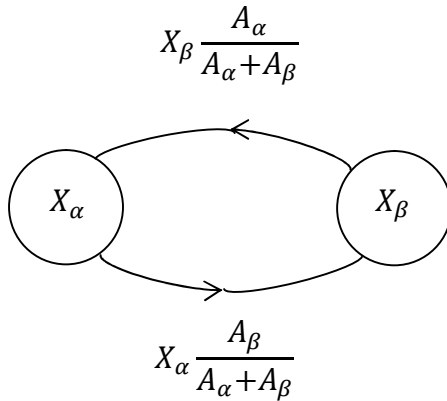


Рис 1.

На Рис.1 A_α представляет собой привлекательность выбора α а X_α – число людей, склонившихся к выбору α к настоящему моменту времени. Ясно, что относительное число лиц, желающих поменять свой выбор на выбор β , пропорционально числу тех, кто уже сделал некоторый другой выбор типа α с относительной привлекательностью выбора β , определенной как

$$\frac{A_\beta}{A_\alpha + A_\beta}.$$

Аналогично число лиц, желающих поменять выбор β на выбор α , пропорционально X_β , умноженному на относительную привлекательность α , равную $\frac{A_\alpha}{A_\alpha + A_\beta}$. Сказанное приво-

дит к системе уравнений для X_α следующего вида

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = aX_\alpha \left(\frac{X_\beta A_\alpha}{A_\alpha + A_\beta} - \frac{X_\alpha A_\beta}{A_\alpha + A_\beta} \right).$$

Если ввести полный размер популяции $N = X_\alpha + X_\beta$, то последнее уравнение может быть записано в виде уравнения типа Риккати

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = aX_\alpha \left(\frac{NA_\alpha}{A_\alpha + A_\beta} - X_\alpha \right). \quad (1)$$

Уравнение, аналогичное (1) можно записать для X_β .

Таким образом, существование различных вариантов выбора влияет на текущую способность динамической системы, которая становится функцией *мгновенного состояния системы* из-за зависимости привлекательности от переменных X .

Циклической схеме на Рис. 1 соответствует известное высказывание великого философа Г.В.Ф. Гегеля: «то, что действительно – разумно, то, что разумно – действительно».

Вышеизложенные соображения легко обобщаются на случай произвольного числа выборов K с учетом более реальной ситуации, когда привлекательность i -го варианта зависит от

номера j -ой популяции, которая должна сделать выбор. Следовательно, имеем следующие уравнения

$$\frac{dX_i}{dt} = C_i X_i \left(1 - \frac{X_i}{\sum_{j=1}^K \frac{N_j A_{ij}}{\sum_l A_{lj}}} \right), \quad i = 1, \dots, K. \quad (2)$$

В выражении (2) предполагается, что популяция неоднородна; она распадается на несколько различных субпопуляций N_j , каждая из которых имеет свое представление об относительной привлекательности данного выбора.

Поведение описываемое уравнениями (2) динамической системы существенно зависит от того, каков характер зависимости привлекательностей A_{ij} и N_j от переменных X_i .

Введем обозначения:

$$M_i(t) = \sum_{j=1}^K \frac{N_j A_{ij}}{\sum_l A_{lj}}$$

и

$$\Lambda_i(t) = \frac{C_i}{M_i(t)}.$$

С учетом этих обозначений уравнения (2) примут вид

$$\frac{dX_i}{dt} = \Lambda_i(t) X_i (M_i(t) - X_i). \quad (3)$$

Уравнения (3) являются нестационарными. Однако, если параметры $M_i(t)$ и $\Lambda_i(t)$ рассматривать в мгновенные моменты времени t_{α} ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$), то в эти моменты времени уравнения (3) будут представлять собой стационарные уравнения Риккати. Такой подход к нестационарному уравнению нами уже использовался в § 11.1. В данном случае уравнения (3) запишутся в виде

$$\frac{dX_i}{dt} = \Lambda(t_{\alpha_i}) X_i (M_i(t_{\alpha_i}) - X_i). \quad (4)$$

Решение уравнений (4) в каждый мгновенный момент времени $t_{\alpha} (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$ имеет вид

$$X_i = \frac{M_i(t_{\alpha_i})}{1 - e^{-\Lambda_i(t_{\alpha_i})M_i(t_{\alpha_i})(t-t_0)}}. \quad (5)$$

Скорость изменения числа людей X_i , принимающих i -ое решение в момент времени t_{α_i} , находим из (5)

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{1}{4} C_i M_i(t_{\alpha_i}) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} C_i (t - t_0) \right], \quad (6)$$

где t_0 совпадает с моментом максимальной скорости изменения числа людей, принимающих i -ое решение.

Возникает естественный вопрос: в чем новизна настоящей монографии? Поскольку многие объекты описываются уравнением Риккати, то из результатов настоящей монографии вытекает следующая блок-схема (Рис. 2), поясняющая роль уравнения Риккати в исследовании поведения моделей самоорганизующихся и организующихся систем, и возможной их оптимизации. Уравнение Риккати удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера – Лагранжа (3.24).

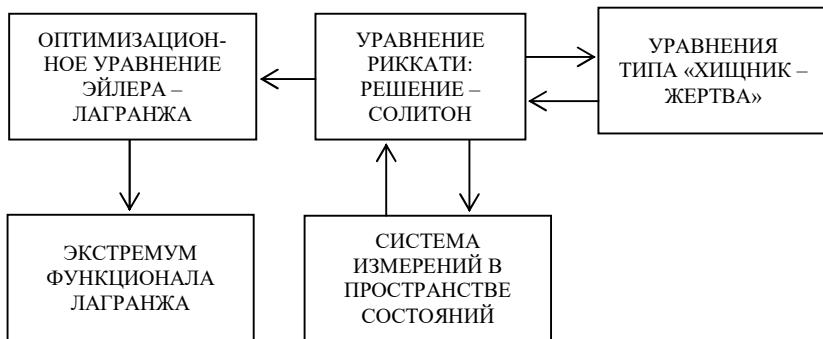


Рис. 2

От этого уравнения можно перейти к соответствующей системе измерений в пространстве состояний. Уравнение Рикка-

ти также позволяет перейти к антагонистической системе уравнений типа «хищник – жертва»; правда, этот переход неоднозначен, хотя обратный переход однозначен.

Если сделать крупное обобщение, то в настоящей монографии получены три важных результата.

1. Решение уравнения Эйлера – Лагранжа путем использования функций гиперболического секанса и гиперболического тангенса; при этом производные от функции Лагранжа находятся не как производные от переменных, а как производные от этих гиперболических функций.
2. Переход от устойчивой и неустойчивой системы типа Вольтерра–Лотка к соответствующему уравнению Риккати.
3. Поскольку уравнение Риккати, а следовательно, и его решение, удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера – Лагранжа, то система антагонистических уравнений Вольтерра–Лотка также является оптимальной согласно уравнению Эйлера–Лагранжа.

Таким образом, в настоящей монографии получены новые результаты по исследованию и синтезу моделей самоорганизующихся и организующихся систем, вытекающие из блок-схемы, приведенной на Рис. 2.

* * *

Благодарности (посмертно).

Гениям математики: Л. Эйлеру, Дж.Л. Лагранжу, У.Р. Гамильтону, К.Дж. Якоби приношу глубокую благодарность за возможность использования их достижений;

Выдающимся ученым: Риккати, Н. Ахиезеру, Р. Калману, М. Эйгену выражаю искреннюю признательность за то удовольствие, которое я получил от ознакомления и применения их научных результатов;

Моим близким: бабушке – Тамаре Топурия (Канделаки), матери – Ирине Канделаки, дедушке Георгию Канделаки, отцу – Валентину Мдзинаришвили (старшему) приношу сердечную признательность за: воспитание, домашнее обучение, выращивание, интеллектуальную поддержку моих начинаний, генетическое обеспечение моего развития и в знак благодарности склоняю голову перед их памятью.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Оптимальная оценка состояния линейных многошаговых процессов с дискретными измерениями

Рассмотрим линейный стохастический многошаговый процесс, описываемый уравнениями

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + \Gamma_i w_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad (A.1)$$

$$E[x_0] = x_0, \quad (A.2)$$

$$E[w_i] = w_i, \quad (A.3)$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = M_0, \quad (A.4)$$

$$E[(w_i - \bar{w}_0)(w_0 - \bar{w}_0)^T] = Q_i \delta_{ij}, \quad (A.5)$$

$$E[(w_i - \bar{w}_i)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = 0, \quad (A.6)$$

где E – оператор математического ожидания, δ_{ij} – символ Кронера.

Когда система находится в состоянии i , производится измерение z_i . Эти измерения линейно связаны с состоянием x_i

$$z_i = H_i x_i + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (A.7)$$

$$E[v_i] = 0, \quad (A.8)$$

$$E[v_i v_j^T] = R_i \delta_{ij}, \quad (A.9)$$

$$E[(w_i - \bar{w}_i) v_j^T] = 0 \quad \text{и} \quad E[(x_0 - \bar{x}_0) v_i^T] = 0, \quad (A.10)$$

Естественно, что оценку состояния x_k по методу наименьших квадратов, использующую только измерения x_0, x_1, \dots, x_k , можно получить последовательно, т.е.

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i + K_i (z_i - H_i \hat{x}_i), \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad k \leq N, \quad (A.11)$$

где

$$\hat{x}_{i+1} = \Phi_i \hat{x}_i + \Gamma_i w_i, \quad x_0 - \text{задано}; \quad (A.12)$$

а член $\hat{x}_{i+1} = E[x_{i+1} | z_1, z_2, \dots, z_i]$,

$$K_i = P_i H_i^T R_i^{-1}, \quad (A.13)$$

$$P_i = (M_i^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1} =$$

$$= M_i - M_i H_i^T (H_i M_i H_i^T + R_i)^{-1} H_i M_i, \quad (A.14)$$

$$M_{i+1} = \Phi_i P_i \Phi_i^T + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T. \quad (A.15)$$

Уравнения (A.11) – (A.15) представляют собой фильтр Калмана для линейных многошаговых процессов. Эти результаты Калман опубликовал в журнале «Труды Американского общества инженеров-механиков» (ASME) в 1960 г. [123].

В выражении (A.13) матрица пропорциональности K_i характеризует соотношение между неопределенностью состояния P_i и неопределенностью в измерениях R_i .

Фильтр Калмана имеет ряд преимуществ:

a. Эволюция матрицы ошибки оценки (формулы (A.14) и (A.15)) *не зависит* от измерений z_i . Следовательно, если заданы параметры уравнений системы и процесса наблюдений, то матрицу ковариаций можно вычислить заранее и запомнить.

b. Вычисление улучшенной оценки (формулы (A.11) и (A.12)) производится только по *текущим* измерениям и матрице ковариаций ошибки. Поэтому оценку можно легко получить в реальном масштабе времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Оптимальная оценка состояния непрерывных линейных динамических систем с непрерывными измерениями

Результаты ПРИЛОЖЕНИЯ А, относящиеся к многошаговым процессам, можно формально распространить на непрерывные динамические процессы.

Заменим x_i на $x(t_i)$ и введем обозначение $\Delta = t_{i+1} - t_i$. При этом разностное уравнение (А.1) можно записать в виде

$$\frac{x(t_i + \Delta) - x(t_i)}{\Delta} = \frac{\Phi(t_i + \Delta, t_i) - I}{\Delta} x(t_i) + \frac{\Gamma_i}{\Delta} w(t_i). \quad (\text{Б. 1})$$

При $\Delta \rightarrow \infty$ уравнение (А.1) становится дифференциальным

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)w(t); \quad (\text{Б. 2})$$

здесь

$$F(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Phi(t_i + \Delta, t_i) - I}{\Delta}, \quad (\text{Б. 3})$$

$$G(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{\Delta}, \quad (\text{Б. 4})$$

Разностные уравнения (А.11) – (А.15) можно представить так

$$\hat{x}_i - \bar{x}_i = P_i H_i^T (R_i \Delta)^{-1} (z_i - H \bar{x}_i) \Delta, \quad (\text{Б. 5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{x}_{i+1} - \bar{x}_i}{\Delta} &= \frac{\Phi_i - I}{\Delta} \hat{x}_i + \\ &+ \frac{\Gamma_i}{\Delta} \bar{w}_i + P_{i+1} H_{i+1}^T (R_{i+1} \Delta)^{-1} (z_{i+1} - H_{i+1} \bar{x}_{i+1}), \end{aligned} \quad (\text{Б. 6})$$

$$M_i - P_i = M_i H_i^T (R_i \Delta + H_i M_i H_i^T \Delta)^{-1} H_i M_i \Delta, \quad (\text{Б. 7})$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta} &= \Delta \frac{\Phi_i - I}{\Delta} P_i \frac{\Phi_i^T - I}{\Delta} + \frac{\Phi_i - I}{\Delta} P_i + P_i \frac{\Phi_i^T - I}{\Delta} + \\ &+ \frac{\Gamma_i}{\Delta} (Q_i \Delta) \frac{\Gamma_i^T}{\Delta} - M_{i+1} H_{i+1}^T (R_{i+1} \Delta + \\ &+ H_{i+1} M_{i+1} H_{i+1}^T \Delta)^{-1} H_{i+1} M_{i+1}, \end{aligned} \quad (\text{Б. 8})$$

При $\Delta \rightarrow \infty$ имеем

$$R_i \Delta \rightarrow R(t), \quad (\text{Б. 9})$$

$$Q_i \Delta \rightarrow Q(t), \quad (\text{Б. 10})$$

тогда из уравнений (Б.5) и (Б.7) при $\Delta \rightarrow \infty$ получим

$$\hat{x}_i \rightarrow \bar{x}_i \rightarrow \hat{x}(t), \quad (\text{Б. 11})$$

$$P_i \rightarrow M_i \rightarrow P(t). \quad (\text{Б. 12})$$

От уравнений (Б.6) и (Б.8) при $\Delta \rightarrow 0$ с учетом (Б.9) и (Б.10) приходим к уравнениям

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + G\bar{w} + PH^T R^{-1}(z - H\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0; \quad (\text{Б. 13})$$

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQ^T - PH^T R^{-1}HP, \quad P(0) = P_0. \quad (\text{Б. 14})$$

Уравнения (Б.13) и (Б.14) представляют собой уравнения непрерывного фильтра, полученные Калманом и Бьюси и опубликованные в журнале «Труды Американского общества инженеров-механиков» (ASME) в 1961 г. [124]. Следует отметить, что уравнения (Б.13) и (Б.14) имеют те же преимущества a и b , которыми обладает линейный фильтр Калмана, созданный для оценки состояния линейного многошагового процесса, и описанный в ПРИЛОЖЕНИИ А.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Взаимное соответствие между системой измерений и уравнением Риккати (примеры)

Рассмотрим скалярную систему измерений

$$\dot{x} = ax + w, \quad (\text{B.1})$$

$$z = x + v, \quad (\text{B.2})$$

где

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w(t')] = q\delta(t - t'),$$

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v(t)v(t')] = r\delta(t - t'),$$

$$E[x(0)] = 0, \quad E[x^2(0)] = p_0,$$

а параметры a , q , r , p_0 являются постоянными.

В этом случае уравнение для дисперсии (Б.14), запишется так

$$\dot{p} = -2ap + q - (1/r)p^2, \quad p(0) = p_0 \quad (\text{B.3})$$

Выражение (B.3) является скалярным уравнением Риккати; его решение имеет вид

$$p(t) = p_1 + \frac{p_1 + p_2}{[(p_0 + p_2)/(p_0 - p_1)]e^{2\beta t} - 1}, \quad (\text{B.3a})$$

где

$$\beta = \sqrt{a^2 + (q/r)}, \quad p_1 = r(\beta - a), \quad p_2 = r(\beta + a).$$

Из выражения (B.3a) следует, что при $t \rightarrow \infty$ $p(t) \rightarrow p_1$, т.е. $p(t)$ стремится к постоянной величине.

Уравнение Риккати (B.3) может иметь различные разновидности; так оно может встретиться в виде

$$\dot{p} = 2ap + q + (1/r)p^2.$$

В этом случае коэффициент a отрицателен, т.е. $a < 0$, а белый шум v является мнимым белым шумом, т.е. $v = jv^*$; дисперсия мнимого белого шума является отрицательной величиной:

$E[v(t)v(t')] = -r\delta(t - t')$, где $j = \sqrt{-1}$, а v^* – обычный, т.е. немнимый белый шум.

Если $a > 0$, а $v(t)$ – мнимый белый шум, то уравнение (В.3) запишется так

$$\dot{p} = -2ap + q + (1/r)p^2.$$

Если оба белые шумы w и v являются мнимыми белыми шумами, т.е. имеем

$$E[w(t)w(t')] = -q\delta(t - t'),$$

(где $w = jw^*$, $j = \sqrt{-1}$, w^* – немнимый белый шум), тогда уравнение Риккати (В.3) запишется в виде

$$\dot{p} = -2ap - q + (1/r)p^2.$$

Возможны и другие разновидности записи уравнения Риккати (В.3).

Таким образом, любому уравнению Риккати (В.3) соответствует некоторая система измерений (В.1), (В.2); уравнение Риккати представляет собой выражение, которое удовлетворяет дисперсии этой системы. Следовательно, решение уравнения Риккати позволяет определить дисперсию системы измерения. В последствии, найденная дисперсия может быть использована при определении энтропии системы измерений. Как известно, условие минимальности энтропии является главным показателем степени упорядоченности системы.

Рассмотрим теперь линейный процесс второго порядка с одним измерением:

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega^2x = \omega^2w, \tag{В.4}$$

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w(t')] = q\delta(t - t').$$

Если ввести обозначения $x = x_1, \dot{x}_1 = x_2$, то уравнение (В.4) запишется в матричной форме

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{vmatrix} w(t). \tag{В.5}$$

Предполагается, что случайные начальные условия таковы

$$E[x_1(0)] = E[x_2(0)] = 0, \quad (\text{B. 6})$$

$$E \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_2 x_1 & x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(0) & p_{12}(0) \\ p_{21}(0) & p_{22}(0) \end{bmatrix} \triangleq \Delta P(0). \quad (\text{B. 7})$$

Производится непрерывное измерение переменной x_2 , соответствующей скорости процесса; это измерение содержит ошибки, которые образует другой (независимый от $w(t)$) процесс белого шума $v(t)$

$$z(t) = x_2(t) + v(t), \quad (\text{B. 8})$$

$$E[v(t)] = 0, \quad E[v(t)v(t')] = r\delta(t - t').$$

Матричному уравнению (Б.14) соответствуют два уравнения для дисперсий и одно уравнение для смешанного момента второго порядка

$$\dot{p}_{11} = 2p_{12} - \frac{1}{r}p_{12}^2, \quad p_{11}(0) \text{ задано}, \quad (\text{B. 9})$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_{12} &= p_{22} - \omega^2 p_{11} - 2\xi\omega p_{12} - \\ &- \frac{1}{r}p_{12}p_{22}, \quad p_{12}(0) \text{ задано}, \end{aligned} \quad (\text{B. 10})$$

$$\dot{p}_{22} = -2\omega^2 p_{12} - 4\xi\omega p_{22} - \frac{1}{r}p_{22}^2 + \omega^4 q, \quad p_{22}(0) \text{ задано} \quad (\text{B. 11})$$

Уравнению (Б.14) соответствуют следующие значения матриц уравнения (В.5):

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = q, \quad R = r,$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix}.$$

Получить решение системы уравнений Риккати (В.9) – (В.11) в замкнутой форме достаточно сложно. Однако довольно просто получается решение, соответствующее установившемуся состоянию; полагая $\dot{p}_{11} = \dot{p}_{12} = \dot{p}_{22} = 0$, находим, что при $\omega t \rightarrow \infty$

$$p_{12}(t) \rightarrow 0, \quad (\text{B. 12})$$

$$p_{11}(t) \rightarrow \frac{2\xi r}{\omega} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\xi^2} \cdot \frac{q}{r}} - 1 \right), \quad (\text{B.13})$$

$$p_{22}(t) \rightarrow 2\xi\omega r \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4\xi^2} \cdot \frac{q}{r}} - 1 \right). \quad (\text{B.14})$$

Следовательно, в установившемся состоянии смешанный момент второго порядка равен нулю, т.е. $p_{12}(\infty) = 0$.

Таким образом, решение системы алгебраических уравнений вместо системы дифференциальных уравнений позволяет существенно упростить нахождение условной дисперсии системы измерений.

Согласно (Б.13) оптимальный фильтр примет вид

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + [p_{12}(t)/r][z(t) - \hat{x}_2], \quad \hat{x}_1(0) = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= -\omega^2 \hat{x}_1 - 2\xi\omega \hat{x}_2 + \\ &+ [p_{22}(t)/r][z(t) - \hat{x}_2], \quad \hat{x}_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Модель нелинейной системы измерений и соответствующее ей уравнение апостериорной плотности

Модель нелинейного объекта измерений совместно с нелинейным каналом измерений описывается следующими уравнениями

$$\dot{x}(t) = f[x(t), t] + G(t)\xi(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (\Gamma.1)$$

$$\dot{y}(t) \equiv z(t) = h[x(t), t] + \zeta(t), \quad t \geq t_0, \quad (\Gamma.2)$$

где x – вектор состояния объекта измерений; x_0 – вектор состояния в момент времени $t = t_0$; функции f , G и h являются функциями времени и не содержат элементов памяти; $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ некоординированные между собой случайные процессы типа белого гауссова шума, имеющие соответственно корреляционные матрицы $Q(t-t')$ и $R(t-t')$. Блок-схема системы измерений (Г.1) и (Г.2) показана на Рис. Г.1.

Из Рис. Г.1 видно, что система измерений состоит из двух частей: объекта измерений и канала измерений. Уравнение (Г.1) описывает объект измерений, а уравнение (Г.2) описывает канал измерений.

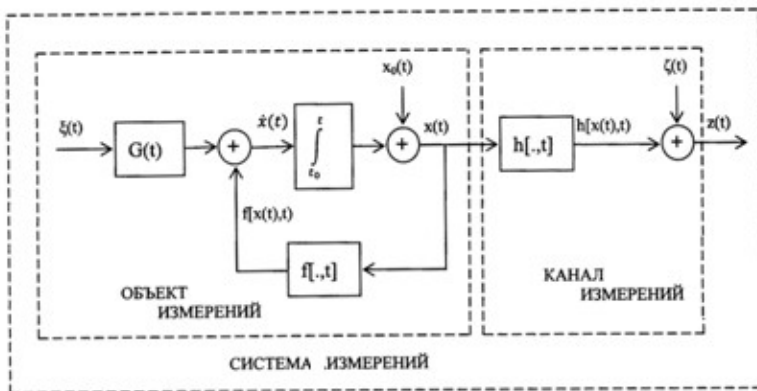


Рис. Г.1

Понятие состояния объекта тесно связано с понятием марковского процесса вследствие факта зависимости обоих от предыстории. Текущее значение состояния получается без участия элементов памяти; Это условие было оговорено выше. Аналогичные соображения справедливы для уравнения канала измерений.

При выводе уравнения апостериорной плотности [85] используются следующие два свойства статистических характеристик приращений измеряемых сигналов $dy = y(t + dt) - y(t)$.

Первое свойство заключается в том, что если состояние системы измерений x в момент времени t известно, то dy имеет нормальное (гауссово) распределение

$$p(dy|x, t) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{2dt} [dy - h(x, t)dt]^T R^{-1} [dy - h(x, t)dt] \right\}. \quad (\Gamma. 2)$$

Второе свойство заключается в том, что для членов порядка dt имеет место выражение

$$E(dydy^T) = Rdt + 0(dt), \quad (\Gamma. 4)$$

где $0(dt)/dt \rightarrow 0$, когда $dt \rightarrow 0$.

Считается также, что все моменты высшего порядка от элементов $(dydy^T)$ имеют порядок $0(dt)$. Это означает, что выражение $dydy^T/dt$ существенно детерминировано и равно R , когда $dt \rightarrow 0$. Уравнение апостериорной плотности имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t|z) &= Lp(x, t|z) + p(x, t|z) \times \\ &\times [h(x, t) - Eh(x, t)]^T R^{-1} [z(t) - Eh(x, t)], \end{aligned} \quad (\Gamma. 5)$$

где E означает оператор математического ожидания относительно условной плотности $p(x, t|z)$, а L является оператором уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Уравнения оценки состояния и приближенной ковариационной матрицы

Уравнение приближенной оценки по минимуму условной среднеквадратической ошибки \widehat{x}^* дается уравнением

$$\dot{\widehat{x}}^*(t) = f[\widehat{x}^*(t), t] + P^*(t)J[h(\widehat{x}^*, t)]R^{-1}\{z(t) - h[\widehat{x}^*, t]\} \quad (\text{Д.1})$$

$$\widehat{x}^*(t_0) = \widehat{x}_0,$$

где $J[h(\widehat{x}^*, t)]$ – матрица Якоби $m \times m$, элементом которой является $\partial h_j[(\widehat{x}^*, t)]/\partial \widehat{x}_i^*$ (i – номер строки, j – номер столбца), а $P^*(t)$ – симметричная приближенная дисперсионная матрица (размера $m \times m$) ошибок, которая задана уравнением

$$\begin{aligned} \dot{P}^*(t) = & J^T[f(\widehat{x}^*, t)]P^*(t) + P^*(t)J[f(\widehat{x}^*, t)] + G(t)QG^T(t) + \\ & + P^*(t)J\{J[h(\widehat{x}^*, t)]R^{-1}[z(t) - h(\widehat{x}^*, t)]\}P^*(t) \quad (\text{Д.2}) \\ P^*(t_0) = & P_0. \end{aligned}$$

Уравнение (Д.1) называется *уравнением оценки* вектора состояния измеряемого процесса, а уравнение (Д.2) называется *уравнением условной дисперсии*. Уравнение оценки и уравнение дисперсии связаны между собой и оба зависят от наблюдаемого процесса $z(t)$.

Следует отметить, что уравнения (Д.1) и (Д.2) получаются из уравнения апостериорной плотности (Г.5) путем составления соответствующих моментных функций. Заметим, что уравнения Калмана и Бьюси (Б.13) и (Б.14) также могут быть получены использованием уравнения апостериорной плотности (Г.5). Действительно, если в уравнениях (Д.1) и (Д.2) функции f и h линейны т.е. имеем систему измерений

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)\xi(t),$$

$$z(t) = H(t)x(t) + \zeta(t),$$

то x и z являются векторными гауссовскими процессами. В этом частном случае точные и приближенные оценки совпадают и уравнения (Д.1) и (Д.2) принимают вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + P(t)H^T(t)R^{-1}[z(t) - H(t)\hat{x}(t)], \quad (\text{Д. 3})$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & F(t)P(t) + P(t)F^T + G(t)QG^T(t) - \\ & - P(t)H^T(t)R^{-1}H(t)P(t). \end{aligned} \quad (\text{Д. 4})$$

Калман и Бьюси сосредоточили свое внимание на гауссовских и марковских процессах и вывели дифференциальные уравнения оценки (Б.13) и (Б.14) без использования уравнения апостериорной плотности (Г.5).

В том случае, если уравнение объекта измерений линейно, а канал измерений нелинеен, т.е. имеем уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)\xi(t), \\ z(t) &= h[x(t), t] + \zeta(t), \end{aligned}$$

то оцениваемый векторный процесс x будет гауссовым процессом. В данном случае уравнения (Д.1) и (Д.2) принимают вид

$$\dot{\widehat{x}^*}(t) = F(t)\widehat{x}^*(t) + P^*(t)J[h(\widehat{x}^*, t)]R^{-1}\{z(t) - h(\widehat{x}^*, t)\}, \quad (\text{Д. 5})$$

$$\begin{aligned} \dot{P}^*(t) = & F(t)P^*(t) + P^*(t)F^T(t) + G(t)QG^T(t) + \\ & + P^*(t)J\{J[h(\widehat{x}^*, t)]R^{-1}[z(t) - h(\widehat{x}^*, t)]\}P^*(t). \end{aligned} \quad (\text{Д. 6})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Связь энтропий равномерного и нормального распределений

Если случайная величина η равномерно распределена на интервале $(0,1)$, то соответствующая функция плотности вероятности будет иметь вид

$$P_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases} \quad (E.1)$$

Если независимые случайные величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ равномерно распределены на интервале $(0,1)$, то сумма $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$ ограничена интервалом $(0, n)$. Поскольку $P_n(x)$ обозначает плотность вероятности для $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$, то функция $P_n(x)$ равна нулю вне $(0, n)$. Согласно рекуррентному соотношению

$$P_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(x-t) P_n(t) dt = \int_{x-1}^x P_n(t) dt \quad (E.2)$$

могут быть вычислены последующие функции плотности $P_2(x), P_3(x), \dots, P_n(x)$ [74]:

$$P_2(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x < 1, \\ x - 2(x-1) & \text{при } 1 < x < 2, \end{cases} \quad (E.3)$$

$$P_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{при } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}[x^2 - 3(x-1)^2] & \text{при } 1 < x < 2, \\ \frac{1}{2}[x^2 - 3(x-1)^2 + 3(x-2)^2] & \text{при } 2 < x < 3. \end{cases} \quad (E.4)$$

Метод математической индукции позволяет записать выражение для функции $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \times \\ \times \left[x^{n-1} - \binom{n}{1} (x-1)^{n-1} + \binom{n}{2} (x-2)^{n-1} - \dots \right], \quad (E.5)$$

где $0 < x < n$, а суммирование продолжается до тех пор, пока аргументы $x, x-1, x-2, \dots$ остаются положительными.

Среднее значение m и стандартное отклонение σ суммы $\eta_1 + \dots + \eta_n$ равны соответственно $n/2$ и $\sqrt{n/12}$; плотность вероятности нормированной суммы есть

$$\sqrt{n/12} P_n(n/2 + \sqrt{n/12}). \quad (E.6)$$

Для плотности вероятности (E.6) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n/12} P_n(n/2 + \sqrt{n/12})] = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (E.7)$$

Выражение (E.7) означает, что неограниченное возрастание плотности вероятности суммы равномерно распределенных случайных величин имеет своим пределом функцию плотности нормального распределения. Для нормально распределенной случайной величины между энтропией и дисперсией имеет место соотношение

$$H_n(x) = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2(x)}. \quad (E.8)$$

Если случайная величина x распределена равномерно на интервале (a, b) , то ее энтропия выражается формулой

$$H_u(x) = \ln(b-a) = \ln \sqrt{12 \sigma^2(x)}. \quad (E.9)$$

Важным свойством нормального и равномерного распределений является то, что они обладают *максимальной энтропией* в определенных классах распределений. Нормально распределенные случайные величины имеют *наибольшую энтропию* среди непрерывных случайных величин имеющих одну и ту же дисперсию. Равномерно распределенные случайные величины обладают *наибольшей энтропией* среди всех случайных вели-

чин, распределенных в ограниченной области.

На основании вышесказанного имеет место следующая

Теорема. Для нормально распределенной случайной величины, имеющей энтропию (E.8) и равномерно распределенной случайной величины, имеющей энтропию (E.9), имеет место соотношение

$$\ln \sqrt{12 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma^2(x_i)} = \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2(x)}. \quad (E.10)$$

Доказательство.

Выражение (E.10) следует из формулы для дисперсии

$$\sigma^2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sigma^2(x_1) + \dots + \sigma^2(x_n),$$

а также из формул (E.7) – (E.9).

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Упрощение систем модельных уравнений

Редукция модельных уравнений заключается в уменьшении числа уравнений и, следовательно, количества параметров, определяющих функционирование системы.

Даже сравнительно простые биологические, химические, биохимические и другие процессы состоят из многих стадий и содержат большое количество промежуточных веществ. Математическая модель, буквально соответствующая этим процессам, обычно содержит десятки переменных и, следовательно, столько же уравнений. Однако, большинство удачных и содержательных моделей состоят из нескольких (двух-трех) нелинейных уравнений. Целью настоящего приложения является показ строгого математического обоснования редукции исходной математической модели процесса к адекватно описывающей модели этого процесса.

В том случае, если моделируемый процесс рассматривают при постоянных внешних воздействиях, то реальная система автономна и описывается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{Ж. 1})$$

где функция F_i явно не зависит от времени.

Пусть нам удалось после ряда преобразований и выбора соответствующих масштабов представить систему (Ж.1) в виде

$$\varepsilon^2 \frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, l; \quad (\text{Ж. 2a})$$

$$\varepsilon \frac{dx_j}{dt} = F_j(x_1, \dots, x_n), \quad j = l + 1, \dots, l + m; \quad (\text{Ж. 2б})$$

$$\frac{dx_k}{dt} = F_k(x_1, \dots, x_n), \quad k = l + m + 1, \dots, n, \quad (\text{Ж. 2в})$$

т.е. расположить ее по степеням малого параметра ε при производной. Коэффициенты ε и ε^2 фактически определяют скорости изменения переменной x .

Введем обозначения $T_1 = \varepsilon^2, T_2 = \varepsilon, T_3 = 1$. Тогда систему (Ж.2) можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{T_1} F_i, \quad \frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{T_2} F_j, \quad \frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{T_3} F_k.$$

В том случае, если нас интересует поведение всех переменных как на малых отрезках времени, порядка ε^2 , так и на временах порядка единицы, то мы должны исследовать полную систему (Ж.2). Если же нас интересуют явления происходящие в системе на средних временах (порядка ε), то уравнения (Ж.2а) с постоянной времени $T_1 = \varepsilon^2$ будут описывать очень быстрые процессы, а уравнения (Ж.2б), наоборот, – очень медленные по сравнению с временем T_2 процессы. Это означает, что за время T_2 начальные значения переменных x_k не успевают заметно измениться, т.е. в оставшихся уравнениях эти медленные переменные можно заменить постоянными (начальными) значениями. Эта процедура позволит снизить порядок системы (Ж.2) на $n-(1+m)$. Оставшуюся систему $1 + m$ уравнений можно редуцировать дальше. Поскольку T_1 – времена установления переменных x_i – много меньше характерного времени T_2 системы (Ж.2б), то эти переменные успевают достигнуть своих стационарных значений раньше, чем переменные x_j успеют заметно измениться. Заменяя теперь в уравнениях (Ж.2б) переменные x_i на их стационарные значения, мы снова понизим порядок системы (Ж.2) и оставим лишь m дифференциальных уравнений, характерные времена которых одного порядка с T_2 .

Запишем систему N уравнений, часть из которых содержит малый параметр ε перед производной

$$\varepsilon \frac{dx_p}{dt} = F_p(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N), \quad p = 1, 2, \dots, r; \quad (\text{Ж.3а})$$

$$\frac{dx_q}{dt} = F_q(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N), \quad q = r + 1, \dots, N. \quad (\text{Ж.3б})$$

Систему (Ж.3а) будем называть присоединенной, а систему (Ж.3б) – вырожденной. Причины, благодаря которым «более сложную систему» становится возможным заменить на «более простую систему», даются следующей теоремой А. Н. Тихонова [125].

Теорема

Решение полной системы (Ж.3) стремится к решению вырожденной при $\varepsilon \rightarrow 0$, если выполняются следующие условия:

а) решение системы

$$\bar{x}_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n),$$

... ..

$$\bar{x}_r = \varphi_r(x_1, \dots, x_N).$$

является изолированным корнем алгебраической системы

$$F_p(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_N) = 0, \quad p = 1, \dots, r, \quad (\text{Ж.4})$$

изолированный означает, что в ε – окрестности нет других корней.

б) решение x_1, x_2, \dots, x_r – устойчивая изолированная особая точка присоединенной системы (Ж.3а) при всех значениях переменных x_{r+1}, \dots, x_N ;

в) начальные условия $x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0$ попадают в область влияния устойчивой особой точки присоединенной системы;

г) решения полной и присоединенной систем единственны, а правые части непрерывны.

Согласно этой теореме, если выполняется условие в), то результат не зависит от начальных условий для переменных присоединенной системы. Число начальных условий вырожденной системы меньше, чем полной: все начальные значения быст-

рых переменных оказываются лишними и никак не фигурируют в выраженной системе.

Следует отметить, что вышеописанным методом редукции давно пользуются химики; они называют его *методом стационарных концентраций*. Ученые в области самоорганизации [4] ввели *принцип подчинения* как основной математический аппарат, позволяющий свести большое число переменных модельной системы к решению небольшого числа переменных, называемых *параметрами порядка*. В математической литературе процедуру редукции с недавних пор стали называть *теорией центральных многообразий*[7]. В проблемах биофизики для осуществления редукции используют саму теорему Тихонова [125]. Вопрос о том, как в реальной системе определить характерные времена пока остается открытым. Эта проблема решается в зависимости от конкретной системы модельных уравнений.

Рассмотрим примеры редукции на основе использования теоремы Тихонова.

Пример Ж.1.

Задана система из двух уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad (\text{Ж. 5})$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = G(x, y), \quad (\text{Ж. 6})$$

где $F(x, y)$ и $G(x, y)$ – нелинейные функции, а ε – малый параметр.

Будем считать, что для $F(x, y)$ и $G(x, y)$ условия *a) – z)* выполнены. В нашем случае присоединенной системой будет уравнение (Ж.6). Его стационарное состояние определяется уравнением

$$G(x, y) = 0. \quad (\text{Ж. 7})$$

Найдем решение уравнения (Ж.7) относительно переменной y :

$$y = \tilde{y}(x). \quad (\text{Ж. 8})$$

Подставляя (Ж.8) в уравнение (Ж.5) получим вырожденную систему

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \tilde{y}(x)). \quad (\text{Ж. 9})$$

Уравнение (Ж.9) описывает одномерное медленное движение изображающей точки вдоль интегральной кривой $G=0$. Быстрые движения вдоль вертикальной оси вырожденная система вообще не описывает; поэтому начальные условия для быстрой переменной y в вырожденной системе не фигурируют. Из этого решения видно, в какой мере и в каких интервалах аргумента t решение вырожденной системы близко к решению полной системы.

Пример Ж.2.

Задана система из трех уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (\text{Ж. 10})$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \delta(1 - z)y, \quad (\text{Ж. 11})$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = -z + x^2. \quad (\text{Ж. 12})$$

При $\varepsilon = 0$ из уравнений (Ж.10) – (Ж.12) получаем хорошо известную систему уравнений Ван дер Поля, которая описывает автоколебания переменной x .

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$, но $\varepsilon \ll 1$ и $\varepsilon \ll \delta$. Это значит, что время установления переменной z в системе уравнений (Ж.10) – (Ж.12) много меньше всех прочих характерных времен системы. В трехмерном пространстве присоединенное уравнение запишется так

$$\frac{dz}{dt} = -z + x^2. \quad (\text{Ж. 13})$$

Стационарным решением уравнения (Ж.13) является пара-

бола $z=x^2$. В трехмерном пространстве предельный цикл системы (Ж.10) – (Ж.12) будет расположен на параболической поверхности $z=x^2$. Проекция пространственного предельного цикла на плоскости xu приближенно будет совпадать с предельным циклом системы при $\varepsilon = 0$.

Из этого примера следует, что теорема Тихонова позволяет вместо исследования движения изображающей точки в пространстве провести исследование на плоскости xu .

Литература

1. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур. В сборнике: Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988.
2. Чириков Б.В. Предисловие к книге Лихтенберга А. и Либермана М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
3. Прангишвили И.В., Пащенко Ф.Ф., Бусыгин Б.П. Системные законы и закономерности в электродинамике, природе и обществе. М.: Наука, 2001.
4. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
5. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.
6. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979.
7. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: Мир, 1990.
8. Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика – теория самоорганизации. В сборнике: Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. М.: Наука, 1988.
9. Винер Н. Кибернетика или управление и связь в животном и машине. 2-ое издание. М.: Советское радио, 1968.
10. Винер Н., Розенблот А. Кибернетический сборник, №3. М.: ИЛ, 1961.
11. Техническая кибернетика, Т.1. Под редакцией В.В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967.
12. Чижевский А.Л. Земное эхо солнечных бурь. М.: Мысль, 1973.
13. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.: АН СССР, 1950.
14. Колмогоров А.Н. М.: ДАН СССР, 119, 861, 1958.

15. Синай Я.Г. М.: ДАН СССР, 158, 1261, 1963.
16. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
17. Шенон К.Е. Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.
18. Мдзинаришвили В.В. Классификация организованных, организующихся и самоорганизующихся систем. Труды международной конференции посвященной 90-летию ГТУ, Тбилиси, 2012.
19. Волькенштейн М.В. Молекулярная биофизика. М.: Наука, 1975.
20. Saridis G.N. Analytical formulation of the principle of increasing precision with decreasing intelligence for intelligence machines.//Autonatica, 1989, v.25, №4.
21. Saridis G.N., Valavanis K.P. Analytical design of intelligent machines.//Autonatica, 1988, v.24, №2, p.123-133.
22. Conant R.C. Laws of information which govern systems//IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics. 1976. v. SMC – 6. №4, p.240-255.
23. Бочаров М.К. Наука управления. М.: Паритет, 1996.
24. Юзвешин И.И. Информациология. М.: Радиоисвязь. 1996.
25. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Фитматгиз, 1962.
26. Брайсон А., Хо-ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
27. Острем К.Дж. Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.
28. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Фитматгиз, 1960.
29. Кастлер Г. Возникновение биологической организации. М.: Мир, 1967.

30. Теория информации в биологии. Сборник под редакцией Г. Кастлера. М.: ИЛ, 1960.
31. Голдман С. Теория информации. М.: ИЛ, 1957.
32. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. М.: Мир, 1973.
33. Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973.
34. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. М.: Советское радио, 1972.
35. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
36. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990.
37. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
38. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961.
39. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.
40. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955.
41. Приспосабливающиеся автоматические системы. Под редакцией Э. Мишкина и Л. Брауна. М.: ИЛ, 1963.
42. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.
43. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
44. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987.
45. Цыганов В.В., Бухарин с.Н. Информационные войны в бизнесе и политике. М.: Академический Проект, 2007.

46. Ван Кампмен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990.
47. Мдзинаришвили В.В. Дуализм между детерминированными и стохастическими дифференциальными уравнениями. Труды международной конференции посвященной 90-летию ГТУ, Тбилиси, 2012.
48. Мдзинаришвили В.В., Самхарадзе З.П. О совместном существовании антагонистических популяций. Труды международной конференции «Образование и инновация». Гори, Горийский Университет, 2012.
49. Хорстхемке В., Лефевр Р. Переходы индуцированные шумом. М.: Мир, 1987.
50. Мдзинаришвили В.В. Новый подход к образованию солитона и оптимизационные свойства солитона. Труды международной конференции «Образование и инновация». Гори, Горийский Университет, 2012.
51. Gierer A., Meinhardt W. Kybernetik, 12, 1972, p.30.
52. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. М.: Мир, 1999.
53. Фриман У.Дж. Физиология восприятия. В мире науки, 1991, №4.
54. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
55. Марсден Дж. Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1976.
56. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
57. Higgins J.J. In. Eng. Chem. 59, 19, 1967.
58. Mdzinarishvili V.V. New Functional Methods and Objects in the Theory of Approximation, Modeling, and Optimal Control. Tbilisi, Metsniereba, 2002.

59. Бак. П., Кан Чен. Самоорганизованная критичность. В Мире науки, №3, 1991.
60. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
61. Hayes N.D. Roots of the transcendental equation associated with a certain difference – differential equation. J. Lond. Math. Soc. 1950, 25, p. 226-232.
62. Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Экономическая кибернетика. М.: Экономика, 1982.
63. Белоусов Б.П. Колебательная реакция и ее механизм. Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 год. М.: Медгиз, 1959.
64. Field R.J., Körös E., Noyes R.M. Oscillation in chemical systems. II Thorough analysis of temporal oscillation in bromate – cerium – malonic acid system. J. Am. Chem. Soc. 1972, 94, p. 8649-8664.
65. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М.: Мир, 1983.
66. Глаубер Р.Дж. В сборнике «Квантовая оптика и квантовая радиофизика». М.: Мир, 1966.
67. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970.
68. Fleck J.A. Phys. Rev. 149, 309, 1966.
69. Scully M.O., Lamb W.E. Phys. Rev. Letters, 16, 853, 1966.
70. Weidlich W., Risken H., Haken H. Zs. Phys., 201, 396, 1967.
71. Lax M. In book: Dynamical Processes in Solid State Optics. Pt. I (eds. R. Cubo and H. Kamimura), W.A. Benjamin, New York, 1967, p. 195.
72. Лоренц Э. Детерминированное неперiodическое течение // Странные аттракторы/. Под редакцией Я.Г.Синая и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.

73. Деч. Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971.
74. Mdzinarishvili V.V. Dynamic Systems. İstanbul Analitik Yayınevi, 2010.
75. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
76. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории Марковских процессов и их приложения. М.: Наука, 1969.
77. Kendall D.G. On the Role of Variable Generation Time in the Development of a Stochastic Birth Process. *Biometrika*, vol. 35, pp. 316-330, 1948.
78. Waugh W.A. An Age-dependet Birth-and-Death Process. *Biometrika*, vol. 45, p. 241-249, 1958.
79. Мдзинаришвили В.В. Самоорганизация в дискретных Марковских системах. Труды международной конференции «Новые тренды в образовании: исследование и развитие». Гори, Горийский Университет, 2011.
80. Корн Г. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. М.: Мир, 1968.
81. Вайнштейн Б.К., Фридкин В.М., Инденбом В.Л. Современная кристаллография. Структура кристаллов, Т.2. М.: Наука, 1979.
82. Gregory P.C. (Editor) Proc. of the Self-adaptive Flight Control Systems Symposium, WADC Tech. Rep. 59-49, pp. 123-180, ASTIA Document AD 209389, Wright – Patterson Air Force Base, Ohio, 1959.
83. Theory and Application of Optimum Limited Information Adaptive Flight Control Techniques, Dodco, Inc., WADC Tech. Rep., 59-468. 1959.

84. Kalman P.E., BucyR. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory – ASME J. Basis Eng., vol. 83, pp. 95-108, Mar., 1961.
85. Снайдер Д. Метод уравнений состояния для непрерывной оценки в применении к теории связи. М.: Энергия, 1973.
86. Culver Calvin O. Optimal estimation for nonlinear systems. J. AIAA Paper, 1969, №852, 10, pp., ill.
87. Стратонович Р.Л. Условные процессы Маркова. Теория вероятностей и ее приложения. 1960, Т.5, вып.2.
88. Kuchner H.J. On the Dynamic al Equations of Conditional Probability Density Functions, with Applications to Optimal Stochastic Control Theory – J. MathAnal. and Appl. Apr. 1964, pp. 332-344.
89. Yule G.U. On the method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer’s sunspot numbers. Phil. Trans., A, 226, 267, 1927.
90. Бартлетт М.С. В ведение в теорию случайных процессов. М.: ИЛ, 1958.
91. Нерсесов Э.А. Основные законы атомной и ядерной физики. М.: Высшая школа. 1988.
92. Аврех Г.Л., Федоренко Н.П., Щукин Е.П. Затраты и результаты: беседы об экономике. М.: Наука, 1990.
93. Nelson R.R., Winter S.G. An Evolutionary Theory of Economic Change. Harward University Press. 1982, Cambridge, MA.
94. Хорафас Д.Н. Системы и моделирование. М.: Мир, 1967.
95. Аллен Р. Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963.
96. Cobb G.W., Douglas P.H. A theory of production. Amer. Econ. Rev., 1928, March, Suppl., pp. 139-165.
97. Лебедев В.В., Разжевайкин В.Н. Предисловие к книге Занга В-Б [52].

98. Мдзинаришвили В.В. Определение производственной функции Кобба–Дугласа с учетом статистических характеристик. Наука и жизнь №1(3), Тбилиси, 2011.
99. Борель Э.М., Дельтейль Р., Юрон Р. Вероятности, ошибки. М.: Статистика, 1972.
100. Мдзинаришвили В.В. Динамическая модель спрос-предложение. Наука и жизнь №1. Тбилиси, 2010.
101. Основы теории оптимального управления. Под редакцией Кротова. М.: Высшая школа. 1990.
102. Kuhn H. *Angew. Chemie*, 84, №18, 838 (1972).
103. Эйген М., Винклер Р. Игра жизни. М.: Наука, 1979.
104. Эйген М., Шустер П. Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. М.: Мир, 1982.
105. Моно Ж., Жакоб Ф. Общие выводы: Телеономические механизмы в процессах клеточного обмена, роста и дифференцировки. В сборнике: Регуляторные механизмы клетки. М.: Мир, 1964.
106. Моран П. Статистические процессы эволюционной теории. М.: Наука, 1973.
107. Scheraga H. In *Polyamino Acids, Polypeptides and Proteins*“, Editor Stahmann C.R., Univ. Wisconsin Press, 1962.
108. Уотсон Д. Двойная спираль. М.: Мир, 1960.
109. Франк – Каменецкий М.Д. Самая главная молекула. М.: Наука, 1988.
110. Мюллис К.Б. Необычная история о том как родилась полимеразная цепная реакция. В мире науки, №6, 1990.
111. Singh U.J. *Theor. Biol.* 15, 218, 1967.
112. Элиас Г.-Г. Мегамолекулы. Ленинград.: Химия, 1090.
113. Мдзинаришвили В.В. Дискретные поляроны и дискретные солитоны в полимерах. Труды международной конферен-

- ции «Современные вызовы просвещения». Гори, Горийский Университет, 2013.
114. Коркоран. Э. Вниз по шкале размерностей. В мире науки, №1, 1991.
 115. Мдзинаришвили В.В. Оптимизационные свойства дискретного пентарона. Труды международной конференции «Современные вызовы просвещения». Гори, Горийский Университет, 2013.
 116. Haken H. Analogy between higher unistabiliter an fluid and lasers//Phys letter.
 117. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.№1, v. 53A, 1975.
 118. Мдзинаришвили В.В. Некоторые аспекты образования странных аттракторов. Международная конференция «Новые направления в образовании и исследованиях», Гори, Горийский Университет, 2009.
 119. Rössler O.E. An Equation for Continuous Chaos//Phys. Lett. 1976, v. 57A, №5, pp. 397.
 120. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности. Под редакцией Х. Суинни и Дж. Голлаба. М.: Мир, 1984.
 121. Tyson J.J. On the apperance of chaos in the Belousov reaction. J. Math. Biol. 5, 351, 1978.
 122. Hopf E.A. Mathematical example displaying the features of turbulence. Comm. Pure Appl. Math. 1, 1948, pp. 303-322.
 123. Kalman R.E., Trans. ASME, 82D, p. 35 (1960).
 124. Kalman R.E., Bucy R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. - „ASME J. Basis Eng“, v. 83, pp. 95-108, Mar., 1961.
 125. Тихонов А.Н., Математический сборник 31, 575 (1952).

Оглавление

Введение	4
ГЛАВА 1. Физические, статистические и информа- ционные основы организующихся и самоорганизующихся систем	10
§1.1. Отсутствие выделения сферы предмета самоорганизации	10
§1.2. Физические и статистические предпосылки образования организующихся и самоорганизующихся систем	13
1.2.1. Физические предпосылки образования органи- зующихся и самоорганизующихся систем	13
1.2.2. Статистические предпосылки образования самоорганизующихся систем	14
§1.3. Информационная классификация и оптимизация самоорганизующихся и организующихся систем	19
1.3.1. Информационная классификация самоорга- низирующихся и организующихся систем	19
1.3.2. Оптимизация самоорганизующихся и организующихся систем	24
§1.4. Количество и ценность информации	36
1.4.1. Количество информации	36
1.4.2. Ценность информации	40
1.4.3. О некоторых аспектах теории информации для предбиологических систем	42
ГЛАВА 2. Существующий математический аппарат. Циклическое поведение самоорганизующихся систем на примере модели «хищник-жертва»	51

§2.1. Существующий математический аппарат.	
Модель «хищник-жертва»	51
ГЛАВА 3. Математические основы образования органи-	
зующихся и самоорганизующихся систем.	83
§3.1. Функция Лагранжа. Уравнения	
Гамильтона и Лиувилля	84
§3.2. Получение уравнения Эйлера – Лагранжа.	
Уравнение Якоби	87
§3.3. Уравнения Эйлера –Лагранжа для функционала,	
зависящего от параметра	94
§ 3.4. Уравнение Риккати. Получение многомерного	
уравнения Риккати. Примеры использования	
уравнения Риккати	98
3.4.1. Уравнение Риккати	98
3.4.2. Получение многомерного уравнения Риккати	98
3.4.3. Примеры использования уравнения Риккати	101
§3.5. Использование уравнения Риккати для нового	
подхода к получению солитона	119
§3.6. Цикличность солитонных функций	121
§3.7. Проблема обратимости и стохастическая	
природа необратимых процессов	132
ГЛАВА 4. Бифуркация	
§4.1. Мягкая и жесткая бифуркация Хопфа	140
§4.2. Бифуркация образования первичного	
жизненного цикла	146
§4.3. Бифуркация расщепления антагонистических	
уравнений	149
§4.4. Бифуркация системы уравнений, вызванная	
изменением скорости одной из переменной	152

§4.5. Бифуркация в линейных системах первого порядка с запаздыванием	153
ГЛАВА 5. Оптимизационные характеристики при образовании организующихся систем	
§5.1. Реакция Белоусова – Жаботинского (Б Ж)	161
5.1.1. Химические предпосылки образования реакции БЖ	161
5.1.2. Детерминированный хаос (странный аттрактор) и оптимизационные характеристики реакции Белоусова–Жаботинского	167
§5.2. Лазер	173
5.2.1. Физические, технические и математические характеристики лазера	173
5.2.2. Оптимизационные характеристики лазера	182
§5.3 Ячейка Бенара	185
5.3.1. Устройство и математические характеристики ячейки Бенара	186
5.3.2. Оптимизационные характеристики ячейки Бенара	190
ГЛАВА 6. Марковские модели организующихся и самоорганизующихся систем	
§6.1. Определение и классификация марковских процессов	196
§6.2. Цепи Маркова	201
§6.3. Марковский прогноз мест, занимаемых командами бейсбольной национальной лиги США, в турнирной таблице чемпионата. Косвенное суждение о самоорганизации	205
§6.4. Самоорганизация в спортивно-состязательных полях	216

§6.5. Дискретные по состоянию и непрерывные во времени марковские процессы	226
6.5.1. Ветвящиеся марковские процессы независящие от возраста	229
6.5.2. Ветвящиеся марковские процессы зависящие от возраста	232
§6.6 Марковские модели организующихся и самоорганизующихся ветвящихся процессов. Оптимизационные характеристики этих процессов	236
§6.7. Марковский процесс Гальтона – Ватсона. Самоорга- низация в этом процессе	242
6.7.1. Самоорганизация в процессе Гальтона – Ватсона	250
§6.8. Марковские последовательности	252
6.8.1. Предварительные соображения	254
6.8.2. Белый шум с непрерывным и дискретным временем	256
6.8.3. Блок-схема технической реализации устройства определения динамических характеристик (импульсной переходной функции) системы автоматического управления	260
6.8.4. Алгоритмическая реализация блока определения динамических характеристик системы управления (БОДХСУ)	264
§6.9. Непрерывный марковский процесс	269
6.9.1. Организующийся объект (каучук), находящийся под действием теплового поля	276
6.9.2. Организующаяся система упорядочения атомов бинарного сплава, находящегося под действием теплового поля	279

ГЛАВА 7. Самоорганизирующаяся рукотворная система, синтезированная на основе вариационных методов	284
ГЛАВА 8. Самоорганизующиеся и организующиеся модели на мегаскопическом уровне	293
§8.1. Самоорганизующаяся модель научного поиска	293
8.1.1. Описание объекта для которого поиск алгоритма оценки состояния эквивалентен процессу самоорганизации	296
8.1.2. Получение нелинейного фильтра	298
8.1.3. Самоорганизация процесса научного поиска на примере синтеза нелинейного фильтра третьего порядка	302
§8.2. Организующаяся и самоорганизующаяся модели влияния солнечной активности на заболеваемость населения Земли	306
ГЛАВА 9. Организующиеся процессы элементарных частиц на микроскопическом уровне	316
§9.1. Некоторые аспекты элементарных частиц	316
§9.2. Плотность функции Лагранжа (лагранжиан) газа Ферми – Дирака	322
§9.3. Оптимизационные характеристики плотности лагранжиана газа Ферми – Дирака	325
§9.4. Организующиеся процессы в элементарных частицах	327
ГЛАВА 10. Самоорганизующиеся процессы в экономике	331
§10.1. Общие вопросы экономических моделей	331

§10.2. Производственная функция Кобба – Дугласа (ПФКД) и ее свойства	339
§10.3. Самоорганизующаяся экономическая система: производство – предложение – выручка – производство	343
10.3.1. Математическая модель выпуска продукции, построенная с учетом статистических характеристик экономического объекта	344
10.3.2. Модель «спрос – предложение»	351
10.3.3. Определение магистрали экономики при использовании модели ПФКД	356
ГЛАВА 11. Организующиеся и самоорганизующиеся процессы в добиологических и биологических системах	
§11.1. Организующиеся процессы в белково-нуклеотидном комплексе	365
§11.2. Схематическая модель гиперцикла	371
§11.3. Связь «самоорганизации» макромолекул и гиперцикла с процессом рождения (размножения)	376
§11.4. Математическая модель первичного жизненного цикла	380
§11.5. Модель генетического триггера	383
11.5.1. Трудности, возникающие при использовании триггерных свойств в проблеме моделирования биологических процессов	389
11.5.2. Использование функции гиперболического тангенса при аппроксимации функции типа «насыщения»	391

§11.5.3. Аппроксимация функцией гиперболического тангенса в одной проблеме математической генетики	394
§11.6. Примеры использования солитонов в различных моделях биологии	397
11.6.1. Денатурация и ренатурация белков	397
11.6.2. Редупликация ДНК	400
§11.7. Дискретные поляроны, дискретные солитоны и дискретные пента-роны в полимерах и их оптимизационные свойства	406
11.7.1. Оптимизационные свойства дискретного полярона	406
11.7.2. Оптимизационные свойства дискретного солитона	408
11.7.3. Оптимизационные свойства дискретного пентарона	410
ГЛАВА 12. Детермированный хаос в расширенных самоорганизующихся и организующихся системах размерности «три» и «четыре»	
§12.1. Общая характеристика странных аттракторов	418
§12.2. Переход от грубой динамической системы к негрубой на примерах странных аттракторов Ресслера и Лоренца	421
§12.3. Условие, при выполнении которого модифицированные уравнения Ван дер Поля в пространстве размерности «три» генерируют детерминированный хаос	424
§12.4. Условие, при выполнении которого уравнения «орегонатора» генерируют детерминированный хаос	424

§12.5. Условие, при выполнении которого система уравнений Лэнгфорда является странным аттрактором	425
§12.6. Условия образования странного аттрактора в расширенной системе Вольтерра – Лотка	426
§12.7. Условия образования странного аттрактора в математической модели оптимальной периодической политики занятости	428
Заключение	431
Приложение А	437
Приложение Б	439
Приложение В	441
Приложение Г	445
Приложение Д	447
Приложение Е	449
Приложение Ж	452
Литература	458
Резюме	475

V. V. Mdzinarishvili

The new aspects of modern theory of Self-Organization and
Getting Organized Systems

Optimization manner of modelling Self-Organization and
Getting Organized Systems

Georgian Academy Press. Tbilisi, 2014

Readership: The scientists in the Self-Organization Systems, research works and also post-graduate students and teachers of Physics, Mathematic, Economic, Biology and other speciality.

The Book: Given new classification of the Self-Organization and Getting Organized Systems are based on the conception of physics, statistics, information and mathematics. Self-Organization and Getting Organized Systems optimization are implemented by means of Euler-Lagrange equation. This equation is solved by use of Riccati equation.

From the view of the position of new classification there are discussed the Belousov-Zhabotinski reaction, Laser and Benards cell as the Getting Organized Systems. According to the optimization position there is discussed the process of Getting Organized and Self-organization in Markovian Systems. There are shown the use of optimization method for the synthesis of handmade Self-Organization System. The research shows the existence of the Self-Organization process, optimization method for the elementary particle, development of the optimization method for the economic systems on the basis of Cobb-Douglas functions. There are received the optimization characteristics for the biological systems on the basis of “predator-prey” models. Denoted, that increasing the dimension of systems from “two” to “three” or “four” reduce the rough systems to strange attractor.

The author: Valentin V. Mdzinarishvili, DSc
The professor of Gori State Teaching University

Мдзинარიшвили Валентин Валентинович

**НОВЫЕ АСПЕКТЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ
САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ И
ОРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМ**

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ
САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ И ОРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Тбилиси

2014

Типография Национальной Академии Наук Грузии

пр. Руставели 52

მძინარიშვილი ვალენტინი ვალენტინის ძე

თვითორგანიზებადი და ორგანიზებადი
სისტემების თანამედროვე თეორიის
ახალი ასპექტები

თვითორგანიზებადი და ორგანიზებადი სისტემების
მოდელირების მიმართ ოპტიმიზაციური მიდგომა

თბილისი

2014

საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა
რუსთაველის გამზ. 52